

Auswirkung der im KD - und $K\bar{K}$ -Kanal gebildeten
mesonischen Moleküle in verschiedenen
Reaktionen

Felix Philipp Sassen

The influence of KD and $K\bar{K}$ mesonic molecules in selected reactions

The attractive potential of the Jülich meson exchange model in the $K\bar{K}$ -channel causes formation of a scalar isoscalar molecule. We investigate this observation from different points of view. First we look at the dependence of pion production in the peripheral reaction $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ on the momentum transferred at the nucleus. Accounting for the production via π and a_1 emission in a consistent way, we are able to explain the momentum dependence using the Jülich model. Furthermore we investigate how a measurement of $dd \rightarrow \alpha K\bar{K}$ close to threshold may contribute to our knowledge on $K\bar{K}$ interaction and the $f_0(980)$. The Jülich model links the properties of the $f_0(980)$ to the $a_0(980)$. We will use this information to learn about the $d\bar{K}$ -interaction in $pp \rightarrow dK\bar{K}$. The recent discovery of the $D_{sJ}^*(2317)$ offers a different perspective on the dynamical generation of poles, since it may be connected to the KD -threshold nearby. We construct a $SU(4)$ -extension of the Jülich model including isospin violation. Within this extension a dynamical resonance is formed, which only may explain the $D_{sJ}^*(2317)$ if isoscalar production is assumed. Special interest is paid to the predicted width of the $D_{sJ}^*(2317)$ associated with a dynamical interpretation.

Auswirkung der im KD - und $K\bar{K}$ -Kanal gebildeten mesonischen Moleküle in verschiedenen Reaktionen

Im Jülicher Modell sind die Potentiale im $K\bar{K}$ -Kanal attraktiv genug, um ein skalares isoskalares Molekül zu erzeugen. Wir untersuchen diesen Effekt aus verschiedenen Blickwinkeln. Zunächst untersuchen wir die Abhängigkeit der Pionproduktion in der peripheren Reaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ von dem Impulsübertrag auf das Nukleon. Wir stellen fest, dass bei konsistenter Beachtung der Produktionen via π - sowie via a_1 -Emission am Nukleon die Impulsabhängigkeit der Produktion durch das Jülicher Modell erklärt werden kann. Weiterhin haben wir untersucht, ob eine schwelennahe Vermessung der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K\bar{K}$ Informationen über die $K\bar{K}$ -Wechselwirkung und das $f_0(980)$ liefern kann. Das Jülicher Modell setzt die Eigenschaften des $f_0(980)$ zu denen des $a_0(980)$ in Bezug. Wir nutzen dies, um Informationen zur $d\bar{K}$ -Wechselwirkung aus der Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ zu extrahieren. Einen neuen Blickwinkel auf die dynamische Generation von Resonanzen bietet das $D_{sJ}^*(2317)$, da für diese Resonanz eine KD -Molekülstruktur diskutiert wird. Folglich haben wir eine $SU(4)$ -Erweiterung des Jülicher Modells konstruiert, die eine Betrachtung der KD -Streuung inklusive Isospinbrechung erlaubt. Die Wechselwirkung ist stark genug, um eine dynamische Resonanz zu generieren, welche die gemessenen Massenspektren jedoch nur unter der Annahme eines isoskalaren Produktionsoperators erklären kann. Insbesondere analysieren wir die Breite des $D_{sJ}^*(2317)$ unter Annahme einer molekularen Struktur.

**Auswirkung der im KD - und $K\bar{K}$ -Kanal
gebildeten mesonischen Moleküle in
verschiedenen Reaktionen**

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

vorgelegt von

Felix Philipp Sassen

aus

Düsseldorf

Bonn 2004

Angefertigt am Institut für Kernphysik des Forschungszentrums Jülich GmbH

mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

1. Referent: Herr Professor Dr. S. Krewald

2. Referent: Herr Professor Dr. U.-G. Meißner

Tag der Promotion:

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell	3
2.1	Motivation zur expliziten Darstellung der Lagrange-Funktion	5
2.2	Der $\pi\pi$ - $K\bar{K}$ - $\pi\eta$ Sektor	13
2.3	$\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ im erweiterten Jülicher Modell	20
2.4	Zusammenfassung	30
3	Das $D_{sJ}^*(2317)$ im Rahmen der KD-πD_s^+-ηD_s^+ Streuung	32
3.1	Einordnung der experimentellen Beobachtung	32
3.2	Modellierung der KD -Streuung	37
3.2.1	Streugleichung und Potential	39
3.2.2	Isospinbrechung	42
3.3	Resultate	48
3.3.1	Das Spielzeugmodell	48
3.3.2	Das erweiterte Jülicher Modell	53
3.4	Zusammenfassung	62
4	Das $a_0(980)$ in der Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$	64
4.1	Modellierung der Produktion	64
4.2	Vergleich mit experimentellen Daten	71
4.3	Vorhersagen für $pp \rightarrow d\pi^+\eta$	84
4.4	Fazit	86

5	Das $f_0(980)$ in der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$	87
5.1	Modellierung der Produktion	87
5.2	Betrachtung des Isospinanteils der Wechselwirkung	90
5.3	Resultate	92
5.4	Fazit	100
6	Der Meson-Meson Propagator	102
7	Zusammenfassung	109
A	Definitionen	111
A.1	Allgemeines	111
A.2	Berechnung der Observablen	113
A.2.1	Streuphasen und Inelastizitäten	114
A.2.2	Wirkungsquerschnitt und Y_J^M -Momente	114
B	Der $SU(4)$ Anteil der Wechselwirkung	116
B.1	Festlegung des Flavour Lagrangians	116
B.2	Der Isospinanteil des Potentials	123
B.3	Umkopplung zwischen Isospin- und Teilchenbasis	127
B.4	Explizite Form der $\mathcal{L}_{\text{Flavour}}^{SU(4)}$ -Funktion	129
C	Die Streugleichung	132
C.1	Molekülbildung	132
C.2	Dreidimensionale Reduktion	134
C.3	Diskretisierung der Integralgleichung	135
C.3.1	Die Konturdeformation	136
C.3.2	Das Haftel-Tabakin Verfahren	138
C.4	Seperable Potentiale (Lee Modell)	140
D	Partialwellenzerlegung	142
D.1	Definitionen	142
D.2	Auswahlregeln in Helizitäts- und JLS -Basis	143

E Dalitz-Diagramme und ihre Projektionen

146

Literaturverzeichnis

151

Kapitel 1

Einleitung

Seit Yukawa das Pion postulierte, um die Kraft zwischen den Nukleonen zu erklären [180], sind die Physik der Mesonen und die Physik der starken Wechselwirkung eng verwoben. Von diesem Ausgangspunkt aus hat sich unser Verständnis für die starke Wechselwirkung und unser Wissen über das Mesonenspektrum weiterentwickelt und grundlegend geändert. Dem heutigen Kenntnisstand nach wird die starke Wechselwirkung durch eine nichtabelsche Eichtheorie, die Quantenchromodynamik(QCD), beschrieben [85]. Da diese Theorie asymptotisch frei ist, d.h. die starke Kopplungskonstante α_S bei großen Impulsüberträgen klein wird, kann sie im Hochenergiebereich mithilfe der Störungstheorie entwickelt werden. Die nichtabelsche Struktur der QCD bewirkt jedoch, dass α_S im Nieder- und Mittelenergiebereich groß wird, was einen direkten perturbativen Zugang verhindert. Im Niederenergiebereich wurde diese Problematik erfolgreich durch die Entwicklung einer effektiven Feldtheorie, der chiralen Störungstheorie, angegangen. Diese beschreibt die Niederenergiephysik unter Beachtung der Symmetrien der zugrunde liegenden QCD auf der Grundlage der in diesem Energiebereich relevanten Freiheitsgrade, i.e. die Pionen und Nukleonen und nicht die Quarks und Gluonen. Die Entwicklung in der Kopplungskonstante α_s , welche die QCD-Rechnungen bei niedrigen Energien verhindert, wird in der chiralen Störungstheorie durch eine Entwicklung in den (kleinen) Energien der beteiligten Teilchen ersetzt. Will man jedoch das Mesonenspektrum –also die mittlere Energien– betrachten, so verlässt man auch den Konvergenzbereich dieser Theorie. In diesem nichtpertubativen Bereich der QCD wollen wir die Meson-Meson Streuung betrachten. Der Abstand zwischen den Streupartnern ist dort so groß, dass die farbneutralen Mesonen und Baryonen die relevanten Freiheitsgrade bilden. In diesem Sinne vermittelt das Jülicher Modell die Kraft zwischen den Streupartnern durch den Austausch von Mesonen. Diese sind jedoch nicht als fundamentale Träger der Wechselwirkung zu verstehen, wie dies Yukawa tat, sondern als effektive Beschreibung der Wech-

selwirkung über die im Energiebereich relevanten Freiheitsgrade. Für die Nukleon-Nukleon Wechselwirkung wurde dieses Konzept zum Beispiel im Rahmen des Bonn-Potentials angewendet [125]. Ein anderes erfolgreiches phenomenologisches Konzept bieten die Konstituenten-Quark-Modelle, die eine gute Beschreibung des mesonischen Spektrums liefern. Diese modellieren Einflüsse der Gluonen, Teile der Quarkdynamik und die etwaige Wechselwirkungen der vorhergesagten farbneutralen Teilchen untereinander effektiv durch eine Wechselwirkung unter Konstituenten-Quarks, deren Massen diese Effekte berücksichtigen. Andere QCD-motivierte Modelle hingegen benutzen genau diese Freiheitsgrade, um Resonanzen im mesonischen Spektrum zu erklären, die nicht durch ein naives Konstituenten-Quark-Modell erklärt werden. Eine solche Situation findet man zum Beispiel im skalaren isokalaren Spektrum, in welchem mit den Resonanzen $f_0(600)$, $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_0(1500)$, $f_0(1710)$, ... [64] mehr Zustände existieren als das naive Quark-Modell aufweist. So sind für die isoskalaren Resonanzen Szenarien von einfachen $q\bar{q}$ -Zuständen über Tetraquarks in verschiedenen Farbzuständen [46, 171] und mesonische Moleküle [123] bis hin zu exotischen Vorhersagen wie halb gebundene Zustände [34] formuliert worden. Interessant sind in diesem Zusammenhang die BNL-E852 [88] und GAMS [10, 12] Experimente, die für die Ladungsaustauschreaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ das $\pi\pi$ -Massenspektrum in seiner Abhängigkeit vom Impulsübertrag auf das Nukleon vermessen haben. Es zeigt sich, dass das $f_0(980)$, welches im Spektrum bei niedrigen Impulsüberträgen als Minimum zu sehen ist, sich bei hohem Impulsübertrag als Maximum manifestiert. In Kapitel 2 wollen wir prüfen, welche Auswirkung diese Beobachtung auf die Interpretation des $f_0(980)$ im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells hat. Die experimentellen Daten der letzten Jahre bieten uns jedoch noch eine weitere Chance, die Frage nach Molekülbildung in Meson-Meson Kanälen zu vertiefen. In den von BaBar [21], Cleo [33] und Belle [2] vermessenen $D_s^+ \pi^0$ Massenspektren findet sich mit der $D_{sJ}(2317)$ eine weitere Resonanz, die als Kandidat für ein Meson-Meson Molekül identifiziert [28] wurde. In Kapitel 3 werden wir daher das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell hin zu den charmanten Mesonen erweitern, um die KD -Streuung und das $D_{sJ}(2317)$ untersuchen zu können. Weitere Chancen auf Einblicke in die Struktur der skalaren Mesonen um 1 GeV versprechen die an COSY vermessene Reaktion $pp \rightarrow dK^+ \bar{K}^0$ [110] und die Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$, die wir in den Kapiteln 4 und 5 betrachten werden.

Kapitel 2

Das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell

In diesem Kapitel wollen wir kurz das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell beschreiben und verschiedene etablierte Parametrisierungen zitieren, die wir im Rahmen unserer Untersuchungen der Reaktionen $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ (Kapitel 4) und $dd \rightarrow \alpha K\bar{K}$ (Kapitel 5) verwenden. Danach werden wir das Modell um den $a_1\pi$ - und den $\rho\rho$ -Kanal erweitern, um mit diesem Modell die Endzustandswechselwirkung in der peripheren Reaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ zu modellieren.

Das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell geht auf Arbeiten von D. Lohse et al. [123] und G. Janßen et al. [100] zurück. Im Jülicher Modell werden Streuprozesse auf der Grundlage hadronischer Freiheitsgrade behandelt. In den Berechnungen wird hierzu eine dreidimensionale Reduktion der Bethe-Salpeter Gleichung verwendet. Dies war in den ersten Arbeiten die zeitgeordnete Störungstheorie und in den jüngeren Arbeiten die auch von uns verwendete Blankenbeclar-Sugar Reduktion, welche in Anhang C.2 beschrieben ist. Als Potentialkern für die Integralgleichung werden anstelle der Summe aller Zweiteilchen irreduziblen Graphen Einteilchen-Austausch-Graphen sowie Kontaktterme verwendet. Die in dieser Arbeit verwendeten Potentiale haben wir in Abbildung 2.1 zusammengestellt. Ihr explizites Aussehen werden wir zusammen mit den entsprechenden Lagrange-Funktionen in den folgen Abschnitten darstellen.

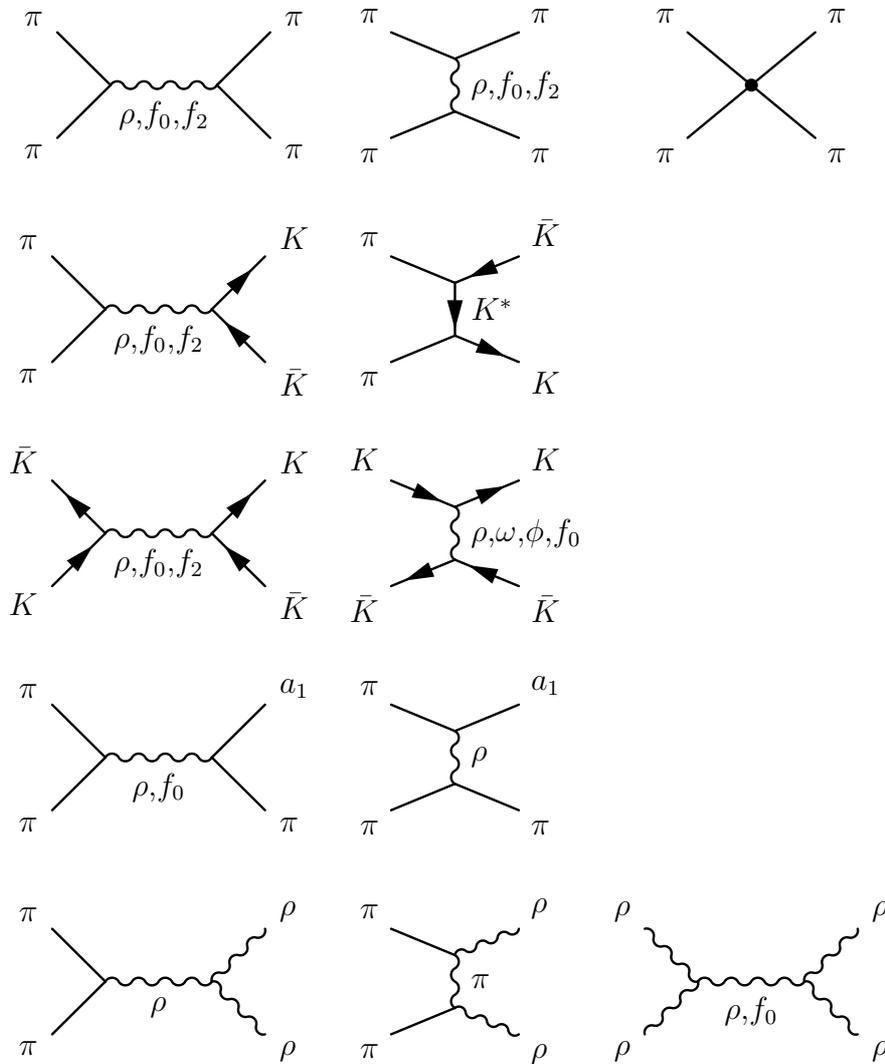


Abbildung 2.1: Graphische Darstellung aller im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells verwendeten Potentiale. (Einzelne Parametrisierungen kommen mit einer Untermenge dieser Graphen aus.)

2.1 Motivation zur expliziten Darstellung der Lagrange-Funktion

Wie man den Isospin-Anteil unserer Wechselwirkung und die Relationen zwischen den Kopplungskonstanten der einzelnen $SU(2)$ Untergruppen aus der Forderung nach $SU(4)$ -Symmetrie bestimmt, ist in Anhang B an dem Beispiel eines Vertex erläutert. Wir wollen hier die Struktur der Lagrange-Funktion im Fall von $SU(2)$ Symmetrie motivieren und danach die von uns benutzten Anteile der Lagrange-Funktion auflisten. Die zu beachtenden Symmetrietransformationen sind die Rotation im Isospinraum $\psi \rightarrow e^{i\vec{\alpha}\vec{\tau}}\psi$ (τ_i sind die Generatoren der Rotationsgruppe und $\vec{\alpha}$ ist ein beliebiger Vektor) i.e. $SU(2)_V$ und die zur $SU(2)_A$ gehörenden Transformationen $\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\vec{\alpha}\vec{\tau}}\psi$. Dass die Symmetrie der Vektorgruppe auf der hadronischen Ebene nur gering gebrochen ist, erkennt man zum Beispiel an den fast identischen Massen innerhalb der Isospin-Multipletts. So beträgt die Abweichung innerhalb des Triplets der Pionen nur $\approx 3\%$. Die Symmetriegruppe $SU(2)_A$ ist hingegen durch die von Null verschiedenen Massen gebrochen, weshalb der assoziierte Axialvektorstrom nur teilweise erhalten ist (PCAC). Diese Beobachtung, sprich der spontane Zusammenbruch der chiralen Symmetrie ($SU(2)_L \times SU(2)_R = SU(2)_V \times SU(2)_A \rightarrow SU(2)_V$), erklärt auch über das Goldstone Theorem [80] die geringe Masse der Pionen als Masse der mit dieser Symmetriebrechung assoziierten Goldstone Bosonen.

Ausgehend von diesen Symmetrieüberlegungen formuliert [36] die folgende Lagrange-Funktion für das nichtlineare Sigma-Modell:

$$\mathcal{L}_{\text{nls}} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2 \vec{\pi}^2 + \frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\pi}^2 (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) - \frac{m_\pi^2}{8f_\pi^2} (\vec{\pi}^2)^2 \quad (2.1)$$

Das Rho-Meson (sowie das a_1 -Meson) kann man im Rahmen dieses Modells als Eichboson einer versteckten lokalen Eichsymmetrie einfügen. Dies bedingt die folgenden Zusatzterme in der Lagrange-Funktion [130, 172].

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{2}m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu^2 + g_{\pi\pi\rho} \vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\pi} \times \partial^\mu \vec{\pi}) + \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{2m_\rho^2} (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi})^2 \quad (2.2)$$

Dabei haben wir die KSFR-Relation [107, 155] benutzt, um die Kopplungskonstante des letzten Terms in die zitierte Form zu bringen. Das Eichboson der Axialvektor-Gruppe hat zwei Ankopplungsstrukturen [177]:

$$\mathcal{L}_{a_1\pi\rho} = g_\rho m_{a_1} (\vec{\pi} \times \vec{a}_1^\mu) \vec{\rho}_\mu \quad (2.3)$$

$$\mathcal{L}_{a_1\pi\rho} = \frac{g_\rho}{2m_{a_1}} [\vec{\pi} \times (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu)] [\partial^\mu \vec{a}_1^\nu - \partial^\nu \vec{a}_1^\mu] \quad (2.4)$$

In der Tradition des Jülicher Modells verwenden wir nur die zweite Struktur [99], da nichtderivative Kopplungen in Verbindung mit den hier verwendeten Formfaktoren oft zu Überbetonungen von schweren Resonanzen an der Schwelle der angekoppelten Kanäle führt. Bei der Wahl der Kopplungskonstante folgen wir dem Jülicher Modell für die Meson-Nukleon Streuung [115] und wählen $g_\rho \approx g_{\rho NN} \approx 3.25$ (In Bezug auf die ρ -Universalität sei angemerkt, dass wir gegenüber der konventionellen Formulierung der Lagrange-Funktion einen Faktor $1/2$ in die Kopplungskonstante gezogen haben.). Ferner ist zu beachten, dass die Rhos als Eichbosonen der nichtabelschen Gruppe $SU(2)_V$ auch untereinander wechselwirken können. Diese Wechselwirkung entspringt dem kinetischen Term (2.5) [36].

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}\vec{F}_{\mu\nu}\vec{F}^{\mu\nu} \quad (2.5)$$

mit $\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu + g_\rho(\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$

Die Lagrange-Funktion des für unser Modell relevanten $\rho\rho\rho$ -Vertex lautet somit:

$$\mathcal{L}_{\rho\rho\rho} = -\frac{1}{2}g_\rho(\partial_\mu\vec{\rho}_\nu - \partial_\nu\vec{\rho}_\mu)(\vec{\rho}^\mu \times \vec{\rho}^\nu) \quad (2.6)$$

Es verbleibt den zum $\omega\pi\rho$ -Vertex gehörenden Teil der Lagrange-Funktion zu definieren, welcher seinen Ursprung in der anomalen Wess-Zumino-Witten Wirkung [178] hat. Wir zitieren ihn in der durch [32] gegebenen Form:

$$\mathcal{L} = \frac{g_{\omega\rho\pi}}{m_\omega}\epsilon_{\mu\alpha\lambda\nu}\partial^\alpha\vec{\rho}^\mu\partial^\lambda\vec{\pi}\omega^\nu \quad (2.7)$$

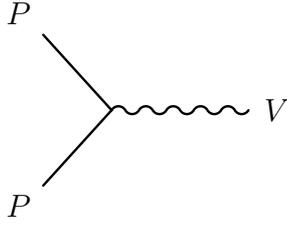
Hierbei ist $g_{\omega\rho\pi} = \frac{3g_\rho^2\pi m_\omega}{8\pi^2 f_\pi} = 11.2$, wobei wir $g_{\rho\pi\pi} = 6.04$ gewählt haben.

Da in Anhang B ausführlich beschrieben ist, wie man die hier angeführten Kopplungen auf die restlichen Mesonen in den jeweiligen $SU(4)$ -Multipletts verallgemeinert, skizzieren wir hier nur kurz das Prinzip, wie es zum Beispiel durch [164] auf zwei Baryon-Oktette und ein Meson-Oktett und durch [134] auf zwei Oktette pseudoskalärer Mesonen und ein Vektor-Meson Oktett angewendet wurde. Zur Definition des Flavouranteils der Drei-Meson-Wechselwirkung koppelt man drei Repräsentationen von $SU(4)$ (i.e. der Mesonen) zu einem Singulett. Hierzu koppelt man zunächst zwei 15-pletts (Singulette bilden einen einfachen Spezialfall, den wir hier nicht beschreiben) und reduziert das Produkt aus. Man erhält:

$$\{15\} \otimes \{15\} = \{84\} \oplus \{45\} \oplus \{45^*\} \oplus \{20''\} \oplus \{15_D\} \oplus \{15_F\} \oplus \{1\} \quad (2.8)$$

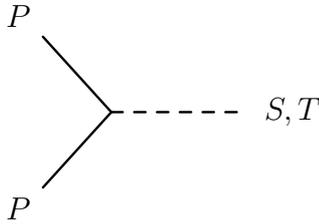
Koppelt man noch ein drittes 15-plett an, so enthalten nur die Produktgruppen von $\{15_D\} \otimes \{15\}$ und $\{15_F\} \otimes \{15\}$ Singulette. Im Prinzip müssen wir also zwei Kopplungskonstanten g_D und g_F festlegen, um die Kopplungskonstanten für alle in den $SU(4)$

Darstellungen enthaltenen Isospin-Multipletts festzulegen. Macht man sich nun klar, dass die G -Parität $g_{\pi\pi\omega_8} = 0$ verlangt und vergleicht dies mit dem entsprechenden Ausdruck aus den $SU(4)$ Relationen (B.22.54), so erhält man $g_D = 0$. Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Aufzählung der expliziten Formen der von uns verwendeten Lagrange-Funktion, wobei wir die Erörterung der Ankopplung an die D -Mesonen auf Kapitel 3.2.1 verschieben. Aus dem Eichterm $g_{\pi\pi\rho}\vec{\rho}_\mu(\vec{\pi} \times \partial^\mu\vec{\pi})$ ergeben sich die folgenden Terme für die Lagrange-Funktion:



$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi\pi\rho} &= g_{\pi\pi\rho}(\vec{\pi} \times \partial_\mu\vec{\pi})\rho^\mu \\ \mathcal{L}_{\pi KK^*} &= g_{\pi KK^*}(\partial^\mu\vec{\pi}(K\vec{\tau}K_\mu^*) - \vec{\pi}(\partial^\mu K\vec{\tau}K_\mu^*)) \\ \mathcal{L}_{KK\rho} &= g_{KK\rho}(K\vec{\tau}\partial_\mu K)\vec{\rho}^\mu \\ \mathcal{L}_{KK\omega} &= g_{KK\omega}(K\partial_\mu K)\omega^\mu \\ \mathcal{L}_{KK\phi} &= g_{KK\phi}(K\partial_\mu K)\phi^\mu\end{aligned}$$

Hierbei bestehen zwischen den Kopplungskonstanten die in Tabelle 2.1 genannten Beziehungen. In dieser Tabelle findet man auch die Beziehungen zwischen Kopplungskonstanten für zwei Pseudoskalare, die an ein skalares bzw. an ein Tensor-Meson koppeln. Die zugehörigen Lagrange-Funktionen lauten:



$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi\pi f_0} &= \frac{g_{\pi\pi f_0}}{m_\pi}(\partial^\mu\vec{\pi}\partial_\mu\vec{\pi})\phi_{f_0} \\ \mathcal{L}_{KK f_0} &= \frac{g_{KK f_0}}{m_K}(\partial^\mu K\partial_\mu K)\phi_{f_0} \\ \mathcal{L}_{\pi\pi f_2} &= \frac{g_{\pi\pi f_2}}{m_\pi}(\partial_\mu\vec{\pi}\partial_\nu\vec{\pi} - \vec{\pi}\partial_\mu\partial_\nu\vec{\pi})\phi_{f_2}^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{KK f_2} &= \frac{g_{KK f_2}}{m_K}(\partial_\mu K\partial_\nu K - K\partial_\mu\partial_\nu K)\phi_{f_2}^{\mu\nu}\end{aligned}$$

Zur Motivation dieser Wahl sei auf die Beschreibungen des Jülicher Modells in [122, 153, 156] verwiesen. Im Rahmen des Jülicher Modells wird ferner die Konvergenz der Integrale in der Streugleichung durch die Verwendung von Formfaktoren an den Vertices erreicht. Die Definition dieser Faktoren wird nach der Auflistung der Mesonen-Austausch-Potentiale beschrieben. Diese Potentiale haben für skalare Teilchen im Ein- und Ausgangskanal die folgende Form:

- Austausch eines skalaren Mesons:

$$\begin{aligned}V_t &= \frac{4C}{m_P^2} \frac{k_{1\mu}k_3^\mu k_{2\nu}k_4^\nu}{t - M^2} \\ V_s &= \frac{4C}{m_P^2} \frac{k_{1\mu}k_2^\mu k_{3\nu}k_4^\nu}{s - M_0^2}\end{aligned}$$

Vertex	SU(3)-Relation
$\pi\pi\rho$	freier Parameter
πKK^*	$g_{\pi KK^*} = g_{\pi\bar{K}\bar{K}^*} = -\frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$KK\rho$	$g_{KK\rho} = g_{\bar{K}\bar{K}\rho} = \frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$KK\omega$	$g_{KK\omega} = g_{\bar{K}\bar{K}\omega} = -\frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$KK\phi$	$g_{KK\phi} = g_{\bar{K}\bar{K}\phi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}g_{\pi\pi\rho}$
$\pi\pi f_0$	freier Parameter
$KK f_0$	freier Parameter
$\pi\pi f_2$	freier Parameter
$KK f_2$	$g_{KK f_2} = g_{\bar{K}\bar{K} f_2} = \frac{2}{3}g_{\pi\pi f_2}$

Tabelle 2.1: SU(3) Relationen für die Kopplungskonstanten der SU(2) invarianten Lagrange-Funktion [114]



Abbildung 2.2: Bezeichnung der ein- und auslaufenden Impulse für s - und t -Kanal Meson-Austausch. Im s -Kanal werden durch die Streugleichung Schleifendiagramme generiert, die zur Selbstenergie des ausgetauschten Mesons beitragen. Dies gilt nicht für die im t -Kanal ausgetauschten Mesonen, weshalb wir für s -Kanal-Mesonen eine nackte Masse M_0 verwenden, während wir im t - und u -Kanal mit der physikalischen Masse M des Mesons rechnen.

- Austausch eines Vektormesons:

$$V_t = C \sum_{\lambda} \frac{(k_1 + k_3)^{\mu} (k_2 + k_4)^{\nu} \epsilon_{\mu}^* \epsilon_{\nu}}{t - M^2}$$

$$V_s = C \sum_{\lambda} \frac{(k_1 - k_2)^{\mu} (k_3 - k_4)^{\nu} \epsilon_{\mu}^* \epsilon_{\nu}}{s - M_0^2}$$

- Austausch eines Tensormesons:

$$V_t = \frac{C}{m_P^2} \sum_{\lambda} (k_1 + k_3)^{\mu} (k_1 + k_3)^{\nu} (k_2 + k_4)^{\sigma} (k_2 + k_4)^{\tau} \frac{\epsilon_{\mu\nu}^* \epsilon_{\sigma\tau}}{t - M^2}$$

$$V_t = \frac{C}{m_P^2} \sum_{\lambda} (k_1 - k_2)^{\mu} (k_1 - k_2)^{\nu} (k_3 - k_4)^{\sigma} (k_3 - k_4)^{\tau} \frac{\epsilon_{\mu\nu}^* \epsilon_{\sigma\tau}}{s - M_0^2}$$

Hierbei sind die Impulse wie in Abbildung 2.2 gewählt und es gelten die folgenden Bezeichnungen: ϵ^{μ} bzw. $\epsilon^{\mu\nu}$ stehen für den in Anhang A.1 beschriebenen Polarisationsvektor bzw. -tensor. Der Faktor $C = g_1 g_2 F_{iso}^I n F_1 F_2$ setzt sich aus den Kopplungskonstanten g_1, g_2 , dem Isospinanteil des Potentials F_{iso}^I (Anhang B.2), dem Normierungsfaktor n sowie den später beschriebenen Formfaktoren F_i zusammen. Ferner steht m_P für $\sqrt{m_1 m_2 m_3 m_4}$ mit m_i , den Massen der gestreuten Teilchen. Der Winkel θ ist in Anhang A.1 definiert und bezeichnet den Winkel zwischen den Relativimpulsen der einlaufenden und auslaufenden Teilchen. Die Impulse sind im Schwerpunktsystem für die Blankenbecler-Sugar reduzierte Bethe-Salpeter Gleichung durch:

$$k_1 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2} + c, \vec{k} \right) \quad k_2 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - c, -\vec{k} \right)$$

$$k_3 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2} + c', \vec{k}' \right) \quad k_4 = \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - c', -\vec{k}' \right)$$

gegeben, wobei $c = (m_1^2 - m_2^2)/\sqrt{4s}$ und $c' = (m_3^2 - m_4^2)/\sqrt{4s}$ ist. Der Normierungsfaktor n erklärt sich aus der Normierung von Zuständen zweier identischer Teilchen wie zum Beispiel π^+, π^- und π^0 , wenn wie hier der Isospin-Formalismus benutzt wird. ($n(\pi\pi \rightarrow \pi\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $n(\pi\pi \rightarrow K\bar{K}) = \frac{1}{\sqrt{2}} 1$, $n(K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}) = 1 \cdot 1, \dots$ um nur einige Beispiele zu nennen.) Im Zusammenhang mit Kanälen identischer Teilchen sei hier auf die Möglichkeit hingewiesen, u - und t -Kanalaustausch durch Symmetrie zu berücksichtigen, da der Übergang zwischen t - und u -Kanal einer Ersetzung $\cos \theta \leftrightarrow -\cos \theta$ plus Umkopplung des Isospins entspricht. Beachtet man die Relationen

$$P_J(-\cos \theta) = (-1)^J P_J(\cos \theta)$$

$$\langle I_2 m_2 I_1 m_1 | I I_Z \rangle = (-1)^{I_1 + I_2 + I} \langle I_1 m_1 I_2 m_2 | I I_Z \rangle$$

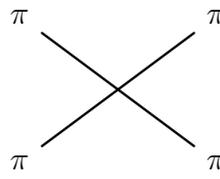
für die Legendre-Polynome und die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, so ergibt sich

$$V_{\pi\pi,u}^{IJ} = (-1)^{J+I} V_{\pi\pi,t}^{IJ} \quad . \quad (2.9)$$

Somit können u -Kanal-Graphen durch folgende Gleichung zusammen mit den t -Kanal-Graphen berücksichtigt werden.

$$V_{\pi\pi,t}^{IJ} + V_{\pi\pi,u}^{IJ} = \begin{cases} 2V_{\pi\pi,t}^{IJ} & \text{für } I + J \in 0, 2, 4, \dots \\ 0 & \text{für } I + J \in 1, 3, 5, \dots \end{cases} \quad (2.10)$$

Da die Vier-Pion-Kontaktwechselwirkungen aus der ungeeichten Lagrange-Funktion des nichtlinearen Sigma-Modells und aus dem Eichterm der lokalen $SU(2)_V$ sich nicht in Impuls- und Isospinanteil zerlegen lassen, geben wir die entsprechenden Potentiale V^{IJ} hier explizit an:



$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}} &= \frac{m_\pi^2}{8f_\pi^2} (\vec{\pi}^2)^2 \\ \mathcal{L}_{\text{nls}} &= -\frac{1}{4f_\pi^2} \vec{\pi}^2 (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \partial^\mu \vec{\pi}) \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{2m_\rho^2} (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi})^2 \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$V_{\text{mass}}^{00} = \frac{5m_\pi^2}{f_\pi^2} F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{mass}}^{20} = \frac{2m_\pi^2}{f_\pi^2} F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{nls}}^{00} = -\frac{1}{f_\pi^2} (3s - 2k^2 - 2k'^2) F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{nls}}^{20} = -\frac{1}{f_\pi^2} (-2k^2 - 2k'^2) F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{nls}}^{11} = -\frac{1}{f_\pi^2} (4kk' \cos \theta) F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{gauge}}^{00} = 2 \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2} (2s + 2k^2 + 2k'^2) F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{gauge}}^{20} = -\frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2} (2s + 2k^2 + 2k'^2) F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

$$V_{\text{gauge}}^{11} = \frac{g_{\pi\pi\rho}^2}{m_\rho^2} (4kk' \cos \theta) F^{\text{ct}}(k) F^{\text{ct}}(k')$$

Im Jülicher Mesonen-Austausch-Modell für die $\pi\pi$ -Streuung gehört zu der Beschreibung eines Vertex auch die Angabe eines empirischen Formfaktors, der die Konvergenz des Integrals in der Streugleichung garantiert. Diese lauten:

- im s -Kanal

$$F^s(k) = \left(\frac{2\Lambda^2 + M^2}{2\Lambda^2 + 4\omega^2(k)} \right)^2$$

- im t -Kanal

$$F^t(k, k') = \left(\frac{2\Lambda^2 - M^2}{2\Lambda^2 + (\vec{k} - \vec{k}')^2} \right)^2$$

- für Kontaktgraphen

$$F^{\text{ct}}(k) = \left(\frac{2\Lambda^2 - 4m_\pi^2}{2\Lambda^2 + 4k^2} \right)$$

Zur Rechtfertigung der hier gewählten nicht Lorentz-invarianten Form der Formfaktoren sei auf [98, 125] verwiesen.

Da wir das Jülicher Mesonen-Austauschbild der $\pi\pi$ -Streuung auch dazu benutzen wollen, um die Endzustandswechselwirkung der auslaufenden Pionen in der peripheren Reaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ zu modellieren, in der –zumindest bei hohen Impulsüberträgen auf das Nukleon– die Produktion via Emission eines a_1 am Nukleon eine prominente Rolle spielt [7], erweitern wir das Modell um den $a_1\pi$ -Kanal. Damit können wir dann die Produktionen via Pion-Emission und via a_1 -Emission am Nukleon auf der gleichen Grundlage behandeln. Um die entsprechenden Mesonen-Austausch-Potentiale zu berechnen, müssen wir zunächst die Lagrange-Funktionen für den $a_1 K^* \bar{K}$ -, den $a_1 \pi f_0$ - und den $\rho \rho f_0$ -Vertex festlegen, wobei mit dem $a_1 K^* \bar{K}$ -Vertex gleichzeitig der ladungskonjugierte Vertex einhergeht und mit dem f_0 ein beliebiges genuines isoskalares Skalar gemeint ist.

$$\mathcal{L}_{a_1 \pi f_0} = g_{a_1 \pi f_0} (\partial_\mu \vec{\pi} \cdot \vec{a}_1^\mu) f_0 \quad (2.12)$$

$$\mathcal{L}_{\rho \rho f_0} = g_{\rho \rho f_0} m_\rho (\vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu) f_0 \quad (2.13)$$

$$\mathcal{L}_{a_1 K^* \bar{K}} = \frac{g_\rho}{2m_{a_1}} (\partial_\mu K \vec{\tau} \vec{a}_{1\nu} - \partial_\nu K \vec{\tau} \vec{a}_{1\mu}) (\partial^\mu K^{*\nu} - \partial^\nu K^{*\mu}) \quad (2.14)$$

Wir führen die entsprechenden Potentiale in der Helizitäts-Basis an. Die Transformation in die JLS -Basis erfolgt gemäß Formel D.10.

$$V_{f_0-s\text{-Kanal}}^{a_1 \pi \rightarrow a_1 \pi} = g_{a_1 \pi f_0}^2 n F^{iso} F_1 F_2 \frac{k_{\pi in}^\mu \epsilon_\mu(k_{a_{1in}}, \lambda_{a_{1in}}) k_{\pi out}^\nu \epsilon_\nu^*(k_{a_{1out}}, \lambda_{a_{1out}})}{s - M_{0f_0}^2} \quad (2.15)$$

$$V_{\rho-s\text{-Kanal}}^{\pi a_1 \rightarrow \pi a_1} = \frac{g_\rho^2}{m_{a_1}^2} n F^{iso} F_1 F_2 \frac{(k_{\rho ex \mu} k_{a_{1in}}^\mu \epsilon^\nu(k_{a_{1in}}, \lambda_{a_{1in}}) - k_{\rho ex \mu} \epsilon^\mu(k_{a_{1in}}, \lambda_{a_{1in}}) k_{a_{1in}}^\nu)}{s - M_{0\rho}^2} \cdot \frac{(k_{\rho ex \gamma} k_{a_{1out}}^\gamma \epsilon_\nu^*(k_{a_{1out}}, \lambda_{a_{1out}}) - k_{\rho ex \gamma} \epsilon^{*\gamma}(k_{a_{1out}}, \lambda_{a_{1out}}) k_{a_{1out}}^\nu)}{1} \quad (2.16)$$

$$V_{\rho-u\text{-Kanal}}^{\pi a_1 \rightarrow \pi a_1} = \frac{g_\rho^2}{4m_{a_1}^2} n F^{iso} F_1 F_2 \frac{(k_{\rho ex \mu} k_{a_{in}}^\mu \epsilon^\nu(k_{a_{in}}, \lambda_{a_{in}}) - k_{\rho ex \mu} \epsilon^\mu(k_{a_{in}}, \lambda_{a_{in}}) k_{a_{in} \nu})}{u - m_\rho^2} \cdot \frac{(k_{\rho ex \gamma} k_{a_{out}}^\gamma \epsilon_\nu^*(k_{a_{out}}, \lambda_{a_{out}}) - k_{\rho ex \gamma} \epsilon^{*\gamma}(k_{a_{out}}, \lambda_{a_{out}}) k_{a_{out} \nu})}{1} \quad (2.17)$$

$$V_{\rho-t\text{-Kanal}}^{\pi \pi \rightarrow \pi a_1} = \frac{g_\rho g_{\rho \pi \pi}}{m_{a_1}} n F^{iso} F_1 F_2 \frac{i(k_{\pi_{out}}^\nu + k_{\pi_{in1}}^\nu) (k_{\rho \mu} k_{a_1}^\mu \epsilon_\nu^*(k_{a_1}, \lambda_{a_1}) - k_{\rho \mu} \epsilon^{*\mu}(k_{a_1}, \lambda_{a_1}) k_{a_1 \nu})}{t - m_\rho^2} \quad (2.18)$$

Da wir später auch den $\rho\rho$ -Kanal ankoppeln wollen, geben wir schon hier die entsprechenden Potentiale an:

$$V_{\pi-t\text{-K}}^{\pi a_1 \rightarrow \rho \rho} = \frac{-g_\rho g_{\rho \pi \pi}}{m_{a_1}} n F^{iso} F_1 F_2 \frac{i(k_{\rho_1 \mu} k_{a_1}^\nu \epsilon^{*\nu}(k_{a_1}, \lambda_{a_1}) - k_{\rho_1 \mu} \epsilon^{*\mu}(k_{a_1}, \lambda_{a_1}) k_{a_1}^\nu) \epsilon_\nu(k_{\rho_1}, \lambda_{\rho_1})}{t - m_\pi^2} \cdot (k_{\pi \gamma} + k_{\pi ex \gamma}) \epsilon^\gamma(k_{\rho_2}, \lambda_{\rho_2}) \quad (2.19)$$

$$V_{a_1-t\text{-Kanal}}^{\rho \rho \rightarrow \pi \pi} = \frac{g_\rho^2}{m_{a_1}^2} n F^{iso} F_1 F_2 \frac{(k_{\rho_1 \mu} k_{a_{1ex}}^\mu \epsilon_\nu(k_{\rho_1}, \lambda_{\rho_1}) - k_{a_{1ex}}^\mu \epsilon_\mu(k_{\rho_1}, \lambda_{\rho_1}) k_{\rho_1 \nu})}{t - m_{a_1}^2} \cdot (k_{\rho_2}^\nu \epsilon_\gamma(k_{\rho_2}, \lambda_{\rho_2}) k_{a_{1ex}}^\gamma - \epsilon^\nu(k_{\rho_2}, \lambda_{\rho_2}) k_{\rho_2 \gamma} k_{a_{1ex}}^\gamma) \quad (2.20)$$

$$V_{\omega-t\text{-Kanal}}^{\rho \rho \rightarrow \pi \pi} = \frac{-g_{\omega \rho \pi}^2}{m_\omega^2} n F^{iso} F_1 F_2 \frac{k_{\rho_1}^\alpha \epsilon^\mu(k_{\rho_1}, \lambda_{\rho_1}) k_{\pi_1}^\lambda \epsilon_{\mu \alpha \lambda \nu} \epsilon^{\bar{\mu} \bar{\alpha} \bar{\lambda} \nu} k_{\rho_2 \bar{\alpha}} \epsilon_{\bar{\mu}}(k_{\rho_2}, \lambda_{\rho_2}) k_{\pi_2 \bar{\lambda}}}{t - m_\omega^2} \quad (2.21)$$

$$V_{\pi-t\text{-Kanal}}^{\rho \rho \rightarrow \pi \pi} = g_{\rho \pi \pi}^2 n F^{iso} F_1 F_2 \frac{(2k_{\pi_1}^\mu \epsilon_\mu(k_{\rho_1}, \lambda_{\rho_1})) (2k_{\pi_2}^\nu \epsilon_\nu(k_{\rho_2}, \lambda_{\rho_2}))}{t - m_\pi^2} \quad (2.22)$$

$$V_{f_0-s\text{-Kanal}}^{\rho \rho \rightarrow \rho \rho} = g_{\rho \rho f_0}^2 n F^{iso} F_1 F_2 \frac{4(\epsilon^\mu(k_{\rho_{in1}}, \lambda_{\rho_{in1}}) \epsilon_\mu(k_{\rho_{in2}}, \lambda_{\rho_{in2}}))}{s - M_{f_0}^2} \cdot (\epsilon^{*\nu}(k_{\rho_{out1}}, \lambda_{\rho_{out1}}) \epsilon_\nu^*(k_{\rho_{out2}}, \lambda_{\rho_{out2}})) \quad (2.23)$$

$$V_{\rho-s\text{-K}}^{\rho \rho \rightarrow \rho \rho} = g_\rho^2 n F^{iso} F_1 F_2 \frac{-(\epsilon_\nu(\rho_{in1}) \epsilon^\nu(\rho_{in2}) (k_{\rho_{in1}}^\mu - k_{\rho_{in2}}^\mu) + 2\epsilon_\nu(\rho_{in1}) \epsilon^\mu(\rho_{in2}) k_{\rho_{in2}}^\nu - 2\epsilon^\mu(\rho_{in1}) \epsilon_\nu(\rho_{in2}) k_{\rho_{in1}}^\nu)}{s - M_{0\rho}^2} \cdot (\epsilon_\gamma^*(\rho_{out1}) \epsilon^{*\gamma}(\rho_{out2}) (k_{\rho_{out1}\mu} - k_{\rho_{out2}\mu}) - 2\epsilon_\mu^*(\rho_{out1}) \epsilon^{*\gamma}(\rho_{out2}) k_{\rho_{out1}\gamma} + 2\epsilon_\gamma^*(\rho_{out1}) \epsilon_\mu^*(\rho_{out2}) k_{\rho_{out2}}^\gamma) \quad (2.24)$$

$$V_{\rho-t\text{-Kanal}}^{\rho \rho \rightarrow \rho \rho} = \frac{g_\rho^2}{4} \frac{n F^{iso} F_1 F_2}{t - m_\rho^2} \left\{ - \sum_{\lambda_{\rho ex}} \sum_{(a,b,c) \in \mathcal{A}} 2(\epsilon_\mu^a \epsilon_\nu^{*b} (k_c^\mu \epsilon^{*c\nu} - k_c^\nu \epsilon^{*c\mu})) \cdot \sum_{(d,e,f) \in \mathcal{B}} 2(\epsilon_{d\gamma} \epsilon_{e\delta}^* (k_f^\gamma \epsilon_f^\delta - k_f^\delta \epsilon_f^\gamma)) \right\} \quad (2.25)$$

In dieser Aufzählung beschreiben n , F^{iso} und F_i wie schon für die anderen Potentiale den Normierungsfaktor, den Isospin-Faktor und die Formfaktoren. Wir haben \mathcal{A} als Kurzschreibweise für die Menge der geraden Permutationen über $(\rho_{in1}, \rho_{out1}, \rho_{ex})$ gewählt und \mathcal{B} für die Menge der geraden Permutationen über $(\rho_{in2}, \rho_{out2}, \rho_{ex})$. Wir benutzen weiterhin $\sum_{\lambda} \epsilon_{\nu}^*(\lambda) \epsilon_{\mu}(\lambda) = -g_{\nu\mu}$, wobei die Polarisationsvektoren in Anhang A.1 definiert sind. Die Indizes an den Impulsen k und Helizitäten λ bezeichnen die jeweiligen Teilchen nach Eingangskanal, Ausgangskanal und Austauschteilchen, falls die Zuordnung nicht eindeutig ist. Die Impulsstruktur des Potentials $V_{K^*, \bar{K}^*-t, u\text{-Kanal}}^{\pi a_1 \rightarrow K \bar{K}}$ ist nicht explizit aufgeführt, da sie unter Beachtung der Beziehung zwischen u - und t -Kanal aus der Struktur des Potentials $V_{\rho-u\text{-Kanal}}^{\pi a_1 \rightarrow \pi a_1}$ ablesbar ist. Ebenfalls haben wir auf eine explizite Darstellung der s -Kanal-Potentiale mit unterschiedlichen Ein- und Ausgangskanälen verzichtet, weil ihre Impulsstruktur separiert und somit leicht aus den hier gegebenen Strukturen mit identischem Ein- und Ausgangskanal zu ersehen ist. (Die Isospin-Faktoren sind dennoch in Tabelle B.2 angegeben.) Zu einer vollständigen Beschreibung des Modells fehlt noch die Festlegung der freien Kopplungskonstanten und der Abschneideparameter Λ . Da wir diese jedoch in den verschiedenen Parametrisierungen anpassen, werden wir ihre Werte in den jeweiligen Kapiteln angeben.

2.2 Der $\pi\pi$ - $K\bar{K}$ - $\pi\eta$ Sektor

In diesem Kapitel stellen wir das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell in einer auf den $\pi\pi$ -, $K\bar{K}$ - und $\pi\eta$ -Kanal beschränkten Version vor. Diese Version wird uns in den Kapiteln 4 und 5 als Grundlage für unsere Untersuchungen der Reaktionen $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ und $dd \rightarrow \alpha K\bar{K}$ dienen. Es ist hierzu besonders geeignet, da es durch eine große Datenmenge bei relativ geringer Parameterzahl bestimmt wird. Unsere bevorzugte Parametrisierung fußt auf der Analyse in [116]. Ihre Vertex-Parameter sind in Tabelle 2.2 zusammengefasst. Aus den so definierten Vertices bauen wir die folgenden Potentiale auf: $V_{\rho-s/t\text{-Kanal}}^{\pi\pi \leftrightarrow \pi\pi}$, $V_{\rho-s/t\text{-Kanal}}^{K\bar{K} \leftrightarrow K\bar{K}}$, $V_{\rho-s\text{-Kanal}}^{\pi\pi \leftrightarrow K\bar{K}}$, $V_{\text{mass/nlc/gauge-Kont.}}^{\pi\pi \leftrightarrow \pi\pi}$, $V_{\omega/\phi-t\text{-Kanal}}^{K\bar{K} \leftrightarrow K\bar{K}}$, $V_{f_0/2-s\text{-Kanal}}^{\pi\pi/K\bar{K} \leftrightarrow \pi\pi/K\bar{K}}$, $V_{K^*-t\text{-Kanal}}^{\pi\pi \leftrightarrow K\bar{K}}$ und $V_{K^*-t\text{-Kanal}}^{\pi\eta \leftrightarrow K\bar{K}}$. Um dem Leser einen ersten Eindruck zu geben, inwieweit dieses Modell die experimentellen Daten reproduziert, zeigen wir in Abbildung 2.3 die in [150] und [82] gemessenen Y -Momente der $\pi\pi$ -Streuung zusammen mit den Vorhersagen dieses Modells. Die Übereinstimmung erscheint befriedigend, wenn man die Unsicherheit in den Daten beachtet. In Bezug auf die Analyse der $\pi\pi$ -Streuung merkten Zou et al. in [179] an, dass ein Verständnis für den isotensoriellen Teil der Wechselwirkung entscheidend für einen Analyseerfolg sei und diesbezüglich der t -Kanalaustausch eines isoskalaren Tensorteilchens eine besondere Rolle spielt. In Abbildung 2.4 zeigen wir daher die Auswirkung, die der t -Kanalaustausch des $f_2(1270)$ im Rahmen des Jülicher Modells hat. Gerade im isotensoriellen Verhalten erkennt man

Vertex	g_t	g_s	g_c	Λ_t in MeV	Λ_s in MeV	Λ_c in MeV	M_0 in MeV
$\rho\pi\pi$	6.040	5.317	—	1355	3300	—	1126
$f_0(\approx 1300)\pi\pi$	—	0.082	—	—	1850	—	1520
$f_2(1270)\pi\pi$	—	1.005	—	—	2320	—	1615
$\pi\pi\pi\pi$	—	—	\mathcal{L}	—	—	352	—
$K^*K\pi, \bar{K}^*\bar{K}\pi$	$SU(4)$	—	—	1900	—	—	—
$\rho KK, \rho\bar{K}\bar{K}$	$SU(4)$	$SU(4)$	—	1850	2000	—	1126
$\omega KK, \omega\bar{K}\bar{K}$	$SU(4)$	—	—	2800	—	—	—
$\phi KK, \phi\bar{K}\bar{K}$	$SU(4)$	—	—	2800	—	—	—
$f_0(\approx 1300)KK, \dots$	—	-0.082	—	—	2500	—	1520
$f_2(1270)KK, \dots$	—	$SU(4)$	—	—	2800	—	1615
$K^*K\eta, \bar{K}^*\bar{K}\eta$	$SU(4)$	—	—	2600	—	—	—

Tabelle 2.2: Definition der Vertex-Parameter für das auf $\pi\pi$, $K\bar{K}$ und $\pi\eta$ beschränkte Jülicher Mesonen-Austausch-Modell. \mathcal{L} verweist auf eine Festlegung der Kopplungskonstante z.B. durch den Ursprung des Terms als Eichterm. $SU(4)$ verweist auf eine Festlegung durch die in Tabelle 2.3 angeführten Relationen. Die Spalte M_0 bezieht sich jeweils auf das Vektor- bzw. Skalar-Teilchen im Vertex und gibt die für seinen s -Kanal-Austausch verwendete nackte Masse an.

Vertex	SU(4)-Relation
$\pi\pi\rho$	freier Parameter
πKK^*	$g_{\pi KK^*} = g_{\pi\bar{K}\bar{K}^*} = -\frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$KK\rho$	$g_{KK\rho} = g_{\bar{K}\bar{K}\rho} = \frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$KK\omega$	$g_{KK\omega} = g_{\bar{K}\bar{K}\omega} = -\frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$KK\phi$	$g_{KK\phi} = g_{\bar{K}\bar{K}\phi} = -\frac{1}{\sqrt{2}}g_{\pi\pi\rho}$
KKf_2	$g_{KKf_2} = g_{\bar{K}\bar{K}f_2} = \frac{2}{3}g_{\pi\pi f_2}$
ηKK^*	$g_{\eta KK^*} = -g_{\eta\bar{K}\bar{K}^*} = -\frac{\sqrt{3}}{2}g_{\pi\pi\rho}$

Tabelle 2.3: $SU(4)$ -Relationen für die Kopplungskonstanten der Vertices in Tabelle 2.2.

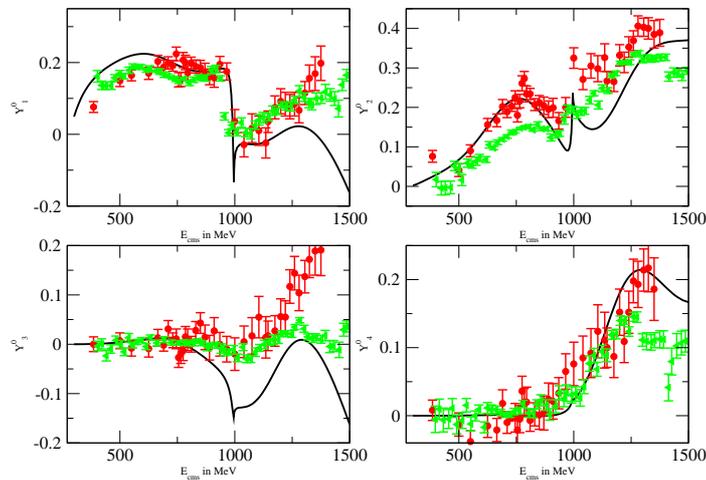


Abbildung 2.3: Von links nach rechts, oben nach unten sind die Vorhersagen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells für die Y -Momente Y_1^0 , Y_2^0 , Y_3^0 und Y_4^0 in der $\pi\pi$ -Streuung dargestellt. Die Daten stammen aus den experimentellen Analysen von [150] (rot) und von [82] (grün).

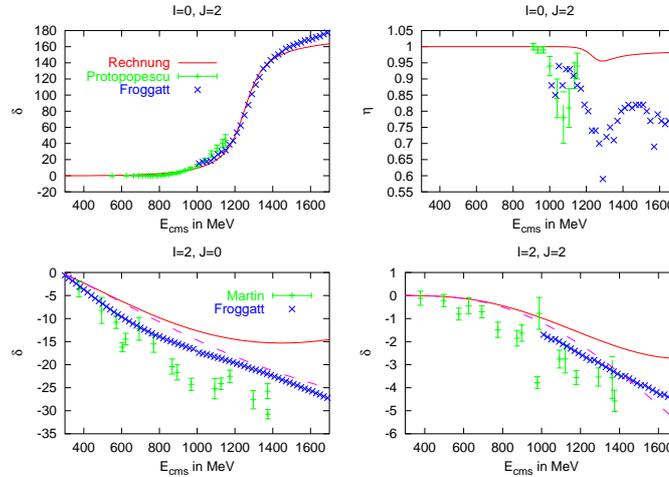


Abbildung 2.4: Auswirkung des t -Kanalaustausches eines $f_2(1270)$ auf verschiedene Phasen und Inelastizitäten der $\pi\pi$ -Streuung. Die gestrichelte Linie zeigt die Berechnung im Rahmen des Jülicher Modells, also ohne f_2 - t -Kanalaustausch und die durchgezogene Linie zeigt unsere Rechnung mit f_2 - t -Kanalaustausch. Die Daten stammen aus [71, 72](Froggatt), aus [150](Protopopescu) und aus [129](Martin)

eine Abweichung. Wenn das t -Kanal-Diagramm beachtet wird, fällt die Phase nicht mehr monoton sondern fängt bei Energien oberhalb von ≈ 1500 MeV wieder zu steigen an. Dies entspricht nicht den Daten im Bereich bis zu 1400 MeV und deshalb ignorieren wir, da wir an Energien um ein GeV interessiert sind, den t -Kanalaustausch des $f_2(1270)$. Wir machen dies, obwohl wir wissen, dass es experimentelle Daten [92] gibt, die oberhalb von 1.6 GeV ein ansteigendes Verhalten bevorzugen. Da nun das Modell festgelegt ist, mit dem wir Vorhersagen über die Auswirkungen der Meson-Meson Endzustandswechselwirkung in den Reaktionen $pp \rightarrow dK\bar{K}$ und $dd \rightarrow \alpha K\bar{K}$ treffen, wollen wir uns die Vorhersagen dieses Modells im skalaren isoskalaren und skalaren isovektoriellen Kanal ansehen und zwei weitere Referenzmodelle für Vergleiche definieren. Auch wenn die Datenlage im isoskalaren Kanal üppig ist, so ist sie leider nicht eindeutig, wie man aus Abbildung 2.5 erkennen kann. Die dargestellten Parametrisierungen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells entsprechen der oben beschriebenen Parametrisierung (@1022), einer Parametrisierung (@981) mit verstärkter Bindung ($\Lambda_{t-\rho KK} = 2180$ MeV) und einer tief gebundenen Parametrisierung (@971) ohne genuines $f_0(1370)$ ($\Lambda_{t-\rho KK} = \Lambda_{t-\omega KK} = \Lambda_{t-\phi KK} = 3300$ MeV). Hierbei ist die letztere Parametrisierung durch die ersten Untersuchungen im Jülicher Mesonen-Austauschbild inspiriert, die das f_0 als tief gebundenen $K\bar{K}$ -Zustand darstellte aber einen genuinen Pol bei 4000 MeV besaß, der eine sehr starke Massenrenormierung aufweist. Die Bezeichnungen der Parametrisierungen beziehen sich auf den Realteil der Polpositi-

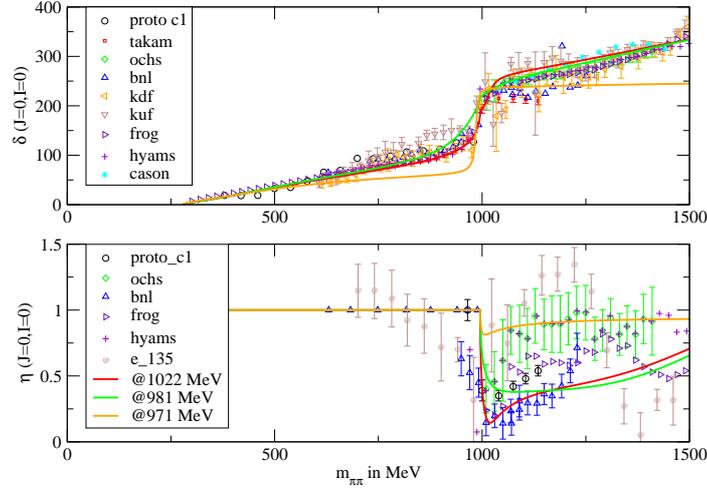


Abbildung 2.5: Die Phasenverschiebungen und Inelastizitäten in der $J = 0, I = 0$ Partialwelle sind für die $\pi\pi$ -Streuung dargestellt. Die Modelle sind mit @*aaa* MeV durch den Realteil ihrer $f_0(980)$ Polposition gekennzeichnet. Die experimentellen Daten sind: proto c1 [150], takam [165], ochs [137], bnl [87], kdf [106](down flat), kuf [106](up flat), frog [71, 72], hyams [94], cason [44]

on des $f_0(980)$ in MeV. Für diese Modelle zeigen wir die Polpositionen der skalaren isoskalaren Resonanzen in Abbildung 2.6. Die entsprechenden Zahlen sind in Tabelle 2.4 aufgelistet. Aus den Polpositionen und Residuen erkennt man zunächst, dass die σ - bzw. $f_0(600)$ -Resonanz im Rahmen aller Modelle dynamisch generiert wird und seine Eigenschaften erwartungsgemäß von der Kopplung im $K\bar{K}$ -Kanal unabhängig sind. Das dynamisch generierte $f_0(980)$ zeigt sich oberhalb der Schwelle relativ breit und wird dann schmaler je weiter wir es unterhalb der Schwelle parametrisieren. Mit diesen Erläuterungen wollen wir die Betrachtung der unterschiedlichen Parametrisierungen beenden und zwei weitere Eigenschaften des Hauptmodells anführen. Das $a_0(980)$ in den frühen Versionen des Jülicher Modells (z.B. Abb.4.6 @971) ist ein reiner Schwelleneffekt, da die Isospinfaktoren dafür sorgen, dass nur noch ω - und ϕ -Austausch attraktiv sind und nicht mehr der ρ -Austausch. Auch wenn die neuen Versionen (z.B. Abb.4.6 @981, @1022) des Jülicher Modells das f_0 schwächer binden und daher eine niedrigere Polposition für das a_0 zulassen, so bleibt die Charakteristik eines durch das Schwellenverhalten dominierten a_0 dennoch erhalten. (Der Pol wandert von seiner ursprünglichen Position bei $1151 - 63i$ MeV über $1128 - 63i$ MeV zu $1067 - 92i$ MeV.) Generieren wir durch einen sehr steifen Formfaktor $\Lambda_{K^*K\eta}$ bis zu 4 GeV weitere Attraktion im isovektoriellen Kanal, so können wir in Abbildung 2.7 beobachten, wie das a_0 den Charakter einer durch die Schwelle verzerrten Resonanzstruktur bekommt. (Der a_0 -Pol ist hier bis auf $1000 \pm 92i$ MeV bzw. $964 \pm 98i$

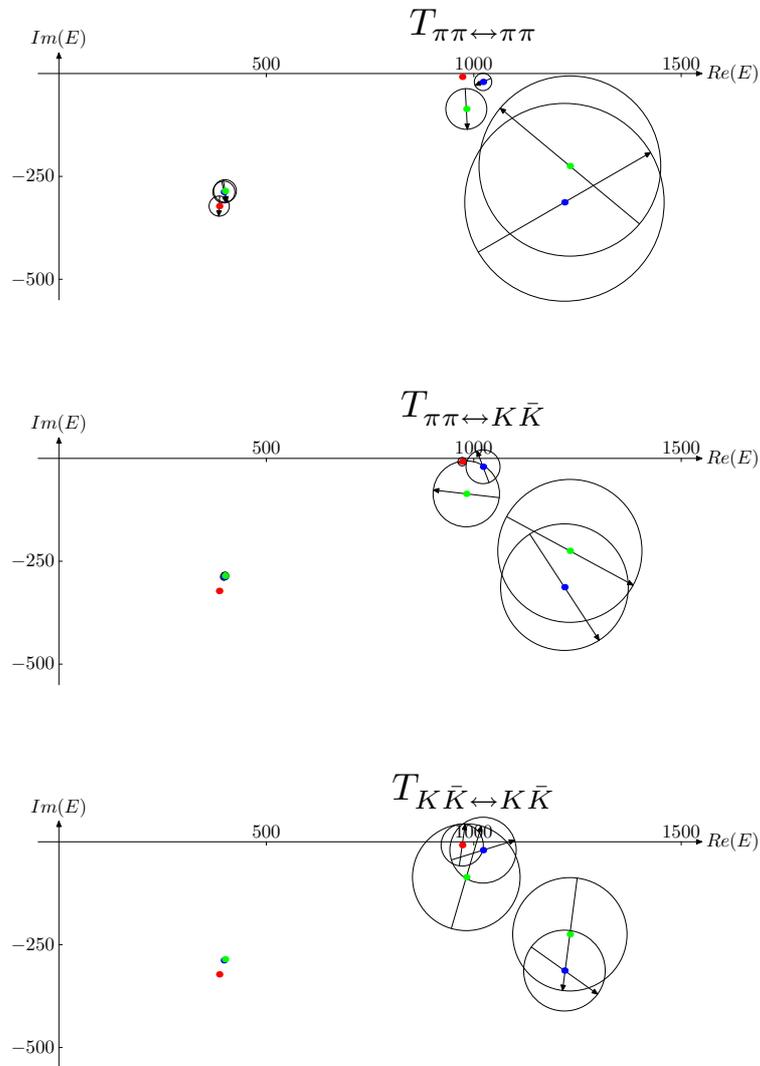


Abbildung 2.6: Polpositionen und Residuen der T -Matrix für die Reaktionen $\pi\pi \leftrightarrow \pi\pi$, $\pi\pi \leftrightarrow K\bar{K}$ und $K\bar{K} \leftrightarrow K\bar{K}$. Alle Pole befinden sich auf den jeweiligen nichtphysikalischen Blättern. Die Kreise deuten den Absolutbetrag und die Pfeile die Phase des jeweiligen Residuums an. Das @1022-Modell ist blau, das @981-Modell grün und das @971-Modell rot.

