

Universelle Algorithmen  
zur  
Portfolio-Optimierung

**Dissertation**

zur  
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)  
der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von  
Jens Lüssem  
aus  
Bensberg

Bonn 2003

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen  
Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Motivation . . . . .	1
1.2	Ziele der Arbeit . . . . .	4
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Portfolio-Optimierung</b>	<b>7</b>
2.1	Portfolio-Management-Prozess . . . . .	8
2.2	Konstruktion von Benchmarks . . . . .	10
2.3	Marktmodelle . . . . .	11
2.4	Strategien zur Portfolio-Optimierung . . . . .	13
2.4.1	Notationen . . . . .	14
2.4.2	Effiziente Portfolios . . . . .	16
2.4.3	Index-Modelle . . . . .	18
2.4.4	Capital Asset Pricing Modell (CAPM) . . . . .	19
2.4.5	Arbitrage Pricing Theorie (APT) . . . . .	21
2.4.6	Buy-and-hold Strategien . . . . .	22
2.4.7	Konstant rebalancierte Portfolios . . . . .	23
2.5	Risikobegriff . . . . .	24
2.5.1	Asymmetrische Risikomaße . . . . .	25
2.5.2	Verlustpotenzial . . . . .	25
2.5.3	Value-at-Risk . . . . .	26
2.6	Performance-Begriff . . . . .	27
2.6.1	Sharpe-Ratio . . . . .	28
2.6.2	Treynor-Ratio . . . . .	29
2.6.3	Jensen-Maß . . . . .	29
2.6.4	RAPM auf Basis des Value-at-Risk . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Online-Algorithmen</b>	<b>31</b>
3.1	Motivation . . . . .	31
3.2	Grundlagen und Notationen . . . . .	35
3.3	Entscheidungstheoretische Grundlagen . . . . .	37

3.3.1	Begriff der Unsicherheit . . . . .	37
3.3.2	Gütekriterien . . . . .	38
3.4	Gegnermodelle . . . . .	42
<b>4</b>	<b>Online-Portfolio-Optimierung</b>	<b>45</b>
4.1	Allgemeine Problemstellung . . . . .	45
4.2	Investition in eine risikobehaftete Anlage . . . . .	46
4.2.1	Unidirektionaler Handel . . . . .	47
4.2.2	Bidirektionaler Handel . . . . .	51
4.3	Investition in mehrere risikobehaftete Anlagen . . . . .	53
4.3.1	Threat-basierte Algorithmen für drei risikobehaftete Anlagen . . . . .	53
4.3.2	Threat-basierte Algorithmen für $m$ risikobehaftete Anlagen . . . . .	56
4.4	Universelle Algorithmen . . . . .	59
4.5	Universal Portfolios . . . . .	63
4.5.1	Kompetitive Analyse des Universal Portfolio . . . . .	66
4.5.2	Implementierung des Universal Portfolio . . . . .	70
4.6	Online-Lernalgorithmen . . . . .	79
4.6.1	Einführung . . . . .	79
4.6.2	Aggregierende Algorithmen zur Online-Portfolio-Optimierung . . . . .	82
4.6.3	Gradienten-basierte Ansätze . . . . .	84
4.7	Verfahren der stochastischen Optimierung . . . . .	93
4.8	Zusammenführung der Ansätze . . . . .	97
4.9	Kaskadenförmige Universal Portfolios . . . . .	103
4.9.1	Kaskadenförmige beste konstant rebalancierte Algorithmen für drei Anlagen . . . . .	104
4.9.2	Kaskadenförmige Universal Portfolios für drei Anlagen . . . . .	106
4.9.3	Praktische Beispielportfolios aus dem Dow Jones Index . . . . .	108
<b>5</b>	<b>Kosten der Portfolio-Strukturierung</b>	<b>111</b>
5.1	Einführung . . . . .	111
5.2	Integration von Zusatzinformationen . . . . .	112
5.3	Generierung von Zusatzinformationen . . . . .	115
5.3.1	Verfahren des Data Mining . . . . .	116
5.3.2	Generierung von Assoziationsregeln . . . . .	117
5.3.3	Verwendung von Assoziationsregeln als Generator für Zusatzinformationen . . . . .	122

5.4	Modellierung von Transaktionskosten . . . . .	125
5.4.1	Integration von Zusatzinformationen in bestehende Strategien . . . . .	126
5.4.2	Einsatz von Assoziationsregeln zur Vermeidung von Transaktionskosten . . . . .	130
5.5	Modellierung von Risikokosten . . . . .	135
5.5.1	Verwendung von Zusatzinformationen . . . . .	137
5.5.2	Adaptation der Zielfunktion . . . . .	137
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>141</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	141
6.2	Ausblick . . . . .	142
6.2.1	Verwendung anderer Gegnermodelle . . . . .	142
6.2.2	Integration weiterer Finanzinstrumente . . . . .	143

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Die Verwendung von *Online*-Algorithmen ist in den meisten Feldern der Finanzwissenschaft unerlässlich. So sind beispielsweise die zukünftigen Verläufe von Devisen- und Aktienkursen oder kompletter Portfolios nicht exakt vorhersagbar. Investoren können bei der Gestaltung ihrer Investitionsstrategien nur Informationen aus der Vergangenheit oder Gegenwart einbeziehen. Eine laufende Überprüfung oder Anpassung ihrer *Online*-Strategien ist die Folge.

Oft wird versucht, diesen Mangel an Wissen über die Zukunft durch statistische Prognosen über die Entwicklung relevanter Informationen auszugleichen.

Insbesondere bei der Bewertung derivativer Finanzinstrumente, deren Laufzeit in der Regel höchstens einige Monate beträgt, haben sich sowohl in der wissenschaftlichen Literatur als auch in der Praxis Verfahren durchgesetzt, die den modellrelevanten Parametern Wahrscheinlichkeitsverteilungen – meist wird eine (Log-) Normalverteilung angenommen – zugrunde legen [89, 93, 53, 106, 72]<sup>1</sup>.

Es lässt sich aber beobachten, dass sich die Finanzmärkte in den letzten Jahren nicht mehr in der gleichen Weise entwickelt haben wie in den vergangenen Dekaden.

---

<sup>1</sup>Allerdings ist bereits die Bewertung lang laufender Derivate in der Praxis mittels der üblichen Verfahren nur noch eingeschränkt möglich.

Diese Entwicklung ist u. a. gekennzeichnet durch folgendes Verhalten an Aktienmärkten<sup>2</sup>:

- sehr hohe Volatilität der Aktienmärkte<sup>3</sup>
- überdurchschnittliche Anzahl von *Jumps* der Renditen
- Häufigkeitsverteilung der Renditen, die weit von – der vielen Modellen zugrundeliegenden – Normalverteilung abweicht

Eine weitere wichtige Entwicklung betrifft das Verhalten von Korrelationen über mittel- bis langfristige Zeiträume. So sind beispielsweise die hohen Korrelationen zwischen Aktien innerhalb eines Marktsegments teilweise stark zurückgegangen<sup>4</sup>. Ferner lassen sich auch die weitgehend stabilen Korrelationen zwischen unterschiedlichen Wertpapierklassen nicht mehr wieder finden.

Die für eine Portfolio-Optimierung notwendige Berechnung von Korrelationen auf Basis historischer Daten ist nur mit Hilfe von immer komplexeren Methoden u. a. bzgl. der Gewichtung dieser Daten auf die jeweils aktuelle Marktsituation zu leisten.

Die Häufigkeit, mit der die Modelle für den gesamten Wertpapiermarkt oder auch für einzelne Marktsegmente angepasst werden müssen, nimmt daher stark zu. Daraus ergeben sich folgende Probleme:

- Die Vorhersagekraft der Modelle ist auf immer kürzere Zeitperioden eingeschränkt. Es müssen immer häufiger die Modellparameter wie z. B. die impliziten Volatilitäten und Korrelationen neu geschätzt werden.
- Das Risiko nimmt zu, eine Adaptation des jeweils verwendeten Modells, die über eine bloße Parameteranpassung hinausgeht, zu spät vorzunehmen. Frühwarnsysteme für sogenannte Modell-*Shifts* lassen sich nicht mehr unter Verwendung von Fundamentaldaten aufbauen.

---

<sup>2</sup>Diese Beobachtungen sind innerhalb der anderen Wertpapiermärkte auch zu machen, haben aber nicht die gleichen Ausmaße erreicht.

<sup>3</sup>So ist z. B. die Volatilität der DAX100-Aktien in dem Zeitraum von Juni 2002 bis Juni 2003 um den Faktor 2,5 angestiegen [13].

<sup>4</sup>Dies bedeutet, dass spezifische Risiken, d. h. Risiken, die sich nicht aufgrund von allgemeinen Marktschwankungen erklären lassen, an Bedeutung gewinnen werden.

- Die Kosten für die Strukturierung von Portfolios wachsen dementsprechend überproportional an. Transaktionskosten steigen, da immer häufiger Umschichtungen – durch Modell-Änderungen induziert – innerhalb der Portfolios vorgenommen werden müssen. Personalaufwendungen für Fondsgesellschaften und Banken erhöhen sich, da einfache passive Hedge-Strategien dynamisiert werden.

In diesem Marktumfeld finden daher Ansätze, die auf spezifische Modellannahmen verzichten, eine größere Beachtung [28, 85].

Ein solcher Ansatz für die Entwicklung und Bewertung erfolgreicher Strategien ist der der kompetitiven Analyse<sup>5</sup>. Hierbei wird auf die Annahme einer bestimmten stochastischen Verteilung der relevanten Informationen verzichtet. Die Ergebnisse einer Online-Strategie werden anhand der Ergebnisse einer Benchmark-Strategie – z. B. der optimalen Offline-Strategie – bewertet [91, 22].

Ausschlaggebend für die Bewertung von Online-Strategien mittels der kompetitiven Analyse ist der Quotient von Online- und Benchmark-Ergebnis im – für die Online-Strategie – ungünstigsten Fall. Diese Kennzahl, die als Gütemaß aufgefasst werden kann, wird Kompetitivitätsrate genannt.

Der Vorteil dieser Betrachtungsweise gegenüber einer statistischen Analyse liegt vor allem darin, dass die Zusammenhänge in realen finanziellen Anwendungen oftmals zu komplex sind, um sinnvolle Annahmen über die stochastische Verteilung der Informationen machen zu können.

Mit Hilfe der kompetitiven Analyse lassen sich eine Reihe von Problemstellungen im Finanzbereich wie z. B.:

- *Leasing*
- *Immobilienfinanzierung*
- *Devisenhandel (Währungstausch)*

untersuchen und kompetitive Online-Algorithmen ableiten [22, 26, 42].

In dieser Arbeit sollen Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung vorgestellt werden, die nur wenige grundlegende Annahmen über die relevanten Informationen implizieren [28, 49, 52, 105]. Diese Annahmen

---

<sup>5</sup>Weitere Bewertungsmöglichkeiten werden in Kapitel 3 ausführlicher betrachtet.

lassen genügend Spielraum, um robuste Strategien zu entwickeln, die selbst plötzliche Kursstürze, wie sie in der Realität möglich sind, zulassen. Es lässt sich zeigen, dass es möglich ist, unter vernünftigen Annahmen Online-Strategien zu entwickeln, die kompetitiv zu der gewählten Benchmark sind.

Die in dieser Arbeit hauptsächlich verwendete Benchmark für die Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung ist nicht die optimale Offline-Strategie, sondern das beste konstant rebalancierte Portfolio. Die zu dieser Strategie kompetitiven Strategien mit gleicher exponentieller Wachstumsrate werden auch als *log-optimale* oder *universelle Portfolios* bezeichnet [28].

## 1.2 Ziele der Arbeit

In den letzten Jahren haben sich unterschiedliche Ansätze für universelle Algorithmen herausgebildet [28, 31, 33, 49, 105, 52]. Diese Ansätze werden in der vorliegenden Arbeit vorgestellt, Unterschiede herausgearbeitet und ein Zusammenführen der Ansätze und damit eine Generierung neuer log-optimaler Algorithmen vorangetrieben.

Neben den bislang bekannten Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung sollen weitere Algorithmen entwickelt werden, deren Grundideen bei anderen Problemstellungen zu erfolgreichen Online-Verfahren geführt haben.

Entlang der Behandlung dieser Online-Algorithmen zur Portfolio-Optimierung soll der Zusammenhang zwischen dem verwendeten Gütemaß der Kompetitivitätsrate und den in der Finanzwissenschaft angewendeten Performance-Maßen herausgearbeitet werden.

Cover und Ordentlich [31] haben auf die Möglichkeit verwiesen, Zusatzinformationen in den von ihnen gewählten Ansatz zu integrieren. In dieser Arbeit wird dieses Verfahren aufgenommen und mit Methoden des Data Mining [77, 46] kombiniert. Ziel ist hier zum einen das Erreichen einer besseren Performance der auf diese Weise erweiterten Algorithmen, zum anderen das Vermeiden von Transaktions- und Risikokosten durch eine von den Grundalgorithmen abweichende Rebalancierung.

Die umfassende Berücksichtigung von Kosten der Portfolio-Optimierung

ist ein weiterer Schwerpunkt dieser Arbeit. Neben den bereits bekannten Methoden zur Modellierung und Integration von Kosten der Portfolio-Optimierung werden wir mit der Verwendung von Assoziationsregeln neue Techniken zur Verminderung von Kosten vorstellen.

Das Hauptaugenmerk der zu diesem Aspekt vorliegenden Arbeiten lag bislang auf Untersuchungen hinsichtlich der Transaktionskosten [5, 21]. Diese Kosten sind sicherlich gerade bei Ansätzen, bei denen eine häufige Rebalancierung vorgenommen werden muss, von hoher Bedeutung, allerdings können beispielsweise die in dieser Arbeit näher untersuchten Risikokosten (Eigenkapitalkosten) die Höhe der Transaktionskosten weit überschreiten [76].

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist entlang der oben aufgestellten Ziele aufgebaut. Zunächst werden im folgenden Kapitel die für die weitere Arbeit grundlegenden Begriffe entlang des Portfolio-Management-Prozesses definiert. Es wird eine Einführung in gängige Marktmodelle und darauf aufbauende Strategien zur Portfolio-Optimierung gegeben. Schließlich werden die wichtigsten Risiko- und Performance-Maße, mit denen eine Beurteilung der Güte der verwendeten Investitionsstrategien erfolgen kann, vorgestellt.

Das dritte Kapitel enthält eine allgemeine Einführung in die Theorie der Online-Algorithmen. Ferner werden mehrere Möglichkeiten zur Beurteilung von Online-Algorithmen angegeben. Hierzu wird insbesondere der Begriff der Unsicherheit näher beleuchtet.

Das vierte Kapitel befasst sich mit Online-Algorithmen zur Portfolio-Optimierung und führt somit die in den vorherigen Kapiteln gelegten Grundlagen zusammen. Es werden die theoretischen Grundlagen der Ansätze herausgearbeitet, um Unterschiede und Gemeinsamkeiten deutlich werden zu lassen. Aufbauend auf diese Konzepte werden die Möglichkeiten der Zusammenführung dieser Ansätze und der Schaffung neuer Investitionsstrategien untersucht.

Auf die Verwendung von Zusatzinformationen wird im fünften Kapitel eingegangen. Zunächst werden Möglichkeiten beschrieben, inwiefern zusätzliche Informationen in die Ansätze von Cover und Vovk sinnvoll

als Eingangsparameter einfließen können. Es werden hier den theoretisch schlechteren Kompetitivitätsraten bessere praktische Ergebnisse gegenüber gestellt. Ferner werden Verfahren des Data Mining mit den vorgestellten Investitionsstrategien verbunden. Dies kann zum einen über die Generierung von Regeln geschehen, die dann in die Ansätze von Cover [28] und Vovk [105] als Zusatzinformationen eingehen. Zum anderen können mittels Data Mining-Techniken direkte Adaptionen in den bestehenden Grundalgorithmen vorgenommen werden.

Hierauf aufbauend werden Ansätze zur Berücksichtigung von Kosten – Transaktions- und Risikokosten – der Portfolio-Strukturierung beleuchtet. Neben den bereits bekannten Techniken zur Verringerung von Transaktionskosten wird ein neues Verfahren, das Assoziationsregeln zur Vermeidung von Transaktionskosten nutzt, vorgestellt.

Diesem Kapitel schließt sich eine Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse und ein Ausblick auf weitere Forschungsrichtungen an. Hier werden insbesondere Erweiterungen auf andere Gegnermodelle wie auch die Integration weiterer Finanzinstrumente, deren Bedeutung durch praktische Resultate untermauert wird, motiviert.

# Kapitel 2

## Grundlagen der Portfolio-Optimierung

In diesem Kapitel soll neben der Einführung grundlegender Begriffe auch der Rahmen der vorliegenden Arbeit festgelegt werden. Hierzu ist es notwendig, eben diesen Rahmen zunächst etwas weiter zu fassen, um neben den in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehenden kompetitiven Online-Algorithmen andere Verfahren zur Portfolio-Optimierung zu skizzieren.

Die skizzierten Verfahren gehen jeweils von spezifischen Annahmen aus. Dies betrifft insbesondere das zugrundeliegende Marktmodell, wie auch die verwendeten Risikobegriffe.

Folgende modelltheoretischen Annahmen sind in der Regel für den Aufbau von Strategien zur Portfolio-Optimierung erforderlich:

- *Marktmodell*
- *Modell des Investors bzw. der Investoren*<sup>1</sup>
- *Bildung eines Risikomaßes*
- *Bildung eines Performancemaßes*

Bevor wir auf die gängigen Marktmodelle eingehen, die zu ihrer Beschreibung notwendigen Begriffe vorstellen und entlang dieser Grundbegriffe einige der wichtigsten Modelle zur Portfolio-Optimierung inklusive der verwendeten Risikokennzahlen entwickeln, soll der – im Bankenbereich

---

<sup>1</sup>Auf die Modellierung des Investors werden wir in dieser Arbeit nur am Rande eingehen.

prinzipiell praktizierte – Portfolio-Management-Prozess beschrieben werden.

## 2.1 Portfolio-Management-Prozess

Die Aufgabe der Portfolio-Optimierung ist in der Bankenpraxis eingebettet in einen umfangreicheren Prozess, den wir im Folgenden Portfolio-Management-Prozess (s. Abbildung 2.1) nennen wollen.

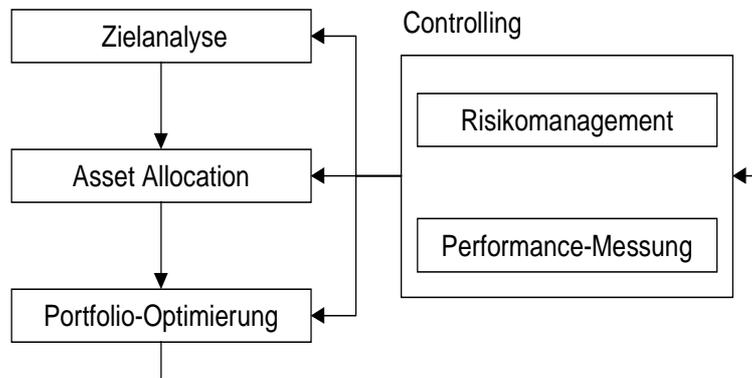


Abbildung 2.1: Portfolio-Management-Prozess

Der erste Prozess-Schritt ist die Zielanalyse des Investors. Insbesondere werden folgende Zielkategorien betrachtet:

- *Rentabilität*
- *Risikotoleranz und Risikotragfähigkeit*
- *Anlagehorizont*
- *Restriktionen<sup>2</sup>*

Nachdem die Ziele des Investors und einzuhaltende Rahmenbedingungen bekannt sind, muss eine Übersetzung in eine Anlagestrategie erfolgen.

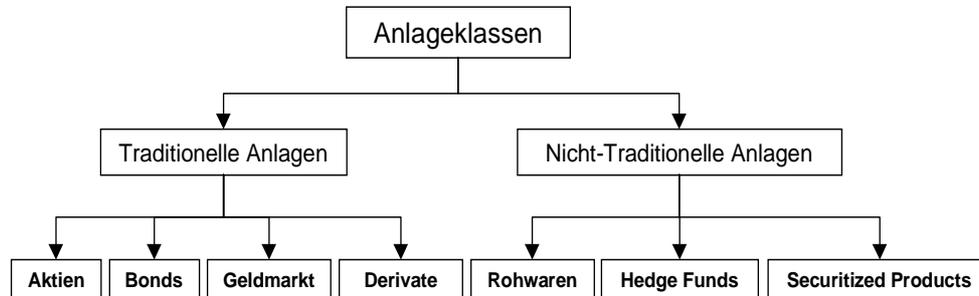


Abbildung 2.2: Portfolio-Management-Prozess

Zunächst ist das Vermögen auf Anlageklassen (s. Abbildung 2.2) zu verteilen. Dies wird als Asset Allocation bezeichnet. Unter einer *strategischen* Asset Allocation<sup>3</sup> wollen wir folgende Punkte subsumieren, wobei wir mit der Integration der Definition der Benchmark über die von Sharpe [89] vorgelegte Definition hinausgehen:

- *Auswahl der Finanzmärkte, in denen Investitionen getätigt werden sollen*
- *Auswahl der Finanzinstrumente bzw. Anlageklassen*
- *Auswahl der Benchmark*

Der dritte Schritt des Portfolio-Management-Prozesses umfasst die Portfolio-Optimierung, d. h.:

- *Auswahl der betrachteten Wertpapiere*
- *Auswahl der Investmentstrategie*

Während passive Investitionsstrategien von einer hohen Informationseffizienz innerhalb der Finanzmärkte ausgehen, setzen aktive Strategien zur Portfolio-Optimierung die Existenz über- bzw. unterbewerteter Anlagen voraus.

<sup>2</sup>Unter Restriktionen fallen u. a. gesetzliche Auflagen und Reglementierungen sowie die jeweilige Steuergesetzgebung.

<sup>3</sup>Während die *strategische* Asset Allocation aufgrund der langfristigen Perspektiven des Investors festgelegt wird, kann im Hinblick auf Marktsituationen *taktisch* von der strategischen Asset Allocation abgewichen werden. Man spricht hier von *taktischer* Asset Allocation.

Um die auf diese Weise getroffenen Entscheidungen zu beurteilen, wird in den Prozess ein regelmäßiges Controlling integriert, das sowohl Risikomanagement als auch Performance-Messung umfasst.

Die Ergebnisse dieser Controlling-Instrumente dienen der Rückkopplung für die zuvor durchgeführten Prozess-Schritte und ermöglichen auf diese Weise eine Adjustierung des Gesamtprozesses.

Innerhalb dieser Arbeit wollen wir davon ausgehen, dass die Zielanalyse des Investors und die Festlegung auf Finanzmärkte und Assetklassen bereits erfolgt ist. Zunächst soll daher auf die Konstruktion von Benchmarks eingegangen werden.

## 2.2 Konstruktion von Benchmarks

Innerhalb des Portfolio-Management-Prozesses übernimmt das *Benchmarking* eine herausragende Rolle. Erst mit der Festlegung einer Benchmark ist eine Performance-Analyse überhaupt möglich, da eine durch eine Investitionsstrategie erzielte Rendite oder auch das Rendite-Risiko-Profil allein noch nichts darüber aussagt, ob dies positiv oder negativ zu bewerten ist.

Bei der Konstruktion der Benchmark ist also zunächst die Frage zu klären, ob die Benchmark die erwünschten Rendite- und Risikoeigenschaften aufweist<sup>4</sup>.

Eine wesentliche Voraussetzung für den Einsatz von Benchmarks ist die Festlegung auf einen spezifischen Benchmark *vor* der Investition. Die Zusammensetzung und Berechnung der Benchmark sollte von einer unabhängigen Stelle erfolgen und darf nicht dem einzelnen Portfolio-Manager überlassen werden.

Folgende prinzipielle Konstruktionsverfahren von Benchmarks sind denkbar:

- Eine Benchmark-Rendite mit einem festen Zinssatz von  $p\%$  wird vorgegeben. Eine solche Benchmark wird zwar häufig in der Praxis genutzt, allerdings wird hier die in dem Betrachtungszeitraum beobachtete Marktentwicklung nicht berücksichtigt.

---

<sup>4</sup>Im institutionellen Portfolio-Management dient vornehmlich die Rendite der Benchmark als Performance-Maß.

- Die allgemeine Marktentwicklung selbst kann als eine Benchmark aufgefasst werden. Bei diesem Ansatz ist allerdings zunächst die Frage nach der Messung der Marktentwicklung zu beantworten. Häufig dienen bei diesem Ansatz Wertpapierindizes als approximative Benchmark. Dieses Vorgehen hat allerdings mehrere Nachteile:
  - Indizes werden unterschiedlich konstruiert und bewertet. So werden z. B. nur bei Performance-Indizes wie dem DAX Erträge aus Dividenden berücksichtigt.
  - Für einen Markt existieren mehrere Indizes, die die Entwicklung dieses Marktes widerspiegeln sollen. Untersuchungen haben jedoch ergeben, dass diese Indizes deutlich unterschiedliche langfristige Renditeentwicklungen aufzeigen [98].
- Ein mit dem betrachteten Portfolio vergleichbares Portfolio kann ebenfalls als Benchmark eingesetzt werden. In der Praxis wird diese Art von Benchmark nur dann eingesetzt, wenn die Investitionsstrategie, die die Zusammensetzung des Benchmark-Portfolios bestimmt, bekannt ist.

Gerade vor diesem Hintergrund könnten Investmentstrategien, die sich vollständig durch Algorithmen beschreiben lassen, die Rolle von Benchmarks übernehmen.

## 2.3 Marktmodelle

Das den Verfahren zur Portfolio-Optimierung zugrundeliegende Modell des Marktes ist ein kritischer Punkt innerhalb des gesamten Portfolio-Management-Prozesses, da die an dieser Stelle getroffenen Annahmen letztendlich nicht nur die Zusammensetzung des gewählten Portfolios bestimmen, sondern auch Einfluss auf die Verfahren selbst haben. Daher soll kurz auf die wesentlichen Merkmale der angewandten Marktmodelle eingegangen werden.

In den meisten Modellen zur Portfolio-Optimierung wird ein idealer Markt vorausgesetzt, d. h.:

- Transaktionskosten bei An- oder Verkauf von Wertpapieren fallen nicht an.
- Es werden keine Risikokosten berücksichtigt.

- Steuern auf den Verkauf von Wertpapieren werden nicht erhoben.
- Wertpapiere können in beliebiger Menge – es existiert keine Stückelung – gekauft oder veräußert werden.
- Wertpapiere können zu jedem Zeitpunkt zu dem gegenwärtigen Marktwert gehandelt werden.
- Das Verhalten von Investoren beeinflusst den Marktwert der Wertpapiere nicht.
- Allen Marktteilnehmern stehen sämtliche Informationen, die Auswirkungen auf den Marktwert von Wertpapieren haben, gleichzeitig zur Verfügung<sup>5</sup>.
- Es fallen keine Dividendenzahlungen an. Die Renditen der Wertpapiere sind allein auf Kursveränderungen zurückzuführen.

Reale Märkte weichen erheblich von den oben skizzierten Modellannahmen ab. Die Abweichungen sind teilweise so groß, dass die auf diesen Annahmen beruhenden Modelle zur Portfolio-Optimierung nicht oder nur sehr eingeschränkt anwendbar sind:

- Bei dem Handel mit Wertpapieren entstehen Kosten, die an die Käufer und Verkäufer der entsprechenden Wertpapiere weitergegeben werden. Hierzu gehören u. a. Kosten der Abwicklung der jeweiligen Transaktion, Gebühren der jeweiligen Börse und der Makler, die diese Transaktionen durchführen.

Die Höhe wie auch die Struktur der Kosten ist abhängig von unterschiedlichen Einflussfaktoren wie z. B. des Volumens der Transaktion, der Liquidität der gehandelten Wertpapiere und der Art der Börse. So können linear von dem Volumen abhängige variable Kostenanteile wie auch Fixkostenanteile existieren.

- Finanztitel werden in Stückelungen gehandelt, ein Handel mit einem Wertpapier in einer beliebigen Größenordnung findet nicht statt. Die *handelsüblichen* Mindestgrößen können zudem schwanken.

---

<sup>5</sup>Man spricht hier auch von vollkommener Informationseffizienz.

- In realen Märkten ist nicht immer die oben geforderte hohe Liquidität vorhanden. Eine geringe Liquidität von Wertpapieren kann zum einen dazu führen, dass *Bit-Ask-Spreads* größer werden, d. h. höhere Transaktionskosten anfallen, zum anderen dazu, dass Finanztitel nicht mehr ge- oder verkauft werden können. Besonders problematisch ist in diesem Zusammenhang, dass sich die Liquidität von Märkten innerhalb von sehr kurzen Zeitspannen dramatisch ändern kann<sup>6</sup>.
- Marktteilnehmer können insbesondere durch hochvolumige Transaktionen die Marktpreise des jeweils gehandelten Wertpapiers – und sogar eines Marktsegments – beeinflussen. Die in einem idealen Markt existierende Informationseffizienz ist damit in realen Märkten nicht gegeben [44, 89]

Eine weitere häufig gemachte Modellannahme ist die der Log-Normalverteilung der relativen Änderungen der Marktpreise von Wertpapieren. Allerdings lässt sich auch diese Annahme in realen Märkten nicht verifizieren, es existiert keine einhellige Meinung bzgl. der Gültigkeit von Verteilungsannahmen [48]. So weist die Verteilung von Aktienrenditen in der Regel eine Links-Schiefe<sup>7</sup> auf. Ferner scheinen die Verteilungen der Aktienrenditen eine hohe Kurtosis<sup>8</sup> zu besitzen [48, 92].

## 2.4 Strategien zur Portfolio-Optimierung

In diesem Abschnitt sollen mit den folgenden Strategien

- *Effiziente Portfolios* (Harry Markowitz, 1952 [75])
- *Index-Modelle* (Harry Markowitz, William Sharpe)
- *Capital Asset Pricing Theory* (William Sharpe, 1964 [88])
- *Arbitrage Pricing Theory* (Stephen Ross, 1976 [83])

einige der grundlegenden Prinzipien der Portfolio-Optimierung beschrieben werden.

---

<sup>6</sup>Man denke beispielsweise an die Russlandkrise am Ende der neunziger Jahre. Der gesamte russische Öl- und Gasmarkt wurde in sehr kurzer Zeit illiquide, d. h. es konnten praktisch keine Transaktionen mehr vorgenommen werden.

<sup>7</sup>Schiefe  $S$  einer Zufallsgröße  $X$ :  $S(X) = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$

<sup>8</sup>Kurtosis  $K$  einer Zufallsgröße  $X$ :  $K(X) = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$

Diese Strategien sind zunächst als Ein-Perioden-Modelle zur Portfolio-Selektion entwickelt worden, lassen sich aber in Richtung von Mehr-Perioden-Modellen erweitern und können daher als komplexe Investitionsstrategien angesehen werden.

Diesen Strategien werden mit

- *Buy-and-Hold-Strategien* und
- *Konstant rebalancierten Portfolios*

zwei einfache Ansätze gegenüber gestellt, die wir im weiteren Verlauf als Benchmark-Strategien verwenden werden<sup>9</sup>.

### 2.4.1 Notationen

Wir gehen in dem weiteren Verlauf der Arbeit von einem Universum von  $m$  Wertpapieren aus. Investitionsstrategien besitzen einen endlichen Anlagehorizont von  $n$  Handelsperioden. Sofern nichts anderes vereinbart wird, soll in dieser Arbeit die Möglichkeit des *Short Selling* nicht vorhanden sein, d. h. es können keine Wertpapiere am Markt verkauft werden, die man zum Zeitpunkt der Transaktion noch nicht besitzt.

#### Definition 2.1 (Relativer Kursvektor)

Sei  $n$  mit  $n \in \mathbb{N}_{>0}$  die Anzahl der Handelsperioden und  $m$  mit  $m \in \mathbb{N}_{>0}$  die Anzahl der betrachteten Wertpapiere. Sei  $p_{i,j}$  ( $p_{i,j} > 0$ ) der Kurs eines Wertpapiers  $j$  zum Zeitpunkt  $i$  am Beginn der betrachteten Handelsperiode. Die relative Kursänderung  $x_{i,j}$  des Wertpapiers  $j$  innerhalb der betrachteten Handelsperiode  $i$  ist dann definiert als:

$$x_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{p_{i-1,j}}$$

Der Vektor der relativen Kursänderungen aller betrachteten Wertpapiere  $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,m}) \in \mathbb{R}_+^m$  wird *relativer Kursvektor* innerhalb der Handelsperiode  $i$  genannt. Die Folge  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  wird als (relative) *Kursentwicklung* der betrachteten Wertpapiere im Investitionszeitraum bezeichnet.

Zur formalen Beschreibung von Investitionsstrategien benötigen wir noch die folgende Definition:

---

<sup>9</sup>Der von Roy [84] entwickelte *Safety-First-Ansatz*, der davon ausgeht, dass ein Investor ein Unterschreiten einer von ihm festgelegten Mindestrendite als ein zu vermeidendes Risiko betrachtet, soll in dieser Arbeit nicht weiter behandelt werden [94].

**Definition 2.2 (Portfoliovektor)**

Sei  $m$  die Anzahl der verfügbaren Anlagen. Ein Vektor  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$  heißt Portfoliovektor, wenn gilt:

- $b_j \geq 0$  für alle  $1 \leq j \leq m$
- $\sum_{j=1}^m b_j = 1$ .

Die Komponente  $b_j$  gibt den relativen Anteil des in dem Wertpapier  $j$  investierten Kapitals an.

Mit dem Begriff des Portfoliovektors können wir den Raum aller zulässigen Portfolios wie folgt definieren:

**Definition 2.3 (Portfolioraum)**

Sei  $m$  die Anzahl der verfügbaren Wertpapiere. Mit

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : \sum_{j=1}^m b_j = 1 \wedge b_j \geq 0 \quad \forall \quad 1 \leq j \leq m\} \quad (2.1)$$

wird die Menge der möglichen Portfolios bezeichnet<sup>10</sup>.

Wir können jetzt – aufbauend auf den vorangegangenen Definitionen – eine formale Beschreibung von Investitionsstrategien vornehmen:

**Definition 2.4 (Investitionsstrategie)**

Gegeben sei die Menge der möglichen Portfolios  $\mathcal{B}$ . Eine Investitionsstrategie  $IS$  ist eine Abbildung, die einem Investitionszeitraum in Abhängigkeit der relativen Kursentwicklung  $\mathbf{X}^{(n)}$  ein Portfolio zuordnet:

$$IS : \{1, \dots, n\} \times \{\mathbf{X}^{(n)} : \mathbf{X}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^m\} \longrightarrow \mathcal{B} \quad (2.2)$$

Jede Investitionsstrategie  $IS$  kann damit als eine Folge von Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_j$  verstanden werden:

$$IS = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n) \quad (2.3)$$

Mit obiger Definition lässt sich der relative Gewinn einer Investitionsstrategie folgendermaßen beschreiben:

---

<sup>10</sup>Die Menge der möglichen Portfolios stellt damit den  $m-1$ -dimensionalen Einheits-simplex dar und wird im weiteren Verlauf der Arbeit auch Portfolio-Raum genannt.

**Definition 2.5 (Relativer Gewinn einer Investitionsstrategie)**

Bezeichne die Folge  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  die relative Kursentwicklung der betrachteten Wertpapiere im Investitionszeitraum. Ferner sei  $IS = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  eine Investitionsstrategie. Dann ist der relative Gewinn  $S$  dieser Investitionsstrategie definiert als:

$$S_n(IS, \mathbf{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{b}_i \mathbf{x}_i \quad (2.4)$$

**2.4.2 Effiziente Portfolios**

Grundlage der Arbeiten von Markowitz bilden Annahmen über das Verhalten von Investoren, die als rational handelnde, risikoaverse und nutzenmaximierende Akteure charakterisiert werden.

Die Präferenzen von Investoren werden durch strikt konkave Nutzenfunktionen modelliert, d. h., dass der Investor nur dann ein größeres Risiko eingeht, wenn dies mit einer höheren Rendite verbunden ist, und dass der Investor sich bei gleicher Renditeerwartung für die risikoärmere Anlagealternative entscheidet [55]. Es gilt dann für die Nutzenfunktion  $U$ :

- $U'(\mathbf{b}, \mathbf{X}) > 0$
- $U''(\mathbf{b}, \mathbf{X}) < 0$

Markowitz [75] klassifiziert dementsprechend Portfolios gemäß der zu erwartenden Rendite und dem damit verbundenen Risiko und beschreibt diese Eigenschaften mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie durch die ersten beiden Momente der Verteilung der relativen Kursänderungen, dem Erwartungswert und der Varianz. Man spricht daher bei diesem Ansatz auch von *Mean-Variance-Analyse*.

Markowitz [75] hat darauf aufbauend das Problem der Portfolio-Optimierung auf ein Optimierungsproblem, zu dem zwei Varianten existieren, zurückgeführt:

1. *Variante 1:*

Ziel ist die Minimierung des Risikos (d. h. der Varianz) des Portfolios unter der Berücksichtigung der Nebenbedingung, dass mindestens eine gewünschte Rendite  $S$  erzielt wird.

## 2. Variante 2:

Ziel ist die Maximierung der Rendite des Portfolios unter Berücksichtigung der Nebenbedingung, dass höchstens ein bestimmtes Risiko  $V$  eingegangen wird.

Das Modell von Markowitz kann dementsprechend folgendermaßen formuliert werden:

Der Vektor der relativen Kursänderungen  $\mathbf{x}_i$  wird durch einen Vektor von Zufallsvariablen  $\mathbf{X}_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,m})$  modelliert. Ferner bezeichne  $\mathbf{b}_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,m})$  die Portfoliovektoren. Der erwartete relative Gewinn wird mit  $E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)]$  bezeichnet und es gilt:

$$E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] = \sum_{j=1}^m b_{i,j} E[X_{i,j}] \quad (2.5)$$

Für das Risiko des Portfolios ergibt sich dementsprechend:

$$V[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] = E[(S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i) - E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)])^2] \quad (2.6)$$

Mit diesen Notationen lassen sich die oben skizzierten Varianten wie folgt als quadratische Optimierungsprobleme formulieren:

$$\mathbf{b}_i = \underset{\mathbf{b} \in \mathcal{B}}{\operatorname{argmin}} V[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] \quad s.t. \quad E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] \geq S \quad (2.7)$$

bzw.

$$\mathbf{b}_i = \underset{\mathbf{b} \in \mathcal{B}}{\operatorname{argmax}} E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] \quad s.t. \quad V[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] \leq V \quad (2.8)$$

Die Lösung dieses quadratischen Optimierungsproblems kann dann direkt oder iterativ durchgeführt werden [90, 44, 89].

Auf diese Weise kann man z. B. durch Variation der zu erreichenden Rendite die Menge der effizienten Portfolios erhalten, d. h. die Menge der Portfolios, die bei einer vorgegebenen Rendite das geringste Risiko – gemessen mit Hilfe der Varianz – aufweisen.

Das optimale Portfolio – das sich nach Markowitz innerhalb der Menge der effizienten Portfolios befindet – ergibt sich erst aus der Nutzenfunktion des jeweiligen Investors.

### 2.4.3 Index-Modelle

Der Ansatz von Markowitz benötigt zur Bestimmung der Menge der effizienten Portfolios  $\mathcal{O}(n^2)$  Eingabeparameter. Um den Aufwand für die Bereitstellung dieser Eingabeparameter zu reduzieren, schlug Markowitz gemeinsam mit Sharpe vor, die Korrelationen zwischen den einzelnen Anlagen nicht über den paarweisen Vergleich der Anlagen, sondern über die Korrelation der Anlagen zu einem oder mehreren Indizes zu bestimmen.

Sharpe [89] nahm diese Idee weiter auf und entwickelte das sogenannte Single-Index-Modell. Dieses Modell benötigt nicht nur weniger unabhängig voneinander geschätzte Eingabeparameter, es führt zudem zu einer starken Vereinfachung des Algorithmus zur Bestimmung der Menge der effizienten Portfolios.

In dem Single-Index-Modell werden die Anlagerenditen  $X_{i,j}$  mit den Indexrenditen  $X_{i,I}$  verknüpft und wie folgt modelliert:

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} \cdot X_{i,I} + \epsilon_{i,j} \\ &= a_{i,j} + \beta_{i,j} \cdot X_{i,I} , \end{aligned} \quad (2.9)$$

wobei  $a_{i,j}$  eine Zufallsvariable ist, die die Kursänderungen der Anlage  $j$  darstellt, die unabhängig vom Index  $I$  sind und  $\beta_{i,j}$  eine Konstante, die die erwartete Änderung der Anlage  $j$  in Abhängigkeit von der relativen Änderung des Indizes  $I$  angibt<sup>11</sup>.

Man kann  $a_{i,j}$  schreiben als  $a_{i,j} = \alpha_{i,j} + \epsilon_{i,j}$ , wobei  $\alpha_{i,j} = E[a_{i,j}]$  und  $E[\epsilon_{i,j}] = 0$  ist<sup>12</sup>.

