

# **Modellierung der aktiven Tastsensibilität natürlicher Zähne**

## **Dissertation**

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Claudia Nicolay, geb. Maschler

aus

Villingen-Schwenningen

**Bonn 2005**

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr. rer. nat. Max P. Baur
2. Referent: Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Alt

Tag der Promotion: 19. Oktober 2005

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn  
[http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss\\_online](http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online) elektronisch publiziert

Druck: Brohl Copy + Print GmbH, Kaiserslautern

Für Norbert, Matthias und Gereon

Para a minha mãe

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Aktive Tastsensibilität natürlicher Zähne und die Psychophysik</b>	<b>11</b>
2.1	Definition der aktiven Tastsensibilität	11
2.2	Physiologische Grundlagen	11
2.2.1	Aufbau des natürlichen Zahnes und des Parodontiums	11
2.2.2	Physiologische Zahnbeweglichkeit	12
2.2.3	Physiologische Grundlagen des interokklusalen Tastempfindens	12
2.3	Psychophysik und Schwellenwertbestimmung	13
2.3.1	Psychophysik: Einführung	13
2.3.2	Psychophysisches Schwellenwertmodell	15
2.3.3	Psychophysische Methoden zur Schwellenwertbestimmung	16
2.4	Psychophysische Experimente zur Bestimmung der aktiven Tastsensibilität	18
2.4.1	Absoluter Schwellenwert der aktiven Tastsensibilität natürlicher Zähne: Frühere und aktuelle Definitionen	18
2.4.2	Psychophysische Methoden in der Zahnmedizin	20
2.4.3	Zu berücksichtigende Faktoren bei der Durchführung psychophysischer Experimente in der Zahnmedizin	20
2.5	Zusammenfassung	21
<b>3</b>	<b>Das Experiment</b>	<b>23</b>
3.1	Beschreibung des Original-Experimentes ( <i>Tryde et al., 1962</i> )	23
3.2	Original-Experiment: Kritik und Verbesserungsvorschläge	25
3.2.1	Organisation in Testblöcken und daraus resultierende Anzahl von echten Folien und Leerfolien	25
3.2.2	Reihenfolge der Testblöcke	25
3.2.3	Anzahl der getesteten Folien pro Tastfoliendicke	25
3.2.4	Berechnung von $F_d$ und $S_{50}$	26
3.3	Aufbau des neuen Experimentes	27

<b>4 Modellierung</b>	<b>29</b>
<b>4.1 Verallgemeinerte Lineare Modelle und die Psychophysik: ein Vergleich</b>	<b>30</b>
4.1.1 Verallgemeinerte Lineare Modelle mit binomialverteilten Daten	30
4.1.2 Psychophysik	31
4.1.3 Vergleich beider Modelle	32
<b>4.2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>34</b>
4.2.1 Maximum-Likelihood-Schätzung	34
4.2.2 Scorefunktion, Hesse-Matrix und Fisher-Information	34
4.2.3 Iterative Algorithmen für die Maximum-Likelihood-Schätzung	36
4.2.4 Güte eines Modells: die Devianz	37
4.2.5 Punktschätzer für $\mathcal{P}$ und deren Varianz: die Delta Methode	39
4.2.6 Schwellenwert und Supportbereiche in der Psychophysik	40
4.2.7 Natürliche Mortalität und reine Ratequote	40
<b>4.3 Spezielle Linkfunktionen</b>	<b>42</b>
4.3.1 Einleitung und Beispiel	42
4.3.2 <i>Probit</i> -Transformation	44
4.3.3 <i>Logit</i> -Transformation	45
4.3.4 <i>Cloglog</i> -Transformation	46
4.3.5 Halblogistisches Modell	53
4.3.6 Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	57
4.3.7 Das Aranda-Ordaz-Modell	61
4.3.8 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)	64
4.3.9 4-Parameter-Modell von Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)	67
<b>5 Material und Methoden</b>	<b>73</b>
<b>5.1 Probanden</b>	<b>73</b>
<b>5.2 Ablauf des Experimentes</b>	<b>73</b>
<b>5.3 Analysierte Linkfunktionen</b>	<b>74</b>
<b>5.4 Ausreißer</b>	<b>75</b>
<b>5.5 Leerversuche</b>	<b>75</b>
<b>5.6 Gütekriterien für die Auswahl eines Modells</b>	<b>76</b>
<b>5.7 Daten und Software</b>	<b>77</b>
<b>5.8 Modelle außerhalb des Fokus dieser Arbeit</b>	<b>78</b>

<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>79</b>
6.1	Überblick über die Daten	79
6.2	Leerversuche	80
6.3	2-parametrische Modelle	81
6.3.1	<i>Probit</i> -Transformation	81
6.3.2	<i>Logit</i> -Transformation	84
6.3.3	<i>Cloglog</i> -Transformation	87
6.3.4	Halblogistisches Modell	90
6.3.5	Zusammenfassung der Ergebnisse für die 2-parametrischen Modelle	92
6.4	3-parametrische Modelle	94
6.4.1	Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	94
6.4.2	Das Aranda-Ordaz-Modell	96
6.4.3	Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)	99
6.4.4	$\alpha_1 h$ -Modell von Stukel	102
6.4.5	Zusammenfassung der Ergebnisse für die 3-parametrischen Modelle	105
6.5	Erste Auswahl geeigneter Modelle	107
6.6	Simulationen	108
6.6.1	<i>Logit</i> -Transformation	109
6.6.2	<i>Cloglog</i> -Transformation	110
6.6.3	Halblogistisches Modell	111
6.6.4	Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	112
6.6.5	$m_1$ -Modell von Prentice (mit Grenzwertverteilungen)	113
6.6.6	$\alpha_1 h$ -Modell von Stukel	114
6.7	Zusammenfassung aller Ergebnisse	115
6.8	Modellierung der Daten mit der <i>cloglog</i> -Transformation	116
<b>7</b>	<b>Diskussion</b>	<b>122</b>
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>127</b>
<b>9</b>	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>129</b>

<b>Anhang</b>	<b>134</b>
<b>A1 Linkfunktionen I: Fisher-Information <math>I</math></b>	<b>135</b>
A1.1 <i>Probit</i> -Transformation	135
A1.2 <i>Logit</i> -Transformation	135
A1.3 <i>Cloglog</i> -Transformation	136
A1.4 Halblogistisches Modell	136
A1.5 Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	137
A1.6 Das Aranda-Ordaz-Modell	138
A1.7 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)	139
A1.8 4-Parameter-Modell von Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)	139
<b>A2 Linkfunktionen II: <math>\mathcal{P}_p</math> und dessen Varianz</b>	<b>142</b>
A2.1 <i>Probit</i> -Transformation	142
A2.2 <i>Logit</i> -Transformation	142
A2.3 <i>Cloglog</i> -Transformation	142
A2.4 Halblogistisches Modell	143
A2.5 Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	143
A2.6 Das Aranda-Ordaz-Modell	144
A2.7 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)	144
A2.8 4-Parameter-Modell von Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)	144
<b>A3 Exponentialfamilie</b>	<b>146</b>
<b>A4 Daten der analysierten Probanden (N=70)</b>	<b>148</b>
<b>A5 Daten der aus der Analyse ausgeschlossenen Probanden (n=4)</b>	<b>157</b>
<b>A6 <i>Cloglog</i>-Transformation: Schätzer für <math>\beta_1</math>, <math>\beta_2</math>, 50%-Wert, 80%-Wert, 10%-Wert, 90%-Wert und Supportbereich (Liste aller Probanden (N=70), ohne und mit Berücksichtigung der reinen Ratequote)</b>	<b>158</b>
<b>A7 <i>Cloglog</i>-Transformation: Beobachtete und geschätzte relative Tasthäufigkeiten (alle Probanden (N=70), ohne und mit Berücksichtigung der reinen Ratequote)</b>	<b>161</b>
<b>Danksagung</b>	<b>175</b>
<b>Lebenslauf</b>	<b>176</b>





## 1 Einleitung

Die feine Tastsensibilität der Zähne ist seit langem bekannt. Selbst kleinste Fremdpartikel oder nicht präzise okklusal justierte zahnärztliche Arbeiten werden als Störquellen lokalisiert und empfunden (*Utz*, 1986).

Untersuchungen zur Bestimmung der Tastsensibilität natürlicher Zähne existieren seit den 30er Jahren des vorigen Jahrhunderts (*Theil*, 1931; *Hollstein*, 1933). Die sogenannte „aktive“ Tastsensibilität wird durch das Aufbeißen auf Folien verschiedener Dicken bestimmt. Die herausragende Arbeit von *Tryde* et al. (1962) bildet dabei die Grundlage vieler Veröffentlichungen der neueren Zeit zu diesem Thema. Allen diesen Arbeiten ist gemeinsam, dass nur ein Wert, der Schwellenwert, als Maß des aktiven Tastempfindens aus den Daten abgeleitet wird. Hinzu kommt, dass die Basis zu dessen Bestimmung nicht die gesamten Daten, sondern nur ein Teil von ihnen bilden. Bereits *Tryde* et al. beschrieben den ansteigenden Verlauf der relativen Tasthäufigkeiten über die Tastfoliendicken hinweg. Sie regten an, diesen mittels einer mathematischen Funktion zu modellieren, um daraus mehr Information über die aktive Tastsensibilität als nur den Schwellenwert abzuleiten. Diese Idee wurde jedoch von den späteren Autoren nicht aufgegriffen. Die vorliegende Arbeit schließt diese Lücke. Sie verbindet hierbei Erkenntnisse aus der Zahnmedizin, der Biometrie und der Psychophysik.

Kapitel 2.1 und 2.2 definieren die aktive Tastsensibilität aus zahnmedizinischer Sicht und erläutern die ihr zu Grunde liegenden physiologischen Gegebenheiten. Dazu gehört das sogenannte Schwellenwertkonzept, welches in der Psychophysik eine wichtige Rolle einnimmt. Neben dem dazugehörigen theoretischen Modell werden von der Psychophysik auch experimentelle Methoden bereit gestellt. Dieser Themenkomplex wird in Kapitel 2.3 erläutert. Kapitel 2.4 verbindet Zahnmedizin und Psychophysik. Die absolute Schwelle der Tastsensibilität wird definiert. Bisher durchgeführte Studien zur Bestimmung der aktiven Tastsensibilität werden vorgestellt und die bei der Durchführung zahnmedizinischer Experimente wichtigen psychophysischen Faktoren beschrieben.

Da die bisher durchgeführten Studien in ihrer Methodik nicht geeignet sind, Daten für die mathematische Modellierung des Verlaufs der Tastsensibilität zu sammeln, sollte ein neues Experiment geplant werden. Basis der Planungen dazu waren sowohl psychophysische Methoden als auch die Arbeit von *Tryde* et al. (1962). Diese Arbeit wird in Kapitel 3.1

ausführlich beschrieben. Kapitel 3.2 präsentiert eigene Überlegungen zur Modifizierung des darin enthaltenen experimentellen Ansatzes. Kapitel 3.3 beschreibt das geänderte Experiment. Die mit dessen Hilfe erhobenen Daten bilden die Grundlage für die mathematischen Modellierung in der vorliegenden Arbeit.

Die psychophysische Konstanzmethode, welche die Basis des Experimentes bildet, findet ihre Entsprechung in der mathematisch-statistischen Theorie. Hier sind es die Verallgemeinerten Linearen Modelle, angewandt auf binomialverteilte Daten. Kapitel 4.1 stellt beide Modelle einander gegenüber. Die theoretischen Grundlagen für die Schätzung mittels eines linearen Modells werden in Kapitel 4.2 dargelegt.

Zur Beschreibung von Tastsensibilitätskurven eignen sich mehrere Modelle mit jeweils verschiedenen Eigenschaften. Neben symmetrischen und asymmetrischen Modellen finden sich einfachere 2-parametrische und allgemeinere 3-parametrische Modelle. Alle Modelle, die auf die Daten angewendet wurden, werden in Kapitel 4.3 beschrieben.

Kapitel 5 gibt einen Überblick über Material und Methoden.

Kapitel 6 präsentiert die Ergebnisse. Nach einem ersten Überblick über die Daten (Kapitel 6.1) werden zuerst die Ergebnisse zu den Leerversuchen präsentiert (Kapitel 6.2). Die Ergebnisse zu den Modellen sind aufgeteilt nach Modellen mit zwei (Kapitel 6.3) und solchen mit drei Parametern (Kapitel 6.4). Danach wird aufgrund der in Material und Methoden vorgestellten Kriterien eine erste Auswahl der am besten geeigneten Modelle getroffen (Kapitel 6.5). Simulationen zu diesen Modellen sind hierbei eine wichtige Entscheidungshilfe (Kapitel 6.6). Alle Ergebnisse werden in Kapitel 6.7 zusammengefasst. Kapitel 6.8 präsentiert die Analyse der zahnmedizinischen Daten mittels des gefundenen Modells und stellt die Zahlen denjenigen früherer Arbeiten gegenüber.

Kapitel 7 beinhaltet die Diskussion und den Ausblick.

Anschließend an die Zusammenfassung und das Literaturverzeichnis finden sich im Anhang weitere Informationen zu den verwendeten Modellen, sowie die Liste der Rohdaten, die Ergebnisse der Modellierung und die dazugehörigen Abbildungen zu den einzelnen Probanden.

Wichtige Begriffe sind unterstrichen.

## 2 Aktive Tastsensibilität natürlicher Zähne und die Psychophysik

Das vorliegende Kapitel beschreibt die aktive Tastsensibilität natürlicher Zähne aus der Sicht der Zahnmedizin sowie die Möglichkeiten, diese experimentell zu bestimmen. Nach einer ersten Definition werden zuerst die physiologischen Grundlagen der Tastsensibilität des natürlichen Zahnes erläutert. Die in diesem Zusammenhang interessierenden, absoluten Schwellenwerte können mit psychophysischen Methoden ermittelt werden. Die Psychophysik, sowie die für die vorliegenden Daten möglichen experimentellen Ansätze und Arten der Analyse werden in einem eigenen Abschnitt vorgestellt. Anschließend werden die verschiedenen Definitionen des Schwellenwertes der aktiven Tastsensibilität beschrieben, wie sie in der bisherigen zahnmedizinischen Literatur verwendet worden sind. Zuletzt werden noch im Zusammenhang mit psychophysischen Experimenten diejenigen Faktoren beschrieben, welche die aktive Tastsensibilität beeinflussen können.

### 2.1 Definition der aktiven Tastsensibilität

In der Literatur wird zwischen der aktiven und der passiven Tastsensibilität unterschieden. Zur Bestimmung der passiven Tastsensibilität werden äußere Kräfte auf die Zähne geleitet, der Proband selbst bleibt also passiv. Bei der aktiven Tastsensibilität ist der Proband gehalten, aktiv auf kleine Objekte (z.B. Folien) aufzubeißen. In beiden Fällen können sowohl relative als auch absolute Schwellenwerte bestimmt werden (*Jacobs & van Steenberghe, 1994*).

### 2.2 Physiologische Grundlagen

#### 2.2.1 Aufbau des natürlichen Zahnes und des Parodontiums

Das Parodontium (oder Parodont) wird auch als Zahnhalteapparat bezeichnet und bildet die Verankerung des Zahnes mit dem Kieferknochen. Der Zahn wird hierbei „beweglich fixiert“. Das parodontale Gewebe stellt eine morphologische und funktionelle Einheit dar. Das Parodontium kann man strukturell in einen supraossären und einen intraossären Anteil untergliedern.

Der supraossäre Anteil wird auch als marginales Parodont bezeichnet und enthält sowohl epitheliales als auch bindegewebiges Attachment. Der epitheliale Anteil hat eine ungefähre anatomische Höhe von 1mm. Der bindegewebliche Anteil hat eine anatomische Höhe von 1-2mm und weist eine komplizierte, dreidimensionale, funktionelle Faserstruktur auf. Diese verläuft zirkulär um den Zahn und verbindet ihn über dentogingivale Fasern direkt mit dem Weichgewebe (*Schroeder, 1992; Rosenbauer et al., 1998*). Dieses Bindegewebe besteht zu ca.

60% aus Kollagenfasern und zu 5-15% aus Fibroblasten. Epithelialer und bindegeweblicher Anteil bilden zusammen die „biologische Breite“.

Die intraossären Anteile werden auch als intraalveoläres Parodont bezeichnet. Der Zahn ist über das Parodontale Ligament (PDL) als Syndesmose mit dem Knochen verbunden. Das intraalveoläre Parodont besteht aus dem die Zahnwurzel bedeckenden Zement, dem PDL mit den Sharpey'schen Fasern und dem Alveolarknochen. Die kollagenen Sharpey'schen Fasern des PDL inserieren sowohl in den Knochen als auch in den Zement. Im gesunden Zustand liegt also kein direkter Kontakt zwischen Zahnhartsubstanz und Knochen vor. Über das Parodontium befindet sich der Zahn daher in einer federnden Aufhängung in der Alveole. Die Wurzelhaut enthält rhombisch verzweigte und funktionell orientierte Blutgefäße in der Form eines netzförmigen Korbes, sowie parallel dazu verlaufende Lymphgefäße. Lymphe, Blut und interstitielle Flüssigkeit bilden ein hydraulisches Flüssigkeitskissen, das der dynamischen Belastung des Zahnes entgegen wirkt. Die Größe des Parodontalspalts ist vom Alter und der Funktion des Zahnes abhängig und beträgt bei einwurzeligen Zähnen zwischen 30mm<sup>3</sup> und 100mm<sup>3</sup>, bei mehrwurzeligen Zähnen zwischen 65mm<sup>3</sup> und 150mm<sup>3</sup> (*Schroeder, 1992*).