Pol- name	@1022		@981		@971	
	Position in MeV	Residuum in GeV^2	Position in MeV	Residuum in GeV^2	Position in MeV	Residuum in GeV^2
$f_0(600)$	$398 \pm i288$	$-130 \mp i25$	$400 \pm i285$	$-135 \mp i22$	$382 \pm i331$	$-117 \mp i5$
$f_0(980)$	$1022 \pm i20$	$-43 \pm i96$	$981 \pm i86$	$-247 \mp i13$	$971 \pm i7$	$-6 \mp i8$
$f_0(1370)$	$1219 \pm i313$	$604 \mp i1039$	$1232 \pm i225$	$703 \mp i839$	—	—

Tabelle 2.4: Polpositionen und Residuen der verschiedenen Modelle. (Alle Pole befinden sich auf dem nichtphysikalischen Blatt)

	Lebensdauer ($\times 10^{-18}$ Sekunden)			
	Grundzust.	1. Anreg.	2. Anreg.	3. Anreg.
Reines $K\bar{K}$	3.1	24	81	191
Mischzustand	1.1	8.9	30	71

Tabelle 2.5: Lebensdauern von Kaonium für ein rein dynamisches $f_0(980)$ ($a_{K+K^-} = -(1.943 - 1.247i)M_K^{-1}$) und für ein wie im Jülicher Modell gemischtes $f_0(980)$ ($a_{K+K^-} = -(1.156 - 3.268i)M_K^{-1}$) zitiert nach [117]

MeV abgesenkt.) In Bezug auf Abbildung 2.7 wollen wir festhalten, dass unsere Parametrisierung auch im isovektoriellen Kanal akzeptabel ist, obwohl ein attraktives Potential bevorzugt zu sein scheint. Bevor wir den Abschnitt über das ursprüngliche Jülicher Modell schließen, wollen wir die in diesem Rahmen berechneten effektiven Reichweitenparameter $a_{I=0} = -(2.165 - 4.592i)M_K^{-1}$, $a_{I=1} = -(0.147 - 1.944i)M_K^{-1}$, $r_{I=0} = (0.151 - 0.404i)M_K^{-1}$ und $r_{I=1} = (0.151 - 0.404i)M_K^{-1}$ erwähnen. (M_K^{-1} bezeichnet hier die inverse Kaonen-Masse und das Vorzeichen von a ist in (3.31) festgelegt.) Eine interessante Beobachtung bezüglich dieser Vorhersagen kann man zum Beispiel machen, wenn man die aus ihnen resultierende Lebensdauer für Kaonium im Grundzustand und in seinen angeregten Zuständen betrachtet. Das im Jülicher Modell vorhergesagte $f_0(980)$ als Überlagerung eines $K\bar{K}$ -Moleküls und eines genuine Zustandes führt, verglichen mit einem rein molekularen $f_0(980)$, zu weit kürzeren Lebensdauern, wie man in Tabelle 2.5 sieht [117].

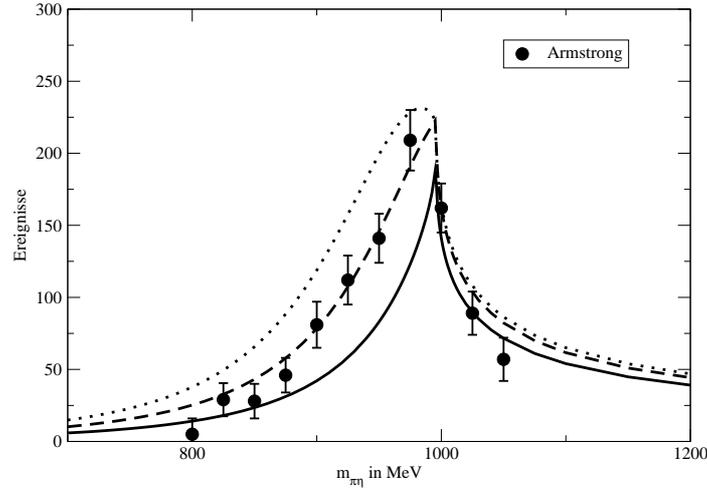


Abbildung 2.7: Das durch [20] gemessene $\pi^+\eta$ -Massenspektrum im Vergleich mit der Vorhersage unseres Modells (durchgezogene Linie). Die gestrichelte und gepunktete Linie zeigen Varianten des Modells mit attraktiver gestaltetem Potential.

2.3 $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ im erweiterten Jülicher Modell

Bevor wir uns der Pion-Produktion in der Reaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ zuwenden, sei angemerkt, dass die Erweiterung des Jülicher Mesonen-Austauschbildes um den πa_1 -Kanal die Observablen der $\pi\pi$ -Streuung kaum beeinflusst. Anders sieht es im Fall des $\rho\rho$ -Kanals aus. Betrachtet man diesen zunächst in der Form von zwei stabilen ρ -Mesonen, d.h. ignoriert man die Ankopplung des ρ an zwei Pionen und die damit verbundenen physikalischen Schnitte, so beobachtet man Strukturen ähnlich der Molekülbildung im $K\bar{K}$ -Kanal. Als erste Annäherung an die zu erwartende Physik, wenn die ρ -Mesonen des $\rho\rho$ -Kanals in je zwei Pionen zerfallen können und auf diese Weise $\pi\pi\rho$ - und 4π -Schnitte entstehen, betrachten wir einen $\rho\rho$ -Kanal bestehend aus einem stabilen Rho und einem Rho mit durch Pionen-Schleifen generierter Breite. Für diesen Fall sind bereits Techniken zur Beschreibung der Streuung durch eine dreidimensionale effektive Zweiteilchen-Streugleichung entwickelt worden. An dieser Stelle zitieren wir nur die entsprechende Streugleichung 2.26 und verweisen für eine Herleitung auf die Arbeiten [1, 8, 98]

$$\langle q'|T(s)|q\rangle = \langle q'|B(s)|q\rangle + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \langle q'|B(s)|p\rangle \mathcal{D}(\sigma_p) \langle p|T(s)|q\rangle \quad (2.26)$$

$$\mathcal{D}(\sigma_p) = \frac{1}{\sigma_p - m_{0\rho}^2 - \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3 \omega_{p'}} \frac{f^2}{(\sigma_p - 4\omega_{p'}^2)}} \quad (2.27)$$

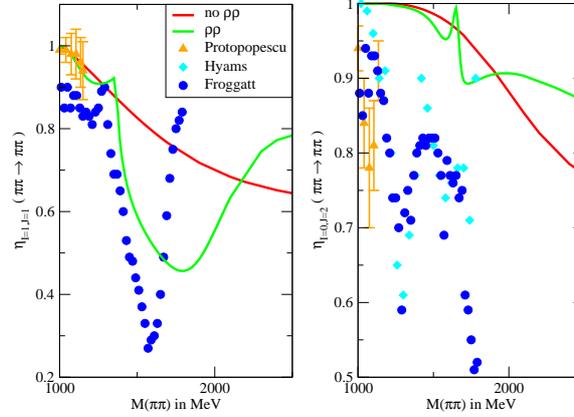


Abbildung 2.8: Auswirkungen eines $\rho_{\Gamma=0\text{MeV}}\rho_{\Gamma=149\text{MeV}}$ -Kanals auf die Inelastizitäten der $\pi\pi$ -Streuung in den Kanälen ($I = 1, J = 1$) und ($I = 0, J = 2$). Die rote Linie entspricht der Rechnung ohne $\rho\rho$ -Kanal, die grüne Linie beinhaltet ihn. Die experimentellen Daten stammen von Protopopescu [150], Hyams [94] und Froggatt [71, 72].

Hierbei steht B für das nun nicht mehr reelle Potential und σ für das invariante Massenquadrat des ρ bzw. des entsprechenden $\pi\pi$ -Systems. Für eine Erläuterung der Vertexfunktion f im Selbstenergieterm sei auf das Lee-Modell in Anhang C.4 verwiesen. Wie erwartet verwaschen die Strukturen und die Schwellenenergie sinkt von $2m_\rho = 1542$ MeV auf $2m_\pi + m_\rho = 1041$ MeV. In Abbildung 2.8 zeigen wir dies exemplarisch. Man erkennt, wie sich im isovektoriellen Vektorkanal die Übereinstimmung mit den Daten bis zur $\omega\omega$ -Schwelle (≈ 1565 MeV) hin verbessert. Oberhalb dieser Schwelle geht die Inelastizität nicht mehr schnell genug zurück. Unser Modell bietet jedoch für den Tensorchannel keine Verbesserung. Wir nehmen dies zum Anlass, bei unseren Betrachtungen der peripheren Reaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ nicht das rechenzeitintensive Modell mit $\rho\rho$ -Kanal Ankopplung zu verwenden, um die $\pi\pi$ -Endzustandswechselwirkung zu modellieren. Stattdessen parametrisieren wir alle schweren skalaren isoskalaren Resonanzen und die 4π -Zustände in unserem Modell durch effektive Resonanzen $f_0(1370)$ und $f_0(1500)$, die wir an die $\pi\pi$ -, $K\bar{K}$ -, $\pi\eta$ -, $a_1\pi$ -Kanäle ankoppeln. Die Parameter hierfür lauten $g_{f_0(1370)K\bar{K}} = 0.551$, $g_{f_0(1370)a_1\pi} = 0.268$ und $g_{f_0(1500)\pi\pi} = g_{f_0(1500)K\bar{K}} = 0.188$.

Bevor wir die Pion-Produktion modellieren, wollen wir kurz die experimentellen Ergebnisse zusammenfassen, die eine Untersuchung im Rahmen eines Modells mit dynamisch generierten Resonanzen interessant erscheinen lassen. In verschiedenen Ex-

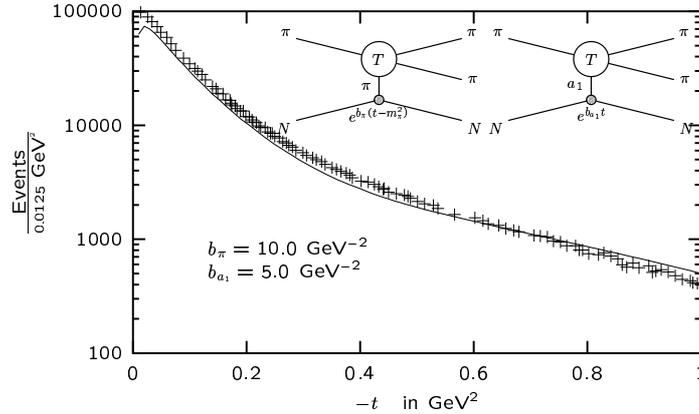


Abbildung 2.9: Die Ereigniszahl der $\pi^0\pi^0$ -Produktion ist als Funktion des Quadrates t des Impulsübertrages auf das Nukleon aufgetragen. Diese Daten werden zur Anpassung der Steigungsfaktoren b herangezogen. Die durchgezogene Linie zeigt die Berechnung im Mesonen-Austauschmodell unter Beachtung der Meson-Meson Wechselwirkung im Ausgangskanal wie durch die Feynman-Diagramme im Einschub erläutert. Die Kreuze zeigen die BNL-E852 Daten [88].

perimenten wurde die Abhängigkeit der Pion-Produktion in $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ von dem Impulsübertrag t auf das Nukleon vermessen. (z.B. das BNL E852 Experiment bei 18.3 GeV Strahlenergie [88] und GAMS Experimente bei 38 GeV [10] und 100 GeV [12] Strahlenergie.) Es wurde beobachtet, dass die Struktur der S -Wellenamplitude sich stark mit dem Impulsübertrag auf das Nukleon ändert. Dies kann man zum Beispiel in Abbildung 2.10 erkennen. Besonderes Interesse rief die Struktur um 1 GeV hervor, die bei niedrigen Impulsüberträgen $-t < 0.1 \text{ GeV}^2$ als scharfes Minimum zu erkennen ist, während sie sich bei großen Impulsüberträgen $-t > 0.4 \text{ GeV}^2$ als Maximum zeigt. Mehrere Arbeiten haben dieses Verhalten als Argument gegen eine $K\bar{K}$ -Struktur im $f_0(980)$ angeführt [17, 19, 111, 112]. Wir wollen nun untersuchen, ob ein solches Verhalten mit dem Jülicher Modell vereinbar ist, welches das $f_0(980)$ zum größten Teil als $K\bar{K}$ -Molekül darstellt. In unserer Modellierung der Produktionsreaktion $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ machen wir uns zunutze, dass bei den verwendeten ultrarelativistischen Strahlenergien die Reaktion peripher verläuft und wir somit nach der Produktion die Wechselwirkung der Mesonen mit dem Nukleon vernachlässigen dürfen aber die Endzustandswechselwirkung der auslaufenden Mesonen betrachten müssen. Unsere Parametrisierung der Produktionsmechanismen ist diagrammatisch im Einschub in Abbildung 2.9 zu sehen. Zur Auswahl der Reaktionsmechanismen ist zu sagen, dass nur Isovektor-Mesonen als Urheber der Ladungsaustauschreaktion in Frage kommen. Das ρ kann wegen seiner G -Parität nicht beitragen und somit kommen nur das Pion und das a_1 als t -Kanal-Austauschteilchen mit Parität $P = (-1)^{(J+1)}$ in Frage und

nicht das a_2 , welches die Quantenzahlen $J^P = 2^+$ besitzt. Die Wichtigkeit des a_1 als Austauscheteilchen in peripheren πN -Reaktionen ist allgemein akzeptiert [7, 105]. Weil die Reaktion bei hohen Strahlenergien vermessen wurde, werden wir den initialen Pion- bzw. a_1 -Austausch durch die entsprechenden Regge-Trajektorien beschreiben. Da in der ultrarelativistischen Pionen-Produktion die Wirkungsquerschnitte mit dem Impulsübertrag t exponentiell abfallen, werden wir wie in den meisten Datenanalysen die Produktionsvertices mit sogenannten Steigungsfaktoren $e^{b_\pi(t-m_\pi^2)}$ versehen. Die BNL Daten verlangen zwei unterschiedliche Steigungsfaktoren, die wir als effektive Formfaktoren des $p\pi\pi$ - und des pna_1 -Vertex auffassen. Wie man aus Abbildung 2.9 erkennen kann, reproduziert eine Wahl mit $b_\pi = 10 \text{ GeV}^{-2}$ und $b_{a_1} = 5 \text{ GeV}^{-2}$ die experimentellen Steigungen bis $-t = 2 \text{ GeV}^2$. Die vollständige t -Abhängigkeit ist durch (2.28) gegeben.

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial m_{\pi\pi} \partial t} = A_\pi \frac{-t}{(t - m_\pi^2)^2} e^{b_\pi(t-m_\pi^2)} |T_{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}, t)|^2 + A_{a_1} (1 + tC)^2 e^{b_{a_1} t} |T_{a_1\pi \rightarrow \pi\pi}(m_{\pi\pi}, t)|^2 \quad (2.28)$$

Hierbei ist zu beachten, dass A_π und A_{a_1} –wie in Anhang E beschrieben– nicht konstant sind und dass aufgrund der Helizitätsstruktur die Absolutquadrate addiert werden und nicht die Amplituden. C ist in dieser Formel als freier Parameter zu verstehen, den wir in Übereinstimmung mit [7] durch $C = -4.4 \text{ GeV}^{-2}$ festlegen. Ferner haben wir den Steigungsfaktor für das a_1 wie in [7] ohne den konstanten Faktor $e^{-b_{a_1} m_{a_1}^2}$ formuliert. Es ist anzumerken, dass unsere Formfaktoren, die wir identisch im isoskalaren und isotensoriellen Kanal verwenden, in etwa mit der Wahl von Achasov et al. [7] für ihre isoskalaren Formfaktoren übereinstimmen ($b_\pi^{J=0} = 9.4 \text{ GeV}^{-2}$, $b_{a_1}^{J=0} = 5.4 \text{ GeV}^{-2}$).

In Abbildung 2.10 vergleichen wir unser Modell mit den experimentellen Daten für den S -Wellenanteil der Pionen-Produktion. Im oberen Teil der Abbildung wurden die Daten über ein Impulsübertrag von $0.01 < -t < 0.1 \text{ GeV}^2$ integriert. Man erkennt eine breite Verteilung der Produktion von der Schwelle bis ca. 1.5 GeV , die von einem scharfen Minimum bei einem GeV unterbrochen wird. Unser mikroskopisches Modell reproduziert dieses Verhalten wie folgt. Bei den niedrigen Impulsüberträgen des oberen Teils in Abbildung 2.10 dominiert der initiale Pion-Austausch das Spektrum. Da die Phase der S -Welle bis 1 GeV linear auf ca. 100° angewachsen ist, ist die entsprechende Partialwellenamplitude im Bereich um $m_{\pi\pi} = 980 \text{ MeV}$ negativ, was eine destruktive Interferenz mit der Amplitude, die das $f_0(980)$ beschreibt, bedingt, wodurch das beobachtete Minimum entsteht. Bei noch höheren Massen zeigt das $f_0(1500)$ ein ähnliches Verhalten. Bei hohen Impulsüberträgen hingegen ist das Minimum verschwunden und an seiner Stelle ist eine Spitze bei einem GeV zu beobachten. In

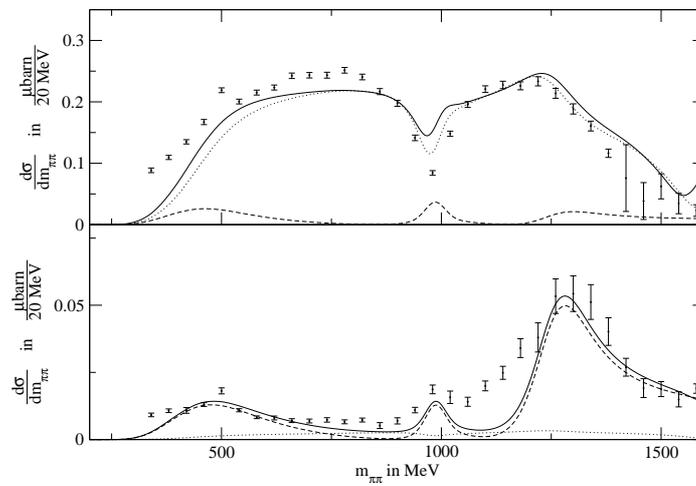


Abbildung 2.10: Der S -Wellenbeitrag zum Gesamtwirkungsquerschnitt der Pionen-Produktion ist als Funktion der invarianten $\pi\pi$ -Masse aufgetragen. Durchgezogene Linie: Das Mesonen-Austausch-Modell; Gepunktete Linie: Beitrag aus der Emission eines Pions am Nukleonenvertex; Gestrichelte Linie: Beitrag aus der Emission eines a_1 am Nukleonenvertex. Die Daten stammen aus [88] und wurden nach den Maßgaben von [106] skaliert. Im oberen Teil wurde der S -Wellenbeitrag zur Produktion über die Impulsüberträge $0.01 < -t < 0.1 \text{ GeV}^2$ gemittelt, im unteren Teil über $0.4 < -t < 1.5 \text{ GeV}^2$.

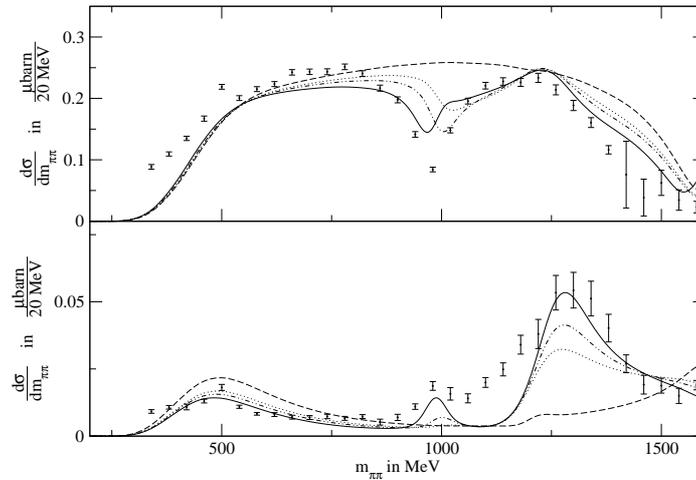


Abbildung 2.11: Darstellung des S -Wellenbeitrags zur Pionen-Produktion als Funktion der invarianten $\pi\pi$ -Masse. Die Übergangspotentiale, die an den $K\bar{K}$ -Kanal via t -Kanal-Mesonaustausch koppeln, wurden mit einem Skalierungsfaktor λ multipliziert. Lang gestrichelt: $\lambda = 0.0$; Gepunktet: $\lambda = 0.75$; Strichpunktirt: $\lambda = 0.88$; Durchgezogen $\lambda = 1.0$. Die gezeigten Daten stammen aus [88]. Der obere Graph entspricht kleinen und der untere Graph großen Impulsüberträgen (siehe Abb. 2.10).

diesem kinematischen Bereich (untere Hälfte von Abbildung 2.10) ist die Produktion via Pion-Emission am Nukleon im Rahmen unseres Modells zu vernachlässigen und die Produktion verläuft über die initiale Produktion eines a_1 , was durch die Wahl der Steigungsfaktoren bedingt ist. Da in diesem Fall der resonante Beitrag in Phase mit dem nichtresonanten Hintergrund ist, beobachtet man nun ein Maximum. Es sei erwähnt, dass im betrachteten kinematischen Bereich die Produktion durch ein Pion dominant den Spin des Nukleons dreht, während die Produktion durch ein a_1 den Spin des Nukleons erhält. Aus diesem Grund können wir Interferenzeffekte zwischen den beiden Prozessen vernachlässigen.

Wir möchten betonen, dass wir im Gegensatz zu empirischen Analysen, die einen flachen Untergrund annehmen, zu welchem sie eine parametrisierte Resonanz addieren [7,19], den Hintergrund konsistent innerhalb unseres Modells bestimmen. In Abbildung 2.11 wollen wir dies demonstrieren, indem wir die t -Kanal-Austauschdiagramme des $K\bar{K}$ -Kanals, die sowohl für den Hintergrund als auch für die Molekülbildung verantwortlich sind, mit einem Faktor $\lambda \in [0; 1]$ skalieren. Im Falle von $\lambda = 0$ kann der $K\bar{K}$ -Kanal also nur über s -Kanal-Graphen wechselwirken. In diesem Fall sieht man für kleine Impulsüberträge (oberer Teil von Abbildung 2.11) nur noch eine breite Verteilung von der Schwelle bis 1.5 GeV. Schalten wir nun die Wechselwirkung wieder

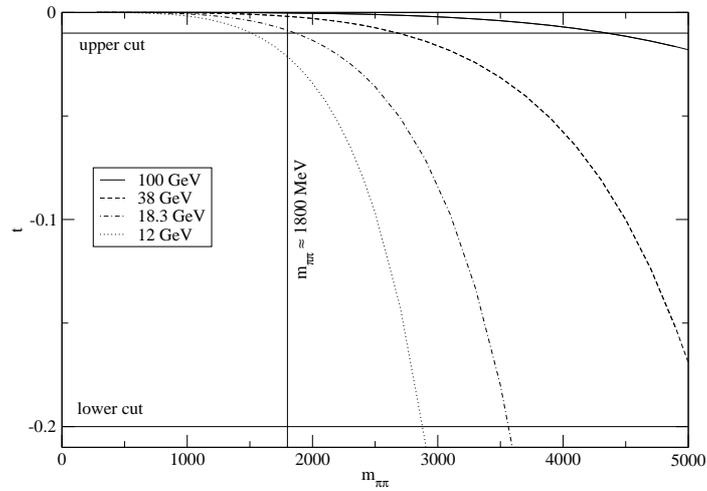


Abbildung 2.12: Die obere kinematische Grenze von t ist in Abhängigkeit der produzierten invarianten Masse des Pion-Systems $m_{\pi\pi}$ für vier Strahlenergien dargestellt. Diese Energien entsprechen: GAMS 100 GeV, GAMS 38 GeV, BNL 18.3 GeV und KEK 12 GeV. Zum Vergleich sind die obere und die untere Grenze gezeigt, die bei der Analyse im Fall kleiner Impulsüberträge gewählt wurden.

ein, d.h. λ geht gegen 1, so entwickelt sich das Minimum bei einem GeV. Im gleichen Maße entsteht für große Impulsüberträge (unterer Teil von Abbildung 2.11) das Maximum bei einem GeV. In Abbildung 2.11 erkennt man ferner, dass die Betonung bei invarianten Massen um die 500 MeV ohne Ankopplung des $K\bar{K}$ -Kanals zu stark ausfällt. Mit zunehmender Ankopplung λ wird die relative Stärke der Strukturen bei 500 MeV und bei 980 MeV jedoch gut reproduziert. Wir möchten anmerken, dass dieses Verhalten auf natürliche Weise den $\pi\pi$ -Phasen entspringt, wenn die Produktion durch Regge-Amplituden parametrisiert wird. In unserem Fall ist der $(1+tC)^2$ Anteil in (2.28), der schon in frühen Analysen von $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ Streudaten [108] zu finden ist, für das Niederenergieverhalten bei großen Impulsüberträgen verantwortlich.

An dieser Stelle wäre ein Vergleich mit Experimenten bei anderen Strahlenergien und mit anderer Einteilung der Impulsübertragsintervalle interessant. In unserem Fall sind diese jedoch wenig aufschlussreich. Um diese Behauptung zu erklären, schauen wir uns zunächst an, welchen Einfluss die Strahlenergie auf die Masseverteilung hat. Zum einen bewirkt sie einen Skalierungsfaktor $\frac{1}{q_{\text{Strahl}}^2 s_{\text{ges}}}$, den wir nicht beobachten können, da die Daten nicht normiert sind, zum anderen gibt sie die kinematischen Grenzen für die t -Integration vor. Dies ist in Abbildung 2.12 zusammen mit den durch die Analyse für kleine Impulsüberträge gewählten Grenzen ($0.01 < -t < 0.2 \text{ GeV}^2$) dargestellt. Man erkennt für invariante Zweipion-Massen unter 1.8 GeV, dass für die

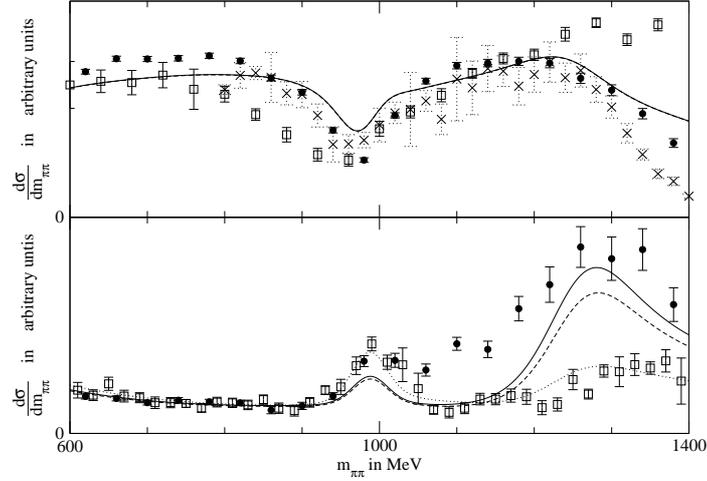


Abbildung 2.13: Der S -Wellenbeitrag zur Pionproduktion ist als Funktion der invarianten Zweipion-Masse $m_{\pi\pi}$ aufgetragen. Die obere Hälfte zeigt unsere Vorhersage für $0.01 < -t < 0.20 \text{ GeV}^2$ zusammen mit experimentellen Daten, die bei verschiedenen Strahlenergien gewonnen wurden. Kreuze: 100 GeV GAMS [12]; Vierecke: 38 GeV GAMS [10]; Kreise: 18.3 GeV BNL [88]. Das untere Panel vergleicht zwei unterschiedliche t Intervalle und die entsprechenden Vorhersagen: Kreise und durchgezogene Linie: $0.3 < -t < 1.5 \text{ GeV}^2$ [88]. Vierecke und unterbrochene Linien: $0.3 < -t < 1.0 \text{ GeV}^2$ [10]. Die gestrichelte Linie zeigt unser Modell, die gepunktete Linie eine Berechnung mit an die GAMS Daten angepasste Kopplung des $f_0(1370)$.

Strahlenergien, zu denen experimentelle Daten verfügbar sind, die Grenzen durch die Schnitte in der Analyse beschränkt sind und nicht durch die Kinematik. Dies gilt insbesondere, da wir die bei 12 GeV gemessenen KEK Daten nicht betrachten, weil sie nur als Extrapolation zum Pionpol verfügbar sind. All dies bedeutet, dass für $m_{\pi\pi} < 1.8 \text{ GeV}$ die Daten bis auf Skalierung identisch sein sollten. Wir betrachten der Gültigkeitsgrenze unseres Modells entsprechend nur invariante Massen bis 1.5 GeV, was bedeutet, dass in dem von uns betrachteten Bereich die Messungen bei unterschiedlichen Strahlenergien gleiches Verhalten zeigen sollten. Unter diesem Gesichtspunkt vergleichen wir in Abbildung 2.13 die bei 100 GeV und 38 GeV Strahlenergie gewonnenen GAMS Daten mit den bei 18.3 GeV Strahlenergie gewonnenen BNL Daten. Das obere Panel zeigt die BNL Daten (ausgefüllte Kreise) zusammen mit den GAMS Daten bei 100 GeV Strahlenergie (Kreuze) und mit den GAMS Daten bei 38 GeV Strahlenergie (offene Vierecke) jeweils integriert über Impulsüberträge $0.01 < -t < 0.20 \text{ GeV}^2$. Wir sehen, dass die Daten bis auf Skalierung gut übereinstimmen. Nur die GAMS Daten bei 38 GeV Strahlenergie weichen in ihrer Form in

den Regionen $m_{\pi\pi} \approx 0.8 - 1.0$ GeV und $m_{\pi\pi} > 1.2$ GeV leicht ab. Für den Fall großer Impulsüberträge ist ein Vergleich nicht so leicht zu bewerkstelligen, da BNL nur eine t -Einteilung $0.4 < -t < 1.5$ GeV² anführt, während GAMS ein t -Intervall $0.3 < -t < 1.0$ GeV² angibt. Nichtsdestotrotz erscheint ein Vergleich lohnend, da ein Blick auf unterschiedliche Mittelungsintervalle auch einen Blick auf eine unterschiedliche Gewichtung der Produktionsoperatoren bedeutet. Um zumindest eine gemeinsame obere Grenze in t zu haben, vereinigen wir im Fall der BNL Daten zwei t -Intervalle, um ein Impulsübertragsintervall $0.3 < -t < 1.5$ GeV² zu erhalten, welches wir dann gemeinsam mit den GAMS Daten für $0.3 < -t < 1.0$ GeV² und mit unseren entsprechenden Rechnungen zeigen. Mit der gemeinsamen oberen t -Grenze und dem Wissen, dass die Produktion hauptsächlich bei niedrigen $|t|$ stattfindet, können wir diesen Vergleich rechtfertigen. In der unteren Hälfte von Abbildung 2.13 erkennt man, dass die so gewonnenen Daten bis ca. 1.05 GeV übereinstimmen, von wo ab sie stark voneinander abweichen. Es wäre denkbar, diesen Unterschied der Produktion im Intervall $1.0 < -t < 1.5$ GeV² zuzuschreiben und das $f_0(1370)$ als ein kompaktes Objekt aufzufassen, welches auch noch bei hohen Impulsüberträgen produziert wird. Unsere Berechnungen deuten jedoch auf ein anderes Verhalten: Die BNL Daten werden durch unsere Rechnung recht gut beschrieben (Kreis im Vergleich zur durchgezogenen Linie), aber unser Modell sagt eine viel zu große Produktion oberhalb von 1.05 GeV für die GAMS Daten vorher, wie man an der gestrichelten Linie im Vergleich zu den Vierecken erkennen kann. Im Folgenden wollen wir herausstellen, dass die BNL Daten und die GAMS Daten inkonsistent sind. Da wir nicht beurteilen können, welche Daten korrekter sind, führen wir eine zweite Anpassung (gepunktete Linie) ein, die den GAMS Daten entspricht. Dies geschieht, indem wir die Ankopplung des $f_0(1370)$ an den $a_1\pi$ -Kanal abschwächen, wodurch das Verhalten bei kleinem Impulsübertrag nicht verändert wird. Diese zweite Anpassung stimmt gut mit den GAMS Daten überein. Dies gilt auch in anderen t -Intervallen (Abbildung 2.14). Damit ist klar, dass die Eigenschaften unseres $f_0(980)$ inklusive seines großen Molekülanteils mit beiden Datensätzen verträglich sind. Die Eigenschaften des $f_0(1370)$ hingegen sind zu hinterfragen. Um zu der Schlussfolgerung zu gelangen, dass die GAMS und BNL Daten inkonsistent sind, schauen wir uns das höchste t -Intervall an, für welches Daten sowohl von BNL als auch von GAMS existieren ($0.3 < -t < 0.4$ GeV²). Wir zeigen diese Daten in der oberen Hälfte von Abbildung 2.14, wobei wir die GAMS Daten aus der Differenz zweier Datensätze in [10] generiert haben. Die assoziierten Fehler haben wir um einen Faktor 4 herunterskaliert, sodass sie in etwa der Bandbreite der Daten entsprechen, die wir in diesem Fall für ein glaubwürdiges Fehlermaß halten. Auch hier sieht man schon die Abweichung oberhalb von 1.05 GeV, obwohl nur ein Skalierungsfaktor die beiden Sätze unterscheiden sollte. Man erkennt, dass das dem jeweiligen Datensatz angepasste Modell die entsprechende t -Abhängigkeit gut reprodu-

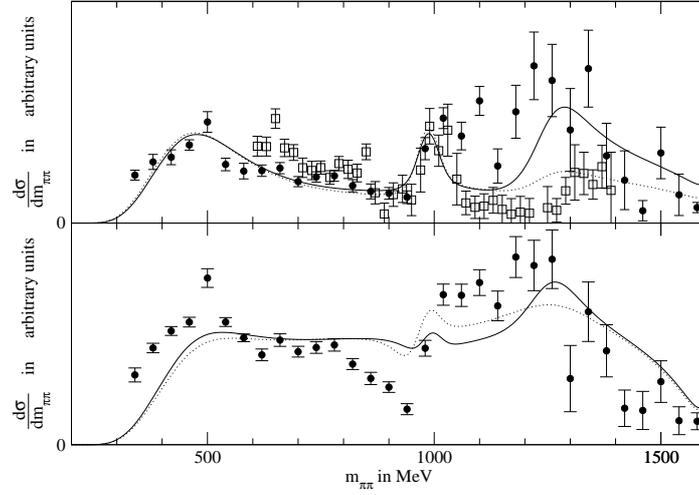


Abbildung 2.14: Der S -Wellenbeitrag zur Pionproduktion ist als Funktion der invarianten Zweipion-Masse $m_{\pi\pi}$ aufgetragen. In beiden Panelen sind BNL Daten [88] mit Kreisen und GAMS Daten [10] mit Vierecken gekennzeichnet. Die GAMS Daten wurden aus der Differenz von zwei Datensätzen bestimmt und die gezeigten Fehler sind um einen Faktor 4 kleiner als die berechneten. Die durchgezogenen Linien entsprechen dem an die BNL Daten angepassten Modell, die gepunkteten Linien dem an die GAMS Daten angepassten Modell. Die obere Hälfte zeigt das Impulsübertragsintervall $0.3 < -t < 0.4 \text{ GeV}^2$ und die untere $0.2 < -t < 0.4 \text{ GeV}^2$ (Hierzu gibt es keine Daten von GAMS).

zieren kann, aber wir haben keine Handhabe ein Modell zu bevorzugen. Ein Vergleich unseres Modells mit Daten bei mittleren Impulsüberträgen ist problematisch, da unsere Vorhersagen in diesem Bereich sehr stark von den Steigungsfaktoren für π - und a_1 -Produktion abhängen, die wir nicht entsprechend genau an der $\frac{d\sigma}{dt}$ -Verteilung festmachen können. Das Problem hat seinen Ursprung in der starken Abhängigkeit, den der Punkt gleicher Produktionsstärke via π und a_1 in Bezug auf die Steigungsparameter hat. Eine Anpassung in diesem Impulsübertragsbereich entspricht folglich einer Feinabstimmung der Steigungsparameter. Für ein mikroskopisches Modell wie unseres ist eine solche Feinabstimmung unangebracht. Nichtsdestotrotz zeigen wir unsere Ergebnisse für das Intervall $0.2 < -t < 0.4 \text{ GeV}^2$ in der unteren Hälfte von Abbildung 2.14, um zu demonstrieren, dass auch hier eine starke Abhängigkeit unserer Vorhersage von den Parametern des $f_0(1370)$ besteht. Eingedenk der Diskrepanz, die auch hier zwischen den Daten zu erwarten wäre, stellen wir fest, dass unser Modell die Daten noch akzeptabel reproduziert.

Abschließend wollen wir die Vorhersagen unseres Modells für die Kaonenproduktion

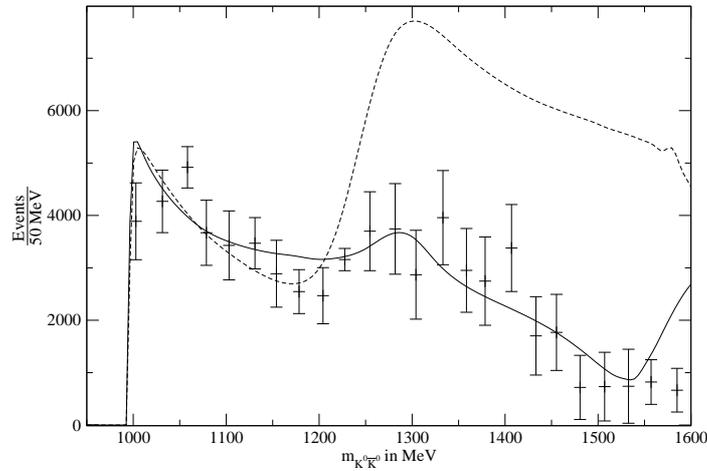


Abbildung 2.15: Beiträge der S -Welle zu der Produktion $\pi^- p \rightarrow K^0 \bar{K}^0 n$ als Funktion der invarianten $K\bar{K}$ -Masse. Gestrichelte Linie: Unser Modell, das wegen fehlender 4π -Zerfälle die Produktion überschätzt. Durchgezogene Linie: Modell, das 4π -Zerfälle durch einen $\sigma\sigma$ -Kanal nachbildet. Die Daten stammen aus [65], wobei wir die Masseneinteilung in 50 MeV Schritten nicht zeigen.

in der Reaktion $\pi^- p \rightarrow K^0 \bar{K}^0 n$ mit den in [65] veröffentlichten Daten vergleichen. Unser Modell reproduziert die Daten nur bis etwa 1.2 GeV. Darüber hinaus wird die Produktion neutraler Kaonen stark überschätzt (gestrichelte Linie in Abbildung 2.15). Diese Überschätzung kann man verstehen, wenn man unsere effektiven Kopplungen an die $f_0(1370)$ und die $f_0(1500)$ Resonanz mit den entsprechenden Zerfallskonstanten aus [64] vergleicht. Wir haben starke Kopplungen an den $K\bar{K}$ -Kanal benutzt, um Zerfälle zu simulieren, die in Wirklichkeit in 4π -Kanäle gehen. Die durchgezogene Linie in Abbildung 2.15 zeigt ein Modell, in welchem dies dadurch korrigiert wurde, indem wir einen $\sigma\sigma$ -Kanal eingefügt haben, der die entsprechenden 4π -Zerfälle absorbiert. In diesem Modell erhalten wir auch oberhalb von 1200 MeV eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

2.4 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt haben wir ein minimales Modell der $\pi\pi-K\bar{K}-\pi\eta$ -Streuung im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austauschformalismus entwickelt, das geeignet ist, um in einem Produktionsprozess die Entzustandswechselwirkungen eines auslaufenden Mesonenpaares für invariante Massen bis zu 1.2 GeV zu beschreiben. Die Eigenschaften der skalaren Resonanzen innerhalb dieses Modells wurden beschrieben. Das

Jülicher Mesonen-Austausch-Modell wurde erfolgreich um den $a_1\pi$ -Kanal erweitert, sodass ein konsistentes Modell für die periphere Pionen-Produktion in $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0n$ formuliert werden konnte, welches auf einer initialen Produktion via Pion- und a_1 - Emission am Nukleon beruht. Die initialen Produktionen werden hierbei durch Regge-Amplituden parametrisiert. Im Rahmen dieses Modells ist es möglich, die Impulsübertragsabhängigkeit der durch das $f_0(980)$ hervorgerufenen Struktur im invarianten Massenspektrum der Pionen auf natürliche Weise zu erklären. Bei der Ankopplung des $\rho\rho$ -Kanals ist anzumerken, dass einer erfolgreichen Modellierung in diesem Fall die Beachtung der 4π -Schnitte und die Beachtung z.B. des nahe gelegenen $\omega\omega$ -Kanals im Wege standen. Deshalb verzichten wir in Modellierungen von Produktionsamplituden weiterhin auf den $\rho\rho$ -Kanal und bevorzugen stattdessen eine phänomenologische Parametrisierung durch Resonanzen.

Kapitel 3

Das $D_{sJ}^*(2317)$ im Rahmen der KD - πD_s^+ - ηD_s^+ Streuung

3.1 Einordnung der experimentellen Beobachtung

In 2003 veröffentlichte die BaBar Kollaboration in [21] ihre Beobachtung einer schmalen Resonanz (D_{sJ}^*) bei 2317 MeV, die nach $D_s^+\pi^0$ zerfällt, sowie des ladungskonjugierten Zustandes. Diese Beobachtung wurde in mehreren Experimenten bestätigt. In Tabelle 3.1 sind die Ergebnisse einiger Experimente angeführt. Da der Zerfallskanal $D_s\pi$ Isospin $I = 1$ hat –das D_s ist ein Isoskalar– lag es nahe, auch nach den möglichen Isospinpartnern des Zustands in $D_s^+\pi^+$ und in $D_s^+\pi^-$ zu suchen, aber weder CDF [160] noch BaBar [22] hat in diesen Kanälen eine Resonanz beobachtet, was zu der Annahme führt, dass das $D_{sJ}^*(2317)$ Isospin Null besitzt. Bevor wir eine kurze Zusammenfassung der in der Literatur diskutierten Erklärungen des beobachteten Zustandes geben, wollen wir kurz die von den verschiedenen Experimenten gemessenen $D_s^+\pi^0$ Massenspektren betrachten. In Abbildung 3.1 sind diese zusammengestellt. Wenn man beachtet, dass die Form der Resonanz bei allen Experimenten der Antwortfunktion des jeweiligen Detektors für eine unendlich schmale Resonanz entspricht, so sind die Messungen in guter Übereinstimmung. Aus diesem Grund werden wir unsere Ergebnisse nur mit den neuen noch vorläufigen Daten der BaBar Kollaboration aus [22] vergleichen. Diese bieten neben der besten Statistik auch eine Abschätzung für den Hintergrund unter der $D_{sJ}^*(2317)$ -Resonanz, der aus dem $D_{sJ}(2460)^+ \rightarrow D_s^+\pi\gamma$ Zerfall stammt.

Da wir nun die experimentelle Situation des $D_{sJ}^*(2317)$ beschrieben haben, wollen wir kurz anreißen, was an diesem Zustand zunächst überraschte. Schaut man sich die Vorhersagen von Konstituenten-Quark-Modellen für die Eigenschaften des beobachte-

Kollaboration	$m(D_{sJ}^*) \pm \text{stat.} \pm \text{syst.}$	$\Gamma(D_{sJ}^*)$	Datenumfang
BaBar [21]	$2316.8 \pm 0.4 \pm 3.0 \text{ MeV}/c^2$	$\Gamma < 10 \text{ MeV}/c^2$	91 fb^{-1}
[22]	$2318.9 \pm 0.3 \pm 0.9 \text{ MeV}/c^2$	—	125 fb^{-1}
Cleo [33]	$2318.5 \pm 1.2 \pm 1.6 \text{ MeV}/c^2$	$\Gamma < 7 \text{ MeV}/c^2$	13.5 fb^{-1}
Belle [2]	$2317.2 \pm 0.5 \pm 0.9 \text{ MeV}/c^2$	$\Gamma = 7.6 \pm 0.5 \text{ MeV}/c^2$	87 fb^{-1}
FOCUS [170]	$2323.0 \pm 2.0 \text{ MeV}/c^2$	—	—

Tabelle 3.1: Experimentelle Beobachtungen des $D_{sJ}^*(2317)$. Zu der von der Belle Kollaboration angegebenen Breite sei angemerkt, dass diese konsistent mit der Detektorauflösung ist.

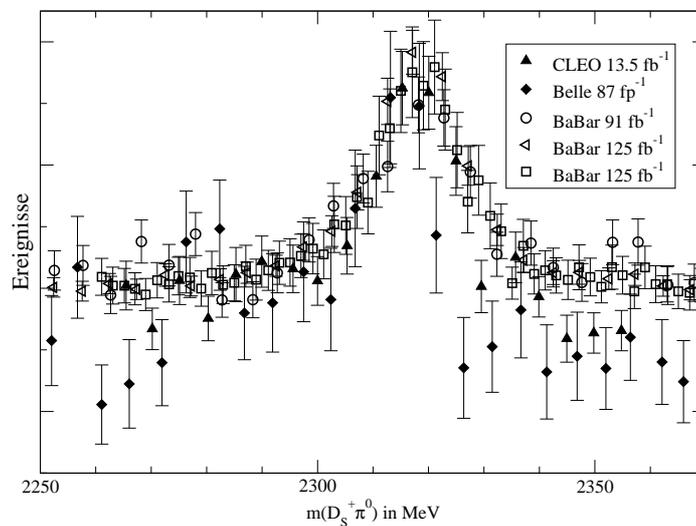


Abbildung 3.1: Vergleich der $D_s^+\pi^0$ -Massenspektren aus den Messungen von [33] (▲), [2] (◆), [21] (○), [22] (◁) und [22] (□). Die Form der Resonanz entspricht bei allen gezeigten Daten der Antwortfunktion des jeweiligen Detektors für eine Resonanz mit $\Gamma = 0$

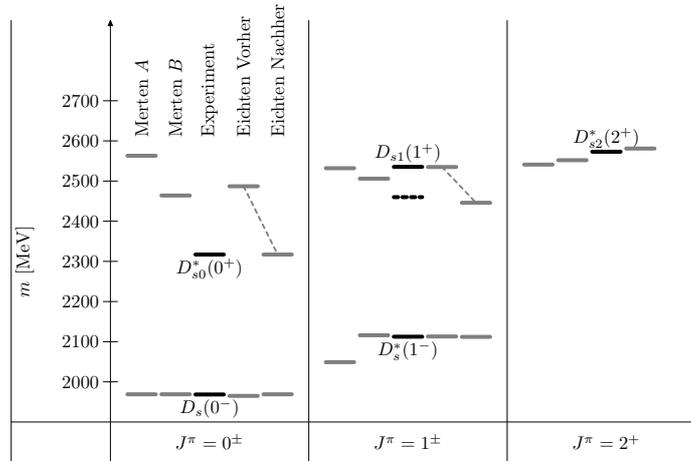


Abbildung 3.2: Vergleich der Resonanzpositionen mit Vorhersagen aus dem relativistischen Konstituenten-Quark-Modell von Merten et al. [133] und mit den Vorher-/Nachhersagen aus dem chiralen Dopplerszenario [27, 58].

ten Zustandes an, so liegt die vorhergesagte Masse weit über der DK -Schwelle sowie der beobachteten Masse. Wegen dieser hohen Masse erwartete man einen Zustand großer Breite, da der Isospin erlaubte Zerfall nach KD auch kinematisch erlaubt wäre. Solche Vorhersagen im Rahmen eines relativistischen Konstituenten-Quark-Modells [133] vergleichen wir in Abbildung 3.2 mit den Vorhersagen über chirale Dopplierzustände von [27, 58] und mit den experimentellen Beobachtungen. Man erkennt, dass das Konstituenten-Quark-Modell den niedrigsten $J^\pi = 0^+$ Zustand um die 2450 – 2580 MeV erwarten lässt. Dies ist mit dem jetzt entdeckten Zustand bei 2317 MeV nicht kompatibel. Der niedrigste vorhergesagte $J^\pi = 1^+$ Zustand reproduziert im Übrigen den niedrigsten zum Zeitpunkt der Veröffentlichung bekannten Zustand, aber nicht den kürzlich von CLEO beobachteten Zustand bei 2460 MeV [33], für den bis jetzt eine Zuordnung der Quantenzahlen $J^\pi = 1^+$ wahrscheinlich erscheint. Im Rahmen eines konventionellen $q\bar{q}$ -Schemas scheinen also die neuen Zustände schwer erklärbar zu sein. Gitterrechnungen konnten zu dieser Frage, ob das $D_{sJ}^*(2317)$ möglicherweise $q\bar{q}$ ist, bisher noch nicht beitragen. Es gibt sowohl Rechnungen, die diesen Zustand als $q\bar{q}$ darstellen [60], als auch solche, die dies ausschließen [26]. Jedoch schon vor der Entdeckung der neuen Zustände durch BaBar und Cleo machten zunächst M.A. Nowak et al. [136] und später auch M. Di Pierro und E. Eichten [58] eine auf der Vereinigung von chiralem Grenzwert und Isgur-Wise Grenzwert beruhende Vorhersage über die Existenz von $(0^+, 1^+)$ Partnerzuständen zu den Zuständen $(0^-, 1^-)$ des Konstituenten-Quark-Modells. Auch wenn die Vorhersagen, wie in Abbildung 3.2 zu sehen ist, anfangs oberhalb der neu entdeckten Zustände lagen, so

führt eine nachträgliche Verbesserung der Betrachtung doch zu einer ansehnlichen Übereinstimmung mit dem Experiment, wie man in derselben Abbildung sieht. Wir wollen kurz die Idee hinter dieser Vorhersage skizzieren, wobei wir den Ausführungen von M.A. Nowak [135] folgen. Betrachtet man die Strommassen der Quarks im \overline{MS} -Schema bei $\mu \approx 2$ GeV im Fall der leichten Quarks und bei $\mu = m_Q$ im Fall der schweren Quarks, also $(m_u, m_d, m_s) = (1.5 - 4.0, 4 - 8, 80 - 130$ MeV) sowie $(m_c, m_b, m_t) = (1.15 - 1.35, 4.1 - 4.4, 169 - 179$ GeV), so liegt es nahe, die Quarks in leichte Quarks mit Massen unter $\Lambda_{QCD} \approx 220$ MeV und in schwere Quarks zu unterteilen und die folgenden Grenzwerte

$$\begin{aligned} \frac{m_l}{\Lambda_{QCD}} &\rightarrow 0 \\ \frac{\Lambda_{QCD}}{m_h} &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

zu betrachten. Der Grenzwert der verschwindenden leichten Quarkmassen (m_l) ist der chirale Limes der als Grundlage der chiralen Störungstheorie intensiv studiert wurde. Der Grenzwert unendlich schwerer Quarkmassen für die schweren Quarks (m_h) erzeugt die aus der Schwere-Quarks-Effektiven-Feldtheorie (HQEFT) bekannte Symmetrie des schweren Quark (Heavy Quark Symmetry) und ist unter dem Namen des Isgur-Wise Limes [95, 161, 162] bekannt. In diesem Grenzfall stellt man fest, dass die Dynamik des schweren Quarks unabhängig von seinem Spin und seiner Masse wird. Insgesamt bedeuten diese Grenzwerte dann, dass für jeden Gesamtdrehimpuls des leichten Quarks ein Energie entartetes Quartett von Zuständen $J^\pi = (0^-, 1^-, 0^+, 1^+)$ existiert. Die endliche Masse des schweren Quarks bedingt jedoch, dass die Isgur-Wise Symmetrie gebrochen ist und sich zwei entartete Paare $J^\pi = (0^-, 1^-), (0^+, 1^+)$ ergeben. Diese Paare haben ihren Ursprung in der Forderung nach festgelegter Chiralität im leichten Sektor für das Meson aus leichtem und schwerem (Anti-)Quark. M. Nowak [135] formuliert diese J^π -Paare als

$$H^+ = \frac{1 + \not{v}}{2} (\gamma^\mu D_\mu^* + i\gamma_5 D) \quad H^- = \frac{1 + \not{v}}{2} (\gamma^\mu \gamma_5 \tilde{D}_\mu^* + i\tilde{D}), \quad (3.2)$$

wobei v die Vierergeschwindigkeit des schweren Quarks darstellt. Anstelle der D -Mesonen können im Rahmen dieser Gleichung auch andere physikalischen Teilchen behandelt werden, die einem qQ -Zustand ($q \in \{u, d, s\}, Q \in \{c, b, t\}$) entsprechen. Für diese Zustände leitet M. Nowak die Massenaufspaltung (3.3) her, indem er den m_h^0 Beitrag zur Masse des Leicht-Schwer-Systems in der Einschleifennäherung als das Diagramm aus Abbildung 3.3.b) identifiziert [135].

$$\begin{aligned} m_{H^\pm} \text{Tr} (H^\pm \bar{H}^\pm) &\propto \text{Tr} \left(\int_\epsilon^\Lambda \frac{d^4 Q}{(2\pi)^4} P_l \frac{\Sigma}{Q^2 - \Sigma^2} H^\pm P_h \frac{\not{v}}{v \cdot Q} \bar{H}^\pm \right) \\ \lim_{\frac{m_Q}{\Lambda} \rightarrow \infty} m_{H^\pm} \text{Tr} (H^\pm \bar{H}^\pm) &= \mp \Sigma_\chi \end{aligned} \quad (3.3)$$

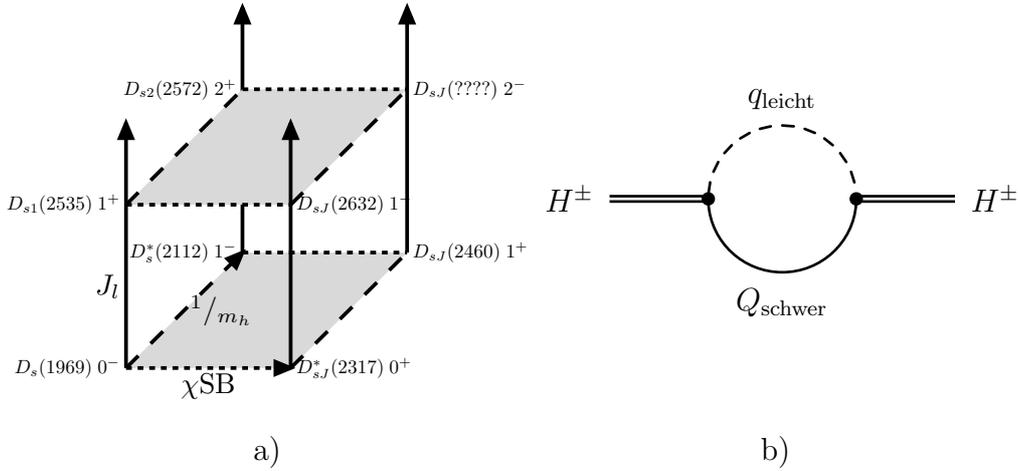


Abbildung 3.3: a) Darstellung zweier Quartette $J_l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ mit ihrer Aufspaltung nach Parität Σ_χ und nach Spin des schweren Quarks ($\frac{1}{m_h}$). Es sind jeweils experimentell beobachtete Resonanzen und die Quantenzahlen J^π für die Zustände angeführt. b) Bildliche Darstellung der zu erster Ordnung für die Massenaufspaltung zwischen den chiralen Partnern verantwortlichen Schleifenfunktion. (Siehe Gleichung (3.3)) Die Form der chiralen Zustände H^\pm findet sich in (3.2).

Hier steht die Spur für die Spurbildung im Flavour- und im Spinraum und P_l, P_h sind die Projektoren für die Propagatoren der leichten und schweren Quarks, wobei der Propagator $(\not{p} - m_h)^{-1}$ mittels $p = m_h v + Q$ entsprechend der Foldy-Wouthuysen Transformation [70] in $\not{p}/(v \cdot Q)$ überführt wurde. Ferner beschreibt Q den in der qQ -Schleife (Abb. 3.3.b)) umlaufenden Impuls, der durch den ultravioletten Abschneideparameter Λ und die infrarote Grenze $\epsilon \propto \Lambda^2/m_h$ begrenzt ist, sowie Σ die Konstituenten-Masse der leichten Quarks, die –wie zum Beispiel in [181] beschrieben– von der Propagation durch das nichttriviale Vakuum herrührt. Der springende Punkt für die Massenaufspaltung nach der Parität ist das Verhalten $H^\pm \not{v} = \mp H^\pm$, welches dafür sorgt, dass die Brechung der chiralen Symmetrie zu einer Aufhebung der Entartung der beiden Dubletts führt. Damit ergibt sich für jedes Paar qQ die in Abbildung 3.3.a) dargestellte Vielfalt von Zuständen. Hierbei ist besonders der von der SELEX Kollaboration gefundene Zustand $D_{sJ}^+(2632)$ [66] zu beachten, welcher genau die Lücke des erwarteten $J^\pi = 1^-$ Zustandes füllt.

Neben dem chiralen Dopplerszenario und der sehr ähnlichen $\tilde{U}(12)$ -Klassifikation von Ishida [96] bietet, wie im Fall der $f_0(980)$ Resonanz, auch die Meson-Meson Dynamik der angekoppelten Kanäle eine Erklärung für die beobachteten Resonanzen. Da wir in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels genau diese Möglichkeit untersuchen wollen, seien an dieser Stelle nur kurz verschiedene Ausprägungen dieses Erklärungs-

musters angeführt. So beschreiben Barnes et al. [28], Lipkin [121] und van Beveren et al. [35] die Resonanz als KD -Molekül, das seinen Ursprung in der Unitarisierung einer attraktiven Wechselwirkung hat. Ferner kann eine $q\bar{q}$ Resonanz mit der so gebildeten Resonanz mischen, um die physikalischen Zustände zu erhalten [41]. Anders ausgedrückt verschiebt die Präsenz der Meson-Meson Kontinuumszustände die Polposition der $q\bar{q}$ -Resonanz [93]. Die soeben beschriebenen Meson-Meson Moleküle sind jedoch nicht die einzige Möglichkeit, um Tetra-Quark Zustände zu bilden. So ist auch die Betrachtung der beobachteten Zustände als tief gebundene Tetra-Quark Zustände, die sich nicht durch zwei $(q\bar{q})$ Farb-Singulette darstellen lassen, verbreitet [166].

3.2 Modellierung der KD -Streuung

Um unsere Untersuchung der KD -Dynamik zu motivieren, wollen wir zunächst die Ähnlichkeit des KD -Systems zum $K\bar{K}$ -System, in welchem die Möglichkeit der Molekülbildung lange etabliert ist [100,142,176], erläutern. Wie in Kapitel 2 beschrieben, ist die Isospinstruktur des ρ -, ω - und ϕ -Austauschs für die Formation des Moleküls im Isospin $I = 0$ Kanal und nicht im $I = 1$ Kanal verantwortlich. Beachtet man, dass sowohl der Isospininhalt des \bar{K} als auch der des D einem Antidublett (\bar{u} , \bar{d}) entspricht, so erwartet man ein ähnliches Verhalten der beiden Kanäle in Bezug auf den Isospin. Dies ist in Abbildung 3.4.a1) und 3.4.a2) dargestellt, in der man erkennt, dass die Gluonenlinien Diagramme für den ρ - bzw. für den ω -Austausch im $K\bar{K}$ -Kanal identisch sind zu den entsprechenden Diagrammen im KD -Kanal. Abbildung 3.4.b/c) zeigt den auf der unterschiedlichen Seltsamkeit von K und D beruhenden Unterschied im Falle des ϕ -Austausches. Diese Manifestation der OZI-Unterdrückung [140] ergibt sich in unserem Modell automatisch aus der $SU(4)$ -Struktur der Lagrange-Funktion (Anhang B). Auch der J/ψ -Austausch zwischen einem K und einem D erzeugt ein Diagramm, das sich durch das Zerschneiden von Gluonenlinien zerlegen lässt. Die Struktur ist in diesem Fall in Abbildung 3.4.d) abzulesen, wobei der Unterschied zu 3.4.c) darin liegt, dass der auf dem Gluonenaustausch / den Seequarks beruhende Vertex hier auf der Seite des Kaons liegt. Somit verhalten sich der $K\bar{K}$ - und der KD -Kanal vom Gesichtspunkt der Isospinstruktur des Potentials sehr ähnlich. Betrachtet man jedoch den Isospin der angekoppelten Kanäle (Tabelle 3.2), so erkennt man, dass der KD -Kanal unter den Kanälen mit Isospin $I = 0$ die niedrigste Schwelle hat. Bildet sich also in diesem Kanal ein isoskalares Molekül, so kann dieses nur Isospin verletzend zerfallen und hat somit eine geringe Breite, die typischer Weise in der Größenordnung von $\Gamma = 10^{-4}\Gamma_{stark}$ liegt. Daher müssen wir in unserem Modell ein besonderes Augenmerk auf die Isospin brechenden Mechanismen legen, wenn wir Aussagen über die Breite des beobachteten Zustands machen wollen.

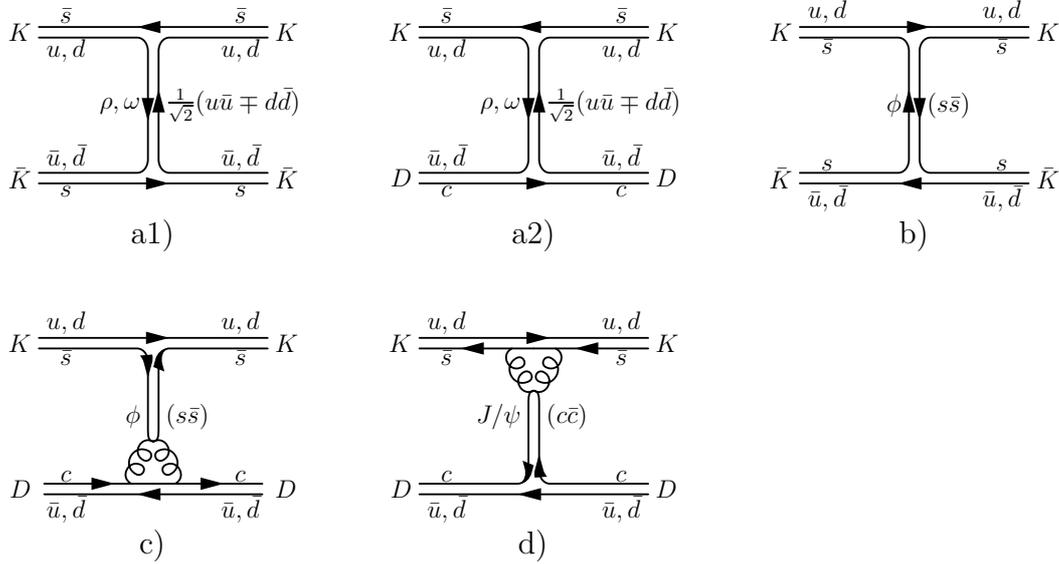


Abbildung 3.4: a1)& a2) Identische Quarklinientopologie für den t -Kanalaustausch von ρ und ω für die Kanäle $K\bar{K}$ und KD . b) Quarklinientopologie für den ϕ - t -Kanal Austausch im $K\bar{K}$ -Kanal. c),d) Das $\phi, J/\psi$ - t -Kanal Austauschdiagramm im KD -Kanal ist OZI unterdrückt.

Isospinbasis	Teilchenbasis	Schwelle
$\pi D_s^+(I = 1, I_z = 0)$	$\pi^0 D_s^+$	$135.0 + 1968.5 = 2103.5$ MeV
$KD(I = 0/1, I_z = 0)$	$K^+ D^0$	$493.7 + 1864.5 = 2358.2$ MeV
	$K^0 D^+$	$497.7 + 1869.3 = 2367.0$ MeV
$\eta D_s^+(I = 0, I_z = 0)$	ηD_s^+	$547.3 + 1968.5 = 2515.8$ MeV

Tabelle 3.2: Lage der Schwellen für die an das KD -System gekoppelten Kanäle. Für den KD -Kanal sind anstelle der Isospin gemittelten Schwelle die physikalischen Schwellen in der Teilchenbasis angegeben.