Damit gilt:

$$E[X_{i,j}] = \alpha_{i,j} + \beta_{i,j} \cdot E[X_{i,I}] \quad (2.10)$$

und

$$V[X_{i,j}] = \beta_{i,j}^2 \cdot V[X_{i,I}] + V[\epsilon_{i,j}] \quad (2.11)$$

Die bei dem Modell von Markowitz nur sehr aufwendig zu schätzenden Kovarianzen werden hier durch die Schätzung der Kovarianzen der ein-

---

<sup>11</sup>Die Werte für  $\beta_{i,j}$  liegen für Aktien in großen Indizes von Industrieländern in der Regel zwischen 0,5 und 2, die Werte für  $\alpha_{i,j}$  können stärker schwanken.

<sup>12</sup>D. h.  $\epsilon_{i,j}$  ist eine nullwertige Zufallsvariable.

zelenen Anlagen zum Index  $I$  ersetzt, wodurch das Single-Index-Modell an Stabilität gewinnt:

$$\text{Cov}[X_{i,j}, X_{i,I}] = \beta_{i,j}\beta_{i,I} \cdot V[X_{i,I}] \quad (2.12)$$

Auf diese Weise kann mit Hilfe von nur  $\mathcal{O}(n)$  Eingabeparametern die Menge der effizienten Portfolios bestimmt werden<sup>13</sup>.

#### 2.4.4 Capital Asset Pricing Modell (CAPM)

Die bislang vorgestellten Modelle zur Portfolio-Optimierung gingen von der Frage aus, wie ein einzelner Investor sein Portfolio optimal strukturieren kann.

Falls alle Investoren auf die gleiche Weise agieren, ist unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen die Konstruktion eines *Gleichgewichtsmodells* möglich.

Neben den bereits am Anfang des Kapitels genannten Annahmen hinsichtlich des Marktmodells müssen folgende zusätzliche Voraussetzungen erfüllt sein:

- Alle Investoren optimieren ihre Portfolios hinsichtlich der Parameter *Erwartungswert der Rendite* und *Varianz*. Dies bedeutet, dass zumindest in der Ursprungsversion das CAPM auf das Modell von Markowitz aufsetzt.
- Alle Investoren haben hinsichtlich der erwarteten Renditen und Risiken der einzelnen Anlagen identische Erwartungen.

Treynor, Sharpe, Linter und Mossin [89] haben gezeigt, dass die Portfolios aller Investoren unter diesen Annahmen als eine Linearkombination aus dem sogenannten Marktportfolio  $M$  (bestehend aus allen risikobehafteten Anlagen) und aus der risikolosen Anlage verstanden werden können.

Dies wird auch als *Tobin-Separation* bezeichnet und kann wie folgt präzisiert werden:

---

<sup>13</sup>Eine natürliche Erweiterung dieses Ansatzes stellen Multi-Index-Modelle dar. Hier werden die Renditen einzelner Anlagen über die Entwicklungen von mehreren Indizes geschätzt. Man erhofft sich bei dieser Vorgehensweise eine adäquatere Berücksichtigung der Marktgegebenheiten.

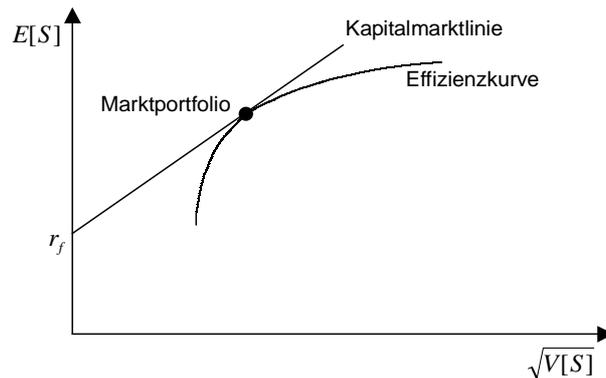


Abbildung 2.3: Effizienzkurve und Marktportfolio

- Alle Anleger halten nach Voraussetzung risikobehaftete Wertpapiere in der Zusammensetzung, die dem optimalen (Tangential-) Portfolio entspricht. Das oben angenommene Gleichgewicht setzt voraus, dass sämtliche risikobehafteten Anlagen von irgendeinem Investor gehalten werden.
- Dies bedeutet wiederum, dass zu jedem Zeitpunkt  $t = i$  das Tangentialportfolio das Marktportfolio (s. Abbildung 2.3) widerspiegeln muss, wobei die Gewichtung des einzelnen Wertpapiers  $j$  dem Verhältnis seines Marktwerts  $P_{i,j}$  zum Gesamtmarktwert aller Wertpapiere entspricht:

$$b_{i,j}^{Markt} = \frac{P_{i,j}}{\sum_{k=1}^m P_{i,k}} \quad (m : \text{Anzahl der Wertpapiere})$$

Nur die Risikoneigung des einzelnen Anlegers (d. h. seine individuellen Präferenzen) bestimmt die Höhe des Anteils des Marktportfolios am Portfolio.

Für die erwartete Rendite des Portfolios ergibt sich daher:

$$\begin{aligned} E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] &= S_{risikolos} + \\ &= (E[S(\mathbf{b}_i^{Markt}, \mathbf{X}_i)] - S_{risikolos}) \cdot \beta_{\mathbf{b}_i}, \end{aligned}$$

wobei  $\beta_{\mathbf{b}_i} = Cov[\mathbf{b}_i^{Markt}, \mathbf{b}_i] / V[S(\mathbf{b}_i^{Markt}, \mathbf{X}_i)]$  ist.

Die Gerade  $S_{risikolos} + (E[S(\mathbf{b}_i^{Markt}, \mathbf{X}_i)] - S_{risikolos}) \cdot \beta_{\mathbf{b}_i}$  wird auch als *Kapitalmarktlinie* bezeichnet.

Dementsprechend bildet das Marktportfolio im theoretischen Rahmen des CAPM die natürliche Benchmark für Investitionsstrategien. Dieser Ansatz wird in der Praxis allerdings kaum umgesetzt, da kein bekanntes Portfolio als Marktportfolio allgemein anerkannt ist<sup>14</sup>.

Globale Indizes kommen der Vorstellung eines Marktportfolios im Sinne des CAPM relativ nahe, aber Untersuchungen wie z. B. von Stucki [98] haben aufgezeigt, dass bereits innerhalb von Zeiträumen von 5 – 10 Jahren größere Abweichungen zwischen den Renditen der unterschiedlichen globalen Indizes existieren.

### 2.4.5 Arbitrage Pricing Theorie (APT)

Aufgrund der Schwächen des ursprünglichen CAPM wurden alternative Ansätze entwickelt, die weniger restriktive Annahmen über das zugrunde liegende Gleichgewicht des Kapitalmarktes erfordern.

So werden bei der *Arbitrage Pricing Theory* (APT), die 1976 von Ross [83] entwickelt wurde, die Anlagen nicht relativ zu einem optimalen Marktportfolio bewertet, sondern relativ zu einer multivariaten Korrelationsstruktur der Anlagerenditen.

Bei der APT muss also keine Spezifikation eines Marktportfolios erfolgen, stattdessen müssen die für die betrachteten Anlagen relevanten Rendite- bzw. Risikofaktoren feststehen, d. h., dass beispielsweise die erwartete Rendite jeder Anlage als eine lineare Funktion von Renditefaktoren  $\beta_j$

---

<sup>14</sup>Die Charakterisierung des Marktportfolios als Universum der vorhandenen risikobehafteten Anlagen wird als sehr problematisch angesehen. So ist es z. B. umstritten, ob Bonds – von der Börsenkapitalisierung her wichtiger als Aktien – in dem Marktportfolio Berücksichtigung finden sollen.

interpretiert wird<sup>15</sup>.

Für die erwartete Rendite gilt dementsprechend:

$$E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)] = \lambda_0 + \sum_{j=1}^k \lambda_j \beta_j, \quad (2.13)$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= S_{risikofrei} \\ \lambda_j &= E[S(\mathbf{b}_i^{P_j}, \mathbf{X}_i)] - S_{risikofrei} \end{aligned}$$

Damit kann sowohl das CAPM als auch das Multi-Index-Modell als Ausgangspunkt für das APT angesehen werden.

### 2.4.6 Buy-and-hold Strategien

Eine *Buy-and-Hold-Strategie* ist eine Strategie, in der das gesamte Investitionskapital zu Beginn der ersten Handelsperiode in ein Portfolio mit Portfoliovektor  $\mathbf{b}$  investiert wird und bis zum Ende des Investitionszeitraums keine Umschichtungen innerhalb des Portfolios vorgenommen werden<sup>16</sup>:

#### Definition 2.6 (Buy-and-Hold-Strategie)

Eine Investitionsstrategie heißt *Buy-and-Hold-Strategie*  $BaH_{\mathbf{b}_1}$ , wenn zum Zeitpunkt  $t = 0$  eine Investition in das Portfolio  $\mathbf{b}_1 = (b_{1,1}, \dots, b_{1,m})$  vorgenommen wird und bis zum Zeitpunkt  $t = n$  keine Reinvestitionen stattfinden.

Es gilt folgendes Lemma:

#### Lemma 2.1

Sei  $BaH_{\mathbf{b}_1}$  die *Buy-and-Hold-Strategie*, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  das Kapital in das Portfolio  $\mathbf{b}_1 = (b_{1,1}, \dots, b_{1,m})$  investiert hat. Ferner sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren.  $S_i(ALG, \mathbf{X}^{(i)})$  bezeichne den relativen Gewinn einer Strategie  $ALG$  zum Zeitpunkt  $t = i$ . Dann

<sup>15</sup>Leider werden von der APT keine Aussagen über die Art der Faktoren gemacht, die die erwarteten Renditen bestimmen.

<sup>16</sup>Buy-and-Hold-Strategien werden sehr häufig in der Praxis eingesetzt. So stellen z. B. oft Indizes eine Form von Buy-and-Hold-Strategien dar.

gilt für die Komponenten des Portfoliovektors  $\mathbf{b}_i = (b_{i,1}, \dots, b_{i,m})$  mit  $1 \leq i \leq n$ :

$$b_{i,j} = b_{1,j} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{i-1} x_{i,k}}{S_{i-1}(BaH_{\mathbf{b}_1}, \mathbf{X}^{(i-1)})} \quad (2.14)$$

Ferner gilt für den relativen Gewinn der Strategie  $BaH_{\mathbf{b}_1}$ :

$$S_n(BaH_{\mathbf{b}_1}, \mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{j=1}^m (b_{1,j} \cdot \prod_{i=1}^n x_{i,j}) \quad (2.15)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die beste Buy-and-Hold-Strategie diejenige Strategie ist, die ihr Vermögen vollständig in die Anlage  $j$  investiert hat, für die das Produkt  $\prod_{i=1}^n x_{i,j}$  maximal wird.

### 2.4.7 Konstant rebalancierte Portfolios

In dem letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass Buy-and-Hold-Strategien zwar während des gesamten Investitionszeitraums das in ein Portfolio investierte Vermögen nicht umschichten, dass sich aber – bedingt durch die unterschiedlichen Entwicklungen der in dem Portfolio befindlichen Anlagen – der Portfoliovektor  $\mathbf{b}$  in der Regel in jeder Handelsperiode ändert<sup>17</sup>.

Strategien, deren Portfoliovektor innerhalb des gesamten Investitionszeitraums konstant bleibt, werden als konstant rebalancierte Algorithmen bezeichnet. Dies bedeutet allerdings, dass – eine unterschiedliche Entwicklung der Anlagerenditen vorausgesetzt – eine ständige Rebalancierung notwendig ist<sup>18</sup>.

Diese Strategien können wie folgt definiert werden:

**Definition 2.7 (Konstant rebalancierte Algorithmen)**

*Eine Investitionsstrategie heißt konstant rebalancierter Algorithmus  $CRP_{\mathbf{b}}$ , wenn zu jedem Handelszeitpunkt  $t = i$  eine Rebalancierung des Portfolios durchgeführt wird, so dass für den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}$  gilt.*

Für den relativen Gewinn dieser Strategie gilt folgendes Lemma:

<sup>17</sup>Eine Ausnahme bilden hier nur die kanonischen Buy-and-Hold-Strategien, die ihr gesamtes Vermögen nur in eine Anlage investieren.

<sup>18</sup>Strategien, die ihr Vermögen komplett in eine Anlage investieren, gehören ebenfalls in die Klasse der konstant rebalancierten Algorithmen.

**Lemma 2.2**

Gegeben sei ein konstant rebalanciertes Portfolio  $CRP_{\mathbf{b}}$ . Ferner sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Dann ergibt sich für den relativen Gewinn  $S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$ :

$$S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{b} \mathbf{x}_i = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j x_{ij} \quad (2.16)$$

Aufgrund der ständigen Rebalancierung können auch in seitwärts gerichteten Märkten mit konstant rebalancierten Algorithmen Gewinne erzielt werden, während dies mit Buy-and-Hold-Strategien nicht möglich ist.

Hierzu soll folgendes Beispiel angeführt werden:

Gegeben sei ein Anlageuniversum von nur zwei Anlagen. Der Marktwert der ersten Anlage bleibt innerhalb des betrachteten Investitionszeitraums  $[0, n]$  konstant, während sich der Marktwert der zweiten Anlage in jeder Handelsperiode abwechselnd verdoppelt bzw. halbiert, d. h., dass sich die Folge von relativen Kursvektoren schreiben lässt als:

$$\mathbf{X}^{(n)} = \left( (1, 2), (1, \frac{1}{2}), \dots, (1, 2), (1, \frac{1}{2}) \right)$$

Der relative Gewinn der besten Buy-and-Hold-Strategie ist aufgrund der Wahl von  $\mathbf{X}^{(n)}$  gleich 1. Die beste konstant rebalancierte Strategie  $CRP_{\mathbf{b}^*}$  besitzt den Portfoliovektor  $\mathbf{b}^* = (1/2, 1/2)$  und erzielt hingegen einen mit  $n$  exponentiell wachsenden Gewinn:

$$S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) = \left( \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \right)^{\frac{n}{2}} = \left( \frac{9}{8} \right)^{\frac{n}{2}}$$

## 2.5 Risikobegriff im Portfolio-Management

Das Risikomanagement ist ein weiterer wichtiger Baustein im Portfolio-Management-Prozess. Portfolios müssen laufend hinsichtlich ihrer Risiken bewertet werden, um die von den Investoren angeforderten Zielgrößen wie Risikotoleranz und Risikotragfähigkeit zu überwachen.

Die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Modelle von Markowitz (Effiziente Portfolios) und Sharpe (CAPM) nutzen z. B. mit der Standardabweichung bzw. der Varianz einen modellinhärenten Risikobegriff.

Mit einer zugrunde liegenden – angenommenen – Wahrscheinlichkeitsverteilung stellt die Verwendung von Varianz bzw. Standardabweichung eine Form der Average-Case-Analyse dar.

### 2.5.1 Asymmetrische Risikomaße

Der oben skizzierte Begriff des Risikos geht implizit davon aus, dass für den Investor neben potenziellen Verlusten auch mögliche Gewinne ein Risiko darstellen. Es ist daher versucht worden, diese Schwachstelle durch Einsatz asymmetrischer Risikomaße (wie z. B. den *Lower Partial Moments*) zu beheben.

Ein einfaches asymmetrisches Risikomaß stellt die *Semivarianz* dar<sup>19</sup>:

$$V_{semi}[S(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})] = E[\min(0, (S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i) - E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)]))^2] \quad (2.17)$$

Allgemein sind die Lower Partial Moments der Ordnung  $k$  wie folgt definiert:

**Definition 2.8 (Lower Partial Moments)**

Sei  $\mathbf{B}^{(n)}$  eine Folge von Portfoliovektoren,  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine Folge von relativen Kursvektoren und  $S(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})$  der relative Gewinn. Dann bezeichnet

$$LPM_k[S(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})] = E[\min(0, (S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i) - E[S(\mathbf{b}_i, \mathbf{X}_i)]))^k] \quad (2.18)$$

das Lower Partial Moment der Ordnung  $k$  mit  $k \geq 1$ .

Falls eine symmetrische Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anlagerenditen vorliegt, führt die Verwendung der Semivarianz zu gleichen Ergebnissen wie die Verwendung der Varianz als Risikomaß [92].

### 2.5.2 Verlustpotenzial

Die bislang beschriebenen Risikomaße gehen davon aus, dass die relativen Renditen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung – meistens einer Log-Normalverteilung – genügen. Andere Risikomaße wie z. B. das absolute Verlustpotenzial gehen von Worst-Case-Annahmen aus; verzichten also

<sup>19</sup>Die Semivarianz stellt das *Lower Partial Moment* der Ordnung 2 dar.

auf explizite Annahmen hinsichtlich einer Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Aufgrund dieser Worst-Case-Annahmen findet das Verlustpotenzial nur bei sehr risikoaversen Investoren Anwendung. Dieses Risikomaß kann allerdings durch eine Begrenzung auf ausgewählte Szenarien in Richtung Szenario-Optimierung erweitert werden.

Das Value-at-Risk stellt ebenfalls eine Erweiterung des Konzepts des Verlustpotenzials dar und wird aufgrund seiner hohen aufsichtsrechtlichen Bedeutung näher beschrieben.

### 2.5.3 Value-at-Risk

Die bislang vorgestellten Risikomaße dienen vornehmlich Investoren zur Ein- und Abschätzung des in ihrem Portfolio enthaltenen Risikos. Das Konzept des Value-at-Risk [57] besitzt darüber hinaus eine weitere Bedeutung. Bankenaufsichtliche Regelungen schreiben Finanzinstituten eine Messung ihrer Marktpreisrisiken mit Hilfe des Value-at-Risk vor.

Der Value-at-Risk ist wie folgt definiert:

#### **Definition 2.9 (Value-at-Risk)**

*Die Kennzahl Value-at-Risk (VaR) gibt den möglichen Verlust an, den das betrachtete Portfolio innerhalb eines vorgegebenen Zeitraums  $\Delta t$  mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  betragsmäßig nicht überschreitet.*

Die mit dieser Risikokennzahl gemessenen Risiken müssen – multipliziert mit einem Faktor – mit Eigenkapital unterlegt werden<sup>20</sup>. Dieses Eigenkapital kann von den Finanzinstituten nicht eingesetzt werden, sondern muss dauerhaft verfügbar sein.

Dementsprechend hat die Höhe des Value-at-Risk einen direkten Einfluss auf die Höhe des Eigenkapitals von Finanzinstituten. An die Eigenkapitalquote von Finanzinstituten werden von unterschiedlichen Seiten Anforderungen gestellt [76]:

---

<sup>20</sup>Dies trifft auf alle Banken zu, die ein vom BAFin anerkanntes internes Modell zur Steuerung ihrer Risiken einsetzen. Alle anderen Finanzinstitute müssen gemäß einer sogenannten Standardmethode ihr benötigtes Eigenkapital bestimmen. Da diese Methode für alle Finanzinstitute gleichermaßen gilt, können spezifische Portfolio-Risiken nicht berücksichtigt werden. Dementsprechend wurde ein *Risikopuffer* in diese Methode eingebaut.

- Die regulatorischen Anforderungen an eine Mindesteigenkapitalquote sind seit der Veröffentlichung des ersten Baseler Akkords (Basel I) auf ein international geltendes Mindestniveau angehoben worden [15].
- Rating-Agenturen machen das Rating von Finanzinstituten u. a. von einer angemessenen Eigenkapitalquote abhängig<sup>21</sup>.
- Das interne Risiko-Management hat weitere oder von den Rating-Agenturen abweichende Anforderungen an die Höhe des Eigenkapitals und an die Eigenkapitalstruktur. Dies ist u. a. darin begründet, dass das interne Risiko-Management nicht nur auf mittel- bis langfristige Veränderungen des Eigenkapitalbedarfs angemessen reagieren und steuernd eingreifen muss, sondern auch den kurzfristigen Eigenkapitalbedarf steuert.

Dies bedeutet allerdings, dass innerhalb des Finanzsektors ein Portfolio-Management ohne Berücksichtigung der Eigenkapital-Kosten, d. h. ohne Berücksichtigung des Value-at-Risk nicht mehr denkbar ist. Dies gilt nicht nur für die Portfolio-Steuerung auf Gesamtbankebene, sondern auch auf Einzel-Portfolio-Ebene, da die Eigenkapital-Zuordnung innerhalb eines Finanzinstituts auf einer niedrigeren Ebene ansetzt<sup>22</sup>.

## 2.6 Performance-Begriff im Portfolio-Management

Unter Performance versteht man allgemein eine ex-post ermittelte Erfolgsgröße, die sich oftmals auf eine Benchmark bezieht und dabei das tatsächlich eingegangene Risiko berücksichtigt.

Das wichtigste Ziel der Performance-Messung ist die Kontrolle der vorangegangenen Entscheidungen im Portfolio-Management-Prozess. Das Ergebnis der zu bewertenden Portfolios wird in Relation zu dem Ergebnis eines Benchmark-Portfolios gesetzt.

---

<sup>21</sup>Das Rating ist die bestimmende Größe für die Refinanzierungskosten eines Unternehmens.

<sup>22</sup>Wir werden daher im Kapitel 5 dieser Arbeit in die noch zu beschreibenden Online-Algorithmen zur Portfolio-Optimierung die Kennzahl des Value-at-Risk integrieren.

Falls eine aktive Investitionsstrategie verfolgt wird, findet nach der Performance-Messung gegebenenfalls eine Readjustierung der Zusammensetzung des Portfolios statt.

In einem der vorigen Abschnitte haben wir unterschiedliche Ansätze zur Portfolio-Optimierung kennen gelernt. Darauf aufbauend wurden einige der wichtigsten Risikomaße vorgestellt. Aus diesen Risikomaßen lassen sich Performance-Maße für die unterschiedlichen Modelle zur Portfolio-Optimierung ableiten.

Performance-Maße versuchen, Investitionsstrategien über eine Kennzahl vergleichbar zu machen, um Investoren eine Entscheidung über die geeignete Strategie zur Portfolio-Optimierung zu ermöglichen. In dem folgenden Kapitel werden wir Gütemaße für Online-Algorithmen ableiten, die ebenfalls eine Vergleichbarkeit von Algorithmen bzw. Strategien ermöglichen und somit auch als Performance-Maße im finanzwissenschaftlichen Sinne dienen können.

Im Folgenden sollen nur die am meisten verwendeten Performance-Maße genannt werden. Insbesondere auf eine Vertiefung von asymmetrischen Performance-Maßen, die man auf Basis der in dem vorherigen Abschnitt behandelten Risikomaßen entwickeln kann, wird hier verzichtet<sup>23</sup>.

### 2.6.1 Sharpe-Ratio

Die *Sharpe-Ratio* ist für ein Portfolio mit dem Portfoliovektor  $\mathbf{b}$  definiert als:

$$P_{Sharpe}(\mathbf{b}) = \frac{S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) - S_{risikolos}}{\sqrt{V(S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}))}} \quad (2.19)$$

Damit kann die Sharpe-Ratio als Überschussrendite pro Risikoeinheit aufgefasst werden.

Mit Hilfe der Sharpe-Ratio lassen sich also unterschiedlich strukturierte Portfolios – inklusive einer eventuell vorhandenen Benchmark – in eine Reihenfolge bringen. Eine Schwachstelle der Sharpe-Ratio ist allerdings, dass keine Unterscheidung zwischen dem unsystematischen und systematischen Risiko vorgenommen wird [92].

---

<sup>23</sup>An dieser Stelle seien die LPM-Performance-Maße sowie auch die stochastische Dominanz erwähnt [92].

### 2.6.2 Treynor-Ratio

Bei der *Treynor-Ratio* [103] erfolgt die Risikoadjustierung nicht mit Hilfe des Gesamtrisikos des Portfolios, vielmehr wird das Portfolio-Beta (s. Single-Index-Modell o. CAPM) als Risikoparameter genutzt:

$$P_{Treynor}(\mathbf{b}) = \frac{S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) - S_{risikolos}}{\beta_{\mathbf{b}}}, \quad (2.20)$$

wobei  $\beta_{\mathbf{b}} = Cov[\mathbf{b}^{Markt}, \mathbf{b}] / V[S(\mathbf{b}^{Markt}, \mathbf{X}_i)]$  ist.

Die Treynor-Ratio ermittelt somit die realisierte Risikoprämie je Einheit systematischen Risikos. Da aber insbesondere bei aktiv gemanagten Portfolios nicht immer von einer ausreichenden Diversifikation ausgegangen werden kann, ist es möglich, dass diese Portfolios einen hohen Anteil an unsystematischem Risiko besitzen, das bei Verwendung der Treynor-Ratio unberücksichtigt bleibt.

### 2.6.3 Jensen-Maß

Sowohl die Sharpe-Ratio als auch die Treynor-Ratio kommen ohne explizite Benchmark aus. Das Jensen-Maß [58], das auf der Idee des Single-Index-Modells aufsetzt, benötigt eine Benchmark:

$$P_{Jensen} = (S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) - S_{risikolos}) - \beta_{\mathbf{b}}(S(\mathbf{b}^{BEN}, \mathbf{X}^{(n)}) - S_{risikolos}), \quad (2.21)$$

wobei  $\beta_{\mathbf{b}} = Cov[\mathbf{b}^{Markt}, \mathbf{b}] / V[S(\mathbf{b}^{Markt}, \mathbf{X}_i)]$  ist.

Das Jensen-Maß ermittelt also den risikoadjustierten Mehrertrag des Portfolios gegenüber der Benchmark [92].

### 2.6.4 RAPM auf Basis des Value-at-Risk

Unter risikoadjustierter Performance-Messung (*RAPM*<sup>24</sup>) wird allgemein die Messung und der Vergleich des Erfolgs verschiedener Portfolios auf der Basis von Rentabilitätskennziffern, die den Erfolg pro eingesetztem Kapital messen, verstanden.

In Verbindung mit der Kennziffer des Value-at-Risk kann folgendes Performance-Maß angegeben werden:

$$RAPM = \frac{S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{VaR} \quad (2.22)$$

---

<sup>24</sup>RAPM: Risk Adjusted Performance Measurement

Dieses Performance-Maß findet in der Arbeit weitere Verwendung, da es eine – wie bereits in diesem Kapitel aufgezeigt – für Finanzinstitute über die reine Performance-Messung hinausgehende Bedeutung besitzt. Die Integration des Value-at-Risk in ein Performance-Maß ermöglicht es Finanzinstituten, eine Performance-Ermittlung einzelner Portfolios unter Einbeziehung von Risikokosten vorzunehmen.

# Kapitel 3

## Online-Algorithmen

Investitionsstrategien sollen also mittels Performance-Maßen – die man auch als Gütemaße bezeichnen kann – vergleichbar gemacht werden, um Entscheidungen über die geeignete Strategie zur Portfolio-Optimierung zu ermöglichen. In diesem Kapitel wird der Gedanke des Gütemaßes im Rahmen von Online-Algorithmen wieder aufgenommen und weitergeführt.

Zunächst werden die grundlegenden Begriffe, die für die Behandlung von Online-Algorithmen benötigt werden, definiert. Anschließend werden Gütekriterien für Online-Algorithmen auf Basis von entscheidungstheoretischen Überlegungen entwickelt. Hierbei ist insbesondere der Begriff der Unsicherheit von großer Bedeutung, da sich je nach Verständnis von Unsicherheit andere Entscheidungskriterien anbieten, die zur Benutzung von unterschiedlichen Gütemaßen führen.

Um einen anderen und umfassenderen Blick auf Online-Algorithmen zu erhalten, gehen wir auf *Request-Answer-Games* ein. Im Rahmen dieses aus der Spieltheorie stammenden Konzepts lassen sich verschiedene Gegnermodelle entwickeln, auf die wir im Laufe der Arbeit zurückkommen werden.

### 3.1 Motivation

In der klassischen kombinatorischen Optimierung werden Probleme behandelt, bei denen die zur Bearbeitung notwendigen Daten bereits zu Anfang vollständig vorliegen.

Auf diese Weise können Algorithmen entwickelt werden, die aufbauend

auf diesem vollständigen Wissen – zumindest approximativ – die optimale Lösung für das jeweilige Problem finden.

Häufig spiegelt jedoch diese Offline-Optimierung nur unzureichend Situationen im Anwendungskontext wider. Eine Vielzahl der in der Praxis auftretenden Probleme sind Online-Probleme, d. h. es werden Entscheidungen von Algorithmen gefordert, bevor die zur optimalen Lösung erforderlichen Daten vollständig vorliegen. Dies ist insbesondere dann gegeben, wenn die zur optimalen Bearbeitung eines Problems erforderlichen Daten erst an zukünftigen Zeitpunkten zur Verfügung stehen.

Ein typisches und auch eingängiges Online-Problem stellt das *Paging-Problem* dar:

Gegeben sei ein Speichersystem bestehend aus einem schnellen Speicher (bspw. dem Cache) mit  $k$  Speichereinheiten (Seiten) und einem langsamen Speicher (bspw. der Festplatte) mit  $n \gg k$  Speichereinheiten. Ein Paging-Algorithmus hat die Aufgabe, immer die gerade benötigten Seiten im schnellen Speicher vorzuhalten.

Falls sich die angefragte Seite nicht im schnellen Speicher befindet, muss sie bei Entstehung von Kosten von dem langsamen in den schnellen Speicher transferiert werden. Man spricht in diesem Fall von Seitenfehlern. Ein optimaler Paging-Algorithmus minimiert also die Anzahl von Seitenfehlern, wobei allerdings zu beachten ist, dass die zukünftigen Seitenanfragen nicht bekannt sind [47].

Die Frage, die sich nun stellt, ist die nach der Bewertung von Paging-Algorithmen. Einerseits ist die Anwendung der klassischen *Worst-Case-Analyse* nicht zielführend, da zu jedem Paging-Algorithmus eine Anfragesequenz der Länge  $m$  gefunden werden kann, die  $m$  Seitenfehler produziert. Eine einfache *Average-Case-Analyse* ist auch nicht ohne Schwierigkeiten durchführbar, da ein – bspw. statistisches – Modell für die Folge der Anfragen benötigt wird.

Sleator und Tarjan [91] haben diese Beobachtung aufgegriffen und das Konzept der kompetitiven Analyse vorgeschlagen. Bei der kompetitiven Analyse wird die Lösung eines Online-Algorithmus mit einem Benchmark-Algorithmus – hier wird meist der optimale Offline-Algorithmus als Vergleichsmaßstab herangezogen – verglichen.

Das Verhältnis dieser Lösungen wird als Kompetitivitätsrate bezeichnet und stellt ein Gütemaß für den Online-Algorithmus dar<sup>1</sup>.

Im folgenden seien einige weitere Problemstellungen genannt:

- *k-Server-Problem*

Sei  $S$  ein metrischer Raum mit anfänglich von  $n$  Servern  $s_1, \dots, s_n$  besetzten Punkten  $a_1, \dots, a_n$ . Ferner bezeichne  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$  eine Folge von Anfragen, wobei  $\sigma_i$  einen Punkt aus  $S$  bezeichnet, der von einem der Server bedient werden muss. Eine Deplazierung des Servers  $a_j$  verursacht Kosten von  $d(a_j, \sigma_i)$ . Hierbei ist  $d$  eine Distanzfunktion auf dem metrischen Raum  $S$ .

Ziel ist es, die Anfragen der Folge  $\sigma$  so zu bedienen, dass die Summe der dabei entstehenden Kosten minimiert wird [73].

- *Scheduling-Problem*

Seien  $n$  Prozessoren vorhanden, die eine Folge  $\sigma = (J_1, \dots, J_m)$  von ankommenden Jobs *online* bearbeiten sollen. Jeder Job  $J_i$  benötigt eine Bearbeitungszeit  $t_i$ , die a priori bekannt ist.

Ziel ist es, jeden ankommenden Job  $J_i$  *online* einem Prozessor zuzuordnen, so dass die Bearbeitungszeit der Jobfolge  $\sigma$  minimiert wird [4].

Neben den oben skizzierten Online-Problemen lassen sich insbesondere im Finanzbereich Anwendungen für Online-Algorithmen finden:

- *Kapitalinvestitionen*

Ein Unternehmen produziert mit Hilfe von Maschinen Güter. Die Maschinen können kostenseitig durch Produktionskosten  $p_i$  (pro hergestelltes Gut) und Kapitalkosten  $c_i$  (einmaligen Anschaffungskosten) charakterisiert werden. Das Unternehmen muss sich entscheiden, zu welchen Zeitpunkten  $t_i$  Maschinen  $m_i = (t_i, c_i, p_i)$  gekauft werden sollen.

Ziel für das Unternehmen ist es, die Gesamtkosten zu minimieren [11].

---

<sup>1</sup>Bereits an dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass durch Verwendung eines (begrenzten) *Look-Aheads* weitere Online-Algorithmen mit interessanten Eigenschaften generiert werden können [3].

- *Hausfinanzierung*

Ein Investor benötigt zur Finanzierung einer Immobilie einen Kredit einer bestimmten Höhe  $k$ . Er kann zum Kaufzeitpunkt einen Kredit mit Kreditzinsen von  $p(0)\%$  über die Höhe  $k$  aufnehmen und zu bestimmten Zeitpunkten  $i$  eine Umschuldung des Kredits vornehmen, wobei die neuen Kreditzinsen  $p(i)$  sich gemäß des allgemeinen Zinsniveaus ändern.

Die Umschuldung des Kredits stellt allerdings eine aufwendige Transaktion dar, deren Kosten eine nicht zu vernachlässigende Größe<sup>2</sup> darstellen.

Ziel ist es, die Gesamtkosten, die zur Finanzierung der Immobilie aufgewendet werden müssen, zu minimieren [43].

- *Leasing*

Ein Investor benötigt ein Wirtschaftsgut für eine, ihm noch unbekannt, Anzahl von Zeitperioden. Am Beginn jeder Zeitperiode besitzt der Investor die folgenden Möglichkeiten:

- Zahlung einer Leasinggebühr  $l$  für das Wirtschaftsgut
- Kauf des Wirtschaftsguts

Ziel ist es auch hier, die Gesamtkosten des Investors zu minimieren [42].

- *Devisenhandel*

Ein Unternehmen muss zum Zeitpunkt  $t_2$  Kapital in einer anderen als seine eigene Währung halten, um ein Wirtschaftsgut zu kaufen<sup>3</sup>. Das Unternehmen hat vom Zeitpunkt  $t_1$  ( $t_2 > t_1$ ) an die Möglichkeit, Kapital in der eigenen Währung in die andere Währung zu tauschen.

Ziel ist es für das Unternehmen, den Umtausch des Kapitals so vorzunehmen, dass zum Zeitpunkt  $t_2$  möglichst viel Kapital in der anderen Währung vorliegt bzw. mit möglichst wenig Kapital die geforderte Menge an der anderen Währung erhalten wird [26].

---

<sup>2</sup>Im Verlauf der Arbeit werden wir noch näher auf Transaktionskosten eingehen.

<sup>3</sup>Als ein typisches Beispiel ist eine Mineralölfirma, die nicht in den USA ansässig ist, zu sehen. Dieses Unternehmen muss sämtliche Öllieferungen auf dem Weltmarkt mit USD bezahlen.

- *Portfolio-Optimierung*

Ein Investor investiert zum Zeitpunkt  $t_1$  Kapital in ein Portfolio bestehend aus  $m$  unterschiedlichen Anlagen. Innerhalb des (endlichen) Investitionszeitraums kann der Investor Umschichtungen innerhalb seines Portfolios vornehmen, er darf allerdings kein Kapital abziehen oder hinzufügen<sup>4</sup>.

Ziel des Investors ist die Anwendung einer optimalen Investitionsstrategie.

Mit dieser Problemstellung werden wir uns in den kommenden Kapiteln ausführlicher beschäftigen.

## 3.2 Grundlagen und Notationen

Wir werden zunächst ausgehend von klassischen Optimierungsproblemen Online-Optimierungsprobleme charakterisieren und Algorithmen, die diese Problemstellungen bearbeiten, als Online-Algorithmen definieren.

Ein Optimierungsproblem kann wie folgt definiert werden:

**Definition 3.1 (Optimierungsproblem)**

*Ein Optimierungsproblem  $P$  ist ein Tripel  $(\mathcal{I}, \mathcal{E}, S)$  mit den folgenden Bedeutungen:*

- $\mathcal{I}$  ist die Menge von Informationen (Eingaben)
- $\mathcal{E}$  ist die Menge von zulässigen Entscheidungen bzw. Aktionen oder Antworten für die Eingabe  $I \in \mathcal{I}$
- $S$  mit  $S : \mathcal{I} \times \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  ist die zu optimierende Zielfunktion

Ein Algorithmus  $ALG$  für ein Optimierungsproblem  $P$  berechnet bei gegebener Eingabe  $I \in \mathcal{I}$  eine Lösung  $ALG(I) \in \mathcal{E}$ . Falls es sich um ein Minimierungsproblem handelt, spricht man häufig von Kosten  $K$  und sucht dementsprechend den Ausdruck  $K(ALG, I)$  zu minimieren, um einen optimalen Algorithmus zu erhalten. Bei Maximierungsproblemen sprechen wir von der zu maximierenden Gewinnfunktion  $S(ALG, I)$ .

---

<sup>4</sup>Strategien, die diese Bedingungen erfüllen, heißen selbstfinanzierend.

Als ein Online-Problem wollen wir ein Optimierungsproblem bezeichnen, bei dem jede Eingabeinstanz  $I$  in Form einer Folge von zeitlich nacheinander zur Verfügung stehenden Informationen gegeben ist. Für eine endliche Eingabesequenz schreiben wir auch  $I^{(n)} = (I_1, \dots, I_n)$ . Die Information  $I_i$  wird damit dem Algorithmus – einem Online-Algorithmus – zum Zeitpunkt  $t = i$  mitgeteilt.

Ein Online-Algorithmus ist also ein Algorithmus, der bei der Verarbeitung der endlichen Eingabesequenz nach jeder neuen Information eine Entscheidung generieren muss. Die Generierung der Ausgabe erfolgt also ohne Kenntnis der kompletten Folge von Eingaben; eine bereits getätigte Ausgabe bzw. Entscheidung ist irreversibel.

Online-Algorithmen sind dementsprechend wie folgt definiert:

**Definition 3.2 (Online-Algorithmus)**

*Ein Online-Algorithmus für ein Optimierungsproblem  $P$  erzeugt aus einer Folge von Eingaben  $I^{(n)}$  schrittweise eine zulässige Folge von Ausgaben  $(E_1, \dots, E_n)$ , die den Algorithmus  $ALG(I^{(n)})$  charakterisiert.*

Falls ein Algorithmus hingegen erst nach Kenntnis der gesamten Eingabesequenz  $I^{(n)}$  diese Informationen verarbeiten muss, um Entscheidungen zu treffen, sprechen wir von einem Offline-Algorithmus:

**Definition 3.3 (Offline-Algorithmus)**

*Ein Offline-Algorithmus für ein Optimierungsproblem  $P$  erzeugt aus einer Folge von Eingaben  $I^{(n)}$  eine Ausgabe  $ALG(I^{(n)}) = (E_1, \dots, E_n)$ . Die Generierung der Ausgabe erfolgt unter Kenntnis der kompletten Eingabesequenz.*

Dementsprechend definieren wir einen optimalen Offline-Algorithmus für ein Maximierungsproblem wie folgt:

**Definition 3.4 (Optimaler Offline-Algorithmus)**

*Der Algorithmus  $OPT$  heißt optimaler Offline-Algorithmus für ein Optimierungsproblem  $P$ , falls gilt:*

$$OPT(I^{(n)}) = \max_{ALG} S(ALG, I^{(n)}) \quad \forall I^{(n)} \in \mathcal{I} \quad (3.1)$$

Bei den oben definierten Online-Algorithmen handelt es sich um deterministische Algorithmen. Durch Randomisierung kann man eine weitere Klasse von Online-Algorithmen generieren, die sich wie folgt charakterisieren lässt:

**Definition 3.5 (Randomisierter Online-Algorithmus)**

Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $P$  und eine Menge  $\mathcal{M}$  von (deterministischen) Online-Algorithmen  $ALG_i$  für das Problem  $P$ . Ein randomisierter Online-Algorithmus ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über der Menge  $\mathcal{M}$ .

In dem weiteren Verlauf der Arbeit werden wir uns in der Regel mit deterministischen Online-Algorithmen befassen.

## 3.3 Entscheidungstheoretische Grundlagen

### 3.3.1 Begriff der Unsicherheit

Bei dem Konzept der Online-Algorithmen wird die Betonung auf Problemstellungen gelegt, die irreversible Entscheidungen zu einem Zeitpunkt verlangen, an dem die für eine – ex post – optimale Entscheidung notwendigen Informationen nicht oder nur unvollständig vorliegen.