Das PDL ist dicht innerviert und enthält außer freien Nervenendigungen (Nozizeption, Schmerz) und einfachen Mechanorezeptoren auch die zusammengesetzten (Typ II-) Ruffini-Körperchen zur Mechanorezeption.

### 2.2.2 Physiologische Zahnbeweglichkeit

Es werden zwei Phasen in der Zahnbewegung unterschieden: In der ersten Phase bei gering einwirkenden Kräften wird die Zahnbewegung durch die Fasern des PDL bedingt, bzw. begrenzt. Bei größeren Kräften, nachdem die Kapazität des PDL ausgeschöpft ist, findet in der zweiten Bewegungsphase eine elastische Deformation des Knochens statt (*Kulikov, 1980*).

### 2.2.3 Physiologische Grundlagen des interokklusalen Tastempfindens

In der Sinneswahrnehmung wird zwischen Propriozeptoren und Exterozeptoren unterschieden. Während Propriozeptoren über Stimuli im Körperinneren angeregt werden und z.B. Informationen über die relative Position und Bewegung von Körperteilen liefern, werden Exterozeptoren von äußeren Reizen stimuliert. Exterozeptoren findet man u.a. in der Haut, der Mukosa, im Periost, im Knochen, in der Gingiva und im parodontalen Ligament. Sie informieren das zentrale Nervensystem über externe Belastungen und spielen eine bedeutende Rolle im Tastempfinden (*Jacobs, 1998*). Bei der interokklusalen Tastempfindung natürlicher Zähne spielen beide Arten von Rezeptoren eine Rolle.

Bei weiter Mundöffnung lässt sich das interokklusale Tastempfinden vor allem auf die Muskelspindeln und die Gelenkrezeptoren des Kiefergelenks zurück führen. Deren Beitrag wird aber in Bezug auf das feine Tastempfinden bei geringer Mundöffnung als vernachlässigbar eingeschätzt (*Jacobs & van Steenberghe, 1994*).

Bei geringerer interokklusaler Distanz wird das Tastempfinden feiner. Hier wird es eher von den Exterozeptoren bestimmt (*Jacobs & van Steenberghe, 1994*). Die dafür zuständigen Mechanorezeptoren liegen in der Gingiva, der alveolären Mukosa und vor allem im parodontalen Ligament, welches offensichtlich sehr sensibel auf die auf die Zähne ausgeübten Kräfte reagiert. Das Empfinden ist reduziert, wenn das parodontale Ligament reduziert oder eliminiert wurde, z.B. bei Parodontitis, während des Kauens, nach Extraktionen und unter Anästhesie (*Jacobs, 1998*).

Es können drei Arten von Mechanorezeptoren im Parodont voneinander abgegrenzt werden (*Griffin & Harris, 1968*):

1. einfache Mechanorezeptoren (Typ I), schnell-adaptierende Rezeptoren mit geringem Schwellenwert
2. zusammengesetzte Mechanorezeptoren (Typ II), im Aufbau den Muskelspindeln ähnlich und langsam adaptierend
3. freie Nervenendigungen.

Schnell-adaptierende Rezeptoren senden nur einige Impulse pro Druckreiz, bzw. hören bereits 50-500ms nach Beginn des Druckreizes auf, zu entladen. Langsam adaptierende Rezeptoren senden auch bei langen Druckreizen noch Reiz-induzierte Aktionspotentiale aus. Sie dienen als Intensitätsdetektoren und geben auch die Dauer eines Druckreizes an (*Schmidt, 1980*). Van Steenberghe stellte fest, dass die funktionellen Eigenschaften dieser Parodontalrezeptoren mit denen der Rezeptoren der übrigen Körperhaut vergleichbar sind (*van Steenberghe, 1979*).

Ruffini-Körperchen, langsam adaptierende Typ II-Mechanorezeptoren, sind in erster Linie für die Tastsensibilität des natürlichen Zahnes zuständig (*Maeda et al., 1999*).

Die Nervenendigungen der Zahnpulpa scheinen nicht als Rezeptoren der Tastsensibilität zu fungieren, da endodontisch versorgte Zähne das gleiche Tastvermögen aufweisen wie sensible Zähne (*Utz, 1986*).

## 2.3 Psychophysik und Schwellenwertbestimmung

### 2.3.1 Psychophysik: Einführung

Klassische psychophysische Methoden beschreiben die Beziehung zwischen physikalischen Reizen und deren Wahrnehmung. Dabei soll primär die Sinnesempfindlichkeit untersucht werden, nicht die Reaktionsneigung des Probanden.

Der Begründer dieser Methoden war Gustav T. Fechner (1801-1887). Er beschäftigte sich u.a. mit Sinneswahrnehmungen und stieß in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten von Ernst H. Weber (1795-1878). Weber interessierte sich für die muskuläre Sinneswahrnehmung und kam nach seinen Experimenten zu folgendem Schluss: Wenn eine Person zwischen zwei Stimuli unterscheidet, hängt dies nicht von der absoluten Differenz der Stärke dieser Stimuli, sondern von deren Verhältnis ab. Er formulierte dazu folgendes Gesetz:

$$\frac{S - S_0}{S_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = c \quad (\text{Gesetz von Weber})$$

Hierbei ist  $\Delta S$  der für die Person gerade noch erkennbare Unterschied zwischen einem Stimulus  $S$  und dem Standardstimulus  $S_0$  und  $c$  eine Konstante (Weber-Quotient). Weber zeigte, dass dies für alle physischen Stimuli gilt, z.B. Licht, Geräusch und Druck. Das Gesetz von Weber gilt jedoch nicht für sehr schwache Reize wenig oberhalb der Wahrnehmungsschwelle (Yoon, 2004).

Fechner übertrug diese Überlegungen auf psychologische Wahrnehmungen. Er schloss aus seinen dazu durchgeführten Experimenten, dass Webers Konzept der gerade noch erkennbaren Unterschiede auch auf die innere Bewusstseins erfahrung übertragen werden konnte. Er setzte den eben noch wahrnehmbaren Reizunterschied als die Grundeinheit der Empfindungsstärke an und ermittelte die Beziehung zwischen Empfindungs- und Reizstärke durch Integration über den Weber-Quotienten  $c = \Delta S / S_0$ .

$$R = k \cdot \log\left(\frac{S}{S_0}\right) \quad (\text{Gesetz von Fechner})$$

Hierbei ist  $R$  die Empfindungsstärke,  $S$  und  $S_0$  Stimulus, bzw. Standardstimulus aus dem Gesetz von Weber und  $k$  eine Konstante (Weber-Fechner-Koeffizient). Wird der Maßstab für die Reizstärke logarithmisch gewählt, erhält man einen linearen Anstieg der Empfindungsstärke. Durch seine Arbeit konnte Fechner zeigen, dass es möglich ist, nicht beobachtbare Prozesse der menschlichen Psyche zu messen (Sireci et al., 1998).

Es gilt außerdem:  $\Delta \log(S) \approx \frac{\Delta S}{S_0}$  für hinreichend kleine  $\Delta S$ .

Dies folgt aus dem Differenzenquotienten für  $\log(S_0)$ :

$$\frac{\log(S) - \log(S_0)}{\Delta S} \approx \frac{\partial}{\partial S_0} \log(S_0) = \frac{1}{S_0} \quad (\text{mit } S = S_0 + \Delta S)$$

$$\Leftrightarrow \log(S_0 + \Delta S) - \log(S_0) \approx \frac{\Delta S}{S_0}$$

$$\Leftrightarrow \Delta \log(S) \approx \frac{\Delta S}{S_0}.$$

In der Psychophysik ist aber nicht nur die Transformation eines Zuwachses der Reizintensität in einen Zuwachs an Empfindungsintensität von Interesse, sondern ebenso die Bestimmung von absoluten Schwellen, also die Reizdetektion (Zwislner, 1998). Ein in diesem Zusammenhang stehendes, moderneres psychophysisches Modell ist die Theorie des hohen Schwellenwertes (engl. high threshold theory), auf die in Kapitel 4.2.7 näher eingegangen wird.

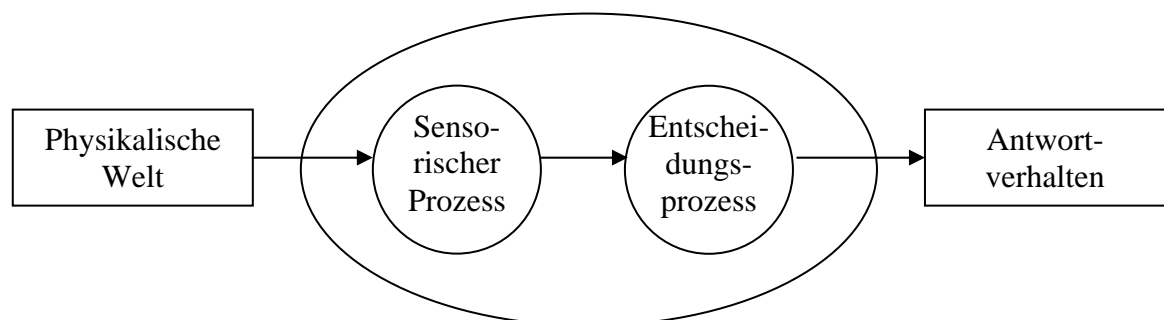
### 2.3.2 Psychophysisches Schwellenwertmodell

Das psychophysische Modell zur Schwellenwertbestimmung (Reizdetektion) beschäftigt sich mit der Frage, welche physikalische Energie mindestens erforderlich ist, um einen Reiz zu erkennen. Es wird hierbei die absolute Schwelle bestimmt, definiert als diejenige Reizintensität, die in 50% der Fälle erkannt wird.

Dieses psychophysische Modell besteht aus zwei Prozessen (Harvey, 2004):

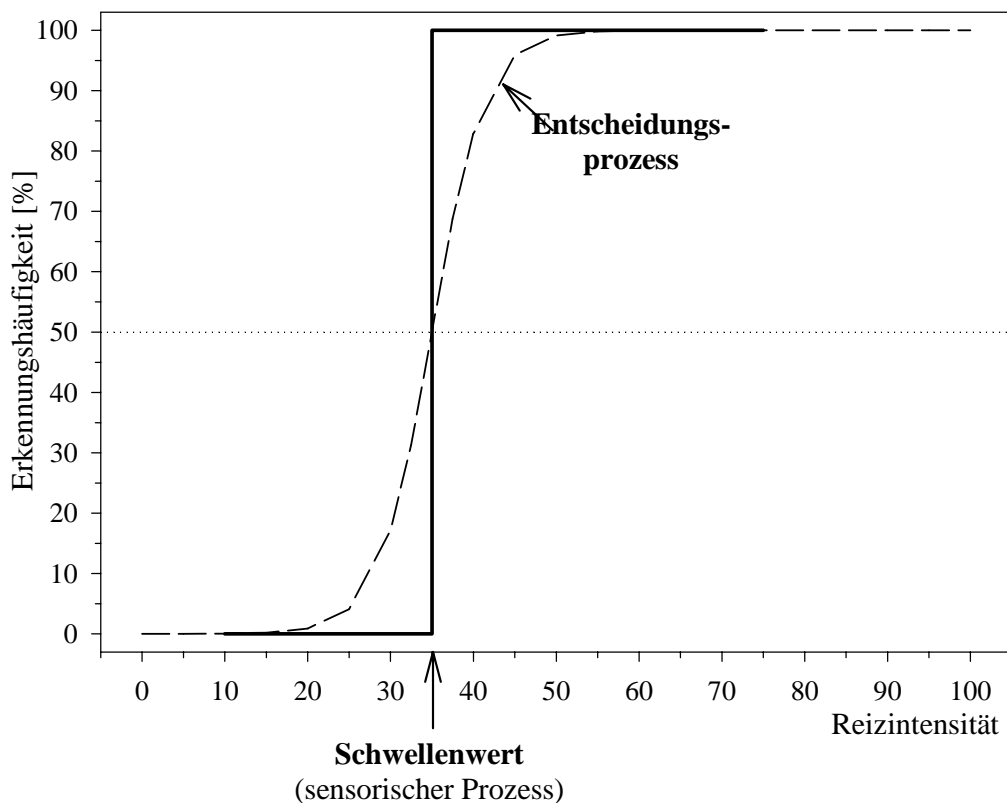
1. Sensorischer Prozess: Transformation des physikalischen Stimulus in interne Empfindung (physiologisch)
2. Entscheidungsprozess: Entscheidung über die Antwort, abhängig vom Ergebnis des sensorischen Prozesses (psychologisch)

Dies illustriert die folgende Abbildung 2.1.



**Abb. 2.1:** Reizdetektion als psychophysikalisches Modell, basierend auf zwei internen Prozessen

Für die einzelne Person gilt, dass deren physiologische (Reiz-)Grenze zwar konstant ist (sensorischer Prozess), die Intensitäten im Grenzbereich aber manchmal entdeckt werden und manchmal nicht (Entscheidungsprozess). Die Empfindungsschwelle einer Person muss daher statistisch definiert werden (Harvey, 2004). Der Schwellenwert liegt dann bei derjenigen Reizintensität, die in 50% der Fälle von der Person gespürt wird. Die folgende Abb. 2.2 fasst diese Aspekte in einer Grafik zusammen.



**Abb. 2.2:** Reizdetektion: Schwellenwertmodell und Entscheidungsprozess

### 2.3.3 Psychophysische Methoden zur Bestimmung des Schwellenwertes

Die moderne Psychophysik bedient sich ähnlicher mathematischer Modelle wie die Wahrscheinlichkeitstheorie, um den Zusammenhang zwischen der Intensität eines Stimulus und der Wahrscheinlichkeit seiner Detektion zu beschreiben (s. dazu auch Kapitel 4.1.2). Hierbei gibt es mehrere experimentelle Ansätze, um Daten zur Bestimmung von Schwellenwerten zu erhalten. Diese sind:

- Grenzwertmethode (engl. method of limits)
- Herstellungsmethode (engl. method of adjustment)
- Konstanzmethode (engl. method of constant stimuli)
- Adaptive Prozeduren.



Bei der ersten Methode (Grenzwertmethode) werden dem Probanden die Stimuli in auf- bzw. absteigender Reihenfolge angeboten und zwar so lange, bis er diese zum ersten Mal erkennt, bzw. zum ersten Mal nicht erkennt. Dieses auf- und absteigende Experiment wird mehrfach wiederholt. Die so erhaltenen unteren und oberen Wahrnehmungsgrenzen werden jeweils gemittelt. Der 50%-Schwellenwert ergibt sich dann aus der linearen Interpolation zwischen diesen beiden gemittelten Grenzen.

Probleme hierbei sind auftretende Gewöhnungsfehler, Erwartungseffekte, und die Wahl geeigneter Schrittweiten. Zu große Schrittweiten verringern die Schätzgenauigkeit der absoluten Schwelle. Zu kleine Schrittweiten erhöhen den Aufwand bei der Durchführung des Experimentes (*Falmagne, 1985*).

Bei der zweiten Methode (Herstellungsmethode) wird der Reiz durch den Probanden kontrolliert und kann kontinuierlich variieren. Der Proband soll den Reiz so einstellen, dass er ihn gerade wahrnimmt. Auch dieser Versuch wird mehrfach wiederholt. Der Mittelwert der Einstellungen durch den Probanden dient dann als Schätzung für den absoluten Schwellenwert.

Auch hier können Gewöhnungs- und Erwartungseffekte des Probanden die Schätzung der absoluten Schwelle verfälschen.

Bei der dritten Methode (Konstanzmethode) werden dem Probanden die Stimuli in randomisierter Reihenfolge vorgelegt. Wie in Kapitel 4.1.2 genauer beschrieben, werden die Daten nach Abschluss des Experimentes durch eine psychometrische Funktion gefittet. Der 50%-Schwellenwert wird dann mittels dieser Funktion geschätzt. Wird kein spezielles mathematisches Modell angenommen, und weist die psychometrische Funktion in einem hinreichend großen Bereich um den 50%-Schwellenwert (z.B. zwischen 20% und 80%) einen linearen Charakter auf, kann der dazugehörige Stimuluswert auch durch lineare Interpolation geschätzt werden.

Dem Vorteil der hohen Präzision steht der Nachteil des hohen Aufwands bei der experimentellen Durchführung gegenüber (*Falmagne, 1985*).