3.2.1 Streugleichung und Potential

Bei unseren Untersuchungen verwenden wir zunächst ein Spielzeugmodell mit punktförmigen Vertices, um einen kurzen Einblick in die Struktur der Streuung zu erhalten. Danach benutzen wir die in Anhang C beschriebene Blankenbecler-Sugar Streugleichung, um auch die Impulsabhängigkeit der Potentiale zu berücksichtigen. Bei der Berechnung der Potentiale gehen wir von der Lagrange-Funktion (B.1) aus. Der für die Kopplung an das D -Meson relevante Teil liest sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{DD\omega} &= g_{DD\omega} (D\partial_\mu D)\omega^\mu \\
\mathcal{L}_{DD\rho} &= g_{DD\rho} (D\vec{\tau}\partial_\mu D)\vec{\rho}^\mu \\
\mathcal{L}_{DDJ/\psi} &= g_{DDJ/\psi} (D\partial_\mu D)J/\psi^\mu \\
\mathcal{L}_{D_s^+\bar{D}\bar{K}^*} &= g_{D_s^+\bar{D}\bar{K}^*} (D_s^+(\partial^\mu \bar{D}\bar{K}_\mu^*) - \partial^\mu D_s^+(\bar{D}\bar{K}_\mu^*)) \\
\mathcal{L}_{KDD_{s0}} &= \frac{g_{KDD_{s0}}}{\sqrt{m_K m_D}} (\partial^\mu K\partial_\mu D)D_{s0} \\
\mathcal{L}_{\eta D_s^+ D_{s0}} &= \frac{g_{\eta D_s^+ D_{s0}}}{\sqrt{m_\eta m_{D_s^+}}} (\partial^\mu \eta\partial_\mu D_s^+)D_{s0}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierbei steht D_{s0} für ein explizit in das Modell eingefügtes skalares isoskalares Teilchen. Vergleicht man (3.4) mit dem vollständigen Ausdruck für die Lagrange-Funktion (zum Beispiel (B.22.46) und (B.22.51)) so erkennt man, dass der Ausdruck (3.4) nur für den Fall einer verschwindenden D -Kopplung $g_D = 0$ gilt, welchen wir in dieser Arbeit verwenden. Die F - und D -Kopplung g_F und g_D sind in Anhang B definiert, wo man auch eine Herleitung der $SU(4)$ Relationen für die Kopplungskonstanten, die wir in Tabelle 3.3 angeben, findet. Wie schon anhand der Quarklinienbilder 3.4.c) erläutert, verschwinden in unserem Modell die Kopplungen $DD\phi$ sowie KKJ/ψ . Damit haben wir das verwendete Potential bis auf etwaige Formfaktoren und die Beiträge aus $\pi\eta$ - und $\rho\omega$ -Mischung –die wir in Abschnitt 3.2.2 erläutern– in der Isospinbasis festgelegt. Die Form des Potentials im Impulsraum war schon in Kapitel 2 beschrieben und die Isospinfaktoren sind in Tabelle B.3 aufgelistet. Zusammenfassend zeigen wir eine grafische Darstellung des verwendeten Potentials in Abbildung 3.5. Um auch die Isospinbrechung durch den Massenunterschied zwischen den geladenen und den neutralen Mitgliedern der jeweiligen Isospin-Multipletts zu beschreiben, transformieren wir das Potential in die Teilchenbasis bevor wir die Streugleichung für das Potential lösen. So können wir die physikalischen Massen anstelle der Isospin gemittelten Massen verwenden und indem wir die Streumatrix T wieder in die Isospinbasis transformieren, erhalten wir den Isospin brechenden Anteil von T .

Um unsere Spielzeugmodellunitarisierung aus Kapitel 6 für einen ersten Einblick in das KD -System zu verwenden, müssen wir zunächst die verwendeten Potentiale nach

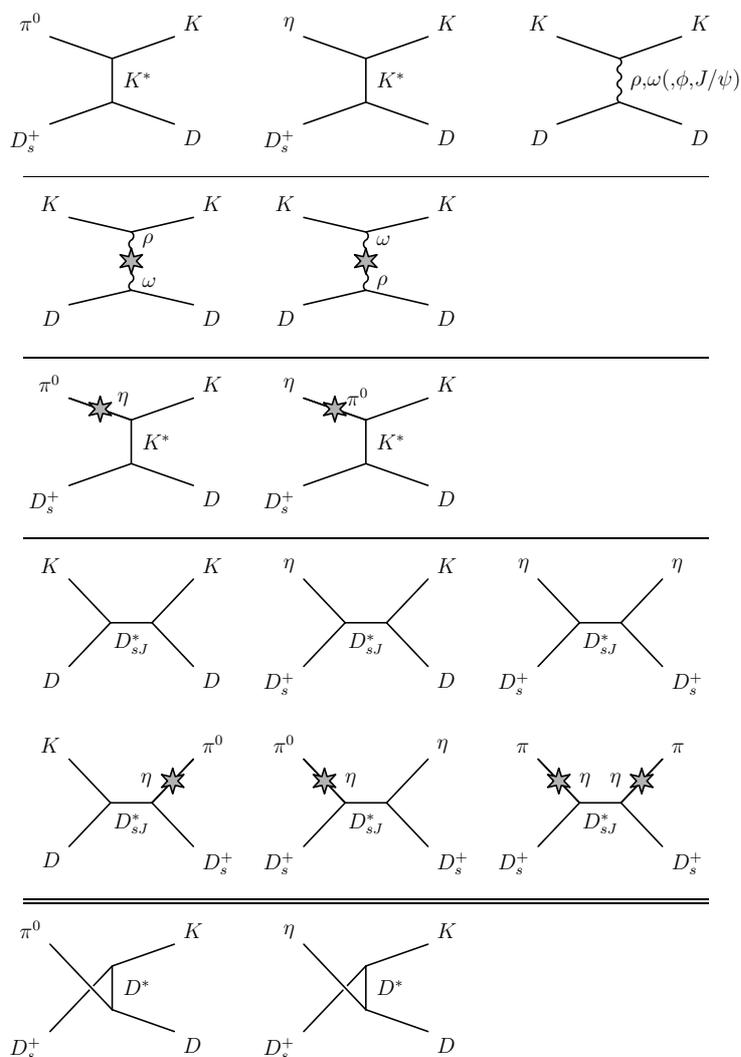


Abbildung 3.5: Grafische Darstellung des Potentials für die Berechnung der KD -Streuung im Rahmen gekoppelter Kanäle. Die Sterne stehen stellvertretend für Isospin brechende Prozesse, deren Parametrisierung in Abschnitt 3.2.2 beschrieben ist.

Vertex	$SU(4)$ -Relation
$\pi\pi\rho$	freier Parameter
$DD\rho$	$g_{DD\rho} = g_{\bar{D}\bar{D}\rho} = \frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
$DD\omega$	$g_{DD\omega} = g_{\bar{D}\bar{D}\omega} = -\frac{1}{2}g_{\pi\pi\rho}$
DDJ/ψ	$g_{DDJ/\psi} = g_{\bar{D}\bar{D}J/\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}g_{\pi\pi\rho}$
$D_s^+ \bar{D} \bar{K}^*$	$g_{D_s^+ \bar{D} \bar{K}^*} = g_{D_s^- D K^*} = \frac{1}{\sqrt{2}}g_{\pi\pi\rho}$
ηDD^*	$g_{\eta DD^*} = -g_{\eta \bar{D} \bar{D}^*} = \frac{1}{2\sqrt{3}}g_{\rho\pi\pi}$
KDD_{s0}	freier Parameter
$\eta D_s^+ D_{s0}$	freier Parameter

Tabelle 3.3: $SU(4)$ -Relationen zwischen den verwendeten Kopplungskonstanten. Die $SU(3)$ -Relationen sind eine Teilmenge und werden hier nach der Auflistung in Tabelle 2.3 nicht erneut aufgeföhrt. (Relationen gelten nur im Fall $g_D = 0$)

Partialwellen (Anhang D) zerlegen. Da wir die $\rho^0\omega$ - und die $\pi^0\eta$ -Mischung wie in Absatz 3.2.2 durch einen konstanten Mischungswinkel nähern können, genügt es, die Partialwellenzerlegungen des Vektor-Mesonen-Austausches im t - und s -Kanal sowie das s -Kanal Potential für skalare Mesonen zu berechnen. Die Potentiale in der 2., 3. und 5. Reihe der Abbildung 3.5 ergeben sich dann durch Anwendung der Mischungsmatrix. Die nach Partialwellen zerlegten Potentiale lauten:

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{V,t}^{JI} &= \frac{1}{2} \int d\cos\theta d_{00}^J(\cos\theta) F_{iso}^I g^2 \sum_{\lambda} \frac{(k_1 + k_3)^\mu (k_2 + k_4)^\nu \epsilon_\mu^*(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda)}{t - M^2} \\
&= \frac{1}{2} \int d\cos\theta d_{00}^J(\cos\theta) F_{iso}^I g^2 \frac{-(k_1 + k_3)^\mu (k_2 + k_4)_\mu}{t - M^2} \\
&= \begin{cases} F_{iso}^I g^2 (-1 + (a+b)\frac{1}{2} \ln \frac{b+1}{b-1}) & \text{für } J = 0 \\ F_{iso}^I g^2 ((a+b) - (a+b)\frac{b}{2} \ln \frac{b+1}{b-1}) & \text{für } J = 1 \\ F_{iso}^I g^2 \left(-\frac{3(a+b)b}{2} + (a+b)\frac{2b^2-1}{2} \ln \frac{b+1}{b-1} \right) & \text{für } J = 2 \end{cases} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{V,s}^{JI} &= \frac{1}{2} \int d \cos \theta d_{00}^J(\cos \theta) F_{iso}^I g^2 \sum_{\lambda} \frac{(k_1 - k_2)^\mu (k_3 - k_4)^\nu \epsilon_\mu^*(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda)}{s - M_{(0)}^2} \\
&= \frac{1}{2} \int d \cos \theta d_{00}^J(\cos \theta) F_{iso}^I g^2 \frac{-(k_1 - k_2)^\mu (k_3 - k_4)_\mu}{s - M_{(0)}^2} \\
&= F_{iso}^I \frac{g^2}{3} \frac{4(kk')}{s - M_{(0)}^2} \delta_{1J}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_{S,s}^{JI} &= \frac{1}{2} \int d \cos \theta d_{00}^J(\cos \theta) F_{iso}^I \frac{g^2}{\sqrt{m_1 m_2 m_3 m_4}} \frac{k_{1\mu} k_2^\mu k_{3\nu} k_4^\nu}{s - M_{(0)}^2} \\
&= F_{iso}^I \frac{g^2}{\sqrt{m_1 m_2 m_3 m_4}} \frac{\left(\frac{s}{4} - c^2 + k^2\right) \left(\frac{s}{4} - c'^2 + k'^2\right)}{s - M_{(0)}^2} \delta_{0J}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Hierbei haben wir $\sum_{\lambda} \epsilon_\mu(\lambda) \epsilon_\nu(\lambda) = -g_{\mu\nu}$ verwendet. a und b sind durch

$$a = \frac{(c + c')^2 - s - k^2 - k'^2}{2kk'} \tag{3.8}$$

$$b = -\frac{k^2 + k'^2 + M^2}{2kk'} \tag{3.9}$$

$$\text{mit } c = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \text{ und } c' = \frac{m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}}$$

definiert. Die Definitionen der übrigen Variablen sind in Kapitel 2 nachzulesen, wobei statt eines beliebigen Impulses hier gemäß den Regeln des Spielzeugmodells jeweils der Impuls auf der Massenschale zu verwenden ist und die Impulsraumstruktur etwaiger u -Kanal Austausch-Diagramme durch Umm Nummerierung der Ausgangszustände gegeben ist. Damit sind alle Potentiale in der Isospinbasis erklärt und wir können die Potentialmatrix, wie in Anhang B.3 beschrieben, in die Teilchenbasis transformieren, um die explizite Form von

$$\tilde{V}^J(s) = \begin{pmatrix} \pi^0 D_s^+ \leftrightarrow \pi^0 D_s^+ & \pi^0 D_s^+ \leftrightarrow \eta D_s^+ & \pi^0 D_s^+ \leftrightarrow K^0 D^+ & \pi^0 D_s^+ \leftrightarrow K^+ D^0 \\ \eta D_s^+ \leftrightarrow \pi^0 D_s^+ & \eta D_s^+ \leftrightarrow \eta D_s^+ & \eta D_s^+ \leftrightarrow K^0 D^+ & \eta D_s^+ \leftrightarrow K^+ D^0 \\ K^0 D^+ \leftrightarrow \pi^0 D_s^+ & K^0 D^+ \leftrightarrow \eta D_s^+ & K^0 D^+ \leftrightarrow K^0 D^+ & K^0 D^+ \leftrightarrow K^+ D^0 \\ K^+ D^0 \leftrightarrow \pi^0 D_s^+ & K^+ D^0 \leftrightarrow \eta D_s^+ & K^+ D^0 \leftrightarrow K^0 D^+ & K^+ D^0 \leftrightarrow K^+ D^0 \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

zu erhalten.

3.2.2 Isospinbrechung

Bisher gingen wir davon aus, dass die Isospinzustände die Eigenzustände der Hamiltonfunktion sind. Dies ist jedoch nur eine Näherung, da sowohl die elektromagne-

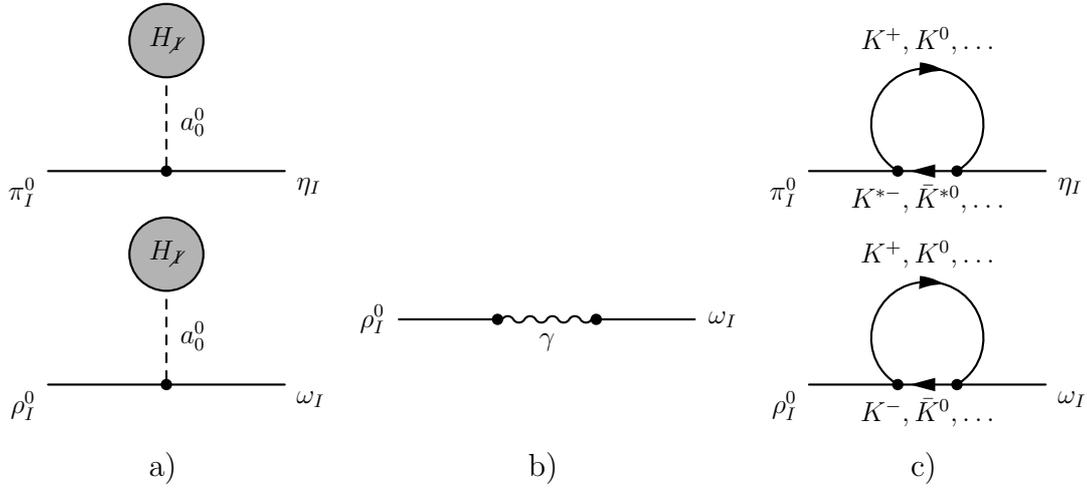


Abbildung 3.6: a) Isospinbrechung über Ankopplung eines skalaren Isovektors, der an das Vakuum koppelt b) Isospinbrechung durch den Photonenstrom c) Beispiel eines Isospin brechenden Prozesses auf mesonischer Ebene, der seine Ursache sowohl in Δm als auch in der EM-Wechselwirkung hat. (Dieser Prozess ist schon in der Kaulquappendiagramm-Parametrisierung aus a) enthalten.)

tische Wechselwirkung als auch die Up-Down Massendifferenz die Isospinsymmetrie brechen. Beide Effekte sind numerisch betrachtet von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$. Wir folgen in unserer Beschreibung der Isospinbrechung Coleman und Glashow, wobei wir für eine modernere Analyse auf Gasser und Leutwyler [74] verweisen. Coleman und Glashow [49,50] zerlegten zum Beispiel den elektromagnetischen Anteil der ρ_I^0 - ω_I - bzw. π_I^0 - η_I -mischenden Wechselwirkung $\langle \rho_I^0 | H_{em} | \omega_I \rangle = \langle \rho_I^0 | H_{IV} | \omega_I \rangle + \langle \rho_I^0 | H_{JJ} | \omega_I \rangle$ in einen Anteil, der den $\Delta I = 1$ Übergang durch starke –Isospin erhaltende– Ankopplung eines isovektoriellen Skalars vermittelt, welcher dann elektromagnetisch in das Vakuum zerfällt und in einen Anteil, der durch Photonenaustausch [81, 119] vermittelt wird. Diese Anteile sind in Abbildung 3.6 grafisch dargestellt, wobei es für die von Coleman und Glashow vorgebrachten Argumente keine Rolle spielt, ob der isovektorielle Skalar ein $q\bar{q}$ -Zustand, eine Tetraquark oder eine Kaonenkorrelation ist, solange er eine resonante Struktur aufweist. Da die Massenaufspaltung zwischen geladenen und neutralen Mesonen ihren Ursprung zum einen im Elektromagnetismus und zum anderen in der Up-Down Massendifferenz hat, ist die in Abbildung 3.6.c) gezeigte Schleife zum Beispiel ein Prozess, dessen Isospin brechender Anteil durch beide Mechanismen erzeugt wird. Für unsere weiteren Betrachtungen ist jedoch die mikroskopische Realisierung der Überlappe $\langle \rho_I^0 | H_I | \omega_I \rangle$ und $\langle \pi_I^0 | H_I | \eta_I \rangle$ unerheblich. Ihre Stärke entnehmen wir verschiedenen Veröffentlichungen, die wir in Tabelle 3.4 angeben. –Es sei angemerkt, dass sich der skalare $\rho\omega$ -Überlapp durch $\langle \rho_\mu^0 | H_I | \omega_\nu \rangle = (-g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / k^2) \langle \rho_I^0 | H_I | \omega_I \rangle$

definiert. Diesbezüglich ist zu beachten, dass wir im Rahmen des Jülicher Mesonenaustauschmodells $\sum_\lambda \epsilon_\mu(\lambda)\epsilon_\nu(\lambda) = -g_{\mu\nu}$ verwenden.– Damit sind die Nebendiagonalelemente des Propagators unter Vernachlässigung etwaiger Breiten in der Isospinbasis festgelegt (3.11).

$$G_{\rho_I^0 \omega_I} = \frac{\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega_I \rangle}{(s - M_\rho^2)(s - M_\omega^2)} = \frac{\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega_I \rangle}{M_\rho^2 - M_\omega^2} \left(\frac{1}{s - M_\rho^2} - \frac{1}{s - M_\omega^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\approx \sin \theta_{\rho\omega} \cos \theta_{\rho\omega} \left(\frac{1}{s - M_\rho^2} - \frac{1}{s - M_\omega^2} \right)$$

$$G_{\pi_I^0 \eta_I} = \frac{\langle \pi_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \eta_I \rangle}{(s - M_\pi^2)(s - M_\eta^2)} = \dots \quad (3.12)$$

In (3.11) haben wir die Nebendiagonalelemente des Propagators in der Isospinbasis mit den Nebendiagonalelementen des rotierten Propagators der physikalischen Teilchen identifiziert. Die Rotation definiert sich durch Gleichung (3.13).

$$\begin{pmatrix} |\rho_I^0\rangle \\ |\omega_I\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\rho\omega} & -\sin \theta_{\rho\omega} \\ \sin \theta_{\rho\omega} & \cos \theta_{\rho\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\rho^0\rangle \\ |\omega\rangle \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Hierbei gehen zwei Näherungen ein. Zum einen gehen wir davon aus, dass $\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega_I \rangle$ bzw. $\langle \pi_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \eta_I \rangle$ reell sind. Da auch Pionenschleifen zur $\rho^0\omega$ -Mischung beitragen, ist diese Annahme nur näherungsweise erfüllt. Zum anderen nehmen wir an, dass die Überlappenelemente konstant sind, worauf wir am Ende dieses Abschnittes genauer eingehen. Diese Einschränkung kann jedoch leicht durch die Formulierung eines q -abhängigen Mischungswinkels $\theta(q)$ aufgehoben werden. Der Propagator in der Isospinbasis lautet somit:

$$G_{\rho\omega}^I = \begin{pmatrix} \cos \theta_{\rho\omega} & -\sin \theta_{\rho\omega} \\ \sin \theta_{\rho\omega} & \cos \theta_{\rho\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s - M_\rho^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s - M_\omega^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_{\rho\omega} & \sin \theta_{\rho\omega} \\ -\sin \theta_{\rho\omega} & \cos \theta_{\rho\omega} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\rho^2} + \frac{\sin^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\omega^2} & \frac{\cos \theta_{\rho\omega} \sin \theta_{\rho\omega} (M_\rho^2 - M_\omega^2)}{(s - M_\rho^2)(s - M_\omega^2)} \\ \frac{\cos \theta_{\rho\omega} \sin \theta_{\rho\omega} (M_\rho^2 - M_\omega^2)}{(s - M_\rho^2)(s - M_\omega^2)} & \frac{\cos^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\omega^2} + \frac{\sin^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\rho^2} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\cos^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\rho^2} + \frac{\sin^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\omega^2} & \frac{\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega_I \rangle}{(s - M_\rho^2)(s - M_\omega^2)} \\ \frac{\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega_I \rangle}{(s - M_\rho^2)(s - M_\omega^2)} & \frac{\cos^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\omega^2} + \frac{\sin^2 \theta_{\rho\omega}}{s - M_\rho^2} \end{pmatrix}$$

Zerlegt man die Nebendiagonalelemente wie in (3.11) geschehen nach Partialbrüchen, so lässt sich der Isospin brechende Propagator als Überlagerung der Propagatoren in der Teilchenbasis formulieren, was für die Betrachtung des Isospin brechenden

	$\langle \rho_I^0 H_{\mathcal{I}} \omega_I \rangle$ in MeV^2	$\langle \pi_I^0 H_{\mathcal{I}} \eta_I \rangle$ in MeV^2
$a_0 \rightarrow X; \omega \rightarrow \pi^+ \pi^-$ (VMD) S.A. Coon et al. [52], [53]	$-4520 \text{ MeV}^2, -6830 \text{ MeV}^2$	$\approx (-) \langle \rho_I^0 H_{\mathcal{I}} \omega_I \rangle$
$\gamma C \rightarrow \pi^+ \pi^- C; \gamma C \rightarrow e^+ e^- C$ P.J. Biggs et al. [37, 38]	-2600 MeV^2	
$\gamma \text{Be} \rightarrow e^+ e^- \text{Be}$ H. Alvensleben et al. [14, 15]	-3200 MeV^2	
$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-$ D. Benaksas et al. [30, 31] A. Quenzer et al. [151] S. Gardner et al. [73]	-5500 MeV^2 -3700 MeV^2 $-3860 \text{ MeV}^2, -4000 \text{ MeV}^2$	
QCD-Summenregeln C. Chan et al. [45]		3800 MeV^2
Hadronisches Modell K. Maltman et al. [127]		4200 MeV^2
Chirale Störungstheorie R. Urech [169], J. Gasser et al. [74] T. Hatsuda et al. [91], J. Gasser et al. [75–77]	$-3910 \pm 300 \text{ MeV}^2$	4132 MeV^2
$pd \rightarrow {}^3\text{He} \pi^0$ A.M. Green et al. [83]		$2950 \pm 1470 \text{ MeV}^2$

Tabelle 3.4: Auflistung unterschiedlicher Abschätzungen für die Stärke von $\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega_I \rangle$ und $\langle \pi_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \eta_I \rangle$. (In einigen Arbeiten enthaltene Impulsabhängigkeiten wurden nicht berücksichtigt.)

t -Kanal-Potentials nützlich ist. Die Rotation im Isospinraum (3.14) macht es besonders einfach, die Mischung zwischen Pi-Meson und Eta-Meson zu berücksichtigen, indem man anstelle des Propagators $G^I = RGR^{-1}$ die Isospinpotentiale $V = RV^I R^{-1}$ rotiert, wodurch der Propagator weiterhin diagonal bleibt. Im Falle des t -Kanalaustauschs des Rho-/Omega-Mesons stellt man zunächst fest, dass die Potentiale $V^{D^+K^0 \leftrightarrow D^0K^+}$, die den D^+K^0 - mit dem D^0K^+ -Kanal verbinden, nur durch den Austausch eines geladenen Rho-Mesons vonstatten gehen können, weshalb es hier keinen Beitrag durch die $\rho^0\omega$ -Mischung gibt. Für die Potentiale auf der Diagonalen ergibt sich eine besonders einfache Struktur, denn die Teilchenfaktoren des ρ - und des ω -Austauschs im D^+K^0 - und im D^0K^+ -Kanal sind identisch ($F_{DK \leftrightarrow DK}^{Teilchen} = -1$), was dazu führt, dass der Isospin erhaltende Anteil des $(\rho + \omega)$ - t -Kanal Potentials keine Abhängigkeit vom Mischungswinkel aufweist. Das Potential lautet somit:

$$\begin{pmatrix} V_{D^+K^0 \rightarrow D^+K^0} & V_{D^+K^0 \rightarrow D^0K^+} \\ V_{D^0K^+ \rightarrow D^+K^0} & V_{D^0K^+ \rightarrow D^0K^+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2cs)\tilde{V}_{\rho^0,t}^J + (1 - 2cs)\tilde{V}_{\omega,t}^J & 2\tilde{V}_{\rho^\pm,t}^J \\ 2\tilde{V}_{\rho^\pm,t}^J & (1 - 2cs)\tilde{V}_{\rho^0,t}^J + (1 + 2cs)\tilde{V}_{\omega,t}^J \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Hierbei sind $cs = \cos\theta_{\rho\omega} \sin\theta_{\rho\omega}$ und $\tilde{V}_{V,t}^J = \tilde{V}_{V,t}^{JI}(F_{iso}^I = -1)$. Auch wenn die drei Strukturmerkmale des Isospin brechenden Anteils dieses Potentials weitgehend trivial sind, so sei ihr Ursprung hier doch kurz erwähnt. Das relative Vorzeichen zwischen den Potentialen mit M_ρ^2 - bzw M_ω^2 -Pol stammt aus der Partialbruchzerlegung (3.11), das relative Vorzeichen $V_{D^+K^0 \rightarrow D^+K^0}^J = -V_{D^0K^+ \rightarrow D^0K^+}^J$ gilt per Definition für jedes Isospin brechende Potential in diesen Kanälen (siehe Umkopplungskoeffizienten in Anhang B.3) und der Faktor 2 hat seinen Ursprung im Isospinraum (Tabelle B.3).

Die Notwendigkeit einer k^2 Impulsabhängigkeit von $\Pi_{\rho\omega} = \langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{Y}} | \omega \rangle$ wurde z.B. von O'Connell et al. [138] in einer modellabhängigen Betrachtung über die Transversität von $\Pi^{\mu\nu} = \langle \rho_I^{0\mu} | H_{\mathcal{Y}} | \omega^\nu \rangle$ motiviert. Berechnet man nämlich im Rahmen dieses Modells¹ den Propagator inklusive des Selbstenergieanteils [138]

$$D_{\mu\nu}(k^2) = \frac{-g_{\mu\nu} + \left(1 - \frac{\Pi(k^2)}{k^2}\right) \frac{k_\mu k_\nu}{M^2}}{k^2 - M^2 + \Pi(k^2)} \quad (3.16)$$

und vergleicht diesen mit seiner Spektraldarstellung [154]

$$D_{\mu\nu}(k^2) = F(k^2)g_{\mu\nu} + (F(0) - F(k^2)) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (3.17)$$

¹Im Rahmen dieses Modells sind für Vektormesonen nur lokale Kopplungen an erhaltene Ströme, die den gleichen Kommutatorrelationen gehorchen wie die QCD, erlaubt und explizite Massenmischungsterme in der Lagrange-Funktion werden nicht betrachtet.

so stellt man fest, dass $\Pi(0)(k^2 - M^2 + \Pi(k^2)) = 0$ für alle k^2 gelten muss und somit $\Pi(0) = 0$ ist. Damit ist klar, dass alle nicht verschwindenden Überlappungen eine k^2 -Abhängigkeit aufweisen müssen. An dieser Stelle seien kurz zwei Parametrisierungen dieser Abhängigkeit erwähnt, anhand derer wir in unserem Modell die Unterschiede zu konstant gewähltem $\Pi_{\rho\omega}$ untersuchen wollen. Einerseits kann man für jedes in Tabelle 3.4 aufgelistete $\langle \rho_I^0 | H_{\mathcal{I}} | \omega \rangle$ ($k^2 = M_V^2$) die Vorhersage $\Pi_{\rho\omega}(k^2 = 0) = 0$ heranziehen und eine Gerade $\Pi_{\rho\omega}(k^2) = \frac{\Pi(k^2=M_V^2)}{M_V^2} k^2$ durch diese zwei Punkte legen. Betrachtet man jedoch wie Hatsuda et al. [91] zum Beispiel QCD -Summenregeln, so ergibt sich eine Lage des Nulldurchgangs bei $k^2 \approx 0.4m_\rho^2$, was wir durch $\Pi_{\rho\omega}(k^2) = \frac{\Pi(k^2=M_\rho^2)}{0.6M_\rho^2} (k^2 - 0.4M_\rho^2)$ berücksichtigen. Auch die k^2 -Abhängigkeit des $\pi\eta$ -Überlapps ist Gegenstand vieler Studien und wurde zum Beispiel in führender Ordnung der chiralen Störungstheorie (Maltman [126]) und mit Hilfe von QCD -Summenregeln (Chan et al. [45]) berechnet. Nichtsdestotrotz werden wir die k^2 -Abhängigkeit des Mischungswinkels $\theta_{\pi\eta}$ der pseudoskalaren Mesonen vernachlässigen. Diese Näherung wurde zum Beispiel von Coleman et al. [51] untersucht und für angemessen erachtet.

Eine weitere Abweichung zwischen den einfachen Drehungen, mit denen wir hier die $\rho\omega$ - beziehungsweise die $\pi\eta$ -Mischung beschreiben, und der physikalischen Mischung der jeweiligen Teilchen ergibt sich aus der Vernachlässigung des Imaginärteils des Überlapps. Sowohl das Pion als auch das Eta haben sehr geringe Breiten, sodass diese Näherung hier angebracht ist. Für das Rho-Meson ist diese Annahme, auch wenn wir es im t -Kanal als scharfe Resonanz behandeln, apriori nicht haltbar, da es eine Breite von $\Gamma_\rho \approx 150$ MeV aus der Ankopplung an den $\pi\pi$ -Kanal erhält. Um einen Eindruck von dem zu erwartenden Fehler zu bekommen, schauen wir uns die verallgemeinerte Mischungsmatrix [139] unter der Annahme $\Gamma_\omega \ll \Gamma_\rho$ und ohne k^2 -Abhängigkeit an:

$$\begin{pmatrix} \rho^0 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_I^0 \\ \omega_I \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$\epsilon \approx \frac{\Re(\Pi_{\rho\omega})}{m_\omega^2 - m_\rho^2} - i \frac{g_{\omega_I\pi\pi}}{g_{\rho_I\pi\pi}} \frac{\hat{m}_\rho \Gamma_\rho}{m_\omega^2 - m_\rho^2}$$

$$m^2 = \hat{m}^2 - i\hat{m}\Gamma$$

Setzt man hier die Parameter aus [128] mit $\Re(\Pi_{\rho\omega}) \approx -6827$ MeV², $g_{\omega_I\pi\pi}/g_{\rho_I\pi\pi} \approx 0.102$, $\hat{m}_\rho \approx 764$ MeV und $\Gamma_\rho \approx 145$ MeV ein, so stellen wir fest, dass wir einen Imaginärteil in der Größenordnung des Realteils vernachlässigen. Diese Unsicherheit ist daher in zukünftigen Rechnungen zu beachten.

3.3 Resultate

3.3.1 Das Spielzeugmodell

Um abzuschätzen, ob sich –wie vermutet– ein Molekül im isoskalaren DK -Kanal bildet, verwenden wir zunächst das in Kapitel 6 vorgestellte Spielzeugmodell, um das auf Baumniveau formulierte Potential zu unitarisieren. Durch Rückkopplung von der Teilchenbasis in die Isospinbasis können wir auch in diesem Modell die Isospin brechenden Amplituden eindeutig identifizieren. Ferner liefert das Modell eine analytische Beschreibung der T -Matrix, die jedoch, da 4×4 Matrizen invertiert werden, etwas länglich ist. Weil wir nur eine grobe Orientierung über die Polstruktur der Isospinamplituden wünschen, sparen wir uns die Rückkopplung von $K^0 D^+$, $K^+ D^0$ zu $K D^{I=0}$, $K D^{I=1}$ und betrachten stattdessen die Amplituden in den Kanälen $D_s^+ \pi^0$ und (analytisch fortgesetzt) $D_s^+ \eta$, die bestimmten Isospin ($I = 1$, $I = 0$) haben. Im Rahmen unserer Untersuchung haben wir für die Massen der physikalischen Teilchen die Angaben der Particle Data Group [64] verwendet. Durch die schon angeführten $SU(4)$ -Relationen sind –wenn wir, wie in Abschnitt 2.1 erläutert, die D -Kopplung vernachlässigen– mit der Kopplungskonstante $g_{\rho\pi\pi}$ auch die Kopplungskonstanten an den übrigen Vertices bis auf Korrekturen durch Beimischung von Teilchen, die weder zum Vektor- noch zum pseudoskalaren 15-plet gehören, bestimmt. Ein Beispiel für solche Korrekturen sind die Kopplungen an das Eta, welches Beiträge aus dem pseudoskalaren Singulett aufweist. Die Identifikation des Etas als reinen η_8 -Zustand ist im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells üblich und die daraus folgenden Kopplungskonstanten haben sich im $SU(3)$ -Sektor bis hin zu Untersuchungen der Isospinbrechung bewährt [99, 114, 123]. Die aus der Beimischung resultierende Unsicherheit für den im u -Kanal Diagramm enthaltenen ηDD^* -Vertex sollte unsere Vorhersagen nur unerheblich beeinflussen, da das relevante Potential wegen der hohen Masse des ausgetauschten D^* unterdrückt ist. Wir haben dies überprüft und tatsächlich nur einen geringen Einfluss des D^* -Austausches ausgemacht, der leicht durch eine Anpassung der Subtraktionskonstante kompensiert werden kann. Aus diesem Grund werden wir diesen Austausch nur im Spielzeugmodell berücksichtigen. Die von uns verwendete Festlegung der Kopplungskonstante mit

$$g_{\rho\pi\pi} = 6.040 \tag{3.19}$$

ist dem an die $\pi\pi$ -Streuung angepassten Jülicher Modell aus Kapitel 2 bzw. aus [114] entlehnt. Es verbleibt die Subtraktionskonstanten für die vier gekoppelten Kanäle festzulegen. Hierbei nehmen wir an, dass die Subtraktionskonstante in allen Kanälen gleich ist und passen ihren Wert an die Masse des $D_{sJ}^*(2317)$ an. Wir erhalten einen

	Minimum	Maximum	unsere Wahl
$\theta_{\rho\omega}$	8.5°	25.8°	12.8°
$\theta_{\pi\eta}$	-1.42°	-0.30°	-0.84°

Tabelle 3.5: Spannbreite der aus Tabelle 3.4 extrahierten $\pi\eta$ - und $\rho\omega$ -Mischungswinkel

Wert von

$$a(\lambda = 770 \text{ MeV}) = 0.1128 \pm 0.0001 \quad (3.20)$$

Hierbei gibt der Fehler an, welche Variationen in der Subtraktionskonstante nötig sind, um bei unterschiedlichen Parametrisierungen der Isospin brechenden Potentiale die Masse des $D_{sJ}^*(2317)$ konstant zu halten.

In der Diskussion über die Natur der $D_{sJ}^*(2317)$ -Resonanz spielen Vorhersagen für die Breite, die mit $\Gamma_{D_{sJ}^*} < 7 - 10 \text{ MeV}$ bisher nur durch eine obere Grenze experimentell bestimmt ist, eine entscheidende Rolle. In unserem Modell wird die Breite durch die Isospin brechende Ankopplung des $D_{sJ}^*(2317)$ an den πD_s^+ -Kanal erzeugt. Betrachtet man Tabelle 3.4, so sieht man, dass diese Ankopplung mit einer großen Unsicherheit behaftet ist. Wir betrachten daher die in Tabelle 3.5 aufgeführte Bandbreite an Mischungswinkeln, die den Überlappwerten aus Tabelle 3.4 entspricht.

In Abbildung 3.7 ist der Absolutbetrag der T -Matrizen $T_{\pi^0 D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}$, $T_{\eta D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}$ und $T_{\eta D_s^+ \rightarrow \eta D_s^+}$ für unsere Wahl der Mischungsparameter gezeigt. Wenn wir wie in b) gesehen einen Ausschnitt von wenigen MeV betrachten, so kann man in allen Kanälen die Resonanzstruktur erkennen und die Breite ablesen. ($\Gamma_{D_{sJ}^*} \approx 226 \text{ keV}$) Um die Breite für die drei Reaktionskanäle gleichzeitig zu zeigen, haben wir die Kurven zu $|T_{\pi^0 D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}|$, $\frac{1}{500}|T_{\eta D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}|$ und $\frac{1}{500^2}|T_{\eta D_s^+ \rightarrow \eta D_s^+}|$ skaliert. Da die Resonanz im isoskalaren KD -Kanal gebildet wird, sind zwei Isospin brechende Übergänge nötig, damit die Resonanz zur Reaktion $\pi^0 D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+$ beitragen kann. Ein Isospin brechender Übergang weniger ist nötig, damit die Resonanz zu $\eta D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+$ beitragen kann. $\eta D_s^+ \rightarrow D_{sJ}^* \rightarrow \eta D_s^+$ verläuft ungehemmt. Genau diesen Mechanismus haben wir durch unsere Umskalierung aufgehoben. Durch die Beobachtung, dass $|T_{\pi^0 D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}|$ (durchgezogene Linie) leicht geneigt gegenüber den anderen Reaktionen erscheint, können wir darauf schließen, dass in diesem Kanal der durch die Resonanz laufende Beitrag zunächst konstruktiv mit dem Hintergrund interferiert, um dann nach dem Resonanzdurchgang eine destruktive relative Phasenlage aufzuweisen. Dies ist noch besser in Teil a) der Abbildung zu sehen. Hier ist ein breiterer Energieausschnitt zu sehen und wir haben uns darauf beschränkt, das Verhalten in den Flanken der Resonanz zu zeigen. Man sieht deutlich, wie sich die Interferenzverhältnisse zwischen der

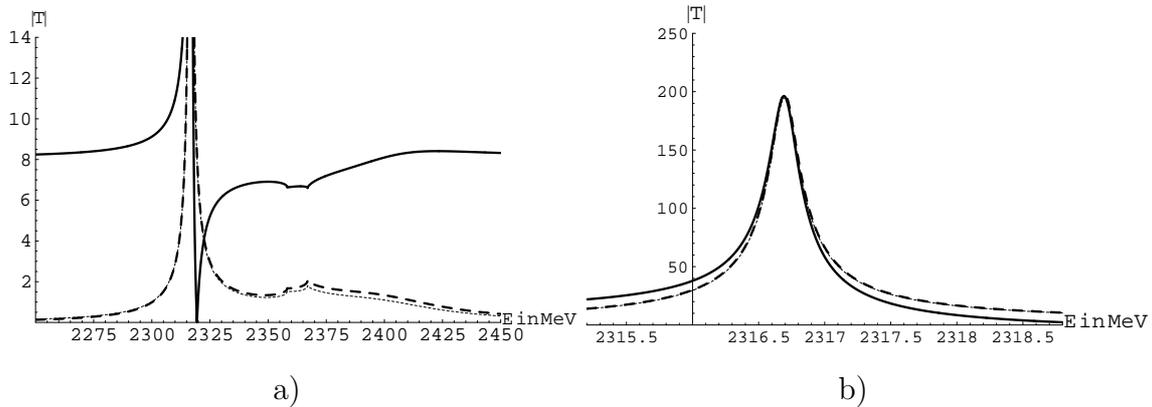


Abbildung 3.7: In beiden Diagrammen wurde der Absolutbetrag der Transfermatrix T gegen die Energie in MeV aufgetragen. Linie durchgezogen = $|T_{\pi^0 D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}|$, dünn gestrichelt = $\frac{1}{500}|T_{\eta D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+}|$ und fett gestrichelt = $\frac{1}{500^2}|T_{\eta D_s^+ \rightarrow \eta D_s^+}|$. In a) wurde der Ausschnitt so gewählt, dass das Verhalten der jeweiligen T -Matrix in den Flanken der Resonanz zu erkennen ist. In b) wurde der Ausschnitt so gewählt, dass die Resonanzbreite sichtbar wird.

isoskalaren Resonanz und der Streuamplitude aus dem isovektoriellen Kanal ändern. Es sei angemerkt, dass die Vorhersage einer relativ starken isovektoriellen Streuamplitude mit einem großen Fragezeichen behaftet ist, da sie stark von der Wahl der Subtraktionskonstante im $\pi^0 D_s^+$ Kanal abhängt, die ihrerseits nur einen sehr geringen Einfluss auf die Polposition des gebildeten KD -Moleküls hat. Auch die $\eta D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+$ Amplitude wird bei Änderung dieser Subtraktionskonstante nur schwach skaliert und ändert ihre Form nicht. Das Caveat folgt nun aus der Tatsache, dass die Subtraktionskonstanten von der Impulsabhängigkeit der Potentiale bestimmt sind und somit unsere Annahme gleicher Subtraktionskonstanten nur für Kanäle mit ähnlichen Potentialen zutrifft. Aber gerade die Ankopplung des Pions als leichtes Teilchen fällt in dieser Beziehung aus dem Rahmen. Betrachtet man aus diesem Blickwinkel die Subtraktionskonstanten, die in Kapitel 6 im Rahmen der $\pi\pi$ -Streuung angepasst wurden, so kann man hier starke Variationen erwarten. Im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austauschbildes wird dieses Verhalten durch Formfaktoren parametrisiert. Da diese in etwa der Skala entsprechen, von der an die entsprechenden physikalischen Prozesse ignoriert werden, hat man in diesem Modell eine bessere Chance zu erkennen, wo der physikalisch sinnvolle Parameterbereich endet. Wir verschieben daher die Besprechung der Streuung im isovektoriellen Kanal auf die Darstellung unserer Ergebnisse im Rahmen der numerischen Rechnungen. Der isoskalare und der Isospin brechende Kanal weisen neben der dominanten Resonanz noch eine breite Betonung im Bereich von ca 2350 MeV bis 2425 MeV auf. Darauf aufgeprägt erkennt man zwischen den

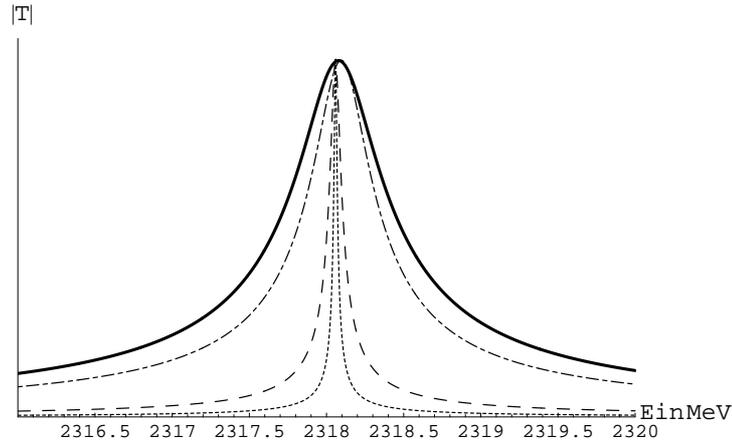


Abbildung 3.8: Der Absolutbetrag der $\pi^0 D_s^+ \rightarrow \pi^0 D_s^+$ T -Matrix ist für unterschiedliche Isospinbrechungen gezeigt. Die Kurven sind so skaliert, dass sie im Maximum übereinstimmen. Zur Isospinbrechung tragen folgende Prozesse bei: kurz gestrichelt: Massendifferenz(MD); lang gestrichelt: $\rho\omega$ -Mischung $\theta_{\rho\omega} \approx 25^\circ$ & MD; kurzlang gestrichelt: $\pi\eta$ -Mischung $\theta_{\pi\eta} \approx -1.4^\circ$ & MD; durchgezogen: $\theta_{\rho\omega} \approx 25^\circ$ & $\theta_{\pi\eta} \approx -1.4^\circ$ & MD

Schwellen des $K^+ D^0$ - und des $K^0 D^+$ -Kanals bei 2360 MeV die aus [4] bekannte Tafelbergstruktur der Isospinbrechung, die aus den unterschiedlichen Schwellen für die verschiedenen Ladungszustände resultiert.

Um die Unsicherheit, die unserer Vorhersage für die Breite des KD -Moleküls inneohnt, zu bestimmen, schauen wir uns zunächst für maximal gewählte Isospinbrechungsparameter die Zusammensetzung der Breite an. Man erkennt, wie die Isospinbrechung via Massenaufspaltung für eine relativ kleine Breite von 24 keV (kurz gestrichelte Linie in Abbildung 3.8) sorgt. Da wir bei der Berechnung der Isospinbrechung durch $\rho\omega$ - bzw $\pi\eta$ -Mischung weiterhin mit den physikalischen Massen gerechnet haben, ist diese Breite Bestandteil aller gezeigten Breiten. Man erkennt aus Abbildung 3.8, dass die Hinzunahme der $\rho\omega$ -Mischung (lang gestrichelt) einen ähnlich großen Breitenzuwachs von ca 44 keV liefert, während die maximal gewählte $\pi\eta$ -Mischung einen Breitenzuwachs von 312 keV ergibt. In Tabelle 3.6 sind für die von uns verwendeten Zentralwerte der Mischungsparameter sowie für deren maximale und minimale Werte die erzeugten Breiten angeführt. Es zeigt sich, dass alle drei Mechanismen in der gleichen Größenordnung zu der Isospinbrechung und somit zur Breite des Zustandes beitragen. Bei diesen Betrachtungen haben wir die Breite aus der möglichen Ankopplung an den $D_s^{*+}\gamma$ - und den $D_s^{*+}\pi^+\pi^-$ -Kanal vernachlässigt. Um den Fehler aus dieser Annahme abzuschätzen, zitieren wir hier die von BaBar [22] gemessenen

Isospinbrechungs- mechanismus	Zentralwert	Max	Min
	$\theta_{\rho\omega} = 12.8^\circ$	$\theta_{\rho\omega} = 25.8^\circ$	$\theta_{\rho\omega} = 8.5^\circ$
	$\theta_{\pi\eta} = -0.84^\circ$	$\theta_{\pi\eta} = -1.42^\circ$	$\theta_{\pi\eta} = -0.30^\circ$
Massendifferenz (MD)	24 keV	24 keV	24 keV
$\rho\omega$ -Mischung & MD	50 keV	68 keV	40 keV
$\pi\eta$ -Mischung & MD	152 keV	336 keV	64 keV
$\rho\omega$ - & $\pi\eta$ -Mischung & MD	226 keV	448 keV	98 keV

Tabelle 3.6: Zusammensetzung der D_{sJ}^* -Breite im Molekülbild für verschiedene $\pi\eta$ -/ $\rho\omega$ -Mischungsszenarien.

Zerfallskanal	[27]	[23]	[79]	[47, 48]	[67]
$D_{sJ}^* \rightarrow D_s \pi^0$	21.5	$129 \pm 43; 109 \pm 16$	≈ 10	7 ± 1	16
$D_{sJ}^* \rightarrow D_s^* \gamma$	1.74	< 1.4	1.9	0.85 ± 0.05	0.2

Tabelle 3.7: Zusammenstellung von Vorhersagen unterschiedlicher Modelle für die Zerfallsbreiten des $D_{sJ}(2317)$ in keV.

oberen Grenzen für die Verzweigungsverhältnisse:

$$\frac{\mathcal{B}r(D_{sJ}^*(2317)^+ \rightarrow D_s^{*+} \gamma)}{\mathcal{B}r(D_{sJ}^*(2317)^+ \rightarrow D_s^+ \pi^0)} < 0.17 \quad (3.21)$$

$$\frac{\mathcal{B}r(D_{sJ}^*(2317)^+ \rightarrow D_s^{*+} \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{B}r(D_{sJ}^*(2317)^+ \rightarrow D_s^+ \pi^0)} < 0.002 \quad (3.22)$$

Damit schätzen wir ab, dass aus den vernachlässigten Kanälen nur Korrekturen bis 20% zu erwarten sind. Dies ist ein kleiner Effekt, wenn man die Unsicherheit unserer Vorhersage betrachtet. In Tabelle 3.7 zitieren wir nach [55] die Breiten, welche für verschiedene Szenarien des $D_{sJ}(2317)$ vorhergesagt worden sind. Die angeführten Zerfallsbreiten wurden berechnet unter der Annahme eines konventionellen $c\bar{s}$ Zustandes [79], den Annahmen der Schweres-Quark-Effektiven-Feldtheorie(HQET) [47, 48, 67], der Annahme eines chiralen Dopplerszenarios [27] und unter rein phenomenologischen Annahmen [23]. Es zeigt sich, dass die in unserem Modell erwartete Zerfallsbreite von $\Gamma_{D_{sJ}^*} \approx 220_{-120}^{+110}$ keV die aus Sicht der phenomenologischen Analyse aus [23] erwarteten Werte leicht übertrifft. Die auf einer $q\bar{q}$ -Annahme beruhenden Vorhersa-

gen weisen jedoch alle eine weitaus schmalere Breite auf als sie von uns erwartet wird. Selbst mit extrem geringen Mischungswinkeln erwarten wir für das KD -Molekül noch immer mehr als die vierfache Breite verglichen mit [27]. Da jedoch die von verschiedenen Autoren bevorzugten $q\bar{q}$, $qq\bar{q}\bar{q}$, ... Zustände auch an die Meson-Meson-Dynamik anknüpfen, ist festzustellen, dass die starke Attraktion im KD -Kanal zu einer starken Massenrenormierung für diese Zustände führen kann. Die Anwesenheit solcher Zustände verändert ebenfalls die Vorhersagen unseres Modells. So mischt ein solcher Zustand mit unserem Molekülzustand und das zusätzliche s -Kanalpotential verstärkt mittels $\pi\eta$ -Mischung auch die Isospinbrechung, was zu einer größeren Breite führt. Eine Diskussion dieser Effekte verschieben wir auf unsere numerischen Berechnungen im Rahmen des erweiterten Jülicher Modells.

3.3.2 Das erweiterte Jülicher Modell

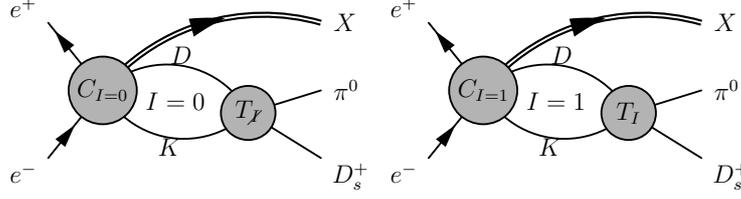
Im Rahmen des Jülicher Modells wird die Streugleichung (C.10) durch die Verwendung von Formfaktoren in den einzelnen Potentialen regularisiert. Diese müssen wir noch für die Vertices aus den Diagrammen in den 5 oberen Reihen der Abbildung 3.5 definieren. (Wir vernachlässigen hier den Beitrag aus dem u -Kanalaustausch des D^* wegen der großen Masse des $D^*(2010)$ verglichen mit dem $K^*(892)$.) Da es nur wenige Observablen gibt, an die wir anpassen können, ist es uns möglich, mit genau einem Abschneideparameter

$$\Lambda_{PPV} = 5.2 \text{ GeV} \quad (3.23)$$

für alle Vertices zu arbeiten. Dieser Wert liegt leicht über die im $SU(3)$ -Sektor des Jülicher Modells üblichen Werten von $\Lambda_{t\text{-Kanal}} \approx 3\text{-}4 \text{ GeV}$ [114,122]. Um zu verstehen, warum im Fall des $D_{sJ}^*(2317)$ steifere Formfaktoren zur Reproduktion der experimentellen Observablen nötig sind, ist ein Blick auf die Behandlung des Meson-Meson Propagators unterhalb seiner Schwelle in der ursprünglichen Version des Jülicher Mesonen-Austauschmodells [114] aufschlussreich. Der Propagator wurde nicht wie in unseren Untersuchungen analytisch unterhalb der Schwelle fortgesetzt sondern unterhalb der Schwelle auf seinen Wert bei verschwindendem Impuls fixiert. Folgen wir diesem Beispiel, dann erhalten wir ähnlich weiche Formfaktoren. Denselben Effekt können wir im Rahmen unseres Modells erreichen, indem wir die Übergangspotentiale zum $D_s^+\eta$ -Kanal durch weiche Formfaktoren stark abschneiden. So liefern zum Beispiel auch die Abschneideparameter

$$\Lambda_{PPK^*} = 2.2 \text{ GeV}; \quad \Lambda_{PP\rho} = \Lambda_{PP\omega} = 3.2 \text{ GeV} \quad (3.24)$$

eine mit den experimentellen Beobachtungen vereinbare Polposition für das gebildete KD -Molekül. Es muss jedoch klar sein, dass eine solche Parametrisierung auch eine unterdrückte Anknüpfung an den $D_s^+\pi^0$ -Kanal und somit eine zu schmale Breite

Abbildung 3.9: Grafische Darstellung der $D_s^+\pi^0$ -Produktion

der Resonanz bedingt. Da wir die Breite des isoskalaren KD -Moleküls schon im Rahmen des Spielzeugmodells diskutiert haben und sie ohnehin nicht vom Experiment aufgelöst wird, falten wir unsere berechneten Wirkungsquerschnitte mit der experimentellen Breite von 10 MeV und ignorieren sie in der weiteren Diskussion.

Die in den experimentellen invarianten $D_s^+\pi^0$ -Massenspektren (Abbildung 3.1) auftretende $D_{sJ}^*(2317)$ -Resonanz kann entweder durch eine initiale Produktion eines Isoskalars oder durch die Produktion eines Isovektors, der Isospin brechend an den isoskalaren Kanal koppelt, produziert werden. Wir modellieren daher die in Abbildung 3.9 dargestellte Produktion durch zwei konstante Produktionsoperatoren. Einer produziert isoskalare KD -Paare ($C_{KD,I=0}^{Prod}$), der andere erzeugt isovektorielle KD -Paare ($C_{KD,I=1}^{Prod}$). Die Endzustandswechselwirkung innerhalb des produzierten KD -Paares berücksichtigen wir in Form der $KD \rightarrow D_s^+\pi^0$ - T -Matrix. Wechselwirkungen des K - bzw. D -Mesons mit eventuell produzierten anderen Teilchen vernachlässigen wir. Damit ergibt sich für die Produktionsamplitude:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \int d^3 k'' C_{KD,I=1}^{Prod} G_l(\vec{k}''; E) T_{KD,I=1 \rightarrow D_s^+\pi^0}(\vec{k}'', \vec{k}; E) \\ & + \int d^3 k'' C_{KD,I=0}^{Prod} G_l(\vec{k}''; E) T_{KD,I=0 \rightarrow D_s^+\pi^0}(\vec{k}'', \vec{k}; E) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Hierbei ist G der Propagator der Blankenbecler-Sugar Gleichung, die auch bei der Berechnung der T -Matrix verwendet wird. Schauen wir uns nun die zwei Extremfälle $C_{KD,I=0}^{Prod} = 0$ bzw. $C_{KD,I=1}^{Prod} = 0$ in Abbildung 3.10 an, so erkennen wir, dass bei reiner isovektorieller Produktion ein KD -Molekül die experimentellen Daten nicht zu beschreiben vermag, während dies bei isoskalarer Produktion möglich ist. Der Grund hierfür war schon in Abschnitte 3.3.1 beschrieben. Bei isoskalarer Produktion ist eine Isospinbrechung weniger nötig, damit das KD -Molekül zum Produktionsprozess beitragen kann. Damit ist das Verhältnis von der Stärke der Resonanz zu der Auswirkung des sich öffnenden KD -Kanal um einen Faktor von ≈ 500 zugunsten der Resonanz verschoben. Betrachtet man zusätzlich die Produktion über den $D_s^+\pi^0$ - bzw. über den $D_s^+\eta$ -Kanal, so verhalten sich diese Kanäle analog der isovektoriellen bzw. der isoskalaren Produktion.

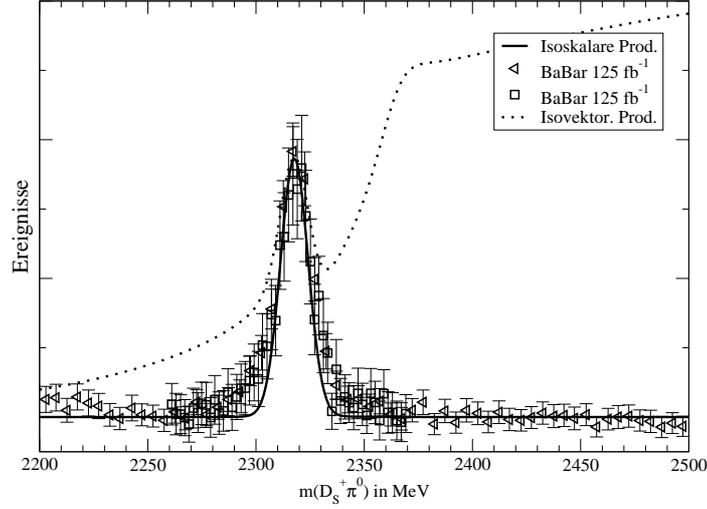


Abbildung 3.10: $D_s^+ \pi^0$ -Massenspektrum für eine isoskalare (durchgezogene Linie) und eine isovektorielle Produktion (gepunktete Linie). Die experimentellen Daten entsprechen der Messung durch die BaBar Kollaboration [22], dargestellt mit unterschiedlicher Rasterung der Masse. Hierbei haben wir den in [22] abgeschätzten Hintergrund subtrahiert.

Als nächstes wollen wir den Einfluss untersuchen, den die Präsenz eines weiteren Pols z.B. eines $q\bar{q}$ -Zustandes auf die Vorhersagen unseres Modells hat. Dies ist besonders interessant, wenn Experimente Breiten größer 460 keV ergeben, die wir in unserem Modell nur mit Hilfe von weiterer Isospinbrechung –z.B. aus $\pi^0 \eta$ -Mischung bei der Ankopplung an eine weitere genuine Resonanz– erklären können. Eine genauere Bestimmung der $\pi^0 \eta$ - und $\rho^0 \omega$ -Mischungswinkel kann dazu führen, dass wir schon bei kleineren Breiten die Präsenz eines weiteren Isoskalars folgern müssen. Da wir hier eine Streugleichung mit zwei isoskalaren Polen betrachten, ist es interessant wie diese mischen, um die physikalischen Zustände zu formen. Um Gleichung (3.14) auch zur Bestimmung des Mischungswinkels zwischen dem KD -Molekül und einer genuine Resonanz verwenden zu können, betrachten wir die Streumatrix am dynamischen Pol. Dort und nur dort lässt sie sich eindeutig nach Pol- und Nichtpolanteil zerlegen und als

$$\mathcal{M}(s; \vec{k}, \vec{k}') = \Gamma(s; \vec{k}) \frac{1}{s - M_{KD}^2} \bar{\Gamma}(s; \vec{k}') + \mathcal{R}(s; \vec{k}, \vec{k}') \quad (3.26)$$

schreiben. Hierbei ist M_{KD}^2 die komplexe Polposition des KD -Moleküls und $\Gamma = N\tilde{\Gamma}$ kann als Eigenwert der Systemgleichung

$$\tilde{\Gamma}(s; \vec{k}) = \int d^3k' V(s; \vec{k}, \vec{k}') G(s; \vec{k}') \tilde{\Gamma}(s; \vec{k}') \quad (3.27)$$

berechnet werden (siehe Anhang C.1). Mithilfe dieser Zerlegung können wir nun am dynamischen Pol das Übergangspotential zwischen dem KD -Molekül und dem genuinen Zustand bestimmen:

$$\langle D_{s0}^{KD} | H | D_{s0}^{q\bar{q}} \rangle = \int d^3k \Gamma(M_{KD}^2; \vec{k}) G(M_{KD}^2; \vec{k}) V_{D_{s0}^{q\bar{q}} \rightarrow KD} \quad (3.28)$$

Hierbei ist $V_{D_{s0}^{q\bar{q}} \rightarrow KD}$ durch die Lagrange-Funktion (3.4) zusammen mit dem entsprechenden Isospin- und Formfaktor ($\Lambda = 3580$ MeV; $M = 2317$ MeV) bestimmt. Anstatt diese Wahl des s -Kanal-Formfaktors zu rechtfertigen, sei angemerkt, dass der dynamische Pol bei allen Rechnungen in der Nähe von 2317 MeV liegt und somit der Formfaktor nur minimale Modifikationen bewirkt. Die Normierung N des Molekülzustandes ist durch (3.26) gegeben, da wir jedoch $\tilde{\Gamma}$ als Eigenwert der Systemmatrix berechnen, benutzen wir zur Normierung des Molekülzustandes Gleichung (3.29), deren Herleitung man in [86] findet.

$$|N|^{-2} = \left| - \int d^3k \tilde{\Gamma}_k \frac{\partial G_k}{\partial s} \Big|_0 \Gamma_k - \int d^3k \int d^3k' \tilde{\Gamma}_k G_k \frac{\partial V_{k,k'}}{\partial s} \Big|_0 G_{k'} \Gamma_{k'} \right| \quad (3.29)$$

Wenn wir nun die Auswirkungen der Beimischung eines genuinen Pols berechnen, vernachlässigen wir neben der k^2 -Abhängigkeit des Mischungswinkels $\theta(q^2)$ auch etwaige Imaginärteile im Übergangspotential (z.B. $D_s^+ \pi^0$ -Beimischung im KD -Molekül). Unter dem Gesichtspunkt dieser Vereinfachungen bevorzugen wir eine Berechnung in der Isospinbasis ohne Ankopplung des $D_s^+ \eta$ -Kanals. Hierbei wählen wir einen generellen Abschneideparameter $\Lambda = 3.3$ GeV. Mit diesem Parameter hat dann die Wellenfunktion des KD -Moleküls ohne Beimischung einer zweiten Resonanz die Wellenfunktion (3.30) im Impulsraum, die wir in Abbildung 3.11 zeigen.

$$\psi_{KD}(k) = \mathcal{N} G(M_{KD}^2, k) \Gamma(M_{KD}^2, k) \quad (3.30)$$

Hierbei ist \mathcal{N} die in [86] definierte Normierungskonstante.

Mit den durch (3.11) und (3.28) definierten Mischungswinkeln zwischen dem Molekülzustand und einem beliebigen isoskalaren Zustand ohne Meson-Meson Anteil können wir nun quantifizieren zu welchem Anteil ein in Anwesenheit einer genuinen Resonanz erzeugter Zustand aus der Meson-Meson Dynamik entspringt. In [29] haben Baru et al. in Anlehnung an das Weinberg-Argument über die nicht elementare Struktur des Deuterons [173–175] einen anderen Zugang gewählt, um die effektive Reichweitenparametrisierung der Streumatrix (3.31) mit der Struktur einer Resonanz in Verbindung zu setzen.

$$\mathcal{M} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r k^2 - i k} \quad (3.31)$$

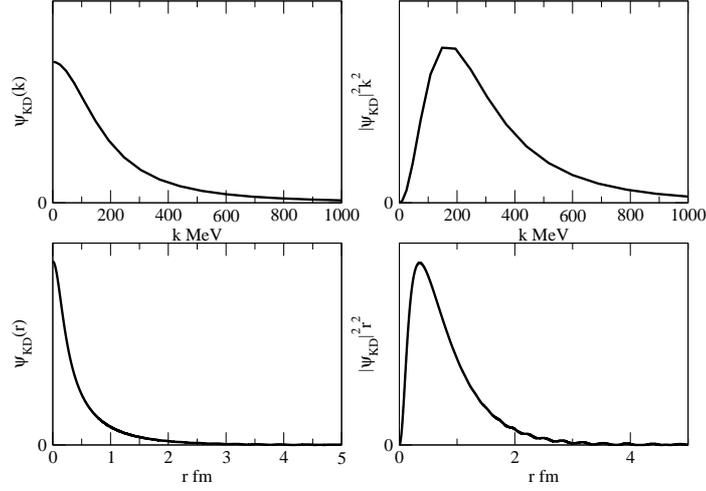


Abbildung 3.11: Die Wellenfunktion eines reinen KD -Moleküls und die Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Orts- und Impulsraum.