Im allgemeinen lassen sich Problemstellungen – je nach Struktur der fehlenden Informationen – in die folgenden Klassen einteilen:

- *Sicherheit:*

Entscheidungen unter Sicherheit sind Entscheidungen, bei denen zum Zeitpunkt der Entscheidung alle für die Entscheidung notwendigen Informationen zur Verfügung stehen. Bei dieser Problemklasse existiert kein Entscheidungsproblem im eigentlichen Sinn; die Aufgabe besteht lediglich in der Identifikation der besten Aktion, d. h. diese Problemklasse korrespondiert mit der klassischen Optimierung, bei der die Berechnung dieser besten Aktion im Vordergrund steht<sup>5</sup>.

- *Unsicherheit:*

Entscheidungen unter Unsicherheit sind Entscheidungen, bei denen zu einem gegebenen Zeitpunkt  $t = i$  noch nicht alle für die Entscheidung relevanten Informationen zur Verfügung stehen. Eine weitere Unterteilung dieser Problemklasse nach Struktur der Unsicherheit kann vorgenommen werden:

---

<sup>5</sup>Dementsprechend können Entscheidungsprobleme unter Sicherheit mit Offline-Algorithmen bearbeitet werden.

- *Risiko:*  
Eine Entscheidung unter Risiko wollen wir als solche bezeichnen, bei denen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von für die Entscheidung relevanter Informationen bekannt ist.
- *Plausibilität (Modellunsicherheit):*  
Bei einer Entscheidung unter Plausibilität unterliegen die Informationen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dieses Wahrscheinlichkeitsmodell ist jedoch dem Entscheider nicht bekannt, so dass er aus einer Klasse von Modellen ein ihm plausibel erscheinendes Modell spezifizieren muss, das er den Informationen zugrunde legt, um in einem zweiten Schritt basierend auf diesen Informationen Entscheidungen treffen zu können [107].
- *Strikte Unsicherheit:*  
Bei einer Entscheidung unter strikter Unsicherheit ist keine Aussage über die Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer für die Entscheidung relevanten Information möglich.

### 3.3.2 Gütekriterien

Zur Bewertung der Ergebnisse von Online-Algorithmen existieren unterschiedliche Ansätze, deren Einsatz u. a. von der Entscheidungsproblemklasse abhängen. In der Folge sollen die wesentlichen Güte- bzw. Entscheidungskriterien für die oben skizzierten Problemklassen beschrieben werden:

#### Definition 3.6 (Entscheidungskriterium)

Gegeben sei ein Entscheidungsproblem  $P = (\mathcal{I}, \mathcal{E}, S)$ . Ein Entscheidungskriterium ist eine vollständige und transitive Ordnungsrelation (oder auch Präferenzrelation)  $\preceq_P$  über  $\mathcal{E}$ .

Mit dieser Definition kann ein für ein gegebenes Problem  $P$  optimaler Algorithmus  $ALG_a \in \mathcal{E}$  als der Algorithmus definiert werden, für den gilt:

$$ALG^* \preceq_P ALG \quad \forall ALG \in \mathcal{E}$$

### 3.3.2.1 Kriterien für die Entscheidung unter Risiko bzw. Plausibilität

An dieser Stelle sollen mit der Average-Case-Analyse und der Mean-Variance-Analyse zwei wichtige Entscheidungskriterien beschrieben werden:

- *Average-Case-Analyse*

Bei der Average-Case-Analyse werden Annahmen über die statistische Verteilung von Eingabeparametern  $I_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) getroffen. Das Ergebnis des betrachteten Online-Algorithmus stellt dann eine von den über Zufallsvariablen modellierten Eingabeparameter abhängige Zufallsvariable dar. Der Erwartungswert dieser Zufallsvariable wird für die Bewertung des Online-Algorithmus herangezogen.

- *Mean-Variance-Analyse*

Die Mean-Variance-Analyse nutzt zur Bewertung von Online-Algorithmen die ersten beiden Momente der angenommenen Verteilungsfunktion und stellt somit eine natürliche Erweiterung der Average-Case-Analyse dar.

Die Mean-Variance-Analyse wird – wie bereits in dem vorangegangenen Kapitel ausgeführt – für Investitionsstrategien wie die effizienten Portfolios von Markowitz [75] oder das CAPM von Sharpe et al. [89] angewendet. Diese Strategien können in ihrer Erweiterung auf Mehr-Perioden-Modelle als Online-Algorithmen aufgefasst werden.

### 3.3.2.2 Kriterien für die Entscheidung unter strikter Unsicherheit

Im folgenden Abschnitt werden Kriterien für Entscheidungen unter strikter Unsicherheit definiert. Auf einige dieser Kriterien werden wir im weiteren Verlauf der Arbeit zurückgreifen.

- *Kompetitivitätsrate*

Die Kompetitivitätsrate eines Online-Algorithmus  $ALG$  ist wie folgt definiert<sup>6</sup>:

---

<sup>6</sup>Neben der hier aufgeführten Definition existiert eine weitere Definition [18], die zusätzlich eine additive Konstante zulässt, die insbesondere bei Verwendung kleinerer Eingabesequenzen sinnvoll ist.

**Definition 3.7 (Kompetitivitätsrate)**

Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $\mathcal{P} = (\mathcal{I}, \mathcal{E}, S)$  und  $ALG$  bezeichne einen Online-Algorithmus für dieses Optimierungsproblem. Ferner sei  $BEN$  ein weiterer Algorithmus für das Problem  $\mathcal{P}$ , der als Vergleichsmaßstab (Benchmark) dienen soll.

Dann ist die Kompetitivitätsrate  $c_n(ALG, BEN)$  definiert als

$$c_n(ALG, BEN) = \sup_{I \in \mathcal{I}} \frac{S(BEN, I)}{S(ALG, I)}$$

Man sagt, dass der Online-Algorithmus  $ALG$   $c_n(ALG, BEN)$ -kompetitiv zu dem Benchmark-Algorithmus  $BEN$  ist<sup>7</sup>.

Auf die kompetitive Analyse von Online-Algorithmen werden wir in dem nächsten Abschnitt ausführlicher eingehen.

- *Minimax-Regret*

Der Minimax-Regret eines Online-Algorithmus  $ALG$  ist folgendermaßen definiert:

**Definition 3.8 (Minimax-Regret)**

Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $\mathcal{P} = (\mathcal{I}, \mathcal{E}, S)$ .  $ALG$  bezeichne einen Online-Algorithmus für dieses Optimierungsproblem. Ferner sei  $OPT$  der optimale Offline-Algorithmus für das Problem  $\mathcal{P}$ .

Dann ist der Minimax-Regret  $r(ALG, OPT)$  definiert als

$$r(ALG, OPT) = \sup_{I \in \mathcal{I}} \{S(OPT, I) - S(ALG, I)\}$$

- *Pessimismus-Optimismus-Index*

Der Pessimismus-Optimismus-Index wurde von Hurwitz entwickelt [40]:

**Definition 3.9 (Pessimismus-Optimismus-Index)**

Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $\mathcal{P} = (\mathcal{I}, \mathcal{E}, S)$  und  $ALG$  bezeichne einen Online-Algorithmus für dieses Optimierungsproblem.

---

<sup>7</sup>Die an dieser Stelle verwendete Definition weicht von der üblichen Definition insofern ab, als dass nicht automatisch der optimale Offline-Algorithmus als Benchmark definiert wird.

Ferner bezeichne  $\alpha \in [0, 1]$  den sogenannten *Pessimismus-Index*.

Der *Pessimismus-Optimismus-Index*  $p(ALG)$  ist definiert als:

$$p(ALG) = \alpha \cdot \sup_{I \in \mathcal{I}} S(ALG, I) + (1 - \alpha) \cdot \inf_{I \in \mathcal{I}} S(ALG, I)$$

Die beiden oben aufgeführten Entscheidungskriterien *Kompetitivitätsrate* und *Minimax-Regret* sind eng miteinander verwandt. Es besteht der folgende Zusammenhang:

### Theorem 3.1

Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $P = (\mathcal{I}, \mathcal{E}, S)$ ,  $ALG$  bezeichne einen Online-Algorithmus und  $OPT$  den optimale Offline-Algorithmus für das Problem  $P$ . Das verwendete Entscheidungskriterium sei die *Kompetitivitätsrate*. Ferner sei  $P' = (\mathcal{I}, \mathcal{E}, S')$  ein weiteres Optimierungsproblem und  $OPT'$  bezeichne den optimalen Offline-Algorithmus für das Problem  $P'$ . Für die Zielfunktion  $S'$  gelte:  $S'(ALG, I) = \log S(ALG, I)$ . Bei dem Optimierungsproblem  $P'$  werde *Minimax-Regret* als Entscheidungskriterium verwendet.

Dann sind die beiden Probleme  $P$  und  $P'$  äquivalent in dem folgenden Sinne, dass für alle Algorithmen  $ALG_i, ALG_j$  gilt:

$$ALG_i \prec_P ALG_j \Leftrightarrow ALG_i \prec_{P'} ALG_j$$

Ferner sind die Strategien  $OPT$  und  $OPT'$  identisch.

### Beweis:

Der Beweis folgt direkt aus der Definition der Optimierungsprobleme  $P$  und  $P'$  und der Definition der beiden Entscheidungskriterien.  $\square$

Insbesondere ist der für das Problem  $P$  optimale Online-Algorithmus  $ALG_P^*$  identisch mit dem optimalen Online-Algorithmus  $ALG_{P'}^*$  für das Problem  $P'$ .

Bevor wir weiter auf die *kompetitive Analyse* von Online-Algorithmus eingehen, soll der Begriff des Benchmark-Algorithmus mit Hilfe des aus der Spieltheorie stammenden Konzepts des *Request-Answer-Games* ausführlicher untersucht werden.

### 3.4 Gegnermodelle

Bei der kompetitiven Analyse wird die Güte eines Online-Algorithmus durch den Vergleich des Ergebnisses des Online-Algorithmus mit dem eines anderen Algorithmus, der als Benchmark dient, ermittelt.

Man kann diese kompetitive Analyse auch im Rahmen von *Request-Answer-Games* verstehen. Hierbei wählt der *Gegner* im allgemeinen Fall sowohl die Folge von Informationen als auch den Benchmark-Algorithmus aus.

Es ergeben sich, je nach Restriktion für den Gegner, unterschiedliche Gegnermodelle, deren wichtigste Klassen wie folgt charakterisiert werden können:

- *Kenntnis des Online-Algorithmus*  
Der Gegner kann Kenntnis über die Aktionen des Online-Algorithmus besitzen und dementsprechend die Folge von Informationen so generieren, dass der Online-Algorithmus eine möglichst schlechte Kompetitivität erreicht.
- *Auswahl der Informationen*  
Der Gegner kann die Folge von Informationen nicht frei wählen. Der Informationsraum kann eingeschränkt werden oder kann z. B. statistischen Restriktionen genügen.
- *Auswahl der Benchmarks*  
Der Gegner kann den Benchmark-Algorithmus nicht aus der Menge aller Algorithmen auswählen, sondern muss den Benchmark aus einer bestimmten Algorithmus-Klasse heraussuchen.

Damit ergeben sich u. a. folgende Gegnermodelle:

- *Blinder Gegner*  
Ein blinder Gegner (oblivious adversary) muss die vollständige Folge von Informationen zum Zeitpunkt  $t = 0$  wählen. Dabei hat er kein Wissen über die Entscheidungen des Online-Algorithmus.

Bei der Verwendung von randomisierten Online-Algorithmen besitzt der Gegner zwar Kenntnis von dem Online-Algorithmus, nicht aber über die von ihm genutzte Wahrscheinlichkeitsverteilung.

- *Statistischer Gegner*

Ein statistischer Gegner kann nur Folgen von Informationen auswählen, die bestimmten statistischen Eigenschaften genügen<sup>8</sup>.

- *Adaptiver Gegner*

Man spricht von einem adaptiven Gegner, wenn dieser bei Kenntnis der bis zum Zeitpunkt  $t_i$  vom Online-Spieler getroffenen Entscheidungen eine neue Information  $I_{i+1}$  liefern kann.

An dieser Stelle kann eine weitere Unterteilung dieses Gegnermodells vorgenommen werden:

- *Adaptiver Offline-Gegner*

Ein adaptiver Offline-Gegner bearbeitet die von ihm generierte Folge von Informationen erst zum Zeitpunkt  $t = T$  am Ende des Investitionszeitraums, d. h. mit dem optimalen Offline-Algorithmus.

- *Adaptiver Online-Gegner*

Ein adaptiver Online-Gegner bearbeitet die von ihm generierte Folge von Informationen *online*.

Zwischen den oben genannten Gegnermodellen besteht hinsichtlich deren Kompetitivität u. a. folgender Zusammenhang:

**Theorem 3.2**

*Gegeben sei ein Optimierungsproblem  $P$ . Wenn für das Optimierungsproblem  $P$  ein randomisierter Online-Algorithmus, der mit der Kompetitivitätsrate  $c$  kompetitiv gegenüber jedem adaptiven Online-Gegner ist, existiert, dann existiert – gegenüber dem optimalen Offline-Algorithmus – ein mit der Kompetitivitätsrate  $c^2$  kompetitiver deterministischer Online-Algorithmus.*

**Beweis:**

Der Beweis ist [18] zu entnehmen. □

In den folgenden Kapiteln dieser Arbeit werden wir uns auf deterministische Online-Algorithmen beschränken. Es werden als Gegner (bzw. Benchmark) Offline-Algorithmen genutzt, die innerhalb einer Klasse von Algorithmen optimal sind.

---

<sup>8</sup>An dieser Stelle beginnt die Grenze zwischen Modellunsicherheit und strikter Unsicherheit aufzuweichen. So könnte z. B. der statistische Gegner nur auf eine der Normalverteilung genügende Folge von Informationen zurückgreifen dürfen.



# Kapitel 4

## Online-Portfolio-Optimierung

### 4.1 Allgemeine Problemstellung

Ein Portfolio-Manager möchte für einen bestimmten Zeitraum  $[0, n]$  ein Vermögen in eine endliche Anzahl von Finanzinstrumenten investieren. Er kann nur zu bestimmten Zeitpunkten  $0, 1, \dots, n$  Transaktionen vornehmen, um Umschichtungen innerhalb des Portfolios zu erreichen, d. h. der Zeitraum  $[0, n]$  lässt sich für den Investor in  $n + 1$  Zeitpunkte unterteilen.

Da die zukünftige Kursentwicklung der betrachteten Finanzinstrumente dem Portfolio-Manager nicht bekannt ist, er aber zu jedem Zeitpunkt  $i$  eine Entscheidung bzgl. der Umschichtung innerhalb des Portfolios treffen muss, stellt diese Aufgabe ein typisches Online-Problem dar.

Auf die statistische Modellierung der zukünftigen Wertänderungen der betrachteten Finanzinstrumente soll verzichtet werden, d. h. wir betrachten ein Entscheidungsproblem unter strikter Unsicherheit.

In den vorherigen Kapiteln wurden einerseits die grundlegenden Begriffe und Verfahren der Portfolio-Optimierung behandelt, andererseits mit den Online-Algorithmen eine Klasse von Algorithmen eingeführt, die sich gut zur Lösung der bei der Portfolio-Optimierung auftretenden Fragestellungen eignet.

Der kompetitiven Analyse kommt bei diesen Problemstellungen eine große Bedeutung zu, da diese Analyse durch einen Vergleich von Investitionsstrategien zu vorher festgelegten Benchmarks die Güte dieser Investitionsstrategien ermittelt. Ein Vorgehen, das – wie in Kapitel 2 beschrieben

– insbesondere bei ökonomischen Problemstellungen Verwendung findet.

In diesem Kapitel werden zunächst Online-Algorithmen für eine stark vereinfachte Form der Portfolio-Optimierung entwickelt, um einige der Schwierigkeiten, die mit dieser Problemstellung – dies betrifft u. a. die Wahl einer geeigneten Benchmark – verbunden sind, deutlich hervorzuheben.

Erst dann werden die Grundkonzepte der bisher bekannten Online-Algorithmen für die allgemeine Problemstellung beschrieben, die sich durch die Eigenschaft der Log-Optimalität auszeichnen. Es werden aufbauend auf die Gemeinsamkeiten der vorgestellten Investitionsstrategien Möglichkeiten der Zusammenführung der beschriebenen Ansätze diskutiert und ein auf den bestehenden Online-Investitionsstrategien aufbauender Online-Algorithmus entwickelt.

## 4.2 Investition in eine risikobehaftete Anlage

In diesem Abschnitt soll das Problem der Portfolio-Optimierung auf die Optimierung eines Portfolios mit nur einer risikobehafteten Anlage reduziert werden<sup>1</sup>.

Die Problemstellung entspricht damit der eines Investors, der

- seine bereits getätigte Investition in ein Wertpapier<sup>2</sup> innerhalb eines definierten Zeitraums veräußern möchte,
- während dieses definierten Zeitraums die Möglichkeit besitzt, Anteile an diesem Wertpapier zu verkaufen oder sich wieder einzudecken und
- am Ende des betrachteten Zeitraums die gehaltenen Wertpapiere vollständig verkauft.

Die Aufgabe der Verteilung der betrachteten Wertpapiere in dem Portfolio des Investors wird auf diese Weise auf die Frage nach dem optimalen Investitionszeitpunkt reduziert.

---

<sup>1</sup>Dieses Problem ist analog dem in [26] beschriebenen Problem des Devisenhandels.

<sup>2</sup>O.B.d.A. hält der Investor einen Anteil an der risikobehafteten Anlage.

### 4.2.1 Unidirektionaler Handel

Um die oben skizzierte Problemstellung der Investition in eine einzige Anlage noch weiter zu vereinfachen, soll zunächst ein Wiederankauf von zuvor veräußerten Anteilen an der risikobehafteten Anlage nicht zugelassen werden. Ferner soll der Portfolio-Manager zum Zeitpunkt  $T$  nicht mehr in der Anlage investiert sein, d. h. sein Investitionshorizont fällt mit dem Zeitpunkt  $T$  zusammen.

Der Investor macht keine statistischen Annahmen über den Kursverlauf der risikobehafteten Anlage, schätzt aber eine untere und obere Schranke  $p_u$  resp.  $p_o$  für den Kursverlauf in dem betrachteten Zeitraum.

#### 4.2.1.1 Problembeschreibung

Sei die Folge  $P = (p_1, \dots, p_n)$  mit  $p_i \in \mathbb{R}^+$  der Kursverlauf der risikobehafteten Anlage und  $p_u$  resp.  $p_o$  die vom Investor geschätzte untere resp. obere Schranke<sup>3</sup>. Bezeichne  $OPT$  die optimale Offline-Strategie,  $ALG$  einen Online-Algorithmus und  $K(OPT, P^{(n)})$  resp.  $K(ALG, P^{(n)})$  das Kapital, das die jeweilige Strategie am Ende des Investitionszeitraums besitzt. Für die Kompetitivitätsrate  $c_{n,p_u,p_o}$  des Online-Algorithmus gegenüber dem Benchmarkalgorithmus  $OPT$  gilt:

$$c_{n,p_u,p_o} = \sup_{P^{(n)}} \frac{K(OPT, P^{(n)})}{K(ALG, P^{(n)})}$$

Da der Offline-Algorithmus Kenntnis von dem gesamten Kursverlauf der risikobehafteten Anlage in dem Investitionszeitraum besitzt, verkauft dieser Algorithmus sämtliche Anteile an der Anlage zu dem Zeitpunkt, an dem der Kurs in dem betrachteten Zeitraum maximal ist. Für das Kapital  $K(OPT, P^{(n)})$  gilt damit:

$$K(OPT, P^{(n)}) = \max_{1 \leq i \leq n} p_i$$

#### 4.2.1.2 Threat-basierter Online-Algorithmus

In diesem Abschnitt soll eine Online-Strategie vorgestellt werden, die zusätzlich zu den Annahmen über den Kursverlauf eine Angabe über die zu erreichende Kompetitivitätsrate erhält [26]. Die minimale Kompetitivitätsrate kann darauf aufbauend in einem weiteren Schritt abgeleitet

---

<sup>3</sup>Wir wollen in der Folge davon ausgehen, dass diese geschätzten Schranken den wahren Schranken entsprechen. Es gelte ferner  $p_u < p_o$ .

werden.

Der *Threat-basierte Online-Algorithmus TBO* kann über die drei folgenden Regeln definiert werden:

- *Regel 1:*  
Am Ende des vorgegebenen Zeitraums hält der Investor kein Kapital mehr in der risikobehafteten Anlage.
- *Regel 2:*  
Mit Ausnahme der ersten Regel werden nur zum Zeitpunkt  $t = k$  Anteile an der risikobehafteten Anlage verkauft, wenn der Kurs  $p_k$  höher als jeder bisher aufgetretene Kurs  $p_i \forall 1 \leq i < k$  ist.
- *Regel 3:*  
Wenn der Kurs der Anlage ein neues Maximum erreicht, werden gerade genau so viele Anteile an der Anlage verkauft, dass – für den Fall, dass der Kurs anschließend auf den Wert der (geschätzten) unteren Schranke  $p_u$  fällt und dort bis zum Ende des betrachteten Zeitraums verweilt – die vorgegebene Kompetitivitätsrate erzielt wird<sup>4</sup>.

Der durch diese drei Regeln beschriebene Algorithmus *TBO* garantiert die vorgegebene Kompetitivitätsrate, falls diese überhaupt erreichbar ist.

Wir benötigen für die Analyse der Kompetitivitätsrate des Online-Algorithmus *TBO* weitere Notationen:

Sei  $q_1, \dots, q_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) die Folge der nacheinander auftretenden – neuen – Kursmaxima<sup>5</sup>. Ferner bezeichne  $A(q_i)$  den Anteil an der risikobehafteten Anlage, die der Investor zu dem Zeitpunkt hält, an dem der Kurs erstmals den Wert  $q_i$  erreicht hat. Analog sei  $K(q_i)$  das Kapital, das der Investor zu diesem Zeitpunkt bereits besitzt. Die Anteile der Anlage, die zum Kurs  $q_i$  verkauft werden, sollen in der Folge mit  $d_i = A(q_i) - A(q_{i-1})$  bezeichnet werden. O. B. d. A. gelte für den Wert der geschätzten unteren Schranke  $p_u = 1$ <sup>6</sup>.

---

<sup>4</sup>Aus dieser Regel leitet sich der Name *Threat-basierter Online-Algorithmus* ab.

<sup>5</sup>Unter diesen neuen Kursmaxima wollen wir das jeweils zum aktuellen Zeitpunkt aufgetretene Maximum der Kurse verstehen.

<sup>6</sup>Dies impliziert, dass für sämtliche Kursmaxima  $q_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) gilt:  $q_i > 1$ .

Wir nehmen im Folgenden an, dass die Kursfolge  $P^{(n)}$  monoton von  $p_1$  nach  $p_o$ , der geschätzten oberen Schranke, wächst und eine erreichbare Kompetitivität  $c_{n,p_u,p_o}$  vorgegeben ist. Für den Threat-basierten Algorithmus lassen sich dann aus den Regeln folgende Bedingungen herleiten [26]:

1.  $A(q_i) = 1 \wedge K(q_i) = 0$ , falls  $q_i \leq c_{n,p_u,p_o} \cdot p_u$
2.  $A(q_i) + K(q_i) = q_i/c_{n,p_u,p_o}$ , falls  $q_i \in [c_{n,p_u,p_o} \cdot p_u, p_o]$
3.  $q_i \cdot d_i = K(q_i) - K(q_{i-1})$

Durch Subtraktion der Gleichung  $A(q_{i-1}) + K(q_{i-1}) = q_{i-1}/c_{n,p_u,p_o}$  von der Gleichung  $A(q_i) + K(q_i) = q_i/c_{n,p_u,p_o}$  und Einsetzen der Gleichungen für  $d_i$  erhält man

$$d_1 = \frac{1}{c_{n,p_u,p_o}} \cdot \frac{q_1 - c_{n,p_u,p_o}}{q_1 - 1} \text{ und } d_i = \frac{1}{c_{n,p_u,p_o}} \cdot \frac{q_i - q_{i-1}}{q_i - 1} \text{ für } 1 < i \leq k.$$

Die vorgegebene Kompetitivitätsrate  $c_{n,p_u,p_o}$  ist aber genau dann erreichbar, wenn  $\sum_{i=1}^k d_i \leq 1$  gilt, d.h. höchstens die anfangs verfügbaren Anteile an der risikobehafteten Anlage verkauft werden. Die minimale erreichbare Kompetitivitätsrate erhält man somit aus der Lösung der Gleichung  $\sum_{i=1}^k d_i = 1$ . Es gilt daher:

$$c_{n,p_u,p_o} = 1 + \frac{q_1 - 1}{q_1} \sum_{i=2}^k \frac{q_i - q_{i-1}}{q_i - 1}. \quad (4.1)$$

Der Offline-Gegner wird den für den Online-Spieler schlechtesten Kursverlauf  $q_1, \dots, q_k$  wie folgt wählen:

$$k = n, \quad q_n = p_o \text{ und } \frac{q_i - 1}{q_{i-1} - 1} = \text{const. für } 2 \leq i \leq n.$$

Diesen Kursverlauf vorausgesetzt, erhält man für die Kompetitivitätsrate:

$$c_{n,p_u,p_o} = 1 + \frac{q_1 - 1}{q_1} \cdot (n - 1) \cdot \left( 1 - \left( \frac{q_1 - 1}{p_o - 1} \right)^{1/(n-1)} \right). \quad (4.2)$$

Der Offline-Gegner wird nun im schlechtesten Fall den Anfangskurs  $q_1$  so wählen, dass die erreichbare Kompetitivitätsrate maximal ist. Für  $n \geq 2$  erhält man damit die kleinste erreichbare Kompetitivitätsrate  $c_{n,p_u,p_o}$  durch die folgende Gleichung [26]:

$$c_{n,p_u,p_o} = n \cdot \left( 1 - \left( \frac{c_{n,p_u,p_o}^* - 1}{p_o - 1} \right)^{1/n} \right). \quad (4.3)$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass der Threat-basierte Online-Algorithmus im Falle des Worst-Case-Verlaufs bei jedem neuen Kursmaximum den gleichen Anteil an der risikobehafteten Anlage verkauft, d.h. es gilt

$$d_i = \frac{1}{n} \quad \forall 1 \leq i \leq n$$

Es zeigt sich, dass die Kompetitivitätsrate bei wachsendem  $n$  steigt. Für den Grenzwert  $c_{\infty,p_u,p_o} := \lim_{n \rightarrow \infty} c_{n,p_u,p_o}$  gilt:

$$c_{\infty,p_u,p_o} = \ln \frac{p_o - 1}{c_{\infty,p_u,p_o} - 1}.$$

Die Kompetitivitätsrate  $c_{\infty,p_u,p_o}$  ist aufgrund der Definition der Kompetitivitätsrate und der Konstruktion ( $p_u < p_o$ ) größer als 1.

Man kann nun zeigen, dass diese Kompetitivität für alle Online-Strategien minimal ist. Es gilt das folgende Theorem:

**Theorem 4.1**

*Bezeichne  $n$  die Länge des Investitionszeitraums,  $p_u$  die untere und  $p_o$  die obere Schranke für den Kursverlauf. Dann ist die vom Threat-basierten Online-Algorithmus TBO erreichte Kompetitivitätsrate  $c_{n,p_o,p_u}$  optimal, d. h. es existiert kein weiterer Online-Algorithmus ONL mit geringerer Kompetitivitätsrate.*

**Beweis:**

Bezeichne  $d_i$  resp.  $e_i$  den Anteil der risikobehafteten Anlage, der von der Strategie TBO resp. ONL zum Zeitpunkt  $t = i$  verkauft wird. Sei  $\alpha := \min\{i \mid x_i \neq s_i\}$  der erste Zeitpunkt, an dem die beiden Strategien unterschiedlich viele Anteil an der risikobehafteten Anlage veräußern. Man kann nun folgenden Kursverlauf  $P^{(n)} = p_1, \dots, p_n$  konstruieren:

1. Sei  $q_1, \dots, q_n$  das oben skizzierte Worst-Case-Szenario. Man wählt aufbauend auf diesem Kursverlauf:

$$p_i := q_i \quad \text{für } 1 \leq i \leq \alpha$$

2. Falls  $e_\alpha < d_\alpha$  :

$$p_i := p_u \quad \text{für } \alpha < i \leq n$$

3. Falls  $e_\alpha > d_\alpha$  :

$$\beta := \min\{k \mid e_\alpha + \dots + e_k \leq d_\alpha + \dots + d_k\},$$

$$\begin{aligned} p_i &:= q_i && \text{für } \alpha < i \leq \beta \text{ und} \\ p_i &:= p_u && \text{für } \beta < i \leq n. \end{aligned}$$

Für den so konstruierten Kursverlauf  $P^{(n)}$  gilt offensichtlich:

$$K(ONL, P^{(n)}) < K(TBO, P^{(n)})$$

□

## 4.2.2 Bidirektionaler Handel

### 4.2.2.1 Problembeschreibung

Bei dieser Problemstellung soll es dem Investor während des Investitionszeitraums möglich sein, Anteile an seiner Anlage wieder zurück zu kaufen. Wiederum muss der Investor am Ende des betrachteten Zeitraums seine noch gehaltenen Anteile an der risikobehafteten Anlage komplett veräußern.

Die optimale Offline-Strategie für diese Problemstellung agiert wie folgt:

- Sämtliche Anteile der Anlage werden verkauft, wenn der Kurs  $p_i$  ein lokales Maximum erreicht.
- Sämtliches Kapital wird zum Kauf von Anteilen an der Anlage verwendet, wenn der Kurs  $p_i$  ein lokales Minimum erreicht.
- Transaktionen finden nur statt, wenn der Kurs sich an einem lokalen Extremum befindet.

Der Investor, der diese Strategie verfolgen kann, besitzt am Ende des Investitionszeitraums das folgende Kapital:

$$K(OPT, P^{(n)}) = \prod_{i=1}^{n-1} \max\{1, p_i/p_{i+1}\} \quad (4.4)$$

#### 4.2.2.2 Erweiterter Threat-basierter Algorithmus

Die in dem vorangegangenen Abschnitt definierte Online-Investitionsstrategie  $TBO$  kann für den bidirektionalen Handel wie folgt erweitert werden:

- In jeder monoton steigenden Kursfolge  $p_i, \dots, p_j$  mit  $p_i \leq \dots \leq p_j > p_{j+1}$  verkauft der Investor Anteile an der risikobehafteten Anlage gemäß des Threat-basierten Algorithmus  $TBO$  mit der vorgegebenen Wettbewerbsrate  $c_{n,p_u,p_o}$ . Zum Kurs  $p_{j+1}$  werden die verbliebenen Anteile verkauft.
- In jeder monoton fallenden Kursfolge  $p_i, \dots, p_j$  mit  $p_i \geq \dots \geq p_j < p_{j+1}$  kauft der Investor Anteile an der risikobehafteten Anlage gemäß des Threat-basierten Algorithmus  $TBO$  mit der vorgegebenen Wettbewerbsrate  $c_{n,p_u,p_o}$ . Er kauft zum Kurs  $p_{j+1}$  von seinem kompletten restlichen Vermögen Anteile an der Anlage.

Hinsichtlich der Wettbewerbsfähigkeit dieses erweiterten Online-Verfahrens lässt sich folgende Aussage machen:

#### Theorem 4.2

Sei  $p_u$  die untere und  $p_o$  die obere Schranke für den Kursverlauf  $P^{(n)}$  der Anlage in dem angegebenen Zeitintervall. Ferner besitze der Kursverlauf in diesem Zeitraum  $k$  lokale Extrema. Dann besitzt der erweiterte Threat-basierte Online-Algorithmus  $ETBO$  die Wettbewerbsrate  $(c_{n,p_u,p_o})^k$ .

#### Beweis:

In jeder der monotonen Teilfolgen wird der  $TBO$ , der die Wettbewerbsrate  $c_{n,p_u,p_o}$  besitzt, angewandt. Da es laut Voraussetzung nur  $k$  monotone Teilfolgen innerhalb des Investitionszeitraums gibt, müssen die auf den Teilfolgen erzielten Wettbewerbsraten nur miteinander multipliziert werden, um die Wettbewerbsrate des erweiterten Threat-basierten Online-Algorithmus zu ergeben.  $\square$

Die Existenz einer unteren Schranke für die Wettbewerbsfähigkeit ergibt sich aus folgendem

#### Theorem 4.3

Bezeichne  $p_u$  die untere und  $p_o$  die obere Schranke für den Kursverlauf. Die Anzahl der lokalen Extrema im Kursverlauf sei durch  $k$  gegeben. Dann gilt für jede  $c$ -kompetitive Online-Strategie:  $c \geq (c_{\infty,p_u,p_o})^{k/2}$ .

**Beweis:**

Die beste Online-Strategie wird innerhalb einer aufsteigenden Kursfolge ausschließlich Anteile an der Anlage verkaufen. Da sich diese Strategie während einer solchen Kursfolge wie der Threat-basierte Online-Algorithmus *TBO* verhält, kann man eine Kursfolge  $P^{(n-1)} = p_1, \dots, p_{n-1}$  mit  $p_1 > \dots > p_{n-1}$  konstruieren, so dass der relative Kapitalzuwachs der optimalen Offline-Strategie mindestens um den Faktor  $c_{n,p_u,p_o}$  größer ist, als der der Online-Strategie. Am Ende der Kursfolge  $P^{(n-1)}$  fällt der Kurs auf  $p_u$  und beide Strategien werden von ihrem gesamten Kapital Anteile an der risikobehafteten Anlage kaufen.

Auf diese Weise lässt sich eine Kursfolge mit  $k$  lokalen Extrema und einer unteren Schranke von  $c \geq (c_{n,p_u,p_o})^{k/2}$  generieren. Für steigendes  $n$  ergibt sich die Schranke  $c \geq (c_{\infty,p_u,p_o})^{k/2}$ .  $\square$

## 4.3 Investition in mehrere risikobehaftete Anlagen

In diesem Abschnitt wird der bereits vorgestellte Online-Algorithmus *ETBO* auf mehrere risikobehaftete Anlagen erweitert.

### 4.3.1 Threat-basierte Algorithmen für drei risikobehaftete Anlagen

Zunächst soll betrachtet werden, wie eine Erweiterung auf drei risikobehaftete Anlagen  $A_j$  ( $i = 1, 2, 3$ ) vollzogen werden kann, um dann in einem nächsten Schritt eine Erweiterung auf  $m$  Anlagen ( $m > 3$ ) vorzunehmen.

Die Problemstellung lautet dementsprechend:

Ein Investor möchte sein Kapital für einen vorgegebenen Zeitraum  $[0, n]$  in drei Finanzinstrumente anlegen. Es dürfen wiederum nur zu den Zeitpunkten  $0, \dots, n$  Transaktionen durchgeführt werden, die zu Umschichtungen des Portfolios führen. Ferner wird innerhalb des Investitionszeitraums kein Kapital aus dem Portfolio entnommen oder neu in das Portfolio investiert<sup>7</sup>.

---

<sup>7</sup>Man spricht an dieser Stelle von einer *selbstfinanzierenden* Strategie.

Um einen Online-Algorithmus für dieses Problem entwickeln zu können, benötigen wir zunächst einige Notationen:

- $P_j^{(n)} = (p_{1,j}, \dots, p_{n,j})$  sei der Kursverlauf der risikobehafteten Anlage  $A_j$ .
- $Q_{\{k,l\}}^{(n)} = (q_{1,\{k,l\}}, \dots, q_{n,\{k,l\}})$  sei der Kursverlauf der Anlage  $A_k$  bezogen auf den Kursverlauf Anlage  $A_l$  ( $k \neq l$ ). Für  $q_{i,\{k,l\}}$  gilt dann:  $q_{i,\{k,l\}} = p_{i,k}/p_{i,l}$ .
- $p_{u,j}$  resp.  $p_{o,j}$  mit  $j \in \{1, 2, 3\}$  seien die jeweiligen Schätzungen für die unteren resp. oberen Schranken für die Anlagen  $A_i$ .

Mit obigen Notationen lassen sich Schätzungen für die Schranken der Folgen  $Q_{\{k,l\}}^{(n)}$  ableiten. Es gilt:

$$p_{u,k}/p_{o,l} \leq q_{i,\{k,l\}} \leq p_{o,k}/p_{u,l}$$

Wir vereinbaren daher folgende zusätzliche Notation:

$$\begin{aligned} q_{u,\{k,l\}} &:= p_{u,k}/p_{o,l} \\ q_{o,\{k,l\}} &:= p_{o,k}/p_{u,l} \end{aligned}$$

Der Unterschied zu dem in dem vorherigen Abschnitt behandelten Problem mit nur einer risikobehafteten Anlage liegt in der Ersetzung der risikolosen Anlage<sup>8</sup> durch eine weitere risikobehaftete Anlage. Diese Ersetzung stellt eine andere Interpretation des Algorithmus dar, die an den Eigenschaften der in dem vorherigen Abschnitt entwickelten Algorithmen nichts ändert.

Strategien zur Portfolio-Optimierung, die mit den Folgen  $Q_{\{k,l\}}^{(n)}$  als Eingangsdaten operieren, halten dementsprechend zu jeder Handelsperiode  $i$  Anteile  $a_{i,k}$  und  $a_{i,l}$  der risikobehafteten Anlagen  $A_k$  und  $A_l$ . Die Folgen  $Q_{\{1,2\}}^{(n)}$  und  $Q_{\{1,3\}}^{(n)}$  werden wir auf diese Weise interpretieren.

Die Folge  $Q_{\{2,3\}}^{(n)}$  wollen wir als den Kursverlauf des Portfolios  $PF_1$  bestehend aus den Anlagen  $A_1$  und  $A_2$  bezogen auf den Kursverlauf des Portfolios  $PF_2$  bestehend aus den Anlagen  $A_1$  und  $A_3$  auffassen:

$$\begin{aligned} q_{i,\{2,3\}} &= p_{i,2}/p_{i,3} \\ &= p_{i,2}/p_{i,1} \cdot p_{i,1}/p_{i,3} \\ &= q_{i,\{1,3\}}/q_{i,\{1,2\}} \end{aligned}$$

---

<sup>8</sup>In der Regel geht man hier von der Hauswährung aus.

Damit kann die Folge  $Q_{\{2,3\}}^{(n)}$  als Eingangssequenz für eine Portfolio-Strategie gesehen werden, die auf risikobehafteten Anlagen operieren, welche ihrerseits wiederum aus Portfolios bestehen.

Wir wollen aufbauend auf dieser Idee einen kaskadenförmigen Algorithmus *KEBTO* generieren, der in jedem Handelsschritt:

1. eine Gewichtung der Anlagen  $A_i$  innerhalb der Portfolios  $PF_1$  und  $PF_2$  vornimmt und
2. eine Gewichtung bzgl. der beiden Portfolios  $PF_1$  und  $PF_2$  durchführt.

Die Gewichtungen werden jeweils gemäß der im vorigen Abschnitt definierten Strategie *ETBO* vorgenommen.

Um zeigen zu können, dass der Algorithmus *KETBO* kompetitiv zu dem optimalen Offline-Algorithmus *OPT* ist, benötigen wir folgendes Theorem:

**Theorem 4.4 (Optimaler Offline-Algorithmus für drei Anlagen)**

Gegeben seien die Anlagen  $A_i$  mit ihren Kursfolgen  $P_i^{(n)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Ferner seien die Folgen  $Q_{\{k,l\}}^{(n)}$  ( $k, l = 1, 2, 3; k \neq l$ ) wie oben definiert. Dann kann der für drei risikobehaftete Anlagen optimale Offline-Algorithmus *OPT* als kaskadenförmiger Algorithmus *KOPT* dargestellt werden.

**Beweis:**

Der Algorithmus *OPT* ist zu jedem Zeitpunkt vollständig in die Anlage investiert, die innerhalb der nächsten Handelsperiode den größten relativen Gewinn erwirtschaftet.

Bei dem Algorithmus *KOPT* wird zunächst die Strategie *OPT* auf die Portfolios  $PF_1$  und  $PF_2$  angewandt. Auch hier ist die Algorithmus *OPT* jeweils in die Anlage des Portfolios  $PF_1$  resp.  $PF_2$  investiert, die den höchsten relativen Gewinn in der nächsten Handelsperiode erzielt. Ebenso agiert die Strategie *OPT* innerhalb von *KOPT* bezogen auf das Portfolio  $\{PF_1, PF_2\}$ .

Dies bedeutet, dass für drei Anlagen die Strategien *KOPT* und *OPT* identisch sind.

□

Nun können wir die Kompetitivität des Online-Algorithmus *KETBO* gegenüber der optimalen Offline-Strategie *KOPT* zeigen:

**Theorem 4.5 (Kompetitivität des Algorithmus *KETBO*)**

Seien  $A_1$ ,  $A_2$  und  $A_3$  die betrachteten risikobehafteten Anlagen. Ferner sei *KETBO* der oben definierte kaskadenförmige Online-Algorithmus, *KOPT* bezeichne den optimalen Offline-Algorithmus.