Bei den adaptiven Prozeduren wird der Reiz analog zur Reaktion des Probanden auf den zuvor präsentierten Reiz gewählt. Die so präsentierten Reize konvergieren gegen die erwünschte Schwelle. Diese Prozeduren sind sehr effizient (*Zwisler, 1998; Treutwein, 1995; Leek, 2001*).

## 2.4 Psychophysische Experimente zur Bestimmung der aktiven Tastsensibilität

### 2.4.1 Absoluter Schwellenwert der aktiven Tastsensibilität natürlicher Zähne:

#### Frühere und aktuelle Definitionen

Wie im vorigen Kapitel dargelegt, wird in der Psychophysik der Schwellenwert eines Reizes als diejenige Reizintensität definiert, die in 50% der Fälle von der Versuchsperson als Reiz erkannt wird. Übertragen auf die aktive Tastsensibilität natürlicher Zähne ist der Reiz hier die Dicke der Tastfolie, auf welche die Versuchsperson aufbeißt.

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die bisher gebräuchlichen und die aktuelle Definition des absoluten Schwellenwertes des Tastempfindens natürlicher Zähne.

In den frühesten zahnmedizinischen Experimenten zu diesem Thema wurde die dünnste, gerade noch wahrnehmbare Dicke als Schwellenwert gewählt (*Theil*, 1931; *Hollstein*, 1933). Auch in aktuellen Studien wurde diese Definition für die Bestimmung des Schwellenwertes angewandt (*Preti et al.*, 1994; *Jang & Kim*, 2001). Hierbei wurden dem Probanden die Tastfolien in aufsteigender Dicke präsentiert. Die Mindestdicke hierbei war 8µm. Als Schwellenwert wurde dann diejenige Tastfoliendicke bestimmt, die der Proband als Erstes erfuhr. Bei Probanden mit natürlicher Bezahnung lagen diese Werte bereits bei den ersten präsentierten Tastfolien (8-15 µm). *Preti et al.* (1994) untersuchten Probanden mit Gebissen, bei denen die Schwellenwerte deutlich höher lagen (im Mittel 83.5 µm).

*Tryde* und deren Koautoren schlugen in einem anderen Ansatz den linear interpolierten 50%-Wert vor (*Tryde et al.*, 1962). Hierbei testete der Proband ein breiteres Spektrum von Tastfoliendicken. Für jede Tastfoliendicke wurde die entsprechende relative Häufigkeit des Ertastens ermittelt. Der 50%-Wert war diejenige Tastfoliendicke, die in der Hälfte der Fälle gespürt wurde. Dieser Wert wurde durch lineare Interpolation ermittelt. Die Autoren argumentierten, dass Minimalgrenzen (und auch Maximalgrenzen) nicht sicher reproduzierbar und demnach fehleranfälliger seien als interpolierte Werte in der Mitte des Spektrums. Dieser experimentelle Ansatz bildet die Grundlage der vorliegenden Arbeit und wird in Kapitel 3.1 näher beschrieben.

Andere Autoren definierten das Tastempfinden sogar über den linear interpolierten 80%-Wert (*Karlsson & Molin*, 1995). In dieser Arbeit lagen allerdings die gemessenen Werte alle über 50%, so dass der 50%-Wert selbst gar nicht bestimmt werden konnte.

Eine andere Auffassung vertraten Lundqvist und Haraldson, die das Tastempfinden nicht durch einen singulären Wert bestimmten, sondern das Intervall von 0-100% in die folgenden drei Bereiche gliederten (Lundqvist & Haraldson, 1984):

1. Kein Tastvermögen (Tastfolien jeweils in 0-50% der Fälle korrekt ertastet)
2. Unsicheres Tastvermögen (Tastfolien jeweils in 51-80% der Fälle korrekt ertastet)
3. Sicheres Tastvermögen (Tastfolien jeweils in 81-100% der Fälle korrekt ertastet)

Für die Analyse ihrer Daten benutzen sie den interpolierten 80%-Wert, also den Übergang vom unsicheren zum sicheren Tastvermögen. Auch in dieser Arbeit lagen die beobachteten relativen Tasthäufigkeiten über 50%.

Die folgende Definition, bestehend aus zwei Messwerten, findet sich in den Arbeiten von Mericske-Stern und Wedig (Mericske-Stern et al., 1995; Mericske-Stern & Zarb, 1996; Wedig, 1999). Hier wurden den Probanden die insgesamt 10 verschieden dicken Testfolien (10 – 100µm) in Blöcken angeboten. Jeder Block wiederum bestand aus 10 Einzelversuchen, 5 Testfolien einer Dicke und 5 Einzelversuche, bei denen dem Probanden keine Folie angeboten wurde (Leerfolie). In diesem Fall wurde das aktive Tastempfinden wie folgt definiert:

1. Nicht erkannte Testfolien: Die Gesamtzahl aller nicht erkannten Testfolien über alle 10 Testblöcke
2. 50%-Grenze: Die Tastfoliendicke, bei der im dazugehörigen Testblock mindestens 5 falsche Antworten gegeben wurden (entweder Testfolie nicht erkannt oder Leerfolie fälschlicherweise erkannt).

Um die unterschiedlichen Grenzwerte miteinander vergleichen zu können, untersuchte Utz die folgenden Definitionen des aktiven Tastempfindens (Utz, 1986):

1. Erste 50% Sensibilität: Die Dicke der dünnsten Tastfolie, die der Proband in der Hälfte der Versuche spürt
2. Interpolierte 50% Sensibilität: Lineare Interpolation zwischen der Tastfoliendicke vor dem ersten Überschreiten der 50%-Grenze und der Tastfoliendicke nach dem letzten Überschreiten der 50%-Grenze. Dies entspricht der Definition, wie sie von Tryde et al. (Tryde et al., 1962) verwendet wurde. Dieselbe Definition findet sich auch in der Arbeit von Müller et al. (Müller et al., 1995).

In ihrem Übersichtsartikel plädierten Jacobs und van Steenberghe ebenfalls für den interpolierten 50%-Wert als Schwellenwert für die aktive Tastsensibilität analog zu dem Vorschlag von Tryde et al. (Jacobs & van Steenberghe, 1994; Tryde et al., 1962). Diese Definition hat sich für die Beschreibung des aktiven Tastempfindens durchgesetzt und entspricht derjenigen aus der Psychophysik.

#### 2.4.2 Psychophysische Methoden in der Zahnmedizin

Den meisten der o.g. Arbeiten ist gemeinsam, dass sie sich nur unvollständig auf psychophysische Methoden stützen. Einige Autoren behaupten zwar, die Grenzwertmethode durchzuführen, präsentieren dem Probanden die Testfolien aber immer in Blöcken, kombiniert mit Leerfolien (Jacobs & van Steenberghe, 1991). Die richtige Anwendung der Grenzwertmethode findet man nur selten (Jacobs et al., 1992; Preti et al., 1994).

Die Konstanzmethode findet sich in keinem der experimentellen Ansätze. Die Schätzung des 50%-Wertes durch lineare Interpolation ähnelt aber dem Vorgehen bei dieser Methode, wenn keine psychometrische Funktion bekannt ist (Tryde et al., 1962; Utz, 1986, Jacobs et al., 1992; Müller, 1995).

Die Herstellungsmethode, sowie adaptive Prozeduren werden in der zahnmedizinischen Literatur im Zusammenhang mit der aktiven Tastsensibilität nicht erwähnt.

Abgesehen davon finden sich in der zahnmedizinischen Literatur weitere Methoden, die aber nicht zur Psychophysik gehören (Lundqvist & Haraldson, 1984; Mericske-Stern, 1994; Mericske-Stern et al., 1995; Mericske-Stern & Zarb, 1996; Jang & Kim, 2001).

#### 2.4.3 Zu berücksichtigende Faktoren bei der Durchführung psychophysischer Experimente in der Zahnmedizin

In ihrem Übersichtsartikel zur Rolle parodontaler Rezeptoren in der Tastsensibilität von Zähnen gehen Jacobs und van Steenberghe auf die Rolle der Psychophysik bei der Durchführung von Experimenten zur Bestimmung der aktiven Tastschwelle ein (Jacobs & van Steenberghe, 1994). Sie beschreiben folgende Faktoren, welche die Höhe des Schwellenwertes beeinflussen können:

1. die physikalische Eigenschaft der inserierten Folie (z.B. Wärmeleitfähigkeit, Härte)
2. das Geschlecht des Probanden
3. das Alter des Probanden
4. die Zahnposition.

Des Weiteren geben sie Anweisungen bezüglich des experimentellen Aufbaus, der nötig ist, um verlässliche Messergebnisse zu erhalten. Das Experiment sollte in einem stillen Raum durchgeführt werden. Die Probanden sollten mit verbundenen Augen eine bequeme Sitzhaltung in aufrechter Position einnehmen. Der Untersucher sollte den Versuchsablauf so verständlich wie möglich erläutern, ohne dessen genaues Ziel zu erwähnen. Um die inneren Rezeptoren des Ohres (Knochenleitung) zu maskieren, sollte über Kopfhörer weißes und rosa Rauschen eingeblendet werden. Jeder Kontakt von Zunge bzw. Lippen mit der Tastfolie sollte vermieden werden. Generell sollten die Tastfolien jeweils 3-5 Sekunden inseriert werden. Da das Kauen einen großen Einfluss auf die Position des Zahnes im hydraulischen System des Parodonts hat, sollte das Experiment frühestens eine Stunde nach einer Mahlzeit durchgeführt werden. Um den Effekt falscher Antworten abschätzen zu können, sollten Leerfolien in das Experiment integriert werden. Zusätzlich wird eine vorab definierte Zeitspanne empfohlen, innerhalb derer der Proband angeben muss, ob er die Tastfolie gespürt hat oder nicht.

## 2.5 Zusammenfassung

In der Zahnmedizin wird die aktive Tastsensibilität durch das aktive Aufbeißen auf Folien verschiedener Dicken bestimmt. Hierbei muss der Proband jedes Mal angeben, ob er die Folie zwischen seinen Zähnen gespürt hat oder nicht. Aus physiologischer Sicht geschieht die Tastempfindung beim natürlichen Zahn offensichtlich in der Hauptsache durch Mechanorezeptoren, die sich im Parodontium befinden.

Für den einzelnen Probanden ist die absolute Schwelle der Tastempfindung eine physiologisch konstante Grenze. Reizintensitäten im Grenzbereich dieser absoluten Schwelle werden durch den psychologischen Entscheidungsprozess von den Probanden aber nicht immer richtig erkannt. Schwellenwertmodelle aus der Psychophysik geben diesen Zusammenhang wieder und definieren die absolute Schwelle als diejenige Reizintensität, die in 50% der Fälle entdeckt wird. Zusätzlich hat die Psychophysik experimentelle Methoden entwickelt, um solche Schwellenwerte möglichst genau schätzen zu können.

In der Zahnmedizin hat sich die psychophysische Definition der absoluten Schwelle ebenfalls durchgesetzt. Die dazugehörigen experimentellen Ansätze wurden aber nicht immer richtig angewandt. Dadurch wurde viel Information verschenkt, die man zusätzlich nützen könnte, um den Mechanismus der Tastsensibilität besser zu beschreiben.

Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit der experimentelle Ansatz von Tryde et al. (1962), der den meisten späteren Arbeiten zu Grunde lag, analysiert und der experimentelle Aufbau

sowie die Analyse der so erhaltenen Daten der psychophysischen Konstanzmethode angepasst.

Das Experiment, das der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, wurde als intraindividueller Vergleich von natürlichem Zahn und Implantat geplant. Hier sollte für beide ein aktiver absoluter Schwellenwert geschätzt werden. Der intraindividuelle Vergleichsaspekt zwischen natürlichem Zahn und Implantat ist aber nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Es folgt die Beschreibung der Originalarbeit (*Tryde et al.*, 1962). Daran schließen sich die wichtigsten Kritikpunkte an, sowie die Beschreibung des Experimentes, wie es letztendlich durchgeführt wurde. Die Modellierung der so für natürliche Zähne gewonnenen Daten bildet die Grundlage dieser Arbeit.

### 3 Das Experiment

#### 3.1 Beschreibung des Original-Experimentes (Tryde et al., 1962)

Die folgenden Überlegungen basieren auf einer Studie, die zur Untersuchung der aktiven Tastsensibilität menschlicher Zähne, sowie zur Schätzung der dazu gehörenden Schwellenwerte durchgeführt wurde (Tryde et al., 1962). Probanden wurden gebeten, auf Metallfolien verschiedener Dicke zu beißen und danach zu sagen, ob sie diese Folie zwischen ihren Zähnen spürten oder nicht. Die Dicken der Tastfolien variierten zwischen 10µm und 100µm mit insgesamt zehn verschiedenen Tastfolien (in Abständen von jeweils 10µm). Jede dieser zehn verschiedenen Tastfolien wurde in einem eigenen Testblock untersucht. Hierbei wurden dem Probanden in 20 Einzelversuchen 9 bis 11 Tastfolien der entsprechenden Dicke und 11 bis 9 Leerfolien präsentiert. Leer- oder Placebofolie bedeutet hier, dass – ohne Wissen des Probanden – keine Folie zwischen die Zähne gelegt wurden. Innerhalb eines solchen Testblocks war die Reihenfolge der Einzelversuche (echte Folien bzw. Leerfolien) randomisiert. Die Testblöcke selbst waren allerdings entweder in ansteigender oder in absteigender Tastfoliendicke sortiert. Insgesamt musste jeder Proband also 200 Einzelversuche durchführen (=10 Blöcke à 20 Einzelversuche). Während des Experimentes saßen die Probanden in entspannter, aufrechter Position auf dem Behandlungstuhl und hatten die Augen geschlossen. Am Ende des Experimentes wurden für jeden Probanden die Ergebnisse jedes Testblocks in einer Vierfeldertafel zusammen gefasst.

	Gespürt?		Σ
	Ja	Nein	
echte Folien	a	b	a+b
Leerfolien	c	d	c+d
Σ	a+c	b+d	<b>20</b>

Aus diesen Vierfeldertafeln wurden dann für jeden Probanden und jeden Testblock die folgenden Werte errechnet:

$$F(\text{ja},+) = \frac{\text{Anzahl der erkannten echten Tastfolien}}{\text{Gesamtzahl der echten Tastfolien}} \cdot 100\% = \frac{a}{a+b} \cdot 100\% ,$$

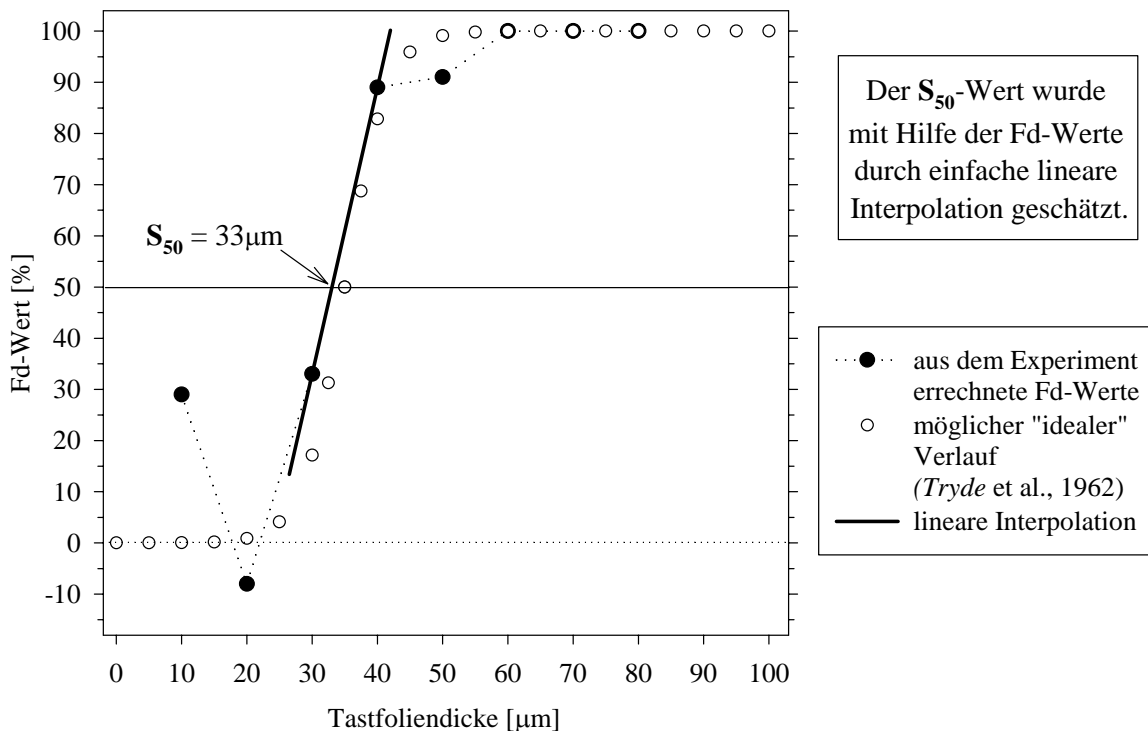
$$F(\text{ja},-) = \frac{\text{Anzahl der falsch erkannten Leerfolien}}{\text{Gesamtzahl der Leerfolien}} \cdot 100\% = \frac{c}{c+d} \cdot 100\% ,$$

$$\text{Empfindungshäufigkeit} := \mathbf{Fd} = F(\text{ja},+) - F(\text{ja},-) = \left[ \frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d} \right] \cdot 100\% .$$

Die Empfindungshäufigkeit  $F_d$  verknüpft die Anteile korrekt erkannter echter Tastfolien und falsch erkannter Leerfolien.  $F_d$  kann maximal 100% erreichen, wenn alle echten Tastfolien richtig erkannt und keine der Leerfolien fälschlicherweise erkannt werden. Negative Werte von  $F_d$  sind möglich, wenn der Anteil falsch erkannter Leerfolien höher ist als der Anteil richtig erkannter echter Tastfolien. Im Falle zufälliger Antworten des Probanden schwankt der  $F_d$ -Wert um 0%. Idealerweise sollten die so ermittelten zehn  $F_d$ -Werte pro Proband mit steigender Tastfoliendicke ebenfalls ansteigen.