Die Autoren merken an, dass eine große Beimischung eines Zustandes, dessen Ursprung außerhalb der Meson-Meson Dynamik liegt, mit großen (im Vergleich zu der Reichweite der Kräfte) negativen Streulängen r einhergeht. In unserem Fall koppelt der betrachtete Zustand nur schwach an die offenen Kanäle und hat somit geringe Breite. Dies ermöglicht uns, nicht auf die durch Baru et al. erschlossenen Analysemöglichkeiten für zerfallende Teilchen zurückzugreifen sondern in guter Näherung direkt Weinbergs Argumente über stabile Teilchen zu verwenden, die zu der gleichen Aussage führen. Ohne die Herleitungen aus [173–175] zu wiederholen, skizzieren wir die für uns relevanten Aussagen. Man betrachte den Zustandsraum als Zusammensetzung aus Kontinuumszuständen $|KD(q)\rangle$ und einem oder mehreren diskreten Zuständen $|D_{s_0}^{*i}\rangle$. –Die Namen lehnen sich an die KD -Streuung an, sind aber als Platzhalter für ein beliebiges System zu sehen.– Man definiert den Renormalisierungsfaktor Z durch

$$Z = \sum_i |\langle D_{s_0}^{*i} | D_{s,J}^*(2317) \rangle|, \quad (3.32)$$

was dem Anteil der nackten Zustände in der betrachteten Resonanz entspricht. Die entscheidende Beobachtung ist nun das Verhalten $Z \rightarrow 0$ im Grenzfall einer unendlichen nackten Masse $H_0 |D_{s_0}^*\rangle = E_0 |D_{s_0}^*\rangle$ des diskreten Zustandes. Dieses Verhalten zeigt sich in der Streulänge und in der effektiven Reichweite:

$$a = \frac{2(1-Z)}{2-Z} R + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad (3.33)$$

$$r = -\frac{Z}{1-Z} R + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad (3.34)$$

Hierbei ist $1/\beta$ die Reichweite der Kräfte und $R = 1/\sqrt{2\mu\epsilon}$ mit der reduzierten Masse μ und der Bindungsenergie ϵ . Den Bezug zwischen dem Grenzfall der unendlichen nackten Masse und einem Bindungszustand liefert nun die Feststellung, dass man zu einer Theorie ohne elementare Teilchen und mit einem Potential V zwischen den Kontinuumszuständen durch Wahl einer Vertexfunktion Γ eine Theorie mit einem Quasiteilchen $|D_{s0}^*\rangle$ und einem reduzierten Potential \tilde{V} konstruieren kann.

$$\langle KD_{q'}|\tilde{V}|KD_q\rangle = \langle KD_{q'}|V|KD_q\rangle - \langle KD_{q'}|V|\Gamma\rangle \langle \bar{\Gamma}|V|KD_q\rangle \quad (3.35)$$

$$\langle KD_{q'}|\tilde{V}|D_{s0}^*\rangle = \sqrt{E_0} (\langle \bar{\Gamma}|V|\Gamma\rangle - 1) \langle KD_{q'}|V|\Gamma\rangle \quad (3.36)$$

$$\langle D_{s0}^*|\tilde{V}|D_{s0}^*\rangle = -E_0 \langle \bar{\Gamma}|V|\Gamma\rangle \quad (3.37)$$

Soll die neue Theorie identische physikalische Vorhersagen liefern, dann muss das eingefügte Quasiteilchen unendliche nackte Masse haben und der Renormierungsfaktor für ein solches Teilchen verschwinden. Die Forderung nach unendlicher nackter Masse kann man sich anhand unseres Modells veranschaulichen, wenn man ein elementares Teilchen mit der Masse M des Moleküls einfügt. Man betrachte den Selbstenergiebeitrag für ein Elementarteilchen:

$$\begin{aligned} \Sigma(s = M^2) &= \int d^3k f(k)G(s, k)f(k) \\ &+ \int d^3k \int d^3k' f(k')G(s, k')T^{ns}(s; k', k)G(s, k)f(k) \quad (3.38) \end{aligned}$$

Hierbei ist $f(k)$ die Vertexfunktion mit der das Elementarteilchen an den Meson-Meson Kanal koppelt und G der Meson-Meson Propagator. Die Existenz eines Moleküls bedeutet nun aber, dass die ohne s -Kanalpotential berechnete T -Matrix T^{ns} einen Pol bei der Masse M des Moleküls besitzt und somit $m_0^2 - \Sigma(M^2) = M^2$ eine unendliche nackte Masse für das Elementarteilchen fordert.

In Abbildung 3.12 zeigen wir die inversen isoskalaren KD -Streuamplituden für unterschiedliche Realisierungen des $D_{sJ}^*(2317)$. Dabei haben wir folgende Parametrisierungen benutzt:

- a) Feinabstimmung des Abschneideparameters $\Lambda = 3.336$ GeV zur Anpassung des dynamischen Pols an die Masse des $D_{sJ}^*(2317)$. (Zur Berechnung der Polparameter sei auf Anhang C.1 verwiesen.)
- b) Die Bindung des KD -Moleküls durch $\Lambda = 2.3$ GeV verringert und einen genuinen Quarkzustand mit $g_{KDD_{s0}} = 0.3861$ und $M_{D_{s0}}^0 = 2.48$ GeV angekoppelt. Nach (3.28) entspricht dies einem Mischungswinkel $\theta = 5.4^\circ$.

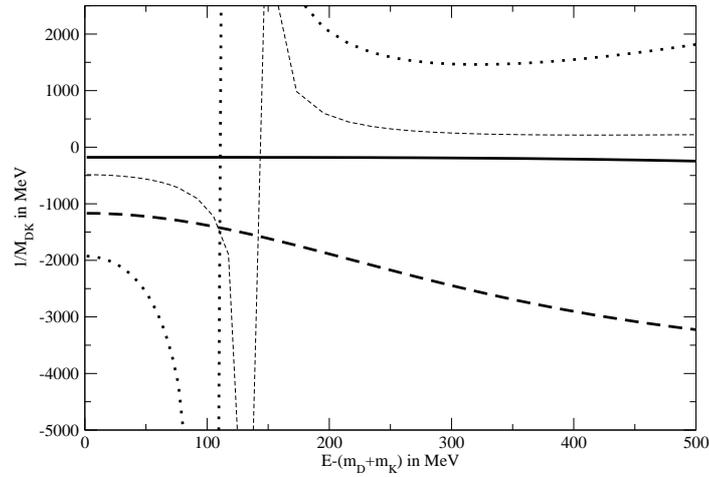


Abbildung 3.12: Inverse isoskalare KD -Streuamplituden: Fett durchgezogen: reines KD -Molekül; Fett gestrichelt: elementares $D_{sJ}^*(2317)$ (dünn gestrichelt=9% KD -Molekülbeimischung); gepunktet: elementares $D_{sJ}^*(2317)$ mit dynamischem KD -Pol oberhalb der KD -Schwelle

Modell	a)	b)	c)	d)
$1/a$	-200 MeV	-480 MeV	-1100 MeV	-1910 MeV
r	-0.001 MeV ⁻¹	-0.068 MeV ⁻¹	-0.061 MeV ⁻¹	-0.508 MeV ⁻¹

Tabelle 3.8: Effektive Reichweitenparameter für die Modelle a)–d). Die Parameter a und r sind in (3.31) erklärt.

- c) Durch eine Reduktion des t -Kanal-Potentials ($g_{\rho\pi\pi} = 0.1 * 6.040$) wurde die Bildung eines Moleküls verhindert und stattdessen ein Elementarteilchen mit $g_{KDD_{s0}} = 1.5445$ und $M_{D_{s0}}^0 = 2.607$ GeV angekoppelt.
- d) Die Polposition des dynamischen Pols wurde mittels Λ kurz oberhalb der KD -Schwelle gewählt und ein Elementarteilchen mit $g_{KDD_{s0}} = 1.61$ und $M_{D_{s0}}^0 = 2.63$ GeV angekoppelt.

Durch fitten an diese Kurven erhalten wir die in Tabelle 3.8 angegebenen Parameter für die effektive Reichweitenentwicklung. Man erkennt, dass in den Fällen eines reinen KD -Moleküls a) und eines reinen Elementarteilchens Weinbergs Vorhersagen über die effektiven Reichweiten (3.33,3.34) gut erfüllt sind. In den Fällen b) und d) haben wir eine andere physikalische Situation erzeugt, indem wir einen zweiten Pol in Kauf genommen haben, der näher an der Schwelle des KD -Kanals liegt als die Resonanz,

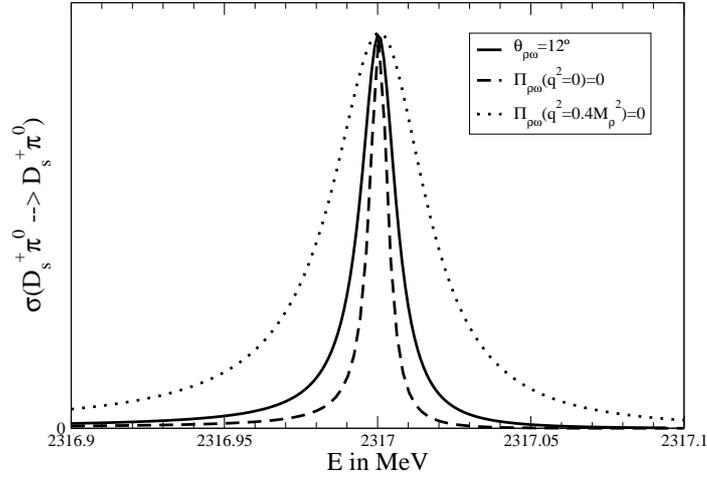


Abbildung 3.13: Vergleich der durch unterschiedliche k^2 -Abhängigkeit des Mischungswinkels erzeugte Breiten. Durchgezogen: $\theta_{\rho\omega} = 12^\circ$; gestrichelt: $\Pi_{\rho\omega}(k^2) = \frac{\Pi(k^2=M_\rho^2)}{M_\rho^2} k^2$; gepunktet: $\Pi_{\rho\omega}(k^2) = \frac{\Pi(k^2=M_\rho^2)}{0.6M_\rho^2} (k^2 - 0.4M_\rho^2)$. Für die k^2 -abhängigen Mischungswinkel gilt jeweils $\Pi_{\rho\omega}(k^2 = M_{\rho^2}) = -3800 \text{ MeV}^2$

die wir untersuchen wollen. So liegt zum Beispiel der dynamisch erzeugte Pol in b) bei 2360 MeV. In Abbildung 3.12 erkennt man sofort die durch die neue Situation entstandenen Nullstellen der Amplitude, die als Pole zu erkennen sind.

In Abschnitt 3.3.1 hatten wir die k -Abhängigkeit der $\rho\omega$ -Mischung vernachlässigt. Jetzt wollen wir mit Hilfe der Parametrisierungen $\Pi_{\rho\omega}(k^2) = \frac{\Pi(k^2=M_\rho^2)}{M_\rho^2} k^2$ und $\Pi_{\rho\omega}(k^2) = \frac{\Pi(k^2=M_\rho^2)}{0.6M_\rho^2} (k^2 - 0.4M_\rho^2)$ bestimmen, wie groß der Unterschied zu der Parametrisierung durch einen konstanten Mischungswinkel ist, insbesondere da die Extrapolation des Mischungswinkels bei der Verwendung in t -Kanalpotentialen über die Nullstelle der Parametrisierung hinausgeht. Wir haben in Abbildung 3.13 zwei Beispiele für die Parametrisierung der Überlappfunktionen dargestellt. Das relative Verhalten zwischen den beiden k^2 -abhängigen Parametrisierungen rührt aus der Tatsache, dass die Mischung bei negativem k^2 in die Rechnung eingeht. Weil die Stärke bei $\Pi_{\rho\omega}(k^2 = M_{\rho^2})$ fixiert ist, führt die Verlagerung des Nulldurchgangs hin zu positiven k^2 zu einer stärkeren Mischung im relevanten raumartigen Bereich, was man deutlich an der größeren Breite erkennt. Argumente im Vergleich mit einem konstanten Mischungswinkel sind problematisch, da die Annahme einer konstanten Mischung zu einer anderen Phasenlage relativ zu den übrigen Isospin brechenden Potentialen führt. Es sei daher nur darauf hingewiesen, dass die Breite aus der konstanten Mischung im Rahmen der Breiten aus den k^2 -abhängigen Überlappementen bleibt und dass deren Streuung (28 keV) verglichen mit den in Tabelle 3.6 berechneten Bandbreiten eine

untergeordnete Rolle spielt. Wir dürfen also davon ausgehen, dass sich die Ergebnisse aus unserem Spielzeugmodell nicht signifikant ändern, falls wir eine k^2 -Abhängigkeit des $\rho\omega$ -Mischungswinkels berücksichtigen.

Auch wenn andere Autoren ihrer Erwartung Ausdruck verliehen haben, dass die Wechselwirkung für die D -Mesonen noch eher zur Molekülbildung neigt als dies schon für die Kaonen der Fall war [56], so müssen wir uns doch abschließend die Frage stellen, ob die aus den $SU(4)$ -Relationen gewonnenen Kopplungskonstanten eine der Physik angemessene Näherung darstellen. Dies gilt insbesondere, da die $SU(4)$ -Symmetrie im Massensektor offensichtlich sehr stark gebrochen ist. Während die Particle Data Group [64] für die Zerfallsbreiten des D^{*0} (2007) und des D_s^* nur obere Grenzen zitiert, stehen mit der Messung durch CLEO [16] für das $D^{*\pm}$ (2010) partielle Zerfallsbreiten zur Verfügung (Tabelle 3.9). Wir wollen diese nutzen, um unsere Abschätzung für die Kopplungskonstanten des $D^{*\pm}$ an $D\pi$ zu testen. Hierzu setzen wir den Imaginärteil der Selbstenergie mit der Zerfallsbreite durch (3.39) in Verbindung

$$\Gamma = -\frac{\Im\Sigma(s = M_R^2)}{M_R}. \quad (3.39)$$

Wir nehmen nun an, dass unser Potential in guter Näherung separabel ist und wir den Imaginärteil der Selbstenergie –wie in Anhang C.4 erläutert– als

$$\Im\Sigma(M_R^2) = -\frac{2}{3} \frac{g^2}{4\pi} \frac{k^3(M_R^2; m_1, m_2)}{M_R} n F_{iso} \quad (3.40)$$

berechnen können. Hierbei sind n , F_{iso} und g^2 die aus dem Vektormeson- s -Kanal-Austauschpotential zu bestimmenden Normierungsfaktoren, Isospinfaktoren und Kopplungskonstanten und M_R die Masse des ausgetauschten/zerfallenden Vektormesons sowie $k(M_R^2; m_1^i, m_2^i)$ der Relativimpuls der Zerfallsprodukte mit den Massen m_1 und m_2 . Vergleicht man den $\rho\pi\pi$ -Vertex (B.22.63) mit den $D\pi D^*$ -Vertices (B.22.33),(B.22.39), so erhält man für das Produkt $g^2 n F_{iso}$:

$$g^2 n F_{iso} = \begin{cases} 2g_{\rho\pi\pi}^2 & \text{für } D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+ \\ 1g_{\rho\pi\pi}^2 & \text{für } D^{*+} \rightarrow D^+\pi^0 \end{cases} \quad (3.41)$$

Mit diesen Formeln berechnen wir die in Tabelle 3.9 aufgeführten Zerfallsbreiten. Man erkennt, dass die Vorhersagen mit den Messungen im Rahmen der experimentellen Fehler im Einklang stehen bzw. diese unterschätzen. Dies gilt insbesondere, wenn man sich die Vorhersagen für $g_{\rho\pi\pi}^s = 5.3$ ansieht. Zwar rechnet man im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austauschbildes mit einem Wert von $g_{\rho\pi\pi} = 6.04$, den man aus der Zerfallsbreite des ρ -Mesons ermittelt, aber man verwendet für s -Kanal Pol-Graphen eine reduzierte Kopplungskonstante um $g_{\rho\pi\pi}^s = 5.3$. Insgesamt können

Zerfallskanal	experimentelle Breite	$g_{\rho\pi\pi}^t = 6.04$	$g_{\rho\pi\pi}^s = 5.3$
$D^{*+} \rightarrow D^0\pi^+$	64 ± 18 keV	52 keV	38 keV
$D^{*+} \rightarrow D^+\pi^0$	29 ± 8 keV	26 keV	19 keV

Tabelle 3.9: $SU(4)$ Vorhersagen für die Zerfallsbreiten des $D^{*+}(2317)$ im Vergleich mit den experimentellen Werten aus [16]. Die Spalten mit den $SU(4)$ -Vorhersagen sind mit der verwendeten Kopplungskonstante $g_{\rho\pi\pi}$ beschriftet.

wir also davon ausgehen, dass unsere Abschätzung der Kopplungskonstanten durch $SU(4)$ -Symmetrie Werte der richtigen Größenordnung liefert und vielleicht sogar die wahren Kopplungen unterschätzt. Außerdem ist anzumerken, dass eine reduzierte Kopplungsstärke zwar die Polposition verschiebt, die Vorhersage einer Molekülbildung jedoch lange stabil bleibt.

3.4 Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, dass das Mesonen-Austauschpotential im isoskalaren KD -Kanal attraktiv genug ist, um ein KD -Molekül zu bilden. Dies ist im isovektoriellen Kanal nicht der Fall. Die zugrunde gelegte Abschätzung der Kopplungskonstanten erscheint aus der Perspektive der bisher gemessenen Zerfallsbreiten von D^* -Mesonen vernünftig gewählt. Wollen wir die von BaBar, Cleo und Belle gemessene Struktur bei 2317 MeV in den $D_s^+\pi^0$ -Massenspektren aus Elektron-Positron-Annihilation nur durch das geformte Molekül erklären, so müssen wir eine dominante isoskalare primäre Produktion annehmen, da im Fall einer dominanten isovektoriellen Produktion die Molekülstruktur durch Isospinerhaltung so stark unterdrückt wird, dass ihre Auswirkung auf das Massenspektrum im Vergleich zu den Auswirkungen der KD -Schwelle klein ist. Ferner haben wir die Auswirkung von Isospin brechenden Prozessen auf die Struktur des Moleküls betrachtet und erhielten für die Zerfallsbreite eine Abschätzung von 100-450 KeV. Dies liegt im Rahmen anderer phenomenologischer Abschätzungen aber um mehr als einen Faktor 5 über den Vorhersagen von Modellen, welche die beobachtete Resonanz durch $q\bar{q}$ unterschiedlicher Ausprägung beschreiben. Für die im Rahmen von chiralen-Doppler-Szenarien und Konstituenten-Quark-Modellen vorhergesagten Zustände des untersuchten Massenbereichs ist anzumerken, dass der durch die Unitarisierung entstehende Pol in der KD -Streumatrix T_{KD} dafür sorgt, dass diese Zustände einer starken Renormierung ihrer Masse unterworfen sind. Die Verwendung von Konstituenten-Quarks parametrisiert zwar einen großen Teil der Wechselwirkung

aber die vorhergesagten Objekte sind nicht wechselwirkungsfrei und somit der hier beschriebenen Dynamik unterworfen. Eine Betrachtung der KD -Streuung im isoskalaren Kanal kann im Fall eines schwach gebundenen KD -Moleküls nicht durchgeführt werden, da dann der entsprechende Pol zwischen der zu untersuchenden Resonanz und der KD -Schwelle liegt. Eine Messung der Breite ist aus unserer Sicht sehr interessant, da eine Breite von mehr als 450 keV stark auf die Präsenz einer nicht aus der Meson-Meson Dynamik stammenden Resonanz deutet, die zu weiterer Isospinbrechung führt. Die niedrigen Breiten für die nichtmolekulare Realisierung der $D_{sJ}^*(2317)$, obwohl die von uns betrachteten Isospin brechenden Prozesse präsent sind, erklärt sich dadurch, dass diese schwächer als unser Molekül an den KD -Kanal ankoppeln.

Kapitel 4

Das $a_0(980)$ in der Reaktion

$$pp \rightarrow dK^+ \bar{K}^0$$

4.1 Modellierung der Produktion

Wir wollen uns den Einfluss der Meson-Meson Endzustandswechselwirkung in der Reaktion $pp \rightarrow dK^+ \bar{K}^0$ ansehen, wobei wir ein besonderes Augenmerk auf den Einfluss des $a_0(980)$ legen. Dieser Zustand wird im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austauschmodells weder als genuine $q\bar{q}$ -Resonanz noch als Bindungszustand der Meson-Meson Wechselwirkung sondern als Schwelleneffekt beschrieben (Eine genauere Beschreibung findet sich in Abschnitt 2.2). Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir zunächst eine Parametrisierung der Produktion angeben. In diesem Zusammenhang wird oft das Zweischrittmodell von M.A. Abolins [3, 84] verwendet. Wenn man sich jedoch die beitragenden Prozesse (Abbildung 4.1) ansieht, so stellt man fest, dass eine Verwendung unseres Modells für die Endzustandswechselwirkung zusammen mit dieser Parametrisierung der Produktion zu einer Vernachlässigung der dominanten Beiträge führen würde. Unser Modell enthielte nämlich nur die nichtresonanten Prozesse, weil das $a_0(980)$ als reiner Effekt der Endzustandswechselwirkung parametrisiert ist. Somit entfielen die Prozesse a), b) und c) aus Abbildung 4.1. Es verblieben die Prozesse 4.1.d) und 4.1.e). In [84] wurde nun aber die relative Bedeutung der fünf verschiedenen Produktionsmechanismen untersucht. Es zeigte sich, dass bis zu einer Überschussenergie von bis zu 100 MeV die resonanten Beiträge (Abbildung 4.1a,b & c) dominant sind. Die π - K^* - π -, K - und π - K^* - η -Austauschbeiträge sind nur für 0.2% bis 10% des Wirkungsquerschnittes verantwortlich. Folglich hätten wir die dominanten Terme vernachlässigt. Um diese dominanten Beiträge auch in unserem Modell zu berücksichtigen, benutzen wir drei-Meson-zwei-Baryon sowie vier-Meson Kontakt-

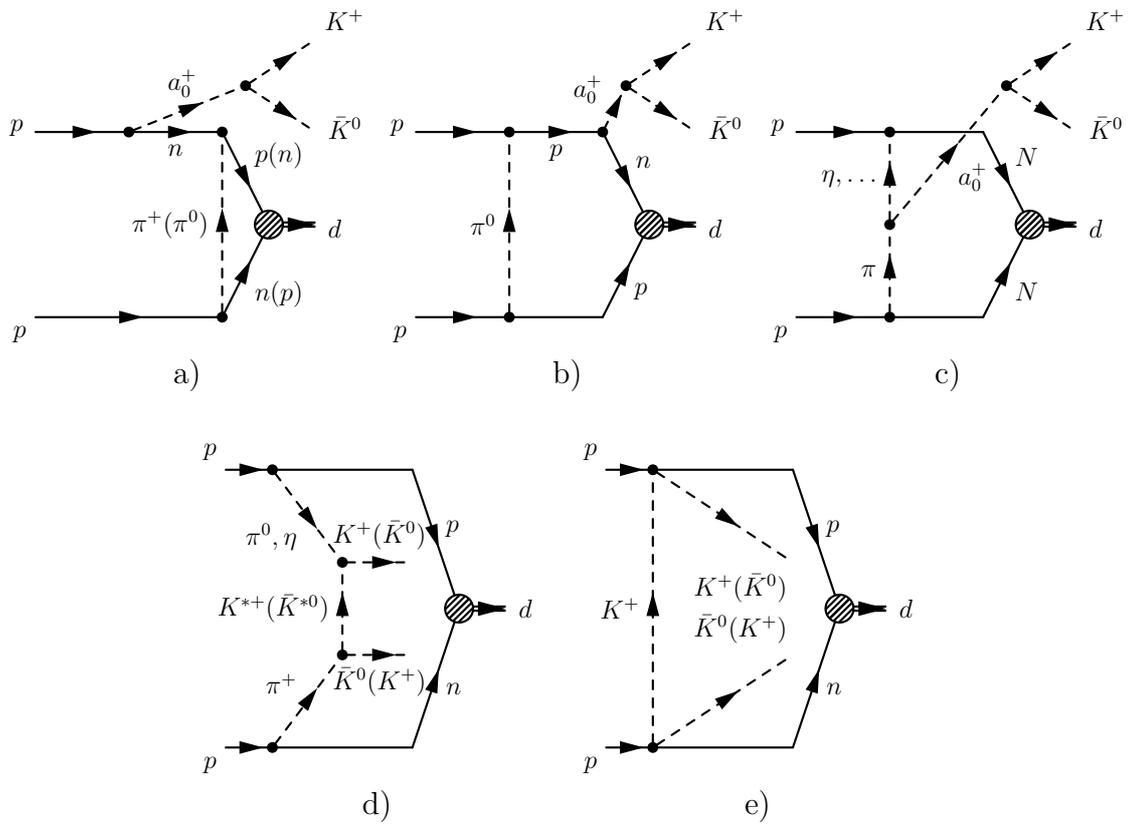


Abbildung 4.1: Diagramme, die im Rahmen des Zweischnittmodells zur Reaktion $pp \rightarrow dK\bar{K}$ beitragen.

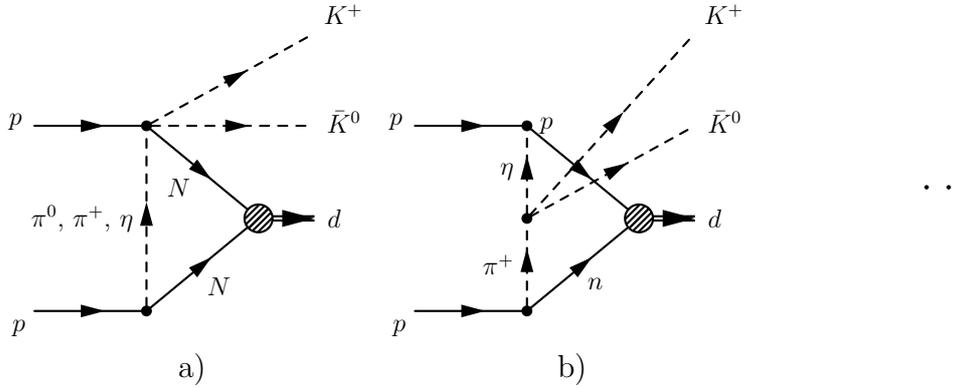


Abbildung 4.2: Gezeigt sind die Diagramme, die in der Beschreibung der Produktion $pp \rightarrow dK\bar{K}$ durch das unitarisierte chirale Modell [145] berücksichtigt wurden. Die Auslassung steht für eine Gruppe mit identischen Graphen, in denen die beiden Baryonen ihre Rollen vertauscht haben.

wechselwirkungen. Hierzu bilden wir nicht den Grenzwert eines unendlich schweren $a_0(980)$ sondern machen uns zunutze, dass die relevanten Amplituden schon im Rahmen des unitarisierten chiralen Modells berechnet wurden und somit eine effektive Parametrisierung für diese Produktion zur Verfügung steht. Der Vollständigkeit halber zitieren wir an dieser Stelle nicht nur das in [145] gegebene Ergebnis für die Produktionsamplitude sondern skizzieren darüber hinaus die getroffenen Annahmen. Die Autoren von [145] gehen von den in Abbildung 4.2 dargestellten Graphen aus. Die Auslassung steht hier für die gleiche Gruppe von Graphen mit vertauschten Rollen für die beiden Baryonen. Die funktionale Form des drei-Meson-zwei-Baryon Vertex wurde in [132] explizit angegeben. Der in unserem Fall relevante Teil lautet:

$$\mathcal{L}_1^{(B)} = \frac{5}{8} (\bar{n}\gamma^\mu\gamma_5 u_\mu^{(21)} p + \bar{p}\gamma^\mu\gamma_5 u_\mu^{(11)} p) \quad (4.1)$$

mit

$$u_\mu^{(21)} \propto \frac{3}{\sqrt{2}}\pi^0 (\partial_\mu K^0 K^- - \partial_\mu K^- K^0) + \sqrt{6}\partial_\mu \eta K^0 K^- \quad (4.2)$$

$$u_\mu^{(11)} \propto \partial_\mu \pi^+ K^0 K^- + \pi^+ K^- K^0 - 2\pi^+ \partial_\mu K^0 K^- \quad (4.3)$$

Die vollständige Form der $SU(3)$ -Matrix u_μ findet sich in [132]. Daraus ergibt sich, dass sich Prozesse, die dem Diagramm a) aus Abbildung 4.2 entsprechen, im Grenzfall nichtrelativistischer auslaufender Teilchen als Kombination von Amplituden der in

Gleichung 4.4 aufgeführten Form darstellen lassen.

$$\begin{aligned} a) \quad & \sigma_1 p_1 \sigma_2 (p_{K^+} - p_{\bar{K}^0}) + \sigma_1 (p_{K^+} - p_{\bar{K}^0}) \sigma_2 p_1 \\ b) \quad & -\sigma_1 p_1 \sigma_2 p_d - \sigma_1 p_d \sigma_2 p_1 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hier bezeichnet p_1 den Impuls eines einlaufenden Protons und $\sigma_{1/2}$ bezieht sich auf die obere bzw. untere Nukleonlinie des Diagramms 4.2a). Der in 4.2b) dargestellte Produktionsprozess hat ebenfalls die aus Gleichung 4.4b) bekannte Form, sodass wir die Kaonenproduktion in der Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ durch diese beiden Amplituden parametrisieren werden, obgleich uns bewusst ist, dass dies nicht die allgemeinste Form ist. Beide Amplituden haben die Form:

$$\mathcal{M} = \sigma_1 p_1 \sigma_2 Q + \sigma_1 Q \sigma_2 p_1 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} Q = p_{K^+} - p_{\bar{K}^0} & \text{für } a) \\ Q = -p_d & \text{für } b) \end{cases} \quad (4.5)$$

Projiziert man diese Form auf Zustände mit definiertem Gesamtspin S, S_z , so ergibt sich die in 4.6 gegebene Form.

$$\langle S = 1, S_z = \alpha | \mathcal{M} | S = 1, S_z = \beta \rangle = \eta_{\alpha\beta} \frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}} |p_q| |Q| Y_{1,\alpha-\beta}(\hat{Q}) \quad (4.6)$$

Hierbei ist \hat{Q} der Einheitsvektor in Richtung Q und $Y_{l,m}$ die Kugelflächenfunktion sowie $\eta_{\text{Reihe,Spalte}}$ die Matrix mit den Einträgen:

$$\eta = \begin{pmatrix} +1 & -1 & 0 \\ +1 & -1 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Man erkennt hieraus, dass Beiträge mit der Struktur von Amplitude 4.5a) einer Produktion der Kaonen in relativer P -Welle entsprechen während die Struktur der Amplitude 4.5b) Kaonen in relativer S -Welle produziert, wobei eine relative P -Welle zwischen dem Kaon-Antikaon System und dem auslaufenden Deuteron vorliegt. (Relative S -Welle bei Amplitude a))

Bevor wir zu unserem eigentlichen Ziel der Meson-Meson Endzustandswechselwirkung kommen, gilt es noch die Wechselwirkung der Kaon-Deuteron Systeme zu behandeln. Da die Wechselwirkung von K^+ und Neutron sowie die Wechselwirkung von K^+ und Proton schwach sind [102, 103], können wir diese vernachlässigen. Im Gegensatz hierzu findet man im $\bar{K}^0 n$ -Kanal die $\Lambda(1405)$ Resonanz knapp unterhalb der Schwelle [54, 146]. Daraus resultiert eine relativ starke $\bar{K}^0 n$ -Wechselwirkung, die z.B. durch

a	b	c
$4.32 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}^{-3}$	$-1.55 \cdot 10^{-2} \text{ MeV}^{-2}$	0.13 MeV^{-1}

b'	c'
$1.1 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}^{-2}$	$-1.5 \cdot 10^{-1} \text{ MeV}^{-1}$

Tabelle 4.1: Parameter der $T_{\bar{K}d}$ -Extrapolationsformel(4.8). Die Parameter a, b und b' wurden anhand der theoretischen Überlegungen aus [146] fixiert.

Oller und Meißner im Rahmen des unitarisierten chiralen Modells berechnet wurde [141]. Auf dieser Grundlage wurde zum Beispiel durch [104] eine $\bar{K}d$ -Streulänge von $-1.615 + i1.909$ fm berechnet, die von [145] bis zum kinematischen Bereich schwellen-naher Experimente extrapoliert wurde. Die verwendete Formel ist in Gleichung (4.8) gegeben und wird von uns als Startpunkt für unsere Untersuchungen verwendet(die Konstanten sind Tabelle 4.1 zu entnehmen). Es ist jedoch anzumerken, dass aktuelle Analysen [163](und enthaltene Referenzen) neuerer Daten [110] anscheinend viel geringere Streulängen bevorzugen.

$$\begin{aligned}
T_{\bar{K}d}(\tilde{m}_{\bar{K}n}) &= \begin{cases} t_{\bar{K}d}(\tilde{m}_{\bar{K}n}) & \text{für } m_{\bar{K}n} < 1.45 \text{ GeV} \\ t_{\bar{K}d}(1.45 \text{ GeV}) & \text{für } m_{\bar{K}n} > 1.45 \text{ GeV} \end{cases} \\
\Re t_{\bar{K}d}(\tilde{m}_{\bar{K}n}) &= a(\tilde{m}_{\bar{K}n} - m_0)^2 + b(\tilde{m}_{\bar{K}n} - m_0) + c \\
\Im t_{\bar{K}d}(\tilde{m}_{\bar{K}n}) &= b'(\tilde{m}_{\bar{K}n} - m_0) + c'
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Um noch eine Abschätzung für den Kaon-Deuteron Propagator $G_{\bar{K}d}$ zu erhalten, folgen wir wiederum der Argumentation aus [145] und nähern, obwohl die Rückstoßkorrekturen wegen der hohen Kaon-Masse groß sind, den Kaon-Deuteron Propagator durch den Antikaon-Nukleon Propagator $G_{\bar{K}N}$, der in [147] mit dem Ausdruck aus Gleichung (4.9) angegeben ist.

$$\begin{aligned}
G_l &= i2M_l \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(P-q)^2 - M_l^2 + i\epsilon} \frac{1}{q^2 - m_l^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{2M_l}{16\pi^2} \left\{ a_l(\mu) + 2 \ln \frac{m_l}{\mu} + \frac{M_l^2 - m_l^2 + s}{2s} 2 \ln \frac{M_l}{m_l} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\bar{q}_l}{\sqrt{s}} \left[\ln \frac{m_l^2 + M_l^2 - s - 2\bar{q}_l\sqrt{s}}{m_l^2 + M_l^2 - s + 2\bar{q}_l\sqrt{s}} + i\pi \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

In der zitierten Arbeit wurde die Subtraktionskonstante innerhalb einer N/D -

Rechnung für den $\bar{K}N$ -Kanal zu $a_{\bar{K}N}(\mu = 630\text{MeV}) = -1.84$ bestimmt. Aufgrund der oben angeführten Rückstoßkorrekturen sollten wir jedoch für diesen Wert eine Unsicherheit von ca. 30% annehmen. Unter Berücksichtigung dieser Annahmen wissen wir nun, dass die Amplitude $\mathcal{M}_{\bar{K}d}^S$ durch die Endzustandswechselwirkung nach der Gleichung

$$\mathcal{M}_{\bar{K}d}^S \rightarrow (1 + G_{\bar{K}d}(\tilde{s}_{\bar{K}n})T_{\bar{K}d}(\sqrt{\tilde{s}_{\bar{K}n}}))\mathcal{M}_{\bar{K}d}^S \quad (4.10)$$

modifiziert wird. Hierbei ist $\tilde{s}_{\bar{K}n} = (p_{\bar{K}^0} + p_d/2)^2$ das Quadrat der invarianten Anti-Kaon-Neutron Masse. Es verbleibt also, den Anteil der Amplitude mit \bar{K} und d in relativer S -Welle zu isolieren. Im Folgenden wird diese Zerlegung zunächst für die Kaonenproduktion in relativer P -Welle und dann für die Kaonenproduktion in relativer S -Welle vorgenommen. Da wir nur experimentelle Daten in Schwellennähe auswerten wollen, können wir den nichtrelativistischen Grenzfall verwenden und von der Gallileo-Invarianz ausgehen. Somit folgert man, dass für den Relativimpuls $2q$ der Kaonen im Gesamt-Schwerpunktsystem und für den Relativimpuls $2q'$ der Kaonen im $\bar{K}d$ -Schwerpunktsystem $2q = p_{K^+} - p_{\bar{K}^0} = 2q'$ gilt. So ergibt sich die Möglichkeit, die $\bar{K}d$ - S -Welle mit Hilfe der Identität

$$2|q|Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{q}) = 2|q'|Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{q}') = |p'_{K^+}|Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{K^+}) - |p'_{\bar{K}^0}|Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{\bar{K}^0}) \quad (4.11)$$

zu isolieren. Zunächst seien jedoch einige Beziehungen zwischen den Impulsen im Gesamtschwerpunktsystem und im gestrichenen $\bar{K}d$ -Schwerpunktsystem gegeben.

$$\begin{aligned} p'_{K^+} &= \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K}p_{K^+} \\ p'_{\bar{K}^0} &= p_{\bar{K}^0} + \frac{m_K}{M_d + m_K}p_{K^+} \\ p_d &= -\frac{M_d}{M_d + 2m_K}p'_{K^+} - p'_{\bar{K}^0} = -p_{K^+} - p_{\bar{K}^0} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Mithilfe der Beziehungen aus 4.12 rechnet man nun für die Produktion in relativer P -Welle:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^P &\propto f_{K\bar{K}}^P |p_{in}| |2q| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{q}) \\ &\stackrel{(4.11)}{=} f_{K\bar{K}}^P |p_{in}| [|p'_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{K^+}) - |p'_{\bar{K}^0}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{\bar{K}^0})] \\ &\stackrel{(4.10)}{\rightarrow} f_{K\bar{K}}^P |p_{in}| [(1 + G_{\bar{K}d}T_{\bar{K}d}) |p'_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{K^+}) - |p'_{\bar{K}^0}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{\bar{K}^0})] \\ &\stackrel{(4.12)}{=} f_{K\bar{K}}^P |p_{in}| \left[(1 + G_{\bar{K}d}T_{\bar{K}d}) \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K} |p_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_{K^+}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_K}{M_d + m_K} |p_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_{K^+}) - |p_{\bar{K}^0}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_{\bar{K}^0}) \right] \\ &\stackrel{(4.12)}{=} f_{K\bar{K}}^P |p_{in}| \left[|p_{K^+}| \left(2 + \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K} G_{\bar{K}d}T_{\bar{K}d} \right) Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_{K^+}) \right. \\ &\quad \left. - |p_d| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_d) \right] \end{aligned} \quad (4.13)$$

Für die beiden letzten Gleichungen wurde noch die Tatsache benutzt, dass die letzte Identität aus (4.11) für Summen beliebiger Vektoren gilt. Analog berechnet man für die Produktion der Kaonen in relativer S -Welle:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{M}^S &\propto f_{K\bar{K}}^S |p_{in}| |p_d| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_d) \\
&\stackrel{(4.10,4.12)}{\rightarrow} f_{K\bar{K}}^S |p_{in}| \left[(1 + G_{\bar{K}d} T_{\bar{K}d}) \frac{-M_d}{M_d + 2m_K} |p'_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{K^+}) \right. \\
&\quad \left. - |p'_{\bar{K}^0}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}'_{\bar{K}^0}) \right] \\
&\stackrel{(4.12)}{=} f_{K\bar{K}}^S |p_{in}| \left[|p_d| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_d) - G_{\bar{K}d} T_{\bar{K}d} |p_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_{K^+}) \right] \quad (4.14)
\end{aligned}$$

Mit den Gleichungen (4.13) und (4.14) haben wir eine Beschreibung für die Modifikation der Produktionsamplitude durch die $\bar{K}d$ -Wechselwirkung im Endzustand.

Wie angekündigt, wollen wir die Endzustandswechselwirkung der beiden Mesonen im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austauschbildes [99] beschreiben. Obwohl das Potential des Jülicher Modells nicht auf der Massenschale faktorisiert und somit die Verwendung von skalaren Schleifenfunktionen nicht exakt ist, so zeigen die Berechnungen im Kapitel 6 doch, dass die Annahme von punktförmigen Vertices und damit einhergehend skalaren Schleifenfunktionen als Propagatoren zu einer guten Annäherung an die experimentellen Daten führt. Dies ist nicht verwunderlich, da diese Eigenschaft für dem Jülicher Modell ähnliche Modelle bewiesen wurde [142]. Wir haben also die Möglichkeit, die zusätzliche Komplikation durch die Integration über den Impuls der Mesonen im Zwischenzustand zu vermeiden, indem wir die vollständigen Propagatoren durch skalare Schleifenfunktionen annähern. Die hierbei nötige Anpassung der Subtraktionskonstanten an die im Rahmen des Jülicher Modells verwendeten Abschneideparameter ist in Kapitel 6 beschrieben. Trotz alledem benutzen wir bei der Berechnung der Meson-Meson Wechselwirkung weiterhin die im Jülicher Modell getroffene Wahl für das Verhalten außerhalb der Massenschale. Da für die Antikaon-Deuteron Wechselwirkung kein Verhalten abseits der Massenschale definiert wurde, sollte diese Beschränkung auf den observablen Teil der Meson-Meson T -Matrix nicht als Schwachpunkt des Modells gewertet werden. Somit ist die Modifikation im Rahmen der Meson-Meson Endzustandswechselwirkung gegeben durch:

$$\mathcal{M}_{mm}^J \rightarrow \mathcal{M}_{mm}^J + \sum_{ii \in \{\pi\eta, K\bar{K}\}} T_{ii \rightarrow mm}^J I_{ii} \mathcal{M}_{ii}^J \quad \text{mit } mm \in \{\pi\eta, K\bar{K}\} \quad (4.15)$$

Hierbei steht I_{ii} für die in Kapitel 6 beschriebene Meson-Meson Schleifenfunktion. In unserem Modell betrachten wir zunächst nur die Wechselwirkungen von Mesonen in einer relativen S -Welle. Eine Erweiterung des Modells zur Berücksichtigung von P -Wellen ist trivial, erfordert jedoch aufgrund der im Jülicher Modell verwendeten unterschiedlichen Abschneideparameter in den unterschiedlichen Kanälen eine Bestimmung der Subtraktionskonstanten für die Schleifenfunktion mit Mesonen

in relativer P -Welle. Damit sind wir nun in der Lage, die Produktionsamplituden niederzuschreiben (4.16, 4.17). In diesem Zusammenhang wird in [145] angemerkt, dass die Struktur der $\pi\eta$ -Produktion in $pp \rightarrow \pi\eta d$ nur mit der Struktur aus Gleichung 4.4b) erfolgen kann und somit als Spezialfall der hier beschriebenen Produktion betrachtet werden sollte.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{K+\bar{K}^0} = & \eta_{\alpha\beta} \frac{4\sqrt{\pi}}{3} |p_{in}| \left\{ |p_d| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_d) \right. \\ & \times \left[f_{K\bar{K}}^P - (1 + T_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^S I_{K\bar{K}}) f_{K\bar{K}}^S - T_{\pi\eta \rightarrow K\bar{K}}^S I_{\pi\eta} f_{\pi\eta}^S \right] \\ & + |p_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_{K^+}) \left[\frac{M_d}{M_d + m_K} T_{\bar{K}d}(\sqrt{\tilde{s}_{\bar{K}n}}) G_{\bar{K}d}(\tilde{s}_{\bar{K}n}) f_{K\bar{K}}^S \right. \\ & \left. \left. + \left(2 + \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K} T_{\bar{K}d}(\sqrt{\tilde{s}_{\bar{K}n}}) G_{\bar{K}d}(\tilde{s}_{\bar{K}n}) \right) f_{K\bar{K}}^P \right] \right\} \quad (4.16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\pi\eta} = & -\eta_{\alpha\beta} \frac{4\sqrt{\pi}}{3} |p_{in}| |p_d| Y_{1(\alpha-\beta)}(\hat{p}_d) \\ & \times \left[T_{K\bar{K} \rightarrow \pi\eta}^S I_{K\bar{K}} f_{K\bar{K}}^S + (1 + T_{\pi\eta \rightarrow \pi\eta}^S I_{\pi\eta}) f_{\pi\eta}^S \right] \quad (4.17) \end{aligned}$$

Die hier beschriebenen Amplituden stimmen modulo der Parametrisierung der Meson-Meson Endzustandswechselwirkung mit den Amplituden aus [145] überein.

4.2 Vergleich mit experimentellen Daten

Für die Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ liegen Daten der ANKE-Kolaboration [110] sowohl für die differentiellen Wirkungsquerschnitte $d\sigma/dm_{K+\bar{K}^0}$, $d\sigma/dm_{d\bar{K}^0}$ als auch für die Winkelverteilungen der Winkel θ_{pk} (Strahl zu Deuteron), θ_{pq} (Strahl zum Relativimpuls der beiden Kaonen) und θ_{kq} (Deuteron zum Relativimpuls der beiden Kaonen) vor. Die Definition der jeweiligen Impulse und Winkel ist in Abbildung 4.3 dargestellt. Für die Reaktion $pp \rightarrow d\eta\pi^+$ ist in naher Zukunft nur die Messung von sechsfachdifferentiellen Wirkungsquerschnitten zu erwarten [68]. Wenn man mit unserem Produktionsmodell die Deuteron-Antikaon Streulänge bestimmen möchte, sind diese jedoch sehr wertvoll. Sie erlauben die Stärke der Produktion via $\pi\eta$ in relativer S -Welle mithilfe der Amplitude (4.17) zu bestimmen. Dies ist wichtig, da wir die Produktion mittels $\pi\eta$ - S -Welle nicht durch die Antikaon-Deuteron Endzustandswechselwirkung renormalisieren. Dadurch haben wir immer die Möglichkeit, eine zu große $d\bar{K}^0$ -Streulänge mithilfe einer übertrieben großen $\pi\eta$ -Produktion zu kompensieren. Es wäre also wünschenswert, den Beitrag dieser Amplitude in einem zukünftigen Experiment zu bestimmen¹. In

¹Eine Möglichkeit hierzu wäre eine WASA-Installation an COSY

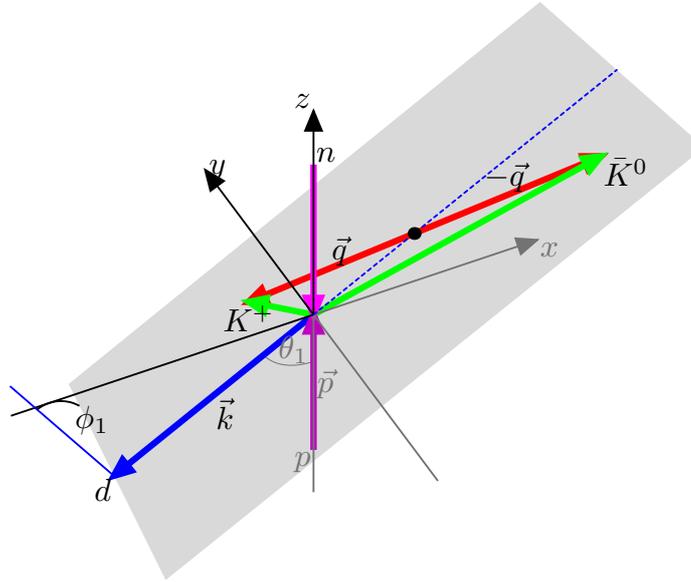


Abbildung 4.3: Darstellung der Kinematik für die Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$. Die eingezeichneten Winkel entsprechen den Observablen des Experimentes [110]

ähnlicher Weise erschwert das relativ geringe Wissen über die $d\bar{K}^0$ -Wechselwirkung die Analyse. Es ist daher nützlich, sich vor Augen zu führen, welche Informationen uns zur Verfügung stehen um die Wahl der $d\bar{K}^0$ -Streulänge einzuschränken. Die $d\bar{K}^0$ -Endzustandswechselwirkung transformiert nämlich auf natürliche Weise Beiträge aus anfänglicher $K\bar{K}$ - S -Wellenproduktion in P -Wellenbeiträge. Diese können dann als initiale P -Wellenproduktion fehlinterpretiert werden. In einer Analyse der über die $d\bar{K}$ -Wechselwirkung bekannten Daten stellten z.B. Sibirtsev et al. [163] fest, dass für $\Re(a_{d\bar{K}})$ keine Einschränkungen bestehen wohingegen die Unitarität $\Im(a_{d\bar{K}}) > 0$ verlangt. Eine Extrapolation der K^-d -Streudaten liefert mit Hilfe des optischen Theorems

$$\Im(f(0)) = \frac{Q\sigma_{\text{tot}}}{4\pi}, \quad a = \lim_{Q \rightarrow 0} \{f(0)\} \quad (4.18)$$

sogar eine untere Grenze für den Imaginärteil, der von [163] mit

$$\Im(a_{d\bar{K}}) > 1.0 \text{ fm} \quad (4.19)$$

angegeben wird. Damit haben wir eine untere Grenze für die $d\bar{K}^0$ -Streulänge und dadurch auch eine Abschätzung für den P -Wellen-Anteil in der renormalisierten Produktionsamplitude, der selbst bei einer inertial reinen S -Wellenproduktion anwesend wäre. In diesem Sinne starten wir unsere Analyse der Daten mit einer reinen Produktion in relativer $K^+\bar{K}^0$ - S -Welle ($f_{K\bar{K}}^S = 1$, $f_{K\bar{K}}^P = 0$, $f_{\pi\eta}^S = 0$), was einem geringen P -Wellenanteil entspricht.

Doch zunächst wollen wir die Vorhersage unseres Modells für die Winkelverteilungen $|\cos(pk)|$ und $|\cos(pq)|$ betrachten, da diese Verteilungen unabhängig von den restlichen Verteilungen sind. Sie werden durch die relative Stärke der Komponenten unterschiedlicher Spinprojektionen dominiert. Unser Modell macht durch $\eta_{\alpha\beta}$ eine starke Aussage über die Winkelverteilung $|\cos(pk)|$. Dies ist zum Beispiel im Fall von reiner S -Wellenproduktion mit geringer Endzustandswechselwirkung im $d\bar{K}$ -Kanal leicht zu sehen. Aus der Amplitude liest man sofort ein Verhalten von $3\cos^2(\theta_{kp}) + 4/2\sin^2(\theta_{kp}) = 2 + \cos^2(\theta_{kp})$ ab. Dieses Verhalten ist auch in $d\sigma/d|\cos(pq)|$ (Abbildung 4.4) zu erkennen, doch schon die $d\sigma/d|\cos(pk)|$ Verteilung deutet eher ein $\sin^2(pk)$ -Verhalten an. Diese Diskrepanz wollen wir kurz erläutern. Wir weisen jedoch darauf hin, dass dies keine Auswirkung auf unsere Untersuchung der Endzustandswechselwirkung hat, da die relevanten Observablen über den Einfallswinkel des Protons integriert sind. Die relative Wichtung der Produktionsamplituden für unterschiedliche Spinprojektionen ist in unserem Modell für die Produktion in relativer P - und für die Produktion in relativer S -Welle identisch. ($\eta_{\alpha\beta}^S = \eta_{\alpha\beta}^P$). Dies hat zur Folge, dass wir die Produktionsamplitude aus Gleichung (4.16) wie folgt ausdrücken können:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{K+\bar{K}^0} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{4\sqrt{\pi}}{3} |p_{in}| |ap_d + bp_{K^+}| Y_{1(\alpha-\beta)}(\widehat{ap_d + bp_{K^+}}) \\
&= \eta_{\alpha\beta} \frac{4\sqrt{\pi}}{3} |p_{in}| |(a - b/2)p_d + bq| Y_{1(\alpha-\beta)}((a + \widehat{b/2})p_d + bq) \quad (4.20) \\
a &= f_{K\bar{K}}^S - (1 + T_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^S I_{K\bar{K}}) f_{K\bar{K}}^S - T_{\pi\eta \rightarrow K\bar{K}} I_{\pi\eta} f_{\pi\eta}^S \\
b &= \frac{M_d}{M_d + m_K} T_{\bar{K}d} G_{\bar{K}d} f_{K\bar{K}}^S + \left(2 + \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K} T_{\bar{K}d} G_{\bar{K}d} \right) f_{K\bar{K}^P}
\end{aligned}$$

Weder a noch b besitzen eine Abhängigkeit vom Winkel $\Omega_1 = (\theta_1, \phi_1)$ des einlaufenden Protons. Damit ist die Integration des Wirkungsquerschnittes $d\sigma \propto Y_{1\alpha-\beta} Y_{1\alpha-\beta}^*$ über Ω_1 trivial. Gleichung 4.20 zeigt jedoch, dass die Winkelverteilungen $d\sigma/d|\cos(pk)|$ und $d\sigma/d|\cos(pq)|$ tendenziell die gleiche, durch die Koeffizienten in $\eta_{\alpha\beta}$ bestimmte Form aufweisen, die ein Artefakt unserer eingeschränkten Wahl des Produktionsoperators ist und zu Problemen bei der Analyse der Winkelverteilungen relativ zum Strahl führt. Man liest nämlich aus (4.20) ab, dass $a - b/2 \ll b$ zu einer Unterdrückung der Winkelabhängigkeit in $\cos(pk)$ und $a - b/2 \gg b$ zu einer Unterdrückung der Winkelabhängigkeit in $\cos(pq)$ führt. Diese Beobachtung führt zu dem ungewöhnlichen Schluss, dass $a - b/2 \ll b$ sein muss, um die Winkelverteilungen in Abbildung 4.4 einigermaßen zu reproduzieren. Dies würde jedoch eine dominante Produktion in relativer $K\bar{K}$ - P -Welle bedeuten, was nicht mit dem Spektrum der invarianten $K\bar{K}$ -Masse in Abbildung 4.4 vereinbar ist. Eine offensichtliche Lösung zu diesem Widerspruch wäre eine Modifikation des Produktionsoperators für die Kaonen in S -Welle hin zu einer Bevorzugung von Produktionsprozessen mit $\Delta S_z = \pm 1$, um eine $\sin^2(pk)$ -Abhängigkeit

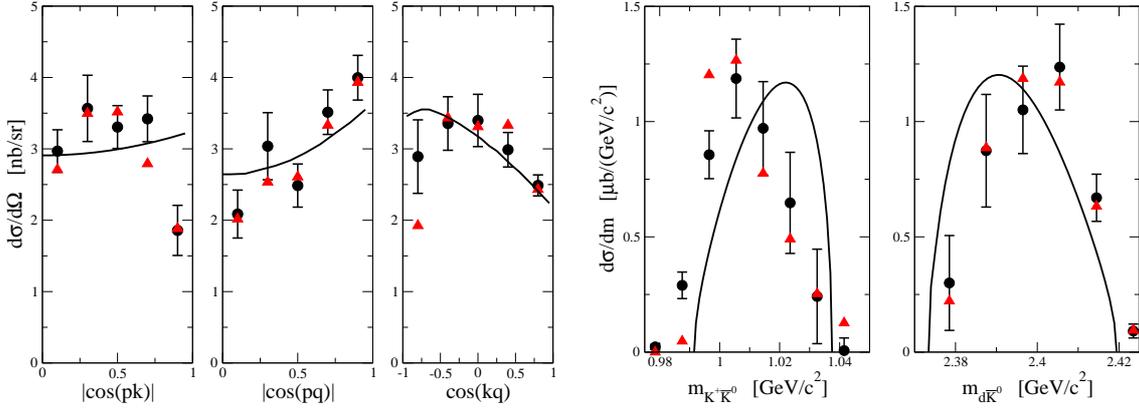


Abbildung 4.4: Winkelverteilungen und Massenspektren der Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$. Die Punkte mit Fehlerbalken zeigen die Daten der ANKE Kollaboration [110]. Die Dreiecke deuten an, wie ein kinematischer Fit die Zentralwerte der Daten möglicherweise verschiebt [109]. Die Linien zeigen die Vorhersagen für eine hauptsächlich in $K\bar{K}$ - P -Welle verlaufende Produktion, wie sie für die Anpassung an $d\sigma/d|\cos(pk)|$ und $d\sigma/d|\cos(pq)|$ notwendig ist, wenn man unsere eingeschränkte Wahl des Produktionsoperators zugrunde legt.

zu erreichen unter Beibehaltung der jetzigen Gewichtung der Spin-Projektionen für den P -Wellenanteil. Eine Untersuchung der Produktionsamplitude ohne experimentelle Daten über die Amplituden unterschiedlicher Polarisationszustände hat jedoch keine Aussicht auf Erfolg.

Betrachten wir jetzt $d\sigma/d\cos(kq)$, $d\sigma/dm_{K\bar{K}}$ und $d\sigma/dm_{d\bar{K}}$ so enthält Gleichung 4.21 alle nötigen Informationen.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\sigma}{ds_{K\bar{K}}ds_{d\bar{K}}} &\propto |p_{in}|^2|p_d|^2 |f_{K\bar{K}}^P - (1 + T_{K\bar{K}}I_{K\bar{K}})f_{K\bar{K}}^S - f_{\pi\eta}^S|^2 \\
&+ |p_{in}|^2|p_{K^+}|^2 \left| \frac{M_d}{M_d + m_K} T_{d\bar{K}} G_{d\bar{K}} f_{K\bar{K}}^S \right. \\
&\quad \left. + \left(2 + \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K} T_{d\bar{K}} G_{d\bar{K}} \right) f_{K\bar{K}}^P \right|^2 \\
&+ |p_{in}|^2 2|p_{K^+}||p_d| \cos\theta_{dK^+} \Re \left\{ [f_{K\bar{K}}^P - (1 + T_{K\bar{K}}I_{K\bar{K}})f_{K\bar{K}}^S - f_{\pi\eta}^S]^* \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{M_d}{M_d + m_K} T_{d\bar{K}} G_{d\bar{K}} f_{K\bar{K}}^S + \left(2 + \frac{M_d + 2m_K}{M_d + m_K} T_{d\bar{K}} G_{d\bar{K}} \right) f_{K\bar{K}}^P \right] \right\}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Diese Gleichung zeigt im Zusammenhang mit der experimentellen $\cos(qk)$ -Verteilung (Abbildung 4.4), dass die Beiträge für die Produktion der Kaonen in S - bzw. P -Welle nicht die gleiche Größenordnung haben können, da die Gleichung für diesen

Fall eine größere Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie vorhersagt. Wir können also von der Dominanz eines Beitrages und von nur circa 15% Verzerrung der Massenspektren durch Interferenz ausgehen. Also dürfen wir aus der $d\sigma/dm_{K\bar{K}}$ -Verteilung mit ihrem Maximum bei niedrigen invarianten Massen auf eine dominante Produktion der Kaonen in relativer S -Welle schließen. Welche Vorhersagen für eine derartige Produktion liefert nun die in Abschnitt 4.1 beschriebene Parametrisierung der $d\bar{K}$ -Endzustandswechselwirkung? Hierzu sei zunächst angemerkt, dass die Parametrisierung aus zwei separaten Vorhersagen besteht. Zum einen spiegelt sie in den Parametern c und c' die Vorhersage $a_{d\bar{K}} = -1.61 + i1.91$ fm, die Kamalov et al. [104] im Rahmen einer Faddeev Rechnung für die Streulänge getroffen haben, zum anderen parametrisiert sie die Abhängigkeit der $\bar{K}N$ - T -Matrizen von der Schwerpunktsenergie wie sie durch Oset und Ramos im Rahmen eines chiralen unitarisierten Modells berechnet wurde [146]. Ein Blick auf das $d\bar{K}^0$ -Massenspektrum in Abbildung 4.5 suggeriert nun, dass diese Endzustandswechselwirkung einen zu starken P -Wellenanteil produziert, der zu einer Verschiebung des $d\bar{K}$ -Massenspektrums zu niedrigen invarianten Massen führt. Auch in [163] wurde schon analysiert, dass die in dieser Parametrisierung verwendete Streulänge nur ein $\chi^2 = \chi_{min}^2 + 3$ im Vergleich mit den hier verwendeten experimentellen Daten erzielt. Dieser Analyse entspricht die gestrichelte Linie aus Abbildung 4.5, bei deren Berechnung wir die Parametrisierung modifiziert haben, indem wir die von der Schwerpunktsenergie abhängigen Terme vernachlässigten. Das Ergebnis (gestrichelte Kurve in Abbildung 4.5) reproduziert die experimentellen Spektren noch schlechter. Die nun vernachlässigten Terme hatten für eine Reduktion der $d\bar{K}^0$ - T -Matrix bei hohen invarianten Massen gesorgt und somit die Produktion bei hohen $m_{K\bar{K}}$ unterdrückt.

Um besser zu verstehen, was zu der falschen Struktur der Kurven führt, betrachten wir den für uns relevanten Teil (4.22) des doppelt differentiellen Wirkungsquerschnitts (4.21).

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2\sigma}{ds_{K\bar{K}} ds_{d\bar{K}}} \right|_{f_{\pi\eta}^S = f_{K\bar{K}}^P = 0} &\propto |p_{in}|^2 |p_d|^2 \left| -(1 + T_{K\bar{K}} I_{K\bar{K}}) f_{K\bar{K}}^S \right|^2 \\
&+ |p_{in}|^2 |p_{K^+}|^2 \left| \frac{M_d}{M_d + m_K} T_{d\bar{K}} G_{d\bar{K}} f_{K\bar{K}}^S \right|^2 \\
&+ |p_{in}|^2 2 |p_{K^+}| |p_d| \cos \theta_{dK^+} \Re \left\{ \left[-(1 + T_{K\bar{K}} I_{K\bar{K}}) f_{K\bar{K}}^S \right]^* \right. \\
&\quad \left. \left[\frac{M_d}{M_d + m_K} T_{d\bar{K}} G_{d\bar{K}} f_{K\bar{K}}^S \right] \right\} \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Man erkennt die Modifikation durch die $d\bar{K}$ -Streuung sowie die Impulsabhängigkeiten, die durch die S - bzw. P -Wellenproduktion erzeugt werden, wobei wir hier nur den

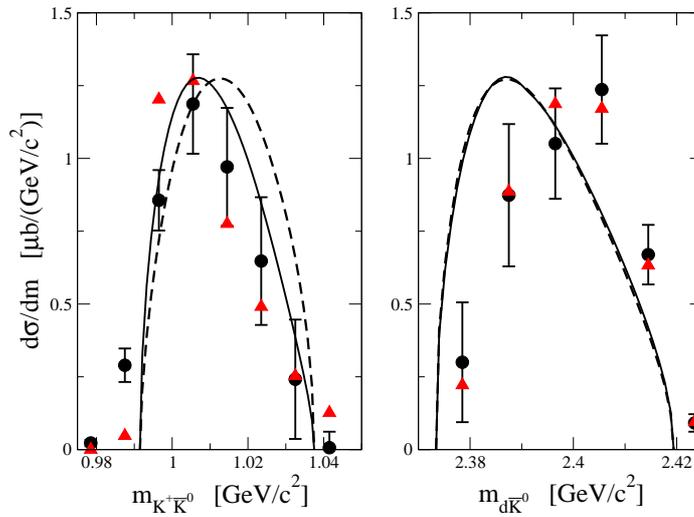


Abbildung 4.5: Invariante Massenspektren für die Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$. Daten siehe Abbildung 4.4. Die durchgezogene Linie zeigt eine Modellrechnung mit einer Parametrisierung der $d\bar{K}$ - T -Matrix nach [145]. Die gestrichelte Linie zeigt das Ergebnis für eine konstante T -Matrix mit der Streulänge $a_{d\bar{K}} = -1.62 + i1.91$ fm [104] (Wir haben eine relative Skalierung zwischen den berechneten Kurven für das $K\bar{K}$ und für das $d\bar{K}$ Spektrum zugelassen, da ca. 8% der Daten des $K\bar{K}$ Spektrums außerhalb des kinematisch zulässigen Bereichs liegen.)

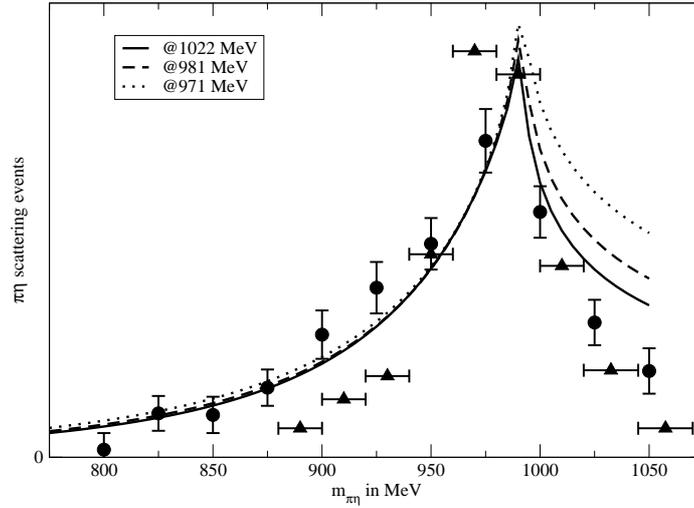


Abbildung 4.6: Wirkungsquerschnitt der $\pi\eta$ -Streuung. Die Kreise zeigen Daten aus [20] und die Dreiecke Daten aus [78]. Die Kurven zeigen die Vorhersagen des Jülicher Modells bei unterschiedlich starker $K\bar{K}$ -Wechselwirkung. Die Beschriftungen entsprechen dem Realteil der Polposition im isoskalaren Kanal. Je tiefer dieser Pol liegt, desto betonter wird der repulsive Anteil der $K\bar{K}$ -Wechselwirkung im hier gezeigten isovektoriellen Fall.

aus der Endzustandswechselwirkung resultierenden P -Wellenanteil betrachten. Außerdem wird die Verteilung durch die $K\bar{K}$ -Wechselwirkung bestimmt. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, ob die aus dem Jülicher Modell gewonnene Streumatrix ein realistisches Abbild dieser Wechselwirkung ist, schauen wir uns die Vorhersagen für die $\pi\eta$ -Streuung an und finden eine akzeptable Übereinstimmung mit den verfügbaren experimentellen Daten (Abbildung 4.6). Ferner haben wir die Vorhersagen für die Streuphasen und Inelastizitäten aus unserem Modell mit den Vorhersagen des chiralen unitarisierten Modells [144] verglichen und fanden weitgehende Übereinstimmung. In diesem Zusammenhang sei nochmals auf die Asymmetrie in der $d\sigma/d\cos(kq)$ -Verteilung hingewiesen, die auf die relative Phase der beiden Endzustandswechselwirkungen sensitiv ist(4.22).