Dann gilt für die Kompetitivitätsrate  $c_n$  des Online-Algorithmus *KETBO*:

$$c_n \leq (c_{n,q_u,\{2,3\},q_o,\{2,3\}})^{k_{2,3}/2} \cdot \max\{(c_{n,q_u,\{1,2\},q_o,\{1,2\}})^{k_{1,2}/2}, (c_{n,q_u,\{1,3\},q_o,\{1,3\}})^{k_{1,3}/2}\}$$

**Beweis:**

Der Algorithmus *ETBO* ist – angewandt auf das Portfolio bestehend aus den Anlagen  $A_2$  und  $A_3$  – mit der Kompetitivitätsrate  $(c_{n,q_u,\{2,3\},q_o,\{2,3\}})^{k_{2,3}/2}$  kompetitiv zu *OPT*, d. h. die beiden Algorithmen *ETBO* und *OPT* induzieren zu jedem Zeitpunkt unterschiedliche Anteile an den Portfolios  $PF_1$  und  $PF_2$ .

Die Zusammensetzung der Portfolios  $PF_1$  resp.  $PF_2$  differiert je nach Verwendung der Strategien *EBTO* bzw.  $OPT_1$ . Die unterschiedlichen Zusammensetzungen der Portfolios spiegeln sich in den Kompetitivitätsraten  $(c_{n,q_u,\{1,2\},q_o,\{1,2\}})^{k_{1,2}/2}$  resp.  $(c_{n,q_u,\{1,3\},q_o,\{1,3\}})^{k_{1,3}/2}$  wider.

Damit gilt für die Kompetitivitätsrate der Online-Strategie *KETBO*:

$$c_n \leq (c_{n,q_u,\{2,3\},q_o,\{2,3\}})^{k_{2,3}/2} \cdot \max\{(c_{n,q_u,\{1,2\},q_o,\{1,2\}})^{k_{1,2}/2}, (c_{n,q_u,\{1,3\},q_o,\{1,3\}})^{k_{1,3}/2}\}.$$

□

### 4.3.2 Threat-basierte Algorithmen für $m$ risikobehaftete Anlagen

Die Idee des kaskadenförmigen Algorithmus aufgreifend, kann mittels Rekursion ein threat-basierter Algorithmus für  $m$  ( $m > 3$ ) generiert werden.

So ist in der Abbildung 4.1 dargestellt, wie ein kaskadenförmiger Algorithmus, der von einem Anlage-Universum von fünf Anlagen ausgeht,

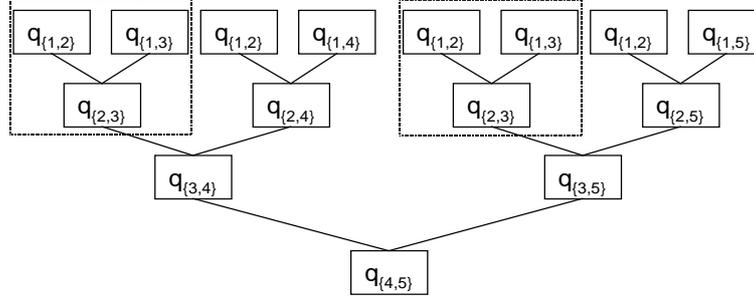


Abbildung 4.1: Kaskadenförmiger Algorithmus (am Beispiel von fünf Anlagen)

generiert werden kann<sup>9</sup>.

Hinsichtlich der Kompetitivität des vorgestellten Algorithmus gilt das folgende Theorem:

**Theorem 4.6 (Kompetitivität des Algorithmus KETBO)**

Seien  $A_j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) die risikobehafteten Anlagen und KETBO der oben definierte kaskadenförmige Online-Algorithmus, KOPT bezeichne den optimalen Offline-Algorithmus.  $c_{1,2,\dots,m-2}$  bezeichne die Kompetitivitätsrate des Online-Algorithmus KETBO, der auf ein Portfolio, das aus den Anlagen  $A_1, A_2, \dots, A_{m-2}$  besteht, aufsetzt<sup>10</sup>.

Dann gilt für die Kompetitivitätsrate  $c_n$  des Online-Algorithmus KETBO:

$$c_n \leq (c_{n,q_{u,\{m-1,m\}},q_{o,\{m-1,m\}}})^{k_{m-1,m}/2} \cdot \max\{ (c_{n,q_{u,\{m-2,m-1\}},q_{o,\{m-2,m-1\}}})^{k_{m-2,m-1}/2} \cdot \max\{c_{1,2,\dots,m-2}, c_{1,\dots,m-3,m-1}\}, (c_{n,q_{u,\{m-2,m\}},q_{o,\{m-2,m\}}})^{k_{m-2,m}/2} \cdot \max\{c_{1,2,\dots,m-2}, c_{1,\dots,m-3,m}\} \}$$

**Beweis:**

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis der Kompetitivität des Algo-

<sup>9</sup>Die umrandeten Bereiche tauchen mehrfach innerhalb dieses Binärbaumes auf, müssen aber nur einmal berechnet werden.

<sup>10</sup>Analog seien die Kompetitivitätsraten  $c_{1,2,\dots,m-3,m-1}$  etc. definiert.

rithmus für drei Anlagen.  $\square$

Der oben dargestellte Algorithmus bietet erstmals eine Übertragung von threat-basierten Algorithmen auf das allgemeine Portfolio-Optimierungsproblem.

Es werden bei diesem Ansatz keine Annahmen an die statistischen Eigenschaften der zugrundeliegenden Anlagen benötigt, allerdings findet eine Einschränkung der Kursverläufe auf Kursbänder statt, deren Ränder a priori nicht bekannt sind, und daher geschätzt werden müssen.

Die angegebenen Kompetitivitätsraten gelten daher nur für den Fall, dass sich die Kurse der Anlagen innerhalb der angegebenen Kursbänder bewegen.

#### 4.3.2.1 Parallelisierung des Algorithmus *KETBO*

Der vorgestellte Algorithmus *KETBO* ist aufgrund seiner Konstruktion einfach zu parallelisieren.

Im sequenziellen Fall müssen folgende Berechnungsschritte durchgeführt werden:

- Zunächst muss die Zusammensetzung sämtlicher Portfolios, die aus zwei Anlagen bestehen, berechnet werden. Hierzu sind  $m \cdot (m - 1) / 2$  Schritte erforderlich. In jedem Schritt wird die Zusammensetzung eines Portfolios aus zwei Anlagen vorgenommen.
- Anschließend erfolgt die Verteilung des Vermögens auf die einzelnen Portfolios. Im sequenziellen Fall beträgt die Anzahl der Berechnungsschritte  $2^{m-1}$ .

Durch Parallelisierung kann eine Beschleunigung der Berechnung auf einfache Weise erzielt werden:

- Die Zusammensetzung sämtlicher Portfolios, die aus zwei Anlagen bestehen, kann in einem Schritt parallel berechnet werden.
- Die anschließende Verteilung des Vermögens auf die einzelnen Portfolios kann in  $m - 1$  Berechnungsschritten erfolgen<sup>11</sup>.

---

<sup>11</sup> $(m - 1)$  entspricht der Anzahl der Ebenen im Binärbaum.

## 4.4 Universelle Algorithmen

Die in dem vorhergehenden Abschnitt vorgestellten Verfahren zur Portfolio-Optimierung benötigen Annahmen über die Kursverläufe der sich im Portfolio befindlichen Anlagen.

Wir werden in der Folge untersuchen, unter welchen Bedingungen ein Wegfall der Restriktionen an die Kursverläufe der zugrunde liegenden risikobehafteten Anlagen eine Generierung kompetitiver Algorithmen ermöglicht.

Zunächst soll gezeigt werden, dass ohne Annahmen an die Kursverläufe der betrachteten Anlagen die Kompetitivitätsrate jedes Online-Algorithmus gegenüber der optimalen Offline-Strategie exponentiell in der Anzahl der Handelszeitpunkte  $n$  wächst. Daher müssen andere Benchmarks, wie die z. B. von Cover betrachteten konstant rebalancierten Portfolios, für die zu entwickelnden Online-Algorithmen in Betracht gezogen werden.

Der in dem vorigen Abschnitt entwickelte Algorithmus leistet erstmals eine Übertragung von Threat-basierten Algorithmen auf das allgemeine Optimierungsproblem, allerdings lässt sich zeigen, dass die Kompetitivitätsrate jedes Online-Algorithmus gegenüber der optimalen Offline-Strategie exponentiell in  $n$  wächst.

Um zu zeigen, dass die optimale Offline-Strategie als Benchmark nicht geeignet ist, benötigen wir zunächst die Ausgestaltung des Algorithmus *OPT*:

### Lemma 4.7 (Optimale Offline-Strategie)

Bezeichne  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine Folge relativer Kursvektoren und  $m$  die Anzahl der risikobehafteten Anlagen. Der relative Gewinn der optimalen Offline-Strategie *OPT* ist gegeben durch:

$$S_n(\text{OPT}, \mathbf{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^n \max_{1 \leq j \leq m} x_{i,j} \quad (4.5)$$

### Beweis:

Sei *ALG* eine beliebige Strategie mit den Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Für den einperiodigen relativen Gewinn von *ALG* gilt:

$$\sum_{j=1}^m b_{i,j} x_{i,j} \leq \max_{1 \leq j \leq m} x_{i,j}$$

Daraus folgt direkt:

$$S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \leq S_n(OPT, \mathbf{X}^{(n)})$$

□

Dies bedeutet, dass die Strategie  $OPT$  zu jedem Zeitpunkt  $i$  in die Anlage das vollständige Vermögen investiert, deren relativer Gewinn innerhalb der folgenden Handelsperiode maximal bzgl. des betrachteten Anlage-Universums ist.

Man kann nun folgendes Theorem einfach ableiten:

**Theorem 4.8**

Bezeichne  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine Folge relativer Kursvektoren und  $m$  die Anzahl der risikobehafteten Anlagen. Sei  $ONL$  eine beliebige Online-Strategie mit den Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ . Dann gilt für die Kompetitivitätsrate  $c_n(ONL, OPT)$ :

$$\begin{aligned} c_n(ONL, OPT) &= \sup_{\mathbf{X}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^m} \frac{S_n(OPT, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)})} \\ &\geq m^n \end{aligned}$$

**Beweis:**

An dieser Stelle möchten wir wieder auf die im vorangegangenen Kapitel beschriebenen *Request-Answer-Games* zurückkommen. Der Offline-Gegner  $OPT$  bestimmt bei diesem *Spiel* die Komponenten des relativen Kursvektors zu jedem Handelszeitpunkt  $i$  wie folgt:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & : b_{i,j} \leq b_{i,k} \quad \text{mit } 1 \leq k \leq m \\ \epsilon & : \text{sonst} \quad \text{mit } \epsilon > 0 \end{cases}$$

Für  $b_{i,j}$  gilt nach Konstruktion  $b_{i,j} \leq 1/m$ . Daraus folgt für den relativen Gewinn  $S_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)})$ :

$$\begin{aligned} S_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)}) &\leq \left( \frac{1}{m} + \frac{m-1}{m} \epsilon \right)^n \\ &= \left( \frac{1 + (m-1)\epsilon}{m} \right)^n \end{aligned}$$

Damit ergibt sich bei  $\epsilon \rightarrow 0$  und mit  $S_n(OPT, \mathbf{X}^{(n)}) = 1$  für die Kompetitivitätsrate  $c_n(ONL, OPT)$ :

$$c_n(ONL, OPT) \geq m^n$$

□

Eine kompetitive Analyse mit der Benchmark *optimale Offline-Investitionsstrategie* erscheint für die Bearbeitung der allgemeinen Fragestellung nur bedingt sinnvoll.

Durch eine Einschränkung der Menge aller Investitionsstrategien auf eine Untermenge soll daher versucht werden, eine Benchmark für Online-Investitionsstrategien zu finden, die eine kompetitive Analyse ermöglicht.

Cover [28] schlägt vor, das Universum der Investitionsstrategien auf die Klasse der konstant rebalancierten Portfolios, die wir bereits im Kapitel 2 kennengelernt haben, einzuschränken.

Hier ist insbesondere die Investitionsstrategie innerhalb dieser Klasse von Strategien als Benchmark interessant, die den höchsten relativen Gewinn erwirtschaftet. Diese Strategie besitzt den folgenden Portfoliovektor:

$$\mathbf{b}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$$

Die Strategie, die durch den Portfoliovektor  $\mathbf{b}^*$  definiert ist, wird mit *bestes konstant rebalanciertes Portfolio BCRP* bezeichnet. Das durch diese Investitionsstrategie erwirtschaftete Kapital  $S_n(\text{BCRP}, \mathbf{X}^{(n)})$  ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} S_n(\text{BCRP}, \mathbf{X}^n) &= \max_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^n) \\ &= S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) \end{aligned}$$

Für die quantitative Analyse ist ferner die exponentielle Wachstumsrate des Kapitals  $S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$  von Bedeutung. Diese wird mit  $W_n(\text{BCRP}, \mathbf{X}^{(n)})$  bezeichnet:

**Definition 4.1 (Exponentielle Wachstumsrate)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Ferner bezeichne  $S_n(\text{ALG}, \mathbf{X}^n)$  den relativen Gewinn der Strategie ALG innerhalb des Investitionszeitraums. Dann wird die exponentielle Wachstumsrate wie folgt definiert:

$$W_n(\text{ALG}, \mathbf{X}^{(n)}) := \frac{1}{n} \log S_n(\text{ALG}, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.6)$$

Aufbauend auf diesen Definitionen kann nun der für diese Arbeit zentrale Begriff der universellen Algorithmen eingeführt werden:

**Definition 4.2 (Universelle Algorithmen)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Bezeichne  $BCRP$  das optimale konstant rebalancierte Portfolio,  $ALG$  eine Investitionsstrategie und  $W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)})$  resp.  $W_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})$  deren Wachstumsraten. Die Strategie  $ALG$  heißt universell bzw. log-optimal, wenn deren exponentielle Wachstumsrate gegen die des  $BCRP$  konvergiert, d. h. wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})) = 0$$

Mit Hilfe der Kompetitivitätsrate können ebenfalls universelle Algorithmen charakterisiert werden. Es gilt das folgende Lemma:

**Lemma 4.9**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Ferner sei  $ONL$  ein Online-Algorithmus zur Portfolio-Optimierung,  $BCRP$  bezeichne das beste konstant rebalancierte Portfolio.  $ONL$  ist ein universeller Algorithmus, falls  $ONL$  ein polynomielle Kompetitivitätsrate besitzt:

$$\begin{aligned} c_n(ONL, BCRP) &= \sup_{\mathbf{X}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^n} \frac{S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})} \\ &= n^{\mathcal{O}(1)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

**Beweis:** Es gelten die Voraussetzungen aus 4.7. Dann folgt – mit einer Konstante  $a$  – für beliebige Folgen von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)})/S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) &< n^a \\ \Leftrightarrow 1/n (\log S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - 1/n \log S_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)})) &< (1/n)a \log n \\ \Leftrightarrow W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)}) &< (1/n)a \log n \end{aligned}$$

Damit gilt für  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)}) = 0$$

Aufgrund von Definition 4.2 ist die Strategie  $ONL$  universell.  $\square$

## 4.5 Universal Portfolios

Cover stellt in seinem Artikel eine Online-Strategie  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  zur Portfolio-Optimierung vor, die asymptotisch die gleiche exponentielle Wachstumsrate wie das Benchmarkportfolio mit dem Portfoliovektor  $\mathbf{b}^*$  besitzt.

Diese Investitionsstrategie wird als *Universal Portfolio* bezeichnet und lässt sich wie folgt beschreiben:

1. Starte mit dem Portfoliovektor  $\mathbf{b}_1$
2. Berechne zu Beginn der  $(n+1)$ -ten Handelsperiode für alle konstant rebalancierten Portfolios  $\mathbf{b}$  das nach den ersten  $n$  Tagen erzielte Kapital  $S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$ . Berechne daraus

$$\mathbf{b}_{n+1} = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b})},$$

wobei die Integration über die Menge der  $(m-1)$  dimensionalen Portfolios

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m : b_j \geq 0, \sum_{j=1}^m b_j = 1 \right\}$$

erfolgt und  $\mu$  ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Damit ergibt sich folgende Definition für das Universal Portfolio:

### Definition 4.3 (Universal Portfolio)

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren und  $\mu$  ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß über  $\mathcal{B}$ . Ferner sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren mit  $\mathbf{x}_0 = (1, \dots, 1)$ . Die Investitionsstrategie  $UP_\mu$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})}, \quad i = 1, \dots, n$$

Das auf diese Weise definierte Universal Portfolio ist damit von zwei Parametern abhängig. Einerseits bestimmt die Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)}$  den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$ . Andererseits ist der Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$  abhängig von der Wahl der Maßfunktion  $\mu$ , die man als Gewichtungsfunktion über dem Portfolioraum  $\mathcal{B}$  interpretieren kann.

Für das Startkapital  $S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(0)})$  ergibt sich durch die Wahl von  $\mathbf{x}_0$ :

$$S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(0)}) = 1$$

Cover et al. [28, 31] konzentrieren sich im Wesentlichen neben Dirichlet-verteiltern auf uniform gewichtete Universal Portfolios:

**Definition 4.4 (Uniform gewichtetes Universal Portfolio)**

Sei  $\mu$  das durch die Gleichverteilung aller Portfolios über  $\mathcal{B}$  induzierte Maß, für dessen Dichtefunktion  $p(\mathbf{b})$  dementsprechend gilt:

$$p(\mathbf{b}) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathcal{B})} \forall \mathbf{b} \in \mathcal{B}.$$

Der durch dieses Maß  $\mu$  induzierte Algorithmus wird uniform gewichtetes Universal Portfolio  $UP_{uni}$  genannt.

**Lemma 4.10**

Sei  $UP_{uni}$  das uniform gewichtete Universal Portfolio. Ferner bezeichne  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren mit  $\mathbf{x}_0 = (1, \dots, 1)$ . Dann gilt für den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$ :

$$\mathbf{b}_i = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mathbf{b}}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mathbf{b}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Beweis:**

Der Beweis folgt direkt aus 4.3 und 4.4. □

**Lemma 4.11**

Sei  $UP_{\mu} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  ein  $\mu$ -gewichtetes Universal Portfolio. Dann gilt für den Startvektor  $\mathbf{b}_1$ :

$$\mathbf{b}_1 = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} d\mu(\mathbf{b}) = E_{\mu}[\mathbf{b}].$$

Für symmetrische Maßfunktionen gilt insbesondere:

$$\mathbf{b}_1 = \left( \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right)$$

**Beweis:**

Mit  $S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) = 1$  und  $d\mu(\mathbf{b}) = p(\mathbf{b})d\mathbf{b}$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}_1 &= \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b})} \\
 &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} d\mu(\mathbf{b}) \\
 &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} p(\mathbf{b}) d\mathbf{b} \\
 &= E_{\mu}[\mathbf{b}]
 \end{aligned}$$

□

Da wir das Startkapital  $S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(0)})$  mit 1 normiert haben, kann das folgende Lemma direkt abgeleitet werden:

**Lemma 4.12**

Sei  $UP_{\mu} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  ein  $\mu$ -gewichtetes Universal Portfolio und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Dann gilt für den relativen Gewinn  $S_n(UP_{\mu}, \mathbf{X}^{(n)})$ :

$$\begin{aligned}
 S_n(UP_{\mu}, \mathbf{X}^{(n)}) &= \int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b}) \\
 &= E_{\mu} [S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})]
 \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 S_n(UP_{\mu}, \mathbf{X}^{(n)}) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{b}_i \mathbf{x}_i \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b}) \mathbf{x}_i}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})} \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \mathbf{x}_i S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})} \\
 &= \prod_{i=1}^n \frac{\int_{\mathcal{B}} S_i(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_0(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(0)}) d\mu(\mathbf{b})} \\
&= \int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

Da  $\mu$  als ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert ist, gilt:

$$\begin{aligned}
E_\mu [S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})] &= \int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) d\mu(\mathbf{b}) \\
&= S_n(UP_\mu, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

□

Das  $\mu$ -gewichtete Universal Portfolio besitzt einige interessante Eigenschaften, u. a. gilt folgendes Lemma:

**Lemma 4.13**

*Sei  $UP_\mu$  ein  $\mu$ -gewichtetes Universal Portfolio und  $\mu$  ein symmetrisches Wahrscheinlichkeitsmaß über  $\mathcal{B}$ . Dann entspricht der relative Gewinn  $S_n(UP_\mu, \mathbf{X}^{(n)})$  mindestens dem Value-Line-Index:*

$$S_n(UP_\mu, \mathbf{X}^{(n)}) \geq \left( \prod_{k=1}^m S_n(\mathbf{e}_k, \mathbf{X}^{(n)})^{1/m} \right)$$

**Beweis:** Auf den Beweis dieses Lemmas, der [28, 33, 37] entnommen werden kann, wird hier verzichtet. □

### 4.5.1 Kompetitive Analyse des Universal Portfolio

Wir wollen in diesem Abschnitt mit der Kompetitivität des Universal Portfolios bzgl. des besten konstant rebalancierten Portfolios auf eine wichtige Eigenschaft des Universal Portfolios eingehen. Hierzu formulieren wir das folgende Theorem:

**Theorem 4.14**

*Sei  $UP_{uni}$  das uniform gewichtete Universal Portfolio und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner sei  $\mathbf{b}^*$  der Portfoliovektor*

des bezogen auf die Kursfolge  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios. Dann gilt für die Kompetitivität des uniform gewichteten Universal Portfolios:

$$c_n(UP_{uni}, BCRP) = \frac{S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(UP_{uni}, \mathbf{X}^{(n)})} \leq (n+1)^{m-1}$$

**Beweis:**

Die an dieser Stelle verwendete Beweisskizze ist analog zu [21].

Für den relativen Gewinn eines Portfolios  $\mathbf{b}$  in einer Handelsperiode gilt folgende Ungleichung:

$$\mathbf{b}\mathbf{x} \geq \lambda(\mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}^* \mathbf{x} \quad \text{mit } \lambda(\mathbf{b}) = \min_j \{b_j/b_j^*\} \quad (4.8)$$

Also gilt für den relativen Gewinn  $S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$ :

$$S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) \geq \lambda(\mathbf{b})^n S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.9)$$

Damit lässt sich  $S_n(UP_{uni}, \mathbf{X}^{(n)})$  abschätzen durch:

$$S_n(UP_{uni}, \mathbf{X}^{(n)}) \geq E[\lambda(\mathbf{b})^n] S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.10)$$

Wenn man  $\lambda(\mathbf{b})$  als eine Zufallsvariable auffasst, kann man schreiben:

$$E[(\lambda(\mathbf{b}))^n] = \int_0^1 \text{Prob}\{(\lambda(\mathbf{b}))^n \geq y\} dy \quad (4.11)$$

Um den Wert dieses Integrals zu bestimmen, benötigt man die Menge  $\bar{\mathcal{B}}$  aller Portfolios  $\mathbf{b}$  mit  $\lambda(\mathbf{b}) \geq y^{1/n}$ , d. h.  $\mathbf{b}$  lässt sich schreiben als  $\mathbf{b} = y^{1/n} \cdot \mathbf{b}^* + (1 - y^{1/n}) \cdot \mathbf{b}'$ .

Das Verhältnis des Volumens von  $\bar{\mathcal{B}}$  zu dem Volumen des Simplexes  $\mathcal{B}$  entspricht dann der gesuchten Wahrscheinlichkeit:

$$\text{Prob}\{(\lambda(\mathbf{b}))^n \geq y\} \geq \text{Vol}(\bar{\mathcal{B}})/\text{Vol}(\mathcal{B}) \geq (1 - y^{1/n})^{m-1} \quad (4.12)$$

Damit gilt für den Erwartungswert  $E[(\lambda(\mathbf{b}))^n]$ :

$$E[(\lambda(\mathbf{b}))^n] \geq \int_0^1 (1 - y^{1/n})^{m-1} dy \quad (4.13)$$

$$= \int_0^1 z^{n-1} (1 - z)^{m-1} dz \quad \text{mit } z := y^{1/n} \quad (4.14)$$

$$= n \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)} \quad (4.15)$$

$$\geq (n+1)^{1-m} \quad (4.16)$$

In Verbindung mit der Gleichung 4.10 folgt die Behauptung.  $\square$

Diesem Theorem schließt sich direkt die asymptotische Log-Optimalität des uniform gewichteten Universal Portfolios an:

**Lemma 4.15**

Sei  $UP_{uni}$  das uniform gewichtete Universal Portfolio und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner sei  $\mathbf{b}^*$  der Portfoliovektor des bezogen auf die Kursfolge  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios. Dann ist der Algorithmus  $UP_{uni}$  asymptotisch log-optimal und es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(UP_{uni}, \mathbf{X}^{(n)})) = 0$$

**Beweis:**

Das Lemma ergibt sich direkt aus dem Theorem 4.14 und dem Lemma 4.9.  $\square$

Mit zusätzlichen Annahmen können noch bessere Kompetitivitätsraten für das Universal Portfolio angegeben werden. Hierzu ist die Definition einer *aktiven Anlage* erforderlich:

**Definition 4.5 (Aktive Anlage)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge von Kursvektoren. Dann heißt eine risikobehaftete Anlage  $k$  aktiv, wenn es einen universellen Algorithmus<sup>12</sup> mit Portfoliovektor  $\mathbf{b}^*$  gibt, so dass  $b_k^* > 0$ .

Mit dieser Definition lässt sich folgendes Theorem formulieren:

**Theorem 4.16**

Bezeichne  $\mathbf{X}^{(\infty)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots)$  eine unendlich lange Folge von relativen Kursvektoren mit vollem Rang, so dass für alle  $\mathbf{x}_i \in [x_u, x_o]^m$  und  $0 < x_u \leq x_o < \infty$  gilt. Ferner seien alle  $m$  risikobehafteten Anlagen aktiv und es existiere eine konvergente Folge  $\mathbf{b}_1^*, \mathbf{b}_2^*, \dots$  mit Grenzwert  $\mathbf{b}_\infty^* \in \mathbf{B}$ , so dass  $S_i(\mathbf{b}_i^*, \mathbf{X}^{(n)}) = S_i(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$  für alle  $i = 1, 2, \dots$  und  $b_{\infty,j}^* > 0$  für alle  $1 \leq j \leq m$ .

Dann gilt:

$$S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) = \frac{k}{\sqrt{n}} \cdot S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad , \quad k = \text{const.} \quad (4.17)$$

<sup>12</sup>bspw. das beste konstant rebalancierte Portfolio *BCRP*

**Beweis:**

Der Beweis ist [56] zu entnehmen.  $\square$

Für den Fall von nur zwei Anlagen lässt sich folgendes Theorem formulieren, dass aus der Kenntnis der vollständigen Folge der relativen Kursvektoren eine Ableitung ermöglicht, ob eine Anlage aktiv ist:

**Theorem 4.17**

Gegeben sei  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  und eine Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Die Anlagen  $A_1$  und  $A_2$  sind genau dann aktiv, wenn gilt:

$$\min\left\{1/n \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,1}}{x_{i,2}}, 1/n \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,2}}{x_{i,1}}\right\} > 1 \quad (4.18)$$

**Beweis:**

Wir betrachten zunächst die exponentielle Wachstumsrate  $W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$ :

$$\begin{aligned} W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log(b_1 \cdot x_{i,1} + (1 - b_1) \cdot x_{i,2}) \end{aligned}$$

Für den Portfoliovektor  $\mathbf{b}^*$  des BCRP gilt:

$$\mathbf{b}^* = \underset{\mathbf{b}}{\operatorname{argmax}} W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$$

Zunächst werden wir zeigen, dass die Funktion  $W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$  konkav ist. Hierzu bilden wir ihre 2. Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{\partial b_1^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial b_1} \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{b_1 \cdot x_{i,1} + (1 - b_1) \cdot x_{i,2}} \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{b_1 \cdot x_{i,1} + (1 - b_1) \cdot x_{i,2}} \right)^2 \end{aligned}$$

Da  $W_n''(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) < 0$  und damit  $W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$  konkav ist, bleibt, um nachzuweisen, dass das Maximum der Funktion im Innern von  $\mathcal{B}$  liegt, nur noch zu zeigen, dass die 1. Ableitung von  $W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$  an der Stelle  $b_1 = 0$  positiv und an der Stelle  $b_1 = 1$  negativ ist.

Es gilt einerseits:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{\partial b_1} \right|_{b_1=0} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{b_1 \cdot x_{i,1} + (1 - b_1) \cdot x_{i,2}} \Big|_{b_1=0} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{x_{i,2}} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,1}}{x_{i,2}} - 1 > 0
 \end{aligned}$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial W_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{\partial b_1} \right|_{b_1=1} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{b_1 \cdot x_{i,1} + (1 - b_1) \cdot x_{i,2}} \Big|_{b_1=1} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,1} - x_{i,2}}{x_{i,1}} \\
 &= 1 - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_{i,2}}{x_{i,1}} < 0
 \end{aligned}$$

□

Das Ergebnis dieses Theorems deutet darauf hin, dass mit Hilfe von Zusatzinformationen<sup>13</sup> bzgl. des Aktivitätsniveaus eine bessere Wettbewerbsrate erreicht werden kann.

## 4.5.2 Implementierung des Universal Portfolio

Die Berechnung der Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  des Universal Portfolios  $UP$  ist insbesondere bei Portfolios, die auf ein größeres Anlageuniversum zurückgreifen, nicht unproblematisch<sup>14</sup>.

Die Schwierigkeit liegt in der Bestimmung des gewichteten Mittels, da zu dessen Berechnung ein  $(m - 1)$ -dimensionales Integral ausgewertet werden muss:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mathbf{b}}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mathbf{b}}$$

<sup>13</sup>Zusatzinformationen werden in dem folgenden Kapitel behandelt.

<sup>14</sup>In der Folge soll ausschließlich das uniform gewichtete Portfolio  $UP_{uni}$  betrachtet werden.

$$= \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \prod_{k=1}^{-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_k d\mathbf{b}}{\int_{\mathcal{B}} \prod_{k=1}^{i-1} \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_k d\mathbf{b}}$$

Die Berechnung der Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  erfordert somit Lebegue-Integrationen multivariater Polynome über dem  $(m-1)$ -dimensionalen Simplex  $\mathcal{B}$ .

Wir wollen in der Folge neben der von Cover und Ordentlich [31] vorgeschlagenen rekursiven Berechnung der Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  Approximationsverfahren aufzeigen, die eine deutlich geringere Zeitkomplexität besitzen.

#### 4.5.2.1 Rekursiver Ansatz

Um eine rekursive Berechnung der Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  zu ermöglichen, ist es zunächst erforderlich, das Universal Portfolio als einen sogenannten *extremen Misch-Algorithmus* darzustellen. Ausgehend von dieser Darstellungsweise werden wir dann eine rekursive Berechnungsmethode skizzieren [31, 80, 37].

Hierzu wird zunächst ein *extremaler Algorithmus* – eine Investitionsstrategie, die zu jedem Zeitpunkt  $i$  das komplette Vermögen in eine Anlage  $j_i$  investiert – definiert:

#### Definition 4.6 (Extremaler Algorithmus)

Sei  $m$  die Anzahl der betrachteten Anlagen und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Ferner sei  $j^{(n)} = (j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, m\}^n$ ,  $\mathbf{e}_k$  bezeichne den  $m$ -dimensionalen Einheitsvektor mit  $e_{k,k} = 1$ .

Ein *extremaler Algorithmus*  $EXT_{j^{(n)}}$  ist definiert als

$$EXT_{j^{(n)}} := (e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) \quad (4.19)$$

Für den relativen Gewinn ergibt sich dementsprechend:

$$S_n(EXT_{j^{(n)}}, \mathbf{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^n x_{i,j_i} \quad (4.20)$$

Ein *extremaler Misch-Algorithmus* entsteht aus der Kombination von unterschiedlich gewichteten extremalen Algorithmen:

**Definition 4.7 (Extremaler Misch-Algorithmus)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren,  $EXT_{j^{(n)}}$  bezeichne einen extremalen Algorithmus. Ferner bezeichne  $w(j^{(n)})$  das Gewicht der Strategie  $EXT_{j^{(n)}}$  mit:

- $0 \leq w(j^{(n)}) \leq 1$
- $\sum_{j^{(n)}} w(j^{(n)}) = 1$

Ein extremaler Misch-Algorithmus  $MIX_w = (\mathbf{b}_1^{MIX}, \dots, \mathbf{b}_n^{MIX})$  ist definiert durch:

$$\mathbf{b}_i^{MIX} = \frac{\sum_{j^{(n)}} \mathbf{e}_{j_i} S_{i-1}(EXT_{j^{(n)}}, \mathbf{X}^{(i-1)}) \cdot w(j^{(n)})}{\sum_{j^{(n)}} S_{i-1}(EXT_{j^{(n)}}, \mathbf{X}^{(i-1)}) \cdot w(j^{(n)})} \quad (4.21)$$

Für den relativen Gewinn gilt:

$$S_n(MIX_w, \mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{j^{(n)}} S_n(EXT_{j^{(n)}}, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot w(j^{(n)}) \quad (4.22)$$

$$= \sum_{j^{(n)}} \left( \prod_{i=1}^n x_{i,j_i} \right) \cdot w(j^{(n)}) \quad (4.23)$$

An dieser Stelle können wir einen Zusammenhang zwischen extremalen Misch-Algorithmus und dem Universal Portfolio feststellen:

**Lemma 4.18**

Das Universal Portfolio lässt sich als extremaler Misch-Algorithmus darstellen. Mit

$$w(j^{(n)}) = \int_{\mathcal{B}} \prod_{i=1}^n b_{j_i} d\mathbf{b}$$

entspricht die Strategie  $MIX_w$  dem Universal Portfolio  $UP$ .

**Beweis:**

Um dieses Lemma zu beweisen, betrachten wir den relativen Gewinn des Universal Portfolios:

$$\begin{aligned} S_n(UP, \mathbf{X}^{(n)}) &= \int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) \\ &= \int_{\mathcal{B}} \prod_{i=1}^n \mathbf{b} x_i d\mathbf{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{B}} \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j x_{i,j} d\mathbf{b} \\
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{j^{(n)}} \prod_{i=1}^n b_{j_i} x_{i,j_i} d\mathbf{b} \\
&= \sum_{j^{(n)}} \int_{\mathcal{B}} \prod_{i=1}^n b_{j_i} x_{i,j_i} d\mathbf{b} \\
&= \sum_{j^{(n)}} \prod_{i=1}^n x_{i,j_i} \int_{\mathcal{B}} b_{j_i} d\mathbf{b} \\
&= \sum_{j^{(n)}} \prod_{i=1}^n x_{i,j_i} w(j^{(n)}) \\
&= S_n(MIX_w, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

□

Durch Umgruppierung kann nun erreicht werden, dass sich die Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  durch eine Rekursionsformel berechnen lassen:

$$S_n(UP, \mathbf{X}^{(n)}) = \sum_{l_1 + \dots + l_m = n} X_n(l_1, \dots, l_m) W_n(l_1, \dots, l_m) \quad (4.24)$$

$$=: \sum_{l_1 + \dots + l_m = n} Q_n(l_1, \dots, l_m), \quad (4.25)$$

wobei  $X_n(l_1, \dots, l_m)$  und  $W_n(l_1, \dots, l_m)$  wie folgt definiert sind:

$$X_n(l_1, \dots, l_m) = \sum_{\substack{j^{(n)} \in \{j^{(n)} : n_k(j^{(n)}) = l_k, 1 \leq k \leq m\} \\ n_k(j^{(n)}) := |\{i : j_i = k, 1 \leq i \leq n\}|}} \prod_{i=1}^n x_{i,j_i} \quad (4.26)$$

$$W_n(l_1, \dots, l_m) = \int_{\mathcal{B}} \prod_{i=1}^m b_i^{l_i} d\mathbf{b} \quad (4.27)$$

Es gilt:

$$b_{n,j} = \frac{1}{S_{n-1}(UP, \mathbf{X}^{(n-1)})} \sum_{l_1 + \dots + l_m = n-1} \frac{l_j + 1}{n + m - 1} Q_{n-1}(l_1, \dots, l_m) \quad (4.28)$$

- 
1. Initialisierung  
 $i := 1$   
 $Q_0(0, \dots, 0) := 1$   
 $\mathbf{b}_1 := (1/m, \dots, 1/m)$
  2. Für alle  $l_1, \dots, l_m \geq 0$  mit  $\sum_{j=1}^m l_j = i$  berechne:  

$$Q_i(l_1, \dots, l_m) = \sum_{j=1}^m x_{i,j} \frac{l_j}{i+m-1} Q_{i-1}(l_1, \dots, l_{j-1}, l_j - 1, l_{j+1}, \dots, l_m)$$
  3.  $i := i + 1$
  4. Für alle  $j = 1$  bis  $m$  berechne:  

$$b_{i,j} = \frac{1}{S_{i-1}(UP, \mathbf{X}^{(i-1)})} \sum_{l_1 + \dots + l_m = i-1} \frac{l_j + 1}{i+m-1} Q_{i-1}(l_1, \dots, l_m)$$
  5. Falls  $i < n$ , gehe nach 2.
- 

Abbildung 4.2: Algorithmus zur rekursiven Berechnung des  $UP$ 

Damit ergibt sich folgende Rekursionsformel:

$$Q_n(l_1, \dots, l_m) = \sum_{j=1}^m x_{n,j} \frac{l_j}{n+m-1} Q_n(l_1, \dots, l_{j-1}, l_j - 1, l_{j+1}, \dots, l_m) \quad (4.29)$$

Aus den Gleichungen (4.28) und (4.29) lässt sich dann ein Algorithmus (s. Abbildung 4.2) zur Berechnung des Universal Portfolios ableiten.

**Lemma 4.19 (Zeitkomplexität des rekursiven Algorithmus)**

*Der oben dargestellte rekursive Algorithmus zur Berechnung des Universal Portfolios (s. Abbildung 4.2) besitzt eine Zeitkomplexität von  $\mathcal{O}(n^m)$ .*

**Beweis:**

Die Anzahl der Rechenoperationen für den zweiten und vierten Schritt des Algorithmus wird im Wesentlichen bestimmt von der Kardinalität  $K$  der Menge  $\{(l_1, \dots, l_m) : l_1, \dots, l_m \geq 0, \sum_{j=1}^m l_j = i\}$ :

$$K = \binom{i+m-1}{i} \leq (i+1)^{m-1}$$

Bei  $n$  Handelsperioden ergibt sich daher eine Zeitkomplexität von  $\mathcal{O}(n^m)$ .  $\square$

### 4.5.2.2 Quantisierung

Da die exakte Bestimmung insbesondere größerer Portfolios zu lange dauert, bieten sich Approximationsverfahren an.

Dieses Verfahren beruht auf der Annäherung des Integrals einer Funktion durch die Auswertung dieser Funktion an Punkten eines Gitters  $G_d$ , wobei  $1/d$  den Abstand zweier Gitterpunkte bezeichnet:

$$G_d = \{(b_1, \dots, b_m) : b_1, \dots, b_m \in \{l/d : 0 \leq l \leq d\} \wedge \sum_{j=1}^m b_j = 1\}$$

Mit dieser Idee ergibt sich folgendes Verfahren:

**Definition 4.8 (Approximation des UP durch Quantisierung)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren, ferner bezeichne  $G_d$  ein Gitter innerhalb des Simplex  $B$ :

$$G_d = \{(b_1, \dots, b_m) : b_1, \dots, b_m \in \{l/d : 0 \leq l \leq d\} \wedge \sum_{j=1}^m b_j = 1\}$$

Dann gilt für die Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  des Approximationsalgorithmus  $UP_{Quant(d)}$ :

$$\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{\mathbf{b} \in G_d} \mathbf{b} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)})}{\sum_{\mathbf{b} \in G_d} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)})}$$

Man kann folgendes Lemma formulieren:

**Lemma 4.20**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner bezeichne  $UP$  das Universal Portfolio und  $UP_{Quant(d)}$  das oben beschriebene Verfahren zur Approximation des Universal Portfolios. Dann gilt:

$$\lim_{d \rightarrow \infty} S_n(UP_{Quant(d)}, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(UP, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.30)$$

**Beweis:**

Der Beweis folgt direkt aus der Definition 4.8. □

Die Kardinalität der Menge  $G_d$  bestimmt die Zeitkomplexität des Algorithmus 4.3. Es gilt:

$$\begin{aligned} |G_d| &= \binom{i+m-1}{i} \\ &\leq (i+1)^{m-1}. \end{aligned}$$

Die Zeitkomplexität des gesamten Algorithmus liegt daher in  $\mathcal{O}(n m d^{m-1})$ .