Der 50%-Wert  $S_{50}$  wurde mit Hilfe der  $F_d$ -Werte durch einfache lineare Interpolation geschätzt. Die beiden Eckwerte hierbei waren die kleinste Tastfoliendicke mit einem  $F_d$ -Wert gerade oberhalb von 50% und die größte Tastfoliendicke mit einem  $F_d$ -Wert gerade unterhalb von 50%. Falls die empirische Kurve die 50%-Achse mehrmals schnitt, wurde zwischen der letzten Tastfoliendicke vor der ersten Passage und der ersten Tastfoliendicke nach der letzten Passage von 50% linear interpoliert.

Die geschätzten  $S_{50}$ -Werte von acht Probanden, die in der Originalarbeit präsentiert wurden, lagen zwischen  $10\mu\text{m}$  (der dünnsten Tastfoliendicke, die untersucht wurde) und  $35\mu\text{m}$ . Bei zwei weiteren Probanden war der geschätzte  $S_{50}$ -Wert sogar niedriger als  $10\mu\text{m}$ . Bei allen zehn Probanden waren die  $F_d$ -Werte für Tastfolien der Dicke  $50\mu\text{m}$  und höher immer 100%. Sie trugen also keine Information zur Schätzung von  $S_{50}$  bei.



**Abb. 3.1:** Daten von Proband Nr. 1 (nach Tryde et al., 1962)



### 3.2 Original-Experiment: Kritik und Verbesserungsvorschläge

#### 3.2.1 Organisation in Testblöcken und daraus resultierende Anzahl von echten Folien und Leerfolien

Bedingt durch die Organisation in einzelne Testblöcke war während des Experimentes ein direkter Vergleich von Tastfolien einer bestimmten Dicke mit Tastfolien einer anderen Dicke nicht möglich. Innerhalb eines Testblocks konnten nur echte Tastfolien und dazugehörige Leerfolien verglichen werden. Daraus folgt:

- Die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise eine Leerfolie zu entdecken, ist in Testblöcken mit niedriger Tastfoliendicke, wegen des kleineren Unterschieds zwischen echten und Leerfolien, höher.
- Aus demselben Grund ist die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise eine Leerfolie zu entdecken, in Testblöcken mit hoher Tastfoliendicke geringer.
- Die Gesamtzahl von Leerfolien und echten Tastfolien ist bei jedem Probanden gleich. Das heißt, dass in der Hälfte der Zeit der Versuch dazu benutzt wird, die Tasthäufigkeit einer Leerfolie zu entdecken und nicht dazu, die Entdeckungswahrscheinlichkeit für eine echte Tastfolie zu bestimmen. Dies betrifft vor allem dicke Tastfolien, die sowohl absolut als auch im Vergleich zu einer Leerfolie sicher erkannt werden. Eine gewisse Anzahl von Leerfolien sollte in das Experiment integriert werden, um die reine Ratequote abzuschätzen (s. Kapitel 4.2.7). Die Hälfte aller Einzelexperimente ist dazu aber nicht nötig.

#### 3.2.2 Reihenfolge der Testblöcke

Jeder Proband bekam die Testblöcke in der gleichen Reihenfolge präsentiert. Das Experiment begann mit der höchsten Tastfoliendicke und wurde mit absteigender Dicke durchgeführt bis zur geringsten Tastfoliendicke. Demzufolge erhöhte sich für alle Probanden im Laufe des Experimentes sowohl der Lerneffekt als auch die Ermüdung mit fallender Tastfoliendicke auf dieselbe Art und Weise. Hier wäre es besser gewesen, zumindest die Abfolge der Testblöcke pro Proband zu randomisieren.

#### 3.2.3 Anzahl der getesteten Folien pro Tastfoliendicke

Alle Testblöcke bestanden aus derselben Anzahl von Einzelversuchen. Da aber dickere Tastfolien leichter erkannt werden als dünne Tastfolien, sollte dies im experimentellen Aufbau durch eine Anpassung der Anzahl der Einzelversuche pro Tastfoliendicke berücksichtigt werden. Bei dünnen Tastfolien sollte die Anzahl der Einzelversuche erhöht

werden, um eine höhere Präzision zu erreichen. Bei dicken Tastfolien reicht eine geringere Anzahl von Tastfolien aus, um zu demselben Ergebnis zu kommen.

### 3.2.4 Berechnung von $F_d$ und $S_{50}$

In einem ersten Schritt wurde ein  $F_d$ -Wert für jeden Testblock errechnet. Die Information aus allen 200 Einzelversuchen wurde also auf zehn  $F_d$ -Werte reduziert. Die Berechnung des 50%-Wertes  $S_{50}$  erfolgte nur durch einfache lineare Interpolation. Das führte zu einer weiteren Reduktion der zehn  $F_d$ -Werte auf nur mehr zwei  $F_d$ -Werte. Die Information aus den restlichen acht  $F_d$ -Werten blieb unberücksichtigt.

Tryde et al. bemerkten aber bereits, dass die Empfindungshäufigkeitskurve sigmoid bzw. S-förmig aussähe (*“...the sensibility curve appears sigmoid or S-shaped.”*). Weiter vermuteten sie, dass eine zukünftige Analyse den Eindruck bestätigen könnte, dass die Kurve ähnlich der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Normalverteilung sei (*“...a future analysis [...] may confirm the impression that the curve is closely related to the normal Gaussian ogive.”*). Wenn das Ziel der Analyse nur der 50%-Wert wäre, und außerdem alle Probanden ideale Verläufe hätten, dann würde die Schätzung des 50%-Wertes durch einfache lineare Interpolation verlässliche Werte ergeben. Die Sensibilitätskurvenverläufe von Probanden mit unsicherem Tastvermögen im Bereich des 50%-Wertes sind wegen der daraus resultierenden hohen Variabilität jedoch nicht mehr so einfach analysierbar. Zusätzlich betonten Tryde et al., dass der  $S_{50}$ -Wert nicht die gesamte Information der Messungen eines bestimmten Probanden beinhalte. Eine nicht zu vernachlässigende Menge an Information stecke in der Kurve der Empfindungshäufigkeit, z.B. zeige die Steigung der Kurve, wie schnell sich die Empfindungshäufigkeit des Probanden bei fallender Tastfoliendicke verringere (*“...it should be stressed that the  $S_{50}$  value does not by any means contain all the information available from the measurement of a given person. A considerable amount of additional information is embodied in the sensibility curve, e.g. the slope of the curve tells something of how rapidly the subject's sensibility decreases with decreasing thickness of the foils.”*).

Folglich wäre eine Analyse, welche für die Schätzung des 50%-Wertes alle Einzelversuche berücksichtigen und zusätzlich noch Aussagen über die Form der Kurve und damit deren Steigung machen würde, hier angemessener, exakter und informativer.

### 3.3 Aufbau des neuen Experimentes

Ausgehend von obigen Überlegungen wurde das Experiment wie folgt umstrukturiert, um der Konstanzmethode aus der Psychophysik zu genügen:

- Anstelle von Testblöcken wurden alle verschiedenen Tastfoliendicken und Leerfolien in einem einzigen Experiment gebündelt.
- Innerhalb des Experimentes war die Reihenfolge der Tastfolien bzw. Leerfolien vollständig randomisiert, um Abhängigkeiten zwischen bestimmten Tastfoliendicken sowie Lern- bzw. Ermüdungseffekten zu vermeiden.
- Im Bereich des vermuteten 50%-Werts wurde die Anzahl echter Tastfolien erhöht, um eine genauere Schätzung zu ermöglichen.
- Im Gegensatz dazu wurde die Anzahl der Tastfolien im Bereich großer Tastfoliendicken vermindert.
- Die Anzahl der Leerfolien wurde vermindert.
- Die Gesamtzahl von Einzelversuchen pro Proband wurde auf 160 begrenzt, da das Experiment die zusätzliche Zielsetzung des intraindividuellen Vergleichs zwischen Implantat und kontralateralem, natürlichen Zahn hatte. Der Proband musste also jeden Versuch zweimal durchführen. Dieser intraindividuelle Vergleich ist allerdings nicht Gegenstand der vorliegenden Untersuchung.

Die genaue Anzahl von Tastfolien pro untersuchter Tastfoliendicke zeigt Tabelle 3.1.

Tastfolien- dicke	<i>Tryde</i> et al. (1962)	Neues Experiment (Frontz. / Prämol. / Molaren)		Tastfolien- dicke	<i>Tryde</i> et al. (1962)	Neues Experiment (Frontz. / Prämol. / Molaren)	
Leerfolie	100	20	20	60µm	10	-	-
5µm	-	10	8	68µm	-	8	14
10µm	10	14	8	70µm	10	-	-
15µm	-	16	10	75µm	-	6	10
20µm	10	16	10	80µm	10	-	-
25µm	-	16	10	90µm	10	-	-
30µm	10	-	-	100µm	10	4	6
34µm	-	16	14	125µm	-	4	6
40µm	10	12	16	150µm	-	4	6
50µm	10	10	16	200µm	-	4	6
				Gesamt	200	160	160

**Tab. 3.1:** Anzahl der Tastfolien pro untersuchter Tastfoliendicke  
*Tryde* et al. (1962) und neues Experiment

Da bei den Eckzähnen ein höherer Schwellenwert vermutet wurde, sind hier die Anzahlen von Tastfolien pro untersuchter Tastfoliendicke anders als für die Front- und Seitenzähne. Insgesamt gab es in der Stichprobe aber nur zwei Probanden mit untersuchten Eckzähnen.

Die in der Übersichtsarbeit von Jacobs und van Steenberghe beschriebenen Vorgaben für die Durchführung eines psychophysikalischen Experimentes wurden berücksichtigt (*Jacobs & van Steenberghe*, 1994; Kapitel 2.4.3).

Ein Nachteil des veränderten Versuchsaufbaus liegt darin, dass ein direkter Vergleich mit den Werten von *Tryde* et al. aufgrund der sehr verschiedenen Experimente und Schätzmethoden nicht möglich ist. Tabelle 3.2 stellt die verschiedenen Aspekte beider Versuchspläne einander gegenüber.

<i>Tryde</i> et al. (1962)	Neues Experiment
(1) Organisation in Testblöcken Präsentation der Testblöcke in ansteigender (bzw. absteigender) Tastfoliendicke	(1) Vollständige Randomisierung
(2) n=100 Leerfolien n=100 echte Tastfolien	(2) n= 20 Leerfolien n= 140 echte Tastfolien
(3) Gleiche Verteilung von Leer-folien und echten Tastfolien auf die verschiedenen Tastfoliendicken	(3) Mehr Tastfolien innerhalb des vermuteten Bereichs des 50%-Wertes (5-40 $\mu$ m) und weniger Tastfolien bei höheren Dicken
(4) Die Daten innerhalb eines Testblockes wurden zu einem Fd-Wert zusammen gefasst. Dies resultierte in nur zehn verschiedenen Datenpunkten für die endgültige Analyse.	(4) Alle Datenpunkte (n=160) gehen gleichermaßen in die Analyse ein.
(5) Schätzung von $S_{50}$ durch einfache lineare Interpolation	(5) Schätzung des 50%-Wertes mittels logistischer Regression oder anderer Funktionen
(6) Möglichkeiten der Schätzung sind begrenzt	(6) Zusätzliche Größen können aus der Kurve abgeleitet werden, z.B. die maximale Steigung

**Tab. 3.2:** Vergleich beider Versuchspläne

## 4 Modellierung

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen der vorliegenden Arbeit dargelegt. Diese beinhalten aus statistischer Sicht die Theorie der Verallgemeinerten Linearen Modelle mit binären Daten, welche in Kapitel 4.1.1 dargelegt wird. Binäre Daten werden auch im Rahmen psychophysischer Experimente erhoben. Deren Modellierung mittels psychometrischer Funktionen beschreibt Kapitel 4.1.2. Ein Vergleich beider gedanklichen Ansätze unter besonderer Betonung ihrer Gemeinsamkeiten findet sich in Kapitel 4.1.3.

Allen Modellen gemeinsam ist die Parameterschätzung mittels der Maximum-Likelihood-Methode. Die dazugehörigen Grundlagen und Algorithmen werden in Kapitel 4.2.1 bis 4.2.3 beschrieben. Die Güte eines Modells kann durch die Devianz beurteilt werden. Die Grundlagen hierzu werden in Kapitel 4.2.4 erklärt. Bei einer Modellierung sind auch Punktschätzer und die dazugehörigen Konfidenzintervalle von Bedeutung. Diese werden in Kapitel 4.2.5 beschrieben. Punktschätzer für Schwellenwerte sind auch das Hauptinteresse der Psychophysik. Ein weiteres Maß, das aus psychometrischen Funktionen abgeleitet werden kann, ist der Supportbereich. Dieser wird in Kapitel 4.2.6 vorgestellt. Eine Verallgemeinerung der psychometrischen Funktion wird durch die Einführung eines zusätzlichen Parameters erreicht, der die reine Ratequote eines Probanden beschreibt. Dieses Modell findet seine Entsprechung bei der Analyse von Dosis-Wirkungsbeziehungen - einer anderen Anwendung Verallgemeinerter Linearer Modelle - im Konzept der natürlichen Mortalität. Beide Konzepte und deren Übereinstimmung werden in Kapitel 4.2.7 beschrieben.

Kapitel 4.3 stellt, jeweils illustriert durch einen Beispieldatensatz, diejenigen Linkfunktionen vor, die bei der Auswertung der experimentellen Daten zur Anwendung kamen.

Die theoretischen Grundlagen zu den Verallgemeinerten Linearen Modellen, sowie den Linkfunktionen entstammen den Büchern und Arbeiten von Agresti (1990), Collett (2003), Dobson (2002), Finney (1971), Hosmer & Lemeshow (2000), McCullagh & Nelder (1989), Morgan (1992, 1998a) und Scholze et al. (2001). Die Ausführungen zur psychophysischen Sichtweise basieren auf den Arbeiten von Klein (2001), Kuss et al. (2005), sowie Morgan (1998b) und Wichmann & Hill (2001a).

## 4.1 Verallgemeinerte Lineare Modelle und die Psychophysik: ein Vergleich

### 4.1.1 Verallgemeinerte Lineare Modelle mit binomialverteilten Daten

Die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Schätzfunktionen gehören aus wahrheitstheoretischer Sicht in den Bereich der Verallgemeinerten Linearen Modelle. Hierbei bezieht sich die Verallgemeinerung u.a. darauf, dass die Ergebnisvariable nicht wie im klassischen linearen Modell normalverteilt ist, sondern aus einer anderen Exponentialfamilie stammt (s. Anhang A3). Im vorliegenden Fall ist dies die Binomialverteilung, weshalb nachfolgend nur die theoretischen Grundlagen Linearer Modelle mit binomialverteilten Daten beschrieben werden. Da es sich aufgrund der Versuchsanordnung nur um jeweils eine erklärende Variable handelt (Dicke der Tastfolie), wird auch nur auf diesen Fall eingegangen.

Ein Lineares Modell mit binomialverteilten Daten besteht aus drei Komponenten:

- a. Zufällige Komponente: Eine Ergebnisvariable  $\mathbf{Y}^T = (Y_1, \dots, Y_k)$ , wobei alle  $Y_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) dieselbe Verteilung besitzen. Im vorliegenden Fall gilt: Die  $Y_i$  besitzen eine Binomialverteilung mit den dazugehörigen Parametern  $(n_i, p_i)$ . Es gilt weiterhin:  $E(Y_i) = p_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) und  $Y_i, Y_j$  unabhängig ( $\forall i, j = 1, \dots, k$ ).  $k$  repräsentiert die Anzahl der verschiedenen Messpunkte, im vorliegenden Fall die Anzahl der im Experiment verwendeten verschiedenen Tastfoliendicken ( $5\mu\text{m} - 100\mu\text{m}$ :  $k=11$ ).