Die Vorhersage für Meson-Meson Wechselwirkung sollte also als solide betrachtet werden. Es besteht aber eine Unsicherheit, die aus der Möglichkeit einer Feinabstimmung resultiert. Während es offensichtlich ist, dass das $K^+\bar{K}^0$ -Massenspektrum nur minimalen Raum für P -Wellenbeiträge hat, so ist die Ursache hierfür nicht klar. Entweder sind tatsächlich die beiden Beiträge (Modifikation der S -Welle durch die Endzustandswechselwirkung sowie direkte P -Wellenproduktion) klein oder sie löschen sich gegenseitig weitgehend aus. Um diesen zweiten Fall zu untersuchen, führen wir nun eine

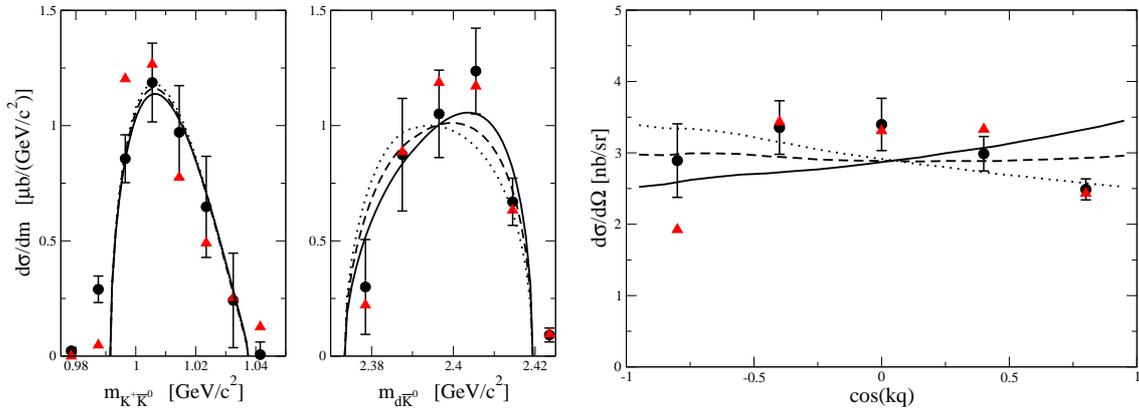


Abbildung 4.7: Winkelverteilungen und Massenspektren der Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$. Daten wie in Abbildung 4.4. Die Linien zeigen die Vorhersagen für Produktion mit $f_{K\bar{K}}^S = c \cos \theta$, $f_{K\bar{K}}^P = c \sin \theta$ und $f_{\pi\eta}^S = 0$. Durchgezogen: $\theta = -15^\circ$, gestrichelt: $\theta = 11^\circ$, gepunktet: $\theta = -8^\circ$.

P -Welle ein, die etwa in der Größenordnung der gestreuten S -Welle liegt. Dies wirkt sich selbstverständlich beträchtlich auf die Vorhersage für die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in der $\cos(kq)$ -Verteilung aus. Vollständige Auslöschung führt zu einer flachen Verteilung (Abbildung 4.7). Interessant sind hingegen Verteilungen, die leicht von diesem Fall abweichen. Hierbei kommt es entweder zu einer Betonung von kleinen oder großen Winkeln. Die $\cos(kq)$ -Verteilung aus Abbildung 4.7 zeichnet hier eher ein indifferentes Bild, wären da nicht die geringen Fehler, die den Messwerten bei positivem $\cos(kq)$ mehr Gewicht verleihen und somit eine Verteilung mit geringer Produktion bei hohem $\cos(kq)$ fordern. Schaut man sich dies nun im Vergleich zu den Vorhersagen für das $d\bar{K}^0$ -Massenspektrum an, so drängt sich einem das gegenteilige Bild mit einer Betonung großer invarianter Massen auf. Dies entspricht einer starken Produktion bei hohem $\cos(qk)$. Legt man also beide Verteilungen zugrunde, so scheint hier eine fast vollständige Auslöschung bevorzugt zu sein. Dass man von diesen Unterschieden im invarianten Massenspektrum der Kaonen nichts bemerkt, liegt daran, dass die hier relevanten Terme quadratisch von dem durch die Feinabstimmung unterdrückten Term abhängen (Abbildung 4.7). Neben der hier vorgestellten Möglichkeit die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie durch Minimierung des unkonjugierten Faktors im S - P -Wellen-Interferenzterm zu unterdrücken, ist dies natürlich auch durch eine Auslöschung des konjugierten Faktors möglich. Dies führt jedoch zu einer dominanten P -Welle, die mit dem beobachteten $K^+\bar{K}^0$ -Massenspektrum nicht vereinbar ist. Nachdem wir diesen Fall einer zufälligen Feinabstimmung betrachtet haben, wollen wir unter Vernachlässigung von direkter P -Wellenproduktion und unter

Ref.	[84]	[168]	[57]	[57]
$a_{d\bar{K}}$ [fm]	$-0.78 + i1.23$	$-1.34 + i1.04$	$-0.75 + i1.12$	$-0.85 + i1.10$

Ref.	[57]	[57]	[104]	[24, 25]
$a_{d\bar{K}}$ [fm]	$-0.01 + i1.75$	$-0.47 + i1.60$	$-1.615 + i1.909$	$-1.02 + i1.58$

Tabelle 4.2: Zusammenstellung verschiedener Vorhersagen für die $d\bar{K}$ -Streulänge (zitiert nach [163]).

Vernachlässigung der Unsicherheit in unserer $K\bar{K}$ -Amplitude und einer kurzen Zusammenstellung weiterer Analysen und Vorhersagen für $a_{\bar{K}n}$ (Tabelle 4.2 – man beachte das relative Vorzeichen verglichen mit unserer Definition–) zuwenden. Wir wählen $a_{d\bar{K}} = (0.0 + i1.9)$, $(-1.0 + i1.0)$ fm als exemplarische Werte für die in der Tabelle 4.2 aufgeführten Streulängen sowie den bevorzugten Wert $a_{d\bar{K}} = (0.0 + i1.0)$ fm aus der Analyse in [163]. Diese Werte sind mithilfe von

$$T_{d\bar{K}} = -\frac{4\pi(m_K + M_d)}{M_d}a_{d\bar{K}} \quad (4.23)$$

in die Parameter c , c' umzurechnen. Zunächst vernachlässigen wir die aus den elementaren Streumatrizen stammende 5%-Modifikation [146] der $d\bar{K}$ - T -Matrix bei höheren Schwerpunktsenergien, was der Wahl $a = b = b' = 0$ entspricht. Die Resultate sind in Abbildung 4.8 dargestellt. Man sieht, dass unser Modell — falls keine zufällige Feinabstimmung vorliegt — in Einklang mit der Betrachtung aus [163] eine Streulänge von $a_{d\bar{K}} = (0 + i1.0)$ fm bevorzugt. Die zugehörigen Massenspektren sind in Abbildung 4.8 als durchgezogene Linie dargestellt und reproduzieren gleichzeitig $d\sigma/dm_{K+\bar{K}^0}$ und $d\sigma/dm_{d\bar{K}^0}$. Während die Hinzunahme eines Realteils von -1 fm nur zu einer Abweichung in der $d\bar{K}^0$ -Verteilung führt (gestrichelte Linien in Abbildung 4.8), so vermag man mit einer angenommenen Streulänge von $a_{d\bar{K}} = (0.0 + i1.9)$ fm weder die $K\bar{K}$ - noch die $d\bar{K}$ -Verteilung zu reproduzieren (gepunktete Kurve in Abbildung 4.8). Die hiermit getroffene Aussage über eine obere Grenze für die $d\bar{K}$ -Streulänge wäre jedoch selbst in dem Fall, dass eine Untersuchung der Produktionsoperatoren eine zufällige gegenseitige Aufhebung ausschließt, durch die unbestimmte Beimischung einer Produktion durch $\pi\eta$ einer gewissen Unsicherheit unterworfen. Dies ist der Fall, da die Abweichung zwischen den Daten und der Berechnung im Fall großer Streulängen hauptsächlich auf der Unterschätzung bei niedrigen invarianten $K^+\bar{K}^0$ -Massen beruht. Gerade bei diesen Massen trägt aber die Produktion via $\pi\eta$ -Schleifen bei, deren

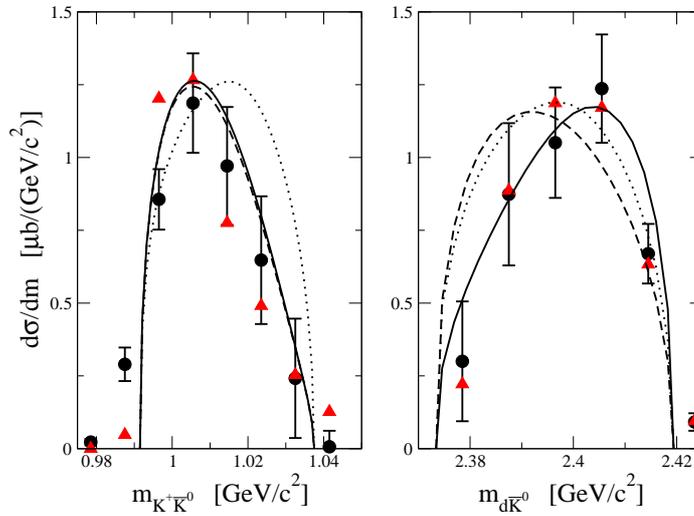


Abbildung 4.8: Invariante Massenspektren für die Reaktion $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$. Daten siehe Abbildung 4.4. Die Kurven repräsentieren unterschiedliche Stärken für die $T_{d\bar{K}}$ -Streumatrix. Linie durchgezogen: $a_{d\bar{K}} = (0.0 + i1.0)$ fm , gestrichelt: $a_{d\bar{K}} = (-1.0 + i1.0)$ fm , gepunktet: $a_{d\bar{K}} = (0.0 + i1.9)$ fm .

Form in unserem Modell nicht durch die Meson-Baryon Endzustandswechselwirkung modifiziert wird. Abbildung 4.9 zeigt das invariante Massenspektrum für eine solche Produktion, die nur über den $\pi\eta$ -Zwischenzustand erfolgt. Das $d\bar{K}$ -Massenspektrum und mit ihm die Winkelverteilung $\cos(qk)$ –nicht abgebildet– ist mangels eines Interferenzterms zwischen S - und P -Welle nicht besonders aufschlussreich und liegt nahe dem Phasenraum beziehungsweise ist konstant. Das $K\bar{K}$ -Massenspektrum ist hingegen durch die Endzustandswechselwirkung stark zu niedrigen invarianten Massen hin verschoben. Wir haben in der Abbildung 4.9 auch die Unsicherheit dargestellt, die sich aus der Verwendung der skalaren Schleifenfunktion ergibt. Wir zeigen als durchgezogene Linie die Berechnung für eine optimal an das Jülicher Mesonen-Austauschmodell angepasste Subtraktionskonstante und als gestrichelte Linie eine Rechnung mit einer an die Daten aus Abbildung 4.6 angepassten Subtraktionskonstanten. In beiden Fällen sieht man eine starke Betonung von niedrigen invarianten Massen. Diese Tendenz ist besonders ausgeprägt, wenn wir die Subtraktionskonstante konsistent zum Jülicher Modell wählen.

Obwohl wir nun gesehen haben, dass eine Beimischung von Produktion durch einen anfänglichen $d\pi\eta$ -Zustand die Auswirkungen einer starken Endzustandswechselwirkung kompensieren kann, so ist dennoch klar, dass eine Anpassung dieses Produktionsmechanismus eine Überinterpretation der Daten wäre, die schon ohne diesen Bei-

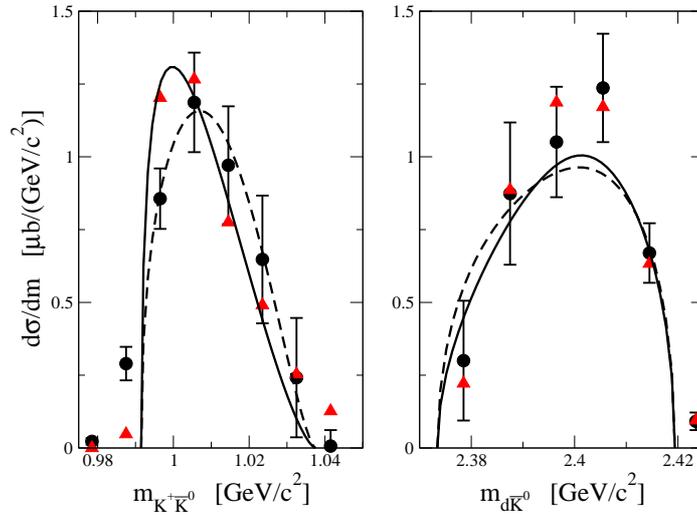


Abbildung 4.9: Die gezeigten Daten entsprechen Abbildung 4.4. Die Berechnung entspricht einer Produktion, die nur nach dem Schema $pp \rightarrow d\pi\eta \rightarrow dK\bar{K}$ verläuft. Für die durchgezogene Linie wurde die Subtraktionskonstante der $\pi\eta$ -Schleifenfunktion an das Jülicher Modell angepasst ($a(770 \text{ MeV}) = -0.004$). Für die gestrichelte Rechnung wurde diese Konstante an die Daten aus Abbildung 4.6 angepasst ($a(770 \text{ MeV}) = 0.006$).

trag mit einem $\chi^2/\text{dof} \approx 1$ angepasst sind. Aus diesem Grund vernachlässigen wir bei der Betrachtung der Auswirkung der Endzustandswechselwirkung zwischen den auslaufenden Mesonen diesen Produktionsmechanismus. Das a_0 wurde bereits im Rahmen des Jülicher Modells untersucht und hierbei als reiner Schwelleneffekt klassifiziert [100]. Dieser Klassifizierung liegt folgende Beobachtung zugrunde. Im isoskalaren Kanal sind ω -, ϕ - sowie ρ - t -Kanal-Austausch attraktiv und formen wie schon in Kapitel 2 besprochen ein Meson-Meson Molekül. Im isovektoriellen Kanal hingegen wirkt der ρ -Austausch repulsiv, sodass sich kein Molekül formt. Deswegen betrachten wir vier Fälle, in denen wir die Stärke des repulsiven ρ -Austausches mithilfe des Formfaktors variieren. Dabei sind 3 Formfaktoren so gewählt, dass sie im isoskalaren Kanal Polpositionen im Bereich der experimentellen Beobachtungen liefern. Bei der vierten Rechnung haben wir den Formfaktor noch schneller abfallen lassen, um ein Molekül nahe der Schwelle zu produzieren. Die Berechnungen in allen vier Fällen variieren nur minimal und reproduzieren allesamt die Daten (Abbildung 4.10). Die experimentellen Daten werfen also wenig Licht auf die Natur des $a_0(980)$.

Wir wollen uns nun auch noch die zu vier verschiedenen Parametrisierungen gehörenden Dalitz-Abbildungen (Abbildung 4.11) ansehen, um Strukturen zu identifizieren, die unter Umständen in den Projektionen verloren gegangen sind. Man erkennt, dass

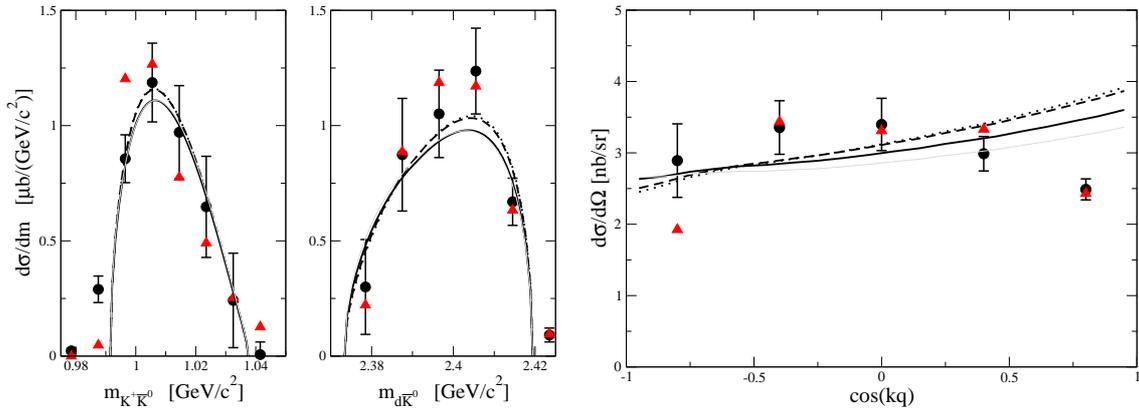


Abbildung 4.10: Die gezeigten Daten entsprechen Abbildung 4.4. Die Kurven zeigen verschiedene Bindungsstärken im isovektoriellen $K\bar{K}$ -Kanal. Grau: stärkste Bindung ($\Lambda_\rho = 1350\text{MeV}$, mit dem Jülicher Modell nicht vereinbar.) Durchgezogene Linie: vom Jülicher Modell bevorzugte Potentialstärke ($\Lambda_\rho = 1850\text{MeV}$). Unterbrochene Linien: weitere im Rahmen des Jülicher Modells mögliche Potentialstärken ($\Lambda_\rho = 2250\text{MeV}$, $\Lambda_\rho = 3300\text{MeV}$).

sich die Modifikation der $d\bar{K}$ -Endzustandswechselwirkung erheblich in der durch die Energieabhängigkeit von $T_{N\bar{K}}$ zu erwartenden Weise in den Dalitz-Abbildungen niederschlägt. Die Abbildung 4.11d) zeigt eine Rechnung, die nur eine ausschließlich durch die Streulänge charakterisierte $d\bar{K}$ -Wechselwirkung betrachtet, wohingegen in c) auch noch die zu erwartende Energieabhängigkeit [146] von $T_{d\bar{K}}$ berücksichtigt wurde. Schon hier beobachtet man eine Verschiebung hin zu niedrigen invarianten $K\bar{K}$ -Massen. Beachtet man ferner die $K\bar{K}$ -Endzustandswechselwirkung (b)), so tritt nur noch eine leichte Modifikation auf, die einer Hervorhebung von niedrigen $d\bar{K}$ -Massen entspricht. Bis hierhin haben wir reine S -Wellenproduktion betrachtet, aber –wie wir schon wissen– führt diese zu einem Maximum bei zu niedrigen Energien, wenn man das $d\bar{K}$ -Massenspektrum betrachtet. Diese Verschiebung ist auch im Dalitz-Diagramm zu beobachten, wenn wir die Parameter der Produktion so wählen, dass der Interferenzterm minimiert wird. Darüber hinaus sieht man, wie diese Feinabstimmung der Produktionsamplituden auch die Betonung bei mittleren $s_{K\bar{K}}$ zu niedrigen $s_{d\bar{K}}$ aufhebt. Es ist insgesamt festzustellen, dass Dalitz-Diagramme nützlich wären, um das genaue Zusammenspiel der Endzustandswechselwirkungen zu studieren.

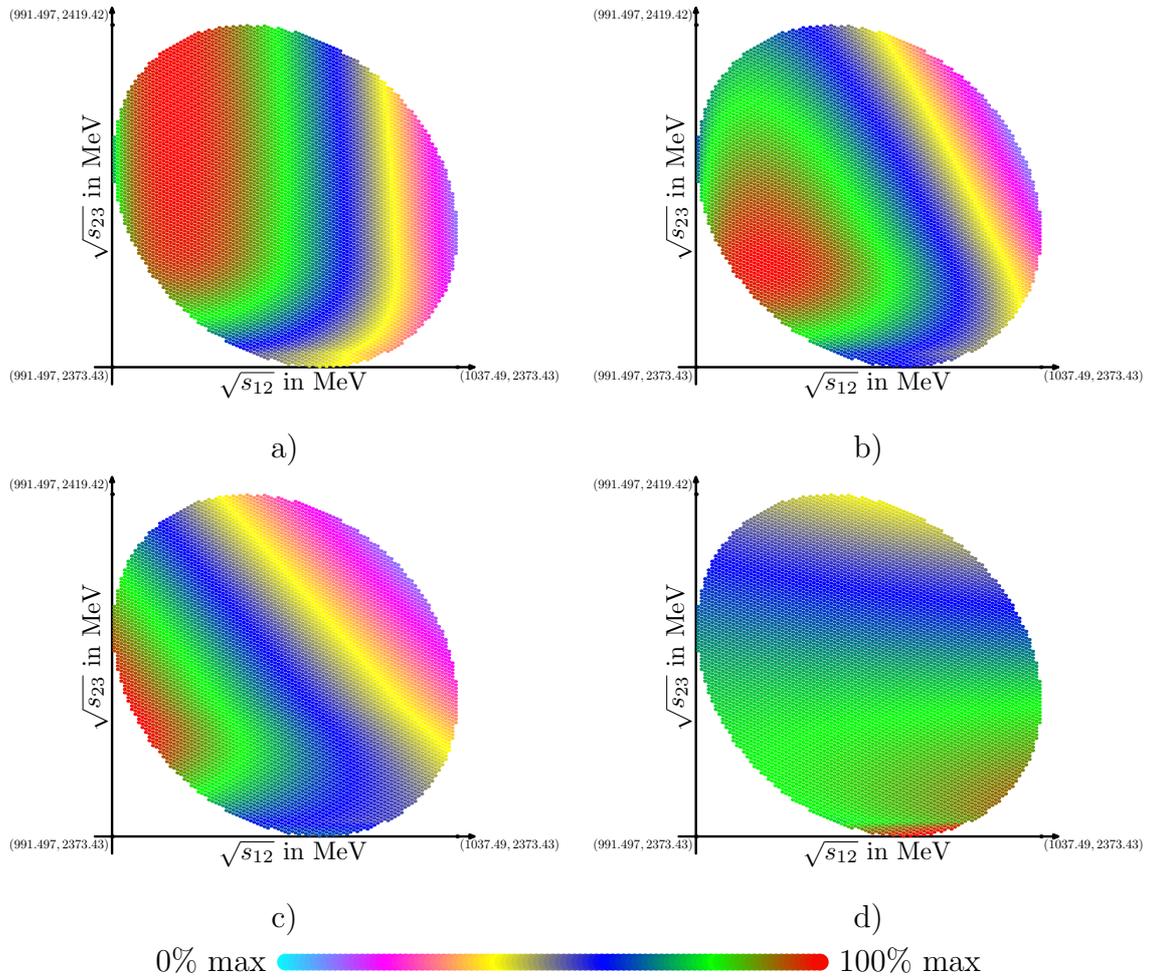


Abbildung 4.11: Die vier Abbildungen zeigen $\frac{d\sigma}{ds_{12}ds_{23}}$, wobei s_{12} das Quadrat der invarianten Kaon-Antikaon Masse und s_{23} das Quadrat der invarianten Deuteron-Antikaon Masse ist. a) zeigt unsere optimale Anpassung, b)-d) reine S -Wellenproduktionen. b) mit Endzustandswechselwirkung c) nur $d\bar{K}$ -Endzustandswechselwirkung d) nur konstante $d\bar{K}$ -Endzustandswechselwirkung

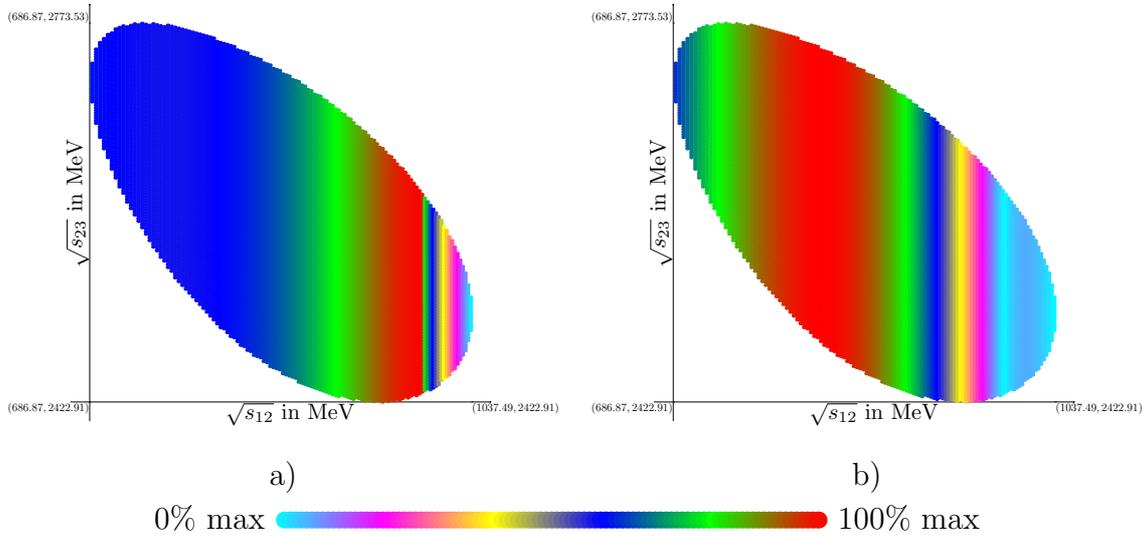


Abbildung 4.12: Die zwei Abbildungen zeigen $\frac{d\sigma}{ds_{12}ds_{23}}$, wobei s_{12} das Quadrat der invarianten Pion-Eta Masse und s_{23} das Quadrat der invarianten Deuteron-Eta Masse ist. a) zeigt den Fall, in dem zunächst ein $\pi\eta$ -Zwischenzustand produziert wird, wohingegen bei b) zunächst ein Kaon-Antikaon Paar produziert wird.

4.3 Vorhersagen für $pp \rightarrow d\pi^+\eta$

In unserem Modell bleiben, wie man in Gleichung (4.24) sieht, die Wechselwirkungen der produzierten Mesonen mit dem Deuteron unberücksichtigt.

$$\frac{d^2\sigma}{ds_{\pi\eta}ds_{d\eta}} \propto |p_{in}|^2 |p_d|^2 \left| (1 + T_{\pi\eta} I_{\pi\eta}) f_{\pi\eta}^S + T_{K\bar{K} \rightarrow \pi\eta} I_{K\bar{K}} f_{K\bar{K}}^S \right|^2 \quad (4.24)$$

Damit beruhen die Modifikationen des $d\pi$ - und des $d\eta$ -Massenspektrums nur auf der $s_{\pi\eta}$ -Abhängigkeit der Streumatrix. Diese Eigenschaft, die sich auch in der Winkelverteilung $d\sigma/d\cos(\theta_{qk})$ widerspiegelt, kann man z.B. in den Dalitz-Diagrammen (Abbildung 4.12) erkennen, die in $s_{d\pi}$ - bzw. $s_{d\eta}$ -Richtung konstant sind. Unsere Vorhersagen hängen also nur von der im Jülicher Modell berechneten Meson-Meson Wechselwirkung sowie der relativen Stärke und Phase der Produktionsmechanismen via initialer $\pi\eta$ - bzw. $K\bar{K}$ -Produktion ab. Letztere können wir jedoch nicht aus den bisherigen Betrachtungen fixieren. Es sei angemerkt, dass die Verteilungen $d\sigma/d\cos(\theta_{kp})$ und $d\sigma/d\cos(\theta_{kp})$ hauptsächlich durch die Einträge in $\eta_{\alpha\beta}$ bestimmt sind, die für die Produktionen via $\pi\eta$ bzw. $K\bar{K}$ identisch sind und somit keine Information über das Verhältnis der beiden Beiträge liefern. Nichtsdestotrotz wären diese Verteilungen ein wichtiger Anhaltspunkt, um die Gültigkeit unseres Produktionsmodells zu überprüfen. Abbildung 4.13 zeigt die $\pi\eta$ - und $d\eta$ -Massenspektren zum einen für ein reines Phasen-

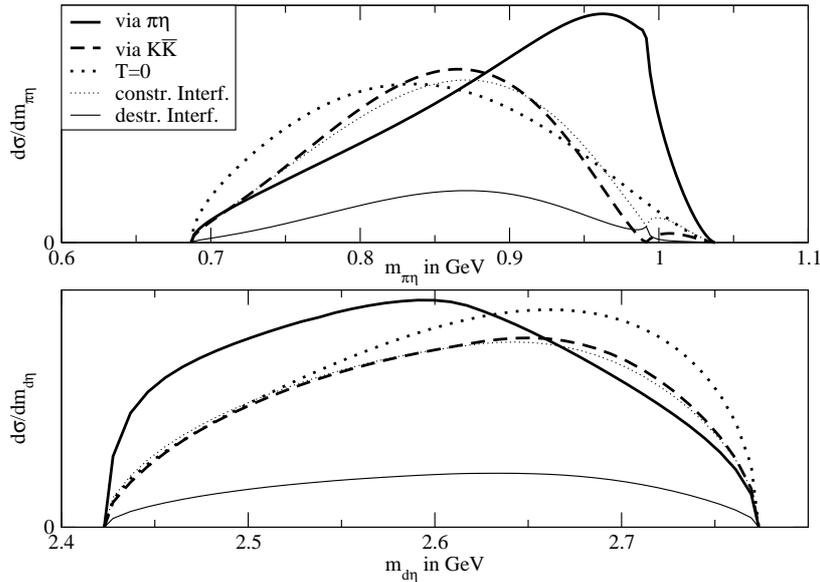


Abbildung 4.13: In den Invariantmassespektren der $\pi\eta$ -Produktion sind die funktionalen Formen für unterschiedliche Produktionsmechanismen dargestellt. Die relative Skalierung ist frei, da die Kopplungskonstanten nicht bekannt sind. Linie fett durchgezogen: Produktion via anfänglichem $\pi\eta$ -Zwischenzustand, fett gestrichelt: Produktion via anfänglichem $K\bar{K}$ -Zwischenzustand, fett gepunktet: Produktion ohne Endzustandswechselwirkung, dünn: Beispielhafte Darstellung konstruktiver bzw. destruktiver Interferenz.

raumverhalten zum anderen für eine Produktion via $K\bar{K}$ - bzw. $\pi\eta$ -Zwischenzustand unter Berücksichtigung der Meson-Meson Wechselwirkung. Der deutlichste Unterschied zwischen den beiden Produktionsmechanismen zeigt sich in der Nähe der $K\bar{K}$ -Schwelle. Mit dem hier verschwindenden Relativimpuls der beiden Kaonen verschwindet auch das $K\bar{K}$ - $\pi\eta$ -Übergangsmatrixelement und so entsteht ein Minimum an dieser Schwelle. Die Produktion via einer $\pi\eta$ -Schleife verhält sich jedoch anders. Sie hat ihr breites Maximum nahe unterhalb der $K\bar{K}$ -Schwelle und knickt dann an der Schwelle ab, um für invariante Massen oberhalb der Schwelle schnell zu verschwinden. Dieses Verhalten ermöglicht, die relative Stärke der beiden Beiträge mit einer schwelennahe Messung zu bestimmen. Auch die Berechnungen mit einer konstruktiven bzw. mit einer destruktiven Interferenz weisen auf ein deutlich unterscheidbares Verhalten hin, wie man in Abbildung (4.13) sieht. Dies kann teilweise Aufschluss über die relative Phase der beiden Produktionsmechanismen geben.

4.4 Fazit

Wir haben gesehen, dass bei fast jedem fest vorgegebenen Produktionsverhältnis sehr kleine $d\bar{K}$ -Streulängen bevorzugt werden. Dies liest man an den drei Observablen $d\sigma/dm_{K+\bar{K}^0}$, $d\sigma/dm_{d\bar{K}^0}$ und $d\sigma/d\cos_{kq}$ ab. Die geringe Variation in $d\sigma/d\cos_{kq}$, die sich auch in der Struktur von $d\sigma/dm_{d\eta}$ spiegelt, zeigt, dass der Interferenzterm von Produktion in relativer S - und P -Welle klein sein muss. Wenn man die $d\sigma/dm_{\pi\eta}$ -Verteilung in die Betrachtung einbezieht, so ist klar, dass die Produktion in relativer P -Welle klein sein muss. Will man aus der $\pi\eta$ -Produktion die absolute Größe von $f_{K\bar{K}}^S$ und $f_{\pi\eta}^S$ mithilfe unseres Modells bestimmen, so sollte man auf jeden Fall zunächst anhand von Dalitz-Diagrammen überprüfen, ob die Meson-Deuteron Wechselwirkungen wirklich zu vernachlässigen sind. Auch wenn diese beiden Produktionsmechanismen fixiert sind, müssen wir leider feststellen, dass eine starke Deuteron-Meson Endzustandswechselwirkung zwar einen mit den Daten nicht verträglichen P -Wellenanteil liefert, wir diesen jedoch –solange wir $f_{K\bar{K}}^P$ anpassen dürfen– immer mithilfe dieses Produktionsmechanismus auslöschen können. Natürlich kann diese Auslöschung, wenn die initialen Produktionsoperatoren keine allzu starken Energieabhängigkeiten aufweisen, nur in einem begrenzten Gebiet des Dalitz-Diagramms auftreten, was eine vollständige Messung dieser Verteilung interessant macht.

Kapitel 5

Das $f_0(980)$ in der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$

5.1 Modellierung der Produktion

Der Phasenraumanteil der $K\bar{K}$ -Produktion in $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ ist durch

$$\frac{d^2\sigma}{ds_{12}ds_{13}} = \frac{B}{64|\vec{p}_d^{cm}|s^{3/2}} \frac{\pi}{(2\pi)^5} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_{-1}^1 d\cos(\theta_1) |M|_{cm_{KK}}^2 \quad (5.1)$$

gegeben. Die Lage der Winkel ϕ_1 und θ_1 ist aus Abbildung 5.1 zu erkennen. Sie spezifizieren die Lage der Reaktionsebene zu den einlaufenden Deuteronen. s_{12} , s_{13} stehen für das Quadrat der invarianten $K\bar{K}$ -Masse, Kd -Masse, s für die entsprechende Mandelstam-Variable und \vec{p}_d^{cm} für den Deuteronimpuls im Schwerpunktsystem der einlaufenden Teilchen. $B = 1/n!$ ist der Bose-Faktor mit n gleich der Anzahl identischer Teilchen im Ausgangszustand. Zur Definition der in Abbildung 5.2 graphisch dargestellten Produktionsamplitude M gehen wir für den zu untersuchenden Energiebereich bis zu 40 MeV oberhalb der Kaonenschwelle von konstanten Produktionsoperatoren aus. Dieser Energiebereich entspricht der maximalen Überschussenergie, die das von der ANKE-Kolaboration an COSY geplante Experiment erreichen kann [42, 43]. In einer weiteren Näherung gehen wir davon aus, dass der Produktionsoperator und die Endzustandswechselwirkung die gleiche Reichweite besitzen und nehmen insbesondere Punktförmigkeit an. Damit können wir die Integration in Gleichung (5.2) eliminieren.

$$M = C_{K\bar{K}}^{prod} + \int d^4k_{K\bar{K}} C_{K\bar{K}}^{prod} G_{K\bar{K}}(k_{K\bar{K}}) T_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}} + \int d^4k_{\pi\pi} C_{\pi\pi}^{prod} G_{\pi\pi}(k_{\pi\pi}) T_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}} \quad (5.2)$$

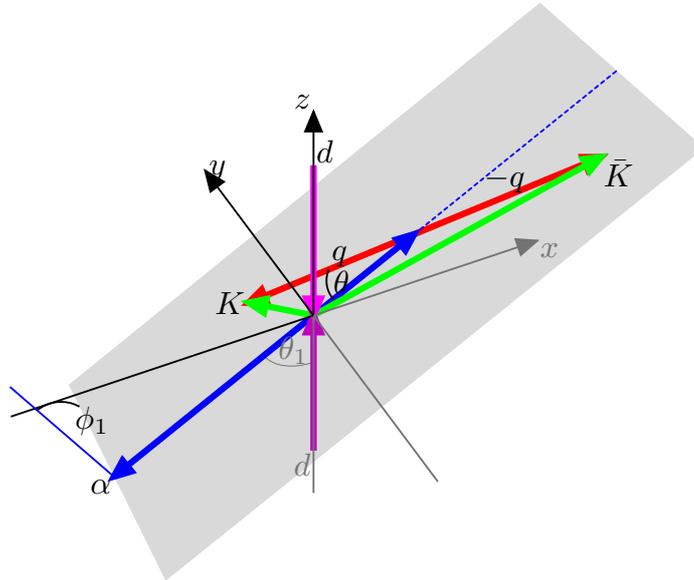


Abbildung 5.1: Reaktionskinematik der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ mit Festlegung der Winkelbezeichnungen.

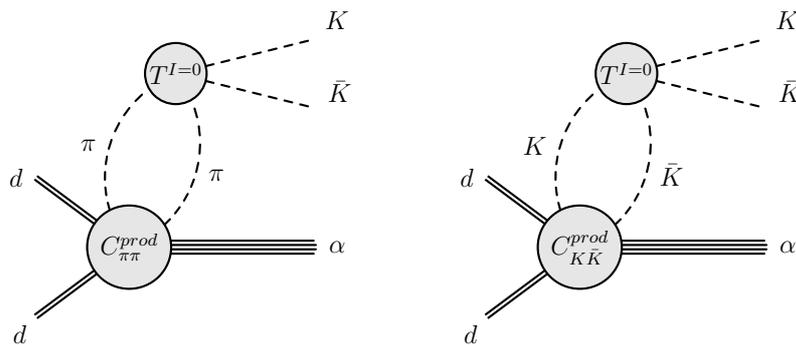


Abbildung 5.2: Für die Kaonenproduktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ betrachtete Beiträge.

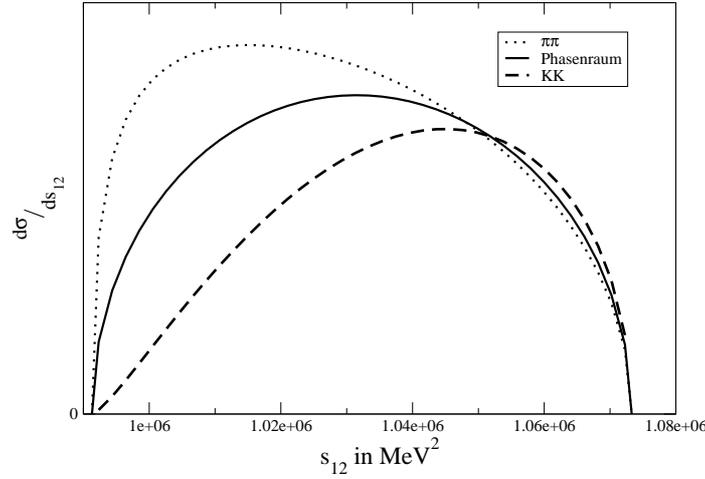


Abbildung 5.3: Kaonenproduktion in $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ unter Vernachlässigung des Realteils der Pionen-/Kaonenschleife. Man beachte das unterschiedliche Verhalten nahe der Schwelle, welches durch das Verschwinden des Imaginärteils der Kaonenschleife entsteht. Linie durchgezogen: Phasenraumverhalten, gepunktet: nur initiale Pionenproduktion, gestrichelt: nur initiale Kaonenproduktion.

Hierbei sollte klar sein, dass eine K -Matrix-Näherung in diesem Zusammenhang nicht zulässig ist, da in dieser Näherung nur der Imaginärteil des Integrals berücksichtigt wird. Damit wird in der Nähe einer Schwelle automatisch eine große Impulsabhängigkeit generiert. Dies führt zu einem unterschiedlichen Verhalten der Näherungen für das erste und das zweite Integral in (5.2), das nicht aus der Struktur der Integrale bzw. Integranden stammt sondern aus der gewählten Näherung. Dies kann man in Abbildung 5.3 erkennen, in der die zwei Produktionsmechanismen unter Vernachlässigung des Realteils des Propagators – Gleichung (5.3) – dargestellt sind.

$$\int d^4 k_{xx} C_{xx}^{prod} G_{xx}(k_{xx}) T_{xx \rightarrow K \bar{K}} \xrightarrow{\text{K-Matrix}} C_{xx}^{prod} \frac{i(2\pi)\omega_x}{\sqrt{s_{xx}}(2\pi)^3} k_{xx}^{on} T_{xx \rightarrow K \bar{K}} \quad (5.3)$$

$$\omega_x = \sqrt{k_x^2 + m_x^2}$$

Die Produktion über eine Kaonenschleife zeigt eine deutliche Unterdrückung relativ zum reinen Phasenraumverhalten bei niedrigen invarianten Massen, da von der Kaonenschleife nur der Imaginärteil betrachtet wird und dieser an der Kaonenschwelle verschwindet. Für die Produktion über eine Pionenschleife ist jedoch der Phasenraum weit offen und der Imaginärteil des Propagators ist somit nur schwach energieabhängig und das Verhalten der Produktionsamplitude ist durch die Endzustandswechselwirkung dominiert, was zu einer im Vergleich zum Phasenraum verstärkten Produktion nahe der Schwelle führt. Aus diesen Beobachtungen darf man jedoch nicht auf eine

starke Abhängigkeit der Kaonenproduktion vom Produktionsoperator schließen. Die Beobachtungen zeigen vielmehr, dass eine K-Matrix-Näherung für die Untersuchung der Reaktion ungeeignet ist. Stattdessen verwenden wir die in Kapitel 6 beschriebene Schleifenfunktion. Da diese im betrachteten Energiebereich weitgehend konstant ist, stammt die Energieabhängigkeit hauptsächlich aus der Endzustandswechselwirkung. Um diese zu modellieren, verwenden wir das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell [99,122] mit den in Kapitel 2 beschriebenen Parametern, um die Meson-Meson Wechselwirkung zu beschreiben, und vernachlässigen die Wechselwirkung zwischen dem α -Teilchen und den Mesonen. Somit sind die Dalitz-Diagramme in $m_{\alpha K}$ - bzw. $m_{\alpha \bar{K}}$ -Richtung konstant, was zu nur geringfügig vom Phasenraum abweichenden $m_{\alpha K}$ und $m_{\alpha \bar{K}}$ Spektren bzw. Winkelverteilungen führt.

5.2 Betrachtung des Isospinanteils der Wechselwirkung

Besonderes Interesse gilt der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ aufgrund ihrer Isospinstruktur. Da sowohl das Deuteron als auch das Alphateilchen Isospin Null besitzen ($I_d = I_\alpha = 0$), ist unter der Annahme der Isospinerhaltung auch der Isospin des $K \bar{K}$ -Paares zu $I_{K \bar{K}} = 0$ bestimmt. Damit haben die auslaufenden Kaonen nahe der Schwelle überwiegend die Quantenzahlen des f_0 . Die Produktion von Endzuständen mit den Quantenzahlen des a_0 ist nur durch Isospin brechende Prozesse möglich. Dies gilt zum Beispiel für die Produktion von $\pi\eta$ -Endzuständen. Hier muss man grundsätzlich sowohl die Produktion durch Isospinbrechung im Produktionsoperator (z.B. Abbildung 5.4.a)) als auch die Produktion via Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung (Abbildung 5.4.b)) betrachten. Skalenargumente, welche wir im letzten Absatz dieses Abschnittes ausführlich beschreiben, zeigen, dass die in Diagramm 5.4.a) dargestellte Isospinbrechung im Produktionsoperator stark gegenüber der Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung (Diagramm 5.4.a)) unterdrückt ist. Aus diesem Grund beschränken wir uns auf die initiale Produktion von korrelierten Kaonen-/Pionenpaaren mit Isospin Null, was dem f_0 entspricht, und betrachten somit nur die Brechung der Isospinsymmetrie in der Endzustandswechselwirkung. Ferner betrachten wir die Massendifferenz zwischen den geladenen und den ungeladenen Kaonen als einzige Quelle zur Brechung der Isospinsymmetrie in der Mesonenwechselwirkung. Zur Rechtfertigung dieser Annahmen zitieren wir hier kurz die Betrachtung aus [90] und [4]. Achasov et al. vergleichen in ihrer Arbeit [4] die Größe von Isospinsymmetrie brechenden Beiträgen aus der elektromagnetischen Wechselwirkung mit der Größe von Beiträgen aus der Massendifferenz der Kaonen. Die Abschätzung ergibt, dass der

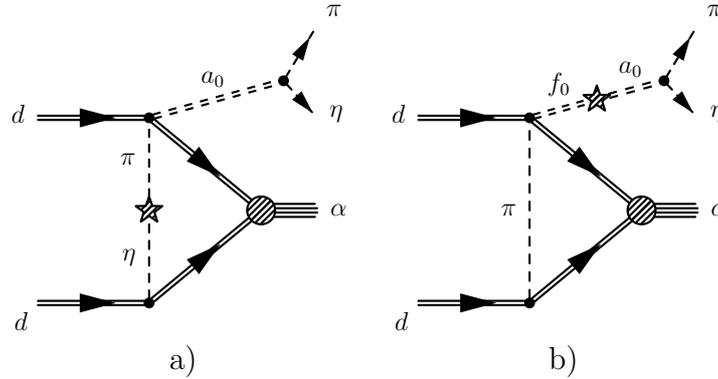


Abbildung 5.4: Brechung der Isospinsymmetrie in der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$. a) zeigt beispielhaft Isospinsymmetriebrechung im Produktionsoperator und b) zeigt die Symmetriebrechung durch Endzustandswechselwirkung.

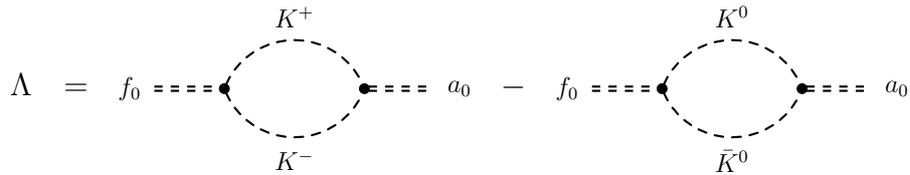


Abbildung 5.5: Graphische Darstellung der Kaonenschleifen zu führender Ordnung. Dies entspricht dem Hauptbeitrag zur Brechung der Isospinsymmetrie.

in Abbildung 5.5 dargestellte Anteil aus den Kaonenschleifen, der in der Ordnung $\sqrt{\alpha}$ beiträgt, den Anteil aus der elektromagnetischen Wechselwirkung dominiert. Die Abschätzung des Schleifenanteils (5.4) beinhaltet in führender Ordnung nur den Phasenraum der Kaon-Antikaon Systeme und ist somit modellunabhängig.

$$\langle f_0 | T | a_0 \rangle = \sqrt{s} M_{f_0 a_0} = i \frac{1}{16\pi} g_{f_0 K \bar{K}} g_{a_0 K \bar{K}} (\rho_{K^0 \bar{K}^0} - \rho_{K^+ K^-}) + \mathcal{O}(\rho_{K^0 \bar{K}^0}^- \rho_{K^+ K^-}) \quad (5.4)$$

Hierbei sind die Kopplungskonstanten definiert als $\Gamma_{xK\bar{K}} = \frac{g_{xK\bar{K}}^2}{16\pi\sqrt{s}}$ und die Entwicklungsparameter als $\rho_{K^0 \bar{K}^0} = \sqrt{1 - 4\frac{m_{K^0}^2}{s}}$ bzw. $\rho_{K^+ K^-} = \sqrt{1 - 4\frac{m_{K^+}^2}{s}}$. Dies führt zu der bekannten Tafelbergstruktur für den Betrag der Mischungsamplitude $\langle f_0 | T | a_0 \rangle$. Eine ausführliche Betrachtung der f_0 - a_0 -Mischung im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells ist zum Beispiel in [116] zu finden. Im Rahmen dieser Untersuchung wurde ferner festgestellt, dass die unterschiedlichen Massen der geladenen und neutralen Pionen keinen signifikanten Einfluss auf die hier betrachtete Isospinbrechung haben. Diese Beobachtung erlaubt uns, auch im Isospin brechenden Modell

die Pion-Pion Zustände weiterhin in der Isospinbasis zu beschreiben. (Der Zwei-Pion Zustand mit Quantenzahlen $J = 0, I = 1$ kann aus Symmetriegründen ohnehin nicht existieren.) An dieser Stelle sollte angemerkt werden, dass unser Modell eine mikroskopische Beschreibung / Erklärung für die Eigenschaften des f_0 und des a_0 liefert und diese miteinander korreliert. Andere Modelle verstehen diese Eigenschaften als freie Parameter und passen diese an die experimentellen Daten an. Für die Reaktion $\pi\pi \rightarrow \pi\eta$, die einen Teilaspekt der hier betrachteten Reaktion darstellt, ist eine solche Untersuchung der Auswirkungen von unterschiedlichen Resonanzmassen und -breiten auf die Verteilung zum Beispiel in [4] diskutiert.

Zur Abschätzung der relativen Stärke der in Abbildung 5.4 dargestellten Isospin brechenden Prozesse geht man zunächst von den Annahmen aus, dass die $\pi\eta$ -Mischung eine vernünftige Abschätzung für die Isospinbrechung im Produktionsoperator liefert und dass die $f_0 a_0$ -Mischung mindestens von der gleichen Ordnung ist wie die $\pi\eta$ -Mischung. Die letzte Annahme ist, wenn man die oben angeführte Verstärkung in der Nähe der Schwelle betrachtet, mit Sicherheit erfüllt. Damit läuft die Abschätzung der relativen Stärke auf einen Vergleich der Propagatoren bei den typischen Impulsen heraus. Dies ergibt dann in der Nähe der skalaren Resonanzen einen Faktor von $\frac{1}{t-m_\eta^2} \approx \frac{-1}{M_d m_{K\bar{K}}}$ für den Prozess aus Abbildung 5.4a) und $\frac{1}{m_{K\bar{K}}^2 - m_{f_0}^2 + im_{f_0}\Gamma_{f_0}} \approx \frac{1}{im_{K\bar{K}}\Gamma_{f_0}}$ für den Prozess aus Abbildung 5.4b). Somit ist die Isospinbrechung in der Produktion gegenüber der Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung um einen Faktor von $\frac{\Gamma_{f_0}}{M_d} \approx \frac{100 \text{ MeV}}{1875 \text{ MeV}} = 0.05$ unterdrückt [89]. Dadurch ist unsere Annahme einer ausschließlichen Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung gerechtfertigt. Für die vorgebrachten Argumente spielt es keine Rolle, ob die Resonanzen $f_0(980)$ und $a_0(980)$ als korrelierte Kaonenzustände, Tetraquarks, $q\bar{q}$ -Zustände, ... zu verstehen sind. Die Notation f_0 bzw. a_0 sollte daher als Platzhalter für eine beliebige mikroskopische Darstellung der betrachteten Resonanz aufgefasst werden.

5.3 Resultate

Zunächst betrachten wir die Ergebnisse für die Isospin erhaltende Reaktion $dd \rightarrow \alpha(K\bar{K})_{I=0}$. Da die relative Größe und Phase der Produktionsoperatoren nicht bekannt ist, muss der Einfluss dieser Größen auf die Observablen bestimmt werden. Hierzu haben bei fest gewähltem Parametersatz der Endzustandswechselwirkung die relative Gewichtung der Produktionskonstanten C^{prod} aus Gleichung (5.5) variiert.

$$\begin{aligned} M(s) &= C_{K\bar{K}_{I=0}}^{prod} I_{m_K}(s) T_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{on, I=0}(s) + C_{\pi\pi_{I=0}}^{prod} I_{m_\pi}(s) T_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{on, I=0}(s) \\ &\approx \tilde{C}_{K\bar{K}_{I=0}}^{prod} T_{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}^{on, I=0}(s) + \tilde{C}_{\pi\pi_{I=0}}^{prod} T_{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}^{on, I=0}(s) \end{aligned} \quad (5.5)$$

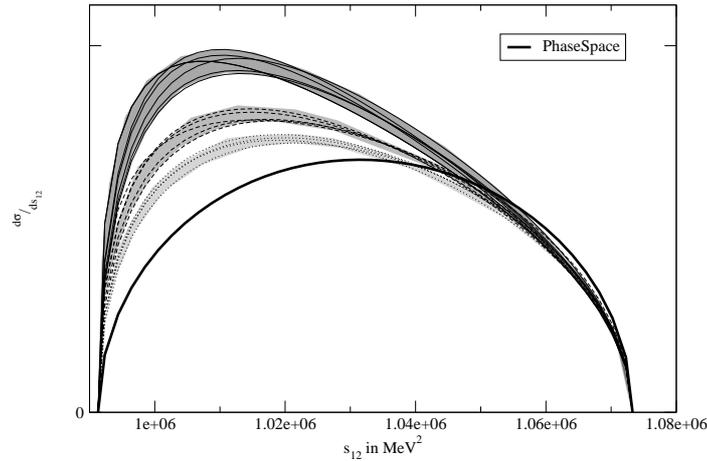


Abbildung 5.6: Für die Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ ist der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/ds_{K\bar{K}}$ in beliebiger Einheit dargestellt. Die Bänder verdeutlichen jeweils die aus dem Produktionsoperator stammende Unsicherheit für unterschiedliche Endzustandswechselwirkungen. Dargestellt sind Endzustandswechselwirkungen mit Polpositionen bei 1022 MeV (durchgezogen), bei 981 MeV (gestrichelt) und bei 951 MeV (gepunktet). Das reine Phasenraumverhalten ist als fette Linie dargestellt.

Natürlich ist in dem schmalen Energiebereich, den wir betrachtet haben, die Variation der Meson-Meson Schleifenfunktionen I aus Kapitel 6 so gering, dass man –wie in Gleichung (5.5) angedeutet– das Produkt aus Produktionsoperator und Schleifenfunktion als konstant betrachten darf. Dennoch haben wir bei unseren Rechnungen die funktionale Form der Schleifenfunktion berücksichtigt. Wollen wir die Produktionen zu unterschiedlichen Produktionskonstanten bei fester Endzustandswechselwirkung vergleichen, so müssen wir Faktoren, die zu einer Skalierung ohne Veränderung der funktionalen Form führen, eliminieren. Da die Endzustandswechselwirkung nahe der Kaon-Antikaon Schwelle durch die Präsenz der $f_0(980)$ -Resonanz besonders stark ist, erscheint es sinnvoll, nur die Wirkungsquerschnitte $d\sigma/ds_{K\bar{K}}$ nahe der oberen kinematischen Grenze der invarianten $K\bar{K}$ -Masse zur Normierung heranzuziehen. Dies ist in Abbildung 5.6 geschehen. Die dort für drei unterschiedliche Modelle der Endzustandswechselwirkung dargestellten Bänder entsprechen den typischen Variationen, die durch Anpassung der Produktionsverhältnisse zu erreichen sind. Man erkennt, dass die Variation der Produktionsparameter in etwa einer Änderung $\pm 5\%$ entspricht während die unterschiedlichen f_0 -Polpositionen der einzelnen Endzustandswechselwirkungen eine Variation von etwa 40% liefern. Wenn man sich die Vorhersagen unseres Modells zur Kaonenproduktion ansieht, so sollte a priori klar sein, dass aufgrund der Struktur unseres Modells Observablen wie $d\sigma/ds_{Kd}$, $d\sigma/d \cos(\Theta_{\vec{q}\vec{p}_K})$, $d\sigma/d \cos(\Theta_{\vec{q}\vec{p}_\alpha})$ und $d\sigma/d \cos(\Theta_{\vec{p}_K\vec{p}_\alpha})$ uninteressant erscheinen müssen, da die Vorhersagen hier nur wenig vom Phasenraum abweichen werden. Diese Eigenschaft ist in der Vernachlässi-

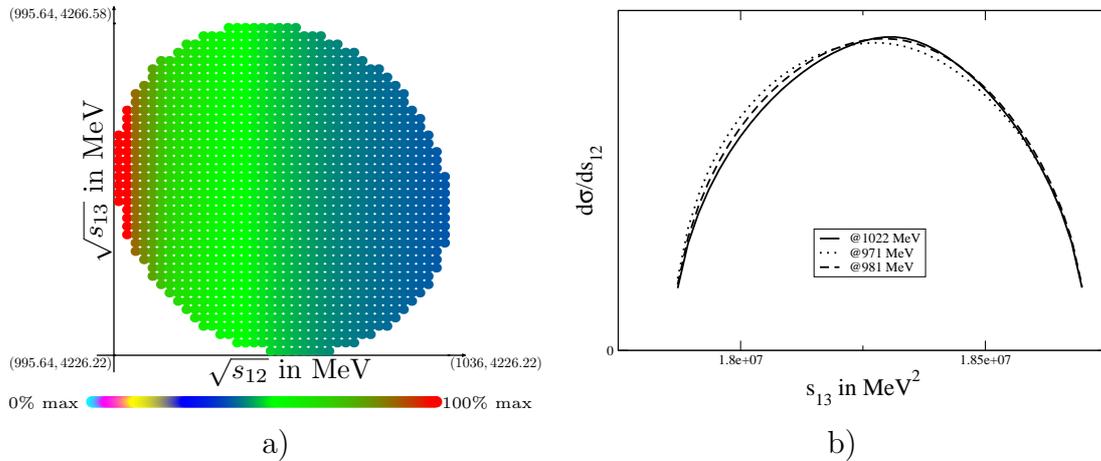


Abbildung 5.7: a) Dalitz-Diagramm $d\sigma/ds_{12}ds_{13}$ bei $\sqrt{s} = 4.76$ GeV für die Reaktion $dd \rightarrow K_1\bar{K}_2\alpha_3$ für die Endzustandswirkung mit $f_0(980)$ -Pol bei 1022 MeV. b) Projektion des Dalitz-Diagramms auf die $s_{K\alpha}$ -Achse für drei Endzustandswechselwirkungen mit unterschiedlicher Polposition des $f_0(980)$: durchgezogen: 1022 MeV, gestrichelt: 981 MeV, gepunktet: 971 MeV

gung der Wechselwirkung zwischen den Kaonen und dem α -Teilchen und in der relativ schwachen $s_{K\bar{K}}$ -Abhängigkeit der Endzustandswechselwirkung begründet. Gerade diese Eigenschaft bedeutet jedoch, dass eine Beobachtung von Abweichungen zwischen unseren Vorhersagen und dem Experiment besonders interessant sind, da aus ihnen Aussagen über die Stärke der αK - bzw. $\alpha\bar{K}$ -Streuung gewonnen werden können. In Abbildung 5.7a) kann man im Dalitz-Diagramm die durch die Endzustandswechselwirkung induzierte $s_{K\bar{K}}$ -Abhängigkeit der Kaonenproduktion erkennen, die im Vergleich zur $s_{\pi\eta}$ -Abhängigkeit der Isospin brechenden Produktion (Abbildung 5.10) eher schwach ausfällt. In derselben Abbildung ist auch die s_{Kd} -Projektion des Wirkungsquerschnitts zu sehen. Diese Observable wird nur in geringem Maße durch die Endzustandswechselwirkung der auslaufenden Mesonen beeinflusst und ist daher geeignet, um den Einfluß von $K\alpha$ - bzw. $\bar{K}\alpha$ -Wechselwirkung zu untersuchen. Um dies zu veranschaulichen, haben wir $d\sigma/ds_{Kd}$ für drei unterschiedliche Polpositionen des $f_0(980)$ berechnet. Die analogen Aussagen gelten für die in Abbildung 5.8a) dargestellten Winkelverteilungen, die –wie man aus Zeichnung 5.8b) erkennen kann– eigentlich nur Rephasierungen ein und derselben Winkelverteilung sind. Die Umrechnung zwischen den einzelnen Winkelverteilungen ist in Anhang E dargestellt. Die Winkelverteilungen in Bezug auf die einlaufenden Deuteronen sind unabhängig von den gezeigten Verteilungen und aufgrund unserer Wahl von konstanten Produktionsoperatoren trivial.

Nachdem die in Abbildung 5.6 gezeigten Berechnungen auf die Möglichkeit hindeu-

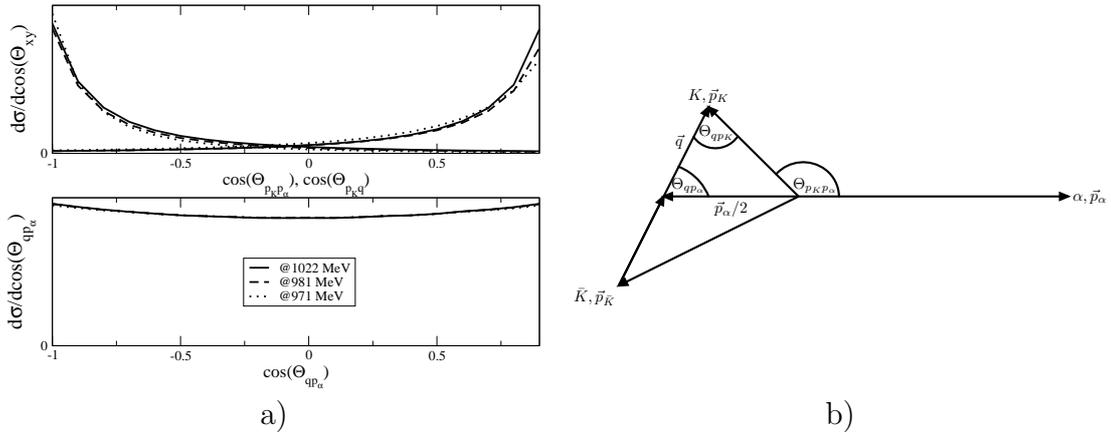


Abbildung 5.8: a) Winkelverteilungen $d\sigma/d\cos(\Theta_{xy})$ bei $\sqrt{s} = 4.76$ GeV für die Reaktion $dd \rightarrow K_1\bar{K}_2\alpha_3$ für drei Endzustandswechselwirkungen mit unterschiedlicher Polposition des $f_0(980)$: durchgezogen: 1022 MeV, gestrichelt: 981 MeV, gepunktet: 971 MeV b) Definition der verwendeten Winkel Θ_{xy} .

ten, die Polposition des $f_0(980)$ zu bestimmen, verbleibt zu klären, inwieweit die Polposition schon durch das Experiment bestimmt ist und ob die an ANKE erreichbare Überschussenergie von ca. 40 MeV geeignet ist, um eine solche Bestimmung durchzuführen. Hierzu vergleichen wir die Vorhersagen für das $d\sigma/ds_{K\bar{K}}$ -Spektrum bei 40 MeV (Abbildung 5.6), bei 16 MeV sowie bei 100 MeV Überschussenergie (Abbildung 5.9). Hierbei wurde 16 MeV als Vergleichswert gewählt, da dies der Maximalwert für ein Experiment mit dem WASA-Detektor im COSY-Ring wäre [43], da WASA nicht direkt in Vorwärtsrichtung messen kann. Man erkennt, dass eine Überschussenergie von 100 MeV eine deutlichere Trennung der zu unterschiedlichen Polpositionen gehörenden Vorhersagen liefert, diese sich jedoch nicht signifikant von der Trennung bei 40 MeV unterscheidet. Anders sieht es hingegen für den mit dem WASA-Detektor erreichbaren Q -Wert aus. Hier liegen die unterschiedlichen Vorhersagen schon so dicht beieinander, dass bei der zu erwartenden Statistik eine Unterscheidung kaum möglich sein wird.