- 
1. Initialisierung  
 $i := 1$   
Für alle  $\mathbf{b} \in G_d$  definiere  $S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i)}) := 1$
  2. Berechne  $\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{\mathbf{b} \in G_d} \mathbf{b} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)})}{\sum_{\mathbf{b} \in G_d} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)})}$
  3. Setze für alle  $\mathbf{b} \in G_d$ :  $S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i)}) = S(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) \cdot \mathbf{b} \mathbf{x}_i$
  4.  $i := i + 1$
  5. Falls  $i < n$ , gehe nach 2.
- 

Abbildung 4.3: Algorithmus zur Berechnung des  $UP$  durch Quantisierung

#### 4.5.2.3 Monte-Carlo-Verfahren

##### Definition 4.9 (Approximation des $UP$ durch MC-Simulation)

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner seien  $\mathbf{b}_1^{MC}, \dots, \mathbf{b}_N^{MC}$  unabhängig voneinander gleichverteilte zufällige Portfoliovektoren. Dann gilt für die Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$  des Approximationsalgorithmus  $UP_{MC(N)}$ :

$$\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{k=1}^N N \mathbf{b}_k^{MC} S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i-1)})}{\sum_{k=1}^N N S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i-1)})}$$

##### Lemma 4.21

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner bezeichne  $UP$  das Universal Portfolio und  $UP_{MC(N)}$  das oben beschriebene Verfahren zur Approximation des Universal Portfolios. Dann gilt:

$$\text{Prob} \left\{ \lim_{d \rightarrow \infty} S_n(UP_{MC(N)}, \mathbf{X}^{(n)}) - S_n(UP, \mathbf{X}^{(n)}) \right\} = 1 \quad (4.31)$$

##### Beweis:

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition 4.9 und dem Gesetz der großen Zahlen.  $\square$

- 
1. Initialisierung  
 $i := 1$   
 Setze  $S(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i)}) := 1$  für  $k = 1, \dots, N$
  2. Generiere  $N$  zufällig verteilte Portfoliovektoren  
 $\mathbf{b}_1^{MC}, \dots, \mathbf{b}_N^{MC}$
  3. Berechne  $\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{k=1}^N \mathbf{b}_k^{MC} S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i-1)})}{\sum_{k=1}^N S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i-1)})}$
  4. Setze für alle  $k = 1, \dots, N$ :  $S(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i)}) = S(\mathbf{b}_k^{MC}, \mathbf{X}^{(i-1)}) \cdot \mathbf{b}_k^{MC} \mathbf{x}_i$
  5.  $i := i + 1$
  6. Falls  $i < n$ , gehe nach 3.
- 

Abbildung 4.4: Algorithmus zur Berechnung des  $UP$  durch MC-Verfahren

Man erhält für dieses Approximationsverfahren (s. Abbildung 4.4) eine Konvergenzgeschwindigkeit von  $\mathcal{O}(1/\sqrt{n})$ .

Bei Verwendung von – analog konstruierten – Quasi-Monte-Carlo-Verfahren zur Approximation des Universal Portfolios kann die Konvergenzgeschwindigkeit, die in  $\mathcal{O}((\log n)^m/n)$  liegt, insbesondere für kleinere Portfolios erhöht werden [86, 72].

#### 4.5.2.4 Numerische Integrationsverfahren

Eine weitere Möglichkeit der Approximation des Universal Portfolios besteht in der Verwendung von numerischen Integrationsverfahren. Man kann das  $(m - 1)$ -dimensionale Integral annähern, indem man den Integranden an Stützstellen auswertet und eine gewichtete Summe bildet [33, 37].

So benötigt die folgende Integrationsformel für multivariate Funktionen über dem  $(m - 1)$ -dimensionalen Simplex [95] nur  $m + 1$  Stützstellen, um das Universal Portfolio anzunähern:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 &= (r, r, \dots, r, r) \\
\mathbf{p}_2 &= (s, s, \dots, s, s) \\
\mathbf{p}_3 &= (t, s, \dots, s, s) \\
&\vdots \\
\mathbf{p}_{m+1} &= (s, s, \dots, s, t)
\end{aligned}$$

mit

$$r = \frac{1}{m+3}, \quad s = \frac{1}{m+5}, \quad t = \frac{3}{m+5}.$$

Die Gewichtung dieser Stützstellen erfolgt mit:

$$c_1 = -\frac{(m+2)^2}{4(m+2)}V, \quad c_k = \frac{(m+3)^3}{4(m+1)(m+2)}V \quad (2 \leq k \leq m),$$

wobei mit  $V$  das Volumen des Portfolioraums  $\mathcal{B}$  bezeichnet wird.

Um die Integrationsformel anwenden zu können, müssen wir die Stützstellen  $p_i$  in Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i^{NI}$  transformieren:

$$\begin{aligned}
b_{i,j}^{NI} &= p_{i,j} \quad (1 \leq j \leq m-1) \\
b_{i,m}^{NI} &= 1 - \sum_{j=1}^{m-1} p_{i,j}
\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich folgende Approximationsformel für die Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i$ :

$$\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} c_k \mathbf{b}_k^{NI} S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{NI}, \mathbf{X}^{(i-1)})}{\sum_{k=1}^{m+1} c_k S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{NI}, \mathbf{X}^{(i-1)})}$$

und damit der in der Abbildung 4.5 beschriebene Algorithmus.

- 
1. Initialisierung  
Bestimme die Stützstellen  $p_i$  und deren Gewichtung  $c_i$   
 $i := 1$   
Setze  $S(\mathbf{b}_k, \mathbf{X}^{(i)}) := 1$  für  $k = 1, \dots, N$
  2. Transformiere die Stützstellen in  $N$  Portfoliovektoren  
 $\mathbf{b}_1^{NI}, \dots, \mathbf{b}_N^{NI}$
  3. Berechne  $\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{k=1}^{m+1} c_k \mathbf{b}_k^{NI} S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{NI}, \mathbf{X}^{(i-1)})}{\sum_{k=1}^{m+1} c_k S_{i-1}(\mathbf{b}_k^{NI}, \mathbf{X}^{(i-1)})}$
  4. Setze für alle  $k = 1, \dots, N$ :  $S(\mathbf{b}_k^{NI}, \mathbf{X}^{(i)}) = S(\mathbf{b}_k^{NI}, \mathbf{X}^{(i)}) \cdot \mathbf{b}_k^{NI} \mathbf{x}_i$
  5.  $i := i + 1$
  6. Falls  $i < n$ , gehe nach 3.
- 

Abbildung 4.5: Algorithmus zur Berechnung des  $UP$  durch numerische Approximation

## 4.6 Online-Lernalgorithmen

### 4.6.1 Einführung

Neben dem oben beschriebenen Ansatz von Cover existieren weitere Ansätze für die Generierung log-optimaler Investitionsstrategien, deren Ursprung in der *Computational Learning Theory* liegt [77].

In dem folgenden Abschnitt soll das Konzept der Vorhersage durch Experten vorgestellt werden. Dieses Konzept kann durch einige Modifikationen auf das Problem der Online-Portfolio-Optimierung übertragen werden [20].

In der Folge soll ein Algorithmus als lernend bezeichnet werden, wenn er aufbauend auf eine zurückgekoppelte Bewertung seiner Entscheidungen bezüglich einer Aufgabe(-nkasse) diese Entscheidungen in die Richtung einer besseren Bewertung ändert und damit verbessert.

Prinzipiell kann sich damit ein Online-Lernalgorithmus auf diese Weise

beschreiben lassen:

- i) Zu dem Zeitpunkt  $i = 1$  erhält der Online-Lernalgorithmus eine Information  $I_1$ <sup>15</sup> und trifft, basierend auf dieser Information  $I_1$  eine Entscheidung  $E_1$ <sup>16</sup>.
- ii) Nachdem der Algorithmus die Entscheidung  $E_1$  getroffen hat, wird ihm die optimale Entscheidung  $E_1^*$  bekannt gegeben.
- iii) Zu den Zeitpunkten  $i = 2, \dots, n$  erhält der Online-Lernalgorithmus wiederum jeweils eine Information  $I_i$  und trifft basierend auf den dann vorhandenen Informationen  $I_1, \dots, I_i$  und den bereits bekannten optimalen Entscheidungen  $E_1^*, \dots, E_{i-1}^*$  eine neue Entscheidung  $E_i$ .<sup>17</sup>

Formal lässt sich dementsprechend ein Online-Lernalgorithmus wie folgt definieren:

**Definition 4.10 (Online-Lernalgorithmus)**

Gegeben sei eine Folge von Informationen  $(I_1, \dots, I_n)$  und eine Folge von optimalen Entscheidungen  $(E_1^*, \dots, E_n^*)$ .

Ein Online-Lernalgorithmus *OLG* ist eine Abbildung, die ausgehend von der Folge  $(I_1, E_1^*, \dots, I_{i-1}, E_{i-1}^*, I_i)$  eine neue Entscheidung trifft:

$$E_i = OLG(I_1, E_1^*, \dots, I_{i-1}, E_{i-1}^*, I_i)$$

Ein einfacher Algorithmus, der nach dem oben skizzierten Prinzip arbeitet und sich einer Menge von Experten bedient, ist der sogenannte *Weighted-Majority-Algorithmus* [71], der in seiner Grundversion für die Ergebnismenge  $\{0, 1\}$  (s. auch Abbildung 4.6) wie folgt funktioniert:

Der Weighted-Majority-Algorithmus liefert eine Vorhersage, die auf den gewichteten Vorhersagen einer Anzahl von Experten beruht. Nach Kenntnis der korrekten Antwort wird eine Halbierung der Gewichte der Experten vorgenommen, die eine falsche Vorhersage gemacht haben.

Für den Weighted-Majority-Algorithmus lässt sich folgendes Theorem formulieren [20]:

---

<sup>15</sup>Diese Information wird im Bereich des *Maschinellen Lernens* auch mit *Beispiel* bezeichnet.

<sup>16</sup>Beim *Maschinellen Lernen* spricht man auch von *Schätzung*.

<sup>17</sup>Die bisherigen Entscheidungen des Online-Lernalgorithmus können ebenfalls als Grundlage späterer Entscheidungen dienen. Sie lassen sich allerdings aus den bereits vorhandenen Informationen und optimalen Entscheidungen herleiten.

- 
1. Initialisierung der Gewichtungen der Experten:  
 $w_1 := 1, w_2 := 1, \dots, w_N := 1$
  2. Erhalt des Problems
  3. Bestimme die Vorhersagen der  $N$  Experten
  4. Berechne die Vorhersage des Algorithmus durch:  

$$s = \begin{cases} 1 & : : \text{falls } \sum_{i:s_i=1} w_i \geq \sum_{i:s_i=0} w_i \\ 0 & : : \text{sonst} \end{cases}$$
  5. Erhalt der richtigen Antwort  $a$
  6. Für alle Experten  $i$  mit  $s_i \neq a$  :  $w_i := w_i/2$
  7. Gehe nach 2.
- 

Abbildung 4.6: Weighted-Majority-Algorithmus

**Theorem 4.22**

Gegeben sei eine Aufgabe, für die mit  $\{0, 1\}$  zwei mögliche Lösungen existieren. Bezeichne  $N$  die Anzahl der Experten,  $W = N$  bezeichne das anfängliche Gesamtgewicht der Experten. Ferner bezeichne  $M$  die Anzahl der Fehler des Weighted-Majority-Algorithmus und  $m$  die Anzahl der Fehler des besten Experten. Dann gilt die folgende Beziehung:

$$M \leq \frac{1}{\lg(4/3)}(m + \lg N) \quad (4.32)$$

**Beweis:**

Falls der Algorithmus eine falsche Vorhersage gemacht hat, bedeutet dies, dass mindestens die Hälfte der gewichteten Experten ebenfalls eine falsche Vorhersage gemacht haben. Dies bedeutet im nächsten Schritt eine Reduktion des Gesamtgewichts  $W$  um einen Faktor von  $1/4$ .

Falls der Algorithmus  $M$  Fehler gemacht hat, gilt für das Gesamtgewicht der Experten  $W$ :

$$W \leq N(3/4)^M \quad (4.33)$$

Falls der beste Experte  $m$  falsche Vorhersagen gemacht hat, ist das Gewicht dieses Experten auf  $(1/2)^m$  geschrumpft. Damit gilt:

$$W \geq (1/2)^m \quad (4.34)$$

Aus den Gleichungen 4.33 und 4.34 kann die folgende Gleichung abgeleitet werden:

$$\begin{aligned} (1/2)^m &\leq N(3/4)^M \\ \Leftrightarrow M &\leq \frac{1}{\lg(4/3)}(m + \lg N) \end{aligned}$$

□

Um das Problem der Portfolio-Optimierung angehen zu können, muss die Menge  $\{0, 1\}$  der möglichen Schätzwerte der Experten o. B. d. A. auf das Intervall  $[0, 1]$  erweitert werden.

In diesem Fall muss eine sogenannte Verlustfunktion spezifiziert werden, welche die Güte der Online-Lernalgorithmen bzw. der einzelnen Experten misst:

**Definition 4.11 (Verlustfunktion)**

*Gegeben sei eine Folge von Informationen  $(I_1, \dots, I_n)$  und eine Folge von optimalen Entscheidungen  $(E_1^*, \dots, E_n^*)$ . Seien ferner  $E_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  die Entscheidungen eines Online-Lernalgorithmus OLG.*

*Die Verlustfunktion  $L_i(E_i^*, E_i)$  ist dann definiert als Abstand der optimalen Entscheidung  $E_i^*$  zu der von dem Online-Lernalgorithmus getroffenen Entscheidung  $E_i$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- $L_i(E_i^*, E_i) \geq 0 \quad \forall \quad E_i^*, E_i$
- $L_i(E_i^*, E_i) = 0 \quad \forall \quad E_i^*, E_i \text{ mit } E_i^* = E_i$

## 4.6.2 Aggregierende Algorithmen zur Online-Portfolio-Optimierung

Vovk und Watkins [105] haben auf Basis des oben skizzierten Weighted-Majority-Algorithmus einen Algorithmus zur Online-Portfolio-Optimierung entwickelt.

Der Ansatz verwendet einen stetigen Expertenpool, wobei jeder Experte einem Portfoliovektor  $\mathbf{b}$ , d. h. einem konstant rebalancierten Portfolio, entspricht<sup>18</sup>.

Die Verlustfunktion  $L_i(\mathbf{b}^*, \mathbf{b})$ , die den Anteil der jeweiligen Expertenmeinung an der vom Algorithmus zu treffenden Entscheidung steuert, ist definiert durch:

$$L_i(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}) = \ln(\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{x}_i) - \ln(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i) \quad (4.35)$$

Um eine Übersteuerung zu vermeiden, kann die Adaptation der Expertenmeinungen mit einer gewissen Dämpfung erfolgen. Hierzu verwenden Vovk und Watkins [105] bei diesem Ansatz eine Lernrate  $\eta \in [0, 1]$ , mit deren Hilfe die Geschwindigkeit gesteuert wird, mit welcher der Online-Algorithmus gegen das zu lernende Element  $\mathbf{b}^*$  der Vergleichsklasse der konstant rebalancierten Portfolios konvergiert.

Die Gewichtsfunktion ergibt sich mit  $\beta = e^{-\eta}$  aus:

$$P_i(d\mathbf{b}) = \beta^{L_i(\mathbf{b}^*, \mathbf{b})} \cdot P_{i-1}(d\mathbf{b}) \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (4.36)$$

Mit den obigen Definitionen lassen sich aggregierende Algorithmen [104, 105] als Strategie zur Portfolio-Optimierung einsetzen:

**Definition 4.12 (Aggregierender Algorithmus)**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren und  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Die Investitionsstrategie  $AA_{\eta, P_0}$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \prod_{k=1}^{i-1} \beta^{L_k(\mathbf{b}^*, \mathbf{b})} P_0(d\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} \prod_{k=1}^{i-1} \beta^{L_k(\mathbf{b}^*, \mathbf{b})} P_0(d\mathbf{b})}$$

Eine mögliche Implementierung des Aggregierenden Algorithmus ist in Abbildung 4.7 dargestellt.

Bezüglich der Kompetitivität des Aggregierenden Algorithmus kann folgendes Theorem formuliert werden:

---

<sup>18</sup>O. B. d. A. soll im Folgenden jeweils das Maximum der relativen Kurse auf 1 normiert werden.

- 
1. Initialisierung  
 $i := 1$
  2. Generiere  $N$  zufällig verteilte Portfoliovektoren  
 $\mathbf{b}_1^{MC}, \dots, \mathbf{b}_N^{MC}$
  3. Berechne  $\mathbf{b}_i = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{b}_j^{MC} \prod_{k=1}^{i-1} \beta L_k(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}_j^{MC})}{\sum_{j=1}^N \prod_{k=1}^{i-1} \beta L_k(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}_j^{MC})}$
  4.  $i := i + 1$
  5. Falls  $i \leq n$ , gehe nach 3.
- 

Abbildung 4.7: Aggregierender Algorithmus (uniforme Verteilung)

**Theorem 4.23**

Sei  $AA_{\eta, P_0}$  ein Aggregierender Algorithmus mit Lernrate  $\eta$  und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner sei  $\mathbf{b}^*$  der Portfoliovektor des bezogen auf die Kursfolge  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios. Dann ist der Aggregierende Algorithmus universell und es gilt für dessen exponentielle Wachstumsrate  $W_n(AA_{\eta, P_0}, \mathbf{X}^{(n)})$  folgende Ungleichung:

$$W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(AA_{\eta, P_0}, \mathbf{X}^{(n)}) \leq \frac{1}{n} \left( \frac{m-1}{2 \ln 2 \eta} \ln n + k(\eta, m) \right),$$

wobei  $k(\eta, m)$  eine Konstante in Abhängigkeit von  $\eta$  und  $m$  ist.

**Beweis:**

Auf den Beweis, den man in [105] findet, wird an dieser Stelle verzichtet.  
□

Damit ist gezeigt, dass der Aggregierende Algorithmus log-optimal ist.

**4.6.3 Gradienten-basierte Ansätze****4.6.3.1 Einführung**

Helmbold et al. [52] haben ein Verfahren entwickelt, das ebenso wie das Verfahren von Vovk auf den Weighted-Majority-Algorithmus zurückgeht,

sich allerdings nicht direkt an dem besten konstant rebalancierten Portfolio orientiert.

Das Verfahren versucht eine Approximation an das *BCRP*, indem eine Optimierung des Portfolios bzgl. des letzten Kursvektors unter Berücksichtigung der Distanz zu dem vorigen Portfoliovektor vorgenommen wird.

Über die Berücksichtigung des Abstands zum letzten Portfoliovektor wird, wenn man dieses Argument rekursiv anwendet, auch bei diesem Verfahren die komplette Kurshistorie der sich im Portfolio befindlichen Wertpapiere in die Berechnung des aktuellen Portfoliovektors einbezogen. Die Relevanz der Kurshistorien kann durch einen Lernparameter gesteuert werden.

Der Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$  soll zwei unterschiedliche Bedingungen erfüllen:

- $\mathbf{b}_{i+1}$  soll nicht stark von dem vorherigen Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$  abweichen.
- $\mathbf{b}_{i+1}$  soll, den relativen Kursvektor  $\mathbf{x}_i$  vorausgesetzt, einen möglichst hohen Ertrag erzielen.

Aus diesen Bedingungen heraus lässt sich ein Online-Lernalgorithmus generieren, der wie folgt definiert ist:

**Definition 4.13 (Strategie von Helmbold et al.)**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren und  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Die Investitionsstrategie  $MU_\eta$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_{i+1} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \eta \log(\mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_i) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i) \quad (4.37)$$

Man kann diese Strategie aus dem im vorherigen Abschnitt skizzierten Konzept des Online-Lernens ableiten.

Hierbei betrachten wir die folgende Funktion:

$$K_1(\mathbf{b}_{i+1}) = \eta L_{i+1}(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}_{i+1}) + D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i) , \quad (4.38)$$

wobei die Funktion  $L_{i+1}(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}_{i+1})$  eine Verlustfunktion und  $D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i)$  eine Abstandsfunktion darstellt.

Mit der Verlustfunktion  $L_{i+1}(\mathbf{b}^*, \mathbf{b}_{i+1}) = \log(\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{x}_i) - \log(\mathbf{b}_{i+1} \cdot \mathbf{x}_i)$ , die in analoger Weise auch für die Aggregierenden Algorithmen verwendet wurde, erhält man:

$$K_1(\mathbf{b}_{i+1}) = \eta (\log(\mathbf{b}^* \cdot \mathbf{x}_i) - \log(\mathbf{b}_{i+1} \cdot \mathbf{x}_i)) + D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i) \quad (4.39)$$

Für den Portfoliovektor der Online-Strategie gilt damit:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{i+1} &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} K_1(\mathbf{b}) \\ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} (-\eta \log(\mathbf{b}_{i+1} \cdot \mathbf{x}_i) + D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i)) \\ &= \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} (\eta \log(\mathbf{b}_{i+1} \cdot \mathbf{x}_i) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i)) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Um das Maximierungsproblem in eine geschlossene Form für ein Update des Portfoliovektors  $\mathbf{b}_i$  zu überführen, kann die Funktion

$$K_2(\mathbf{b}_{i+1}) = \eta \log(\mathbf{b}_{i+1} \cdot \mathbf{x}_i) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i) \quad (4.41)$$

in eine Taylor-Reihe um den Punkt  $\mathbf{b}_i$  entwickelt werden:

$$K_2(\mathbf{b}_{i+1}) = \eta \left( \log(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i) + \frac{(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) \mathbf{x}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} + \dots \right) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i) \quad (4.42)$$

Durch eine Taylor-Approximation erster Ordnung von  $K_2(\mathbf{b}_{i+1})$  erhalten wir die folgende Funktion:

$$\tilde{K}_2(\mathbf{b}_{i+1}) = \eta \left( \log(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i) + \frac{(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) \mathbf{x}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_i) \quad (4.43)$$

Die Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^m b_{i,j} = 1$$

kann durch Einführung eines Lagrange-Multiplikators berücksichtigt werden, d. h.:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_2(\mathbf{b}_{i+1}) &= \eta \left( \log(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i) + \frac{(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) \mathbf{x}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right) \\ &\quad - D(\mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{b}_i) + \gamma \left( \sum_{j=1}^m b_{i+1,j} - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.44)$$

### 4.6.3.2 Verwendung der relativen Entropie als Abstandsfunktion

Im folgenden Abschnitt soll mit der *relativen Entropie* eine mögliche Abstandsfunktion vorgestellt und motiviert werden.

Die relative Entropie oder Kullback-Leibler-Divergenz [67, 61] ist ein Maß für den Unterschied zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen  $P$  und  $Q$  über den gleichen Zufallsvariablen und ist wie folgt definiert:

#### Definition 4.14 (Relative Entropie)

Seien  $E_1, E_2, \dots, E_n$  die möglichen Ergebnisse eines Versuchs und bezeichnen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens. Seien  $q_1, q_2, \dots, q_n$  Schätzer der Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Die relative Entropie ist dann wie folgt definiert:

$$E_{\text{relativ}}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i} \quad (4.45)$$

Es wird zudem vereinbart, dass  $0 \log 0 = 0$  und  $q_i \log(q_i/0) = \infty$  gelte.

Es gilt das folgende für uns wichtige Theorem [50]:

#### Theorem 4.24

Seien  $E_1, E_2, \dots, E_n$  die möglichen Ergebnisse eines Versuchs und bezeichnen  $p_1, p_2, \dots, p_n$  die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens. Seien  $q_1, q_2, \dots, q_n$  Schätzer der Wahrscheinlichkeiten  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

Dann gilt für die relative Entropie  $E_{\text{relativ}}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ :

$$E_{\text{relativ}}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) \geq 0 \quad , \quad (4.46)$$

wobei die Gleichheit genau dann existiert, wenn für alle  $i$  gilt  $p_i = q_i$ .

#### Beweis:

Es gilt  $\log x \leq x - 1$ , wobei die Gleichheit nur für  $x = 1$  existiert.

Daher gilt für die relative Entropie:

$$E_{\text{relativ}}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n) = \sum_{i=1}^n q_i \log \frac{q_i}{p_i}$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{i=1}^n q_i \log \frac{p_i}{q_i} \\
&\geq \sum_{i=1}^n q_i \left( \frac{p_i}{q_i} - 1 \right) \\
&= \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i = 0
\end{aligned}$$

□

Durch Verwendung der relativen Entropie erhält man für das Problem der Online-Portfolio-Optimierung folgende Abstandsfunktion:

$$D(\mathbf{b}_{i+1}, \mathbf{b}_i) = \sum_{j=1}^m b_{i+1,j} \log \frac{b_{i+1,j}}{b_{i,j}} \quad (4.47)$$

Damit ergibt sich für  $\tilde{K}_2(\mathbf{b}_{i+1})$ :

$$\tilde{K}_2(\mathbf{b}_{i+1}) = \eta \left( \log(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i) + \frac{(\mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i) \mathbf{x}_i}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right) - \sum_{j=1}^m b_{i+1,j} \log \frac{b_{i+1,j}}{b_{i,j}} \quad (4.48)$$

Durch Bildung der ersten Ableitung und anschließendes Nullsetzen erhält man für die Komponenten des Portfoliovektors  $\mathbf{b}_{i+1}$ :

$$b_{i+1,j} = \frac{b_{i,j} \exp \left( \eta \frac{x_{i,j}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right)}{\sum_{k=1}^m b_{i,k} \exp \left( \eta \frac{x_{i,k}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right)} \quad (4.49)$$

Damit ergibt sich die folgende Definition:

**Definition 4.15 (Algorithmus mit multiplikativem Update)**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren und  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren. Die Investitionsstrategie  $AA_{\eta, P_0}$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$b_{i+1,j} = \frac{b_{i,j} \exp \left( \eta \frac{x_{i,j}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right)}{\sum_{k=1}^m b_{i,k} \exp \left( \eta \frac{x_{i,k}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i} \right)}$$

Für diese Strategie lässt sich zeigen, dass sie kompetitiv zu dem besten konstant rebalancierten Portfolio ist und die gleiche Wachstumsrate wie das BCRP besitzt:

- 
1. Initialisierung:  
 Bestimme  $\eta \geq 0$   
 $i := 1$   
 $\mathbf{b}_1 = (1/m, \dots, 1/m)$
  2. Berechne für  $j = 1$  bis  $m$ :  

$$b_{i+1,j} = \frac{b_{i,j} \exp\left(\eta \frac{x_{i,j}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i}\right)}{\sum_{k=1}^m b_{i,j} \exp\left(\eta \frac{x_{i,j}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i}\right)}$$
  3.  $i := i + 1$
  4. Falls  $i \leq n$ , gehe nach 2.
- 

Abbildung 4.8: Algorithmus mit multiplikativem Update (relative Entropie)

### Theorem 4.25

Sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine Folge relativer Kursvektoren, für die jeweils gelte  $\max_j x_{i,j} = 1$  und  $x_{i,j} \geq r > 0$ . Ferner sei  $MU_\eta = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  das oben beschriebene Verfahren von Helmbold et al. mit  $\eta = 2 \cdot r \cdot \sqrt{2 \cdot \log m/n}$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1/m, \dots, 1/m)$  und der relativen Entropie als Abstandsfunktion. Weiterhin bezeichne  $\mathbf{b}^*$  den Portfoliovektor des bezogen auf  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios.

Dann gilt für die logarithmische Wachstumsrate  $W_n(MU_\eta, \mathbf{X}^{(n)})$  folgende Ungleichung:

$$W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(MU_\eta, \mathbf{X}^{(n)}) \leq \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\log m}{2 \cdot n}} \quad (4.50)$$

### Beweis:

Auf den Beweis, den man beispielsweise in [90] findet, wird an dieser Stelle verzichtet.  $\square$

Um zu zeigen, dass diese Strategie – ohne Einschränkungen hinsichtlich der Kursvektoren und auch der Lernrate  $\eta$  – universell ist, ist allerdings erforderlich, dass der Algorithmus in Stufen arbeitet, wobei zu Beginn

jeder Stufe der Portfoliovektor neu mit dem uniformen Portfoliovektor  $\mathbf{b} = (1/m, \dots, 1/m)$  initialisiert wird. Bei dem Beweis auf Universalität der vorgestellten Strategie sei auf [52, 90] verwiesen.

Der vorgestellte Ansatz ist insbesondere vom Gesichtspunkt der Zeitkomplexität her interessant, da diese in  $\mathcal{O}(n)$  liegt (s. auch Abbildung 4.8).

#### 4.6.3.3 Optimierung der Lernrate

Der in dem oben vorgestellten Ansatz verwendete Lernparameter  $\eta$  geht als eine Konstante in die Online-Strategie ein.

Eine kleine Lernrate  $\eta$  bewirkt, dass sich der Portfoliovektor  $\mathbf{b}_{i+1}$  nur geringfügig gegenüber dem vorherigen Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$  ändert, da die Abstandsfunktion ein größeres relatives Gewicht erhält. Wenn wir von einer anfänglichen Gleichverteilung der Portfoliogewichte ausgehen, heißt dies, dass auch nach  $n$  Handelsperioden eine ähnliche Verteilung der Portfoliogewichte vorliegt.

Eine große Lernrate verringert das Gewicht der Abstandsfunktion und erlaubt somit, dass der Online-Algorithmus stärkere Umschichtungen innerhalb des Portfolios vornehmen kann. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn sich herausstellt, dass nur einige der betrachteten Anlagen aktiv sind. Dann hat der Algorithmus durch schnelles Umschichten die Möglichkeit, in diese aktiven Anlagen vermehrt zu investieren. Bei einer niedrigen Lernrate kann dies nicht erreicht werden.

Eine Möglichkeit, eine Anpassung der Lernrate  $\eta$  an die jeweilige Marktsituation zu erreichen, ist die Verwendung eines Algorithmus, der nach jeder Handelsperiode a posteriori die Lernrate  $\eta^*$  bestimmt, die in der letzten Handelsperiode den höchsten Gewinn erzielt hat.

Diese Lernrate  $\eta^*$  ist auch in der nächsten Handelsperiode zu verwenden. Diese Strategie geht daher implizit davon aus, dass sogenannte *Markt-Shifts*, die längerfristige Trends darstellen, vorhanden sind.

Die Erweiterung des Algorithmus mit multiplikativem Update (s. Abbildung 4.9) ist ebenfalls kompetitiv zu dem besten konstant rebalancierten Portfolio.

- 
1. Initialisierung:  
 Bestimme  $\eta_1, \dots, \eta_l \geq 0$   
 $i := 1$   
 $\mathbf{b}_1 = (1/m, \dots, 1/m)$
  2. Berechne für  $k = 1$  bis  $l$ :  
 Berechne für  $j = 1$  bis  $m$ :  

$$b_{i+1,j}(\eta_k) = \frac{b_{i,j} \exp\left(\eta_k \frac{x_{i,j}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i}\right)}{\sum_{k=1}^m b_{i,j} \exp\left(\eta \frac{x_{i,j}}{\mathbf{b}_i \mathbf{x}_i}\right)}$$
  3. Bestimme  $\mathbf{b}_{i+1} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b}_{i+1}(\eta_k)} (\mathbf{b}_{i+1}(\eta_k) \cdot \mathbf{x}_{i+1})$
  4.  $i := i + 1$
  5. Falls  $i \leq n$ , gehe nach 2.
- 

Abbildung 4.9: Algorithmus mit multiplikativem Update und optimierter Lernrate

Es gilt das folgende Lemma:

**Lemma 4.26**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine Folge relativer Kursvektoren. Ferner sei  $MU_\eta = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  mit  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$  das oben beschriebene Verfahren. Weiterhin bezeichne  $\mathbf{b}^*$  den Portfoliovektor des bezogen auf  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios.

Dann gilt für die logarithmische Wachstumsrate  $W_n(MU_\eta, \mathbf{X}^{(n)})$  folgende Ungleichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(MU_\eta, \mathbf{X}^{(n)}) = 0 \quad (4.51)$$

**Beweis:**

Der Beweis dieses Lemmas ergibt sich direkt aus dem Theorem 4.25.  $\square$

#### 4.6.3.4 Agenten-basierte Online-Strategien mit multiplikativem Update

Die oben beschriebenen Verfahren können als agenten-basierte Verfahren aufgefasst werden, auf die an dieser Stelle kurz eingegangen werden soll, da sich durch diese Darstellungsweise einfacher weitere universelle Algorithmen ableiten lassen.

Es sollen hier zwei unterschiedliche Ansätze von agenten-basierten Algorithmen näher untersucht werden:

- adaptive Verfahren
- kooperative Verfahren

*Adaptive Verfahren* zeichnen sich in diesem Fall dadurch aus, dass jeder Agent  $Ag_k$  ( $k \in N^{>1}$ ) unabhängig von den Entscheidungen der anderen Agenten eine eigene Strategie verfolgt, deren Ergebnisse in eine übergeordnete Strategie einfließen.

Beispielsweise könnten die jeweiligen Agenten Online-Strategien mit unterschiedlichen Lernraten  $\eta_k$  einsetzen. Das agenten-basierte Verfahren bestimmt – analog zu dem Algorithmus von Cover et al. – das gewichtete Mittel aus den Einzelstrategien der Agenten  $Ag_k$  und erhält auf diese Weise den neuen Portfoliovektor.

Aufgrund der Konstruktion wird gewährleistet, dass die übergeordnete Strategie die erfolgreicheren Einzelstrategien stärker gewichtet. Ferner bleibt das skizzierte adaptive Verfahren universell. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass die Einzelstrategien jeweils universell sind, was auch für das gewichtete Mittel dieser universellen Strategien gilt.

Bei *kooperativen Verfahren* arbeiten die Agenten  $Ag_k$  ( $k \in IN^{>1}$ ) nicht mehr unabhängig voneinander, sie können vielmehr durch wechselseitige Kommunikation schneller auf bessere Strategien umschwenken. Beispielsweise kann ein Agent  $Ag_k$  nach jeder Investitionsperiode  $i$  mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $p_i \in [0; 1]$  die Strategie des Agenten  $Ag_{opt}$ , der in der letzten Investitionsperiode ( $i - 1$ ) den größten relativen Gewinn aufweist, verwenden.

Auch für das oben beschriebene kooperative Verfahren kann – mit Hilfe der gleichen Begründung wie bei den adaptiven Verfahren – gezeigt werden, dass es universell ist.

## 4.7 Verfahren der stochastischen Optimierung

Der Ansatz von Gaivoronski und Stella [49] zur Generierung von universellen Algorithmen zur Portfolio-Optimierung baut auf der Beobachtung auf, dass die Folge von Portfoliovektoren für das jeweils bis zum Zeitpunkt  $i$  optimale konstant rebalancierte Portfolio  $BCRP_i$  bei großen  $n$  kaum noch Schwankungen unterliegt.

Das Verfahren approximiert zum Zeitpunkt  $i$  den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_{i+1}^*$  des  $BCRP_{i+1}$  durch den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i^*$  des  $BCRP_i$ , der bereits zum Zeitpunkt  $i$  z. B. durch Methoden der stochastischen Optimierung berechnet werden kann.

Die auf diese Weise konstruierte Investitionsstrategie wird als *Successive Constant Rebalanced Portfolio (SCRP)* bezeichnet.

### Definition 4.16 (Successive Constant Rebalanced Portfolio)

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren. Die Investitionsstrategie *SCRP* ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_1 = \left( \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right) \quad (4.52)$$

$$\mathbf{b}_i = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} S_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (4.53)$$

Diese Definition führt zu dem in Abbildung 4.10 dargestellten Algorithmus.

Wir wollen zeigen, dass die Strategie *SCRP* universell ist, d. h. die Strategien *SCRP* und *BCRP* asymptotisch die gleiche Wachstumsrate besitzen. Um dies zu beweisen, benötigen wir Eigenschaften von streng konkaven Funktionen, die wir wie folgt definieren wollen:

### Definition 4.17 (Streng konkave Funktionen)

Sei  $\mathcal{X}$  eine konvexe Menge. Die Funktion  $f(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$  heißt streng konkave Funktion, wenn ein  $\delta > 0$  existiert, so dass für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$  gilt:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y}) \leq f_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \delta/2 \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \quad (4.54)$$

---

1. Initialisierung

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b}_{n-1}$$

$$\mu \geq \epsilon > 0$$

2. Falls keine  $p, q$  existieren mit

$$\frac{\partial}{\partial b'_p} \sum_{k=1}^{n-1} \log(\mathbf{b}' \mathbf{x}_{n-1}) \geq \frac{\partial}{\partial b'_q} \sum_{k=1}^{n-1} \log(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{x}_{n-1}) + \mu \quad ,$$

gehe nach 5.

3. Berechne:

$$\lambda^* := \max_{[0, \min\{1-b'_p, b'_q\}]} \sum_{k=1}^{n-1} \log(\mathbf{b}' + \lambda(\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_q) \cdot \mathbf{x}_{n-1})$$

4.  $\mathbf{b}' = \mathbf{b}' + \lambda^*(\mathbf{e}_p - \mathbf{e}_q)$

5.  $\mu := \mu/2$

6. Falls  $\mu > \epsilon$ , gehe nach 2.

7.  $\mathbf{b}_n := \mathbf{b}'$

---

Abbildung 4.10: Algorithmus zum Berechnung des *SCR*P

Mit Hilfe dieser Definition lässt sich folgendes Lemma konstruieren:

**Lemma 4.27**

$\mathcal{X}$  sei eine kompakte konvexe Menge, die Funktion  $f(\mathbf{x})$  sei konkav auf einer Menge  $\bar{\mathcal{X}}$  mit  $\mathcal{X} \subset \bar{\mathcal{X}}$  und streng konkav auf der Menge  $\mathcal{X}$  mit einer Konstante  $\delta > 0$ . Ferner sei die Funktion  $\psi(\mathbf{x})$  konkav auf  $\bar{\mathcal{X}}$  und es gelte:

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \|\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})\| \leq K < \infty$$

Dann ist die Funktion  $f_\epsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \epsilon\psi(\mathbf{x})$  für genügend kleine  $\epsilon > 0$  ebenfalls streng konkav auf  $\mathcal{X}$  mit der Konstante  $\delta$ .

Ferner besitzen die Funktionen  $f(\mathbf{x})$  und  $f_\epsilon(\mathbf{x})$  mit  $\mathbf{x}$  resp.  $\mathbf{x}^\epsilon$  jeweils ein einziges Maximum auf der Menge  $\mathcal{X}$  und es gilt:

$$\|\mathbf{x}^\epsilon - \mathbf{x}\| \leq \frac{2K}{\delta} \cdot \epsilon \quad (4.55)$$

**Beweis:**

Auf den Beweis wird an dieser Stelle verzichtet, es sei auf [49] verwiesen.  $\square$

Mit Hilfe dieser Eigenschaft lässt sich zeigen, dass das *SCR*P universell ist:

**Theorem 4.28**

Bezeichne  $\mathcal{B}$  die Menge aller Portfolios,  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  bezeichne die Folge der Portfoliovektoren der Strategie *SCR*P. Ferner sei

$$W_n(\text{SCR}P, \mathbf{X}^{(n)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(\mathbf{b}_k, \mathbf{x}_k)$$

die Wachstumsrate des *SCR*P.

Unter den Voraussetzungen, dass gilt

- $W_n(\text{SCR}P, \mathbf{X}^{(n)})$  ist streng konkav auf  $\mathcal{B}$
- $\log(\mathbf{b}, \mathbf{x}_i)$  ist für  $\sup_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}, 1 \leq i \leq n} \|\log(\mathbf{b}, \mathbf{x}_i)\| = K < \infty$ ,

besitzt das *SCR*P die folgende Eigenschaft:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(\text{SCR}P, \mathbf{X}^{(n)}) = 0 \quad (4.56)$$

**Beweis:**

Der folgende Beweis ist angelehnt an [49].

Wir definieren zunächst:

$$\begin{aligned} d_i &:= W_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(\text{SCR}P, \mathbf{X}^{(n)}) \\ &= \frac{1}{n} \log S(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) - \frac{1}{n} \log S(\text{SCR}P, \mathbf{X}^{(n)}) \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= \frac{1}{n} \log S(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) - \frac{1}{n} \log S(\text{SCRIP}, \mathbf{X}^{(n)}) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{i=i}^{n+1} \log(\mathbf{b}_{n+1}^* \mathbf{x}_i) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=i}^{n+1} \log(\mathbf{b}_i^* \mathbf{x}_i) \\
&\leq \frac{n}{n+1} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=i}^n \log(\mathbf{b}_n^* \mathbf{x}_i) - \frac{1}{n} \sum_{i=i}^n \log(\mathbf{b}_i^* \mathbf{x}_i) \right) \\
&\quad + \frac{1}{n+1} (\log(\mathbf{b}_{n+1}^* \mathbf{x}_{n+1}) - \log(\mathbf{b}_n^* \mathbf{x}_{n+1})) \tag{4.57}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{n}{n+1} d_n + \frac{1}{n+1} \cdot K \cdot \|\mathbf{b}_{n+1}^* - \mathbf{b}_n^*\| \tag{4.58}$$

$$= \frac{n}{n+1} d_n + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n(n+1)} \frac{2K^2}{\delta} \tag{4.59}$$

Für  $d_j$  mit  $1 \leq j \leq n$  lässt sich eine analoge Ungleichung aufstellen:

$$d_j = \frac{j-1}{j} d_{j-1} + \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{(j-1)j} \frac{2K^2}{\delta} \tag{4.60}$$

Mit 4.59 und 4.60 lässt sich  $d_{n+1}$  schreiben als:

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= \frac{n}{n+1} \left( \frac{n-1}{n} \cdot d_{n-1} + \frac{1}{(n-1)n} \cdot \frac{2K^2}{\delta} \right) + \frac{1}{n(n+1)} \cdot \frac{2K^2}{\delta} \\
&= \prod_{i=1}^n d_1 + \frac{2K^2}{\delta} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} \cdot \prod_{j=i+1}^n \frac{j}{j+1} \right) \\
&= \frac{1}{n+1} d_1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2K^2}{\delta} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \\
&\leq \frac{1}{n+1} d_1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2K^2}{\delta} \sum_{i=1}^n \left( 1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) \tag{4.61}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{n+1} d_1 + \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2K^2}{\delta} (1 + \log n) \tag{4.62}$$

Damit haben wir gezeigt, dass für  $d_n$  asymptotisch gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0 \quad (4.63)$$

Also ist die Strategie *SCR*P universell.  $\square$

## 4.8 Zusammenführung der Ansätze

Die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten kompetitiven Algorithmen sind allesamt unterschiedlich motiviert. Es lässt sich allerdings zeigen, dass trotz unterschiedlicher Ausgangspunkte starke Zusammenhänge zwischen diesen Verfahren existieren und dass sich diese Investitionsstrategien teilweise - jedenfalls unter gewissen Parametereinstellungen - ineinander überführen lassen.