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der  $Y_i$  lautet dann:

$$P(Y_i=s) = \binom{n_i}{n_i \cdot s} p_i^{n_i s} \cdot (1 - p_i)^{n_i - n_i s} \quad s = 0, \frac{1}{n_i}, \frac{2}{n_i}, \dots, \frac{n_i}{n_i} = 1 \quad (i = 1, \dots, k).$$

- (2) Systematische Komponente: Ein Vektor zu schätzender Parameter  $\boldsymbol{\beta}$ , im einfachsten Fall  $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \beta_2)$ , sowie von erklärenden (beobachteten) Variablen, in diesem Fall

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_k \end{bmatrix}.$$

In manchen Fällen kann es sinnvoll sein, die  $x_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) (monoton) zu transformieren. Hierbei werden die  $x_i$  meist logarithmiert.

Allgemein ausgedrückt gehen die  $x_i$  über in  $x_i^* = f_{tr}(x_i)$ , d.h.

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} 1 & x_i^* \\ \dots & \dots \\ 1 & x_k^* \end{bmatrix}.$$

Der Vektor  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}^{*T} \cdot \boldsymbol{\beta}$  wird als linearer Prädiktor bezeichnet, d.h.

$$\eta_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot f_{tr}(x_i) = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i^* \quad (i=1, \dots, k).$$

(3) Eine monotone, differenzierbare Linkfunktion  $g$  der folgenden Form:

$$g(p_i) = \boldsymbol{\eta} = \left( \mathbf{X}^{*T} \cdot \boldsymbol{\beta} \right)_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot x_i^* \quad (i = 1, \dots, k).$$

Diese bildet die  $p_i \in [0;1]$  ab auf  $\boldsymbol{\eta}_i \in (-\infty; +\infty)$ .

Bei den einfacheren 2-parametrischen Linkfunktionen stecken die beiden zu schätzenden Parameter im linearen Prädiktor (s. Kapitel 4.3.2 bis 4.3.5). Die Box-Cox-Transformation (s. Kapitel 4.3.6) ist ein Beispiel für eine allgemeinere Transformation der  $x_i$ . Hier beinhaltet die Transformation einen dritten, ebenfalls aus dem Modell zu schätzenden Parameter. Die etwas allgemeineren 3-parametrischen Linkfunktionen haben den dritten Parameter nicht im linearen Prädiktor, sondern auf der Ebene der Linkfunktion (s. Kapitel 4.3.7 bis 4.3.9). Zusätzliche Parameter im linearen Prädiktor bilden ebenfalls eine Erweiterung. Dies wird in der vorliegenden Arbeit aber nicht behandelt (s. dazu auch Kapitel 5.8).

Die Umkehrfunktion der Linkfunktion, also  $F(\eta_i) = g^{-1}(p_i)$  ist ebenfalls monoton. Da mit steigenden Werten von  $x_i^*$  die Wahrscheinlichkeiten  $p_i$  ansteigen, kann  $F(\eta_i)$  auch als Verteilungsfunktion betrachtet werden (Sen, 1998). Die Funktion  $\tilde{F}(x_i^*) = F(\beta_1 + \beta_2 x_i^*)$  wird als Erklärungsfunktion bezeichnet, deren Ableitung  $f = F'$  als Toleranzfunktion.

#### 4.1.2 Psychophysik

Die **klassische** Psychophysik, an deren Anfang die Arbeiten von Gustav Fechner und Ernst H. Weber standen (Sireci et al., 1998), wollte Antworten auf folgende Fragen finden:

- Welche Empfindungsskalen liegen den Antworten einer Testperson in psychophysikalischen Experimenten zugrunde?
- Wie sind diese Skalen mit den physikalischen Skalen verbunden?

Die **moderne** Psychophysik hingegen möchte folgende Frage beantworten:

- Wie wird die physikalische Intensität durch ein bestimmtes sensorisches System umgesetzt?

Dazu versucht sie, die aus den Experimenten erhaltenen Daten als Ergebnis eines Modells bzw. eines Mechanismus zu sehen. Der Effekt der Intensität eines Stimulus auf einen Organismus kann hierbei durch ein (mehr oder weniger) kompliziertes mathematisches Objekt beschrieben werden, z.B. eine Zufallsvariable oder einen stochastischen Prozess neuronaler Ereignisse (Falmagne, 1985).

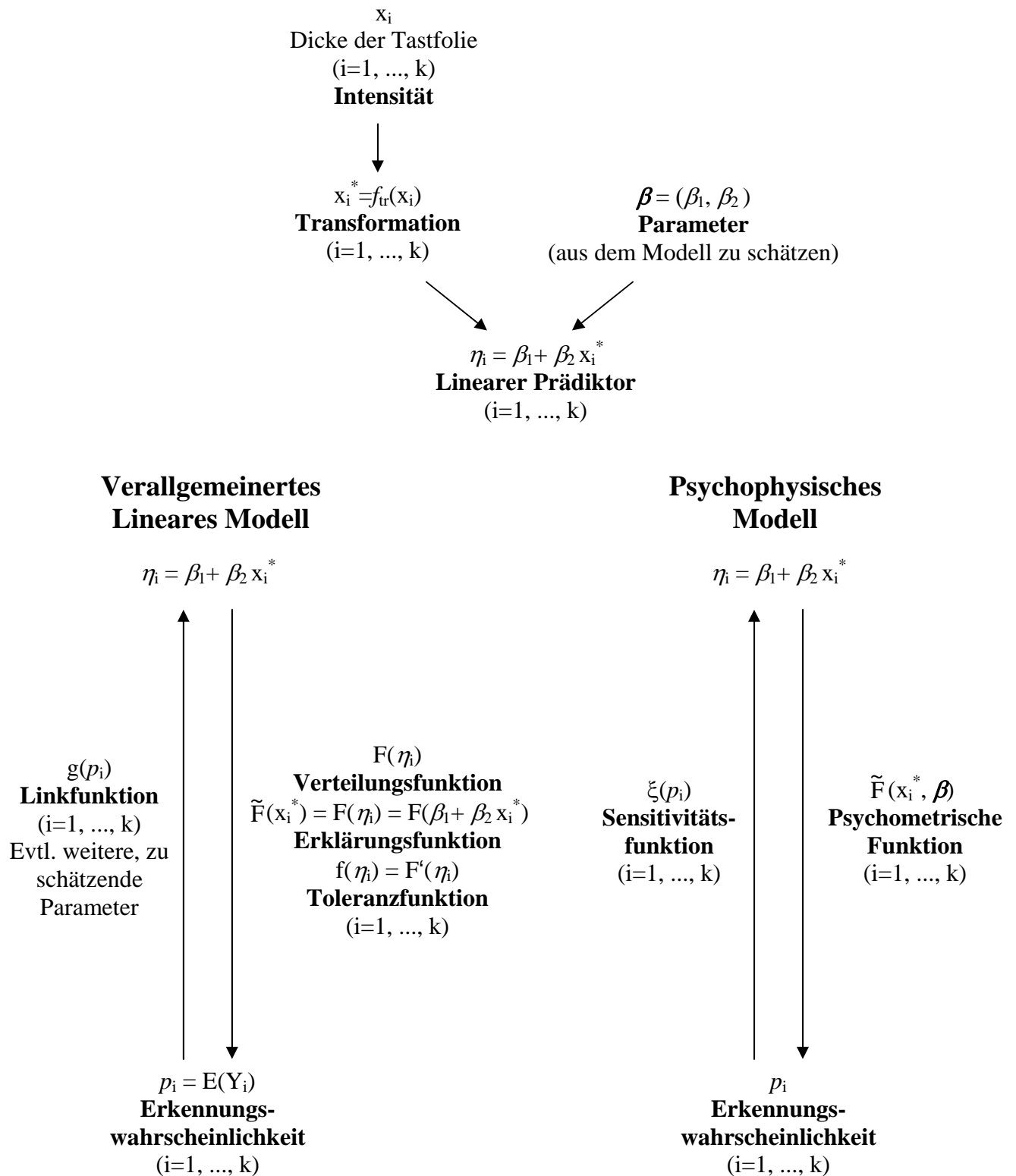
In diesem Modell ist die psychometrische Funktion  $F(x, \beta)$  die zentrale Funktion in der Analyse von Daten aus psychophysischen Experimenten. Sie überführt die Reizstärke  $x$  („Physik“) direkt in die Erkennungswahrscheinlichkeiten  $p$  („Psychologie“). Wie bei Verallgemeinerten Linearen Modellen (s. Kapitel 4.1.1) kann  $x$  transformiert werden:  $x^* = f_{tr}(x)$ . Dann geht  $F(x, \beta)$  über in  $\tilde{F}(x^*, \beta)$ . Im Allgemeinen gehen  $x^*$  und  $\beta$  als  $(\beta_1 + \beta_2 x^*)$  in die Funktion ein (Kuss et al., 2005; s. auch Kapitel 4.1.1, sowie Kapitel 4.3.2 bis 4.3.5).  $F$  bzw.  $\tilde{F}$  ist typischerweise eine 2-parametrische, sigmoide Funktion und entspricht der Umkehrfunktion der Linkfunktion (Verteilungsfunktion) aus den Linearen Modellen. Anders als bei den Linearen Modellen hat  $(\beta_1 + \beta_2 x^*)$  in der Psychophysik jedoch keine eigenständige Bezeichnung.

#### 4.1.3 Vergleich beider Modelle

In der Wahrscheinlichkeitstheorie ist das Augenmerk auf die Linkfunktion gerichtet, also die Richtung vom binären Signal hin zum linearen Prädiktor, einer linearen Funktion der Intensität. Im Gegensatz dazu interessiert auf der psychophysischen Ebene die umgekehrte Richtung: Wie beeinflusst die Intensität selbst oder eine lineare Funktion der Intensität das binäre Signal und somit die Erkennungswahrscheinlichkeit? Die Umkehrfunktion der Linkfunktion, interpretiert als Verteilungsfunktion, gibt dies wieder: Eine lineare Funktion  $\eta_i$  der Intensität  $x_i$  (und damit auch alle Werte, die kleiner als  $\eta_i$  sind) wird mit der Wahrscheinlichkeit  $p_i$  erkannt.

Abbildung 4.1 stellt das Verallgemeinerte Lineare Modell für binäre Daten und das psychophysische Modell der psychometrischen Funktion einander gegenüber.





**Abb. 4.1:** Vergleich beider Modelle für binäre Daten:  
 Verallgemeinertes Lineares Modell vs. Psychophysisches Modell

## 4.2 Theoretische Grundlagen

### 4.2.1 Maximum-Likelihood-Schätzung

Sind die Zufallsvariablen  $Y_i$  wie im vorliegenden Fall binomialverteilt mit Erwartungswerten  $p_i$ , dann gilt: Die gemeinsame Dichtefunktion (Likelihood) für die Beobachtung von jeweils  $r_i$  Erfolgen bei  $n_i$  Versuchen ( $i=1, \dots, k$ ;  $Y_i, Y_j$  unabhängig  $\forall i, j = 1, \dots, k$ ) ist darstellbar als

$$L = \prod_{i=1}^k \binom{n_i}{r_i} \cdot p_i^{r_i} \cdot (1 - p_i)^{n_i - r_i} \quad \text{mit } p_i = F(\beta_1 + \beta_2 x_i^*)$$

Die Likelihood wird hier als Funktion der zu schätzenden Parameter  $\beta_1$  und  $\beta_2$  (bzw. noch weiterer Parameter, je nach Linkfunktion) betrachtet. Sie ist die Summe aller Informationen über diese unbekannten Parameter. Eine Maximierung der Likelihood führt zu den Schätzern für diese Parameter. Der Einfachheit halber maximiert man die logarithmierte Likelihood  $\ln(L) = l$ . Die Werte der Parameter, die die Likelihood maximieren, werden als Maximum-Likelihood-Schätzer bezeichnet.

$$l = \ln(L) = \sum_{i=1}^k r_i \cdot \ln(p_i) + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \cdot \ln(1 - p_i) + C.$$

Die Konstante  $C = \sum_{i=1}^k \ln \binom{n_i}{r_i}$  ist für die Maximierung unerheblich.

Der Vorteil dieser Methode liegt in der allgemeinen Anwendbarkeit. Maximum-Likelihood-Schätzer sind asymptotisch unverzerrt. Ein weiterer Vorteil von Maximum-Likelihood-Schätzern ist, dass sie (in großen Stichproben) die kleinste Varianz besitzen. Zusätzlich sind die Schätzer asymptotisch normalverteilt, unabhängig von der Verteilung der Daten, aus denen sie geschätzt wurden (*Tosteson & Demidenko, 1998; Collett, 2003*).

### 4.2.2 Scorefunktion, Hesse-Matrix und Fisher-Information

Seien  $q$  Parameter  $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \dots, \beta_q)$  mittels der Maximum-Likelihood-Methode zu schätzen.

Die dazugehörige Likelihoodfunktion sei  $L(\boldsymbol{\beta})$ , bzw.  $\ln(L(\boldsymbol{\beta})) = l(\boldsymbol{\beta})$ .

Die Scorefunktion  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\beta})$  ist definiert als der Vektor der  $q$  ersten Ableitungen von  $l(\boldsymbol{\beta})$  nach  $\beta_1, \dots, \beta_q$ . Demnach ist

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\beta})^T = \left( \frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\beta}))}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\beta}))}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\beta}))}{\partial \beta_q} \right).$$

Der Maximum-Likelihood Schätzer  $\hat{\beta}$  ist derjenige Schätzer, der die Likelihood maximiert.

Also gilt:

$$\left. \frac{\partial \ln(L(\beta))}{\partial \beta_j} \right|_{\hat{\beta}} = 0 \quad j=1, \dots, q \text{ und}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \ln(L(\beta))}{\partial \beta_j^2} \right|_{\hat{\beta}} < 0 \quad j=1, \dots, q.$$

Probleme bei der Maximierung können dann auftreten, wenn außer einem absoluten Maximum auch lokale Maxima existieren. Dies ist aber bei den hier betrachteten 2-parametrischen Modellen (s. Kapitel 4.3.2 bis 4.3.4) nicht der Fall (*McCullagh & Nelder*, 1989). Ein weiteres Problem sind Randmaxima bei begrenzten Parameterräumen, worauf im Rahmen dieser Arbeit aber nicht weiter eingegangen werden soll.

Bei der Maximum-Likelihood-Schätzung ist also ein Gleichungssystem mit  $q$  nichtlinearen Gleichungen zu lösen. Dies ist nur numerisch mittels iterativer Prozeduren möglich (s. Kapitel 4.2.3). Hierzu benötigt man außer der Scorefunktion entweder die Hesse-Matrix oder die Fisher-Information.

Die Hesse-Matrix  $H$  ist definiert als die  $(q \times q)$ -Matrix der 2-fachen partiellen Ableitungen von  $l(\beta)$ . Das  $(j,k)$ -te Element von  $H$  ist

$$\frac{\partial^2 \log(L(\beta))}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \quad \text{für } j, k=1, \dots, q.$$

Die Fisher-Information  $I$  ist definiert als die  $(q \times q)$ -Matrix des negativen Erwartungswertes der 2-fachen partiellen Ableitungen von  $l(\beta)$ . Das  $(j,k)$ -te Element von  $I$  ist

$$-E \left( \frac{\partial^2 \log(L(\beta))}{\partial \beta_j \partial \beta_k} \right) \quad \text{für } j, k=1, \dots, q.$$

Die Inverse der Fisher-Information,  $I^{-1}$ , ist die Varianz-Kovarianz-Matrix des Schätzers  $\hat{\beta}$ .

Sowohl die Hesse-Matrix als auch die Fisher-Information sind symmetrische Matrizen.

Die Fisher-Informationsmatrizen aller in dieser Arbeit relevanten Linkfunktionen befinden sich in Anhang A1 (*logit*-Link: *Dobson*, 2002;  $m_1$ -Modell von Prentice: *El-Saidi & George*, 1990; sowie eigene Berechnungen).

#### 4.2.3 Iterative Algorithmen für die Maximum-Likelihood-Schätzung

Seien  $q$  Parameter  $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \dots, \beta_q)$  mittels der Maximum-Likelihood-Methode zu schätzen. Die dazugehörige Likelihoodfunktion sei  $L(\boldsymbol{\beta})$ , bzw.  $\ln(L(\boldsymbol{\beta})) = l(\boldsymbol{\beta})$ .

Es existieren zwei verschiedene, iterative Algorithmen für die Schätzung der Parameter mittels der Maximum-Likelihood-Methode. Beide benutzen die Taylor-Reihenentwicklung.

##### Algorithmus 1: Die Newton-Raphson Prozedur

Der iterative Algorithmus ist wie folgt definiert:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_m - \mathbf{H}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m) \cdot \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m)$$

mit  $m = 0, 1, 2, \dots$  und einem geeigneten Anfangsvektor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$  für  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

Eine Modifizierung dieses Schemas ist die Ersetzung der Hesse-Matrix durch die negative Fisher-Information:

##### Algorithmus 2: Fisher's Scoring-Methode

Der iterative Algorithmus ist wie folgt definiert:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{m+1} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_m + \mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m) \cdot \mathbf{u}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_m)$$

mit  $m = 0, 1, 2, \dots$  und einem geeigneten Anfangsvektor  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$  für  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ .

Ein Nebenergebnis dieses Algorithmus ist die (empirische) Varianz-Kovarianz-Matrix  $\mathbf{I}^{-1}$ , die Umkehrfunktion der Fisher-Information.

Beide Algorithmen konvergieren gegen den Maximum-Likelihood-Schätzer  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ . Nur im Falle des *logit*-Links gilt:  $\mathbf{H} = -\mathbf{I}$ , ansonsten ist  $\mathbf{H} \neq -\mathbf{I}$  (Collett, 2003).

Die Wahl des Anfangsvektors  $\hat{\boldsymbol{\beta}}_0$  ist dann entscheidend, wenn lokale Maxima existieren.

Es gibt noch weitere Algorithmen, aber für die in dieser Arbeit verwendeten Linkfunktionen sind die o.g. Prozeduren ausreichend und werden auch von Standard Softwarepaketen verwendet (Morgan, 1992).

#### 4.2.4 Güte eines Modells: die Devianz

Das bestmögliche Maß zur Beurteilung der Güte eines gefitteten Modells ist die Devianz („Abweichung vom Modell“).

Die Devianz misst allerdings nicht die Güte des Modells (engl. goodness of fit) sondern die Abwesenheit der Güte (engl. lack of fit), also wie weit das Modell von den Daten entfernt ist.

Als Maß benutzt die Devianz den (relativen) Abstand zwischen der maximierten Likelihood unter dem aktuellen Modell und dem perfekten Modell, also dem Modell, bei dem alle beobachteten Wahrscheinlichkeiten auf der gefitteten Kurve liegen.

Die Devianz D ist wie folgt definiert:

$$D = -2 \cdot \ln \left( \frac{\hat{L}_c}{\hat{L}_f} \right) = -2 \left\{ \ln(\hat{L}_c) - \ln(\hat{L}_f) \right\}$$

mit  $\hat{L}_c$  = maximierte Likelihood unter dem aktuellen Modell

und  $\hat{L}_f$  = Likelihood des „perfekten“ Modells.

Wie bereits beschrieben, ist in der vorliegenden Arbeit die gemeinsame Likelihood über alle k Gruppen gegeben durch

$$L = \prod_{i=1}^k \binom{n_i}{r_i} \cdot p_i^{r_i} \cdot (1 - p_i)^{n_i - r_i}.$$

Seien  $\hat{p}_i = \hat{r}_i / n_i$  die geschätzten Wahrscheinlichkeiten des aktuellen Modells, sowie  $\tilde{p}_i = r_i / n_i$  die Wahrscheinlichkeiten aus dem perfekten Modell. Dann kann die Devianz wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} D &= -2 \left\{ \ln(\hat{L}_c) - \ln(\hat{L}_f) \right\} = \\ &= -2 \left[ \sum_{i=1}^k \left\{ \ln \binom{n_i}{r_i} + r_i \cdot \ln(\hat{p}_i) + (n_i - r_i) \cdot \ln(1 - \hat{p}_i) \right\} - \sum_{i=1}^k \left\{ \ln \binom{n_i}{r_i} + r_i \cdot \ln(\tilde{p}_i) + (n_i - r_i) \cdot \ln(1 - \tilde{p}_i) \right\} \right] \\ &= 2 \sum_{i=1}^k \left\{ r_i \cdot \ln \left( \frac{\tilde{p}_i}{\hat{p}_i} \right) + (n_i - r_i) \cdot \ln \left( \frac{1 - \tilde{p}_i}{1 - \hat{p}_i} \right) \right\} \end{aligned}$$

Ersetzt man  $\hat{p}_i$  durch  $\hat{r}_i$ , sowie  $\tilde{p}_i$  durch  $r_i$ , dann reduziert sich D auf den folgenden Ausdruck:

$$D = 2 \sum_{i=1}^k \left\{ r_i \cdot \ln \left( \frac{r_i}{\hat{r}_i} \right) + (n_i - r_i) \cdot \ln \left( \frac{n_i - r_i}{n_i - \hat{r}_i} \right) \right\}.$$

In diesem Ausdruck erkennt man, dass die Devianz D die Beobachtungen  $r_i$  mit ihren geschätzten Werten  $\hat{r}_i$  aus dem aktuellen Modell vergleicht.

Die zur Devianz gehörenden Devianz-Residuen  $d_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) sind wie folgt definiert:

$$d_i = \text{sgn}(r_i - \hat{r}_i) \cdot \left\{ 2r_i \cdot \ln\left(\frac{r_i}{\hat{r}_i}\right) + 2(n_i - r_i) \cdot \ln\left(\frac{n_i - r_i}{n_i - \hat{r}_i}\right) \right\}^{1/2} \quad (i = 1, \dots, k)$$

$$\text{mit } \text{sgn}(r_i - \hat{r}_i) = \begin{cases} +1 & r_i \geq \hat{r}_i \\ -1 & r_i < \hat{r}_i \end{cases}. \quad \text{Es gilt: } D = \sum_{i=1}^k d_i^2.$$

Die Devianz-Residuen sind positiv, wenn die geschätzten Werte unterhalb der beobachteten Werte liegen und negativ im umgekehrten Fall.

Die Devianz ist asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit  $(k-q)$  Freiheitsgraden. Hierbei ist  $k$  die Anzahl der binomialverteilten Beobachtungen (Stützstellen) und  $q$  die Anzahl der unbekannten, zu schätzenden Parameter im aktuellen Modell. Die Gültigkeit dieser Approximation hängt nicht so sehr von der Anzahl  $k$  der Stützstellen ab, sondern eher von der Gesamtzahl aller binären

Beobachtungen  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  (Collett, 2003).

Diese Approximation kann dazu benutzt werden, die Güte der Anpassung des Modells an die Daten statistisch zu beurteilen. Ist die Devianz größer als das 95%-Quantil der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $(k-q)$  Freiheitsgraden, kann die Abweichung vom Modell als statistisch signifikant auf dem 5%-Niveau betrachtet werden. In diesem Fall wird das Modell als nicht angemessene Erklärung der Daten erachtet.

Im vorliegenden Fall wurden sowohl Modelle mit zwei als auch mit drei zu schätzenden Parametern betrachtet. Die Anzahl der Stützstellen war  $k=11$  (5-100 $\mu\text{m}$ ). Tabelle 4.1 zeigt die dazugehörigen 95%-Quantile der asymptotischen  $\chi^2$ -Verteilung.

Der Erwartungswert einer asymptotisch  $\chi^2$ -verteilten Zufallsvariable mit  $(k-q)$  Freiheitsgraden beträgt ungefähr  $(k-q)$ . Dies kann man sich ebenfalls zunutze machen, um die Güte eines Modells abzuschätzen. Ein Modell mit einem Devianzwert nahe bei  $(k-q)$  kann als zufriedenstellend bewertet werden (Collett, 2003).

Anzahl der Stützstellen $k$	Anzahl zu schätzender Parameter $q$	95%-Quantil der $\chi^2$ -Verteilung mit $(k-q)$ Freiheitsgraden	Ungefäher Erwartungs- wert
11	2	16.92	9
11	3	15.51	8

**Tab. 4.1:** Grenzwerte der asymptotischen  $\chi^2$ -Verteilung

Außer den Devianz-Residuen existieren noch andere Arten von Residuen, z.B. Pearson- und Anscombe-Residuen. Anscombe-Residuen sind schwieriger zu berechnen als Devianz-Residuen, ohne bessere Eigenschaften zu haben (Collett, 2003). Pearson-Residuen unterschätzen vor allem in Experimenten mit wenig Stützstellen  $k$  ( $k \leq 5$ ) und kleinen Stichprobenumfängen  $n_i$  ( $n_i \leq 50$ ,  $i=1, \dots, k$ ) die wahre Fehlerrate (Nottingham & Birch, 1998). Aus diesen Gründen werden in dieser Arbeit die Devianz und die dazugehörigen Devianz-Residuen als Maß der Güte eines Modells verwendet.

#### 4.2.5 Punktschätzer für $\mathcal{G}_p$ und deren Varianz: die Delta Methode

Seien  $q$  Parameter  $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \dots, \beta_q)$  mittels der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt worden. Die asymptotische Verteilung dieses Maximum-Likelihood-Schätzers  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  ist dann multivariat normalverteilt mit Erwartungswert  $\boldsymbol{\beta}$ . Die geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix ist  $\mathbf{I}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ .

Es gilt weiterhin: Ist  $f(\boldsymbol{\beta})$  eine univariate Funktion von  $\boldsymbol{\beta}$  mit partiellen ersten Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial \beta_i}$ , die stetig sind und nicht alle Null an der Stelle  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ , dann ist  $f(\hat{\boldsymbol{\beta}})$  ein Schätzer, der asymptotisch normalverteilt ist mit Erwartungswert  $f(\boldsymbol{\beta})$  und Varianz  $\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$ , wobei

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \left( \frac{\partial f}{\partial \beta_1}, \frac{\partial f}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \beta_q} \right).$$

Sei nun  $g(p)$  eine Linkfunktion, welche die Wahrscheinlichkeit  $p$  mit dem linearen Prädiktor  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}$  in Beziehung setzt, also  $\boldsymbol{\eta} = g(p)$ . Weiterhin sei  $\mathbf{I}^{-1}$  die Varianz-Kovarianz-Matrix der mittels der Linkfunktion geschätzten Parameter  $\boldsymbol{\beta}^T = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ .

Dann ist der (univariate) Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für den transformierten Beobachtungswert  $x^*$  gegeben durch

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1).$$

Die Varianz  $\sigma^2$  ist dann nach der obigen Definition gegeben durch  $\sigma^2 = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{I}^{-1} \boldsymbol{\gamma}$  mit

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \left( \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_q} \right).$$

Das dazugehörige 95%-Konfidenzintervall für  $\mathcal{G}_p$  ist demzufolge:  $\mathcal{G}_p \pm 1.96 \cdot \sqrt{\sigma^2}$  (Collett, 2003).

Die Schätzfunktionen für  $\mathcal{g}_p$  befinden sich bei den entsprechenden Linkfunktionen in Kapitel 4.3. Die dazugehörigen  $\mathcal{J}^T$  sind in Anhang A2 (*logit*-Link: *Collett*, 2003, sowie eigene Berechnungen) zu finden.

Neben dieser Methode stehen auch andere Methoden zur Verfügung, z.B. Bootstrap-Methoden (*Wichmann & Hill*, 2001b) oder Methoden, die auf Bayes-Verfahren beruhen (*Kuss et al.*, 2005).

#### 4.2.6 Schwellenwert und Supportbereiche in der Psychophysik

Bei der Analyse psychometrischer Daten ist in erster Linie die Schätzung des Schwellenwertes, d.h. des 50%-Wertes  $F^{-1}(0.5)$  von Interesse. Dieser Wert entspricht  $\mathcal{g}_p$  für  $p=0.50$  aus dem vorigen Kapitel.

Die psychometrische Funktion liefert als zusätzliche Information den Grad der Veränderung der Empfindungshäufigkeit, gemessen als Steigung in einem bestimmten Punkt. Für die symmetrischen Verteilungsfunktionen gilt, dass deren Steigung bei  $F^{-1}(0.5)$  maximal ist. Dies ist bei asymmetrischen Verteilungsfunktionen nicht der Fall. Ein Nachteil der Steigung ist, dass deren Werte zwischen verschiedenen Modellen (v.a. wenn die Intensitäten  $x$  jeweils anders transformiert werden) nicht unmittelbar vergleichbar sind, sondern umgerechnet werden müssen (*Strasburger*, 2001). Ein anderes Maß, welches die Vergleichbarkeit erfüllt ist der Supportbereich  $w$  (*Alcalá-Quintana & Garcia-Pérez*, 2004), der wie folgt definiert ist:

$$w = F^{-1}(1-\alpha) - F^{-1}(\alpha) \quad \text{für ein geeignetes } \alpha \text{ (meist } \alpha=0.1\text{)}.$$

Supportbereiche haben den Vorteil, dass sie dieselbe Einheit wie der Schwellenwert besitzen und die Symmetrie bzw. Asymmetrie der zu Grunde liegenden psychometrischen Funktion wiedergeben. Sie sind aus diesem Grund leicht interpretierbar und auch über verschiedene Modelle hinweg vergleichbar (*Kuss et al.*, 2005).

#### 4.2.7 Natürliche Mortalität und reine Ratequote

Bei der Analyse von Dosis-Wirkungsbeziehungen im Rahmen von Toxizitätsprüfungen existiert das Konzept der natürlichen Mortalität. Ein Teilversuch eines solchen Experimentes sammelt Daten über die Mortalität der zu untersuchenden Spezies ohne Zufuhr des Toxins. Je höher die Dosis des Toxins ist, desto früher kommt dessen Wirkung im Vergleich zur natürlichen Mortalität (kein Toxin) zum Tragen. Eine Analyse, die dies berücksichtigt, dient demnach dazu, den eigentlichen Effekt des Toxins zusätzlich zur natürlichen Mortalität zu bestimmen.



Gegeben seien die folgenden Werte:

$\gamma$  = Anteil der untersuchten Spezies, die ohne Zufuhr des Toxins stirbt  
(natürliche Mortalität),

$p_i$  = erwarteter Anteil der untersuchten Spezies, die nur aufgrund des Toxins der Dosis  $d_i$  stirbt ( $i=1, \dots, k$ ) und

$p_i^*$  = beobachteter Anteil der untersuchten Spezies, die bei Zufuhr des Toxins der Dosis  $d_i$  stirbt ( $i=1, \dots, k$ ).

Dann kann  $p_i^*$  wie folgt ausgedrückt werden:

$$p_i^* = \gamma + (1 - \gamma) p_i \quad (\text{Collett, 2003}).$$

Für die Analyse wird  $\gamma$  aus einer Kontrollgruppe der untersuchten Spezies geschätzt, der kein Toxin gegeben wurde. Die Schätzung von  $p_i$  erfolgt dann nur über die  $k$  Gruppen, denen das Toxin verabreicht wurde, unter Einbeziehung von  $\gamma$  auf der Basis der obigen Formel.

Ein analoges Konzept existiert auch in der Psychophysik, die auf Wahrscheinlichkeiten basierende Theorie des hohen Schwellenwertes (engl. high threshold theory). Unter dieser Theorie wird angenommen, dass sich der Proband nur in einer von zwei Zuständen befinden kann: Der Reiz wird entweder entdeckt oder nicht entdeckt. Die Wahrscheinlichkeit, den Reiz zu entdecken, hat hierbei die Wahrscheinlichkeit  $p(x^*) = \tilde{F}(x^*, \beta)$ , wobei  $\tilde{F}(x^*, \beta)$  die psychometrische Funktion aus Kapitel 4.1.2 darstellt. Wenn der Reiz nicht entdeckt wird, dann rät der Proband mit der Wahrscheinlichkeit  $\gamma$ . Dies führt zu einer verallgemeinerten Form  $\psi(x^*; \beta, \gamma)$  der psychometrischen Funktion  $\tilde{F}(x^*, \beta)$ , die wie folgt definiert ist (Klein, 2001):

$$\psi(x^*; \beta, \gamma) = \psi(x^*; \theta) = \gamma + (1 - \gamma) \tilde{F}(x^*, \beta).$$

Die ursprüngliche Reizentdeckungswahrscheinlichkeit wird also um die reine Ratequote  $\gamma$  korrigiert. Hiermit ist eine Trennung zwischen sensorischem und Entscheidungsprozeß möglich (s. Kapitel 2.3.2). Die Reaktionsneigung des Probanden wird isoliert, um die Leistungen des Wahrnehmungsapparates allein betrachten zu können (Hatscher, 1997). Der Parameter  $\gamma$  stellt die untere Schranke von  $\psi(x^*; \theta)$  dar (Wichmann & Hill, 2001a). Für die Schätzung von  $\gamma$  werden dem Probanden Teilerperimente ohne das zu erkennende Signal angeboten. In unserem Fall waren dies die Leerfolien (s. Kapitel 3.1).

### 4.3 Spezielle Linkfunktionen

#### 4.3.1 Einleitung und Beispiel

In den folgenden Kapiteln werden die Linkfunktionen, die bei der Modellierung zur Anwendung kamen, im Einzelnen beschrieben. Zum besseren Verständnis werden ihre Eigenschaften mit Hilfe des folgenden Beispieldatensatzes illustriert. Zur Übersichtlichkeit sind die Indizes  $i$  für die Stützstellen weggelassen.