Schauen wir uns nun die Ergebnisse für die Isospin brechende Reaktion $dd \rightarrow \alpha\pi\eta$ an, so variiert die Endzustandswechselwirkung stark im betrachteten invarianten Massenfenster, was dazu führt, dass die $d\sigma/ds_{\pi d^-}$ bzw. $d\sigma/ds_{\eta d^-}$ -Verteilungen stark vom Phasenraum abweichen. Eine signifikante Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung tritt nur nahe der Kaonenschwellen bzw. nahe der $a_0(980)$ -, $f_0(980)$ -Resonanz auf. Somit ist zwar der kinematisch erlaubte Bereich für die $dd \rightarrow \alpha\pi\eta$ Reaktion größer als im Fall der Kaonenproduktion, aber die relevante Physik spielt sich in einem noch kleineren invarianten Massenfenster ab. Dies erlaubt uns, weiterhin von konstanten

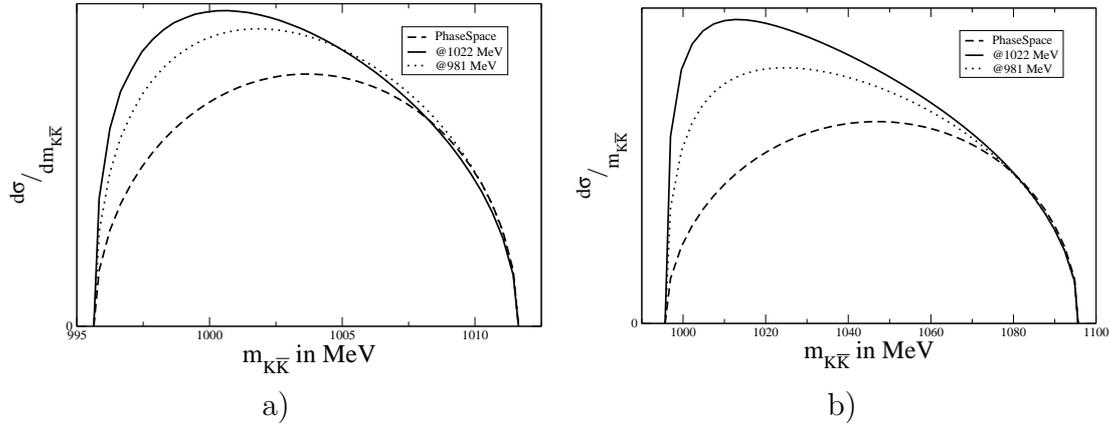


Abbildung 5.9: Die Graphen zeigen die Massenspektren $d\sigma/dm_{K\bar{K}}$ für verschiedene Polpositionen des $f_0(980)$. a) $Q = 16$ MeV b) $Q = 100$ MeV

Produktionsoperatoren auszugehen, die wir –wie in Abschnitt 5.2 erläutert– Isospin erhaltend formulieren.

$$M(s) = C_{\pi\pi I=0}^{prod} I_{m_\pi}(s) T_{\pi\pi \rightarrow \pi\eta}^{on, I:0 \rightarrow 1}(s) \quad (5.6)$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \left(C_{K\bar{K} I=0}^{prod} I_{m_{K^\pm}}(s) T_{K^+ K^- \rightarrow \pi\eta}^{on}(s) + C_{K\bar{K} I=0}^{prod} I_{m_{K^0}}(s) T_{K^0 \bar{K}^0 \rightarrow \pi\eta}^{on}(s) \right)$$

Man beachte, dass wir in Gleichung (5.6) auch in den Schleifenfunktionen der Kaonen die unterschiedlichen Massen von geladenen und ungeladenen Mesonen berücksichtigt haben und somit konsistent zu den bei der Berechnung der T -Matrix gemachten Annahmen bleiben. Betrachten wir nun zunächst unsere Vorhersage für die $\pi\eta$ -Produktion mit den im Jülicher Mesonen-Austausch-Modell bevorzugten Parametern für die Endzustandswechselwirkung. Wie erwartet zeigt das Dalitz-Diagramm (Abbildung 5.10) nur einen sehr schmalen Streifen, in dem der Hauptanteil der Produktion vonstatten geht. In diesem Zusammenhang sollte klar sein, dass wir am Produktionsmaximum das Verhältnis von Produktion via Isospinbrechung in der Produktion zur Produktion via Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung mit 1:10 abgeschätzt haben und dann die Isospinbrechung in der Produktion vernachlässigt haben. Bewegen wir uns in Bereichen mit Produktionsvorhersagen von weniger als 10% der Maximalproduktion, so ist diese Annahme einer Dominanz der Isospinbrechung in der Endzustandswechselwirkung nicht mehr durch die Argumente aus Abschnitt 5.2 gedeckt, da hier die invariante $\pi\eta$ -Masse weit von den Massen des $f_0(980)$ und des $a_0(980)$ entfernt liegt. Betrachtet man nun die Projektionen der Dalitz-Diagramme auf die $m_{\pi\eta}$ - sowie $m_{\alpha\pi}$ -Achse, so erwartet man für die $d\sigma/dm_{\pi\eta}$ -Verteilung einen deutlichen Peak nahe der Kaonenschwelle, da der Wirkungsquerschnitt im Bereich

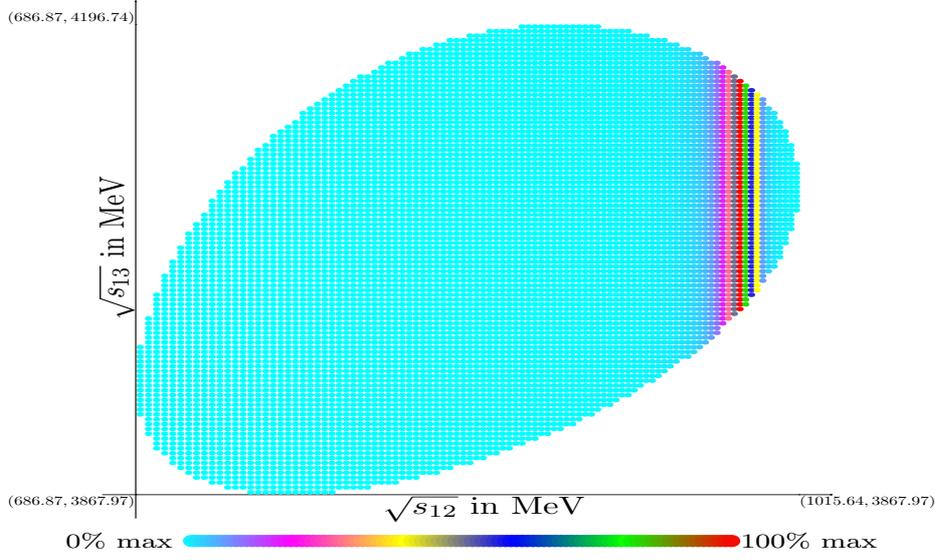


Abbildung 5.10: Dalitz-Diagramm für $dd \rightarrow \pi_1 \eta_2 \alpha_3$ mit $C_{\pi\pi I=0}^{prod} = C_{K\bar{K} I=0}^{prod} = 1$ und der vom Jülicher Modell favorisierten Endzustandswechselwirkung.

von ca. 950–1010 MeV durch die Endzustandswechselwirkung dominiert ist. Beobachtet man im Experiment deutliche Strukturen außerhalb dieses Energiebereichs, so deutet dies z.B. auf Isospinbrechung in den Produktionsoperatoren bzw. Wechselwirkungen zwischen den Mesonen und dem Alphateilchen hin. Auch für die Projektion auf die invarianten $\pi\alpha$ -Massen lassen sich die Bereiche, die durch die Meson-Meson Wechselwirkung dominiert sind, von den Bereichen, in welchen die in unserem Modell vernachlässigte Physik die Hauptrolle spielt, klar trennen. In den durch Gleichung (5.7) bestimmten Gebieten wird das Verhalten durch die Meson-Meson Endzustandswechselwirkung dominiert, da hier die Phasenraumgrenze im Bereich der invarianten $\pi\eta$ -Massen mit der stärksten Produktion liegt.

$$\begin{aligned}
 s_{\pi\eta}^{\max/\min} &= (E_{\pi}^{cm\pi\alpha} + E_{\eta}^{cm\pi\alpha})^2 - \left(\sqrt{(e^{cm\pi\alpha})^2 - m_{\pi}^2} \pm \sqrt{(E_{\eta}^{cm\pi\alpha})^2 - m_{\eta}^2} \right)^2 \\
 &\approx (2m_K)^2 \approx m_{f_0}^2 \approx m_{a_0}^2 \\
 E_{\pi}^{cm\pi\alpha} &= \frac{s_{\pi\alpha} + m_{\pi}^2 - m_{\alpha}^2}{2\sqrt{s_{\pi\eta}}} \\
 E_{\eta}^{cm\pi\alpha} &= \frac{s - s_{\pi\alpha} - m_{\eta}^2}{2\sqrt{s_{\pi\alpha}}}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Für eine Überschussenergie von ca. 330 MeV wären dies ungefähr die Intervalle $m_{\pi\alpha} \in [3950, 4020]$ MeV bzw. $m_{\pi\alpha} \in [4140, 4190]$ MeV, wie man in Abbildung 5.12b) gut erkennen kann. In diesen Intervallen steigt bzw. fällt die Produktion in einer steilen

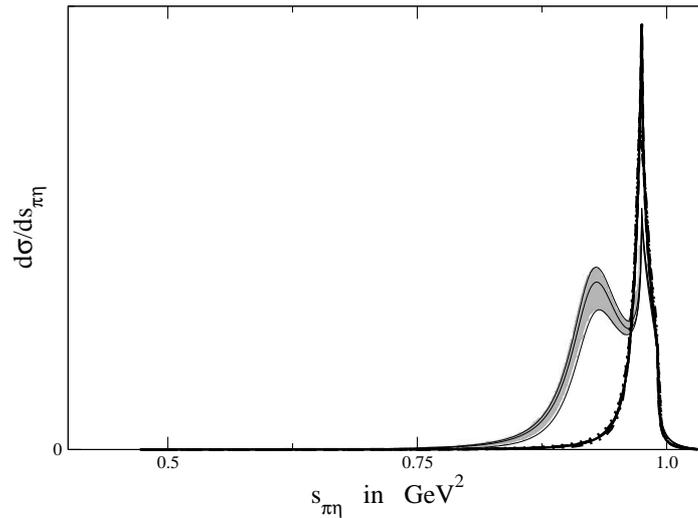


Abbildung 5.11: Produktion $dd \rightarrow \alpha\pi\eta$ bei 330 MeV Überschussenergie für unterschiedliche Produktionskonstanten. Die grau hinterlegte Kurvenschar gehört zum abgesenkten skalaren isoskalaren Pol und das schwarze Band (nur als Linie erkennbar) gehört zur vom Jülicher Mesonen-Austausch-Modell bevorzugten Polposition. Die Polposition des a_0 ($1128 - 63i$ MeV bzw. $1067 - 92i$ MeV) spielt eine untergeordnete Rolle.

Flanke, deren Form durch die Endzustandswechselwirkung bestimmt ist. Zeigt das Massenspektrum außerhalb dieser Flanken eine deutliche Variation, so ist dies ein deutlicher Hinweis auf das Verhalten im Produktionsoperator oder in der α -Meson-Wechselwirkung.

Wenn wir nun eine Abschätzung für die aus der mangelnden Information über die Produktionsoperatoren resultierende Unsicherheit in unserer Vorhersage für die $\pi\eta$ -Produktion treffen wollen, so ist zunächst anzumerken, dass im Fall der bevorzugten Endzustandswechselwirkung mit f_0 -Pol bei 1022 MeV das Massenspektrum nur aus einem Gipfel besteht, dessen Form dominant durch die Massendifferenz zwischen geladenen und ungeladenen Kaonen bestimmt ist. Die vorhandene Unsicherheit wird erst deutlich, wenn man durch einen steiferen Formfaktor des ρ -Austauschpotentials ($\Lambda = 2180$ MeV) die Polpositionen der skalaren Mesonen verschiebt und diese unterhalb der Kaonenschwelle sichtbar werden. In diesem Fall ist der aus den Kaonenschleifen stammende Gipfel klar von der Physik der Resonanzen getrennt und die Unsicherheit aus den Produktionsoperatoren mit ihrer unterschiedlichen Ankopplung an die Resonanzen wird offensichtlich. In Abbildung 5.11 haben wir dies für eine Auswahl von unterschiedlichen Produktionskonstanten dargestellt. Wie zu erwarten und zu erkennen ist, bezieht sich die Unsicherheit nur auf die relative Stärke der beiden Gipfel, die zusätzlich von der modellabhängigen Ankopplung der Meson-Meson Zustände an die Resonanzen abhängt. Die relative Lage der beiden Gipfel ist stabil. In Abbildung 5.12 betrachten wir die Produktion zu festen $C_{\pi\pi}^{prod}/C_{K\bar{K}}^{prod} = 9$, was in etwa dem obe-

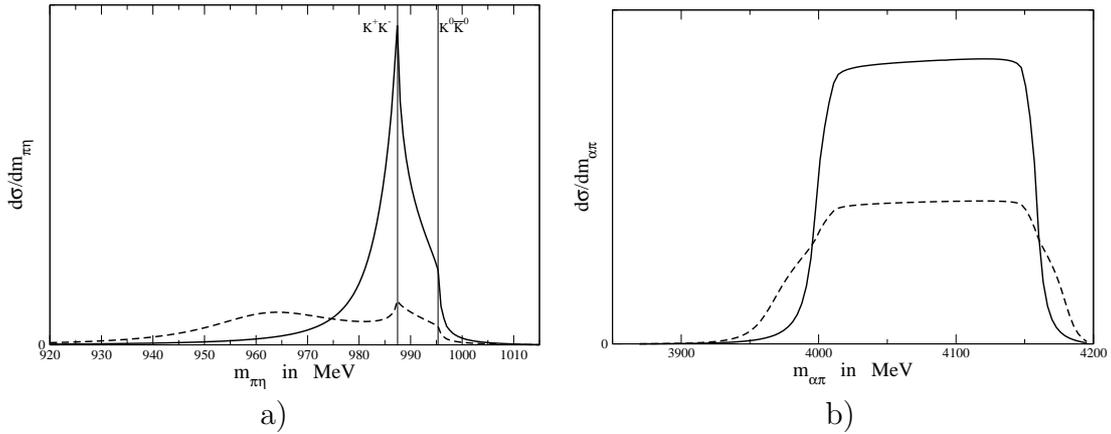


Abbildung 5.12: Für die favorisierte Endzustandswechselwirkung (Linie durchgezogen: $\Lambda_\rho = 1850$ MeV) sowie für eine Endzustandswechselwirkung mit $\Lambda_\rho = 2180$ MeV (gestrichelt) sind die differenziellen Wirkungsquerschnitte a) $d\sigma/dm_{\pi\eta}$ und b) $d\sigma/dm_{\alpha\pi}$ für die Reaktion $dd \rightarrow \alpha\pi\eta$ dargestellt. (Jeweils 330 MeV Überschussenergie)

ren Ende der Bänder aus Abbildung 5.11 entspricht. Im invarianten Massenspektrum der auslaufenden Mesonen haben wir uns auf den Bereich beschränkt, in dem die Isospinbrechung über die Endzustandswechselwirkung dominiert. Im $d\sigma/dm_{\pi\eta}$ -Spektrum erkennt man sowohl für die Parameter des Jülicher Modells als auch für das verstärkte ρ -Austauschpotential den durch die Kaonenmassen verursachten Tafelberg. Für die Parameter des Jülicher Modells fällt der Gipfel der f_0 -Resonanz mit dem Maximum der Isospinbrechung über die Kaonenschleifen zusammen. Bei der zu niedrigeren Energien verschobenen Polposition sind die beiden Strukturen schon getrennt, was zu einer deutlich geringeren Intensität der Isospinbrechung führt. Letzteres entspricht in etwa den Verhältnissen bei der Isospinbrechung im Falle des $D_{s,J}(2317)$, das in Kapitel 3 beschrieben ist. Da der Mechanismus der Isospinbrechung über die Kaonenschleifen in führender Ordnung modellunabhängig berechnet werden kann, bietet sich die Reaktion $dd \rightarrow \alpha\pi\eta$ an, um die Parameter der skalaren Resonanzen zu bestimmen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass im Rahmen des Jülicher Modells das $a_0(980)$ sich nicht als ein Pol sondern als ein Schwelleneffekt manifestiert. Die hier gezeigten Rechnungen beinhalten also nur den dynamisch generierten Pol einer f_0 -Resonanz und ein zweiter schwelennaher Pol könnte nötig werden, um zukünftige experimentelle Beobachtungen zu erklären. In der $d\sigma/dm_{\alpha\pi}$ -Verteilung 5.12b) findet sich an den Flanken der Verteilung im Prinzip die gleiche Information jedoch zusammen mit Produktionen aus Bereichen des Phasenraums, in denen Prozesse beitragen, die unser Modell nicht behandelt. Die Plateaus der Verteilung bieten jedoch eine Möglichkeit, den Einfluß dieser Prozesse abzuschätzen. Zwar erzeugt in diesem kinematischen Be-

reich die Isospinbrechung über die Meson-Meson Endzustandswechselwirkung einen großen Untergrund aber zum Ausgleich dafür werden die vernachlässigten Prozesse über einen großen Phasenraum integriert. Dies erkennt man gut im Dalitz-Diagramm aus Abbildung 5.10

5.4 Fazit

Der Deuteron-Deuteron Eingangszustand zusammen mit dem α -Teilchen im Endzustand bietet die Möglichkeit bei definiertem Isospin zu messen. So befinden sich in der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ die beiden Kaonen hauptsächlich in einem Isospin $I = 0$ Zustand. Damit eignet sich die Reaktion besonders, um die Eigenschaften der $f_0(980)$ -Resonanz zu bestimmen. Dies gilt vor allem, da die von der Particle Data Group gegebenen Parameter für diese Resonanz reine Schätzwerte sind, in die keine der bisherigen Messungen explizit eingeht [64]. Die Analysen der verfügbaren experimentellen Daten variieren von 955 ± 10 MeV [11] ($pp \rightarrow pp\pi^0\pi^0$) bis 1037 ± 31 MeV [167] ($\pi^- C \rightarrow K_S^0 K_S^0 K_L^0 X$). Selbst wenn man nur Analysen der jüngeren Vergangenheit mit kleinen Fehlerbalken betrachtet, streuen die Analyseergebnisse in ähnlicher Weise. So ergibt eine Analyse von Anisovich [18] einen Zentralwert von 1031 ± 8 MeV. Auch wenn diese Übersichtsanalyse aus dem Jahr 2003 bei weitem auf der größten Grundlage unterschiedlicher Reaktionen beruht, so sei jedoch kritisch angemerkt, dass hier die K-Matrix Methode zur Analyse verwendet wurde. Diese Näherungsmethode raubt der Streugleichung die Möglichkeit dynamische Pole zu erzeugen, doch gerade diese Pole wurden von verschiedenen Autoren zur Erklärung der skalaren $\pi\pi$ -Streuphasen herangezogen [122, 142, 176]. Eine Analyse, die zwar nur auf einer Untermenge der in [18] verwendeten Reaktionen fußt aber diese Dynamik berücksichtigt, findet man z.B. in [142]. Die Autoren schließen hier auf eine weit niedrigere Masse von ≈ 993.5 MeV. Eine weitere aktuelle Präzisionsmessung der $f_0(980)$ -Masse stammt aus der Messung von ϕ -Zerfällen $\phi \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$. Die KLOE-Kollaboration extrahiert aus ihren Messungen [13] Werte von $m_{f_0(980)} = 962 \pm 4$ MeV bzw. $m_{f_0(980)} = 973 \pm 1$ MeV für Anpassungskurven mit bzw. ohne $f_0(600)$, wobei für das $f_0(600)$ Parameter aus [9] gewählt wurden. In Bezug auf diese Messung ist anzumerken, dass die Phasenlage der Zerfallsprozesse Abbildung 5.13a) und Abbildung 5.13b) durch die Parametrisierung aus [5] festgelegt wurde. Die Auswirkung einer Variation der Phasenlage auf die extrahierte Masse wäre also interessant. Eingedenk dieser Unsicherheiten ist klar, dass eine Messung der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ zur Präzisierung der Parameter der $f_0(980)$ -Resonanz beitragen kann. Sie bietet darüber hinaus die Chance, Produktionsparameter, die zur Berechnung der Isospin brechenden Reaktion $dd \rightarrow \alpha\pi^0\eta$ nötig sind, einzuschränken. Zusammen erlauben die Reaktionen einen Zugang zur a_0 - f_0 -Mischung

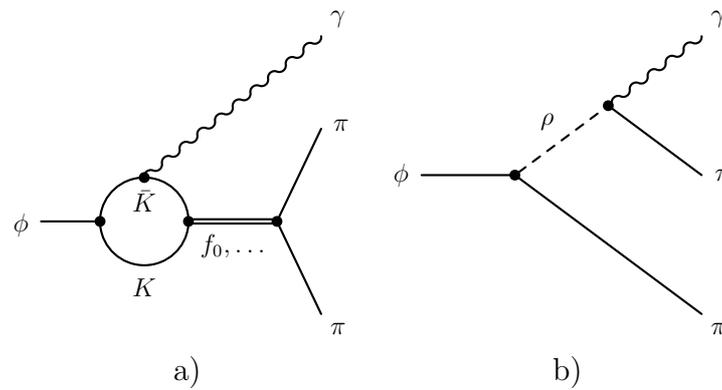


Abbildung 5.13: Diagramme zur Modellierung der Reaktion $\phi \rightarrow \pi\pi\gamma$, wie in der Analyse von [13] verwendet. a) beinhaltet neben der Photonenemission am Antikaon auch die Emission am Kaon aber keinen $\phi\gamma K\bar{K}$ -Vertex wie z.B. die Analyse in [6]

und zu den Parametern der beiden skalaren Resonanzen. Insbesondere geben sie Aufschluss darüber, ob das a_0 als schwelennahe Resonanz aufgefaßt werden muss oder ob eine Erklärung durch die Präsenz der Kaonenschwellen wie im Jülicher Modell genügt.

Kapitel 6

Der Meson-Meson Propagator

Um die Komplikationen zu vermeiden, welche sich aus der Integration über den Impuls ergeben, wollen wir den Meson-Meson Propagator weiter vereinfachen. Eine weit verbreitete Methode hierzu ist die K -Matrix-Näherung. Die Verwendung dieser Methode verbietet sich jedoch im Rahmen unseres Modells, da wir die im Rahmen des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells dynamisch generierten Resonanzen untersuchen wollen. Die K -Matrix-Näherung kann solche Resonanzen jedoch nicht erzeugen, da der Realteil des Propagators durch Null genähert wird. Um diese Inkonsistenz zu vermeiden, verwenden wir dimensional regularisierte skalare Schleifenfunktionen als Annäherung an die wahren Propagatoren. Dieses Vorgehen impliziert die Annahme, dass das verwendete Potential nur von der Energie abhängt, die Vertices also punktförmig sind. (Um etwaige Winkelabhängigkeiten zu berücksichtigen, ist eine Partialwellenzerlegung –wie in Anhang D beschrieben– zu verwenden.) Dass diese Annahmen vertretbar sind, kann man z.B. daran sehen, dass sie im Rahmen der “unitarisierten chiralen Störungstheorie” erfolgreich eingesetzt wurden, um dynamische und $q\bar{q}$ -Resonanzen zu untersuchen. Wenn wir nun die dimensionale Regularisierung verwenden, um die skalare Schleifenfunktion zu berechnen, müssen wir eine Verbindung zu physikalischen Observablen herstellen, um die Subtraktionskonstante zu fixieren. Zu diesem Zweck berechnen wir die Phase δ_1^1 der Pion-Pion Streuung in einem Spielzeugmodell und passen die Subtraktionskonstante so an, dass die Phasen in der Nähe des $\rho(770)$ reproduziert werden.

Wir wollen nun kurz unser Spielzeugmodell beschreiben. Die Meson-Meson Schleifenfunktion (Abbildung 6.1) kann auf dem üblichen Weg berechnet werden und das Ergebnis ist in diversen Arbeiten wie zum Beispiel [69] nachzulesen.

$$I(s) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - m_a^2)((l + \sqrt{s})^2 - m_b^2)} \quad (6.1)$$

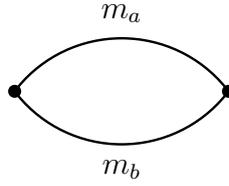


Abbildung 6.1: Diagrammatische Darstellung der skalaren Schleifenfunktion.

$$\begin{aligned}
&= -2L(\lambda) + \frac{1}{32\pi^2} \left(2 + \frac{m_a^2 - m_b^2}{s} \ln \frac{m_b^2}{m_a^2} - \frac{m_a^2 + m_b^2}{m_a^2 - m_b^2} \ln \frac{m_b^2}{m_a^2} \right) \\
&\quad - \frac{1}{16\pi^2} \frac{1}{m_a^2 - m_b^2} \left(m_a^2 \ln \frac{m_a^2}{\lambda^2} - m_b^2 \ln \frac{m_b^2}{\lambda^2} \right) \\
&\quad + \begin{cases} +\frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{-\delta}}{s} \left(\ln \frac{s-(m_a^2+m_b^2)-\sqrt{-\delta}}{s-(m_a^2+m_b^2)+\sqrt{-\delta}} \right) & \text{für } s < (m_a - m_b)^2 \\ -\frac{1}{16\pi^2} \frac{\sqrt{\delta}}{s} \arctan \frac{\sqrt{\delta}}{-s+m_a^2+m_b^2} & \text{für } (m_a - m_b)^2 < s < (m_a + m_b)^2 \\ +\frac{1}{32\pi^2} \frac{\sqrt{-\delta}}{s} \left(\ln \frac{s-(m_a^2+m_b^2)-\sqrt{-\delta}}{s-(m_a^2+m_b^2)+\sqrt{-\delta}} + 2i\pi \right) & \text{für } s > (m_a + m_b)^2 \end{cases} \quad (6.2)
\end{aligned}$$

Hierbei sind $m_{a,b}$ die Massen der umlaufenden Mesonen und λ die Skala der dimensional Regularisierung. Da die im Rahmen unseres Modells berechneten Observablen nicht, wie es sein sollte, invariant unter der Renormierungsgruppe sind, müssen wir eine Wahl für λ treffen. Wir orientieren uns bei unserer Wahl an den von E. Oset et al. [144, 146] $\lambda = 750$ MeV beziehungsweise von J.A. Oller et al. [144] $\lambda = 1200$ MeV gewählten Werten und wählen $\lambda = 770$ MeV, was in der Größenordnung der niedrigsten Resonanz liegt. Die Abkürzungen $\delta(s)$ und $L(\lambda)$ stehen für $\delta(s) = -s^2 + 2s(m_a^2 + m_b^2) - (m_a^2 - m_b^2)^2$ und $L(\lambda) = \frac{\lambda^{d-4}}{16\pi^2} \left(\frac{1}{d-4} + \frac{1}{2}(\gamma_E - 1 - \ln 4\pi) \right)$, wobei $\gamma_E = 0.5772157$ die Eulerzahl ist. Um diese Formel im Fall der ρ -Resonanz im Pion-Pion Kanal anwenden zu können, müssen wir sie für den Grenzfall gleicher Massen anpassen, was dann die folgende Identität ergibt.

$$I_{m_a=m_b=m}(s) = \frac{1}{i} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 - m^2)((l + \sqrt{s})^2 - m^2)} \quad (6.3)$$

$$= -2L(\lambda) + \frac{1}{32\pi^2} (2 + 0 + 2) \quad (6.4)$$

$$- \frac{1}{16\pi^2} \left(\ln \frac{m^2}{\lambda^2} + 1 \right)$$

$$+ \begin{cases} -\frac{1}{16\pi^2} r \left(\ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| \right) & \text{für } s < 0 \\ -\frac{1}{8\pi^2} r \arctan \frac{1}{r} & \text{für } 0 < s < 4m^2 \\ -\frac{1}{16\pi^2} r \left(\ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| + i\pi \right) & \text{für } s > 4m^2 \end{cases}$$

$$=a(\lambda) + \frac{1}{16\pi^2} \left(1 - \ln \frac{m^2}{\lambda^2} - r \ln \left| \frac{1+r}{1-r} \right| - ir\pi \right) \quad (6.5)$$

für $s > 4m^2$

An dieser Stelle ist $r = \sqrt{|1 - \frac{4m^2}{s}|}$ lediglich eine bequeme Umformulierung des δ aus dem Fall ungleicher Massen.

Bevor wir nun das Spielzeugmodell formulieren, mit dessen Hilfe wir die Subtraktionskonstante der Schleifenfunktion bestimmen wollen, sei darauf hingewiesen, dass die im Jülicher Modell in der Partialwellenzerlegung (Anhang D) gewählte Normierung zur Anwendung zusammen mit einer dimensional Regularisierung ungeeignet ist. Wir verwenden daher die Zerlegung:

$$\tilde{T}^J(\lambda_3, \lambda_4, |\vec{k}'|, k'_0, \lambda_1, \lambda_2, |\vec{k}|, k_0) = \int \frac{d\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}}{4\pi} D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}',\vec{k}}, 0) T(\lambda_3, \lambda_4, \vec{k}', k'_0, \lambda_1, \lambda_2, \vec{k}, k_0) \quad (6.6)$$

Die Symbole sind in Anhang D erklärt. Nun berechnen wir die Pion-Pion Streuung, indem wir Gleichung (6.7) verwenden, um das in Baumordnung formulierte Potential zu regularisieren, wobei wir nur die Abhängigkeit des Partialwellen zerlegten Potentials von $s = k_0^2 - \vec{k}^2$ beachten, wenn wir die Integration über den Schleifenimpuls ausführen.

$$\begin{aligned} \tilde{T}^J(q', q) &= \tilde{V}^J(q', q) + \int \frac{\vec{k}^2 d|\vec{k}| dk_0}{4\pi^3} \tilde{V}^J(q', |\vec{k}|, k_0) G(|\vec{k}|, k_0) \tilde{T}^J(|\vec{k}|, k_0, q) \quad (6.7) \\ \langle \approx \rangle \tilde{T}^J(q', q) &= \tilde{V}^J(q', q) + \tilde{V}^J(q', \cdot) \tilde{T}^J(\cdot, q) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} G(l) \\ \langle = \rangle \tilde{T}^J(s) &= \frac{\tilde{V}^J(s)}{1 - \tilde{V}^J(s) I(s)} \end{aligned}$$

Das beschriebene Schema wurde schon im Rahmen vieler Untersuchungen angewendet und so ist die Anzahl gut verstandener Potentiale groß. Um ein Beispiel zu nennen, seien hier die Amplituden aus der chiralen Störungstheorie (χ PT) im Grenzfall einer hohen Anzahl der Farbfreiheitsgrade (N_c) angeführt. Hierbei wird ausgenutzt, dass die Quantenchromodynamik in diesem Grenzfall Beiträge aus Schleifen unterdrückt [62, 131, 143]. Da wir jedoch die skalaren Schleifenfunktionen als Näherung für den Propagator des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells benutzen wollen, um an eine Endzustandswechselwirkung anzukoppeln, die wir ebenfalls im Jülicher Modell berechnen, ist es sinnvoll, die Subtraktionskonstante unter Verwendung dieses Potentials zu bestimmen. Dieses Vorgehen liefert uns gleichzeitig eine Abschätzung für die mit diesem Vorgehen verbundenen Unsicherheiten.

Das entsprechende Potential auf Baumniveau für das $I = 1, J = 1$ Pionenpaar stammt hauptsächlich vom s -Kanal-Austausch des ρ -Mesons und lautet (Man beachte den

Faktor 1/2 wegen der identischen Teilchen):

$$\tilde{V}^{(I=1, J=1)} = g_{\rho\pi\pi}^2 \frac{4}{3} \frac{qq'}{s - \tilde{m}_\rho^2} \quad (6.8)$$

In dieser Formulierung haben wir die Formfaktoren gleich eins gesetzt, weil das von ihnen verursachte Verhalten jenseits der Massenschale in diesem Ansatz sowieso ignoriert wird. Wenn wir dieses Potential mit dem im Rahmen der χ PT bestimmten Potential (Gl.(6.9)) vergleichen, so können wir unsere Wahl der Parameter in ihrer Abweichung zur KSFR [107, 155]-beziehung $m_\rho^2 = 2f_\pi^2 g_{\rho\pi\pi}^2$ beurteilen. Die Rho-Kopplung des Jülicher Modells $g_{\rho\pi\pi} = 5.84 \approx g_{\rho\pi\pi}^{\text{KSFR}} = \frac{771.1 \text{ MeV}}{\sqrt{2 \cdot 87.3 \text{ MeV}}} = 6.25$ zeigt sich mit der KSFR-Relation verträglich.

$$\tilde{V}_{\chi\text{PT}, \infty}^{(I=1, J=1)}(s) = -\frac{2 p_{\pi\pi}^2}{3 f_\pi^2} \frac{m_\rho^2 + (g_v^2 - 1)s}{m_\rho^2 - s} \quad (6.9)$$

mit der Pionzerfallskonstante $f_\pi = 87.3 \text{ MeV}$

und $g_v^2 = 1$ bei erfüllter KSFR-Relation

Wir können nun $a(\lambda)$ bestimmen, indem wir an die $\pi\pi$ -Phasen anpassen, die zum Beispiel von Froggatt et al. in [71, 72] veröffentlicht sind. Diese Anpassungen haben wir sowohl für den Parameter $g_{\rho\pi\pi} = 5.837$ (Jülich) und für ein freies $g_{\rho\pi\pi}$ (Es resultiert $g_{\rho\pi\pi} = 9.355$) durchgeführt. Die Qualitäten dieser Anpassungen, die $a(771.1 \text{ MeV}) = 0.117$ und $a(771.1 \text{ MeV}) = 0.039$ entsprechen, sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Es sei angemerkt, dass die Verwendung der KSFR-Relation entsprechenden Kopplungskonstante ($\rightarrow a(771.1 \text{ MeV}) = 0.095$) die Breite des Rhos schon besser wiedergibt als die Kopplungskonstante des Jülicher Modells, aber auch diese Rechnung muss die Breite unterschätzen, da wir z.B. mit dem ρ - t -Kanalaustausch einen Großteil der Wechselwirkung vernachlässigen. In diesem Vergleich wurden die theoretischen Kurven entsprechend

$$S^J = e^{2i\delta^J} = 1 - \frac{iq}{4\pi\sqrt{s}} \frac{1}{(\tilde{V}^J)^{-1} - I(a(\lambda))}, \quad (6.10)$$

berechnet, wobei q den Impuls des Pions auf seiner Massenschale bezeichnet. Hätten wir an dieser Stelle die Partialwellenzerlegung in ihrer Form aus Anhang D verwendet, so müssten wir die Normierung des Volumenelementes in I korrigieren.

Da wir dieses Verfahren anwenden wollen, um die Kaon-Antikaon Produktion in der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ zu berechnen, benötigen wir auch die Subtraktionskonstanten für den Pion-Pion Propagator mit den Pionen in relativer S -Welle und für den Kaon-Antikaon Propagator in relativer S -Welle. Eigentlich wären diese Konstanten schon durch unsere obige Anpassung bestimmt, aber die Vertexfunktionen sind nicht,

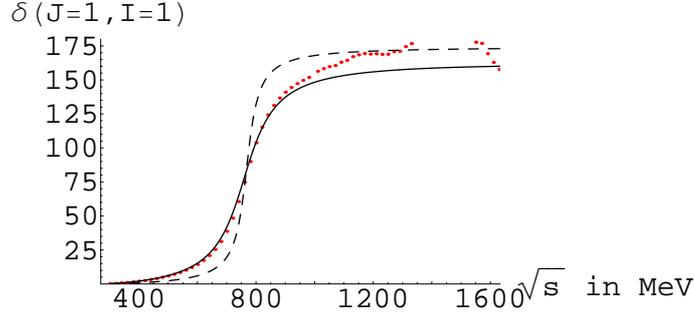


Abbildung 6.2: Die δ_1^1 Pion-Pion Phasenverschiebungen wie sie in der Festlegung der Subtraktionskonstante der skalaren Schleifenfunktionen verwendet wurden. Die gestrichelte Linie entspricht der Anpassung für die Parameter des Jülicher Modells in etwa entsprechend der KSFR-Relation und die durchgezogene Linie entspricht dem an die Breite angepassten Parameter. Zum Vergleich sind die experimentellen Daten aus [71, 72] als Kreise dargestellt.

wie von uns angenommen, konstant. Im Gegenteil, wir verwenden Vertices mit unterschiedlichen Impulsabhängigkeiten und unterschiedlichen Abschneideparametern Λ , weshalb es nötig ist, die Subtraktionskonstanten $a(\lambda)$ in jedem Kanal anzupassen. Bei dieser Anpassung sehen wir auch, dass sich der Kern unserer Streugleichung stark von den nackten Potentialen der unitarisierten χ PT-Modelle unterscheidet. Um diesen Punkt zu verdeutlichen, zeigen wir in Gleichung 6.11 das durch die chirale Theorie bei großer Anzahl der Farbfreiheitsgrade N_C inspirierte Potential, welches Oller et al. zur Berechnung des skalaren isoskalaren Kanals in ihrer unitarisierten Rechnung [143] verwenden.

$$\begin{aligned}
 T_{\pi\pi\rightarrow\pi\pi}^\infty &= \frac{2s - m_\pi^2}{2f_\pi^2} + \frac{3}{2} \frac{(\alpha_1)^2}{M_1^2 - s} + \frac{3}{2} \frac{(\beta(0)_1)^2}{M_8^2 - s} \\
 T_{\pi\pi\rightarrow K\bar{K}}^\infty &= \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{s}{f_\pi^2} + \sqrt{3} \frac{\alpha_1\alpha_2}{M_1^2 - s} + \sqrt{3} \frac{\beta(0)_1\beta(0)_2}{M_8^2 - s} \\
 T_{K\bar{K}\rightarrow K\bar{K}}^\infty &= \frac{3}{4} \frac{s}{f_\pi^2} + 2 \frac{(\alpha_2)^2}{M_1^2 - s} + 2 \frac{(\beta(0)_2)^2}{M_8^2 - s} \\
 &\dots \text{ und weitere Potentiale des } \eta\eta\text{-Kanal}
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

Die exakte Form von α_i und $\beta(0)$ findet man in [143]. Hierbei wurden $M_1 = 1032$ MeV und $M_8 = 1003(\pm 600)$ MeV (genau wie $M'_1 = 1000(\pm 600)$ MeV und $M'_8 = 1379$ MeV) als Parameter behandelt, die dann als die Massen von zu zwei

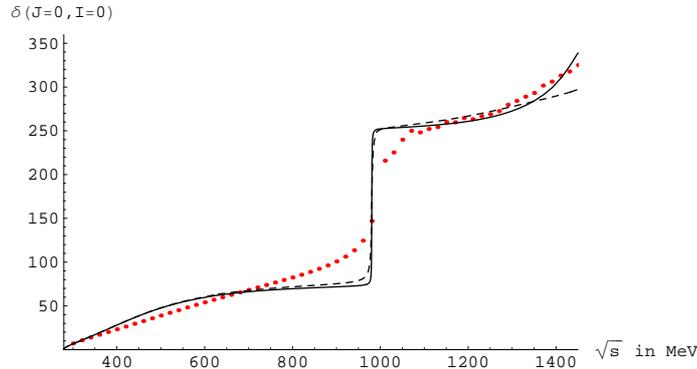


Abbildung 6.3: Die δ_0^0 Pion-Pion Phasenverschiebungen, wie sie zur Festlegung der Subtraktionskonstante im skalaren Schleifenintegral benutzt wurden, sind zusammen mit den experimentellen Daten aus [71, 72] (Kreise) gezeigt. In den Rechnungen wurde ein vom Jülicher Modell abgeleitetes Potential verwendet, wobei die gestrichelte Linie einem verstärkten K^* - t -Kanal Austauschpotential entspricht. Auch wenn diese Parametrisierung keine eins zu eins Übersetzung (durchgezogene Kurve) der Parameter des Jülicher Modells ist, so ergibt sie doch eine bessere Annäherung an das Jülicher Modell. Dies wird klar, wenn man bedenkt, dass in diesem Modell die Abschneideparameter für das Übergangspotential schwach abschneidend gewählt wurden, um die Breite der $f_0(980)$ -Resonanz zu reproduzieren.

Nonetten gehörenden Teilchen interpretiert wurden (jeweils Singulett und Oktett). In diesem Zusammenhang ist es interessant anzumerken, dass sowohl Γ_8 als auch Γ_1' sehr schmal sind und die Massen M_8 und M_1' einer großen Unsicherheit von etwa 600 MeV unterworfen sind. Bei dieser Anzahl von freien Parametern ist es auch klar, warum wir mit unserem Potential (6.8) im Rahmen dieses Spielzeugmodells keine gute Anpassung bieten können.

$$\begin{aligned}
 V = & \left(\begin{array}{cc} V_s^{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}(m_{f_0}, g_{\pi\pi f_0}^2, \frac{3}{2}) & V_s^{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}(m_{f_0}, g_{\pi\pi f_0} g_{K\bar{K} f_0}, -\sqrt{3}) \\ V_s^{K\bar{K} \rightarrow \pi\pi}(m_{f_0}, g_{K\bar{K} f_0} g_{\pi\pi f_0}, -\sqrt{3}) & V_s^{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}(m_{f_0}, g_{K\bar{K} f_0}^2, 2) \end{array} \right) \quad (6.12) \\
 & + \left(\begin{array}{cc} V_t^{\pi\pi \rightarrow \pi\pi}(m_\rho, g_{\pi\pi\rho}^2, -2) & V_t^{\pi\pi \rightarrow K\bar{K}}(m_{K^*}, g_{\pi\pi\rho}^2, \frac{-\sqrt{3}}{4}) \\ V_t^{K\bar{K} \rightarrow \pi\pi}(m_{K^*}, g_{\pi\pi\rho}^2, \frac{-\sqrt{3}}{4}) & \left[\begin{array}{c} V_t^{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}(m_\rho, g_{\pi\pi\rho}^2, \frac{-3}{4}) + V_t^{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}(m_\omega, g_{\pi\pi\rho}^2, \frac{-1}{4}) \\ + V_t^{K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}}(m_\phi, g_{\pi\pi\rho}^2, \frac{-1}{2}) \end{array} \right] \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

$$V_t^{m_1 m_2 \rightarrow m_3 m_4}(M, g^2, F) = F g^2 \left(1 - \frac{(c(m_1, m_2) + c(m_3, m_4))^2 - M^2 - s - 2k^2(m_1, m_2) - 2k^2(m_3, m_4)}{4k(m_1, m_2)k(m_3, m_4)} \cdot \ln \frac{(k(m_1, m_2) - k(m_3, m_4))^2 + M^2}{(k(m_1, m_2) + k(m_3, m_4))^2 + M^2} \right) \quad (6.13)$$

$$V_s^{m_1 m_2 \rightarrow m_3 m_4}(M, g^2, F) = \frac{F g^2}{\sqrt{m_1, m_2, m_3, m_4}} \frac{1}{M^2 - s} \left(\frac{s}{4} - c^2(m_1, m_2) + k^2(m_1, m_2) \right) \cdot \left(\frac{s}{4} - c^2(m_3, m_4) + k^2(m_3, m_4) \right) \quad (6.14)$$

$$c(m_a, m_b) = \frac{m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \quad (6.15)$$

$$k(m_a, m_b) = \sqrt{\frac{(s - (m_a + m_b)^2)(s - (m_a - m_b)^2)}{4s}} \quad (6.16)$$

Hierbei beschreibt F die Zusammenfassung von Faktoren aus dem Isospinraum, aus $SU(3)$ -Relation sowie aus der Symmetrisierung von identischen Teilchen und s das invariante Massenquadrat des Systems. Die Kopplungskonstanten wurden mit $g_{\rho\pi\pi} = 6.04$ und $g_{\pi\pi f_0} = g_{K\bar{K}f_0} = 2.448$ dem Jülicher Modell entsprechend gewählt. Damit erhalten wir für die Subtraktionskonstanten Werte von:

$$a(\lambda)(\pi\pi_S) = -3.9 \cdot 10^{-3} \quad (6.17)$$

$$a(\lambda)(K\bar{K}_S) = 4.0 \cdot 10^{-3} \quad (6.18)$$

Unsere Betrachtung der Meson-Meson Schleifenfunktion wollen wir mit dem Hinweis abschließen, dass bei unserer Anpassung mit verstärktem Übergangspotential sich ein $a(\lambda)(K\bar{K}_S) = 4.5 \cdot 10^{-3}$ ergab, was zeigt, dass wir unsere Subtraktionskonstanten nur als eine Abschätzung der Größenordnung auffassen dürfen. Diese Feststellung ist natürlich bei den Fehlerabschätzungen in den Kapiteln 4 und 5 berücksichtigt.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Wir haben das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell mit Hilfe von $SU(4)$ -Relationen um die Wechselwirkung mit Charm behafteten Mesonen erweitert. In diesem Modell haben wir die Meson-Meson Dynamik in den gekoppelten KD -, πD_s^+ - und ηD_s^+ -Kanälen untersucht. Wir konnten beobachten, dass sich aufgrund der t -Kanal-Austauschdiagramme des ρ - und des ω -Mesons im skalaren isoskalaren KD -Kanal ein Molekül bildet. Betrachtet man die Kanäle an die das Molekül koppelt, so ist klar, dass es nur Isospin verletzend zerfallen kann und damit schmal sein muss. Dies gilt insbesondere, da das KD -Molekül tiefer gebunden ist als das aus dem Jülicher Modell der $\pi\pi$ -Streuung bekannte $K\bar{K}$ -Molekül, was bedeutet, dass es weiter von dem Schwellenbereich des Kanals entfernt ist, in welchem die Isospinbrechung schon in der Ordnung $\sqrt{\alpha}$ beitragen kann. Auch wenn es uns möglich ist, unter der Annahme einer isoskalaren initialen Produktion die Beobachtungen einer Resonanz bei 2317 MeV im $D_s^+\pi^0$ - Kanal durch BaBar [21], Cleo [33] und Belle [2] mithilfe dieses Moleküls zu erklären, so müssen wir dennoch feststellen, dass wir die Existenz eines genuine Quarkzustandes in der Nähe der KD -Schwelle nicht ausschließen können. In diesem Zusammenhang haben wir Vorhersagen für die Breite des Moleküls unter Beachtung der $\pi\eta$ - und der $\rho\omega$ -Mischung getroffen. Diese liegen um einen Faktor 4 über den Erwartungen für genuine Quarkzustände. Eine Messung der Breite des $D_{sJ}(2317)$ wäre hilfreich, um die Natur dieser Resonanz zu klären.

Rückblickend auf das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell im $SU(3)$ -Sektor haben wir die periphere Produktion von Pionen in relativer S -Welle in der Reaktion $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$ untersucht. Die von BNL-E852 [88] und GAMS [10, 12] in dieser Reaktion beobachtete Abhängigkeit der $\pi\pi$ -Massenspektren von dem Impulsübertrag auf das Nukleon wurde von einigen Autoren als Argument gegen eine dominant molekulare Struktur des $f_0(980)$ angeführt [17, 112]. Wir haben gezeigt, dass bei konsistenter Berücksichtigung der Produktion via π - und a_1 -Emission am Nukleon (hier in der

Form von Regge-Amplituden) das Jülicher Mesonen-Austausch-Modell sehr wohl in der Lage ist zu erklären, dass sich das $f_0(980)$ bei kleinen Impulsüberträgen als Minimum manifestiert, während es bei großen Impulsüberträgen als Maximum erscheint. Aufgrund der Inkonsistenz zwischen den BNL-E852 und den GAMS Daten war es uns nicht möglich, Aussagen über die Struktur der schweren skalaren Resonanzen zu treffen. Es sei jedoch hervorgehoben, dass wir im Rahmen des Jülicher Modells auch die Kaonen-Produktion $\pi^- p \rightarrow K^0 \bar{K}^0 n$ mithilfe der für die Pionen festgelegten Produktionsamplituden beschreiben können.

Ferner haben wir eine minimalistische Version des Jülicher Mesonen-Austausch-Modells verwendet, um die Reaktionen $pp \rightarrow dK^+ \bar{K}^0$ und $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ zu modellieren. In Bezug auf die Reaktion $pp \rightarrow dK^+ \bar{K}^0$ mussten wir feststellen, dass wir bei Modellierung der initialen Produktion eine zu kleine Auswahl an möglichen Produktionsoperatoren getroffen haben, was sich in unseren Vorhersagen für Winkelverteilungen bezüglich des Strahles spiegelt. Für unsere Untersuchung der Meson-Deuteron Endzustandswechselwirkung spielt dies jedoch keine Rolle. Wir stellen fest, dass die Produktion der Kaonen hauptsächlich in relativer S -Welle erfolgt. Dies führt dazu, dass eine Untersuchung, welche die initialen Produktionsparameter fixiert, nur kleine $d\bar{K}$ -Wechselwirkungen zulassen wird. Stimmen wir jedoch die Parameter der initialen Produktion so ab, dass sich die Beiträge zur Produktion der Kaonen in relativer P -Welle nach der Endzustandswechselwirkung wegheben, so steht keine der in Tabelle 4.2 zitierten Streulängen im Widerspruch zu den experimentellen Daten aus [110]. Bei unserer Betrachtung der Reaktion $dd \rightarrow \alpha K \bar{K}$ konnten wir zum einen beobachten, wie die Polposition des $f_0(980)$ die Produktion der Kaonen beeinflusst. Wir haben ferner Vorhersagen für die Isospin brechende Reaktion $dd \rightarrow \alpha \pi \eta$ getroffen. In diesem Zusammenhang wäre es interessant, wenn ein zukünftiges Experiment Daten liefert, die der hier angewendeten Interpretation des $a_0(980)$ als Schwelleneffekt widersprechen.

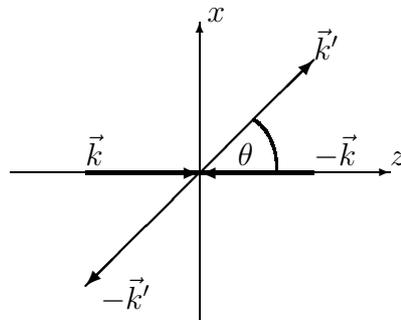
Anhang A

Definitionen¹

In diesem Kapitel zitieren wir der Vollständigkeit halber die üblicherweise im Jülicher Mesonen-Austausch-Modell getroffenen Konventionen und die Definitionen der Observablen.

A.1 Allgemeines

1. Das Koordinatensystem für die $\pi\pi$ -Streuung:



2. Die Metrik:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¹Die verwendeten Konventionen sind identisch zu denen in [114] bzw. [157].

3. Dirac- und Pauli-Matrizen:

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} & \vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} & \gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Produkte der Polarisationsvektoren und Polarisationsensoren:

a) Für \vec{k} parallel zur z -Achse:

$$\epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon^\mu(\vec{k}, \lambda = 0) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \omega(k) \end{pmatrix}$$

b) Für ein um θ gegen \vec{k} verdrehtes \vec{k}' :

$$(\epsilon^\mu)^*(\vec{k}', \lambda = \pm 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \mp \cos \theta \\ i \\ \pm \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (\epsilon^\mu)^*(\vec{k}', \lambda = 0) = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} k' \\ \omega(k') \sin \theta \\ 0 \\ \omega(k') \cos \theta \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich für die Summe über die Polarisierungen:

$$P_{\mu\nu} := \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu}(\lambda) \epsilon_{\nu}^*(\lambda) = -g_{\mu\nu} + \frac{k_{\mu} k_{\nu}}{m^2} . \quad (\text{A.1})$$

Für die Polarisationsensoren gilt:

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\mu\nu}(\lambda) \epsilon_{\sigma\tau}^*(\lambda) = \frac{1}{2} (P_{\mu\sigma} P_{\nu\tau} + P_{\mu\tau} P_{\nu\sigma}) - \frac{1}{3} P_{\mu\nu} P_{\sigma\tau} . \quad (\text{A.2})$$

5. Dirac-Spinoren: In der Helizitätsdarstellung lauten die auf $\bar{u}(\vec{k}, \lambda) u(\vec{k}, \lambda) = 2m$ normierten Spinoren eines Spin- $\frac{1}{2}$ Teilchens der Masse m :

$$u(\vec{k}, \lambda) = \sqrt{E_k + m} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{k}}{E_k + m} \end{pmatrix} |\lambda\rangle \quad (\text{A.3})$$

Hierbei beschreibt $|\lambda\rangle$ die Eigenzustände des Helizitätsoperators $\frac{\vec{\sigma}\vec{k}}{2k}$ zu den Eigenwerten $\pm\frac{1}{2}$. Ihre explizite Form für einen beliebigen Vektor $\vec{k}(\theta, \phi)$ lautet:

$$\begin{aligned} \left| \lambda = +\frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \\ \left| \lambda = -\frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. Das Vorzeichen des vollständig antisymmetrischen Tensors in vier Dimensionen $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ist gegeben durch:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} -1 & \text{für gerade Permutationen von 0123} \\ 1 & \text{für ungerade Permutationen von 0123} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

A.2 Berechnung der Observablen

Um aus der T -Matrix die S -Matrix zu berechnen, aus der wir dann die Streuphasen und Inelastizitäten extrahieren, benötigt man die Zustandsdichte ρ . Zur Berechnung der Zustandsdichte betrachtet man die Gleichungen C.6 und C.7 in Partialwellen zerlegter Form mit ausintegrierter Energiekomponente (A.5, A.6) für den On-Shell-Impuls k_{on} , um aus deren Vergleich A.7 zu erhalten.

$$T^J(s^+) - T^J(s^-) = \int k^2 dk T^J(s^+) disc G(k; s) T^J(s^-) \quad (\text{A.5})$$

$$T_{on}^J(s) - (T_{on}^J(s))^\dagger = -2\pi i \rho_{on} T_{on}^J(s) (T_{on}^J(s))^\dagger \quad (\text{A.6})$$

$$disc G(k, s) = -\frac{2\pi i}{k_{on}^2} \rho_{on} \delta(k - k_{on}) \quad (\text{A.7})$$

Im Fall des Blankenbecler-Sugar-Propagators C.11 rechnet man damit unter Verwendung der Hauptwertbeziehung C.12 nach:

$$\begin{aligned} disc G &= \frac{\omega_1(k) + \omega_2(k)}{(2\pi)^3 2\omega_1(k)\omega_2(k)} \left(\frac{1}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - s - i\epsilon} - \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - s + i\epsilon} \right) \\ &= \frac{\omega_1(k) + \omega_2(k)}{(2\pi)^3 2\omega_1(k)\omega_2(k)} (-2\pi i) \delta((\omega_1 + \omega_2)^2 - s) \\ &= (-2\pi i) \frac{1}{(2\pi)^3 4k(\omega_1(k) + \omega_2(k))} \delta(k - k_{on}) \quad . \end{aligned}$$

Die letzte Identität beruht auf der Substitutionsregel für die Deltafunktion:

$$\begin{aligned}\delta(f(k)) &= \frac{1}{\left|\frac{df}{dk}\right|_{k=k_{on}}}\delta(k - k_{on}) \quad \text{für } f(k_{on}) = 0 \quad , \\ \delta((\omega_1 + \omega_2)^2 - s) &= \frac{\omega_1\omega_2}{2(\omega_1 + \omega_2)^2 k}\delta(k - k_{on}) \quad .\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\rho = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{k_{on}}{4(\omega_1 + \omega_2)} \quad .$$

Da die physikalisch messbaren Größen für Teilchen auf ihrer Massenschale gelten, bezeichnen wir im Folgenden mit S und T die jeweiligen Massenschalenwerte der Operatoren. Mit Definition A.8 gehen wir von der T -Matrix zur dimensionslosen τ -Matrix über

$$\tau := -\pi\rho T \quad S = 1 + 2i\tau \quad . \quad (\text{A.8})$$

Schaut man sich nun wiederum Gleichung A.6 an, so macht man die nach der Herleitung der Streugleichung nicht weiter verwunderliche Beobachtung A.9, dass die S -Matrix für elastische Streuung auf dem Unitaritätskreis liegt.

$$\begin{aligned}\tau - \tau^\dagger &= 2i\tau\tau^\dagger \\ SS^\dagger &= (1 + 2i\tau)(1 - 2i\tau^\dagger) = 1\end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2.1 Streuphasen und Inelastizitäten

Aus der Parametrisierung A.10 der S -Matrix erhält man – indem man das oben Gesagte einbezieht – die Gleichungen A.11, A.12 zur Bestimmung der Inelastizitäten η und Phasen δ :

$$S(s) = \eta(s)e^{2i\delta(s)} \quad (\text{A.10})$$

$$\eta \cos(2\delta) = 1 - 2\text{Im}(\tau)$$

$$\eta \sin(2\delta) = 2\text{Re}(\tau)$$

$$\eta = \sqrt{1 - 4|\tau|^2} \quad (\text{A.11})$$

$$\delta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\text{Re}(\tau)}{1 - 2\text{Im}(\tau)} \quad (\text{A.12})$$

A.2.2 Wirkungsquerschnitt und Y_J^M -Momente

Ausgehend von der Formel für den differentiellen Wirkungsquerschnitt aus [101] (μ und ν sind hier Kanalindizes und somit nicht zu summieren)

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{(4\pi)^2}{k_{\text{in}}^2} |\tau_{\mu\nu}|^2 \quad (\text{A.13})$$

erhält man bei Partialwellenzerlegung von τ [40]:

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{1}{k_{\text{in}}^2} \sum_{J,J'} (2J+1)(2J'+1) D_{00}^J(\Omega) \tau_{\mu\nu}^J \bar{D}_{00}^{J'}(\Omega) (\tau_{\mu\nu}^{J'})^* \quad . \quad (\text{A.14})$$

Mithilfe der folgenden Relationen für die Rotationsmatrizen $D_{\lambda\lambda'}^J$ [40] lässt sich diese Formel ausintegrieren und man erhält A.15 als Ausdruck für den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\begin{aligned} D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{ab}, 0) &= (D_{\lambda'\lambda}^J(\Omega_{ba}, 0))^* = \bar{D}_{\lambda'\lambda}^J(\Omega_{ba}, 0) \\ \int d\Omega (D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega, 0))^* D_{\gamma\gamma'}^J(\Omega, 0) &= \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{IJ} \delta_{\lambda\gamma} \delta_{\lambda'\gamma'} \\ \sigma_{\mu\nu} &= \frac{4\pi}{k_{\text{in}}^2} \sum_J (2J+1) |\tau_{\mu\nu}^J|^2 \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Um die $\langle Y_J^M \rangle$ -Momente zu erhalten, vergleicht man die in der Experimentalphysik übliche Zerlegung des Wirkungsquerschnitts nach Kugelflächenfunktionen Y^{JM} (A.16) mit der Zerlegung in Formel (A.14). Hierbei beachten wir die Invarianz des Systems unter Rotationen in ϕ .

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega}(\theta, E) = \sum_J \langle Y_J^{M=0} \rangle_{\mu\nu}(E) Y^{J0}(\theta) \sigma_{\mu\nu}(E) \quad (\text{A.16})$$

Benutzt man nun die Formel für das Produkt zweier Rotationsmatrizen unter Verwendung der Clebsch-Gordon-Koeffizienten sowie die explizite Darstellung von Rotationsmatrizen aus [63]:

$$D_{M_1' M_1}^{J_1}(\Omega) D_{M_2' M_2}^{J_2}(\Omega) = \sum_{JM'M} \langle J_1 M_1' J_2 M_2' | JM' \rangle \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM \rangle D_{MM'}^J(\Omega) \quad , \quad (\text{A.17})$$

$$D_{M0}^J(\Omega) = (-1)^M \sqrt{\frac{4\pi}{2J+1}} Y^{JM}(\Omega) \quad (\text{A.18})$$

so erhält man:

$$\frac{d\sigma_{\mu\nu}}{d\Omega} = \frac{1}{k_{\text{in}}^2} \sum_{JJ_1J_2} (2J_1+1)(2J_2+1) \langle J_1 0 J_2 0 | J 0 \rangle^2 \tau_{\mu\nu}^{J_1} (\tau_{\mu\nu}^{J_2})^* D_{00}^J(\Omega) \quad . \quad (\text{A.19})$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\langle Y_J^0 \rangle_{\mu\nu} = \frac{1}{k_{\text{in}} k_{\text{out}}} \frac{\sqrt{4\pi}}{\sigma_{\mu\nu}} \sum_{J_1 J_2} \frac{(2J_1+1)(2J_2+1)}{\sqrt{2J+1}} \langle J_1 0 J_2 0 | J 0 \rangle^2 \tau_{\mu\nu}^{J_1} (\tau_{\mu\nu}^{J_2})^* \quad . \quad (\text{A.20})$$

In unseren Berechnungen setzen wir alle τ^J mit $J \geq 4$ gleich Null in der Annahme, dass höhere Partialwellen keine Rolle spielen, was für kleine Energien sicher gegeben ist. Eine explizite Darstellung der unter dieser Annahme resultierenden Formeln findet sich in [150].

Anhang B

Der $SU(4)$ Anteil der Wechselwirkung

B.1 Festlegung des Flavour Lagrangians

Nachdem wir die Form der Lagrange-Funktion im Ortsraum durch die Gleichung B.1 festgelegt haben, wollen wir $SU(4)_{\text{flavour}}$ -Symmetrie annehmen, um den Flavour-Anteil der Lagrange-Funktion zu bestimmen, den wir hier in der herkömmlichen Tensornotation mit \square_0^1 andeuten:

$$\mathcal{L}_{PPV} = g_V [\phi_P \partial_\mu \phi_P \phi_V^\mu]_0^1 \quad (\text{B.1})$$

Hierbei benutzen wir die $SU(4)$ Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die man unter anderem in [152] nachlesen kann, um die Mitglieder von drei $SU(4)$ -Darstellungen, wie zum Beispiel $\{15\} \otimes \{15\} \otimes \{15\}$, $\{15\} \otimes \{15\} \otimes \{1\}$, \dots , zu einem $SU(4)$ -Flavour Singulett zu koppeln. Um die Mitglieder einer Darstellung der $SU(4)$ -Gruppe mit den beobachtbaren physikalischen Zuständen in Verbindung zu bringen, müssen wir zunächst eine Phasekonvention festlegen. Im Prinzip ist es hierbei möglich, ein beliebiges Tripel aus den sechs Leiteroperatoren I_\pm , U_\pm , K_\pm , V_\pm , L_\pm and M_\pm (Abb.B.1) auszuwählen, von dessen Elementen man dann verlangt, dass sie positiv sind. Mit dieser Wahl hat man dann die Phase zwischen den verschiedenen $SU(2)$ -Darstellungen, die in der $SU(4)$ -Darstellung enthalten sind, festgelegt. In der Physik haben sich hierbei zwei Konventionen etabliert. V. Rabl [152] definiert zum Beispiel genau wie wir I_\pm, U_\pm und K_\pm als positiv, wohingegen J.J. de Swart I_\pm und V_\pm als positiv definiert, um die relativen Phasen zwischen den in der $SU(3)$ -Repräsentation enthaltenen Repräsentationen von $SU(2)$ zu definieren. Letzteres entspricht der in [122] verwendeten Konvention. Nachdem wir unsere Phasenkonvention gewählt haben, können wir die Mesonen mit der 15-plett und der Singulett-Darstellung der $SU(4)$ identifizieren. Hierbei gehen

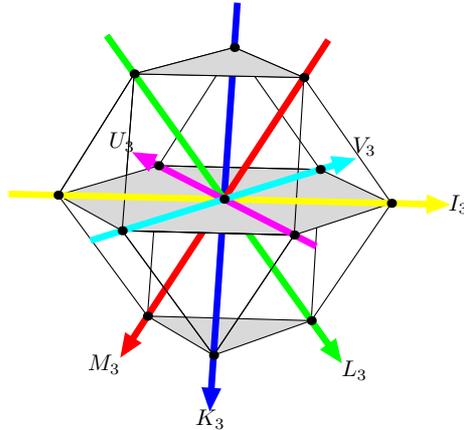


Abbildung B.1: Die Lage der Leiteroperatoren innerhalb der $SU(4)$ ist anhand des 15-pletts exemplarisch dargestellt. Die schattierten Gebiete zeigen verschiedene $SU(3)$ -Untergruppen der $SU(4)$ -Darstellung, die sich in ihrem Charm-Inhalt unterscheiden.

wir von den kleinsten nicht trivialen Darstellungen der $SU(4)$ –dem Quartett und dem Antiquartett– aus, welche wir mit den Quarks bzw. Antiquarks identifizieren. In Abbildung B.2 haben wir grafisch dargestellt, wie sich up, down, strange and charm (Anti-)Quarks in das (Anti-)Quartett einordnen. Koppeln wir nun diese beiden Darstellungen, so erhalten wir zwei Darstellungen $4 \otimes \bar{4} = 15 \oplus 1$, die geeignet sind die Mesonen ihrem Quark-Antiquark Inhalt nach aufzunehmen. In Abbildung B.3 zeigen wir diese Identifikation der unterschiedlichen Mitglieder des 15-pletts sowohl für die Pseudoskalaren-Mesonen als auch für die Vektor-Mesonen, wobei wir in dieser diagrammatischen Darstellung die Phasen vernachlässigt haben. (Die Phasen können aus Tabelle B.1 abgelesen werden.) Der Bequemlichkeit halber haben wir den Singulettzustand im Zentrum des Diagramms zusammen mit den Mitgliedern des 15-pletts, die seine Quantenzahlen teilen, dargestellt. Ohnehin entsprechen die physikalischen Zustände im Zentrum nicht den Mitgliedern der $SU(4)$ -Darstellung.

$$\begin{aligned}
 \eta_1, \omega_1 &= \frac{1}{\sqrt{4}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} + c\bar{c}) \\
 \eta_8, \omega_8 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \\
 \eta_{15}, \omega_{15} &= \frac{1}{\sqrt{12}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s} - 3c\bar{c})
 \end{aligned} \tag{B.2}$$

Stattdessen müssen wir die Mischung unter den Zuständen mit Isospin $I = 0$ beachten. Im Fall der Pseudoskalaren-Mesonen bedeutet dies, dass sich die zwei Mitglieder des 15-pletts mit verschwindendem Isospin, Hyperladung und Charm, also das η_8 und das η_{15} , sowie der Singulettzustand η_1 mischen, um die physikalischen Mesonen zu bilden. Im

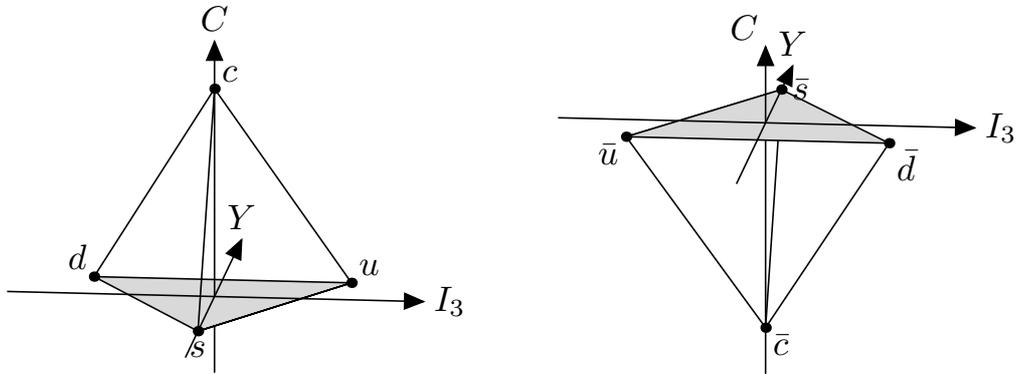


Abbildung B.2: Die vier leichtesten Quarks bzw. Antiquarks sind als Mitglieder der zwei fundamentalen $SU(4)$ -Darstellungen 4 und $\bar{4}$ dargestellt.