Das Verfahren von Cover et al. lässt sich auch als Experten-basiertes Verfahren auffassen, bei dem eine überabzählbare Anzahl von Experten Strategien in Form von konstant rebalancierten Portfolios einsetzen, um Gewinne zu erzielen. Die Experten werden nach den erzielten Gewinnen beurteilt, d. h. die Höhe der zugewiesenen Ressourcen erfolgt analog der erzielten Rendite.

Man kann daher das Universal Portfolio [28] als einen Spezialfall der von Vovk [105] entwickelten aggregierenden Algorithmen auffassen. Es gilt das folgende Lemma:

### Lemma 4.29

Sei  $AA_\eta$  ein aggregierender Algorithmus<sup>19</sup> und bezeichne  $UP_\mu$  das  $\mu$ -gewichtete Universal Portfolio. Dann gilt für  $\eta = 1$ :

$$S_n(AA_1, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(UP_\mu, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.64)$$

### Beweis:

Der Beweis ergibt sich direkt aus den Definitionen 4.12 und 4.3.  $\square$

Das Verfahren von Gaivoronski und Stella [49] orientiert sich im Gegensatz zu den anderen Online-Investitionsstrategien an dem konstant rebalancierten Portfolio  $\mathbf{b}_n^*$ , das bis zum letzten Handelszeitpunkt  $n$  die höchste Rendite erwirtschaftet hätte.

---

<sup>19</sup>Es soll anfangs eine uniforme Gewichtung der Portfoliovektoren in  $\mathcal{B}$  vorhanden sein.

Durch Verwendung des Dirac-Maßes lässt sich folgender Zusammenhang zwischen dem Ansatz von Gaivoronski et al. und dem Universal Portfolio von Cover herstellen:

**Lemma 4.30** *Bezeichne  $SCR_P$  die Investitionsstrategie von Gaivoronski und Stella. Die Parameter seien so gewählt, dass der Portfoliovektor zum Zeitpunkt  $n$  mit dem Portfoliovektor des bis zum Zeitpunkt  $n - 1$  besten konstant rebalancierten Portfolios übereinstimmt. Bezeichne ferner  $UP_{Dirac(\mathbf{b}_i^*)}$  das Universal Portfolio mit dem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$ , das der Dirac-Verteilung entspricht, für die gilt:*

$$Prob(\mathbf{b}) = \begin{cases} 1 & : \mathbf{b} = \mathbf{b}_i^* \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt:

$$S_n(SCR_P, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(UP_{Dirac}, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.65)$$

**Beweis:**

Der Beweis ergibt sich direkt aus der Definition der beiden Strategien  $UP$  (Definition 4.2) und  $SCR_P$  (Definition 4.16) sowie der Definition der Dirac-Verteilung.  $\square$

Im Prinzip bedeutet die Verwendung der Dirac-Verteilung nichts anderes als die Fokussierung des Universal Portfolios auf genau einen Experten. Dies ist erforderlich, da das Verfahren von Gaivoronski und Stella nicht als eine Experten-basierte Investitionsstrategie aufgefasst werden kann.

Durch die sukzessive Integration von Elementen aus den Experten-basierten Verfahren lässt sich allerdings eine Verbindung zu den anderen skizzierten Algorithmen herstellen.

Um dies herausarbeiten zu können, ist die Definition eines übergeordneten Ansatzes erforderlich:

**Definition 4.18 (Mixed Approach)**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren und  $\mu$  ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß über  $\mathcal{B}$ . Die Investitionsstrategie  $MA_{\eta,g,D}$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_{n+1} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \eta \left( \sum_{i=1}^n g(i) \log(\mathbf{b} \mathbf{x}_i) \right) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_n)$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass dieses Verfahren bei geeigneter Parameterwahl sowohl dem *SCR*P von Gaivoronski et al. als auch dem Verfahren *MU* von Helmbold et al. entspricht. Dann soll gezeigt werden, dass dieses Verfahren auch bei der Wahl anderer Parameter kompetitiv zum *BCRP* ist.

**Lemma 4.31**

Gegeben sei eine Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  und die Menge der möglichen Portfoliovektoren  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ . Bezeichne  $\mathbf{b}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) die Portfoliovektoren der Strategie *MA* mit:

$$\mathbf{b}_{n+1} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \eta \left( \sum_{i=1}^n g(i) \log(\mathbf{b} \mathbf{x}_i) \right) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_n). \quad (4.66)$$

Dann gilt:

- i) Sei  $\hat{g}(i) = 0 \ \forall i < n \wedge \hat{g}(n) = 1$ . Dann entspricht der Mixed Approach dem Algorithmus von Helmbold et al. und es gilt:

$$S_n(MA_{\eta, \hat{g}, D}, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(MU_{\eta, D}, \mathbf{X}^{(n)})$$

- ii) Sei  $\bar{g}(i) = 1 \ \forall i \leq n$  und  $\bar{D}(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0 \ \forall \mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j$ . Dann entspricht der Mixed Approach dem Algorithmus von Gaivoronski et al. und es gilt:

$$S_n(MA_{\eta, \bar{g}, \bar{D}}, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(SCR\!P, \mathbf{X}^{(n)})$$

**Beweis:**

- i) Der Beweis ergibt sich direkt aus der Konstruktion des Mixed Approachs und aus der Definition 4.13.
- ii) Der Beweis ergibt sich ebenfalls unmittelbar aus der Konstruktion des Mixed Approachs und aus der Definition 4.16.

□

Es gilt ferner das folgende Theorem:

**Theorem 4.32**

Gegeben sei eine Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  und die Menge der möglichen Portfoliovektoren  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$ . Weiterhin bezeichne  $\mathbf{b}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) die Portfoliovektoren der Strategie *MA* mit:

$$\mathbf{b}_{n+1} = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} \eta \left( \sum_{i=1}^n g(i) \log(\mathbf{b} \mathbf{x}_i) \right) - D(\mathbf{b}, \mathbf{b}_n). \quad (4.67)$$

Sei ferner  $0 \leq g(i) \leq 1 \forall i \leq n$  und  $D(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j) = 0$ . Dann ist der Mixed Approach kompetitiv zum optimalen konstant rebalancierten Portfolio BCRP.

**Beweis:**

Zunächst soll gezeigt werden, dass das Verfahren MA kompetitiv zum SCRIP ist. Hierzu betrachten wir die Funktion

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(i) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i),$$

die im Falle  $g(i) = 1$  für  $1 \leq i \leq n$  der (logarithmischen) Wachstumsrate entspricht.

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(i) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (g(1) + g(i) - g(1)) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} g(1) \sum_{i=1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n (g(i) - g(1)) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} g(1) \sum_{i=1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{i=2}^n (g(2) - g(1) + g(i) - g(2)) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} g(1) \sum_{i=1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) + \frac{1}{n} (g(i) - g(1)) \sum_{i=2}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ & \quad + \frac{1}{n} \sum_{i=3}^n (g(i) - g(2)) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ &= \frac{1}{n} g(1) \sum_{i=1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\ & \quad + \frac{1}{n} (g(2) - g(1)) \sum_{i=2}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{n}(g(3) - g(2)) \sum_{i=3}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\
& \vdots \\
& + \frac{1}{n}(g(n-1) - g(n-2)) \sum_{i=n-1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\
& + \frac{1}{n}(g(n) - g(n-1)) \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_n)
\end{aligned}$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned}
f_j(\mathbf{b}) &= \frac{1}{n}g(1) \sum_{i=1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) + \dots + \frac{1}{n}(g(j-1) - g(j)) \sum_{i=j}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\
\psi_j(\mathbf{b}) &= \sum_{i=j+1}^n \log(\mathbf{b}\mathbf{x}_i) \\
\epsilon_j(\mathbf{b}) &= \frac{1}{n}(g(j+1) - g(j))
\end{aligned}$$

Ferner sei:

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_j^* &= \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} f_j(\mathbf{b}) \\
\mathbf{b}_j^\epsilon &= \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} f_j(\mathbf{b}) + \epsilon_j \psi_j(\mathbf{b})
\end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind  $f_j(\mathbf{b})$  und  $\Psi_j(\mathbf{b})$  streng konkave Funktionen. Es gilt daher:

$$\| \mathbf{b}_j^* - \mathbf{b}_{\epsilon_j}^* \| \leq \frac{2K_j}{n\delta_j} \epsilon_j$$

Damit gilt für  $\| \mathbf{b}_1^* - \mathbf{b}_{n-1}^\epsilon \|$  folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{b}_1^* - \mathbf{b}_{n-1}^\epsilon \| \\
& \leq \| \mathbf{b}_1^* - \mathbf{b}_{\epsilon_1}^* \| + \| \mathbf{b}_2^* - \mathbf{b}_{\epsilon_2}^* \| + \dots + \| \mathbf{b}_{n-1}^* - \mathbf{b}_{n-1}^\epsilon \| \\
& \leq \frac{2K_1}{\delta_1} \epsilon_1 + \dots + \frac{2K_{n-1}}{\delta_{n-1}} \epsilon_{n-1} \\
& \leq \frac{2K_{max}}{\delta_{min}} \left[ \frac{1}{n}(g(2) - g(1)) + \frac{1}{n}(g(3) - g(2)) + \dots \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{n}(g(n) - g(n-1)) \right]
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2K_{max}}{\delta_{min}} \frac{1}{n}$$

Mit  $\kappa := 2K_{max}/\delta_{min}$  gilt also:

$$\| \mathbf{b}_1^* - \mathbf{b}_{n-1}^\epsilon \| \leq \frac{\kappa}{n} \quad (4.68)$$

Da sowohl  $\mathbf{b}_1^*$  als auch  $\mathbf{b}_{n-1}^\epsilon$  Portfoliovektoren sind, gilt für deren Komponenten  $0 \leq b_{1,k}^* \leq 1$  resp.  $0 \leq b_{n-1,k}^\epsilon \leq 1$  für  $1 \leq k \leq n$ .

Mit 4.68 gilt daher:

$$| b_{1,k}^* - b_{n-1,k}^\epsilon | \leq \frac{\kappa}{n} \cdot \beta_k ,$$

wobei  $\beta_k$  eine Konstante mit  $0 \leq \beta_k \leq 1$  ist.

Sei o.B.d.A.  $b_{1,k}^* < b_{n-1,k}^\epsilon$ , dann gilt:

$$\begin{aligned} b_{n-1,k}^\epsilon - b_{1,k}^* &\leq \frac{\kappa}{n} \\ \implies b_{n-1,k}^\epsilon &\leq \frac{\kappa}{n} + b_{1,k}^* \\ \iff b_{n-1,k}^\epsilon + r_k &= \frac{\kappa}{n} + b_{1,k}^* \text{ mit } r_k \in \mathcal{O}(1/n) \\ \iff b_{n-1,k}^\epsilon &= \left(1 - \frac{\kappa}{n}\beta_k\right) \cdot b_{1,k}^* + \frac{\kappa}{n}\beta_k \cdot \left(1 + b_{1,k}^* - \frac{n}{\kappa\beta_k} \cdot r_k\right) \end{aligned}$$

Mit  $\alpha_k = \kappa/n \cdot \beta_k$  und  $z_k = 1 + b_{1,k}^* - \frac{n}{\kappa\beta_k} \cdot r_k$  gilt:

$$b_{n-1,k}^\epsilon = (1 - \alpha_k)b_{1,k}^* + \alpha_k \cdot z_k$$

Sei  $\alpha = \max_{1 \leq k \leq m} \alpha_k$ . Dann lässt sich  $\mathbf{b}_{n-1}^\epsilon$  schreiben als:

$$\mathbf{b}_{n-1}^\epsilon = (1 - \alpha)\mathbf{b}_1^* + \alpha \mathbf{z} , \quad (4.69)$$

wobei nach Voraussetzung  $\alpha \in \mathcal{O}(1/n)$ .

Damit gilt für den jeweiligen relativen Gewinn:

$$S(\mathbf{b}_{n-1}^\epsilon, \mathbf{X}^{(n)}) \geq (1 - \alpha)^n S(\mathbf{b}_1^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.70)$$

$$= \left(1 - \frac{\nu}{n}\right)^n S(\mathbf{b}_1^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.71)$$

Mit  $n \rightarrow \infty$  gilt also:

$$S(\mathbf{b}_{n-1}^\epsilon, \mathbf{X}^{(n)}) \geq \exp^{-\nu} S(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad , \text{ d. h.} \quad (4.72)$$

$$S(\text{SCRIP}, \mathbf{X}^{(n)}) \geq \exp^{-\nu} S(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.73)$$

Somit ist der Online-Algorithmus *MA* kompetitiv zur Strategie *SCRIP* und damit auch kompetitiv zum besten konstant rebalancierten Portfolio.  $\square$

## 4.9 Kaskadenförmige Universal Portfolios

Die in diesem Kapitel entwickelten Ansätze stellen bereits ein umfangreiches Instrumentarium dar, um universelle Algorithmen, d. h. Algorithmen, welche die gleiche exponentielle Wachstumsrate wie das beste konstant rebalancierte Portfolio besitzen, zu konstruieren. Allerdings wurde bislang noch nicht untersucht, inwieweit sich die im Zusammenhang mit den Threat-basierten Algorithmen entwickelten Techniken (s. Abschnitt 4.2) auf universelle Algorithmen übertragen lassen.

In diesem Abschnitt soll eine Übertragung der Techniken unter Verwendung einer anderen Benchmark stattfinden. Hierbei gehen wir von nur drei risikobehafteten Anlagen aus; eine Verallgemeinerung ist analog zu dem Vorgehen in Abschnitt 4.2 möglich<sup>20</sup>.

Zunächst wird daher der Benchmark skizziert und in Relation zu bereits verwendeten Benchmarks wie dem *BCRP* gebracht. Dann wird die Strategie des kaskadenförmigen Universal Portfolios vorgestellt und – auch anhand von einigen Beispielen – gezeigt, dass diese Strategie kompetitiv zu der Benchmark ist.

---

<sup>20</sup>Die unten aufgeführten Theoreme lassen sich ebenfalls auf eine endliche Anzahl  $m$  von Anlagen im Portfolio übertragen.

### 4.9.1 Kaskadenförmige beste konstant rebalancierte Algorithmen für drei Anlagen

Kaskadenförmige beste konstant rebalancierte Algorithmen sind Strategien, die zur Berechnung ihrer Portfoliovektoren stufenweise vorgehen und hierbei immer nur zwei Anlagen bzw. Portfolios gleichzeitig betrachten (s. Abbildung 4.11). Innerhalb der einzelnen Stufen verhalten sich diese Algorithmen analog zum *BCRP*.

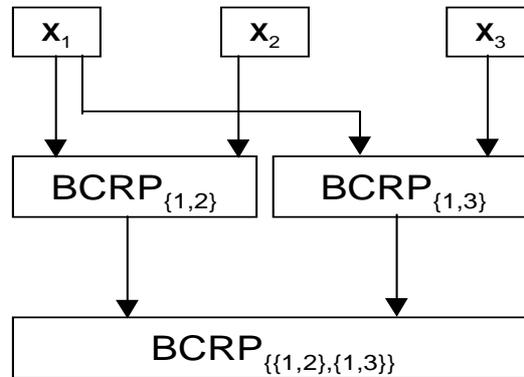


Abbildung 4.11: Kaskadenförmiges bestes konstant rebalanciertes Portfolio für drei Anlagen

Man kann zeigen, dass die auf diese Weise konstruierte Offline-Strategie *KBCRP* asymptotisch einen höheren relativen Gewinn wie die beste Anlage im Portfolio erzielt. Es gilt folgendes Lemma:

**Lemma 4.33**

Gegeben sei eine Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Weiterhin bezeichne *BCRP* das beste konstant rebalancierte Portfolio, *KBCRP* das kaskadenförmige beste konstant rebalancierte Portfolio und *BBaH* das beste Buy-and-Hold Portfolio. Dann gilt:

$$S_n(\text{BCRP}, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(\text{KBCRP}, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(\text{BBaH}, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.74)$$

**Beweis:**

Bezeichne  $\mathbf{b}^A$  resp.  $\mathbf{b}^B$  den Portfoliovektor des besten konstant rebalancierten Portfolios bestehend aus den Anlagen  $A_1$  und  $A_2$  resp.  $A_1$  und

$A_3$ . Für deren relative Gewinne gilt:

$$S_n(\mathbf{b}^A, \mathbf{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{b}^A \mathbf{x}_i \quad (4.75)$$

$$S_n(\mathbf{b}^B, \mathbf{X}^{(n)}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{b}^B \mathbf{x}_i \quad (4.76)$$

Wir definieren  $\mathbf{y}_i$  – und dementsprechend  $\mathbf{Y}^{(n)} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$  – wie folgt:

$$\mathbf{y}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^A \mathbf{x}_i \\ \mathbf{b}^B \mathbf{x}_i \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

Laut Konstruktion gilt dann für einen beliebigen Portfoliovektor  $\mathbf{b}^C$ :

$$\begin{aligned} S_n(\mathbf{b}^{C'}, \mathbf{Y}^{(n)}) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{b}^{C'} \mathbf{y}_i \\ &= \prod_{i=1}^n b_1^{C'} \mathbf{b}^A \mathbf{x}_i + b_2^{C'} \mathbf{b}^B \mathbf{x}_i \\ &= \prod_{i=1}^n b_1^{C'} (b_1^A x_{i,1} + b_2^A x_{i,2}) + b_2^{C'} (b_1^B x_{i,1} + b_2^B x_{i,3}) \\ &= \prod_{i=1}^n (b_1^{C'} b_1^A + b_2^{C'} b_1^B) x_{i,1} + b_1^{C'} b_2^A x_{i,2} + b_2^{C'} b_3^B x_{i,3} \\ &= \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} b_1^{C'} b_1^A + b_2^{C'} b_1^B \\ b_1^{C'} b_2^A \\ b_2^{C'} b_2^B \end{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbf{b}^{D'} \mathbf{x}_i \end{aligned} \quad (4.78)$$

Wählt man  $\mathbf{b}^{C'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , erhält man also:

$$S_n(\mathbf{b}^{C'}, \mathbf{Y}^{(n)}) = S_n(\mathbf{b}^{D'}, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(\mathbf{b}^A, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.79)$$

Wählt man hingegen  $\mathbf{b}^{C'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , erhält man auf die gleiche Weise:

$$S_n(\mathbf{b}^{C'}, \mathbf{Y}^{(n)}) = S_n(\mathbf{b}^{D'}, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(\mathbf{b}^B, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.80)$$

Da die Gleichungen 4.79 und 4.80 für konstant rebalancierte Portfolios gelten, können für das beste rebalancierte Portfolio  $KBCRP$  mit Portfoliovektor  $\mathbf{b}^C$  folgende Ungleichungen formuliert werden:

$$S_n(KBCRP, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(\mathbf{b}^A, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(BBaH, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.81)$$

$$S_n(KBCRP, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(\mathbf{b}^B, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(BBaH, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.82)$$

Da aufgrund der Gleichung 4.78 das  $KBCRP$  ein konstant rebalanciertes Portfolio innerhalb des Portfolioraums  $B$  für drei Anlagen darstellt, gilt:

$$S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) \geq S_n(KBCRP, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (4.83)$$

□

### 4.9.2 Kaskadenförmige Universal Portfolios für drei Anlagen

Wir wollen nun – analog zur Konstruktion der Benchmark – ein kaskadenförmiges Universal Portfolio  $KUP$  entwickeln. Wiederum werden die Portfoliovektoren stufenweise berechnet, wobei immer nur zwei Anlagen bzw. Portfolios gleichzeitig betrachtet werden (s. Abbildung 4.12). Innerhalb jeder einzelnen Stufe findet eine zum Universal Portfolio analoge Berechnung der Portfoliovektoren statt.

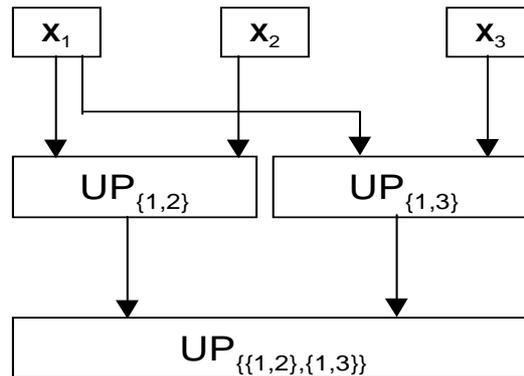


Abbildung 4.12: Kaskadenförmiges Universal Portfolio

Man kann zeigen, dass die oben skizzierte Online-Strategie zur Portfolio-Optimierung kompetitiv zu dem – entsprechenden –  $KBCRP$  ist.

**Theorem 4.34**

Gegeben sei eine Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  für drei Anlagen  $A_1, A_2$  und  $A_3$ . Weiterhin bezeichne  $KBCRP$  das kaskadenförmige beste konstant rebalancierte Portfolio und  $KUP$  das kaskadenförmige Universal Portfolio (s. Abbildungen 4.11 und 4.12).

Dann gilt für die Kompetitivitätsrate  $c_n(KUP, KBCRP)$ :

$$\begin{aligned} c_n(KUP, KBCRP) &= \sup_{\mathbf{X}^{(n)} \in \mathbb{R}_+^n} \frac{S_n(KBCRP, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(KUP, \mathbf{X}^{(n)})} \\ &= n^{\mathcal{O}(1)} \end{aligned} \quad (4.84)$$

**Beweis:**

Bezeichne  $\mathbf{b}_i^a$  resp.  $\mathbf{b}_i^b$  den Portfoliovektor des Universal Portfolios  $UP_{\{1,2\}}$  resp.  $UP_{\{1,3\}}$  zum Zeitpunkt  $i$  bestehend aus den Anlagen  $A_1$  und  $A_2$  resp.  $A_1$  und  $A_3$ . Ferner bezeichne  $\mathbf{b}^A$  resp.  $\mathbf{b}^B$  den Portfoliovektor des besten konstant rebalancierten Portfolios  $BCRP_{\{1,2\}}$  resp.  $BCRP_{\{1,3\}}$  bestehend aus den Anlagen  $A_1$  und  $A_2$  resp.  $A_1$  und  $A_3$ .

Aufgrund des Theorems 4.14 und des Lemmas 4.15 gilt:

$$c_n(UP_{\{1,2\}}, BCRP_{\{1,2\}}) = n^{\mathcal{O}(1)} \quad (4.85)$$

$$c_n(UP_{\{1,3\}}, BCRP_{\{1,3\}}) = n^{\mathcal{O}(1)} \quad (4.86)$$

Für den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i^c$  des Universal Portfolios  $KUP$  gilt:

$$\mathbf{b}_i^c = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{b} \mathbf{z}_j d\mathbf{b}}{\int_{\mathcal{B}} \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{b} \mathbf{z}_j d\mathbf{b}}, \quad (4.87)$$

wobei der Vektor  $\mathbf{z}_j$  – und dementsprechend  $\mathbf{Z}^{(n)} = (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$  – wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{z}_j = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_j^a \mathbf{x}_j \\ \mathbf{b}_j^b \mathbf{x}_j \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

Das in dem Beweis des Theorems 4.14 verwendete Argument kann an dieser Stelle analog angewandt werden, so dass gilt:

$$\frac{S_n(KUP, \mathbf{Z}^{(n)})}{S_n(KUP, \mathbf{Y}^{(n)})} \leq n + 1 \quad (4.89)$$

Zusammen mit 4.85 und 4.86 folgt daraus die Aussage des Theorems.  $\square$

### 4.9.3 Praktische Beispielportfolios aus dem Dow Jones Index

An dieser Stelle sollen einige Beispiele die Stärke der vorgestellten Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung verdeutlichen.

Zunächst soll der relative Gewinn des besten konstant rebalancierten Portfolios dem des kaskadenförmigen besten konstant rebalancierten Portfolios gegenübergestellt werden (s. Abbildung 4.13).

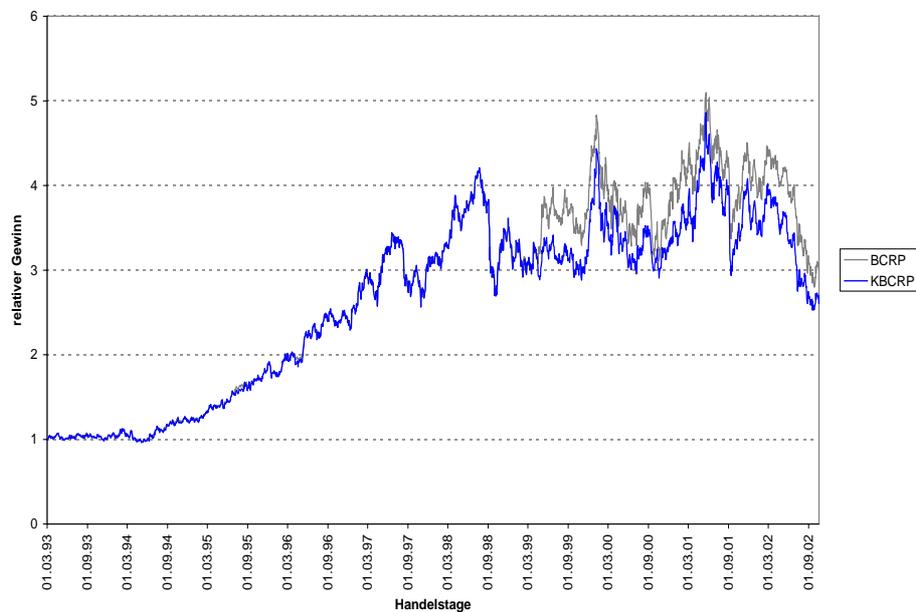


Abbildung 4.13: Vergleich der relativen Gewinne von BCRP und KBCRP (Alcoa, Coca Cola, Exxon)

Die hier gezeigten Unterschiede sind darauf zurückzuführen, dass zu den Zeitpunkten der auftretenden Abweichungen alle Anlagen in dem Portfolio aktiv sind.

Falls nur eine Anlage im Portfolio aktiv ist, sind die relativen Gewinne aufgrund der Konstruktion von *BCRP* und *KBCRP* identisch (s. Abbildung 4.13).

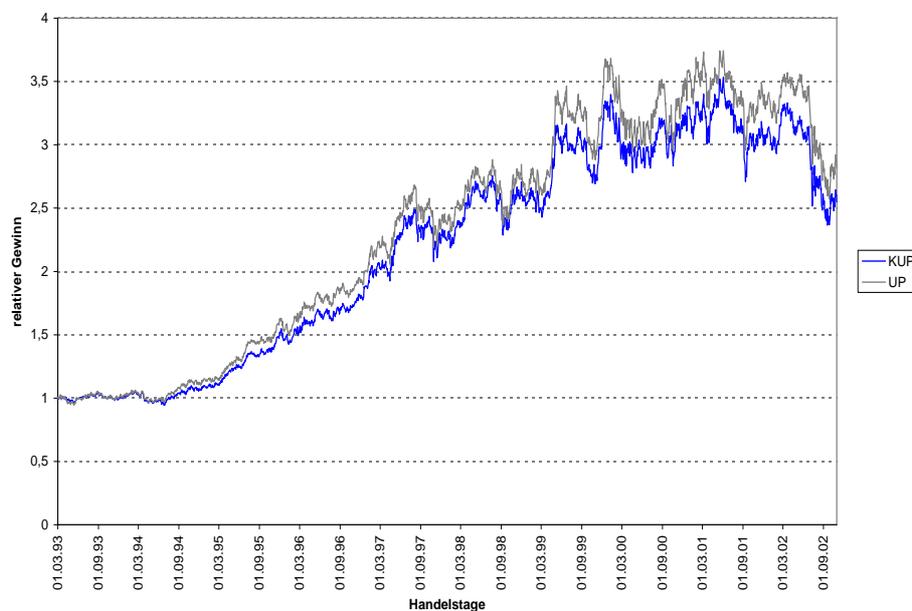


Abbildung 4.14: Vergleich der relativen Gewinne von UP und KUP (Alcoa, Coca Cola, Exxon)

Die Abbildung 4.14 zeigt die relativen Gewinne des Universal Portfolios  $UP$  und des kaskadenförmigen Portfolios  $KUP$ . Auch hier sind – geringere – Unterschiede in den erzielten relativen Gewinnen aufgrund der Konstruktion der beiden Strategien erkennbar.

Die Online-Strategie  $KUP$  besitzt allerdings den Vorteil einer im Verhältnis zum  $UP$  niedrigeren Zeitkomplexität, da nur Portfoliovektoren von Portfolios, die aus zwei Anlagen bestehen, berechnet werden müssen.

In Abbildung 4.15 wird schließlich der relative Gewinn des Universal Portfolios mit dem der sich im Portfolio befindlichen Anlagen verglichen.

An diesem Beispiel kann man erkennen, dass das Universal Portfolio nicht immer die z. B. in [28] angegebenen im Vergleich zur besten Anlage im Portfolio relativen Gewinne erreichen kann.

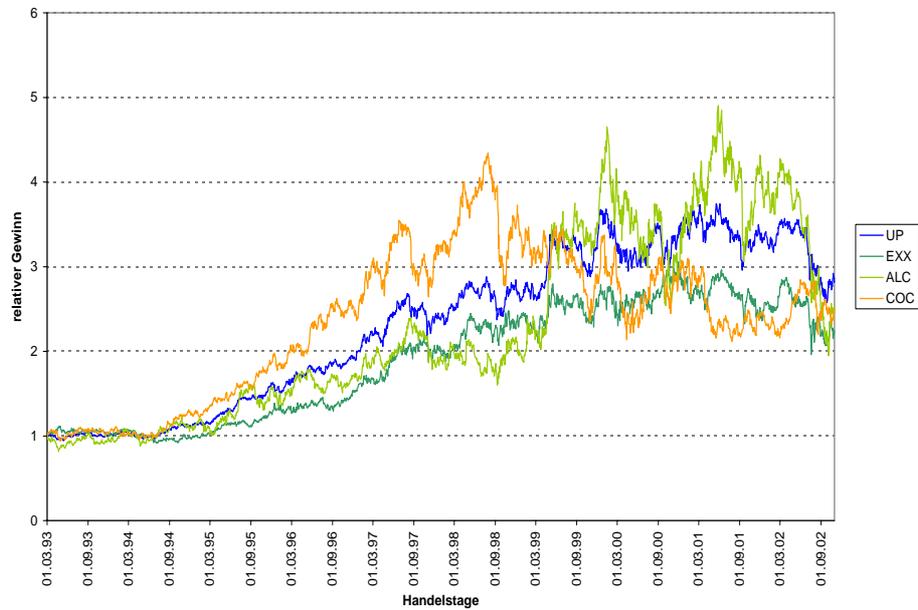


Abbildung 4.15: Vergleich der relativen Gewinne vom Universal Portfolio und den Anlagen Alcoa, Coca Cola und Exxon

Erst durch Verwendung geeigneter Anlagen die im Vergleich zu den im Portfolio befindlichen Anlagen viel höheren Gewinne realisiert werden.

# Kapitel 5

## Kosten der Portfolio-Strukturierung

### 5.1 Einführung

Bislang blieben in dieser Arbeit die mit der Verwendung der aufgezeigten Investitionsstrategien verbundenen Kosten unberücksichtigt. Erst eine Integration der relevanten Kostenfaktoren in die betrachteten Strategien zur Portfolio-Optimierung erlauben Aussagen hinsichtlich deren Anwendbarkeit in der Praxis.

Es sind die folgenden zwei Kostenfaktoren, die einen bedeutenden Einfluss auf die Wahl der Investitionsstrategie ausüben<sup>1</sup> :

- *Transaktionskosten*  
Die in dieser Arbeit betrachteten Online-Strategien stellen dynamische Strategien dar, die laufend Portfolio-Umschichtungen erfordern. Der damit direkt verbundene Kostenfaktor ist der der Transaktionskosten, dessen Berücksichtigung ein nicht-triviales Problem darstellt und in der Literatur deutlich an Bedeutung gewinnt [5, 10, 35, 38, 65, 68, 78].
- *Risikokosten*  
Die Modellierung von Risikokosten ist insofern notwendig, da eine Beziehung zwischen dem Marktrisiko des Portfolios und dem Eigenkapital des jeweiligen Instituts besteht. Häufig stellen die Risikokosten für Fondsgesellschaften und Banken den dominanten Kostenfaktor dar [59].

---

<sup>1</sup>Weitere Kosten der Portfolio-Strukturierung wie Sach- und Personalkosten sollen in der Folge unberücksichtigt bleiben.

Eine Integration von Kosten in die aufgezeigten Online-Strategien ist auf unterschiedliche Weise realisierbar:

1. *Preprocessing*

Eine Integration von Kosten kann über einen der eigentlichen Strategie zur Portfolio-Optimierung vorgeschalteten Algorithmus erfolgen. Beispielsweise kann der Eingabestrom durch die Verwendung von Zusatzinformationen gefiltert werden, so dass nur relevante Marktdaten als Eingangsparameter für den Online-Algorithmus dienen.

2. *Adaptation des Algorithmus*

Eine Modellierung von Kosten kann durch Adaptation der verwendeten Online-Verfahren erfolgen. Hierbei wird in der Regel zunächst eine Änderung der Zielfunktion vorgenommen, die dann eine Änderung der Online-Strategie impliziert.

3. *Postprocessing*

Eine weitere Möglichkeit besteht in einer Korrektur der durch den Online-Algorithmus erzielten Ergebnisse. Die Integration dieser Kosten erfolgt somit im Anschluss an die Schritte zur Berechnung des jeweiligen Portfoliovektors.

Da wir für die erste der oben skizzierten Verfahrensweisen Zusatzinformationen benötigen, werden wir zunächst auf Methoden zur Integration und Generierung von zusätzlichen Informationen eingehen. Dies erfolgt am Beispiel des Universal Portfolios von Cover [31].

Im Anschluss daran werden die oben skizzierten Verfahren auf die Problemstellungen der Integration von Transaktionskosten und abschließend auf die Integration von Risikokosten angewendet.

## 5.2 Integration von Zusatzinformationen

Die in dieser Arbeit vorgestellten Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung benutzen als Eingabedaten ausschließlich Kurshistorien; weitere Informationsquellen sind nicht vorgesehen, d. h. man stellt sich implizit auf den Standpunkt, dass jegliche allgemein zugängliche Information über eine Anlage in dem jeweiligen Kurs der Anlage enthalten ist.

Daher können beispielsweise subjektive Eindrücke bzgl. der Entwicklung einzelner Anlagen oder hinsichtlich des zukünftigen Marktverhaltens keine Berücksichtigung in den bislang vorgestellten Verfahren finden.

Eine einfache – wenn auch eingeschränkte – Möglichkeit, Zusatzinformationen in die vorgestellten Online-Algorithmen zu integrieren, besteht in der Repräsentation dieser Information als natürliche Zahl [31]. Hierzu benötigen wir die folgende Definition:

**Definition 5.1 (Status einer Zusatzinformation)**

*Der Status einer Zusatzinformation ist eine natürliche Zahl  $z$  mit  $z \in Z = \{1, \dots, k\}$ . Die Zahl  $z_i \in Z$  bezeichnet dementsprechend den Status der Zusatzinformationen im Handelszeitraum  $i = 1, \dots, n$ .*

Entsprechend dieser Definition hängt der Portfoliovektor  $\mathbf{b}_i$  einer Online-Strategie zur Portfolio-Optimierung nicht mehr nur von den vergangenen relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(i)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1})$  ab, sondern zusätzlich von zu diesem Zeitpunkt verfügbaren Zusatzinformationen  $Z^{(i-1)} = (z_1, \dots, z_{i-1})$ , d. h.:  $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(\mathbf{X}^{(i-1)}, Z^{(i-1)})$ .

Demzufolge müssen sowohl die weiteren grundlegenden Definitionen wie auch die Online-Algorithmen zur Portfolio-Optimierung erweitert werden:

**Definition 5.2 (Relativer Gewinn)**

*Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren und  $Z^{(n)}$  eine beliebige Folge von Zusatzinformationen. Ferner sei  $ALG$  ein beliebiger Algorithmus zur Portfolio-Optimierung. Dann wird der relative Gewinn der Strategie  $ALG$  mit  $S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)} | Z^{(n)})$  bezeichnet.*

Um zu ermöglichen, dass die Zusatzinformationen in den vorgestellten Online-Strategien Berücksichtigung finden, wird eine Erweiterung der Klasse der konstant rebalancierten Portfolios benötigt:

**Definition 5.3 (Status-konstant rebalanciertes Portfolio)**

*Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  der Raum aller Portfoliovektoren,  $\mathbf{X}^{(n)}$  bezeichne eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ein status-konstant rebalanciertes Portfolio  $CRP_k$  spezifiziert  $k$  Portfolios  $\mathbf{b}(1), \dots, \mathbf{b}(k) \in \mathcal{B}$  und wählt zum Zeitpunkt  $i$  das Portfolio  $\mathbf{b}(z_i)$  aus, wenn die Zusatzinformation zu diesem Zeitpunkt den Wert  $z_i \in Z$  mit  $Z = \{1, \dots, k\}$  annimmt.*

Damit ergibt sich für den relativen Gewinn dieses status-konstant rebalancierten Portfolios:

$$S_n(\mathbf{b}(\cdot), \mathbf{X}^{(n)} | Z^{(n)}) = \prod_{i=1}^n \mathbf{b}(z_i) \cdot \mathbf{x}_i$$

**Definition 5.4 (Universal Portfolio mit Zusatzinformationen)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren und  $Z^{(n)}$  eine beliebige Folge von Zusatzinformationen, die jeweils  $k$  Zustände annehmen können.

Die Online-Strategie Universal Portfolio mit Zusatzinformationen  $UP_k = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$  ist eine Folge von Portfoliovektoren, für die gilt:

$$\mathbf{b}_{i+1} = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_i(\mathbf{b} | z, \mathbf{X}^{(i)}) d\mathbf{b}}{\int_{\mathcal{B}} S_i(\mathbf{b} | z, \mathbf{X}^{(i)}) d\mathbf{b}}, \quad (5.1)$$

wobei  $S_i(\mathbf{b} | z, \mathbf{X}^{(i)})$  den relativen Gewinn des konstant rebalancierten Portfolios  $\mathbf{b}$  für die Teilfolgen von Zeitpunkten  $\{j \leq i : z_j = z, z \in Z\}$  darstellt, für den gilt:

$$S_i(\mathbf{b} | z, \mathbf{X}^{(i)}) := \prod_{1 \leq k \leq i: z_k = z} \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}_k.$$

Analog zu dem Universal Portfolio ohne Zusatzinformationen kann gezeigt werden, dass unter Verwendung von Zusatzinformationen das Universal Portfolio kompetitiv zu dem besten status-konstant rebalancierten Portfolio ist. Es gilt das folgende Theorem [31, 37]:

**Theorem 5.1 (Kompetitivitätsrate)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren,  $Z^{(n)}$  mit  $Z^{(n)} \in \{1, \dots, k\}^n$  eine beliebige Folge von Zusatzinformationen. Ferner bezeichne  $BCRP_k$  das hinsichtlich  $\mathbf{X}^{(n)}$  und  $Z^{(n)}$  beste konstant rebalancierte Portfolio mit:

$$S_n(BCRP_k, \mathbf{x}^{(n)} | Z^{(n)}) = \max_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}^k} S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)} | Z^{(n)})$$

Dann gilt für die Kompetitivitätsrate des Universal Portfolios:

$$\begin{aligned} c_n(UP_k, BCRP_k) &= \frac{S_n(BCRP_k, \mathbf{X}^{(n)} | Z^{(n)})}{S_n(UP_k, \mathbf{X}^{(n)} | Z^{(n)})} \\ &\leq (n+1)^{k \cdot (n-1)} \end{aligned}$$

**Beweis:**

Analog zum Lemma 4.12 gilt:

$$\begin{aligned}
S_n(UP_k, \mathbf{X}^{(n)} \mid Z^{(n)}) &= \prod_{i=1}^n \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i \\
&= \prod_{z=1}^k \prod_{i \leq n: z_i=z} \mathbf{b}_i \cdot \mathbf{x}_i \\
&= \prod_{z=1}^k \int_{\mathcal{B}} S_n(\mathbf{b} \mid y, \mathbf{X}^{(n)}) d\mathbf{b} \\
&\geq \prod_{z=1}^k \frac{S_n(BCRP(z), \mathbf{X}^{(n)})}{(n+1)^{m-1}} \\
&= \frac{S_n(BCRP_k, \mathbf{X}^{(n)} \mid Z^{(n)})}{(n+1)^{k \cdot (m-1)}}
\end{aligned}$$

□

Auf die oben vorgestellte Weise lassen sich zwar Zusatzinformationen in die Verfahren von Cover [28, 31] und Vovk [105] integrieren, allerdings verschlechtert sich mit wachsender Kardinalität  $k$  der Menge  $Z$  die Kompetitivitätsrate der jeweiligen Online-Algorithmen. Dies ergibt sich anschaulich aus der Tatsache, dass die Anzahl der Freiheitsgrade um den Faktor  $k$  zunimmt und dementsprechend das beste status-konstant rebalancierte Portfolio bessere Chancen für einen höheren relativen Gewinn besitzt als ein Online-Algorithmus, der ein gewichtetes Mittel über alle Portfoliovektoren bildet.