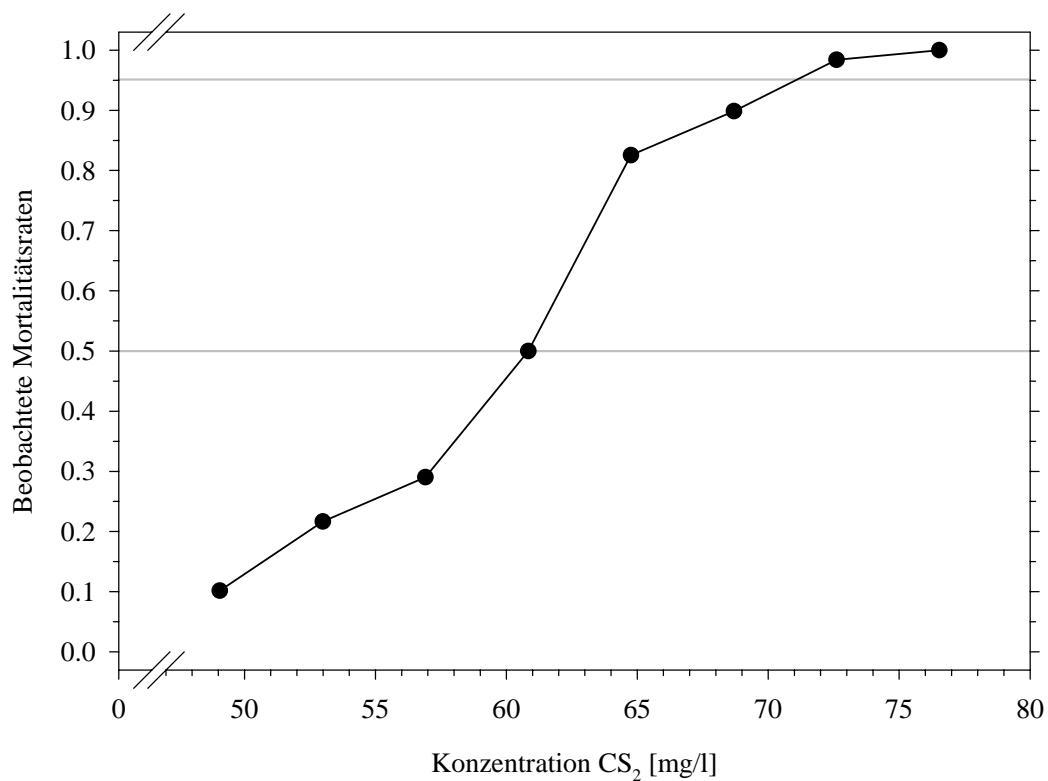
Ein klassisches Beispiel zur Beschreibung verschiedener Modellierungsansätze symmetrischer und asymmetrischer Verteilungen stellt der Mehlkäfer-Versuch dar, dessen Ergebnisse erstmals im Jahre 1930 beschrieben wurden (*Strand*, 1930). In diesem Versuch wurde u.a. die Mortalität erwachsener Mehlkäfer (*Tribolium confusum*) untersucht, nachdem diese fünf Stunden lang unter standardisierten Bedingungen verschiedenen Konzentrationen von Schwefelkohlenstoff ( $\text{CS}_2$ ) ausgesetzt wurden. Der Originalversuch bestand aus zwei Einzelversuchen, die zur Illustration der Unterschiede der verschiedenen Linkfunktionen hier aber zusammengefasst dargestellt und analysiert werden.

Das Mehlkäfer-Experiment und die Daten aus dem dieser Arbeit zu Grunde liegenden zahnmedizinischen Experiment sind vergleichbar, da die Variablen Mortalität (Prozentsatz getöteter Tiere) und Erkennungswahrscheinlichkeit (Prozentsatz richtig erkannter Tastfolien) dieselbe probabilistische Struktur einer Binomialverteilung besitzen. Auch wird in beiden Experimenten das Schwellenverhalten untersucht. Die darunter liegenden Mechanismen unterscheiden sich jedoch jeweils.

Die Originaldaten zu dem Mehlkäfer-Experiment sind in Tabelle 4.2 zu finden. Abbildung 4.2 zeigt die Verteilung der beobachteten Mortalitätsraten über die Konzentrationsstufen hinweg.

Konzentration CS <sub>2</sub> [mg/l]	lg <sub>10</sub> (Konzentr.) CS <sub>2</sub> [mg/l]	Gesamtanzahl Mehlkäfer (Exp.1 / Exp.2)	Anzahl getöteter Mehlkäfer (Exp.1 / Exp.2)	Beobachtete Mortalitäts- raten
49.06	1.6907	59 (29 / 30)	6 ( 2 / 4)	0.1017
52.99	1.7242	60 (30 / 30)	13 ( 7 / 6)	0.2167
56.91	1.7552	62 (28 / 24)	18 ( 9 / 9)	0.2903
60.84	1.7842	56 (27 / 29)	28 (14 / 14)	0.5000
64.76	1.8113	63 (30 / 33)	52 (23 / 29)	0.8254
68.69	1.8369	59 (31 / 28)	53 (29 / 27)	0.8983
72.61	1.8610	62 (30 / 32)	61 (29 / 32)	0.9839
76.54	1.8839	60 (29 / 31)	60 (29 / 31)	1.0000

**Tab. 4.2:** Mehlkäfer-Experiment: Originaldaten



**Abb. 4.2:** Mehlkäfer-Experiment: Beobachtete Mortalitätsraten (kombinierte Daten)

#### 4.3.2 Probit-Transformation

Historisch gesehen ist diese Linkfunktion eine der ersten, die im Rahmen der Auswertung von Dosis-Wirkungsbeziehungen entwickelt wurde. Damals war es das Ziel, die Erfolgswahrscheinlichkeit (relative Häufigkeit getöteter Tiere pro Wirkstoffkonzentration) als Funktion der Dosis der untersuchten Substanz darzustellen. In Anlehnung an die Erkenntnisse von Weber-Fechner wurden die Wirkstoffkonzentrationen logarithmiert und der S-förmige Verlauf mit Hilfe der Verteilungsfunktion einer Normalverteilung beschrieben. Der Name *probit* geht zurück auf die Überführung der relativen Häufigkeiten in die entsprechenden kumulierten Wahrscheinlichkeiten auf der Normalverteilungskurve (*probit* = probability unit; Finney, 1971). Theoretisch ist aber auch die Beschreibung untransformierter Konzentrationen möglich.

Die Linkfunktion  $probit(p)$  ist die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion einer Normalverteilung und ist wie folgt definiert:

$g(p) = probit(p) = \Phi^{-1}(p)$ , und

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad (x^* = f_{tr}(x), \text{ z.B. } x^* = \ln(x))$$

Die entsprechende Toleranzfunktion  $\tilde{f}(y) = \tilde{F}'(y)$  ist dann eine Normalverteilung.

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = \frac{\beta_2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2 x^*)^2\right\} = \frac{1}{(1/\beta_2)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^* - (-\beta_1/\beta_2)}{(1/\beta_2)}\right)^2\right\}.$$

Für den *probit*-Link hat die Erklärungsfunktion  $\tilde{F}(x^*) = F(\beta_1 + \beta_2 x^*)$  für  $p$  also die Form einer normalverteilten Verteilungsfunktion mit Erwartungswert  $\mu = -\beta_1/\beta_2$  und Standardabweichung  $\sigma = 1/\beta_2$ .

Sie ist punktsymmetrisch um ihren Erwartungswert und hat in diesem Punkt auch ihren stärksten Anstieg mit  $\beta_2/(2\pi)^{1/2} \approx 0.40\beta_2$ .

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (\Phi^{-1}(p) - \beta_1).$$

Die Parameterschätzer für  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0.50}$ ,  $\mathcal{G}_{0.95}$  und  $\mathcal{G}_{0.99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in den Tabellen 4.3 (untransformierte Konzentrationen) und 4.4 (transformierte Konzentrationen) zu finden. Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung folgen im Anschluss daran.

#### 4.3.3 Logit-Transformation

Der *logit*-Link ist, bezogen auf die zugrunde liegende Binomialverteilung, der kanonische Link (s. Anhang A3 Exponentialfamilie). Sein Name wurde analog zur *probit*-Transformation gewählt (*logit* = logistic unit; *Finney*, 1971). Die Linkfunktion ist wie folgt definiert:

$$g(p) = \text{logit}(p) = \ln\{p/(1-p)\}.$$

Sei  $p$  die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Ereignisses, dann ist die Chance (engl. odds) des Auftretens dieses Ereignisses wie folgt definiert:  $\text{odds} = \frac{p}{1-p}$  (*Kreienbrock &*

*Schach*, 1997).  $\text{logit}(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$  ist also der Logarithmus dieses odds.

Die *logit*-Transformation ist aus mehreren Gründen die gebräuchlichste der drei hier vorgestellten Transformationen. Sie ist nicht von einer bestimmten Verteilungsfunktion abhängig wie dies z.B. bei der *probit*-Transformation der Fall ist. Zugleich unterscheiden sich diese beiden Linkfunktionen in ihrer Form nur bei sehr großen Stichprobenumfängen. Da die Chance des Auftretens eines Ereignisses auch als Höhe des Risikos dieses Ereignisses interpretiert werden kann, wird diese Transformation v.a. bei der Analyse retrospektiver Daten verwendet. Man bezeichnet dieses Modell auch als logistisches Regressionsmodell.

Drückt man  $\text{logit}(p)$  über die Parameter des linearen Prädiktors aus, so erhält man folgende Gleichung:

$$\text{logit}(p) = \ln[e^{\beta_1} (e^{\beta_2})^{x^*}] .$$

Die Chance des Auftretens des interessierenden Ereignisses steigt also multiplikativ mit  $e^{\beta_2}$ , wenn  $x^*$  um eine Einheit wächst (*Agresti*, 1990).

Die *logit*-Transformation wird auch als eine Methode der quantitativen Risikoabschätzung zur Untersuchung von Schwellenwerten in epidemiologischen Studien vorgeschlagen (*Bender*, 1999).

Die Umkehrfunktion der Linkfunktion ist

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* .$$

Diese Verteilungsfunktion ist – wie die *probit*-Transformation – punktsymmetrisch um ihren Erwartungswert  $x^* = -\beta_1/\beta_2$ . An diesem Punkt hat die Kurve auch ihren steilsten Anstieg mit  $\beta_2/4$ . Der Wert  $1/\beta_2$  approximiert den Abstand zwischen den beiden  $x^*$ -Werten, für die gilt:  $p(x^*) = 0.25$  und  $p(x^*) = 0.5$ , bzw.  $p(x^*) = 0.5$  und  $p(x^*) = 0.75$ .

Die entsprechende Toleranzfunktion  $\tilde{f}(x^*) = \tilde{F}'(x^*)$  ist

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)} \left( 1 - \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)} \right) = p(1 - p).$$

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} \left( \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) - \beta_1 \right).$$

Die Parameterschätzer für  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0.50}$ ,  $\mathcal{G}_{0.95}$  und  $\mathcal{G}_{0.99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in den Tabellen 4.3 und 4.4 zu finden. Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung befindet sich im Anschluss daran.

#### 4.3.4 Cloglog-Transformation

Die komplementäre loglog- oder cloglog-Transformation hat die Form

$$g(p) = \text{cloglog}(p) = \ln\{-\ln(1-p)\}.$$

Im Gegensatz zur logit- und probit-Transformation ist sie nicht symmetrisch. Wenn  $p$  klein ist, sind die cloglog-Transformation und die logit-Transformation nahezu identisch (Collett, 2003).

Es gilt:  $\ln(1-p) \approx -p$  für  $p$  hinreichend klein

(lineare Approximation der  $\ln$ -Funktion im Punkt  $x=1$ ).

$$\Rightarrow -\ln(1-p) \approx p \quad \text{und} \quad p \approx p/(1-p) \quad \text{für } p \text{ hinreichend klein}$$

$$\text{Weiterhin gilt: } \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p/(1-p)}{-\ln(1-p)} = 1 \quad (\text{Regel von de l'Hôpital})$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \ln \left\{ \frac{p/(1-p)}{-\ln(1-p)} \right\} = \ln(1) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \ln \left\{ \frac{p}{(1-p)} \right\} = \lim_{p \rightarrow 0} \ln(-\ln(1-p))$$

Die Umkehrfunktion der Linkfunktion ist

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = 1 - \exp[-\exp(\eta)] \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

In diesem Ausdruck ist  $\exp[-\exp(\eta)]$  enthalten, die Verteilungsfunktion der Gumbel-Verteilung. Diese ist eine Extremwertverteilung, die Minima beschreibt (Davison, 1998). Lautet die Transformation der  $x$ -Werte  $x^* = \ln(x)$ , dann erhält man die Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung (Kuss et al., 2005).

Die zur *cloglog*-Transformation gehörende Toleranzfunktion  $\tilde{f}(x^*) = \tilde{F}'(x^*)$  ist

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = \exp(\eta) \cdot \exp[-\exp(\eta)].$$

Die *cloglog*-Transformation erreicht  $p=0.5$  früher als die *probit*-, bzw. *logit*-Transformation, nämlich bei  $\eta = \ln(-\ln(0.5)) \approx -0.3665$ . Sie hat aber wie die anderen beiden Transformationen im Punkt  $\eta = 0$  ( $p = 1 - \exp(-1) \approx 0.6321$ ) ihren stärksten Anstieg mit  $\beta_2 / e \approx 0.3679 \cdot \beta_2$ .

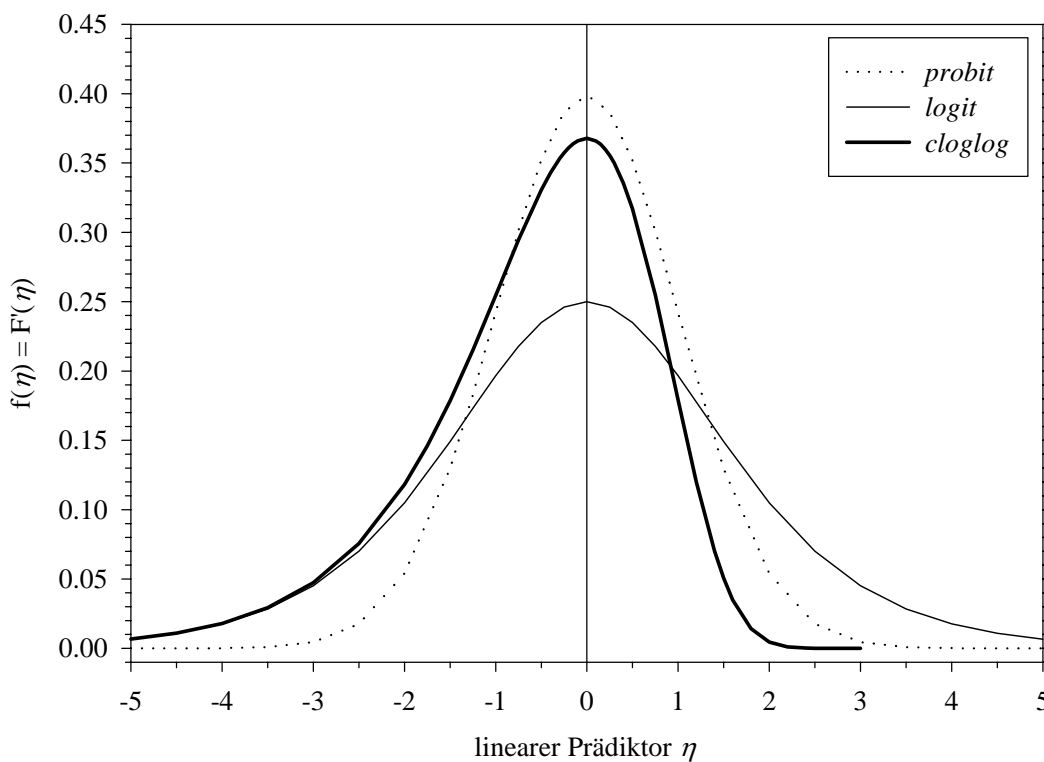
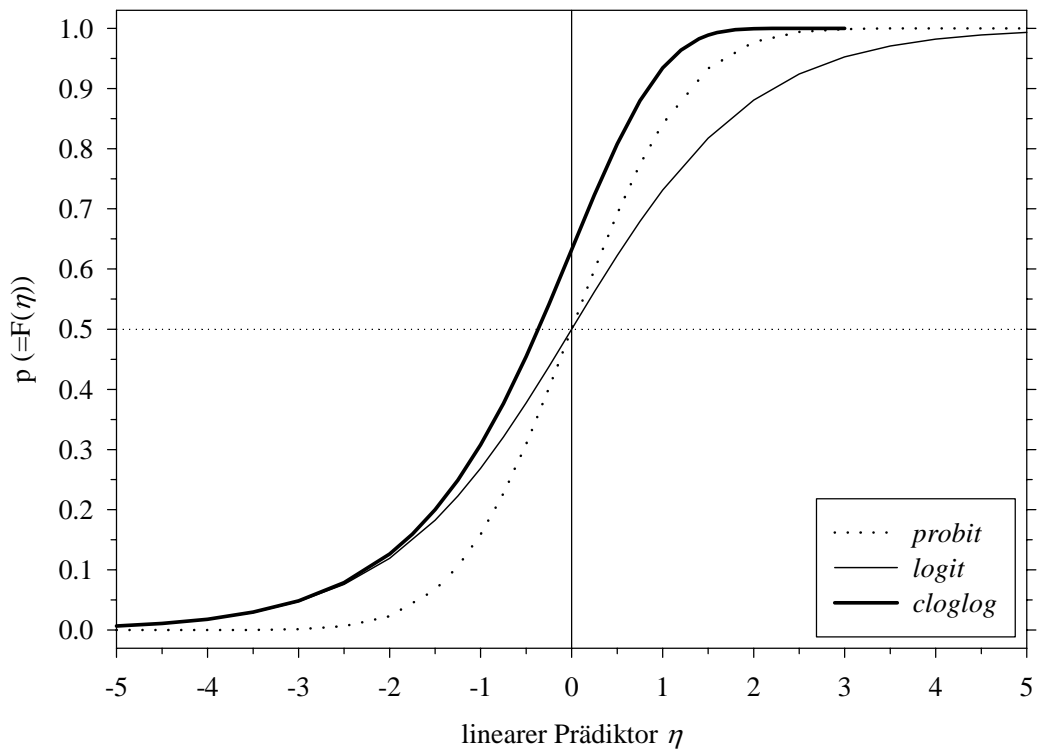
Diese Funktion nähert sich der 1 steiler als sie die 0 verlässt (rechtssteil). Ist die Verteilung der Daten linkssteil, kann man zu deren Modellierung die *loglog*-Transformation verwenden:  $\log\log(p) = \ln\{-\ln(p)\}$ . Wenn die *cloglog*-Transformation die Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$  erklärt, dann erklärt im Gegenzug die *loglog*-Transformation die Misserfolgswahrscheinlichkeit  $(1-p)$ .