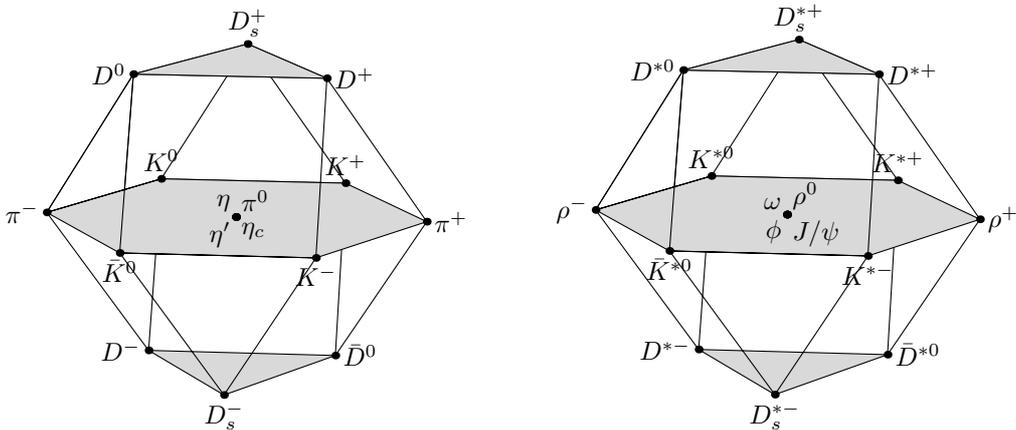


Abbildung B.3: Einordnung der Pseudoskalaren-Mesonen und der Vektor-Mesonen in zwei $SU(4)$ 16-plets. (Die Phasen wurden hier nicht dargestellt.)

$SU(4)$ -Zustand	Pseudoskalare-Mesonen	Vektor-Mesonen
$\{15, 8\} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$	$-K^+$	$-K^{*+}$
$\{15, 8\} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$	$-K^0$	$-K^{*0}$
$\{15, 8\} (1, 1, 0)$	$-\pi^+$	$-\rho^+$
$\{15, 8\} (1, 0, 0)$	$-\pi^0$	$-\rho^0$
$\{15, 8\} (1, -1, 0)$	π^-	ρ^-
$\{15, 8\} (0, 0, 0)$	η_8	ω_8
$\{15, 8\} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$	$-\bar{K}^0$	$-\bar{K}^{*0}$
$\{15, 8\} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$	K^-	K^{*-}
$\{15, 3\} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	\bar{D}^0	\bar{D}^{*0}
$\{15, 3\} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$	D^-	D^{*-}
$\{15, 3\} (0, 0, -1)$	D_s^-	D_s^{*-}
$\{15, 3^*\} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$	D^+	D^{*+}
$\{15, 3^*\} (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$	$-D^0$	$-D^{*0}$
$\{15, 3^*\} (0, 0, 1)$	$-D_s^+$	$-D_s^{*+}$
$\{15, 1\} (0, 0, 0)$	$-\eta_{15}$	$-\omega_{15}$
$\{1, 1\} (0, 0, 0)$	η_1	ω_1

Tabelle B.1: Phasendefinition für das Multipllett der Pseudoskalaren-Mesonen und für das Multipllett der Vektor-Mesonen

Fall der Vektor-Mesonen gehen wir der Einfachheit halber von einer idealen Mischung aus. Somit haben die drei physikalischen Mesonen den folgenden Quark-Antiquark Inhalt.

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\omega_8 + \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{15} + \sqrt{\frac{3}{2}}\omega_1 \right) \\
\phi &= (s\bar{s}) = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left(\omega_8 - \frac{1}{\sqrt{8}}\omega_{15} - \sqrt{\frac{3}{8}}\omega_1 \right) \\
J/\psi &= (c\bar{c}) = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(\omega_1 - \sqrt{3}\omega_{15} \right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Genau diesen Zusammenhang haben wir in Gleichung B.4 in Form von Mischungswinkeln rephrasiert. Zum Beschreiben einer allgemeinen Mischung wären natürlich drei Winkel nötig, da es aber in unserem Spezialfall möglich ist, beschränken wir uns auf die Verwendung von zwei Winkeln. Desweiteren entnimmt man aus Gleichung B.4 für den Fall der Vektor-Mesonen die Mischungswinkel $\theta_8 = 54.7^\circ$ sowie $\theta_{15} = 60.0^\circ$. Im Vergleich zu experimentellen Beobachtungen wie zum Beispiel $\theta_8 = 37^\circ$ [149] ist die Übereinstimmung hinreichend.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \omega \\ \phi \\ J/\psi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 \cos \theta_{15} & \sin \theta_8 \sin \theta_{15} \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 \cos \theta_{15} & \cos \theta_8 \sin \theta_{15} \\ 0 & -\sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_{15} \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 & 0 \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{15} & \sin \theta_{15} \\ 0 & -\sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_{15} \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 & 0 \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{4}} & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_{15} \\ \omega_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 & 0 \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_1^{SU(3)} \\ J/\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_8 \\ \omega_1^{SU(3)} \\ J/\psi \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Bestimmt man im Fall der Pseudoskalaren-Mesonen den Mischungswinkel, indem man die Massenmatrix diagonalisiert [149], so muss man zumindest bei der Mischung zu η und η' von der Annahme der idealen Mischung abweichen. Der Grund hierfür liegt

in der $U_A(1)$ -Anomalie, die es dem $SU(3)$ -Singulett der Pseudoskalaren-Mesonen η' verwehrt ebenfalls ein Goldstone Boson zu sein [59]. Wir gehen in unserer Rechnung desweiteren von einem ideal gemischten $\eta_c = c\bar{c}$ ($\theta_{15} = 60.0^\circ$) aus, verwenden nur für die Mischung innerhalb der $SU(3)$ -Untergruppe den Mischungswinkel aus [61] i.e. $\theta_8 = 10.0^\circ$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \\ \eta_c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 & 0 \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{15} & \sin \theta_{15} \\ 0 & -\sin \theta_{15} & \cos \theta_{15} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_{15} \\ \eta_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta_8 & \sin \theta_8 & 0 \\ -\sin \theta_8 & \cos \theta_8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1^{SU(3)} \\ \eta_c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.98 & 0.17 & 0 \\ -0.17 & 0.98 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1^{SU(3)} \\ \eta_c \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Aus Gleichung B.5 erkennt man nun, dass η hauptsächlich aus η_8 besteht. Da die Kopplung des η_1 über die Flavourkopplung $[\{15\} \otimes \{15\} \otimes \{1\}]_0^1$ erfolgt und da das experimentelle Wissen über das η' recht begrenzt ist, führt diese Beimischung von $\eta_1^{SU(3)}$ zu einer weiteren freien Kopplungskonstante im Modell. Der kleine Mischungswinkel erlaubt uns, die Näherung von η durch η_8 zu machen und auf diese Weise den Einfluss des η_1 zu ignorieren.

Mit den jetzt festgelegten Konventionen kann man die $SU(4)_{\text{flavour}}$ Lagrange-Funktion bestimmen. Hierzu koppeln wir zunächst die $SU(4)$ -Darstellungen zu einem Singulett und benutzen dann die $SU(4)$ und $SU(3)$ Clebsch-Gordan-Koeffizienten, um eine Darstellung zu erhalten, die zwar noch immer $SU(4)_{\text{flavour}}$ -symmetrisch ist aber formal nur noch die Isospinsymmetrie zeigt. In Gleichung B.7 ist dies für den Fall der Kopplung von zwei D-Mesonen an das ρ explizit durchgeführt. Hierbei haben wir die folgenden Abkürzungen verwendet: $\nu_1 = (0, \frac{1}{2}, I_{z_1})$, $\nu_2 = (0, 1, I_{z_2})$ und $\nu_0 = (0, 0, 0)$. Die Notation $(: : :)_{SU(n)}$ steht für den $SU(n)$ Clebsch-Gordan-Koeffizienten und $(: : | :)_{SU(n)}$ für den $SU(n-1)$ -Singulett Faktor wie [152] in Anlehnung an die isoskalaren Faktoren formuliert, was dem $SU(n) : SU(n-1)$ reduzierten Wigner-Koeffizienten in der Sprache von [124] entspricht. Damit gilt die in Gleichung (B.7) ausgenutzte Identität (B.6) per Definition.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ a\alpha & b\beta & c\gamma \end{pmatrix}_{SU(n)} = \begin{pmatrix} A & B & | & C \\ a & b & | & c \end{pmatrix}_{SU(n)} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}_{SU(n-1)} \quad (\text{B.6})$$

Die Zustände innerhalb der einzelnen $SU(n)$ -Darstellungen (A,B,C) haben wir jeweils durch ihre Zugehörigkeit zu einer bestimmten $SU(n-1)$ -Untergruppe (a,b,c) und

ihre Quantenzahlen (α, β, γ) innerhalb dieser Untergruppe charakterisiert. Im Fall der $SU(3)$ haben wir die einzelnen Isospin-Untergruppen mit Hilfe des Tupels I, Y identifiziert.

$$\begin{aligned}
g_{D\rho D} D\vec{\tau}\vec{\rho}D &= \sum_{I_{z_1} I_{z_2} I_z} \left\{ g_D \begin{pmatrix} 15 & 15 & 15_D \\ 3^* \nu_1 & 8\nu_2 & 3^* \nu \end{pmatrix}_{SU(4)} \begin{pmatrix} 15 & 15 & 1 \\ 3^* \nu & 3-\nu & 1\nu_0 \end{pmatrix}_{SU(4)} \right. \\
&\quad \left. + g_F \begin{pmatrix} 15 & 15 & 15_F \\ 3^* \nu_1 & 8\nu_2 & 3^* \nu \end{pmatrix}_{SU(4)} \begin{pmatrix} 15 & 15 & 1 \\ 3^* \nu & 3-\nu & 1\nu_0 \end{pmatrix}_{SU(4)} \right\} M_{3^* \nu_1} M_{8\nu_2} M_{3-\nu} \\
&= \sum_{I_{z_1} I_{z_2} I_z} g_F \begin{pmatrix} 15 & 15 & 15_F \\ 3^* & 8 & 3^* \end{pmatrix}_{SU(4)} \begin{pmatrix} 3^* & 8 & 3^* \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix}_{SU(3)} \\
&\quad \begin{pmatrix} 15 & 15 & 1 \\ 3^* & 3 & 1 \end{pmatrix}_{SU(4)} \begin{pmatrix} 3^* & 3 & 1 \\ \nu & -\nu & \nu_0 \end{pmatrix}_{SU(3)} M_{3^* \nu_1} M_{8\nu_2} M_{3-\nu} \\
&= \sum_{I_{z_1} I_{z_2} I_z} g_F \frac{1}{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \begin{pmatrix} 3^* & 8 & 3^* \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu \end{pmatrix}_{SU(3)} \begin{pmatrix} 3^* & 3 & 1 \\ \nu & -\nu & \nu_0 \end{pmatrix}_{SU(3)} M_{3^* \nu_1} M_{8\nu_2} M_{3-\nu} \\
&= \sum_{I_{z_1} I_{z_2} I_z} -g_F \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3^* & 8 & 3^* \\ \frac{1}{2}0 & 10 & \frac{1}{2}0 \end{pmatrix}_{SU(3)} \left\langle \frac{1}{2}I_{z_1} 1I_{z_2} \middle| \frac{1}{2}I_z \right\rangle \\
&\quad \begin{pmatrix} 3^* & 3 & 1 \\ \frac{1}{2}0 & \frac{1}{2}0 & 00 \end{pmatrix}_{SU(3)} \left\langle \frac{1}{2}I_z \frac{1}{2} - I_z \middle| 00 \right\rangle D_{I_{z_1} \rho I_{z_2}} D_{-I_z} \\
&= \sum_{I_{z_1} I_{z_2} I_z} -g_F \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{3}{4} \left\langle \frac{1}{2}I_{z_1} 1I_{z_2} \middle| \frac{1}{2}I_z \right\rangle \sqrt{\frac{2}{3}} \left\langle \frac{1}{2}I_z \frac{1}{2} - I_z \middle| 00 \right\rangle D_{I_{z_1} \rho I_{z_2}} D_{-I_z} \\
&= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{60}} g_F D\vec{\tau}\vec{\rho}D = \frac{1}{2} g_{\pi\pi\rho} D\vec{\tau}\vec{\rho}D
\end{aligned} \tag{B.7}$$

mit $\nu = (Y, I, I_z)$ und $-\nu = (-Y, I, -I_z)$

Damit verbleibt es, die letzten beiden Identitäten aus Gleichung (B.7) und das Verschwinden der D -Kopplung zu erläutern. Die Annahme $g_D = 0$ ist in [122] durch die Betrachtung der G -Parität für die $SU(3)$ -Lagrange-Funktion begründet. Sie ist auch aus unserer Lagrange-Funktion (B.22) abzulesen, wenn man bedenkt, dass π und ω negative G -Parität haben und mithin $g_{\pi\pi\omega_8} = 0$ gelten muss. Der Summand (B.22.54) verrät nun $g_{\pi\pi\omega_8} = \frac{1}{3\sqrt{5}} g_D = 0$. Obwohl es Hinweise für $g_D \neq 0$ gibt, haben wir diese Einschränkung nicht aufgeweicht. Ein Vergleich von (B.22.63) mit der Isospinstruktur von $\mathcal{L}_{\pi\pi\rho} = g_{\pi\pi\rho} (\vec{\pi} \times \partial_\mu \vec{\pi}) \cdot \vec{\rho}^\mu$ erklärt nun die Identifikation $\frac{1}{\sqrt{60}} g_F = g_{\rho\pi\pi}$. Der Zusammenhang zwischen den $SU(2)$ Clebsch-Gordan-Koeffizienten und der üblichen Darstellung der Lagrange-Funktion im Isospinraum (vorletzte Identität aus

(B.7)) ist in Abschnitt B.2 angeführt und wird hier nicht erläutert.

B.2 Der Isospinanteil des Potentials

Die Struktur der Wechselwirkung im Isospinraum lässt sich auf verschiedene Arten darstellen. In diesem Kapitel wollen wir dem Leser Formeln an die Hand geben, um die Darstellung mittels Isospinvektoren und die Darstellung via Clebsch-Gordan-Koeffizienten miteinander in Beziehung zu setzen. Ferner geben wir für Potentiale, in denen der Impulsraumanteil vom Isospinanteil separiert, die Isospinfaktoren an. Die hierzu verwendeten Vorschriften wurden ausführlich in [114, 159] beschrieben.

Zur Berechnung der Isospinfaktoren (F_{iso}^I) definieren wir die folgenden Isospineigenfunktionen:

$$\begin{aligned} \chi_l, \chi_l^\dagger & : \quad \text{ein- bzw. auslaufendes Teilchen mit Isospin } \frac{1}{2}, l = \pm \frac{1}{2} \\ \bar{\chi}_l^\dagger, \bar{\chi}_l & : \quad \text{ein- bzw. auslaufendes Antiteilchen mit Isospin } \frac{1}{2}, l = \pm \frac{1}{2} \\ \phi_l, \phi_l^* & : \quad \text{ein- bzw. auslaufendes Teilchen mit Isospin } 1, l = 0, \pm 1 \end{aligned}$$

Zu diesen Definitionen sei präzisiert, dass die Bezeichnung Teilchen bzw. Antiteilchen sich abweichend vom allgemeinen Sprachgebrauch nur auf die Zugehörigkeit zu einer bestimmten $SU(2)$ -Darstellung bezieht. Damit sind in diesem Zusammenhang D^0 und D^+ , die genau wie \bar{K}^0 und K^- eine $\bar{2}$ Darstellung der $SU(2)$ bilden, als Antiteilchen aufzufassen, während D^- und \bar{D}^0 in unserem Sinn zu den Teilchen zählen. Wie diese Konvention mit der expliziten Darstellung der Flavour-Lagrange-Funktion einhergeht, kann man zum Beispiel im Vergleich der Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus den Kopplungen (B.22.45), (B.22.50), (B.22.61) und (B.22.64) ablesen. Mithilfe der am Ende des Abschnitts angeführten Rechenregeln (B.9-B.14) und unter Beachtung etwaiger Vorzeichen aus dem Impulsanteil kann man nun die Isospinfaktoren (B.8) berechnen und zwischen den einzelnen Darstellungen umrechnen. In den Tabellen B.2 und B.3 sind die entsprechenden Werte für die in dieser Arbeit verwendeten Streupotentiale aufgeführt.

$$\begin{aligned} F_{iso}^I & = \pm \langle II_z | V_{iso} | II_z \rangle \\ & = \pm \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} \langle II_z | I_1 m_1 I_2 m_2 \rangle \langle I_1 m_1 I_2 m_2 | V_{iso} | I_3 m_3 I_4 m_4 \rangle \langle I_3 m_3 I_4 m_4 | II_z \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Bei der Berechnung von (B.8) ist es geschickt, die Invarianz unter Rotation im Isospinraum zu nutzen und in der gestreckten Isospinbasis zu arbeiten. In dieser Basis

nehmen die meisten Clebsch-Gordan-Koeffizienten den Wert Null an.

$$\bar{\chi}_l = (-1)^{l+\frac{1}{2}} \chi_{-l} \quad (\text{B.9})$$

$$\chi_l^\dagger \chi_m = \delta_{l,m} \quad (\text{B.10})$$

$$\chi_l^\dagger \tau \phi_m \chi_n = \sqrt{3} \left\langle \frac{1}{2} n 1 m \left| \frac{1}{2} l \right. \right\rangle \quad (\text{B.11})$$

$$\phi_l^* = (-1)^l \phi_{-l} \quad (\text{B.12})$$

$$\phi_l \phi_m = (-1)^l \delta_{l,-m} \quad (\text{B.13})$$

$$\phi_l \times \phi_m = \sum_{n=0,\pm 1} i\sqrt{2} \langle 1 l 1 m | 1 n \rangle \phi_n \quad (\text{B.14})$$

Prozess	Matrizelement	F_{iso}^I			
		I=0	I=1	I=2	
$\rho-t$	$-\sum_m [\phi_{m_1} \times \phi_{m_3}^*] \phi_m [\phi_{m_2} \times \phi_{m_4}^*] \phi_m^*$	-2	-1	1	
f_0-t	$\phi_{m_1} \phi_{m_3}^* \phi_{m_2} \phi_{m_4}^*$	1	1	1	
f_2-t	$\phi_{m_1} \phi_{m_3}^* \phi_{m_2} \phi_{m_4}^*$	1	1	1	
$\pi\pi$					
\uparrow	$\rho^{(0)-s}$	$\sum_m [\phi_{m_3}^* \times \phi_{m_4}^*] \phi_m [\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}] \phi_m^*$	0	2	0
$\pi\pi$	$f_0^{(0)-s}$	$\phi_{m_3}^* \phi_{m_4}^* \phi_{m_1} \phi_{m_2}$	3	0	0
	$f_2^{(0)-s}$	$\phi_{m_3}^* \phi_{m_4}^* \phi_{m_1} \phi_{m_2}$	3	0	0
K^*-t	$-i \sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_{m_1} \chi_m \chi_m^\dagger \tau \phi_{m_2} \bar{\chi}_{m_4}$	$\sqrt{6}$	2	-	
$\bar{K}\bar{K}$	$\rho^{(0)-s}$	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_m \bar{\chi}_{m_4} [\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}] \phi_m^*$	0	2	-
\uparrow	$f_0^{(0)-s}$	$\chi_{m_3}^\dagger \bar{\chi}_{m_4} \phi_{m_1} \phi_{m_2}$	$-\sqrt{6}$	0	-
$\pi\pi$	$f_2^{(0)-s}$	$\chi_{m_3}^\dagger \bar{\chi}_{m_4} \phi_{m_1} \phi_{m_2}$	$-\sqrt{6}$	0	-
$\rho-t$	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_m \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \tau \phi_m^* \bar{\chi}_{m_4}$	-3	1	-	
$\omega-t$	$-\chi_{m_3}^\dagger \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	-1	-1	-	
$\phi-t$	$-\chi_{m_3}^\dagger \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	-1	-1	-	
$\bar{K}\bar{K}$					
\uparrow	f_0-t	$-\chi_{m_3}^\dagger \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	-1	-1	-
$\bar{K}\bar{K}$	f_2-t	$-\chi_{m_3}^\dagger \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	-1	-1	-
Tabelle B.2 wird auf der nächsten Seite fortgesetzt ...					

Fortsetzung von Tabelle B.2 ...						
$K\bar{K}$	$\rho^{(0)-s}$	$\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_m \bar{\chi}_{m_4}$	$\bar{\chi}_{m_2}^\dagger \tau \phi_m^* \chi_{m_1}$	0	2	-
\rightarrow	$f_0^{(0)-s}$	$\chi_{m_3}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	$\bar{\chi}_{m_2}^\dagger \chi_{m_1}$	2	0	-
$K\bar{K}$	$f_2^{(0)-s}$	$\chi_{m_3}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	$\bar{\chi}_{m_2}^\dagger \chi_{m_1}$	2	0	-
$\pi\eta$	K^*-t	$\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_{m_1} \chi_m$	$\chi_m^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	-	$\sqrt{2}$	-
$\rho\rho$	$\rho-s$	$-i \sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$\chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_m \bar{\chi}_{m_4}$	-	2	-
	$\pi-t$	$\sum_m (\phi_{m_3}^* \times \phi_m^*) \phi_{m_1}$	$(\phi_{m_4}^* \times \phi_m) \phi_{m_2}$	2	1	-1
	a_1-t	$\sum_m (\phi_{m_3}^* \times \phi_{m_1}) \phi_m^*$	$(\phi_{m_4}^* \times \phi_{m_2}) \phi_m$	2	1	-1
\rightarrow	$\omega-t$	$\phi_{m_1} \phi_{m_3}^*$	$\phi_{m_2} \phi_{m_4}^*$	1	1	1
$\rho\rho$	$\rho-s$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$(\phi_{m_3}^* \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	-	2	-
\rightarrow	$\rho-t$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_3}^*) \phi_m^*$	$(\phi_{m_2} \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	2	1	-1
$\rho\rho$	$\rho-s$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$(\phi_{m_3}^* \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	-	2	-
\rightarrow	$\pi-t$	$\sum_m (\phi_m^* \times \phi_{m_1}) \phi_{m_3}^*$	$(\phi_m \times \phi_{m_4}^*) \phi_{m_2}$	-2	-1	1
$\rho\rho$	$\rho-s$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$(\phi_{m_4}^* \times \phi_m) \phi_{m_3}^*$	-	2	-
\rightarrow	K^*-t	$\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_{m_1} \chi_m$	$\chi_m^\dagger \tau \phi_{m_2} \bar{\chi}_{m_4}$	6	-2	-
$a_1\pi$	$\rho-s$	$-i \sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$\chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_m \bar{\chi}_{m_4}$	-	2	-
\rightarrow	$\rho-u$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_3}^*) \phi_m^*$	$(\phi_{m_2} \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	2	-1	-1
$a_1\pi$	$\rho-s$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$(\phi_{m_3}^* \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	-	2	-
\rightarrow	$\rho-t$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_3}^*) \phi_m^*$	$(\phi_{m_2} \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	2	1	-1
$\pi\pi$	$\rho-s$	$\sum_m (\phi_{m_1} \times \phi_{m_2}) \phi_m^*$	$(\phi_{m_3}^* \times \phi_{m_4}^*) \phi_m$	-	2	-

Tabelle B.2: Isospinmatrixelemente und -faktoren für die $\pi\pi$ -Streuung. Hierbei steht $\pi\eta$ abkürzend für $\pi\eta \rightarrow K\bar{K}$, sowie $\rho\rho$ abkürzend für $\rho\rho \rightarrow K\bar{K}$. Zum Teil wurden Faktoren i aus dem Impulsanteil in die Isospinfaktoren übernommen.

Prozess	Matrizelement	F_{iso}^I			
		I=0	I=1	$\Delta I=1$	
ηD_s^+	D_{sJ^-s}	1	–	–	
πD_s^+	D_{sJ^-s}	–	–	$1\alpha_{\pi\eta}^2$	
$KD \rightarrow \eta D_s^+$	D_{sJ^-s}	$\chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger$	$\sqrt{2}$	–	–
	K^*-t	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_{m_1} \chi_m \chi_m^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	–	–	$-\sqrt{2}\alpha_{\pi\eta}$
	K^*-t	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \chi_m \chi_m^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	$-\sqrt{2}$	–	–
	D^*-u	$-\sum_m \bar{\chi}_{m_4} \tau \phi_{m_1} \bar{\chi}_m^\dagger \bar{\chi}_m \chi_{m_3}^\dagger$	–	–	$-\sqrt{2}\alpha_{\pi\eta}$
	D^*-u	$-\sum_m \bar{\chi}_{m_4} \bar{\chi}_m^\dagger \bar{\chi}_m \chi_{m_3}^\dagger$	$-\sqrt{2}$	–	–
$KD \rightarrow \pi D_s^+$	D_{sJ^-s}	$\chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger$	–	–	$\sqrt{2}\alpha_{\pi\eta}$
	K^*-t	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \chi_m \chi_m^\dagger \bar{\chi}_{m_4} \delta_{m_1 0}$	–	–	$-\sqrt{2}\alpha_{\pi\eta}$
	K^*-t	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_{m_1} \chi_m \chi_m^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	–	$-\sqrt{2}$	–
	D^*-u	$-\sum_m \bar{\chi}_{m_4} \bar{\chi}_m^\dagger \bar{\chi}_m \chi_{m_3}^\dagger \delta_{m_1 0}$	–	–	$-\sqrt{2}\alpha_{\pi\eta}$
	D^*-u	$-\sum_m \bar{\chi}_{m_4} \tau \phi_{m_1} \bar{\chi}_m^\dagger \bar{\chi}_m \chi_{m_3}^\dagger$	–	$-\sqrt{2}$	–
$KD \rightarrow KD$	$\rho-t$	$-\sum_m \chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_m \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \tau \phi_m^* \bar{\chi}_{m_4}$	–3	1	–
	$\omega-t$	$-\chi_{m_3}^\dagger \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \bar{\chi}_{m_4}$	–1	–1	–
	D_{sJ^-s}	$\chi_{m_3}^\dagger \bar{\chi}_{m_4} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \chi_{m_1}$	2	–	–
	$\rho^0/\omega-t$	$-\chi_{m_3}^\dagger \tau \phi_0 \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \bar{\chi}_{m_4} - \chi_{m_3}^\dagger \chi_{m_1} \bar{\chi}_{m_2}^\dagger \tau \phi_0^* \bar{\chi}_{m_4}$	–	–	$-2\alpha_{\rho\omega}$

Tabelle B.3: Isospinmatrizelemente und -faktoren für die $D_s^+ \pi$ -Streuung. Hierbei steht in der ersten Spalte ηD_s^+ bzw. πD_s^+ stellvertretend für $\eta D_s^+ \rightarrow \eta D_s^+$ bzw. $\pi D_s^+ \rightarrow \pi D_s^+$. Die Annotationen $\alpha_{\rho\omega}$ und $\alpha_{\pi\eta}$ stehen als Erinnerung an die Unterdrückung dieser Prozesse durch die Isospinbrechung. Diese Unterdrückung entsteht im Impulsanteil des Potentials und soll an dieser Stelle nur verdeutlichen, welcher Prozess beschrieben wird.

B.3 Umkopplung zwischen Isospin- und Teilchenbasis

Die Isospinsymmetrie ist durch die Massendifferenz zwischen neutralen und geladenen Mesonen sowie durch den Elektromagnetismus gebrochen. Um die Massendifferenz zu berücksichtigen, wollen wir die Potentiale in der Teilchenbasis berechnen. Die Regeln hierzu werden hier erläutert. Eine explizite Darstellung der Umformungsmatrizen, die aus diesen Regeln resultieren, kann man zum Beispiel in [114] nachlesen. Um das Potential in der Teilchenbasis zu berechnen, fügt man zunächst in Gleichung (B.15) einen vollständigen Satz von Zuständen ein.

$$\langle ab|V|cd\rangle = \sum_{I_1, I_2} \sum_{I_{1z}=-I_1}^{I_1} \sum_{I_{2z}=-I_2}^{I_2} \langle ab|I_1 I_{1z}\rangle \langle I_1 I_{1z}|V|I_2 I_{2z}\rangle \langle I_2 I_{2z}|cd\rangle \quad (\text{B.15})$$

Hierbei stehen a, b, c, d für die $SU(2)$ -Quantenzahlen der jeweiligen Mesonen. Betrachtet man die physikalischen Eigenschaften des Potentials, so ist klar, dass man in bestimmten Fällen nur einen wesentlich kleineren Teil der Basis zu transformieren braucht. Zum einen erhält das Potential die Ladung, zum anderen ist es invariant unter Rotation im Isospinraum. Somit hat V selbst im Isospin brechenden Fall genau wie die in Gleichung (B.16) definierte Transformationsmatrix U eine blockdiagonale Struktur.

$$V_{\text{teilchen}} = U^t V_{\text{iso}} U \quad V_{\text{iso}} = U V_{\text{teilchen}} U^t \quad (\text{B.16})$$

Im Fall des $\pi\pi$ -Kanals mit Isospinprojektion $I_z = 0$ genügt es also, zum Beispiel die folgenden Blöcke der Potentialmatrizen zu betrachten:

$$V_{\text{teilchen}} = \begin{pmatrix} V_{+-}^{+-} & V_{00}^{+-} & V_{-+}^{+-} \\ V_{+-}^{00} & V_{00}^{00} & V_{-+}^{00} \\ V_{+-}^{-+} & V_{00}^{-+} & V_{-+}^{-+} \end{pmatrix} \quad V_{\text{iso}} = \begin{pmatrix} V^{0\rightarrow 0} & V^{0\rightarrow 1} & V^{0\rightarrow 2} \\ V^{1\rightarrow 0} & V^{1\rightarrow 1} & V^{1\rightarrow 2} \\ V^{2\rightarrow 0} & V^{2\rightarrow 1} & V^{2\rightarrow 2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.17})$$

In unserem Ansatz ist das Potential zunächst Isospin erhaltend formuliert. Das heißt, V_{iso} ist diagonal. Erst nach der Umkopplung in die Teilchenbasis brechen wir die Isospinsymmetrie durch die Verwendung der physikalischen Massen für geladene und neutrale Teilchen. Bei der Rückkopplung in die Isospinbasis führen die Massenunterschiede dann zu einem Isospin brechenden Anteil i.e. nicht verschwindende Nebendiagonalelemente in (B.17), da sich die etwaigen Potentiale nicht mehr exakt wegheben. Es sei noch auf zwei Stolpersteine hingewiesen, die bei der Berechnung der unitären Transformationsmatrix U auftreten. Zum einen verwandelt die Transformation unter

Umständen identische Teilchen in unterscheidbare Teilchen und umgekehrt, zum anderen ist es möglich, die Symmetriezusammenhänge zwischen unterschiedlichen Zweiteilchenzuständen zu nutzen, was dann jedoch zu einer Drehimpulsabhängigkeit der Transformationsgleichungen führt. Ein Beispiel für die erste Anmerkung ist der Zustand identischer Pionen $|\pi\pi\rangle$ in der Isospinbasis, wenn er zu einem Zustand unterscheidbarer Pionen $|\pi^+\pi^-\rangle$ in der Teilchenbasis transformiert wird. Hier muss dann das Potential mit einem Faktor $\sqrt{2}$ multipliziert werden, um die Normierung der identischen Pionen im Isospinraum zu kompensieren. Für die inverse Transformation ist dieser Sachverhalt durch einen Faktor $1/\sqrt{2}$ zu berücksichtigen. Zur Erläuterung des zweiten Hinweises sei auf die Symmetrierelation für die Vertauschung von zwei Mesonen im Eingangszustand hingewiesen, die sich aus der Symmetrie der Legendre-Polynome –Gleichung (B.18)– ergibt:

$$P_J(-\cos\theta) = (-1)^J P_J(\cos\theta) \quad (\text{B.18})$$

Damit ergibt sich für das Potential

$$V_{-+}^{+-/00} = (-1)^J V_{+-}^{+-/00} \quad V_{+-/00}^{-+} = (-1)^J V_{+-/00}^{+-} \quad , \quad (\text{B.19})$$

was zusammen mit der Symmetrie der Clebsch-Gordan-Koeffizienten dazu führt, dass in einer Formulierung der Transformation, die konsequent die Symmetrie der Meson-Meson Zustände ausnutzt, eine Drehimpulsabhängigkeit der Transformationsgleichung auftritt. Als Beispiel hierfür wiederholen wir hier die expliziten Formeln für die Transformation des Pion-Pion Potentials von der Teilchenbasis (mit durch Symmetrie eliminierten $\pi^-\pi^+$ -Zuständen) in die Isospinbasis. (Diese und die expliziten Formeln für weitere Meson-Meson Kanäle können in [114] nachgelesen werden.)

$$\begin{aligned} V^{0\rightarrow 0} &= \frac{1}{3}(2s_J^+ V_{+-}^{+-} + \sqrt{8}V_{00}^{+-} + V_{00}^{00}) \\ V^{1\rightarrow 1} &= s_J^- V_{+-}^{+-} \\ V^{2\rightarrow 2} &= \frac{1}{3}(s_J^+ V_{+-}^{+-} - \sqrt{8}V_{00}^{+-} + V_{00}^{00}) \\ V^{0\rightarrow 1} &= 0 \\ V^{1\rightarrow 0} &= 0 \\ V^{2\rightarrow 0} &= \sqrt{\frac{2}{9}} \left(s_J^+ V_{+-}^{+-} - \sqrt{\frac{1}{2}} s_J^+ V_{+-}^{00} - V_{00}^{00} \right) \\ V^{0\rightarrow 2} &= \sqrt{\frac{2}{9}} \left(s_J^+ V_{+-}^{+-} - \sqrt{\frac{1}{2}} s_J^+ V_{+-}^{00} - V_{00}^{00} \right) \\ V^{2\rightarrow 1} &= -\sqrt{\frac{2}{3}} s_J^- V_{00}^{+-} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

$$V^{2 \rightarrow 1} = -\sqrt{\frac{2}{3}} s_J^- V_{00}^{+-}$$

Hierbei definieren wir s_J^\pm als:

$$s_J^+ = \begin{cases} 1 & \text{für } J = \text{gerade} \\ 0 & \text{für } J = \text{ungerade} \end{cases} \quad s_J^- = \begin{cases} 0 & \text{für } J = \text{gerade} \\ 1 & \text{für } J = \text{ungerade} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

B.4 Explizite Form der $\mathcal{L}_{\text{Flavour}}^{SU(4)}$ -Funktion

Zur Veranschaulichung der in Abschnitt B.1 angeführten Erklärungen zum Flavouranteil der Lagrange-Funktion sei hier die Kopplung der drei $SU(4)$ -16-plets zu einem $SU(4)$ -Singulett explizit niedergeschrieben.

$\mathcal{L}_{\text{flavour}} = \dots$ (Auslassung von Kopplungen an das pseudoskalare $SU(4)$ -Singulett) \dots

$$+ g_{15 \times 15 \times 1} \left\{ \frac{-1}{\sqrt{15}} \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\eta_{15})_{su4}^{\nu_1} (\eta_{15})_{su4}^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \right. \quad (\text{B.22.1})$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \right\rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\bar{D}_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (D_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.2})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{15}} \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_s^-)^{\nu_1} (D_s^+)^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.3})$$

$$+ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \right\rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (\bar{D}_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.4})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{15}} \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_s^+)^{\nu_1} (D_s^-)^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.5})$$

$$+ \frac{-1}{\sqrt{15}} \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\eta_8)_{su4}^{\nu_1} (\eta_8)_{su4}^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.6})$$

$$+ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \right\rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\bar{K}_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (K_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.7})$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{5}} \langle 1 I_z^{\nu_1} 1 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\pi_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (\pi_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \quad (\text{B.22.8})$$

$$+ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \right\rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (K_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (\bar{K}_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_1)_{su4} \left. \right\} \quad (\text{B.22.9})$$

$$+ \left(g_F \frac{-1}{3\sqrt{5}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{15}} \right) \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \right\rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\bar{D}_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (D_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_{15})_{su4} \quad (\text{B.22.10})$$

$$+ \left(g_F \frac{-1}{3\sqrt{10}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{30}} \right) \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_s^-)^{\nu_1} (D_s^+)^{\nu_2} (\omega_{15})_{su4} \quad (\text{B.22.11})$$

$$+ \left(g_F \frac{-1}{3\sqrt{5}} + g_D \frac{-1}{3\sqrt{15}} \right) \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \right\rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (\bar{D}_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (\omega_{15})_{su4} \quad (\text{B.22.12})$$

$$+ \left(g_F \frac{1}{3\sqrt{10}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{30}} \right) \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_s^+)^{\nu_1} (D_s^-)^{\nu_2} (\omega_{15})_{su4} \quad (\text{B.22.13})$$

$$+ \left(g_F \frac{-1}{3\sqrt{5}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{15}} \right) \left\langle 0 I_z^{\nu_1} \frac{1}{2} I_z^{\nu_2} | \frac{1}{2} I_z^\nu \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} I_z^\nu \frac{1}{2} - I_z^\nu | 0 0 \right\rangle (\eta_{15})_{su4}^{\nu_1} (\bar{D}_{I_z^{\nu_2}})^{\nu_2} (D_{-I_z^\nu}^*) \quad (\text{B.22.14})$$

$$+ \left(g_F \frac{-1}{3\sqrt{10}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{30}} \right) \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (\eta_{15})_{su4}^{\nu_1} (D_s^-)^{\nu_2} (D_s^{*+}) \quad (\text{B.22.15})$$

$$+ \left(g_F \frac{1}{3\sqrt{5}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{15}} \right) \left\langle \frac{1}{2} I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | \frac{1}{2} I_z^\nu \right\rangle \left\langle \frac{1}{2} I_z^\nu \frac{1}{2} - I_z^\nu | 0 0 \right\rangle (\bar{D}_{I_z^{\nu_1}})^{\nu_1} (\eta_{15})_{su4}^{\nu_2} (D_{-I_z^\nu}^*) \quad (\text{B.22.16})$$

$$+ \left(g_F \frac{1}{3\sqrt{10}} + g_D \frac{1}{3\sqrt{30}} \right) \langle 0 I_z^{\nu_1} 0 I_z^{\nu_2} | 0 I_z^\nu \rangle \langle 0 I_z^\nu 0 - I_z^\nu | 0 0 \rangle (D_s^-)^{\nu_1} (\eta_{15})_{su4}^{\nu_2} (D_s^{*+}) \quad (\text{B.22.17})$$

Anhang C

Die Streugleichung

In diesem Anhang erläutern wir einige Eigenschaften der von uns verwendeten Streugleichung. Als erstes beschreiben wir die Molekülbildung als allgemeine Eigenschaft der in Abbildung C.1 grafisch dargestellten Bethe-Salpeter Gleichung. Danach erklären wir die hier verwendete dreidimensionale Reduktion der Streugleichung nach Blankenbecler und Sugar, deren Regularisierung wir einen eigenen Abschnitt widmen, indem wir auch auf die Vielblattstruktur der Streugleichung eingehen. Zum Schluss betrachten wir noch kurz die Streugleichung im Falle eines seperablen Potentials, um den Imaginärteil der Selbstenergie zu berechnen, den wir in Abschnitt 3.3.2 zur Abschätzung der Zerfallsbreite benutzen.

C.1 Molekülbildung

In Abschnitt 3.3.2 haben wir schon mit Gleichung (3.26) demonstriert, dass sich die T -Matrix an einer Polstelle zerlegen lässt. In diesem Kapitel wollen wir nun erläutern, wie innerhalb der Bethe-Salpeter Gleichung dynamische Pole erzeugt werden und wie wir deren Position und Vertexfunktion bestimmen. Die Bethe-Salpeter Gleichung

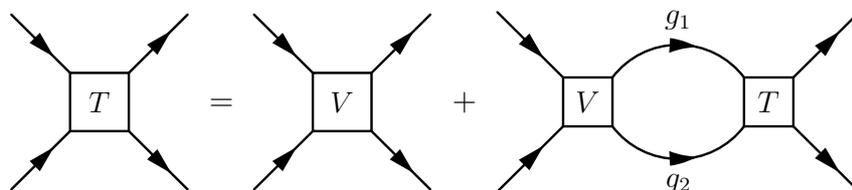


Abbildung C.1: Grafische Darstellung der Bethe-Salpeter Gleichung mit der Streumatrix T , dem Integalkern/Potential K und den Propagatoren g_i

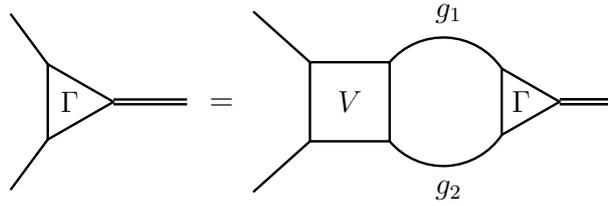


Abbildung C.2: Grafische Darstellung der Eigenwertgleichung für Bindungszustände

(Abbildung C.1)

$$T(k, k'; s) = V(k, k'; s) + \int d^4 k'' V(k, k''; s) G(k''; s) T(k'', k'; s) \quad (\text{C.1})$$

erzeugt die sogenannten Leiterdiagramme, die sich dann als Bornserie wie folgt lesen:

$$\begin{aligned} T(k, k') &= V(k, k') + \int d^4 k'' V(k, k'') G(k'') V(k'', k') \\ &+ \int d^4 k'' V(k, k'') G(k''; s) \int d^4 k''' V(k'', k''') G(k''') V(k''', k') \\ &+ \left(\int d^4 q V(s) G(s) \right) V(s) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Diese Serie konvergiert nur für genügend schwache Potentiale. Formuliert man die Integrale als diskrete Summe, so erhält man eine Potenzreihe, die man formal “analytisch” fortsetzen kann.

$$\mathcal{T} = \mathcal{V} \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{G}\mathcal{V})^n = \mathcal{V} (1 - \mathcal{G}\mathcal{V})^{-1} \quad (\text{C.3})$$

Aus dieser Gleichung liest man nun ab, dass die Existenz eines Eigenvektors von $\mathcal{G}\mathcal{V}$ mit dem Eigenwert eins zu der Existenz eines dynamischen Pols äquivalent ist. Damit können wir die Eigenwertintegralgleichung (3.27) (bzw. Abbildung C.2) für den gebundenen Zustand formulieren. Zur numerischen Bestimmung der Polpositionen formuliert man diese um:

$$\det [1 - \mathcal{V}\mathcal{G}] (s) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Bei der Diskretisierung des Integraloperators sind etwaige Polstellen, welche die Deformation der Integration beeinflussen, zu berücksichtigen, was zu einer Vielblattstruktur der s -Ebene führt. Diese Besonderheit werden wir nach der dreidimensionalen Reduktion der Bethe-Salpeter Gleichung diskutieren. Das Residuum R_i an der Polstelle P_i ist durch das Schleifenintegral in der s -Ebene um die Polstelle (C.5) definiert.

$$R_i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{P_i} T_{ab \rightarrow cd}(s) ds \quad (\text{C.5})$$

C.2 Dreidimensionale Reduktion

Wollen wir die Systemmatrix $(1 - \mathcal{V}\mathcal{G})$ direkt aus der Bethe-Salpeter Gleichung ableiten, so müssen wir ein vierdimensionales Integral diskretisieren, was selbst bei niedriger Stützstellenzahl kaum handhabbar ist. Daher werden wir den räumlichen Anteil der Integration mit Hilfe der Partialwellenzerlegung in Anhang D auf ein eindimensionales Integral reduzieren. Hier wollen wir mit der Blankenbeclar-Sugar(BbS) Reduktion [39] eine Möglichkeit vorstellen, um die Bethe-Salpeter Gleichung auf eine dreidimensionale Integralgleichung zu reduzieren, die im Rahmen des Jülicher Modells angewendet wird. Für eine Beschreibung der ebenfalls im Rahmen des Jülicher Modells verwendeten zeitgeordneten Störungstheorie (TOPT) sei auf [122] verwiesen. Die TOPT mit ihrer inhärenten dreidimensionalen Struktur, die durch die Energieverletzung an den einzelnen Vertices –der vollständige Prozess ist natürlich energieerhaltend– erkaufte wird, definiert, anders als die im Rahmen dieser Arbeit verwendete BbS Reduktion, die jeweiligen Zwischenzustände auf ihrer Massenschale. Bei der BbS-Reduktion wählt man im Rahmen der Bethe-Salpeter Gleichung eine Näherung für den Propagator G , die es erlaubt die Integration der Energiekomponente explizit auszuführen. Bei dieser Wahl kann man der Näherung des Propagators beliebige Funktionen hinzufügen, die entlang des positiven Verzweigungsschnittes von s nicht singular sind. Die Wahl von Blankenbeclar und Sugar für den Zwei-Teilchen Propagator fußt auf der expliziten Berücksichtigung der Unitaritätsrelation $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$. Ausgehend von der Bethe-Salpeter Gleichung (Abbildung C.1)

$$T(k', k) = K(k', k) + \int d^4k'' T(k', k'')G(k'')K(k'', k)$$

stellt man für den Fall eines reell symmetrischen Potentials fest, dass für die Diskontinuität am Zweiteilchenschnitt (C.6), (C.7) gilt: [114], [1]

$$T_{ij}(s^+) - T_{ij}(s^-) = \sum_l \int d^4k T_{il}(s^+) \left[\tilde{G}_l(s^+) - \tilde{G}_l(s^-) \right] T_{lj}(s^-) \quad (\text{C.6})$$

$$= i \sum_l \int d^4k T_{il}(s^+) \left[\prod_{n=1}^2 2\pi \delta^+(k_n^2 - m_n^2) \right] T_{lj}(s^-) \quad (\text{C.7})$$

Hierbei ist $\delta^+(k^2 - m^2) = \delta(k^2 - m^2)\theta(k^0)$, $s^+ = s + i\epsilon$ und $s^- = s^+*$. Ferner bezeichnen $k_{1,2}$ die Viererimpulse und $m_{1,2}$ die Massen der Teilchen im Zwischenzustand. Die zusätzliche Matrixstruktur erhält die Gleichung durch die Verwendung von Kanalindizes i, j, l zur Beschreibung der gekoppelten Kanäle $\pi\pi$ und $K\bar{K}$. Die letzte Identität obiger Gleichung geht aus der Unitaritätsrelation der S -Matrix hervor, wenn man die Definitionsgleichung der S -Matrix

$$S_{ij} = \delta_{ij} + (2\pi)^4 i \delta^4(P_f - P_i) T_{ij}$$

und die Zweiteilchenphasenraumdichte benutzt,

$$d^{(2)}\rho = (2\pi)^4 \delta^4(P_j - k_1 - k_2) d^4k_1 d^4k_2 4\pi^2 \delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2) \quad .$$

Aus dem Vergleich von C.6 und C.7 leitet man mithilfe einer Dispersionsrelation folgenden Propagator ab:

$$\tilde{G}_l(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m_1+m_2}^{\infty} ds' \frac{1}{s' - s} \frac{i}{(2\pi)^2} \delta^+(k_1^2 - m_1^2) \delta^+(k_2^2 - m_2^2) \quad (\text{C.8})$$

$$= \delta(k^0 - \frac{1}{2}\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2) \frac{\omega_1 + \omega_2}{(2\pi)^3 2\omega_1\omega_2} \frac{1}{(\omega_1 + \omega_2)^2 - s} \quad (\text{C.9})$$

In letzterer Formel steht $\omega_{1/2}$ für $\sqrt{k^2 + m_{1/2}^2}$ und k für den Relativimpuls $|\frac{1}{2}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)|$ der beiden Teilchen. Integriert man nun die Energiekomponente aus, so erhält man die Blankenbecker-Sugar Streugleichung:

$$T_{ij}(\vec{k}', \vec{k}; E) = V_{ij}(\vec{k}', \vec{k}; E) + \sum_l \int d^3k'' V_{il}(\vec{k}', \vec{k}''; E) G_l(\vec{k}''; E) T_{lj}(\vec{k}'', \vec{k}; E) \quad (\text{C.10})$$

$$G_l(\vec{k}; E) = \frac{\omega_1(k) + \omega_2(k)}{(2\pi)^3 2\omega_1(k)\omega_2(k)} \frac{1}{E^2 - (\omega_1(k) + \omega_2(k))^2} \quad (\text{C.11})$$

Da sowohl einlaufende als auch auslaufende Teilchen auf ihrer Massenschale liegen müssen, besteht für die Teilchen im Anfangs- bzw. Endzustand zwischen Energie E und Relativimpuls \vec{k}, \vec{k}' der Teilchen folgende Beziehung:

$$E = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}$$

Nach Invertierung dieser Beziehung erhält man die folgende Formel für den On-Shell-Impuls:

$$k_0 = \sqrt{\frac{(E^2 - (m_1 + m_2)^2)(E^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4E^2}}$$

Es ist diese Wurzel, in der die in Abschnitt C.3.1 beschriebene Vielblattstruktur der T -Matrix ihren Ursprung hat.

C.3 Diskretisierung der Integralgleichung

Bei der Lösung der Blankenbecker-Sugar Gleichung (D.9) ist zu beachten, dass der Zweiteilchenpropagator eine Singularität auf der reellen Impulsachse k besitzt. Um hiermit verbundene numerische Probleme zu vermeiden, sind zwei Verfahren üblich. Zum einen kann man die Integrationskontur deformieren, um die Pole zu vermeiden,

zum anderen kann man den singulären Anteil des Propagators subtrahieren und diesen Anteil dann analytisch integrieren. Hierzu verwendet man die Hauptwertbeziehung (C.12).

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mathcal{P} \left(\frac{1}{x} \right) \mp i\pi\delta(x) \quad (\text{C.12})$$

Im Folgenden beschreiben wir beide Verfahren, wobei wir im Rahmen der Konturdeformation auf die Vielblattstruktur eingehen werden. Wollte man diesen Einfluss auch im Rahmen des Haftel-Tabakin Verfahren berücksichtigen, so müsste man die Verzweigungsschnitte der natürlichen Logarithmen beachten und auf die Verwendung der nicht analytischen Betragsfunktion verzichten. Da wir die Haftel-Tabakin Regularisierung nur auf der reellen Achse verwenden, ignorieren wir diese Komplikationen und folgen in unserer Darstellung den Rechnungen in [156].

C.3.1 Die Konturdeformation

In unserer Erläuterung zu der Konturdeformation betrachten wir nur die dreidimensionale Reduktion (C.10) der Streugleichung. Eine ausführliche Beschreibung des Zusammenhangs zwischen den Polen der Bethe-Salpeter Gleichung und den Polen einer Auswahl ihrer dreidimensionalen Reduktionen findet man in [118]. Bei unserer Beschreibung der Rotation in der komplexen s -Ebene (Abbildung C.3) betrachten wir nur die Singularitäten aus dem Meson-Meson Propagator. Bei der Wahl der deformierten Integrationskontur müssen wir jedoch gleichermaßen auf die Polstellen im Potential achten. Diese liegen zum Beispiel auf der imaginären Achse. Um einen möglichst großen Abstand zu den Singularitäten zu haben, deformieren wir die Integrationskontur gemäß $q \rightarrow e^{\pm i\alpha}$ mit $|\tan \alpha| = 0.3$, was empirisch dem Wert für α entspricht, an dem sich die Integration am stabilsten verhält. Die Relevanz des Vorzeichens für α wollen wir anhand der Polbewegung bei Rotation in der komplexen s -Ebene erläutern, wie sie z.B. in [148] dargestellt ist (ein seperables Potential wird vorausgesetzt). Die Polbewegung haben wir in Abbildung C.3 für den Fall zweier masseloser Mesonen dargestellt. Die am Rand in Rot dargestellte Bewegung soll nur den Stand der Rotation von s verdeutlichen und findet verglichen mit den anderen Elementen der Abbildung in einer anderen komplexen Ebene statt. Zunächst wollen wir uns anhand von Gleichung (C.11) vergegenwärtigen, welche Integrationskontur für ein s auf dem Top-Blatt zu wählen ist. Der physikalische Fall entspricht einer Energie E mit infinitesimalem positivem Imaginärteil $+i\epsilon$. Damit liest man aus (C.2) ab, dass der Pol k_0 im physikalischen Fall in der oberen Hälfte der k -Ebene liegt. Also ist es möglich, die Integrationskontur C von der reellen Achse weg in die untere Halbebene zu rotieren ohne einen Pol einzufangen (Abb. C.3.a). Erreicht man nun bei der Rotation von s

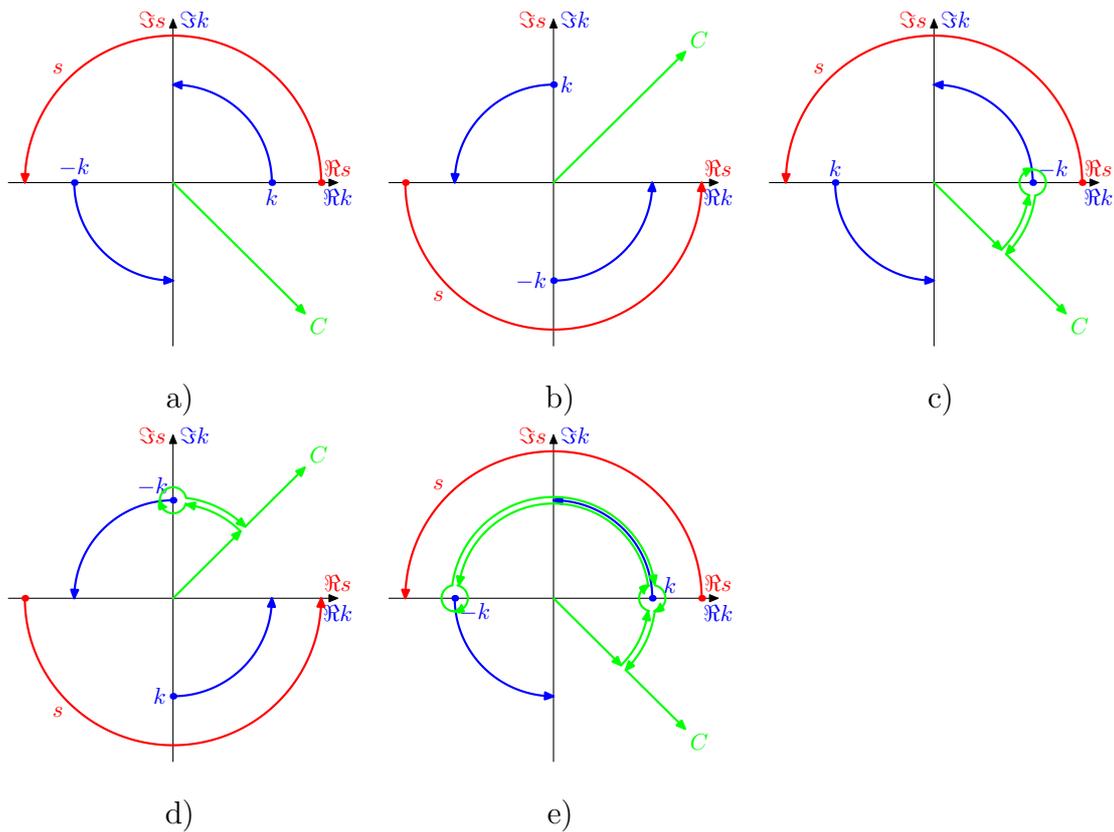


Abbildung C.3: Darstellung der Rotation in der komplexen s -Ebene unter Berücksichtigung des Einfangens der Singularitäten des Meson-Meson Propagators, die eine Zweiblattstruktur pro offenem Kanal bedingt. Die grüne Integrationskontur liegt wie die Pole des Propagators in der komplexen k -Ebene. Die Rotationsbewegung von s verläuft zunächst in a) und b) auf dem physikalischen (Top) Blatt und wechselt dann beim Übergang von b) nach c) auf das unphysikalische (Bottom) Blatt, von dem sie nach Durchlaufen von d) wieder in e) auf das physikalische Blatt wechselt. C repräsentiert die jeweilige Wahl der Integrationskontur.

die untere Halbebene, so kommt der Pol $-k$ in den Bereich der Integrationskontur aus Abb. C.3.a). Es ist aber möglich, dem Pol $-$ wie in Abb. C.3.b) gezeigt– auszuweichen, ohne dass man den Integrationspfad verbiegt. Mit dem Übergang zu Abb. C.3.c) hat man nun den Verzweigungsschnitt gequert und befindet sich auf dem unphysikalischen Blatt. Will man wieder die Integrationskontur in der unteren Halbebene wählen, so bleibt der Pfad bei der Deformation an der Polstelle bei $-k$ hängen und wir müssen das Residuum an dieser Stelle berücksichtigen. Dieses Residuum bedingt den Zusatzterm (C.13) in der Berechnung des Impulsintegrals auf dem unphysikalischen Blatt. Bei weiterer Rotation müssen wir zunächst wieder nur dem Pol in der unteren Halbebene ausweichen (Abb. C.3.d)). Kreuzen wir beim Übergang von Abb. C.3.d) zu Abb. C.3.e) erneut den Verzweigungsschnitt, so schließt unser deformierter Integrationsweg auch noch den Pol bei k ein. Mit $V(k, k) = V(-k, -k)$ stellt man fest, dass sich die beiden Residuen wegheben und man sich in einer Situation äquivalent zu Abb. C.3.a) befindet. So ergibt sich, wie man schon aus der Wurzel in Gleichung (C.2) vermuten konnte, eine 2^n -Blattstruktur für die T -Matrix bei n gekoppelten Kanälen, wobei der Verzweigungsschnitt in einem Meson-Meson Kanal mit den Massen m_1 und m_2 bei $s = (m_1 + m_2)^2$ beginnt. Für eine ausführliche Beschreibung dieser Struktur verweisen wir auf [114]. Wir führen an dieser Stelle lediglich die Auswirkung der Blattstruktur auf das Integral in (D.9) bzw. (C.10) an [148]:

$$\int dq q^2 V^J(k', q; s) G^{BbS}(q; s) T^J(q, k; s) = \int_{\tilde{C}} V^J(k', q; s) G^{BbS}(q; s) T^J(q, k; s) + \begin{cases} 2\pi \frac{k_0}{4(2\pi)^3 \sqrt{s}} V^J(k', -k_0; s) T^J(-k_0, k; s) & \text{unphysikal. Blatt} \\ 0 & \text{physikal. Blatt} \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Hierbei bezeichnet \tilde{C} die in Abbildung C.3 gezeigten Integrationspfade ohne die durch die Pole bedingten “Umwege”.

C.3.2 Das Haftel-Tabakin Verfahren

In Anlehnung an den Bericht [134], in dem die Haftel-Tabakin Regularisierung auf den Zweiteilchenpropagator der TOPT ohne die Betrachtung eines globalen Abschneideparameters angewendet wird, beschreiben wir hier die Regularisierung des Blankenbecler-Sugar Propagators unter Beachtung eines globalen Cutoffs Λ . Das zu regularisierende Integral der Streugleichung (D.9) lautet:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\Lambda k''^2 dk'' V_{il}^J(k', k''; E) G_l(k''; E) T_{lj}^J(k'', k; E) \\ &= \int_0^\Lambda V_{il}^J(k', k''; E) \frac{\omega_1(k'') + \omega_2(k'')}{(2\pi)^3 2\omega_1(k'')\omega_2(k'')} \frac{k''^2 dk''}{E^2 - (\omega_1(k'') + \omega_2(k''))^2} T_{lj}^J(k'', k; E) \end{aligned}$$

Nach der Variablensubstitution $\omega = \omega_1 + \omega_2$; $\frac{d\omega}{dk''} = \frac{k''\omega}{\omega_1\omega_2}$ erhält man:

$$\begin{aligned} I &= \int_{m_1+m_2}^{\omega(\Lambda)} \frac{k''d\omega}{(2\pi)^3 2} \frac{1}{E^2 - \omega^2} V_{il}^J(k', k''; E) T_{lj}^J(k'', k; E) \\ &= \int_{m_1+m_2}^{\omega(\Lambda)} \frac{f(k'')d\omega}{\omega(E - \omega)} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir zwar durch das Einführen von

$$f(k'') = \frac{k''\omega}{(2\pi)^3 2(E + \omega)} V_{il}^J(k', k''; E) T_{lj}^J(k'', k; E)$$

eine willkürliche Singularität bei $\omega = 0$ eingeführt, die jedoch außerhalb des Integrationsweges liegt. Wir benutzen –wie oben angedeutet– die Hauptwertbeziehung und erhalten:

$$\begin{aligned} I &= \int_{m_1+m_2}^{\omega(\Lambda)} \frac{f(k'') - f(k''_{on})}{\omega(E - \omega)} d\omega + \int_{m_1+m_2}^{\omega(\Lambda)} \frac{f(k''_{on})}{\omega(E - \omega)} d\omega \\ &\quad - i\pi \int_{m_1+m_2}^{\omega(\Lambda)} \frac{f(k'')}{\omega(k'')} \delta(E - \omega) d\omega \\ &= \int_{m_1+m_2}^{\omega(\Lambda)} \frac{f(k'') - f(k''_{on})}{\omega(E - \omega)} d\omega + \frac{f(k''_{on})}{E} \ln \left| \frac{\frac{E}{m_1+m_2} - 1}{\frac{E}{\omega(\Lambda)} - 1} \right| \\ &\quad + \begin{cases} -i\pi \frac{f(k''_{on})}{\omega(k''_{on})} & \text{für } E < \Lambda \\ 0 & \text{für } E > \Lambda \end{cases} \end{aligned}$$

Nach der Resubstitution ergibt sich:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\Lambda \frac{k''^2 dk'' \omega}{(2\pi)^3 2 \omega_1 \omega_2 (E^2 - \omega^2)} V_{il}^J(k', k''; E) T_{lj}^J(k'', k; E) \\ &\quad - \int_0^\Lambda \frac{k''_{on} k'' \omega_{on} dk''}{(2\pi)^3 2 \omega_1 \omega_2 (E + \omega_{on})(E - \omega)} V_{il}^J(k', k''_{on}; E) T_{lj}^J(k''_{on}, k; E) \\ &\quad + \frac{f(k''_{on})}{E} \ln \left| \frac{\frac{E}{m_1+m_2} - 1}{\frac{E}{\omega(\Lambda)} - 1} \right| + \begin{cases} -i\pi \frac{f(k''_{on})}{\omega(k''_{on})} & \text{für } E < \Lambda \\ 0 & \text{für } E > \Lambda \end{cases} \end{aligned} \quad (C.14)$$

Diskretisiert man nun die Integrale mit Hilfe der Stützstellen und Gewichte $k_{i..N}$, $dk_{i..N}$ und setzt ferner $k_{N+1} = k_{on}$, so kann man das Integral in der Gestalt C.15 darstellen:

$$I = \sum_{b=1}^{N+1} g_b V_{il}^J(k'_a, k''_b; E) T_{lj}^J(k''_b, k_c; E) \quad . \quad (C.15)$$

Hierbei definiert man die Gewichte g_b wie folgt:

$$\begin{aligned}
g_{b=1..N} &= \frac{k_b'' \omega_b dk_b''}{(2\pi)^3 2\omega_1^b \omega_2^b (E^2 - \omega_b^2)} \quad , \\
g_{N+1} &= - \sum_b \frac{k_{on}'' k_b'' \omega_{on} dk_b''}{(2\pi)^3 2\omega_1^b \omega_2^b (E + \omega_{on})(E - \omega_b)} \\
&\quad + \frac{k_{on}'' \omega_{on}}{(2\pi)^3 2(E + \omega_{on})E} \left[\ln \left| \frac{\frac{E}{m_1+m_2} - 1}{\frac{E}{\omega(\Lambda)} - 1} \right| + \begin{cases} -i\pi & : E < \Lambda \\ 0 & : E > \Lambda \end{cases} \right] .
\end{aligned}$$

Damit erhält die Streugleichung die Matrixstruktur (C.16) und wir können die Betrachtungen aus Abschnitt C.1 anwenden. (Die Stützstellen erhalten neben dem Zählindex auch noch einen weiteren Index für den verwendeten Kanal, da man im Prinzip unterschiedliche Stützstellen in den verschiedenen Kanälen benutzen kann.)

$$T_{ij}^J(k'_{a,i}, k_{c,j}; E) = V_{ij}^J(k'_{a,i}, k_{c,j}; E) + \sum_l \sum_{b=1}^{N+1} g_{b,l} V_{il}^J(k'_{a,i}, k''_{b,l}; E) T_{lj}^J(k''_{b,l}, k_{c,j}; E) \quad (C.16)$$

Abschließend wollen wir anmerken, dass bei beiden Verfahren Vorsicht geboten ist, wenn effektive Reichweitenparameter extrahiert werden. Bei der gewählten Konturdeformation sind Berechnungen nahe der Schwelle problematisch, da die Integrationskontur dort noch nicht weit von der reellen Achse entfernt ist und somit in der Nähe des Pol des Meson-Meson Propagators verläuft. Das Haftel-Tabakin Verfahren hingegen ist zumindest im Prinzip dazu geeignet, um Berechnungen nahe der Schwelle durchzuführen. Die regularisierte Funktion hat jedoch offensichtlich eine Nullstelle am Pol und das numerische Integral wird somit instabil, wenn keine Stützstelle unterhalb der Polstelle liegt. Der Funktionswert von oberhalb der Polstelle wird in diesem Fall als Abschätzung für die Funktionswerte an der Schwelle missbraucht.