## 5.3 Generierung von Zusatzinformationen

In dem vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie Zusatzinformationen in Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung integriert werden können.

Diese Zusatzinformationen können subjektiver Natur sein, d. h. persönliche Präferenzen von Investoren reflektieren oder Annahmen über ein gewisses Marktverhalten bzw. das Verhalten einer einzelnen Anlage widerspiegeln.

Eine interessante Möglichkeit zur Generierung dieser Zusatzinformationen ist durch die Verwendung von Verfahren aus dem Bereich des Data Mining gegeben.

Zunächst werden wir Assoziationsregeln einführen und gehen auf deren Generierung ein. In einem weiteren Schritt werden die hier vorgestellten Verfahren der Gewinnung von Assoziationsregeln auf die Problemstellung der Portfolio-Optimierung angepasst.

### 5.3.1 Verfahren des Data Mining

Man kann die Generierung von Zusatzinformationen als eine Form der Wissensentdeckung innerhalb großer Datenmengen auffassen<sup>2</sup>. Hier geht man davon aus, dass das in den Daten inhärente *Wissen* verdeckt ist, so dass Strukturen oder Zusammenhänge kaum erkennbar sind. Viele Methoden zur Wissensentdeckung in Datenbanken stammen aus den Gebieten der Statistik, der Mustererkennung oder des maschinellen Lernens. [46, 77]

Der Prozess des Data Mining umfasst normalerweise neben der eigentlichen Wissensentdeckung weitere Schritte wie z. B. das *Preprocessing*, in dem die Daten selektiert und aufbereitet werden, oder das *Postprocessing*, in dem eine Rücktransformation der gewonnenen Ergebnisse in interpretierbare Aussagen stattfindet [77].

In der Folge möchten wir uns ausschließlich mit dem eigentlichen Schritt der Wissensentdeckung, dem *Data Mining*, befassen.

Die im Data Mining verwendeten Verfahren unterscheiden sich in einigen relevanten Merkmalen, anhand derer sich eine Klassifizierung ableiten lässt.

Diese Verfahren dienen hauptsächlich der Lösung der folgenden Problemstellungen, wobei die verwendeten Algorithmen in der Lage sein sollen, auf großen Datenmengen zu operieren und überwacht<sup>3</sup> oder unüberwacht ablaufen können:

---

<sup>2</sup>Hierfür hat sich weitgehend der englischsprachige Begriff *Knowledge Discovery in Databases* (KDD) in der Literatur durchgesetzt [46].

<sup>3</sup>Bei überwachten Lernverfahren findet ein Lernen anhand von Trainingsdaten statt. Eine inkorrekte Entscheidung des Verfahrens erzeugt hier als Feedback die richtige Lösung, die dann von dem Verfahren berücksichtigt wird.

- *Data Clustering*
- *Klassifikation*
- *Assoziation*

Ferner kann eine Unterscheidung danach vorgenommen werden, ob den Verfahren zum Zeitpunkt des Beginns ihres Einsatzes bereits sämtliche Daten für die Untersuchung zur Verfügung stehen (*nicht-inkrementelle Verfahren*), oder ob während der Untersuchung weitere Daten hinzukommen (*inkrementelle Verfahren*).

Für den Rahmen, den wir uns bzgl. der Portfolio-Optimierung gegeben haben, kommen insbesondere inkrementelle unüberwachte Lernverfahren in Betracht. Da aus vorhandenen Daten zusätzliche Informationen gewonnen werden sollen, werden vornehmlich Assoziationsverfahren des Data Mining – inklusive der darauf aufbauenden Sequenzanalysetechniken – betrachtet.

Beim Assoziationslernen werden Abhängigkeiten zwischen Attributen von Datensätzen gesucht. Das Ergebnis kann z. B. in Form von Bayes-Netzen oder – hauptsächlich verwandt – in Form von Assoziationsregeln dargestellt werden.

### 5.3.2 Generierung von Assoziationsregeln

Formal benötigen wir zuerst eine Definition der Datenbasis [54]:

**Definition 5.5 (Datenbasis)**

*Sei  $A = \{A_1, \dots, A_m\}$  eine Menge von Attributen über nominal- oder kardinalskalierte Wertebereiche  $\text{dom}(A_1), \dots, \text{dom}(A_m)$ . Ferner seien Datensätze  $d_1, \dots, d_n$  mit Elementen  $a_{i,j} \in \text{dom}(A_j)$  für  $1 \leq i \leq n$  und  $1 \leq j \leq m$  gegeben.*

*Dann wird die Gesamtheit der Datensätze als Datenbasis  $D$  bezeichnet.*

Dementsprechend liegt der in der Abbildung 5.1 dargestellte Aufbau der Datenbasis  $D$  vor, den wir in der Folge verwenden werden.

Jetzt können wir den Begriff der Assoziationsregeln definieren:

	$A_1$	$\dots$	$A_m$
$d_1$	$a_{1,1}$	$\dots$	$a_{1,m}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$d_n$	$a_{n,1}$	$\dots$	$a_{n,m}$

Abbildung 5.1: Datenbasis

**Definition 5.6 (Assoziationsregel)**

Gegeben sei eine Menge von Attributen  $A$  und eine Datenbasis  $D$ . Ferner seien  $P$  und  $Q$  nichtleere Teilmengen von  $A$ .  $C_P$  resp.  $C_Q$  seien boolesche Ausdrücke über Attributen aus  $P$  resp.  $Q$ . Dann heißt eine Regel der Form  $C_P \rightarrow C_Q$  Assoziationsregel über  $D$ , die aus

- Regelrumpf  $C_P$  und
- Regelkopf  $C_Q$

besteht.

Ein Datensatz  $d \in D$  erfüllt die Assoziationsregel  $C_P \rightarrow C_Q$ , falls  $(C_P \cup C_Q)$  für  $d$  wahr ist.

Um zu geeigneten Regeln, die über die Zusammenhänge von Daten Auskunft geben können, zu gelangen, sind die Kennzahlen *Konfidenz* und *Support* von hoher Bedeutung.

Der Support einer Assoziationsregel ist folgendermaßen definiert:

**Definition 5.7 (Support einer Assoziationsregel)**

Gegeben sei eine Menge von Attributen  $A$  und eine Datenbasis  $D$ . Ferner sei  $C_P \rightarrow C_Q$  eine Assoziationsregel. Der Support dieser Assoziationsregel ist wie folgt definiert:

$$\text{support}(C_P \rightarrow C_Q) = \frac{|\{d \in D \mid (C_P \rightarrow C_Q) \text{ ist wahr für } d \mid}{|\{d \mid d \in D\} \mid} \quad (5.2)$$

Neben dem Support einer Assoziationsregel benötigen wir noch deren Konfidenz:

**Definition 5.8 (Konfidenz einer Assoziationsregel)**

Gegeben sei eine Menge von Attributen  $A$  und eine Datenbasis  $D$ . Ferner sei  $C_P \rightarrow C_Q$  eine Assoziationsregel. Die Konfidenz dieser Assoziationsregel ist wie folgt definiert:

$$\text{confidence}(C_P \rightarrow C_Q) = \frac{|\{d \in D \mid C_P \rightarrow C_Q \text{ ist wahr für } d \mid}{|\{d \in D \mid C_P \text{ ist wahr für } d \mid} \quad (5.3)$$

Aufbauend auf diesen Definitionen lässt sich ein Assoziationsproblem wie folgt formulieren:

**Definition 5.9 (Assoziationsproblem)**

Gegeben seien neben einer Menge  $A$  von Attributen und einer Datenbasis  $D$  die Werte für den minimalen Support  $S_{min}$  und die minimale Konfidenz  $C_{min}$ <sup>4</sup>. Gesucht ist die Menge der Assoziationsregeln  $C_P \rightarrow C_Q$ , für die die beiden folgenden Eigenschaften gelten:

1.  $\text{support}(C_P \rightarrow C_Q) \geq S_{min}$
2.  $\text{confidence}(C_P \rightarrow C_Q) \geq C_{min}$

**5.3.2.1 Apriori Algorithmus zum Finden von Assoziationsregeln**

Zunächst soll in diesem Abschnitt ein (Basis-) Algorithmus von Agrawal et al. [2] vorgestellt werden, der effizient Boolesche Assoziationsregeln in großen Datenmengen findet. Im Anschluss daran wird skizziert, wie dieser Algorithmus auf kategoriale bzw. klassifikatorische Assoziationsregeln erweitert werden kann.

Hinter dem Algorithmus von Agrawal et al. steht folgende Idee:

- *Schritt 1:*  
Bestimmung aller Attribut-Mengen mit einem vorgegebenen Mindest-Support  $S_{min}$ . Diese Menge wird als Menge der häufigen Attribut-Mengen bezeichnet.
- *Schritt 2:*  
Bildung aller Assoziationsregeln aus der Menge der häufigen Attribut-Mengen, die die Mindest-Konfidenz  $C_{min}$  nicht unterschreiten.

---

<sup>4</sup>Die Werte für  $S_{min} > 0$  und  $C_{min} > 0$  werden vom Anwender vorgegeben. Da  $S_{min} > 0$  ist, kann der Nenner in der Gleichung 5.8 nicht Null werden.

Um den ersten Schritt vollziehen zu können, berechnen wir zunächst sukzessive die häufigen Attribut-Mengen  $E$  mit  $i = 1, 2, 3, \dots$  Elementen. Wir fassen dann die häufigen Attribut-Mengen mit  $i$  Elementen zur Menge  $H_i$  zusammen:

$$H_i := \{E \mid E \text{ ist häufige Attribut-Menge} \wedge |E| = i\} \quad (5.4)$$

Wir benötigen für den ersten Schritt nun das folgende Lemma:

**Lemma 5.2**

*Sei  $E$  eine häufige Attribut-Menge. Dann besitzt  $E$  folgende Eigenschaften:*

- (i) *Für  $F \subseteq E$  gilt:  $\text{support}(F) \geq \text{support}(E)$ .*
- (ii) *Wenn  $E$  eine häufige Attribut-Menge ist, dann ist dies auch jede Teilmenge  $F \subseteq E$ .*
- (iii) *Für  $E \in H_{n+1}$  gilt, dass alle  $n$ -elementigen Teilmengen von  $E$  häufig sind.*

**Beweis:**

Den Beweis dieses Lemmas findet man in [2]. □

Aus  $H_n$  lässt sich mit dem obigen Lemma  $H_{n+1}$  wie folgt bestimmen:

- Erweiterung der  $n$ -elementigen häufigen Attribut-Mengen um jeweils ein Element.
- Einfügung dieser Menge in  $H_{n+1}$ , falls die auf diese Weise erzeugte  $(n + 1)$ -elementige Attribut-Menge häufig ist.

Auf diese Weise lassen sich alle Attribut-Mengen mit einem vorgegebenen Support  $S_{min}$  erzeugen.

Das folgende Lemma kann eingesetzt werden, um häufige Attribut-Mengen mit einer vorgegebenen Konfindenz  $C_{min}$  zu bestimmen:

**Lemma 5.3**

*Gegeben sei eine Assoziationsregel  $P \rightarrow Q$ , dann gilt:*

$$\text{confidence}(P \rightarrow Q) = \frac{\text{support}(P \rightarrow Q)}{\text{support}(P)} \quad (5.5)$$

Dies bedeutet, dass die Konfindenz einer Assoziationsregel aus dem Support der häufigen Attribut-Mengen berechnet werden kann.

- 
1. Initialisierung  
 Eingabe von  $S_{min}$   
 $n := 1$   
 $H := \emptyset$   
 $I_n := \{ \{A_i\} \mid \text{ist ein Attribut} \}$
  2. Bestimme in  $D$  für alle  $I \in I_n$  den Support
  3.  $H_n := \{I \in I_n \mid \text{support}(I) \geq S_{min}\}$   
 $H := H \cup H_n$
  4. Falls  $H_n = \emptyset$ , gebe das Ergebnis  $H$  aus
  5.  $I_{n+1} := \{ \{A_{i_1}, \dots, A_{i_{n+1}}\} \mid \forall j \text{ mit } 1 \leq j \leq n+1 : \{A_{i_1}, \dots, A_{i_n}\} \setminus \{A_{i_j}\} \in H_n \}$   
 $n := n+1$
  6. gehe nach 2.
- 

Abbildung 5.2: Algorithmus zur Konstruktion häufiger Attribut-Mengen

**Beweis:**

$$\text{confidence}(P \rightarrow Q) = \frac{|\{d \in D \mid (P \rightarrow Q) \subseteq d\}|}{|\{d \in D \mid P \subseteq d\}|} \quad (5.6)$$

$$= \frac{\text{support}(P \rightarrow Q)}{|D|} \frac{|D|}{\text{support}(P)} \quad (5.7)$$

$$= \frac{\text{support}(P \rightarrow Q)}{\text{support}(P)} \quad (5.8)$$

□

Aus den Mengen  $H_n$  (s. Abbildung 5.2) lassen sich über das Lemma 5.3 sämtliche Assoziationsregeln zu einer vorgegebenen Konfidenz  $C_{min}$  herleiten.

**Lemma 5.4**

Sei  $n$  die Kardinalität der größten häufigen Attribut-Menge. Dann benötigt der oben skizzierte Algorithmus (s. Abbildung 5.2)  $n$  Durchläufe. Da jeder einzelne Durchlauf unabhängig von  $n$  ist, liegt die Laufzeit des Algorithmus in  $\mathcal{O}(n)$ .

**Beweis:**

Auf den Beweis dieses Lemmas, der [2] entnommen werden kann, wird an dieser Stelle verzichtet.  $\square$

Der oben vorgestellte Apriori-Algorithmus kann wie folgt auf kategoriale Assoziationsprobleme erweitert werden<sup>5</sup>:

Man kann die kategoriale Datenbasis  $D^K$  in eine Boolesche Datenbasis  $D^B$  transformieren, indem man zu jeder Kategorie  $a_{i,j}$  eines Attributs  $A_i^k \in D^K$  ein Boolesches Attribut  $A_{i,j}^B \in D^B$  erzeugt.

Dieses Attribut  $A_{i,j}^B$  besitzt innerhalb eines Datensatzes  $d^B \in D^B$  genau dann den Wert 1, wenn das Attribut  $A_i^k$  innerhalb des korrespondierenden Datensatzes  $d^K \in D^K$  den Wert  $a_{i,j}$  besitzt. Ansonsten besitzt das Attribut  $A_{i,j}^B$  den Wert 0.

### 5.3.3 Verwendung von Assoziationsregeln als Generator für Zusatzinformationen

Um Assoziationsregeln für das Problem der Portfolio-Optimierung nutzen zu können, müssen sowohl die vorhandenen Daten bzgl. der relativen täglichen Marktwertveränderungen der betrachteten Anlagen in geeigneter Weise transformiert, als auch eine Adaptation der oben beschriebenen Verfahren vorgenommen werden.

#### 5.3.3.1 Anpassung der Daten

Die vorhandenen Daten bzgl. der täglichen Änderungen der Marktwerte müssen zunächst in angemessener Weise diskretisiert werden, damit die Algorithmen zur Generierung von Assoziationsregeln anwendbar sind.

Hierzu sind prinzipiell zwei unterschiedliche Vorgehensweisen möglich:

---

<sup>5</sup>Eine weitere Möglichkeit ist durch die Verwendung von Attribut-Werte-Tupelmengen gegeben [54].

- *statische Diskretisierung*  
Eine Diskretisierung der Daten findet vor der Generierung der Assoziationsregeln statt. Dies kann z. B. durch Ersetzung der numerischen Werte durch Bereiche oder Intervalle erfolgen.
- *dynamische Diskretisierung*  
Bei der dynamischen Diskretisierung erfolgt die Diskretisierung der Daten erst innerhalb des Prozesses der Assoziationsregel-Generierung. Dies ermöglicht eine Optimierung der Zuordnung zu Intervallen bzw. Bereichen hinsichtlich zusätzlich geforderter Nebenbedingungen.

Wir wollen im Folgenden auf eine dynamische Diskretisierung verzichten und eine einfache Zuordnung der numerischen Werte auf Intervalle vornehmen. Hierzu benötigen wir die folgende Definition:

**Definition 5.10 (Diskretisierung)**

Gegeben sei eine Folge von relativen Kursvektoren  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ . Ferner seien  $I_1, \dots, I_q$  Intervalle mit  $I_k = [l_k; r_k[$ , für die gilt:  $I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_q = \mathbb{R}^{\geq 0}$ .

Dann bezeichnet  $\bar{\mathbf{X}}^{(n)} = (\bar{\mathbf{x}}_1, \dots, \bar{\mathbf{x}}_n)$  eine Diskretisierung von  $\mathbf{X}^{(n)}$  und es gilt:

$$\bar{x}_{i,j} = k, \text{ falls } x_{i,j} \in I_k \quad (5.9)$$

**5.3.3.2 Anpassung der Algorithmen zur Generierung von Assoziationsregeln**

Bislang blieb die zeitliche Dimension der zugrunde liegenden Daten in den behandelten Algorithmen zur Generierung von Assoziationsregeln unberücksichtigt.

Bei dem Problem der Portfolio-Optimierung möchten wir nur Regeln betrachten, die folgende Form besitzen:

**Definition 5.11 (Temporale Assoziationsregel)**

Gegeben sei eine Menge von Attributen  $A$  und eine Datenbasis  $D$ , die aus zeitlich aufeinander folgenden Datensätzen  $d_n$  besteht. Ferner seien  $P$  und  $Q$  nichtleere Teilmengen von  $A$ .  $C_P$  resp.  $C_Q$  seien Boolesche Ausdrücke über Attributen aus  $P$  und  $Q$ . Weiterhin bezeichne  $T$  eine vorgegebene Zeitspanne, innerhalb der  $C_P$  und  $C_Q$  wahr seien.

Dann heißt eine Regel der Form  $(C_P \rightarrow C_Q|T)$  temporale Assoziationsregel über  $D$ .

Indem wir die Datenbasis  $D = \bar{\mathbf{X}}^{(n)}$  verwenden, können wir nun Assoziationsregeln für die Problemstellung der Portfolio-Optimierung formal beschreiben.

Wir benötigen zunächst noch die Definition des Supports einer temporalen Assoziationsregel:

**Definition 5.12 (Support einer temporalen Assoziationsregel)**

Sei  $\bar{\mathbf{X}}^{(n)}$  eine beliebige diskretisierte Folge von relativen Kursvektoren und  $C_P \rightarrow C_Q$  eine Assoziationsregel. Ferner bezeichne  $T$  die festgelegte maximale Zeitspanne zwischen dem Auftreten von  $C_P$  und  $C_Q$ .

Der Support dieser Assoziationsregel ist dann definiert als Anteil der Transaktionen aus  $\bar{\mathbf{X}}^{(n)}$ , die diese Assoziationsregel erfüllen:

$$\text{support}(C_P \rightarrow C_Q|T) = \frac{|\{\bar{\mathbf{x}}_i \in \bar{\mathbf{X}}^{(n)} \mid C_P \text{ ist wahr für } \bar{\mathbf{x}}_i \wedge C_Q \text{ ist wahr für } \bar{\mathbf{x}}_j \in \mathbf{X}_{i+1}^{(T)}\}|}{|\{\bar{\mathbf{x}}_i \mid \bar{\mathbf{x}}_i \in \bar{\mathbf{X}}^{(n)}\}|},$$

wobei  $\mathbf{X}_{i+1}^{(T)} := \{\bar{\mathbf{x}}_{i+1}, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{i+1+T}\}$ <sup>6</sup>.

Ferner müssen wir die Definition der Konfidenz einer Assoziationsregel anpassen:

**Definition 5.13 (Konfidenz einer temporalen Assoziationsregel)**

Sei  $\bar{\mathbf{X}}^{(n)}$  eine beliebige diskretisierte Folge von relativen Kursvektoren und  $C_P \rightarrow C_Q$  eine Assoziationsregel. Ferner bezeichne  $T$  die festgelegte maximale Zeitspanne zwischen dem Auftreten von  $C_P$  und  $C_Q$ .

Die Konfidenz dieser Assoziationsregel ist dann definiert als das Verhältnis der Transaktionen aus  $\bar{\mathbf{X}}^{(n)}$ , die diese Regel erfüllen, zur Gesamtheit aller Regeln, die den Regelrumpf  $C_P$  erfüllen:

$$\text{confidence}(C_P \rightarrow C_Q|T) = \frac{\text{support}(C_P \rightarrow C_Q|T)}{\text{support}(C_P)}$$

<sup>6</sup>Allgemein kann hier anstelle von  $\bar{\mathbf{x}}_j$  eine Funktion  $f(\bar{\mathbf{x}}_j)$  ( $1 \leq j \leq n$ ) eingesetzt werden.

Aufbauend auf diesen Definitionen lässt sich ein temporales Assoziationsproblem wie folgt formulieren:

**Definition 5.14 (Temporales Assoziationsproblem)**

Sei  $\bar{\mathbf{X}}^{(n)}$  eine beliebige diskretisierte Folge von relativen Kursvektoren und  $C_P \rightarrow C_Q$  eine Assoziationsregel. Ferner bezeichne  $T$  die festgelegte maximale Zeitspanne zwischen dem Auftreten von  $C_P$  und  $C_Q$ . Ferner seien die Werte für den minimalen Support  $S_{min}$  und die minimale Konfidenz  $C_{min}$  vorgegeben.

Gesucht ist die Menge der Assoziationsregeln  $(C_P \rightarrow C_Q|T)$ , für die die beiden folgenden Eigenschaften gelten:

1.  $support(C_P \rightarrow C_Q|T) \geq S_{min}$
2.  $confidence(C_P \rightarrow C_Q|T) \geq C_{min}$

Falls man den Apriori-Algorithmus von Agrawal et al. [2] als Basis-Algorithmus auffasst und hinsichtlich der oben dargestellten temporalen Assoziationsregeln erweitert, haben wir ein Verfahren, das eine Generation von Zusatzinformationen und der Integration in die vorgestellten Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung ermöglicht.

## 5.4 Modellierung von Transaktionskosten

Bei Umschichtungen von Anlagen innerhalb von Portfolios entstehen Transaktionskosten, die wir bei der Generierung von Strategien zur Portfolio-Optimierung bislang noch nicht berücksichtigt haben.

Transaktionskosten lassen sich allgemein wie folgt aufschlüsseln:

- Fixkosten pro Transaktion
- variable Kosten bei jeder Transaktion in Abhängigkeit von
  - Volumen
  - Liquidität des Wertpapiers
  - Markt

Es existieren eine Reihe von unterschiedlichen Ansätzen zur Modellierung von Transaktionskosten bzw. zur Integration von Transaktionskosten in

bereits bestehende Strategien zur Portfolio-Optimierung.

In diesem Kapitel soll neben bereits bekannten Verfahren zur Berücksichtigung von Transaktionskosten ein Verfahren vorgestellt werden, das Informationen, die aus Verfahren des Data Mining gewonnen werden, nutzt, um Umschichtungen innerhalb des Portfolios zu vermeiden, falls die zur Umschichtung erforderlichen Transaktionskosten die geschätzten zukünftigen Gewinne übersteigen.

An dieser Stelle sollen zwei weitere Klassen von Verfahren Erwähnung finden, die ebenfalls interessante Ansätze zur Integration von Transaktionskosten anbieten.

Zunächst seien Verfahren genannt, die durch Impulskontrolle eine Steuerung der Transaktionen vornehmen [65, 35, 38]. Bei diesen Verfahren ist die Modellierung der Transaktionskosten nicht auf variable Anteile beschränkt, sie setzen aber einige stochastische Annahmen an die unterliegenden Prozesse voraus, die in dieser Arbeit nicht explizit gefordert werden.

Ferner sollen in dieser Arbeit Verfahren unberücksichtigt bleiben, die den Algorithmus von Helmbold et al. [52] dahingehend erweitern, dass durch Aufbau einer geeigneten Distanz und damit durch Adaption der multiplikativen Update-Regel ein kompetitiver Algorithmus generiert wird, der anfallende (variable) Transaktionskosten berücksichtigt [68].

### 5.4.1 Integration von Zusatzinformationen in bestehende Strategien

Im Folgenden sollen variable und ausschließlich vom Transaktionsvolumen abhängige Kosten von Transaktionen betrachtet werden.

Dies bedeutet, dass bei einem Transaktionsvolumen  $V$  absolute Transaktionskosten in einer Höhe von  $C_T = c_T \cdot V$  anfallen, wobei  $c_T$  mit  $0 \leq c_T < 1$  relative Transaktionskosten darstellen.

Wir bezeichnen  $S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})$  resp.  $S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})$  als den Wert des Portfolios direkt vor resp. nach Durchführung der Rebalancierung.  $b'_{i,j}$  bezeichnet den Anteil der Anlage  $j$  nach dem Ende der Handelsperiode  $i$ , bevor eine neue Rebalancierung einsetzt.

Da wir auch an dieser Stelle von selbstfinanzierenden Strategien zur Portfolio-Optimierung ausgehen wollen, müssen anfallende Kosten mit Anteilen aus dem investierten Kapital beglichen werden.

Um eine kostenminimale Rebalancierung vorzunehmen, muss der Wert

$$\Delta S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) = S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) - S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})$$

minimiert werden.

Ferner müssen von der Anlage  $j$

$$|S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b_{i+1,j} - S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b'_{i,j}|$$

Anteile verkauft resp. angekauft werden, wenn

$$S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b_{i+1,j} < S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b'_{i,j}$$

resp.

$$S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b_{i+1,j} > S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b'_{i,j}$$

gilt.

Aus dieser Überlegung heraus ergeben sich die absoluten Transaktionskosten  $C_T$  durch:

$$C_T(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = c_T \sum_{j=1}^m |S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b'_j - S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \cdot b_j|, \quad (5.10)$$

wobei zusätzlich gemäß Konstruktion gelten muss:

$$C_T(\mathbf{b}, \mathbf{b}') = S_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) - S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (5.11)$$

Durch ein Einsetzen der Gleichung 5.11 in Gleichung 5.10 kann mit  $S'_n(ALG, \mathbf{X}^{(n)})$  der für die kostenminimale Rebalancierung relevante Parameter ermittelt werden [37, 21].

Das beste konstant rebalancierte Portfolio kann – analog zu dem Fall ohne Transaktionskosten – durch den Portfoliovektor  $\mathbf{b}_{c_T}^*$  charakterisiert werden:

$$\mathbf{b}_{c_T}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} S_{n,c_T}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (5.12)$$

Das Universal Portfolio unter Transaktionskosten können wir wie folgt definieren:

**Definition 5.15 (Universal Portfolio unter Transaktionskosten)**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren. Ferner sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren mit  $\mathbf{x}_0 = (1, \dots, 1)$ . Auftretende variable relative Transaktionskosten werden mit  $c_T$  bezeichnet. Die Investitionsstrategie  $UP_{c_T}$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} S_{i-1, c_T}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})}{\int_{\mathcal{B}} S_{i-1, c_T}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mu(\mathbf{b})}, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

Mit dieser Definition können wir nun über die Kompetitivität des Universal Portfolio unter Transaktionskosten folgende Aussage machen [31]:

**Theorem 5.5**

Sei  $UP_{c_T}$  das Universal Portfolio unter variablen relativen Transaktionskosten  $c_T$  und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner sei  $\mathbf{b}_{c_T}^*$  der Portfoliovektor des bezogen auf die Kursfolge  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios.

Dann gilt für die Kompetitivität des uniform gewichteten Universal Portfolios:

$$c_n(UP_{c_T}, BCRP_{c_T}) = \frac{S_n(BCRP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(UP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)})} \leq [(1 + c_T) \cdot n + 1]^{m-1}$$

**Beweis:**

Bezeichne  $C_T(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$  die Höhe der Transaktionskosten, die bei der kostenminimalen Umschichtung des Portfolios  $\mathbf{b}_1$  in das Portfolio  $\mathbf{b}_2$  entstehen. Ferner bezeichne  $\mathbf{b}_i$  resp.  $\mathbf{b}'_i$  die Verteilung des Kapitals einer beliebigen Strategie vor resp. nach Ablauf der Handelsperiode  $i$ .

Der relative Gewinn, der in der Investitionsperiode von der Strategie erwirtschaftet wird, beträgt nach der Rebalancierung:

$$S_{i-1, i} = [1 - C_T(\mathbf{b}'_i, \mathbf{b}_i)] \cdot \mathbf{b}_i \mathbf{x}_i \quad (5.14)$$

Wir definieren:

$$\lambda(\mathbf{b}_i) := \min_j \{b_{i,j} / b_{i,j}^*\} \quad (5.15)$$

Mit  $\lambda(\mathbf{b}_i)$  kann  $\mathbf{b}_i$  mit Hilfe des Portfoliovektors des  $BCRP$   $\mathbf{b}^*$  eines geeigneten Portfoliovektor  $\bar{\mathbf{b}}$  beschrieben werden:

$$\mathbf{b}_i = [1 - \lambda(\mathbf{b}_i)] \bar{\mathbf{b}} + \lambda(\mathbf{b}_i) \mathbf{b}^* \quad (5.16)$$

Für den relativen Gewinn innerhalb einer Investitionsperiode  $S_{i-1,i}$  gilt damit:

$$\begin{aligned}
(1 - C_T(\mathbf{b}'_i, \mathbf{b}_i))\mathbf{b}_i\mathbf{x}_i & \geq (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}_i))\lambda(\mathbf{b}_i)\mathbf{b}^*\mathbf{x}_i \\
& \geq (1 - [C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}^*) + (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}^*))C_T(\mathbf{b}^*, \mathbf{b})])\lambda(\mathbf{b}_i)\mathbf{b}_i\mathbf{x}_i \\
& = (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}_i^*)) (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}_i))\lambda(\mathbf{b}_i)\mathbf{b}^*\mathbf{x}_i
\end{aligned}$$

Da für beliebige Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_1$  und  $\mathbf{b}_2$  bei beliebigen  $\alpha \in [0; 1]$  gilt:

$$C_T(\mathbf{b}_1, (1 - \alpha)\mathbf{b}_1 + \alpha\mathbf{b}_2) \leq c_T\alpha, \quad (5.17)$$

können wir durch  $\alpha := 1 - \lambda(\mathbf{b}_i)$  mit Gleichung 5.16 folgende Ungleichungen ableiten:

$$\begin{aligned}
(1 - C_T(\mathbf{b}'_i, \mathbf{b}_i))\mathbf{b}_i\mathbf{x}_i & \geq (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}^*)(1 - c_T\alpha)) \cdot \lambda(\mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{b}^*\mathbf{x}_i \\
& \geq (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}^*)(1 - \alpha)^{c_T})\lambda(\mathbf{b}_i) \cdot \mathbf{b}^*\mathbf{x}_i \\
& = (1 - C_T(\mathbf{b}^{*'}, \mathbf{b}^*)) \cdot \lambda(\mathbf{b}_i)^{1+c_T} \cdot \mathbf{b}^*\mathbf{x}_i
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für den relativen Gewinn des Universal Portfolios:

$$\begin{aligned}
S_n(UP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)}) & = E[S_n(CRP_{\mathbf{b}, c_T}, \mathbf{X}^{(n)})] \\
& \geq E[\lambda(\mathbf{b}_i)^{(1+c_T)n}] S_n(BCRP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)}) \\
& = \int_0^1 Prob\{\lambda(\mathbf{b})^{(1+c_T)n} \geq y\} dy \cdot S_n(BCRP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

Um die obige Wahrscheinlichkeit abschätzen zu können, benötigen wir nur das Verhältnis der Volumina der Porfolioräume  $\mathcal{B}$ . Es gilt:

$$Prob\{\lambda(\mathbf{b})^{(1+c_T)n} \geq y\} \geq Vol(\mathcal{B}')/Vol(\mathcal{B}) = \left(1 - y^{\frac{1}{(1+c_T)n}}\right)^{m-1} \quad (5.18)$$

Damit gilt für den relativen Gewinn des Universal Portfolios:

$$\begin{aligned}
S_n(UP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)}) & \geq \int_0^1 (1 - y^{\frac{1}{(1+c_T)n}})^{m-1} dy \cdot S_n(BCRP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)}) \\
& = n \cdot \frac{\Gamma((1+c_T)n) \cdot \Gamma(m)}{\Gamma((1+c_T)n + m)} \cdot S_n(BCRP_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{(1+c_T)n+m-1}{m-1}^{-1} \cdot S_n(\text{BCRP}_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)}) \\
&\geq ((1+c_T)n+1)^{(1-m)} \cdot S_n(\text{BCRP}_{c_T}, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

□

Mit diesem Theorem konnte gezeigt werden, dass das ursprüngliche Verfahren des Universal Portfolios auch unter Berücksichtigung von Transaktionskosten kompetitiv zu dem besten konstant rebalancierten Portfolio ist.

In den folgenden Abschnitten wird untersucht, ob durch Änderung der Online-Strategien ebenfalls universelle Algorithmen entwickelt werden können.

### 5.4.2 Einsatz von Assoziationsregeln zur Vermeidung von Transaktionskosten

In dem vorherigen Abschnitt wurde eine Modellierung von Transaktionskosten vorgenommen, so dass die in dieser Arbeit vorgestellten Online-Algorithmen weiterhin asymptotisch die gleiche exponentielle Wachstumsrate wie das beste konstant rebalancierte Portfolio besitzen und damit universell sind.

Allerdings wurden die Kosten, die durch die Umschichtungen innerhalb des Portfolios entstehen, nicht bei dem Design der Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung berücksichtigt, sondern in einem nachfolgenden Schritt in den entsprechenden Algorithmus aufgenommen.

Neben dieser Vorgehensweise gibt es ferner Möglichkeiten, durch Verwendung von Zusatzinformationen eine Reduktion von Transaktionskosten zu erreichen.

An dieser Stelle möchten wir nicht näher auf das bereits in Abschnitt 5.2 skizzierte Verfahren von Cover et al. [31], das ebenfalls zur Integration von Transaktionskosten genutzt werden kann, eingehen.

Stattdessen wird in diesem Abschnitt ein von den zuvor behandelten Verfahren zur Integration von Transaktionskosten abweichendes Vorgehen entwickelt. Der gewählte Ansatz beruht auf der Beobachtung, dass

die vorgestellten Online-Investitionsstrategien Transaktionen auch dann induzieren, wenn die relativen Renditen nur kleinen Schwankungen unterliegen.

Diese Beobachtung aufgreifend kann in eine der vorgestellten Online-Investitionsstrategien ein Filter eingebettet werden, der aufgrund von – noch näher zu spezifizierenden – Zusatzinformationen die ursprüngliche Strategie an die neue Rahmenbedingung, d. h. der Integration von Transaktionskosten, adaptiert. Im Folgenden gehen wir von einer Erweiterung des ursprünglichen Universal Portfolios von Cover aus. Ein analoges Vorgehen ist auch bzgl. der anderen in dieser Arbeit vorgestellten Strategien möglich.

Wie bereits in diesem Kapitel gezeigt, können Zusatzinformationen über Anwendung von Algorithmen des *Data Mining* gewonnen werden. Auch an dieser Stelle kann ein Verfahren zur Generierung von Assoziationsregeln genutzt werden, um Eingangsdaten für die verwendete Online-Investitionsstrategie aufzubereiten.

Wir werden ein einfaches Verfahren vorstellen, das auf die Vermeidung von zu hohen Transaktionskosten durch eine selektive Aussetzung der Rebalancierung abzielt. Um die Kompetitivität des Algorithmus zu gewährleisten, müssen allerdings bestimmte Voraussetzungen an die Assoziationsregel erfüllt sein.

Ein einfaches Aussetzen des Rebalancierens kann dazu führen, dass der auf diese Weise mittelbar modifizierte Algorithmus nicht mehr universell ist. Daher müssen Assoziationsregeln, die zu einem Aussetzen des Rebalancierens führen, wie folgt aufgebaut sein:

$$C_P(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) \rightarrow C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (5.19)$$

Hierbei ist  $C_P(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})$  ein Regelrumpf, der Hinweise darauf gibt, ob sich eine Rebalancierung rentiert.  $C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})$  hingegen garantiert, dass die wesentlichen theoretischen Eigenschaften des zugrunde gelegten Algorithmus wie z. B. dessen Universalität weiterhin erhalten bleibt.

**Definition 5.16 (Universal Portfolio mit Assoziationsregeln)**

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren, UP das uniform gewichtete Universal Portfolio, dessen Portfoliovektoren mit  $\mathbf{b}_i$  ( $1 \leq i \leq$

$n$  bezeichnet werden, und *BCRP* mit dem Portfoliovektor  $\mathbf{b}^*$  das bezogen auf die Kursfolge  $\mathbf{X}^{(n)}$  beste konstant rebalancierte Portfolio.  $\mathbf{b}'_i$  bezeichne den Portfoliovektor am Ende der Handelsperiode  $i$ , bevor eine erneute Rebalancierung vorgenommen wird. Des Weiteren bezeichne  $C_P(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) \rightarrow C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})$  eine Assoziationsregel mit den oben beschriebenen Eigenschaften.  $C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)})$  sei ferner wie folgt definiert:

$$C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) : \max_j |b_{i,j} - b'_{i-1,j}| \leq \alpha$$

Die erweiterte Investitionsstrategie *UPDM* mit den Portfoliovektoren  $\mathbf{b}_i^{dm}$  ist dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^{dm} &= \mathbf{b}'_{i-1} \quad \text{falls } C_P(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) \rightarrow C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) \\ \mathbf{b}_i^{dm} &= \mathbf{b}_i \quad \text{sonst} \quad , \end{aligned}$$

wobei  $\alpha$  anhand eines Parameters  $k > 1$  wie folgt definiert wird:

$$\alpha := 1 - (1/k)^{\frac{m-1}{n}} \quad (5.20)$$

In einem ersten Schritt wird gezeigt, dass die vorgeschlagene Investitionsstrategie, ohne Berücksichtigung von Transaktionskosten kompetitiv zum *BCRP* ist. Dann wird in einem zweiten Schritt nachgewiesen, dass auch nach der Einführung von Transaktionskosten die vorgeschlagenen Investmentstrategie zum *BCRP* kompetitiv ist.

Für den ersten Schritt benötigen wir das folgende Theorem:

### Theorem 5.6

Sei  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren, *BCRP* das beste konstant rebalancierte Portfolio und *UPDM* die um die Assoziationsregeln erweiterte Strategie. Dann ist die Investitionsstrategie *UPDM* kompetitiv zum *BCRP*, und es gilt für die Kompetitivitätsrate:

$$c_n(\text{UPDM}, \text{BCRP}) \leq [k(n+1)]^{(m-1)}. \quad (5.21)$$

### Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass die Investitionsstrategie *UPDM* kompetitiv zu dem Universal Portfolio *UP* ist:

$$\begin{aligned}
S_n(UPDM, \mathbf{X}^{(n)}) &= S_{n-1}(UPDM, \mathbf{X}^{(n-1)}) \mathbf{b}_n^{dm} \mathbf{x}_n \\
&\geq S_{n-1}(UPDM, \mathbf{X}^{(n)}) (1 - \alpha) \mathbf{b}_n \mathbf{x}_n \\
&\geq S_{n-2}(UPDM, \mathbf{X}^{(n-2)}) (1 - \alpha)^2 \mathbf{b}_n \mathbf{x}_n \mathbf{b}_{n-1} \mathbf{x}_{n-1} \\
&\quad \vdots \\
&\geq (1 - \alpha)^n \prod_{i=1}^n \mathbf{b}_i \mathbf{x}_i \\
&\geq (1 - \alpha)^n S_n(UP, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

Mit Gleichung 4.14 kann nun gezeigt werden, dass *UPDM* kompetitiv zum *BCRP* ist. Es gilt:

$$\begin{aligned}
S_n(UPDM, \mathbf{X}^{(n)}) &\geq (1 - \alpha)^n S_n(UP, \mathbf{X}^{(n)}) \\
&\geq (1 - \alpha)^n (n + 1)^{-(m-1)} S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)})
\end{aligned}$$

Mit der Definition von  $\alpha$  gilt für  $1 - \alpha$ :

$$(1 - \alpha) = (1/k)^{\frac{m-1}{n}} \quad \text{mit } k > 1 \quad (5.22)$$

und dementsprechend für den relativen Gewinn  $S_n(UPDM, \mathbf{X}^{(n)})$ :

$$S_n(UPDM, \mathbf{X}^{(n)}) \geq [k(n + 1)]^{-(m-1)} S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)}) \quad (5.23)$$

Also gilt für die Kompetitivitätsrate  $c_n(UPDM, BCRP)$ :

$$\begin{aligned}
c_n(UPDM, BCRP) &= \sup_{\mathbf{X}^{(n)}} \frac{S_n(BCRP, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(UPDM, \mathbf{X}^{(n)})} \\
&= [k(n + 1)]^{(m-1)} \quad (5.24)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass dieses erweiterte Verfahren – ohne die Integration von Transaktionskosten – kompetitiv zu dem *BCRP* ist.  $\square$

Aufgrund der Konstruktion der Strategie *UPDM* entsprechen die entstehenden Transaktionskosten höchstens den Transaktionskosten, die bei der Umsetzung der Strategie *UP* erforderlich sind. Dies kann durch Verwendung der Dreiecksungleichung gezeigt werden.