C.4 Seperable Potentiale (Lee Modell)

Hier wollen wir den in Kapitel 3 beschriebenen Zusammenhang zwischen der Zerfallsbreite eines Teilchens und dem Imaginärteil seiner Selbstenergie herleiten. Dabei folgen wir den Ideen des Lee-Modells [115, 120] und machen die Annahme eines separablen Potentials (C.17).

$$V^J(k', k) = f^J(k') \frac{1}{s - M_0^2} (f^J(k))^\dagger \quad (C.17)$$

Damit lässt sich die Partialwellen zerlegte Streugleichung als Fredholmsche Integralgleichung 2. Art formulieren:

$$T^J(k', k) = f^J(k') \frac{1}{s - M_0^2} (f^J(k))^\dagger + \int dq q^2 f^J(k') \frac{1}{s - M_0^2} (f^J(q))^\dagger G(q) T^J(q, k) \quad (\text{C.18})$$

Hierbei impliziert das Integral gleichzeitig eine Summe über angekoppelte Meson-Meson Kanäle und etwaige diskrete Quantenzahlen z.B. die Helizität. Die Lösung dieser Gleichung lautet:

$$T^J(k', k) = f^J(k') \frac{1}{s - M_0^2} (f^J(k))^\dagger + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int dq q^2 f^J(q) \frac{1}{s - M_0^2} (f^J(q))^\dagger G(q) \right)^n \quad (\text{C.19})$$

$$= \frac{f^J(k') (f^J(k))^\dagger}{s - M_0^2 - \int dq q^2 f^J(q) (f^J(q))^\dagger G(q)} \quad (\text{C.20})$$

Daraus lesen wir die Selbstenergie ab:

$$\Sigma(s) = \int dq q^2 f^J(q) (f^J(q))^\dagger G(q) \quad (\text{C.21})$$

Benutzen wir nun das s -Kanal-Potential des Vektormesonaustausches im Pseudoskalar-Pseudoskalar Kanal

$$V_V^{J=1}(k', k) = (2\pi)^2 \frac{16}{3} \frac{g_{PV}^2}{4\pi} n F_{iso} \frac{kk'}{s - M_0^2} \quad (\text{C.22})$$

um $f_q^{J=1}$ zu bestimmen und setzen wir dann den Blankenbecler-Sugar Propagator für $G(q)$ ein, so erhalten wir Gleichung (C.23) als expliziten Ausdruck für die Selbstenergie.

$$\Sigma = \int dq q^2 \frac{\omega_1 + \omega_2}{(2\pi)^3 2\omega_1\omega_2} \frac{1}{s - (\omega_1 + \omega_2)^2} (2\pi)^2 \frac{16}{3} \frac{g^2}{4\pi} q^2 n F_{iso} \quad (\text{C.23})$$

Hierbei stehen n und F_{iso} für den Normierungsfaktor aus dem Meson-Meson Kanal und für den Isospinfaktor. Unter Zuhilfenahme von Gleichung (C.14) identifiziert man den Imaginärteil von Σ als:

$$\Im \Sigma(M_R^2) = -\frac{g_{PPV}^2}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{K_0^3(M_R^2)}{M_R} F_{iso} \quad (\text{C.24})$$

Hierbei bezeichnet M_R den Realteil der renormalisierten Masse der betrachteten Resonanz. Mithilfe von $\Gamma = -\Im \Sigma(M_R^2)/M_R$ erhalten wir die Beziehung (C.25) für die Zerfallsbreite eines Vektormesons in zwei pseudoskalare Mesonen.

$$\Gamma = \frac{g_{PPV}^2}{4\pi} \frac{2}{3} \frac{K_0^3(M_R^2)}{M_R^2} F_{iso} \quad (\text{C.25})$$

Anhang D

Partialwellenzerlegung

D.1 Definitionen

In unserer Definition für die Partialwellenzerlegung des Potentials V und der Streumatrix T halten wir uns an die Konvention des Jülicher Modells für die Pion-Nukleon Streuung [115].

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 \vec{k}' | V^J | \lambda_1 \lambda_2 \vec{k} \rangle = \int d\Omega_{\vec{k}'\vec{k}} D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0) \langle \lambda_3 \lambda_4 \vec{k}' | V | \lambda_1 \lambda_2 \vec{k} \rangle \quad (\text{D.1})$$

Hierbei beschreiben die λ_i die Helizitäten der ein- und auslaufenden Teilchen, welche die relativen Impulse \vec{k} und \vec{k}' tragen. Die Rotationsmatrizen $D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0)$ sind in ihrer Abhängigkeit von dem Raumwinkel $\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}$ zwischen den Relativimpulsen der ein- bzw. auslaufenden Teilchen über den Rotationsoperator $\mathcal{D}^J = \exp(-i\alpha J_z) \exp(-i\beta J_y) \exp(-i\gamma J_z)$ wie folgt definiert:

$$D_{\lambda\lambda'}^J(\alpha, \beta, \gamma) = \langle J\lambda' | \mathcal{D}^J(\alpha, \beta, \gamma) | J\lambda \rangle = e^{-i\alpha\lambda'} d_{\lambda\lambda'}^J(\beta) e^{-i\gamma\lambda} \quad (\text{D.2})$$

In dieser Definition steht $d_{\lambda\lambda'}^J(\beta)$ mit $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\lambda' = \lambda_3 - \lambda_4$ für die reduzierte Rotationsmatrix, die zum Beispiel in [40] definiert ist. Die Winkel α , β und γ sind die Eulerwinkel, die den Koordinatensystemwechsel durch Rotation beschreiben. In unserem Fall benötigen wir nur eine Rotation, die einen Vektor in einen anderen überführt. Wir können daher einen Euler-Winkel fest wählen ($\gamma = 0$). In den Gleichungen (D.3)–(D.6) zitieren wir aus [40] noch einige Relationen zwischen den $D_{\lambda\lambda'}^J$ und definieren

die Abkürzung $\bar{D}_{\lambda\lambda'}^J$:

$$D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}\vec{k}'}, 0) = (D_{\lambda'\lambda}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0))^* = \bar{D}_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}\vec{k}'}, 0) \quad (\text{D.3})$$

$$D_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_2\Omega_1, 0) = \sum_{\gamma} D_{\lambda\gamma}^J(\Omega_1, 0) D_{\gamma\lambda'}^J(\Omega_2, 0) \quad (\text{D.4})$$

$$\int d\Omega \bar{D}_{\lambda\lambda'}^J(\Omega, 0) D_{\gamma\gamma'}^J(\Omega, 0) = \frac{4\pi}{2J+1} \delta_{JI} \delta_{\lambda\gamma} \delta_{\lambda'\gamma'} \quad (\text{D.5})$$

$$\int d\Omega_{\vec{q}\vec{k}} \bar{D}_{\gamma\lambda'}^{J'}(\Omega_{\vec{k}'\vec{q}}, 0) \bar{D}_{\lambda\gamma}^J(\Omega_{\vec{q}\vec{k}}, 0) = \frac{4\pi}{2J+1} \bar{D}_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0) \delta_{J'J} \quad (\text{D.6})$$

Hier ist Gleichung (D.6) redundant, denn sie folgt aus den anderen drei Gleichungen. Da die $D_{\lambda\lambda'}^J$ einen vollständigen Satz von Funktionen bilden, können wir nun auch die Umkehrung zu (D.1) formulieren.

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 \vec{k}' | T | \lambda_1 \lambda_2 \vec{k} \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) \bar{D}_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0) \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | T^J | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle \quad (\text{D.7})$$

Die Streugleichung (hier in einer dreidimensionalen Reduktion) lässt sich mithilfe der Partialwellenamplituden als (D.8) formulieren und dann auf eine beliebige Partialwelle projizieren (D.9).

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 \lambda_4 \vec{k}' | T | \lambda_1 \lambda_2 \vec{k} \rangle &= \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) \bar{D}_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0) \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | T^J | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_J (2J+1) \bar{D}_{\lambda\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{k}}, 0) \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | V^J | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{\gamma_1 \gamma_2} \sum_{JJ'} (2J+1)(2J'+1) \int dq q^2 \int d\Omega_{\vec{q}\vec{k}} \bar{D}_{\gamma\lambda'}^J(\Omega_{\vec{k}'\vec{q}}, 0) \bar{D}_{\lambda\gamma}^J(\Omega_{\vec{q}\vec{k}}, 0) \\ &\quad \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | V^J | \gamma_1 \gamma_2 q \rangle G(q) \langle \gamma_1 \gamma_2 q | T^{J'} | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle \\ &= \langle \lambda_3 \lambda_4 \vec{k}' | V | \lambda_1 \lambda_2 \vec{k} \rangle + \sum_{\gamma_1 \gamma_2} \int d^3 q \langle \lambda_3 \lambda_4 \vec{k}' | V | \gamma_1 \gamma_2 \vec{q} \rangle G(\vec{q}) \langle \gamma_1 \gamma_2 \vec{q} | T | \lambda_1 \lambda_2 \vec{k} \rangle \quad (\text{D.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | T^J | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle &= \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | V^J | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle \\ &\quad + \sum_{\gamma_1 \gamma_2} \int dq q^2 \langle \lambda_3 \lambda_4 k' | V^J | \gamma_1 \gamma_2 q \rangle G(q) \langle \gamma_1 \gamma_2 q | T^J | \lambda_1 \lambda_2 k \rangle \quad (\text{D.9}) \end{aligned}$$

D.2 Auswahlregeln in Helizitäts- und JLS -Basis

Da wir die Streugleichung in Abschnitt D.1 in der Helizitäts-Basis beschrieben haben, aber die $\rho\rho$ -Streuung in der experimentell üblichen JLS -Basis angeben wollen, seien

hier die Transformationsformeln angeführt. In dieser Basis werden die Zustände durch den Bahndrehimpuls L und den Gesamtspin S zusammen mit dem Gesamtdrehimpuls J und dem Relativimpuls k beschrieben. Das Einfügen eines vollständigen Systems von JLS -Zuständen, deren L und S mit dem Gesamtimpuls vereinbar ist, ergibt:

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \sum_{LS} |JMLS\rangle \langle JMLS|JM\lambda_1\lambda_2\rangle \quad (\text{D.10})$$

Hierbei lassen sich die Transformationsmatrixelemente durch die Clebsch-Gordan-Koeffizienten ausdrücken [97]:

$$\langle JMLS|JM\lambda_1\lambda_2\rangle = \sqrt{\frac{2L+1}{2J+1}} \langle LOS\lambda|J\lambda\rangle \langle S_1\lambda_1S_2-\lambda_2|S\lambda\rangle \quad (\text{D.11})$$

Hiermit folgt die Streugleichung in der JLS -Basis:

$$\begin{aligned} \langle L'S'k'|T^J|LSk\rangle &= \langle L'S'k'|V^J|LSk\rangle \\ &+ \sum_{L''S''} \int dq q^2 \langle L'S'k'|V^J|L''S''q\rangle G(q) \langle L''S''q|T^J|LSk\rangle \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Bevor wir uns die Auswahlregeln für die Parität ansehen, sei noch angemerkt, dass die Paritätsinvarianz via

$$\langle -\lambda_3, -\lambda_4|V^J|-\lambda_1, -\lambda_2\rangle = \frac{\eta_3\eta_4}{\eta_1\eta_2} (-1)^{S_3+S_4-S_1-S_2} \langle \lambda_3\lambda_4|V^J|\lambda_1\lambda_2\rangle \quad (\text{D.13})$$

die Anzahl der unabhängigen Helizitäts-Zustände reduziert [97]. Hierbei bezeichnen die S_i die Spins der beteiligten Teilchen i und die η_i deren innere Parität. Die Parität der Meson-Meson Zustände ist in der JLS -Basis durch (D.14) bestimmt.

$$\eta_{ges} = \eta_1\eta_2(-1)^L \quad (\text{D.14})$$

Damit ist klar, dass die Differenz der Bahndrehimpulse $\Delta L = L - L'$ für Anfangs- und Endzustände gleicher intrinsischer Parität $\eta = \eta_1\eta_2$ gerade sein muss und für unterschiedliche Paritäten im Anfangs- und Endzustand ungerade sein muss, damit das Potential nicht verschwindet. Betrachtet man auch Zustände zweier identischer Mesonen, so reduziert sich die Wechselwirkung noch weiter, da Zustände zweier identischer Bosonen mit $L + S + I = \text{ungerade}$ nicht existieren. All dies bedeutet im Fall des von uns untersuchten $\rho\rho$ -Systems, dass für beliebiges J und I die in Tabelle D.1 mit Null gekennzeichneten Übergänge verschwinden.

$\rho\rho \rightarrow \rho\rho$	$ J-2,2\rangle$	$ J-1,1\rangle$	$ J-1,2\rangle$	$ J,0\rangle$	$ J,1\rangle$	$ J,2\rangle$	$ J+1,1\rangle$	$ J+1,2\rangle$	$ J+2,2\rangle$
$ J-2,2\rangle$		0	0		0		0	0	
$ J-1,1\rangle$	0		0	0	0	0		0	0
$ J-1,2\rangle$	0	0		0	0	0	0		0
$ J,0\rangle$		0	0		0		0	0	
$ J,1\rangle$	0	0	0	0		0	0	0	0
$ J,2\rangle$		0	0		0		0	0	
$ J+1,1\rangle$	0		0	0	0	0		0	0
$ J+1,2\rangle$	0	0		0	0	0	0		0
$ J+2,2\rangle$		0	0		0		0	0	

Tabelle D.1: Explizite Darstellung der Auswahlregeln für die $\rho\rho$ -Streuung. Die Nullen kennzeichnen die Potentialteile, die generell verschwinden. Für festgelegten Isospin und Drehimpuls können weitere Übergänge verboten sein. Die Kets bezeichnen Zustände $|LS\rangle$.

Anhang E

Dalitz-Diagramme und ihre Projektionen

In der Analyse von Streuprozessen $AB \rightarrow 123$ mit drei Teilchen im Endzustand hat sich die Darstellung als Dalitz-Diagramm etabliert, da sie den Phasenraum flach darstellt. In Experimenten mit wenigen Ereignissen in der Analyse ist es jedoch nicht möglich, diesen zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt zu bestimmen. Daher werden in solchen Fällen oft die Projektionen des Dalitz-Diagramms auf seine Achsen und die Winkelverteilungen zwischen den einzelnen Teilchenimpulsen betrachtet, um eine hinreichend große statistische Grundgesamtheit zu haben. Hier sollen daher die Formeln zur Berechnung der entsprechenden Observablen angegeben werden. In der Darstellung folgen wir dabei weitestgehend [64, 86, 158]. Ausgehend von dem Übergangsmatrixelement $\mathcal{M}(p_A, p_B, p_1, p_2, p_3) = \langle 1, 2, 3 | \mathcal{M} | A, B \rangle$ definiert man den differentiellen Wirkungsquerschnitt durch:

$$d\sigma = (2\pi)^4 \delta^4 \left(-p_A - p_B + \sum_{i=1}^3 p_i \right) \frac{\mathcal{B}}{|\vec{j}_{\text{in}}|} \prod_{i=1}^3 \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3 2E_{p_i}} \overline{|\mathcal{M}|^2} \quad (\text{E.1})$$

In dieser Formel steht $\mathcal{B} = 1/n!$ für den Bose-Symmetriefaktor, der die Normierung für n identische Teilchen im Ausgangszustand herstellt. $|\vec{j}_{\text{in}}|$ steht für den einlaufenden Teilchenfluss, E_i für die Energie der Teilchen auf ihrer Massenschale und p_i für den Impuls des im Subskript bezeichneten Teilchens. Das überstrichene Übergangsmatrixelement steht für die Mittelung über die möglichen Spinkombinationen der einlaufenden Teilchen und die Summe über die möglichen Spinzustände der auslaufenden Teilchen (Gleichung (E.2)).

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{(2s_A + 1)} \frac{1}{(2s_B + 1)} \sum_{s_A^z = -s_A}^{s_A} \sum_{s_B^z = -s_B}^{s_B} \sum_{s_1^z = -s_1}^{s_1} \sum_{s_2^z = -s_2}^{s_2} \sum_{s_3^z = -s_3}^{s_3} |\mathcal{M}|^2 \quad (\text{E.2})$$

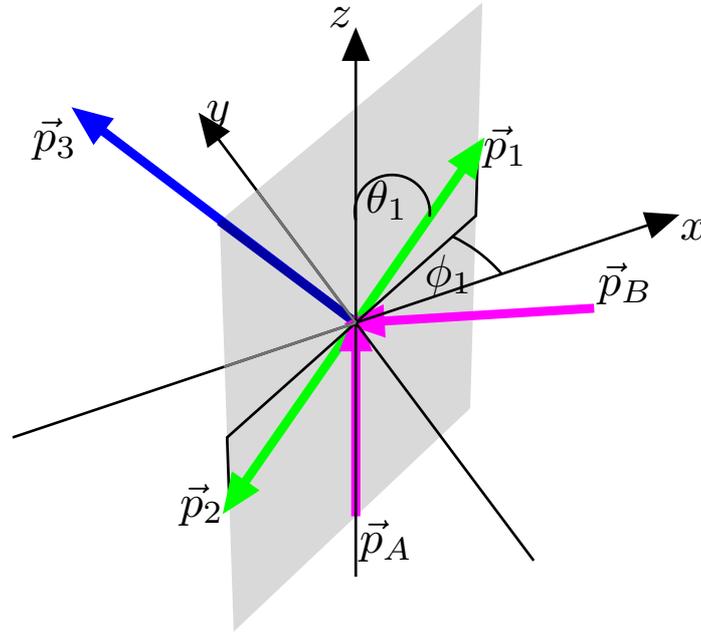


Abbildung E.1: Festlegung der Winkel ϕ_1 und θ_1 . Das Koordinatensystem ist im Schwerpunktsystem der auslaufenden Teilchen 1 und 2 definiert mit der z -Achse in Strahlrichtung und dem Impuls des auslaufenden Teilchens 3 in der xz -Ebene

Hierbei bezeichnet s_i , s_i^z den Spin, die Spinprojektion von Teilchen i . Um nun den totalen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, muss man über die Impulse der auslaufenden Teilchen integrieren. Die Deltafunktion sorgt dafür, dass man vier Integrationen trivial ausführen kann. Da wir nur unpolarisierte Observable betrachten, ist unser System ferner rotationssymmetrisch um die Strahlachse und wir können eine weitere Integration ausführen. Damit erhalten wir den totalen Wirkungsquerschnitt als Funktion der in Abbildung E.1 beschriebenen Winkel und der Invarianten $s_{12} = (p_1 + p_2)^2$ und $t = (p_B - p_3)$:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{\mathcal{B}}{4|\vec{p}_A^{cm_{AB}}|\sqrt{s}} \frac{1}{(2\pi)^5} \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \int \frac{d^3p_2}{2E_2} \int \frac{d^3p_3}{2E_3} \delta^4 \left(p_a + p_B - \sum_{i=1}^3 p_i \right) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \\
 &= \frac{\mathcal{B}}{16s|\vec{p}_A^{cm_{AB}}|^2} \frac{\pi}{(2\pi)^5} \int_{s_{12}^{min}}^{s_{12}^{max}} ds_{12} \int_{t^{min}}^{t^{max}} dt \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_{-1}^1 d\cos\theta_1 \left[\frac{|\vec{p}_1|}{4\sqrt{s_{12}}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \right]^{cm_{12}}
 \end{aligned} \tag{E.3}$$

Hierbei geben die Indizes von cm_{xy} jeweils an, auf welches Ruhesystem von zwei Teilchen xy sich eine Größe bezieht und $s = (p_B + p_B)^2$ ist das Quadrat der Gesamtenergie des Systems. Die Grenzen der Phasenraumintegration sind entweder durch die jeweiligen experimentellen Gegebenheiten inklusive von Schnitten, die bei der Analyse

gemacht werden, definiert oder sie stimmen mit den Grenzen des Phasenraums, die in den Gleichungen (E.4)-(E.7) angeführt sind, überein.

$$s_{12}^{min} = (m_1 + m_2)^2 \quad (\text{E.4})$$

$$s_{12}^{max} = (\sqrt{s} - m_3)^2 \quad (\text{E.5})$$

$$t^{min} = m_B^2 + m_3^2 - 2E_B^{cm} E_3^{cm} - 2|\vec{p}_3^{cm}| |\vec{p}_B^{cm}| \quad (\text{E.6})$$

$$t^{max} = m_B^2 + m_3^2 - 2E_B^{cm} E_3^{cm} + 2|\vec{p}_3^{cm}| |\vec{p}_B^{cm}| \quad (\text{E.7})$$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die hier aufgeführten Grenzen für t eine implizite Abhängigkeit von s_{12} über die Variablen p_3^{cm} und E_3^{cm} aufweisen.

Damit erhalten wir direkt den einfachdifferenziellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/ds_{12}$ (E.8) und analog auch $d\sigma/d\cos\theta_1$ sowie $d\sigma/d\phi_1$.

$$\frac{d\sigma}{ds_{12}} = \frac{\mathcal{B}}{16|\vec{p}_A^{cm}|^2 s} \frac{\pi}{(2\pi)^5} \int_{t^{min}}^{t^{max}} dt \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_{-1}^1 d\cos\theta_1 \left[\frac{|\vec{p}_1|}{4\sqrt{s_{12}}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \right]^{cm_{12}} \quad (\text{E.8})$$

Gleiches gilt für $d\sigma/dt$ (Gleichung (E.9)) nur muss man hierbei auf die t -Abhängigkeit der Grenzen in der ds_{12} -Integration achten.

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\mathcal{B}}{16|\vec{p}_A^{cm}|^2 s} \frac{\pi}{(2\pi)^5} \int_{\tilde{s}_{12}^{min}}^{\tilde{s}_{12}^{max}} ds_{12} \int_0^{2\pi} d\phi_1 \int_{-1}^1 d\cos\theta_1 \left[\frac{|\vec{p}_1|}{4\sqrt{s_{12}}} |\overline{\mathcal{M}}|^2 \right]^{cm_{12}} \quad (\text{E.9})$$

Hierbei definiert

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{12}^{max/min} = & \frac{1}{2m_B^2} \left[(m_B^2 - m_3^2)(s - m_B^2) + m_A^2(m_B^2 + m_3^2) + (s + m_B^2 - m_A^2)t \right. \\ & \left. \pm 2\sqrt{s} |\vec{p}_A^{cm}| \sqrt{(t - (m_B + m_3)^2)(t - (m_B - m_3)^2)} \right] \end{aligned}$$

die Grenzen \tilde{s}_{12}^{max} und \tilde{s}_{12}^{min} .

Eine weitere übliche Darstellung für die Wirkungsquerschnitte einer $AB \rightarrow 123$ Streureaktion ist das Dalitz-Diagramm. Zur Formulierung der hierzu verwendeten differentiellen Wirkungsquerschnitte ist es sinnvoll, die Winkel ϕ und θ neu zu definieren. Die neue Lage der Winkel ist in Abbildung E.2 zu sehen. Mit dieser Definition folgt nun für den im Dalitz-Diagramm dargestellten differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/ds_{12}ds_{13}$ Gleichung (E.10).

$$\frac{d\sigma}{ds_{12}ds_{13}} = \frac{\mathcal{B}}{64|\vec{p}_A^{cm}| \sqrt{s^3}} \frac{\pi}{(2\pi)^5} \int_0^{2\pi} d\tilde{\phi}_1 \int_{-1}^1 d\cos\tilde{\theta}_1 \left[|\overline{\mathcal{M}}|^2 \right]^{cm_{12}} \quad (\text{E.10})$$

Die Phasenraumgrenzen für s_{12} haben wir schon in (E.4) und (E.5) angeführt und es

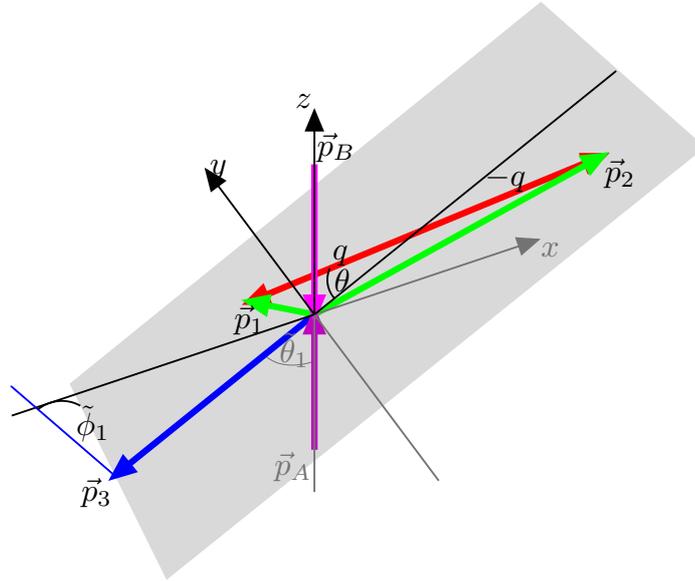


Abbildung E.2: Festlegung der Winkel $\tilde{\phi}_1$ und $\tilde{\theta}_1$. Das Koordinatensystem ist im Gesamtschwerpunktsystem definiert mit der z -Achse in Strahlrichtung und dem Impuls des auslaufenden Teilchen 3 in der xz -Ebene

verbleibt, die Phasenraumgrenzen für s_{13} und ihre Abhängigkeit von s_{12} zu erläutern:

$$s_{13}^{max/min} = (E_1^{cm12} + E_3^{cm12})^2 - \left(\sqrt{(E_1^{cm12})^2 - m_1^2} \mp \sqrt{(E_3^{cm12})^2 - m_3^2} \right)^2 \quad (\text{E.11})$$

$$E_1^{cm12} = \frac{s_{12} + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s_{12}}} \quad (\text{E.12})$$

$$E_3^{cm12} = \frac{s - s_{12} - m_3^2}{2\sqrt{s_{12}}} \quad (\text{E.13})$$

Die Projektion $d\sigma/ds_{12}$ bzw. $d\sigma/ds_{13}$ berechnet man nun durch Ausintegrieren des jeweils anderen invarianten Massequadrates. Die etwaige Abhängigkeit der Grenzen zu s_{12} von s_{13} erhält man durch Umbenennung der Teilchen in (E.12) und (E.13). Mit den bisherigen Formeln ist die Berechnung von Winkelverteilungen in den Winkeln θ_1 , $\tilde{\theta}_1$, ϕ_1 sowie $\tilde{\phi}_1$ bereits hinreichend erklärt. Den Fall von Verteilungen bezüglich der Winkel zwischen den auslaufenden Teilchen wollen wir hier anhand von θ (Abbildung E.2) beispielhaft erläutern. Wir haben θ als Beispiel gewählt, da er vom Informationsgehalt äquivalent zu $\angle \vec{p}_1 \vec{q}$, $\angle \vec{p}_1 \vec{p}_3$, ... ist aber im Gegensatz zu diesen in seinem Verhalten nicht durch den Phasenraum dominiert ist. Die Transformation von einem beliebigen vielfach differentiellen Wirkungsquerschnitt in einen anderen erfolgt nach

$$\frac{d\sigma}{dx_1 \cdots dx_n} = \frac{d\sigma}{dy_1 \cdots dy_n} (T(x_1, \dots, x_n)) \cdot |\det T'(x_1, \dots, x_n)|. \quad (\text{E.14})$$

Hierbei ist T die Transformation von der x_i -Basis in die Basis der y_i oder genauer ein Diffeomorphismus zwischen den Karten X und Y [113]. Da wir nur an einem einfach differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\theta$ interessiert sind, reduziert sich die Determinante auf eine einfache Ableitung. Von der bekannten Form für $d\sigma/ds_{13}(s_{12}, \phi, \cos\theta_1)$ ausgehend gilt also:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(s_{12}, \phi_1, \cos\theta_1) = \left(\frac{d\sigma}{ds_{13}} \left| \frac{\partial s_{13}}{\partial \cos\theta} \right| \right) (s_{12}, \phi_1, \cos\theta_1) \quad (\text{E.15})$$

Obwohl damit die Winkelverteilung erklärt ist, wollen wir hier noch die explizite Form von $s_{13}(\theta)|_{(s_{12}, \phi_1, \cos\theta_1)}$ sowie $\partial s_{13}/\partial \cos\theta|_{(s_{12}, \phi_1, \cos\theta_1)}$ angeben.

$$s_{13} = \left\{ \frac{s_{12}^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 + s_{12}(p_3^2 - 2(m_1^2 + m_2^2)) - 2p_3^2(m_1^2 + m_2^2)^2}{4(s_{12} + p_3^2(1 - \cos^2\theta))} + \left(\frac{p_3 \cos\theta(m_1^2 - m_2^2)}{8(s_{12} + p_3^2(1 - \cos^2\theta)^2)} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{p_3 \cos\theta(m_1^2 - m_2^2)}{8(s_{12} + p_3^2(1 - \cos^2\theta))} \quad (\text{E.16})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{13}}{\partial \cos\theta} &= -\frac{16 \cos^2\theta p_3^3(m_1^2 - m_2^2)}{(8(\cos^2\theta - 1)p_3^2 - 8s_{12})^2} + \frac{p_3(m_1^2 - m_2^2)}{8((\cos^2\theta - 1)p_3^2 - s_{12})} + \frac{a + b}{c} \quad (\text{E.17}) \\ a &= \frac{\left[2 \cos\theta p_3^2(m_1^2 - m_2^2)^2 - 32 \cos\theta p_3^2(m_1^4 + (m_2^2 - s_{12})^2 - 2m_1^2(m_2^2 + s_{12}) + p_3^2(s_{12} - 2(m_1^2 + m_2^2))) \right]}{(s_{12} - p_3^2(\cos^2\theta - 1))^2} \\ b &= \frac{\left[4 \cos\theta p_3^2(\cos^2\theta p_3^2(m_1^2 - m_2^2)^2 + 16((1 - \cos^2\theta)p_3^2 + s_{12}) \cdot (m_1^4 + (m_2^2 - s_{12})^2 - 2m_1^2(m_2^2 + s_{12}) + p_3^2(s_{12} - 2(m_1^2 + m_2^2)))) \right]}{(1 - \cos^2\theta)p_3^2 + s_{12}} \\ c &= 16 \sqrt{\frac{\left[\cos^2\theta p_3^2(m_1^2 - m_2^2)^2 + 16((1 - \cos^2\theta)p_3^2 + s_{12}) \cdot (m_1^4 + (m_2^2 - s_{12})^2 - 2m_1^2(m_2^2 + s_{12}) + p_3^2(s_{12} - 2(m_1^2 + m_2^2))) \right]}{((1 - \cos^2\theta)p_3^2 + s_{12})^2}} \end{aligned}$$

Hierbei steht p_3 für den Impuls des auslaufenden Teilchens Nummer 3 auf seiner Massenschale.

$$p_3 = |\vec{p}_3^{cm}| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{(s - (m_3 + \sqrt{s_{12}})^2)(s - (m_3 - \sqrt{s_{12}})^2)} \quad (\text{E.18})$$

Literaturverzeichnis

- [1] R. Aaron, R.D. Amado, und J.E. Young. Relativistic Three-Body Theory with Application to πN Scattering. *Phys. Rev.*, 174:2022, 1968.
- [2] K. Abe et al. Measurements of the D_{sJ} resonance properties. *Phys. Rev. Lett.*, 92:012002, 2004.
- [3] M. A. Abolins et al. Search for $t = 1$ bosons near 1 GeV in the reaction $pp \rightarrow dmm$. *Phys. Rev. Lett.*, 25:469–473, 1970.
- [4] N. N. Achasov, S. A. Devyanin, und G. N. Shestakov. The $S^*-\delta^0$ mixing as the threshold phenomenon. *Phys. Lett.*, B88:367, 1979.
- [5] N. N. Achasov und V. V. Gubin. Interference pattern analysis in the decays $\phi \rightarrow \gamma\pi\eta$ and $\phi \rightarrow \gamma\pi^0\pi^0$. *Phys. Rev.*, D63:094007, 2001.
- [6] N. N. Achasov und V. N. Ivanchenko. On a search for four quark states in radiative decays of the ϕ -meson. *Nucl. Phys.*, B315:465, 1989.
- [7] N. N. Achasov und G. N. Shestakov. New explanation of the GAMS results on the $f_0(980)$ production in the reaction $\pi^- p \rightarrow \pi^0\pi^0 n$. *Phys. Rev.*, D58:054011, 1998.
- [8] I.R. Afnan und Stelbovics A.T. Faddeev equations for the coupled $NN - \pi NN$ system. *Phys. Rev. C*, 23(4):1384, 1981.
- [9] E. M. Aitala et al. Experimental evidence for a light and broad scalar resonance in $D^+ \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^+$ decay. *Phys. Rev. Lett.*, 86:770–774, 2001.
- [10] D. Alde et al. Study of the $f_0(995)$ resonance in the $p i^0 \pi^0$ decay channel. *Z. Phys.*, C66:375–378, 1995.
- [11] D. Alde et al. Study of the $\pi^0\pi^0$ system in pp central collisions at 450 GeV/c. *Phys. Lett.*, B397:350–356, 1997.

- [12] D. Alde et al. Study of the $\pi^0\pi^0$ system with the GAMS-4000 spectrometer at 100 GeV/c. *Eur. Phys. J.*, A3:361–371, 1998.
- [13] A. Aloisio et al. Study of the decay $\phi \rightarrow \pi^0\pi^0\gamma$ with the KLOE detector. *Phys. Lett.*, B537:21–27, 2002.
- [14] H. Alvensleben et al. Observation of coherent interference pattern between rho and omega decays. *Phys. Rev. Lett.*, 25:1373–1377, 1970.
- [15] H. Alvensleben et al. Precise determination of rho-omega interference parameters from photoproduction of vector mesons off nucleon and nuclei. *Phys. Rev. Lett.*, 27:888–892, 1971.
- [16] A. Anastassov et al. First measurement of $\Gamma(D^{*+})$ and precision measurement of $m(D^{*+}) - m(D^0)$. *Phys. Rev.*, D65:032003, 2002.
- [17] V. V. Anisovich. Systematics of quark antiquark states and scalar exotic mesons. *Phys. Usp.*, 47:45–67, 2004.
- [18] V. V. Anisovich und A. V. Sarantsev. K-matrix analysis of the $(IJ^{PC} = 00^{++})$ -wave in the mass region below 1900 MeV. *Eur. Phys. J.*, A16:229–258, 2003.
- [19] V. V. Anisovich, A. V. Sarantsev, A. A. Kondashov, Yu. D. Prokoshkin, und S. A. Sadovsky. Two resonance structure of the $(IJ^{PC} = 00^{++})$ $\pi\pi$ amplitude in a mass region around 1 GeV. *Phys. Lett.*, B355:363–373, 1995.
- [20] T. A. Armstrong et al. Study of the $\eta\pi^+\pi^-$ system centrally produced in the reaction $pp \rightarrow p(f)(\eta\pi^+\pi^-)p(s)$ at 300 GeV/c. *Z. Phys.*, C52:389–396, 1991.
- [21] B. Aubert et al. Observation of a narrow meson decaying to $D_s^+\pi^0$ at a mass of 2.32 GeV/c². *Phys. Rev. Lett.*, 90:242001, 2003.
- [22] B. Aubert et al. Measurement of the $D_{sJ}^*(2317)^+$ and $D_{sJ}(2460)^+$ properties in $e^+e^- \rightarrow c\bar{c}$ production. hep-ex/0408067, 2004.
- [23] Ya. I. Azimov und K. Goeke. Decay properties of new D -mesons. *Eur. Phys. J.*, A21:501–506, 2004.
- [24] A. Bahaoui, C. Fayard, T. Mizutani, und B. Saghai. Three-body approach to the K^-d scattering length in particle basis. *Phys. Rev.*, C66:057001, 2002.
- [25] A. Bahaoui, C. Fayard, T. Mizutani, und B. Saghai. Low energy $\bar{K}N$ interactions and Faddeev calculation of the K^-d scattering length in isospin and particle bases. *Phys. Rev.*, C68:064001, 2003.

-
- [26] Gunnar S. Bali. The $D_{sJ}(2317)^+$: What can the lattice say? *Phys. Rev.*, D68:071501, 2003.
- [27] William A. Bardeen, Estia J. Eichten, und Christopher T. Hill. Chiral multiplets of heavy-light mesons. *Phys. Rev.*, D68:054024, 2003.
- [28] T. Barnes, F. E. Close, und H. J. Lipkin. Implications of a DK molecule at 2.32 GeV. *Phys. Rev.*, D68:054006, 2003.
- [29] V. Baru, J. Haidenbauer, C. Hanhart, Yu. Kalashnikova, und A. Kudryavtsev. Evidence that the $a_0(980)$ and $f_0(980)$ are not elementary particles. *Phys. Lett.*, B586:53–61, 2004.
- [30] D. Benaksas et al. Omega production by e^+e^- annihilation. *Phys. Lett.*, B42:507–510, 1972.
- [31] D. Benaksas et al. $\pi^+\pi^-$ production by e^+e^- annihilation in the ρ energy range with the Orsay storage ring. *Phys. Lett.*, B39:289–293, 1972.
- [32] V. Bernard, Norbert Kaiser, und Ulf-G. Meißner. Novel approach to pion and eta production in proton proton collisions. *Eur. Phys. J.*, A4:259–275, 1999.
- [33] D. Besson et al. Observation of a narrow resonance of mass 2.46 GeV/ c^2 decaying to $D_s^{*+}\pi^0$ and confirmation of the $D_{sJ}^*(2317)$ state. *Phys. Rev.*, D68:032002, 2003.
- [34] Eef van Beveren und George Rupp. Scalar mesons within a model for all non-exotic mesons. hep-ph/0201006, 2002.
- [35] Eef van Beveren und George Rupp. Explaining the $D_{sJ}^*(2317)^+$. *AIP Conf. Proc.*, 687:86–95, 2003.
- [36] R.K. Bhaduri. *Models of the Nucleon*. Addison-Wesley, Reading, 1988.
- [37] P. J. Biggs, R. W. Clift, E. Gabathuler, P. Kitching, und R. E. Rand. Measurement of the magnitude and phase of $\rho\omega$ interference in $\pi^+\omega$ -photoproduction from carbon. *Phys. Rev. Lett.*, 24:1201–1205, 1970.
- [38] P. J. Biggs et al. Observation of $\rho\omega$ -interference in the photoproduction of electron-positron pairs from carbon and a measurement of the $\rho\omega$ -phase. *Phys. Rev. Lett.*, 24:1197–1201, 1970.
- [39] R. Blankenbecler und R. Sugar. Linear Integral Equations for Relativistic Multichannel Scattering. *Phys. Rev.*, 14(4):1051, 1966.

- [40] D.M. Brink und G.R. Satchler. *Angular Momentum*. Oxford Library of the Physical Sciences, Oxford, 1968.
- [41] Thomas E. Browder, Sandip Pakvasa, und Alexey A. Petrov. Comment on the new $D_s^{(*)+}\pi^0$ resonances. *Phys. Lett.*, B578:365–368, 2004.
- [42] M. Büscher et al. Investigation of the neutral scalar mesons $a_0/f_0(980)$ in the reaction $dd \rightarrow \alpha K^+K^-$ with ANKE. Proposal / Beam-Time Request #140, Forschungszentrum Jülich, March 2004.
- [43] M. Büscher, C. Hanhart, S. Krewald, und F.P. Sassen. Reply to the referee report on experiment #140. Technical report, Forschungszentrum Jülich, 2004.
- [44] N.M. Cason et al. Study of $\pi - \pi$ scattering amplitudes in the reaction $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++}\pi^0\pi^0$ at 8.0 GeV. *Phys. Rev. D*, 28(7):1586, 1983.
- [45] Chuan-Tsung Chan, E. M. Henley, und T. Meissner. $\pi - \eta$ mixing from QCD sum rules. *Phys. Lett.*, B343:7–12, 1995.
- [46] Frank E. Close und Nils A. Tornqvist. Scalar mesons above and below 1-GeV. *J. Phys.*, G28:R249–R267, 2002.
- [47] P. Colangelo und F. De Fazio. Understanding $D_{sJ}(2317)$. *Phys. Lett.*, B570:180–184, 2003.
- [48] P. Colangelo, F. De Fazio, und R. Ferrandes. Excited charmed mesons: Observations, analyses and puzzles. *Mod. Phys. Lett.*, A19:2083–2102, 2004.
- [49] Sidney R. Coleman und S. L. Glashow. Departures from the eightfold way: Theory of strong interaction symmetry breakdown. *Phys. Rev.*, 134:B671–B681, 1964.
- [50] Sidney R. Coleman und Sheldon Lee Glashow. Electrodynamical properties of baryons in the unitary symmetry scheme. *Phys. Rev. Lett.*, 6:423, 1961.
- [51] Sidney R. Coleman und H. J. Schnitzer. Mixing of elementary particles. *Phys. Rev.*, 134:B863–B872, 1964.
- [52] S. A. Coon und R. C. Barrett. $\rho\omega$ mixing in nuclear charge asymmetry. *Phys. Rev.*, C36:2189–2194, 1987.
- [53] S. A. Coon und M. D. Scadron. Vector meson dominance and $\rho\omega$ mixing. *Phys. Rev.*, C58:2958–2962, 1998.

- [54] R. H. Dalitz, T. C. Wong, und G. Rajasekaran. Model Calculation for the $Y_0^*(1405)$ Resonance State. *Phys. Rev.*, 153:1617–1623, 1967.
- [55] F. De Fazio. Understanding $D_{sJ}^*(2317)$, $D_{sJ}(2460)$. hep-ph/0407296, 2004.
- [56] A. De Rujula, Howard Georgi, und S. L. Glashow. Molecular charmonium: A new spectroscopy? *Phys. Rev. Lett.*, 38:317, 1977.
- [57] A. Deloff. ηd and $K^- d$ zero energy scattering: A Faddeev approach. *Phys. Rev.*, C61:024004, 2000.
- [58] Massimo Di Pierro und Estia Eichten. Excited heavy-light systems and hadronic transitions. *Phys. Rev.*, D64:114004, 2001.
- [59] J.F. Donoghue, Golowich E., und B.R. Holstein. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.
- [60] A. Dougall, R. D. Kenway, C. M. Maynard, und C. McNeile. The spectrum of D_s mesons from lattice QCD. *Phys. Lett.*, B569:41–44, 2003.
- [61] O. Dumbrajs et al. . *Nucl. Phys. B*, 216:277, 1983.
- [62] G. Ecker, J. Gasser, A. Pich, und E. de Rafael. The role of resonances in chiral perturbation theory. *Nucl. Phys.*, B321:311, 1989.
- [63] A.R. Edmonds. *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [64] S. Eidelman, et al. Review of Particle Physics. *Physics Letters B*, 592:1, 2004.
- [65] A. Etkin et al. Amplitude analysis of the $K_S^0 K_S^0$ system produced in the reaction $\pi^- p \rightarrow K_S^0 K_S^0 n$ at 23-GeV/c. *Phys. Rev.*, D25:1786, 1982.
- [66] A. V. Evdokimov et al. First observation of a narrow charm-strange meson $D_{sJ}(2632)^+ \rightarrow D_s^+ \eta$ and $D^0 K^+$. hep-ex/0406045, 2004.
- [67] Fayyazuddin und Riazuddin. Some comments on narrow resonances $D/s1^*$ (2.46-GeV/c**2) and $D/s0$ (2.317-GeV/c**2). *Phys. Rev.*, D69:114008, 2004.
- [68] P. Fedorets et al. Private Kommunikation.
- [69] N. Fettes. Pion nucleon physics in chiral perturbation theory. JUL-3814.
- [70] Leslie L. Foldy und Siegfried A. Wouthuysen. On the Dirac theory of spin 1/2 particle and its nonrelativistic limit. *Phys. Rev.*, 78:29–36, 1950.

- [71] C. D. Froggatt und J. L. Petersen. Phase shift analysis of $\pi^+\pi^-$ scattering between 1.0-GeV and 1.8-GeV based on fixed momentum transfer analyticity. *Nucl. Phys.*, B129:89, 1977.
- [72] C.D. Froggatt und J.L. Peterson. Phase-Shift Analysis of $\pi^+\pi^-$ Scattering between 1.1 and 1.8 GeV based on fixed momentum analyticity. *Nucl. Phys. B*, 91:454, 1975.
- [73] S. Gardner und H. B. O'Connell. $\rho-\omega$ mixing and the pion form factor in the time-like region. *Phys. Rev.*, D57:2716–2726, 1998.
- [74] J. Gasser und H. Leutwyler. Quark masses. *Phys. Rept.*, 87:77–169, 1982.
- [75] J. Gasser und H. Leutwyler. Chiral perturbation theory: Expansions in the mass of the strange quark. *Nucl. Phys.*, B250:465, 1985.
- [76] J. Gasser und H. Leutwyler. $\eta \rightarrow 3\pi$ to one loop. *Nucl. Phys.*, B250:539, 1985.
- [77] J. Gasser und H. Leutwyler. Low-energy expansion of meson form-factors. *Nucl. Phys.*, B250:517–538, 1985.
- [78] J. B. Gay et al. Production and decay properties of the $\delta(970)$ meson. *Phys. Lett.*, B63:220, 1976.
- [79] Stephen Godfrey. Using radiative transitions to test the $^{1(3)}P_{(0)}(c\bar{s})$ nature of the $D_{sJ}^*(2317)^+$ state. *Phys. Lett.*, B568:254–260, 2003.
- [80] J. Goldstone. Field theories with 'superconductor' solutions. *Nuovo Cim.*, 19:154–164, 1961.
- [81] M. Gourdin, L. Stodolsky, und F. M. Renard. Electromagnetic mixing of rho, omega mesons. *Phys. Lett.*, B30:347–350, 1969.
- [82] G. Grayer et al. High statistics study of the reaction $\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$, Apparatus, Method of Analysis, and general Features of results at 17 GeV/c. *Nucl. Phys. B*, 75:189, 1974.
- [83] Anthony M. Green und S. Wycech. On eta pi mixing close to the eta-helium threshold. *Phys. Rev.*, C68:061601, 2003.
- [84] V. Yu. Grishina, L. A. Kondratyuk, M. Buscher, und W. Cassing. Near-threshold production of $a_0(980)$ mesons in the reaction $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$, nucl-th/0402093. nucl-th/0402093, 2004.

- [85] D. J. Gross und Frank Wilczek. Asymptotically free gauge theories. 1. *Phys. Rev.*, D8:3633–3652, 1973.
- [86] F. Gross. *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*. Wiley Interscience, New York, 1993.
- [87] J. Gunter et al. Analysis of the $\pi^0\pi^0$ final state in the π^-p reactions at 18.3 GeV/c. hep-ex/9609010, 1996.
- [88] J. Gunter et al. A partial wave analysis of the $\pi^0\pi^0$ system produced in π^-p charge exchange collisions. *Phys. Rev.*, D64:072003, 2001.
- [89] C. Hanhart. Investigating scalar meson mixing in nucleon nucleon and deuteron deuteron collisions. *AIP Conf. Proc.*, 688:61–71, 2004.
- [90] C. Hanhart. Meson production in nucleon nucleon collisions close to the threshold. *Phys. Rept.*, 397:155–256, 2004.
- [91] T. Hatsuda, E. M. Henley, T. Meissner, und G. Krein. The Off-shell rho - omega mixing in the QCD sum rules. *Phys. Rev.*, C49:452–463, 1994.
- [92] W. Hoogland et al. Measurement and analysis of the $\pi^+\pi^+$ system produced at small momentum transfer in the reaction $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^+n$ at 12.5-GeV. *Nucl. Phys.*, B126:109, 1977.
- [93] Dae Sung Hwang und Do-Won Kim. Mass of $D_{s,J}^*(2317)$ and coupled channel effect. hep-ph/0408154, 2004.
- [94] B. Hyams et al. $\pi\pi$ -Phaseshift analysis from 600 to 1900 MeV. *Nucl. Phys. B*, 64:134, 1973.
- [95] Nathan Isgur und Mark B. Wise. Spectroscopy with heavy quark symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1130–1133, 1991.
- [96] Shin Ishida, Muneyuki Ishida, Tomohito Maeda, Masuho Oda, und Kenji Yamada. The $D_s(2317)$ and $D_s(2459)$ mesons in $\tilde{U}(12)$ classification scheme of hadrons. hep-ph/0408136, 2004.
- [97] M. Jacob und G. C. Wick. On the general theory of collisions for particles with spin. *Ann. Phys.*, 7:404–428, 1959.
- [98] G. Janßen. Ein mesonentheoretisches Modell für die $\pi\rho$ -Wechselwirkung und der πNN -Formfaktor. Jül 2734, Forschungszentrum Jülich GmbH, 1993.

- [99] G. Janßen. Meson-Meson-Prozesse in der starken Wechselwirkung. Jül 3065, Forschungszentrum Jülich GmbH, 1995.
- [100] G. Janssen, B. C. Pearce, K. Holinde, und J. Speth. On the structure of the scalar mesons $f_0(975)$ and $a_0(980)$. *Phys. Rev.*, D52:2690–2700, 1995.
- [101] Ch. J. Joachain. *Quantum Collision Theory*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975.
- [102] Norbert Kaiser, P. B. Siegel, und W. Weise. Chiral dynamics and the low-energy kaon - nucleon interaction. *Nucl. Phys.*, A594:325–345, 1995.
- [103] Norbert Kaiser, T. Waas, und W. Weise. $SU(3)$ chiral dynamics with coupled channels: Eta and kaon photoproduction. *Nucl. Phys.*, A612:297–320, 1997.
- [104] S. S. Kamalov, E. Oset, und A. Ramos. Chiral unitary approach to the K -deuteron scattering length. *Nucl. Phys.*, A690:494–508, 2001.
- [105] R. Kaminski, L. Lesniak, und B. Loiseau. Three channel model of meson meson scattering and scalar meson spectroscopy. *Phys. Lett.*, B413:130–136, 1997.
- [106] R. Kaminski, L. Lesniak, und K. Rybicki. A joint analysis of the S -wave in the $\pi^+\pi^-$ and $\pi^0\pi^0$ data. *Eur. Phys. J. direct*, C4:4, 2002.
- [107] Ken Kawarabayashi und Mahiko Suzuki. Partially conserved axial vector current and the decays of vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 16:255, 1966.
- [108] J. D. Kimel und J. F. Owens. The role of a_1 exchange in the reaction $\pi^-p \rightarrow (\pi^+\pi^-)n$. *Nucl. Phys.*, B122:464, 1977.
- [109] V. Kleber. Private Kommunikation.
- [110] V. Kleber et al. $a_0(980)^+$ resonance production in $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ reactions close to threshold. *Phys. Rev. Lett.*, 91:172304, 2003.
- [111] Eberhard Klempt. Meson spectroscopy: Glueballs, hybrids and $Q\bar{Q}$ mesons. hep-ex/0101031, 2000.
- [112] Andrei A. Kondashov. A study of the $\pi^0\pi^0$ system produced in charge exchange and central collisions. *Nucl. Phys. Proc. Suppl.*, 74:180–185, 1999.
- [113] K. Königsberger. *Analysis 2*. Springer, Berlin; Heidelberg, 1993.
- [114] O. Krehl. $\pi\pi$ - und $\pi\eta$ -Streuung und die Mischung der skalaren Mesonen $a_0(980)$ und $f_0(980)$. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, 1996.

- [115] O. Krehl. Untersuchung der ersten Nukleon-resonanzen in der Pion-Nukleon Streuung. JÜl 3692, Forschungszentrum Jülich GmbH, 1999.
- [116] O. Krehl, R. Rapp, und J. Speth. Meson meson scattering: $K\bar{K}$ thresholds and $f_0(980)$ - $a_0(980)$ mixing. *Phys. Lett.*, B390:23–28, 1997.
- [117] S. Krewald, R. H. Lemmer, und F. P. Sassen. Lifetime of kaonium. *Phys. Rev.*, D69:016003, 2004.
- [118] A. D. Lahiff und I. R. Afnan. Unitarity and the Bethe-Salpeter equation. *Phys. Rev.*, C66:044001, 2002.
- [119] Paul Langacker. Quark mass differences and $\rho\omega$ mixing. *Phys. Rev.*, D20:2983, 1979.
- [120] T. D. Lee. Some special examples in renormalizable field theory. *Phys. Rev.*, 95:1329–1334, 1954.
- [121] Harry J. Lipkin. New predictions for multiquark hadron masses. *Phys. Lett.*, B580:50–53, 2004.
- [122] D. Lohse. Pion-Pion- und Pion-Kaon-Wechselwirkung im Mesonenaustauschbild. Spez 526, Kernforschungsanlage Jülich GmbH, 1989.
- [123] D. Lohse, J. W. Durso, K. Holinde, und J. Speth. Meson exchange model for pseudoscalar meson meson scattering. *Nucl. Phys.*, A516:513–548, 1990.
- [124] J.D. Louck und L.C. Biedenharn. Canonical Unit Adjoint Tensor Operators in $U(n)$. *J. Math. Phys.*, 11(8):2368, 1970.
- [125] R. Machleidt, K. Holinde, und C. Elster. The Bonn meson exchange model for the nucleon nucleon interaction. *Phys. Rept.*, 149:1–89, 1987.
- [126] Kim Maltman. q^2 dependence of meson mixing in few body charge symmetry breaking: $\pi^0\eta$ mixing to one loop in chiral perturbation theory. nucl-th/9211006, 1992.
- [127] Kim Maltman und T. Goldman. Los Alamos Report LA-UR-92-2910. 1992.
- [128] Kim Maltman, H. B. O’Connell, und Anthony G. Williams. Analysis of rho-omega interference in the pion form-factor. *Phys. Lett.*, B376:19–24, 1996.
- [129] B.R. Martin, Morgan D., und G. Shaw. *Pion-Pion Interactions in Particle Physics*. Academic Press, London, 1976.

- [130] Ulf-G. Meißner. Low-energy hadron physics from effective chiral lagrangians with vector mesons. *Phys. Rept.*, 161:213, 1988.
- [131] Ulf-G. Meißner. Recent developments in chiral perturbation theory. *Rept. Prog. Phys.*, 56:903–996, 1993.
- [132] Ulf-G. Meißner, E. Oset, und A. Pich. Chiral symmetry constraints on the K^+ interaction with the nuclear pion cloud. *Phys. Lett.*, B353:161–167, 1995.
- [133] Dirk Merten, Ralf Ricken, Matthias Koll, Bernard Metsch, und Herbert Pe-try. Weak decays of heavy mesons in a covariant quark model. *Eur. Phys. J.*, A13:477–491, 2002.
- [134] C. Müller-Groeling. Antikaon-Nukleon-Wechselwirkung im Mesonaustausch-bild. Spez 527, Kernforschungsanlage Jülich GmbH, 1989.
- [135] Maciej A. Nowak. Status of chiral doublers of heavy-light hadrons in light of recent BaBar CLEO, BELLE and SELEX D_s states. hep-ph/0407272, 2004.
- [136] Maciej A. Nowak, Mannque Rho, und I. Zahed. Chiral effective action with heavy quark symmetry. *Phys. Rev.*, D48:4370–4374, 1993.
- [137] W. Ochs. . PhD thesis, Ludwig-Maximilians-Universität München, 1973.
- [138] H. B. O’Connell, B. C. Pearce, Anthony W. Thomas, und Anthony G. Williams. Constraints on the momentum dependence of ρ – ω mixing. *Phys. Lett.*, B336:1–5, 1994.
- [139] H. B. O’Connell, Anthony W. Thomas, und Anthony G. Williams. Extrac-ting the rho omega mixing amplitude from the pion form-factor. *Nucl. Phys.*, A623:559–569, 1997.
- [140] S. Okubo. Phi meson and unitary symmetry model. *Phys. Lett.*, 5:165–168, 1963.
- [141] J. A. Oller und Ulf-G. Meißner. Chiral dynamics in the presence of bound states: Kaon nucleon interactions revisited. *Phys. Lett.*, B500:263–272, 2001.
- [142] J. A. Oller und E. Oset. Chiral symmetry amplitudes in the S-wave isoscalar and isovector channels and the sigma, $f_0(980)$, $a_0(980)$ scalar mesons. *Nucl. Phys.*, A620:438–456, 1997.
- [143] J. A. Oller und E. Oset. N/D description of two meson amplitudes and chiral symmetry. *Phys. Rev.*, D60:074023, 1999.

- [144] J. A. Oller, E. Oset, und J. R. Pelaez. Meson meson and meson baryon interactions in a chiral non-perturbative approach. *Phys. Rev.*, D59:074001, 1999.
- [145] E. Oset, Jose A. Oller, und Ulf-G. Meißner. Chiral dynamics and the reactions $pp \rightarrow dK^+\bar{K}^0$ and $pp \rightarrow d\pi^+\eta$. *Eur. Phys. J.*, A12:435–446, 2001.
- [146] E. Oset und A. Ramos. Non perturbative chiral approach to S -wave $\bar{K}N$ interactions. *Nucl. Phys.*, A635:99–120, 1998.
- [147] E. Oset, A. Ramos, und C. Bennhold. Low lying $S = -1$ excited baryons and chiral symmetry. *Phys. Lett.*, B527:99–105, 2002.
- [148] B. C. Pearce und B. F. Gibson. Observable effects of poles and shadow poles in coupled channel systems. *Phys. Rev.*, C40:902–911, 1989.
- [149] H. Pilkuhn. *The Interaction of Hadrons*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- [150] S.D. Protopopescu et al. $\pi\pi$ Partial-Wave Analysis from Reactions $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$ and $\pi^+p \rightarrow K^+K^-\Delta^{++}$ at $7.1\text{GeV}/c$. *Phys. Rev. D*, 7(5):1279, 1973.
- [151] A. Quenzer et al. Pion form-factor from 480-MeV to 1100-MeV (Talk). *Phys. Lett.*, B76:512–516, 1978.
- [152] V. Rabl, G. Campbell, und C. Wali. $SU(4)$ Clebsch-Gordan coefficients. *J. of Math. Phys.*, 16(12):2494, 1975.
- [153] R. Rapp. Pion-Pion Wechselwirkungen in dichter/heißer Materie. Jül 3195, Forschungszentrum Jülich GmbH, 1996.
- [154] F.M. Renard. *Springer Tracts in Modern Physics, 63*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1972.
- [155] Riazuddin und Fayyazuddin. Algebra of current components and decay widths of ρ and K^* mesons. *Phys. Rev.*, 147:1071–1073, 1966.
- [156] F.P. Sassen. Dispersionstheoretische Behandlung von 3-Meson-Vertexfunktionen. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, 2001.
- [157] S. Schneider. Zwei-Pion-Produktion am Proton in hadronischen Prozessen. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität, 2000.
- [158] S. Schneider. Pion Production and Absorption in πN and $3N$ Systems. Jül 4134, Forschungszentrum Jülich GmbH, 2004.

- [159] C. Schütz. Pion-Nukleon-Wechselwirkung und die Struktur von Nukleon-Resonanzen. Jül 3130, Forschungszentrum Jülich GmbH, 1995.
- [160] Marjorie Shapiro. Search for additional modes of and partners to the $D^{**}J(sJ)(2317)^+$ at CDF. *ECONF*, C030603:MAR06, 2003.
- [161] Edward V. Shuryak. The structure of hadrons containing a heavy quark. *Phys. Lett.*, B93:134–136, 1980.
- [162] Edward V. Shuryak. Hadrons containing a heavy quark and QCD sum rules. *Nucl. Phys.*, B198:83, 1982.
- [163] A. Sibirtsev, M. Büscher, V.Yu. Grishina, C. Hanhart, L.A. Kondratyuk, S. Krewald, und Ulf-G. Meißner. Determination of the $\bar{K}^0 d$ scattering length from the reaction $pp \rightarrow d\bar{K}^0 K^+$. *Phys. Lett.*, B601:132–136, 2004.
- [164] J.J. de Swart. The Octet Model and its Clebsch-Gordon Coefficients. *Rev. Mod. Phys.*, 35:916, 1963.
- [165] K. Takamatsu. $\pi^0\pi^0$ scattering amplitudes and phaseshifts obtained by π^-p charge exchange process. *Nucl. Phys. A*, 675:312c, 2000.
- [166] K. Terasaki. BABAR resonance and four-quark mesons. hep-ph/0309119, 2003.
- [167] G. D. Tikhomirov, I. A. Erofeev, O. N. Erofeeva, und V. N. Luzin. Resonances in the $K_S K_S K_L$ system produced in collisions of negative pions with a carbon target at a momentum of 40 GeV. *Phys. Atom. Nucl.*, 66:828–835, 2003.
- [168] M. Torres, R. H. Dalitz, und A. Deloff. K^- absorption reactions from rest in deuterium. *Phys. Lett.*, B174:213–218, 1986.
- [169] Res Urech. $\rho^0\omega$ mixing in chiral perturbation theory. *Phys. Lett.*, B355:308–312, 1995.
- [170] Eric W. Vaandering. Charmed hadron spectroscopy from FOCUS. hep-ex/0406044, 2004.
- [171] J. Vijande, F. Fernandez, A. Valcarce, und B. Silvestre-Brac. Tetraquark bound states in a constituent quark model and the nature of the $a_0(980)$ and $f_0(980)$. hep-ph/0206263, 2002.
- [172] S. Weinberg. Nonlinear Realization of Chiral Symmetry. *Phys. Rev.*, 166(5):1568, 1968.

- [173] Steven Weinberg. Elementary particle theory of composite particles. *Phys. Rev.*, 130:776–783, 1963.
- [174] Steven Weinberg. Quasiparticles and the Born Series. *Phys. Rev.*, 131:440–460, 1963.
- [175] Steven Weinberg. Evidence That the Deuteron Is Not an Elementary Particle. *Phys. Rev.*, 137:B672–678, 1965.
- [176] John D. Weinstein und Nathan Isgur. The $qq\bar{q}$ system in a potential model. *Phys. Rev.*, D27:588, 1983.
- [177] J. Wess und Bruno Zumino. Lagrangian method for chiral symmetries. *Phys. Rev.*, 163:1727–1735, 1967.
- [178] Edward Witten. Global aspects of current algebra. *Nucl. Phys.*, B223:422–432, 1983.
- [179] F. Q. Wu, B. S. Zou, L. Li, und D. V. Bugg. New study of the isotensor $\pi\pi$ interaction. *Nucl. Phys.*, A735:111–124, 2004.
- [180] Hideki Yukawa. On the interaction of elementary particles. *Proc. Phys. Math. Soc. Jap.*, 17:48–57, 1935.
- [181] I. Zahed und G. E. Brown. The Skyrme model. *Phys. Rept.*, 142:1–102, 1986.

Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. S. Krewald, der diese Arbeit mit zahlreichen Anregungen und ständiger Diskussionsbereitschaft begleitete.

Ebenso danke ich Herrn Prof Dr. U.-G. Meißner für die freundliche Übernahme des Korreferates und sein fortwährendes Interesse an meiner Arbeit.

Besonderer Dank gilt Linnea und Joseline Hanhart, dass sie mir von ihrer wertvollen Papagehörtheutemirzeit abgaben, sowie Herrn Dr. Ch. Hanhart, der in dieser Zeit mich mit konstruktiven Hinweisen zu dieser Arbeit versorgte.

Den Mitarbeitern des Instituts für Kernphysik gilt mein Dank für ihre Hilfsbereitschaft und die Schaffung einer guten Arbeitsatmosphäre, insbesondere Sonja Schneider, Bastian Kubis, Markus Walzl, Nadia Fettes, Matthias Frink, Lucas Platter, Andreas Motzke, Daniel Gammernann und Georg Schwiete. Weiterhin gilt den vielen diskussionsbereiten Gästen Dank für wertvolle Ratschläge in Bezug auf diese Arbeit.

Ferner möchte ich Herrn Prof. Dr. A.W. Thomas für seine Gastfreundschaft während meines Aufenthalts am “Special Research Centre for the Subatomic Structure of Matter” in Adelaide danken. In diesem Zusammenhang möchte ich auch die finanzielle Unterstützung durch die Deutsche Forschungsgemeinschaft anerkennen.

Auch meinen Freunden und meiner Schwester sei an dieser Stelle für viel Spass und Freude gedankt. Sie sorgen dafür, dass ich noch ein wenig über den Tellerrand der Physik hinausblicke.

Nicht zuletzt gilt mein Dank meinen Eltern, die mich in jeder Lebenslage unterstützen.