In den Abbildungen 5.3 und 5.4 sollen anhand eines konkreten Beispiels Ergebnisse des oben entwickelten Algorithmus vorgestellt und mit denen des Universal Portfolios verglichen werden.

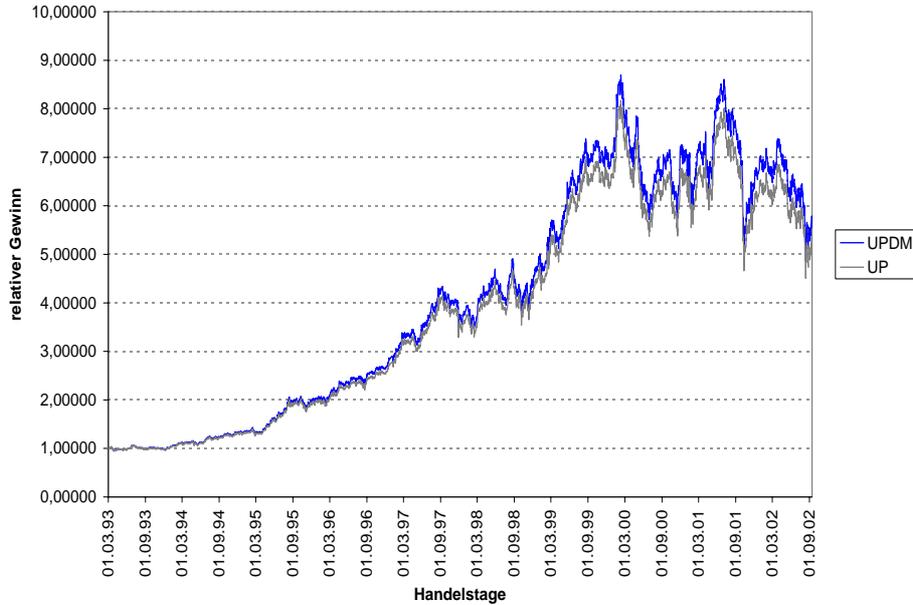


Abbildung 5.3: Vergleich der relativen Gewinne von UP und UPDM (Alcoa, Boeing, Microsoft)

Es wurde hier die folgende (temporale) Assoziationsregel verwendet<sup>7</sup>:

$$\begin{aligned}
 C_P(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) &: (|x_{i-1,1}| \leq 0,5) \wedge \\
 &(|x_{i-1,2}| \leq 0,5) \wedge \\
 &(|x_{i-1,3}| \leq 0,5)
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
 C_Q(\mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{X}^{(n)}) &: (|b_{i+1,1} - b'_{i,1}| \leq 0,01) \wedge \\
 &(|b_{i+1,2} - b'_{i,2}| \leq 0,01) \wedge \\
 &(|b_{i+1,2} - b'_{i,3}| \leq 0,01)
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Der Support dieser Assoziationsregel liegt bei 11,5%, die Konfidenz beträgt 94,5%.

<sup>7</sup>Durch eine geeignete Diskretisierung der relativen Kurse und der Portfoliovektoren (s. Definition 5.10) kann man diese Assoziationsregel in die in der Definition 5.11 angegebenen Form bringen.

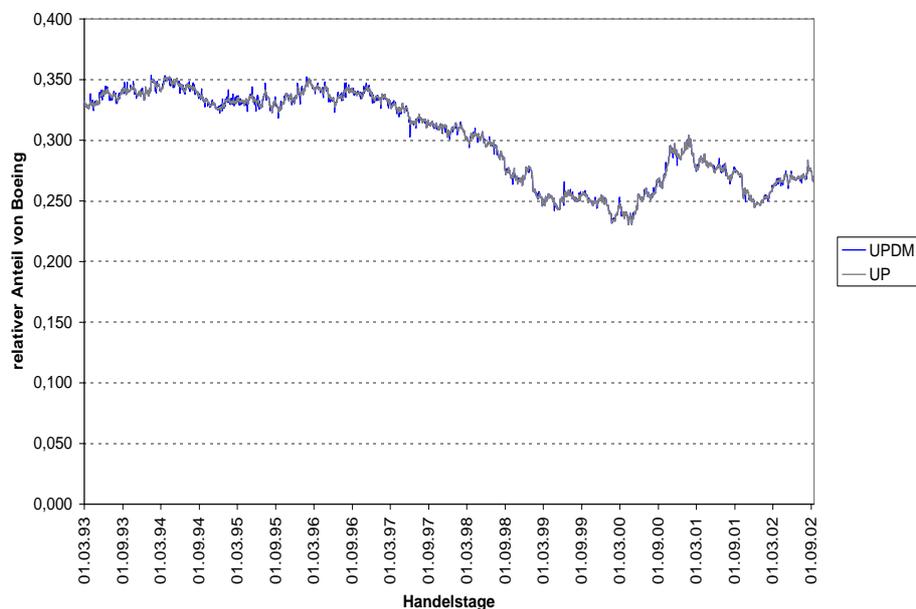


Abbildung 5.4: Vergleich der relativen Anteile von Boeing an dem von den Strategien *UP* und *UPDM* induzierten Portfolios (Alcoa, Boeing, Microsoft)

Die Abbildung 5.3 macht deutlich, dass der relative Gewinn der Online-Strategie *UPDM* aufgrund der geringeren Transaktionskosten gegenüber dem relativen Gewinn des Universal Portfolios *UP* höher ausfällt. In Abbildung 5.4 sind die jeweiligen Portfoliovektoren dieser beiden Online-Algorithmus im Verlauf des Investitionszeitraums zu sehen. Die Abweichungen hinsichtlich der Portfolio-Zusammensetzung treten erwartungsgemäß nur kurzfristig zu den Zeitpunkten auf, an denen die Strategie *UPDM* auf eine Rebalancierung verzichtet.

## 5.5 Modellierung von Risikokosten

Neben Transaktionskosten sind Risikokosten der wichtigste Kostenfaktor bei der Portfoliostrukturierung. Risikokosten entstehen für Finanzinstitute durch Investition in risikobehaftete Anlagen oder allgemeiner in risikobehaftete Portfolios.

Diese eingegangenen Risiken müssen von den Finanzinstitutionen mit Eigenkapital unterlegt werden [15]. Die aufsichtsrechtlichen Anforderungen

sehen eine Mindesthöhe des Eigenkapitals vor, die in Relation zu dem eingegangenen Risiko steht<sup>8</sup>.

Einerseits zieht ein Unterschreiten der geforderten Eigenkapitalquote nicht unerhebliche aufsichtsrechtliche Konsequenzen nach sich. Andererseits bindet ein zu hohes Eigenkapital zu viel Kapital, das von dem Finanzinstitut nicht investiert werden kann, sondern täglich zur Verfügung stehen muss, um Schaden von dem Unternehmen abzuwenden, falls ein Risiko schlagend wird.

Die von den Finanzaufsichtsbehörden zur Ermittlung des Marktpreisrisikos vorgegebene Methodik des Value-at-Risks (s. Abschnitt 2.5.3) kann auf unterschiedliche Arten berechnet werden. Die am häufigsten in der Praxis verwendeten Verfahren sind im Folgenden aufgeführt [57]:

- Varianz-Kovarianz-Ansatz
- Monte-Carlo-Simulation
- Historische Simulation

Die beiden ersten Berechnungsmethoden setzen explizit eine Verteilungsannahme hinsichtlich der betrachteten Anlagen voraus. Wir möchten daher in der Folge das Verfahren der historischen Simulation nutzen, um nicht an dieser Stelle höhere Anforderungen an das verwendete Marktmodell stellen zu müssen.

Ferner wird im Folgenden vorausgesetzt, dass die Eigenkapital- bzw. Risikokosten auf Portfolio-Ebene über dynamische VaR-Limite gesteuert werden. Dies ermöglicht eine Modellierung von (Marktpreis-) Risikokosten, die proportional zu dem jeweils errechneten Value-at-Risk sind [59].

Aufgrund der Struktur von Risikokosten kann eine Modellierung nicht vollständig entlang der vorgestellten Verfahren zur Integration von Transaktionskosten vorgenommen werden. Es werden daher nur die folgenden Möglichkeiten genauer untersucht:

- Verwendung von Zusatzinformationen zur Verminderung von Risikokosten
- Adaptation der Zielfunktion zur Integration von Risikokosten

---

<sup>8</sup>Bei Anwendung ausgereifter interner Risikomodelle stehen eingegangenes Risiko (z. Z. gilt dies nur für das in dieser Arbeit betrachtete Marktpreisrisiko) und Eigenkapital des Finanzinstituts in einem direkten Verhältnis zueinander.

### 5.5.1 Verwendung von Zusatzinformationen

Durch den Einsatz von Zusatzinformationen soll erreicht werden, dass Portfolios, die einen höheren Value-at-Risk aufweisen, eine geringere Gewichtung im Universal Portfolio erhalten. Hier kann die in diesem Kapitel vorgestellte Methode des Universal Portfolios mit Zusatzinformationen verwendet werden:

Ein möglicher Ansatzpunkt ist durch den Zusammenhang zwischen der Korrelation jeweils zweier Anlagen und dem Value-at-Risk des Portfolios gegeben. Zwei Anlagen, die in den vergangenen  $d$  Tagen eine hohe Korrelation aufgewiesen haben, können einen sehr unterschiedlichen Beitrag zum Value-at-Risk und damit zur Performance des Portfolios liefern.<sup>9</sup>

Der Status einer Zusatzinformation kann an dieser Stelle als eine natürliche Zahl  $k$  mit  $k = m \cdot (m - 1)$  wie folgt modelliert werden:

Die Zahl  $z_i$  mit  $z_i \in \mathcal{Z} = \{1, \dots, k\}$  kennzeichnet einerseits das Paar von Anlagen, das eine vorgegebene Korrelation überschreitet und gleichzeitig die Anlage, welche die höchsten Auswirkungen – im Sinne einer Verringerung – auf das Value-at-Risk des Portfolios besitzt. Diese Anlage erhält dann ein höheres Gewicht innerhalb des Portfolios.

Ein Nachteil des oben skizzierten Verfahrens ist die um den Exponent  $k$  verschlechterte Kompetitivität gegenüber dem ursprünglichen Verfahren (z. B. gegenüber dem Universal Portfolio).

### 5.5.2 Adaptation der Zielfunktion

Ein anderer Ansatz beruht auf der Änderung der für die Online-Strategien verwendeten Zielfunktion  $S_n(IS, \mathbf{X}^{(n)})$ .

---

<sup>9</sup>Für die Berechnung (mit historischer Simulation) des Value-at-Risks werden in der Regel 200 bzw. 250 Handelstage benötigt, für die Korrelation von (liquiden) Anlagen sind dies normalerweise 30 - 60 Tage.

Hierzu greifen wir auf die in Kapitel 2 erwähnten risikoadjustierten Performance-Maße zurück. Da unter bestimmten – oben aufgezeigten – Rahmenbedingungen eine Modellierung von Risikokosten über die Kennziffer des Value-at-Risks möglich ist, können wir die *relative Performance*  $P_n(IS, \mathbf{X}^{(n)})$  einer Investitionsstrategie als Zielfunktion nutzen.

Mit  $VaR(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$  möchten wir in der Folge einen *relativen* Value-at-Risk bezeichnen, der – eine historische Simulation voraussetzend – die Form  $(\mathbf{1} - \mathbf{x}_q) \cdot \mathbf{b}$  ( $n - p \leq q \leq n$ ) besitzt, wobei  $p$  der Anzahl der Tage entspricht, die für den Einsatz der historischen Simulation benötigt werden.

Die relative Performance  $P_n(IS, \mathbf{X}^{(n)})$  ist dabei wie folgt definiert:

**Definition 5.17 (Relative Performance einer Strategie)**

Bezeichne die Folge  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$  die relative Kursentwicklung der betrachteten Wertpapiere im Investitionszeitraum. Ferner sei  $IS = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n)$  eine Investitionsstrategie.

Dann ist die relative Performance  $P_n$  dieser Investitionsstrategie definiert als:

$$P_n(IS, \mathbf{X}^{(n)}) = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbf{b}_i \mathbf{x}_i}{VaR(IS, \mathbf{X}^{(n)})} \quad (5.27)$$

Aufbauend auf die relative Performance einer Strategie können wir neben der darauf aufbauenden Offline-Strategie des besten konstant rebalancierten Portfolios  $BCRP_{Perf}$  mit Portfoliovektor  $\mathbf{b}^*$ :

$$\mathbf{b}^* = \operatorname{argmax}_{\mathbf{b} \in \mathcal{B}} P_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})$$

das Universal Portfolio wie folgt definieren:

**Definition 5.18 (Universal Portfolio  $UP_{Perf}$ )**

Sei  $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^{m-1}$  die Menge der möglichen Portfoliovektoren. Ferner sei  $\mathbf{X}^{(n)} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$  eine beliebige Folge relativer Kursvektoren mit  $\mathbf{x}_0 = (1, \dots, 1)$ . Die Investitionsstrategie  $UP_{Perf}$  ist eine Folge von Portfoliovektoren  $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ , für die gilt:

$$\mathbf{b}_i = \frac{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} P_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mathbf{b}}{\int_{\mathcal{B}} P_{i-1}(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(i-1)}) d\mathbf{b}}, \quad i = 1, \dots, n$$

Mit dieser Definition können wir das folgende Theorem formulieren:

**Theorem 5.7**

Sei  $UP_{Perf}$  das oben definierte uniform gewichtete Universal Portfolio und  $\mathbf{X}^{(n)}$  eine beliebige Folge von relativen Kursvektoren. Ferner sei  $\mathbf{b}^*$  der Portfoliovektor des bezogen auf die Kursfolge  $\mathbf{X}^{(n)}$  besten konstant rebalancierten Portfolios.

Dann gilt für die Kompetitivität des uniform gewichteten Universal Portfolios:

$$c_n(UP_{Perf}, BCRP_{Perf}) = \frac{P_n(BCRP_{Perf}, \mathbf{X}^{(n)})}{P_n(UP_{Perf}, \mathbf{X}^{(n)})} \leq n^{m-1}$$

**Beweis:**

Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis des Theorems 4.14.

Es gilt:

$$\frac{P_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{P_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})} = \frac{S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{VaR(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})} \cdot \frac{VaR(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})} \quad (5.28)$$

$$= \frac{S_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})} \cdot \frac{VaR(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})}{VaR(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})} \quad (5.29)$$

Mit Gleichung 4.9 gilt:

$$\frac{P_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{P_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})} \geq \lambda(\mathbf{b})^n \cdot \frac{VaR(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})}{VaR(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})} \quad (5.30)$$

$$= \lambda(\mathbf{b})^n \cdot \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{x}_k)\mathbf{b}^*}{(\mathbf{1} - \mathbf{x}_l)\mathbf{b}} \quad (5.31)$$

$$\geq \lambda(\mathbf{b})^n \cdot \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{x}_m)\mathbf{b}^*}{(\mathbf{1} - \mathbf{x}_m)\mathbf{b}}, \quad (5.32)$$

wobei gilt:

$$\mathbf{x}_m = \arg \min_{\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_l\}} \frac{(\mathbf{1} - \mathbf{x})\mathbf{b}^*}{(\mathbf{1} - \mathbf{x})\mathbf{b}} \quad (5.33)$$

Es gilt folgende Ungleichung:

$$\frac{P_n(\mathbf{b}, \mathbf{X}^{(n)})}{P_n(\mathbf{b}^*, \mathbf{X}^{(n)})} \geq \lambda(\mathbf{b})^n \cdot \frac{\mathbf{x}_m\mathbf{b}/\lambda(\mathbf{b}) - 1}{\mathbf{x}_m\mathbf{b} - 1} \quad (5.34)$$

$$\geq \lambda(\mathbf{b})^{n-1} \quad (5.35)$$

Somit gilt für die Performance des Universal Portfolios:

$$\frac{P_n(UP_{Perf}, \mathbf{X}^{(n)})}{P_n(BCRP_{Perf}, \mathbf{X}^{(n)})} \geq E[\lambda(\mathbf{b})^{n-1}] \quad (5.36)$$

$$\geq \int_0^1 (1 - y^{\frac{1}{n-1}})^{m-1} dy \quad (5.37)$$

$$= (n-1) \frac{\Gamma(n-1)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m-1)} \quad (5.38)$$

$$\geq n^{-(m-1)} \quad (5.39)$$

Dann gilt für die exponentielle Wachstumsrate die folgende Gleichung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_n(BCRP_{Perf}, \mathbf{X}^{(n)}) - W_n(UP_{Perf}, \mathbf{X}^{(n)})) = 0$$

Damit ist gezeigt, dass die Online-Strategie  $UP_{Perf}$  log-optimal ist.  $\square$

Auf diese Weise haben wir einen Online-Algorithmus entwickelt, der Risikokosten berücksichtigt und kompetitiv gegenüber dem besten konstant rebalancierten Portfolio  $BCRP_{Perf}$  ist.

# Kapitel 6

## Zusammenfassung und Ausblick

### 6.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden nicht-klassische Ansätze zur Portfolio-Optimierung untersucht, die auf der kompetitiven Analyse von Online-Algorithmen beruhen. Diese Verfahren verzichten auf eine stochastische Modellierung der zugrunde liegenden Finanzmärkte. Dies hat u. a. zur Folge, dass die vorgestellten Online-Verfahren robust gegen Fehleinschätzungen hinsichtlich des Marktverhaltens (z. B. hinsichtlich möglicherweise auftretender Markt-*Shifts*) sind.

Zunächst wurden mit den Threat-basierten Verfahren Online-Algorithmen zur Portfolio-Optimierung vorgestellt, für die gezeigt werden konnte, dass sie zwar gegenüber der besten Buy-and-Hold-Strategie log-optimal sind, aber nicht die gleiche exponentielle Wachstumsrate wie das beste konstant rebalancierte Portfolio aufweisen und damit nicht universell sind.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit lag auf der Entwicklung und Implementierung dieser universellen Algorithmen. Hier konnte gezeigt werden, dass die bereits existierenden unterschiedlich motivierten Ansätze in einem übergeordneten Verfahren zusammengeführt werden können.

Ferner wurden verschiedene Methoden zur Modellierung und Integration von Kosten in bestehende Online-Verfahren zur Portfolio-Optimierung ge-

neriert<sup>1</sup>. Damit wurde ein wichtiger Schritt in Richtung Anwendbarkeit der vorgestellten Verfahren gemacht.

## 6.2 Ausblick

Aufgrund ihrer interessanten theoretischen Eigenschaften, die sich teilweise eindrucksvoll in der Praxis bestätigen lassen [28, 37, 8], bieten die in dieser Arbeit vorgestellten Online-Algorithmen eine wichtige Ausgangsbasis für weitere Strategien zur Portfolio-Optimierung.

Die von den klassischen Modellen der Portfolio-Optimierung abweichenden Online-Strategien bieten eine Fülle von Erweiterungen, von denen mit der *Verwendung anderer Gegnermodelle* und der *Integration weiterer Finanzinstrumente* nur zwei der wichtigsten möglichen Entwicklungen genannt werden sollen.

### 6.2.1 Verwendung anderer Gegnermodelle

In der vorliegenden Arbeit wurde hauptsächlich das beste konstant rebalancierte Portfolio als Gegnermodell verwendet. Damit wird den in dieser Arbeit betrachteten Online-Algorithmen ein Repräsentant einer bestimmten Klasse von Offline-Gegnern gegenübergestellt.

Gegnermodelle, die einen begrenzten *Look-Ahead*<sup>2</sup> erlauben, können weitere Erkenntnisse hinsichtlich der Relevanz von (frühzeitiger) Information liefern.

Ein Ausgangspunkt dieser Arbeit war der (weitgehende) Verzicht auf Annahmen hinsichtlich der Verteilung der Inputdaten, d. h., dass die Kompetitivitätsrate über

$$c_n(ONL, BEN) = \sup_{\mathbf{X}^{(n)}} \frac{S_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)})}{S_n(BEN, \mathbf{X}^{(n)})}$$

definiert wurde.

---

<sup>1</sup>In der Arbeit wurden exemplarisch anhand des Universal Portfolios mit der Modellierung von Transaktions- und Risikokosten die beiden wichtigsten Kostenfaktoren untersucht.

<sup>2</sup>Bislang wurden Online-Algorithmen mit begrenztem Look-Ahead hauptsächlich auf klassische Online-Probleme wie das Paging [3, 23] angewendet.

Um von diesem Entscheidungsproblem unter strikter Unsicherheit zu einem Entscheidungsproblem unter Plausibilität (Modellunsicherheit) zu gelangen, kann die obige Definition wie folgt abgewandelt werden<sup>3</sup>:

$$c_{n,\Delta}(ONL, BEN) = \sup_{\mathbf{X}^{(n)} \in \Delta} \frac{E[S_n(ONL, \mathbf{X}^{(n)})]}{E[S_n(BEN, \mathbf{X}^{(n)})]}$$

Hierbei geht man davon aus, dass die Verteilung der Eingangsdaten zu einer Klasse von Verteilungen  $\Delta$  gehört.

Bereits am Anfang des vierten Kapitels dieser Arbeit wurde diskutiert, inwieweit Annahmen an die Kursverläufe zu anderen Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung führen können. Die an dieser Stelle verfolgten Ansätze könnten mit Gewinn in Richtung einer Szenario-Optimierung verfeinert werden. Hierbei würde der Raum der Portfoliovektoren auf einen – vom Investor vorgegebenen – Szenarioraum eingegrenzt werden, ohne explizite statistische Annahmen an die Eingangsdaten machen zu müssen [85].

Andererseits kann durch eine konsequente Erweiterung der Gegnermodelle in Richtung einer stochastischen Modellierung eine engere Verknüpfung zu klassischen Mean-Variance-Verfahren hergestellt werden.

### 6.2.2 Integration weiterer Finanzinstrumente

Die Untersuchungen von Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung fokussieren fast ausschließlich auf Aktienmärkte [28, 33, 60], wobei auf weitergehende Analysen der verwandten Anlagen meist verzichtet wurde.

Die fruchtbaren Arbeiten von Blaedel et al. [19] und Andrée [8] haben allerdings gezeigt, dass statistische Analysen der in den Portfolios vorhandenen Anlagen wertvolle Hinweise auf *gute* Bedingungen für den Einsatz von Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung geben können.

Die oben genannten Untersuchungen deuten u. a. darauf hin, dass Online-Strategien zur Portfolio-Optimierung auch in seitwärts gerichteten Märkten hohe Gewinne ausweisen können, wenn sie mit Portfolios operieren, die wenigstens teilweise aus sehr volatilen Anlagen – hier sind volatile

---

<sup>3</sup>Ein ähnlicher Ansatz wurde für das Paging-Problem von Koutsoupias et al. [66] vorgeschlagen.

Bondmärkte nicht ausgenommen – zusammengesetzt sind<sup>4</sup>. Erste Analysen von Portfolios, die (volatile) derivative Finanzinstrumente beinhalten, scheinen diese Vermutungen zu bestätigen.

---

<sup>4</sup>Das im vierten Kapitel eingeführte Aktivitätsniveau scheint hierbei eine hohe Relevanz zu besitzen [56].

# Literaturverzeichnis

- [1] R. Agrawal, H. Mannila, R. Srikant, H. Toivonen, and A.I. Verkamo. Fast discovery of association rules. In U.M. Fayyad, G. Piatetsky-Shapiro, P. Smyth, and R. Uthurusamy, editors, *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*, pages 307–328, AAAI Press, Cambridge, USA, 1996.
- [2] R. Agrawal and R Srikant. Fast algorithms for mining association rules. In *Proceedings of the 20th VLDB Conference*, pages 487–499, Morgan Kaufmann, Santiago de Chile, 1994.
- [3] S. Albers. The influence of lookahead in competitive paging algorithms. In *Proceedings of the 1st European Symposium on Algorithms*, pages 1–12, Springer, Berlin, 1993.
- [4] S. Albers. Better bounds for on-line scheduling. In *Proceedings of the 29th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 130–139, ACM Press, El Paso, Texas, 1997.
- [5] S. Albeverio, L. Lao, and X. Zhao. On-line portfolio selection with prediction in the presence of transaction costs. *Mathematical Methods of Operations Research*, 54(1):133 – 161, 2001.
- [6] P. Algoet. Universal schemes for prediction, gambling and portfolio selection. *The Annals of Probability*, 20(2):901–941, 1992.
- [7] P. Algoet and T.M. Cover. Asymptotic optimality and asymptotic equipartition of log-optimum investment. *The Annals of Probability*, 16(2):876–898, 1988.
- [8] N. André. Erweiterung der Universellen Portfolio Selektion mittels derivativer Instrumente und anderer Assetklassen. *Diploma Thesis. Universität Bonn*, 2003.
- [9] P. Artzner, F. Delbaen, and D. Eber, J.-M. Heath. A characterization of measures of risk. Technical report, ETH Zürich, 1996.

- [10] C. Atkinson and P. Wilmott. Portfolio management with fixed transaction costs: An analysis of the Morton and Pliska model. *Mathematical Finance*, 5(4):357–367, 1995.
- [11] Y. Azar, Y. Bartal, E. Feuerstein, A. Fiat, S. Leonardi, and A. Rosen. On capital investment. Technical report, Tel Aviv University, 1997.
- [12] L.F. Bachelier. Théorie de la spéculation. *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, 17:21–86, 1900.
- [13] Bank für Internationalen Zahlungsausgleich. *BIZ Quartalsbericht*. Basel, 2003.
- [14] A. Barron and T.M. Cover. A bound on the financial value of information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 34(5):1097–1100, 1988.
- [15] Basle Committee on Banking Supervision. *Amendment to the Capital Accord to incorporate Market Risk*. Basel, 1996.
- [16] B. Bell and T.M. Cover. Competitive optimality of logarithmic investment. *Mathematics of Operation Research*, 5(2):161–166, 1980.
- [17] R. Bell and T.M. Cover. Game-theoretic optimal portfolios. *Management Science*, 34(6):724–733, 1988.
- [18] S. Ben-David, A. Borodin, R.M. Karp, G. Tardos, and A. Wigderson. On the power of randomization in on-line algorithms. In *Proceedings of the 22th ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 379–386, ACM Press, Baltimore, Maryland, 1990.
- [19] M. Blaedel, B. Hüge, and D. Lando. On long run portfolio optimization using universal portfolios. Technical report, University of Copenhagen, 1998.
- [20] A. Blum. On-line algorithms in machine learning. Technical report, Carnegie Mellon University, 1994.
- [21] A. Blum and A. Kalai. Universal portfolios with and without transaction costs. In *Proceedings of the Tenth Annual Conference on Computational Learning Theory*, pages 309–313, Morgan Kaufmann, Nashville, 1997.

- [22] R. Borodin, A. El-Yaniv. *Online Computation and Competitive Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1998.
- [23] D. Breslauer. On competitive on-line paging with lookahead. Technical report, University of Aarhus, 1996.
- [24] N. Cesa-Bianchi. Analysis of two gradient-based algorithms for online regression. In *Proceedings of the Tenth Annual Conference on Computational Learning Theory*, Morgan Kaufmann, Nashville, 1997.
- [25] N. Cesa-Bianchi, Y. Freund, D.P. Helmbold, D. Haussler, R.E. Schapire, and M.K. Warmuth. How to use expert advice. In *Proceedings of the 25th Annual ACM Symposium of Computing*, pages 382–391, ACM Press, San Diego, 1993.
- [26] A. Chou, J. Cooperstock, R. El-Yaniv, M. Klugerman, and T. Leighton. The statistical adversary allows optimal money-making trading strategies. In *Proceedings of the 6th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 467–476, ACM Press, San Francisco, 1995.
- [27] T.M. Cover. An algorithm for maximizing expected log investment return. *IEEE Transactions on Information Theory*, 30(2):369–373, 1984.
- [28] T.M. Cover. Universal portfolios. *Mathematical Finance*, 1(1):1–29, 1991.
- [29] T.M. Cover. Universal data compression and portfolio selection. In *37th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 534–538, IEEECS, Burlington, 1996.
- [30] T.M. Cover and D. Gluss. Empirical Bayes stock market portfolio. *Advances in Applied Mathematics*, 7(1):170–181, 1986.
- [31] T.M. Cover and E. Ordentlich. Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(2):348–363, 1996.
- [32] T.M. Cover and J.A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley and Sons, New York, 1991.

- [33] A.B. Cremers, C. Hundack, and J. Lüssem. Portfoliooptimierung mit Verfahren aus der Informatik. Technical Report IAI-TR-98-15, Universität Bonn, 1998.
- [34] A.B. Cremers, C. Hundack, and J. Lüssem. How to determine large log-optimal portfolios. In *Proceedings of the 23rd meeting of the EURO Working Group on Financial Modelling*, pages 105–117, Progress and Business, Krakau, 2000.
- [35] M.H.A. Davis and A.R. Norman. Portfolio selection with transaction costs. *Mathematics of Operations Research*, 15(4):676–713, 1990.
- [36] P.J. Davis and P. Rabinowitz. *Methods of Numerical Integration*. Academic Press, New York, 1984.
- [37] N. Dubben. Online-Portfolio-Selektion. *Diploma Thesis. Universität Bonn*, 1998.
- [38] J.E. Eastham and K.J. Hastings. Optimal impulse control of portfolios. *Mathematics of Operations Research*, 13(4):588–605, 1988.
- [39] R. El-Yaniv. Competitive solutions for online financial problems: A survey. Technical report, Hebrew University of Jerusalem, 1996.
- [40] R. El-Yaniv. Is it rational to be competitive? On the decision-theoretic foundations of the competitive ratio. Technical report, Hebrew University of Jerusalem, 1996.
- [41] R. El-Yaniv, A. Fiat, R Karp, and G. Turpin. Competitive analysis of financial games. In *Proceedings of the 33rd Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 327–333, IEEECS, Alamos, 1992.
- [42] R. El-Yaniv, R. Kaniel, and N. Linial. Competitive optimal on-line leasing. *Algorithmica*, 25:116–140, 1999.
- [43] R. El-Yaniv and R Karp. Nearly optimal competitive online replacement policies. *Mathematics of Operation Research*, pages 814–839, 1997.
- [44] E.J. Elton and Gruber M.J. *Modern portfolio theory and investment analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1995.

- [45] G. Evans. *Practical numerical integration*. John Wiley and Sons, New York, 1993.
- [46] U.M. Fayyad, G. Piatetsky-Shapiro, P. Smyth, and R. Uthurusamy. *Advances in Knowledge Discovery and Data Mining*. AAAI Press, Menlo Park, 1996.
- [47] A. Fiat, R.P. Karp, M. Luby, L.A. McGeoch, D.D. Sleator, and N. Young. Competitive paging algorithms. *Journal of Algorithms*, 12:685–699, 1991.
- [48] J. Franke, W. Härdle, and C. Hafner. *Einführung in die Statistik der Finanzmärkte*. Springer, Heidelberg, 2001.
- [49] A.A. Gaivoronski and F. Stella. Nonstationary optimization approach for finding universal portfolios. Technical report, University of Trondheim, 1997.
- [50] R. M. Gray. *Entropy and Information Theory*. Springer, New York, 1990.
- [51] P.C. Hammer and A.H. Stroud. Numerical integration over simplexes. *Math. Tables Aids Computation*, 10:137–139, 1956.
- [52] D.P. Helmbold, R.E. Schapire, Y. Singer, and M.K. Warmuth. Online portfolio selection using multiplicative updates. In *Machine Learning: Proceedings of the Thirteenth International Conference*, pages 23–51, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1996.
- [53] J. C. Hull. *Options, Futures, and other Derivatives*. Prentice Hall, New Jersey, 1998.
- [54] U. Husemeyer. Heuristische Diagnose mit Assoziationsregeln. *PhD Thesis. Universität Paderborn*, 2001.
- [55] J. E. Ingersoll. *Theory of Financial Decision Making*. Rowman and Littlefield, Totowa, New Jersey, 1987.
- [56] F. Jamshidian. Asymptotically optimal portfolios. *Mathematical Finance*, 2(2):131–150, 1992.
- [57] B. Jendruschewitz. *Value at Risk: Ein Ansatz zum Management von Bankrisiken*. Bankakademie-Verlag, Frankfurt am Main, 1999.
- [58] M. C. Jensen. The performance of mutual funds in the period 1945 - 1964. *Journal of Finance*, 23:389–416, 1968.

- [59] L. Johanning. Begrenzung von Aktienkursrisiken mit VaR-Limiten. 2. *Dresdner Risikotutorium, Universität Dresden*, 1999.
- [60] P. S. Kalev and F. C. Kabaner. An Australian evidence for the universal portfolio. Technical report, University of Melbourne, 1994.
- [61] J. N. Kapur. *Maximum entropy models in science and engineering*. John Wiley and Sons, New York, 1989.
- [62] J.L. Kelly. A new interpretation of information rate. *Bell System Tech. Journal*, 35:917–926, 1956.
- [63] J. Kivinen and M.K. Warmuth. Additive versus exponentiated gradient updates for linear prediction. In *Proceedings of the 27th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 209–218, ACM Press, New York, 1995.
- [64] J. Kivinen and M.K. Warmuth. Exponentiated gradient versus gradient descent for linear predictors. *Inform. Computation*, 132:1–63, 1997.
- [65] R. Korn. *Optimal Portfolios*. World Scientific, Singapur, 1997.
- [66] E. Koutsoupias and C. Papadimitriou. Beyond competitive analysis. In *Proceedings of the 35th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 394–400, IEEECS, New York, 1994.
- [67] S. Kullback. *Information Theory and Statistics*. John Wiley and Sons, New York, 1959.
- [68] L. Lao. Portfolio-selection with transaction costs. *Phd Thesis. Universität Bonn*, 2001.
- [69] R. Lauffer. Interpolation mehrfacher Integrale. *Archiv der Mathematik*, 6:159–164, 1955.
- [70] N. Littlestone. Learning quickly when irrelevant attributes abound: A new linear-threshold algorithm. *Machine Learning*, 2:285–318, 1988.
- [71] N. Littlestone and M.K. Warmuth. The weighted majority algorithm. Technical report, University of California, 1992.
- [72] J. Lüssem and J. Schumacher. Simulation-based option pricing. In W. Härdle, T. Kleinow, and G. Stahl, editors, *Applied Quantitative Finance*, Springer Verlag, Heidelberg, 2002.

- [73] M.S. Manasse, L.A. McGeoch, D.D. Sleator, and N. Young. Competitive algorithms for server problems. *Journal of Algorithms*, 11:208–230, 1990.
- [74] H. Mannila, H. Toivonen, and A.I. Verkamo. Improved methods for finding association rules. Technical report, University of Helsinki, 1994.
- [75] H. Markowitz. Portfolio selection. *Journal of Finance*, 8:77–91, 1952.
- [76] C. Matten. *Managing Bank Capital*. John Wiley and Sons, New York, 1998.
- [77] T.M. Mitchell. *Machine Learning*. McGraw-Hill, New York, 1997.
- [78] S.R. Morton, A.J. Pliska. Optimal portfolio management with fixed transaction costs. *Mathematical Finance*, 5(4):337–356, 1995.
- [79] R. Motwani and P. Raghavan. *Randomized Algorithms*. Cambridge University Press, New York, 1995.
- [80] E. Ordentlich and T.M. Cover. The cost of achieving the best portfolios in hindsight. Technical report, University of Stanford, 1996.
- [81] E. Polak. *Optimization: Algorithms and Consistent Approximations*. Springer, New York, 1997.
- [82] R. Raghavan. A statistical adversary for on-line algorithms. *DI-MACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 7:79–83, 1992.
- [83] S. Ross. The arbitrage pricing theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 12:343–362, 1976.
- [84] A. D. Roy. Safety first and the holding of assets. *Econometrica*, 20:431–449, 1952.
- [85] D. Saunders. Application of optimization to mathematical finance. *Diploma Thesis. University of Toronto*, 1997.
- [86] J. Schumacher. Monte-Carlo- und Quasi-Monte-Carlo-Methoden zur Optionsscheinbewertung. *Diploma Thesis. Universität Bonn*, 2000.

- [87] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell Systems Tech. Journal*, 27:379–423, 1948.
- [88] W. F. Sharpe. Capital asset pricing model: A theory of market equilibrium under condition of risk. *Journal of Finance*, 20:425–442, 1964.
- [89] W. F. Sharpe. *Portfolio theory and capital markets*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- [90] D. Simon. Portfolio-Selektion mit multiplikativem Update. *Diploma Thesis. Universität Bonn*, 1998.
- [91] D. D. Sleator and R. E. Tarjan. Amortized efficiency of list update and paging rules. *Communications of the ACM*, 28(2):202–208, 1985.
- [92] B. Stahlhut. *Messung und Analyse der Performance von Aktienportfolios*. Bankakademie-Verlag, Frankfurt am Main, 1997.
- [93] M. Steiner and C. Bruns. *Wertpapiermanagement*. Schäffer-Pöschel-Verlag, Stuttgart, 1998.
- [94] T. Stemmler. Ein Abriss grundlegender Portfoliomodelle. Technical report, Unveröffentlichtes Manuskript, 2002.
- [95] A.H. Stroud. Some approximate integration formulas of degree 3 for an n-dimensional simplex. *Numerische Mathematik*, 9:38–45, 1966.
- [96] A.H. Stroud. *Approximate calculation of multiple integrals*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
- [97] A.H. Stroud. A fifth degree integration formula for the n-simplex. *Siam J. Numer. Anal.*, 6(1):69–98, 1971.
- [98] T. Stucki. Die Rolle der Benchmark im Portfolio Management. *Finanzmarkt und Portfolio Management*, 10(2):181–196, 1996.
- [99] G. Studer. Maximum loss for measurement of market risk. *PhD Thesis. ETH Zürich*, 1997.
- [100] J. Tobin. Liquidity preference as behaviour towards risk. *Review of Economic Studies*, 25:68–75, 1958.

- [101] J. Tobin. The theory of portfolio selection. In F.B.R. Brechling and F.H. Hahn, editors, *The theory of interest rates*, Macmillan, London, 1965.
- [102] H. Toivonen. Sampling large databases for association rules. In *Proceedings of the 22nd VLDB Conference*, Morgan Kaufmann, Mumbai, India, 1996.
- [103] J.L. Treynor and Black F. How to use security analysis to improve portfolio selection. *Journal of Business*, 46:66–86, 1973.
- [104] V. Vovk. Aggregating strategies. In *Third Annual Workshop on Computational Learning Theory*, pages 371–383, ACM Press, Rochester, 1990.
- [105] V. Vovk and C. Watkins. Universal portfolios with slow learning rates. Technical report, University of London, 1997.
- [106] P. Wilmott. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley and Sons, New York, 2000.
- [107] J. Zimmermann. Learning in program space. *PhD Thesis. Universität Bonn, to be published*, 2003.

# Danksagung

Mein Dank gilt an erster Stelle Herrn Prof. Dr. Cremers, der mich durch das langanhaltende Interesse an der Thematik bestärkt und durch viele Diskussionen zur Bearbeitung interessanter Fragestellungen angeregt hat.

Herrn Prof. Dr. Albeverio möchte ich ebenfalls für seine zielführenden Kommentare danken, die zu einer Präzisierung der theoretischen Ergebnisse beigetragen haben.

Herzlich bedanken möchte ich mich bei Herrn Jürgen Schumacher, der mir durch die gute Kooperation insbesondere im Bereich der Lehre an der Universität Bonn in den Phasen mit erhöhtem Arbeitsvolumen den Rücken freigehalten hat und mir immer ein hilfreicher Ansprechpartner für fachliche Diskussionen war.

Bei Herrn Jörg Zimmermann möchte ich mich für die fruchtbaren Diskussionen zum Thema Modelle und Modellbildung und für das sicherlich nicht einfache Korrekturlesen bedanken.

Für die fast unendliche Geduld und den großen Rückhalt möchte ich meiner Familie danken.