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  im Falle der *cloglog*-Transformation ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (\ln\{-\ln(1-p)\} - \beta_1).$$

Die Parameterschätzer für  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0.50}$ ,  $\mathcal{G}_{0.95}$  und  $\mathcal{G}_{0.99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in den Tabellen 4.3 und 4.4 zu finden. Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung befindet sich im Anschluss daran.

Abbildung 4.3 zeigt die bzgl. des linearen Prädiktors  $\eta$  standardisierten Verteilungs- und Toleranzfunktionen von *probit*-, *logit*- und *cloglog*-Transformation.



**Abb. 4.3:** Verteilungsfunktionen  $p=F(\eta)$  und Toleranzfunktionen  $f(\eta)=F'(\eta)$  der drei Linkfunktionen *probit*, *logit* und *cloglog*



**Mehlkäfer-Experiment: Vergleich der Ergebnisse (*probit*, *logit*, *cloglog*)**

Der Vergleich der Ergebnisse der drei Standardverfahren zeigt, dass die Modellierung mit der asymmetrischen *cloglog*-Linkfunktion (Devianz = 3.732 bzw. 3.440) deutlich bessere, weil kleinere Werte liefert als die Modellierung mit den beiden symmetrischen Linkfunktionen *probit* (Devianz = 6.486 bzw. 10.107) und *logit* (Devianz = 7.566 bzw. 11.221). Dies ist unabhängig davon, ob die Variable „Konzentration“ untransformiert oder transformiert ( $\lg_{10}$ ) in das Modell einfließt. Ebenfalls im Gegensatz zu den symmetrischen Linkfunktionen zeigt der Vergleich innerhalb der *cloglog*-Transformation keine großen Unterschiede zwischen der Modellierung mit den Originalkonzentrationen (Devianz=3.732) und den transformierten Konzentrationen (Devianz=3.440).

Die Schätzer  $\mathcal{J}_{0.50}$  sind bei allen drei Modellen ähnlich. Beim  $\mathcal{J}_{0.95}$  bzw.  $\mathcal{J}_{0.99}$  sind die Unterschiede, bedingt durch die Symmetrie bzw. Asymmetrie größer. Hierbei liefert die Schätzung mit dem *cloglog*-Modell bedingt durch den stärkeren Anstieg den kleinsten Schätzwert. Die folgenden Tabellen 4.3 (untransformierte Konzentrationen) und 4.4 ( $\lg_{10}(\text{Konzentration})$ ) fassen die Ergebnisse nochmals zusammen.

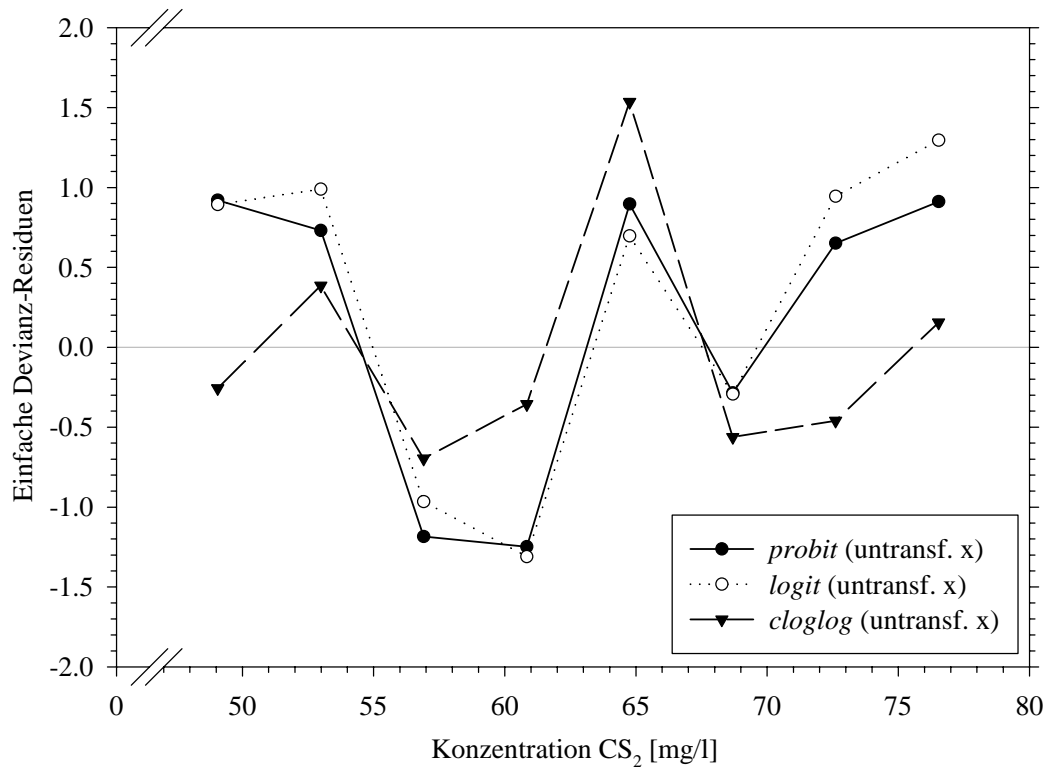
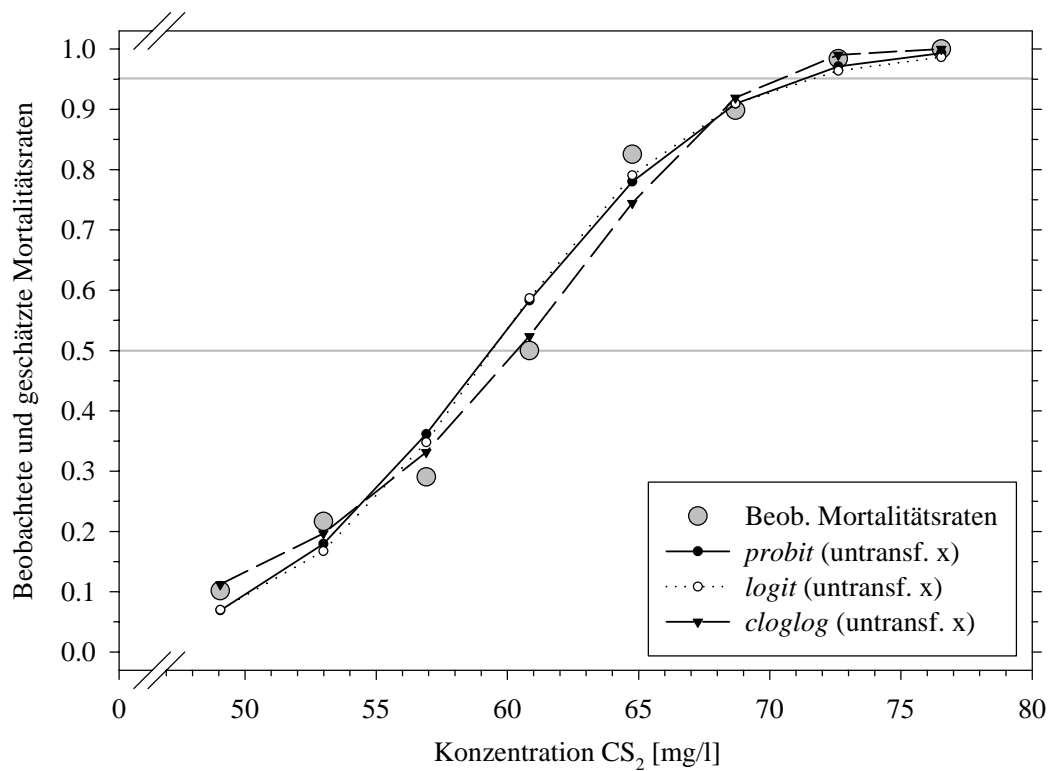
Konzentration	Schätzer	<i>Probit</i>	<i>Logit</i>	<i>Cloglog</i>
x-Werte untransformiert	Devianz	6.486	7.566	3.732
	$\beta_1$	-8.520	-14.808	-9.755
	$\beta_2$	0.144	0.249	0.155
	$\mathcal{J}_{0.50}$	59.38	59.42	60.42
	[95%-K.I.]	[58.36; 60.40]	[58.39; 60.46]	[59.31; 61.52]
	$\mathcal{J}_{0.95}$	70.84	71.24	69.84
	[95%-K.I.]	[68.95; 72.74]	[69.08; 73.39]	[68.33; 71.35]
	$\mathcal{J}_{0.99}$	75.59	77.86	72.60
	[95%-K.I.]	[73.06; 78.12]	[74.69; 81.04]	[70.73; 74.47]

**Tab. 4.3:** Ergebnisse zur Modellierung der Mehlkäferdaten für die Linkfunktionen *probit*, *logit* und *cloglog* (untransformierte Konzentrationen)

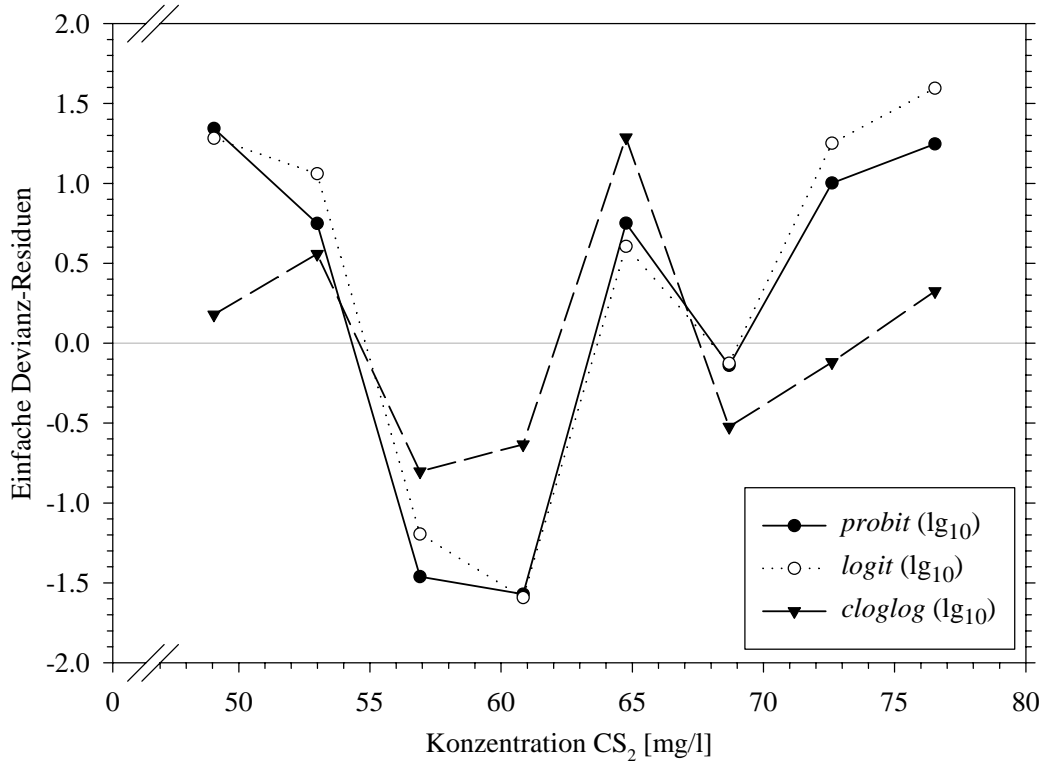
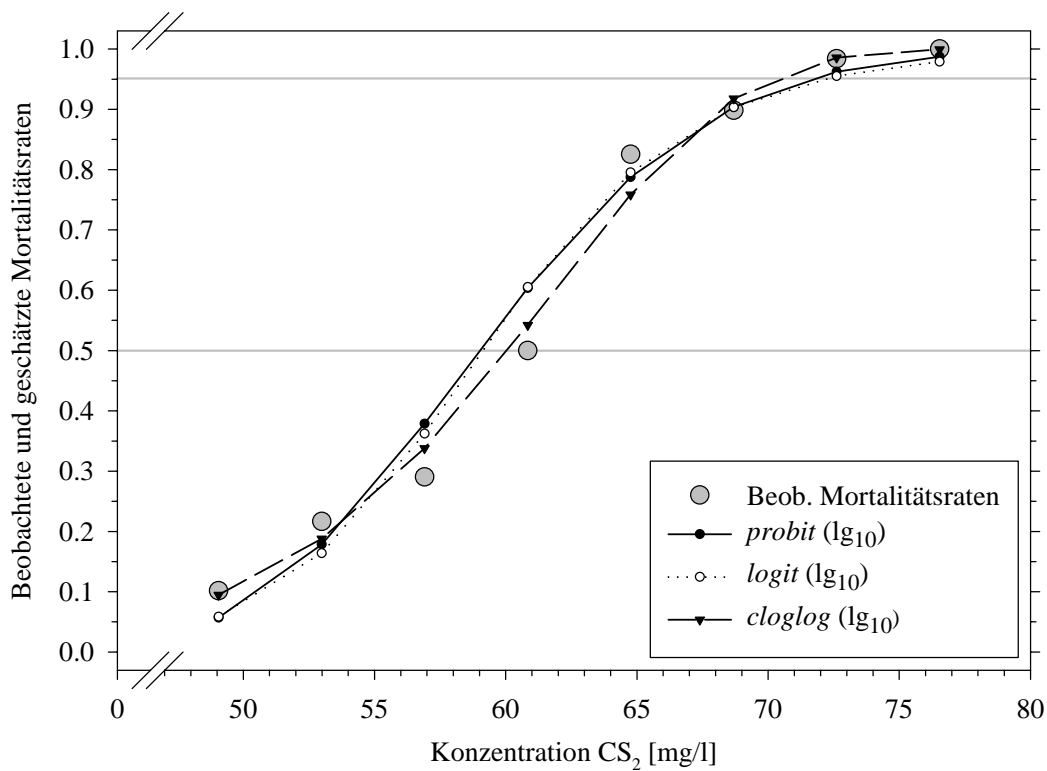
Konzentration	Schätzer	<i>Probit</i>	<i>Logit</i>	<i>Cloglog</i>
$x^* = \lg_{10}(x)$	Devianz	10.107	11.221	3.440
	$\beta_1$	-34.939	-60.716	-39.574
	$\beta_2$	19.730	34.269	22.042
	$\mathcal{D}_{0.50}$	59.00	59.12	60.08
	[95%-K.I.]	[58.00; 60.02]	[58.10; 60.16]	[59.01; 61.18]
	$\mathcal{D}_{0.95}$	71.49	72.05	70.01
	[95%-K.I.]	[69.34; 73.70]	[69.58; 74.61]	[68.40; 71.65]
	$\mathcal{D}_{0.99}$	77.40	80.50	73.23
	[95%-K.I.]	[74.31; 80.62]	[76.44; 84.78]	[71.15; 75.36]

**Tab. 4.4:** Ergebnisse zur Modellierung der Mehlkäferdaten für die Linkfunktionen *probit*, *logit* und *cloglog* (transformierte Konzentrationen:  $x^* = \lg_{10}(x)$ )

Abbildungen 4.4 (untransformierte Konzentrationen) und 4.5 ( $\lg_{10}(\text{Konzentration})$ ) zeigen die durch die drei Linkfunktionen geschätzten Werte im Vergleich zu den beobachteten Mortalitätsraten, sowie die dazugehörigen einfachen Devianz-Residuen. Hier wird deutlich, dass nur bei den Konzentrationen 64.76 mg/l und 68.69 mg/l das *cloglog*-Modell schlechtere Werte liefert als die beiden anderen Modelle. Dies gilt sowohl für die untransformierten als auch für die logarithmierten Konzentrationswerte.



**Abb. 4.4:** Mehlkäfer-Experiment: Beobachtete Mortalitätsraten (kombinierte Daten) und geschätzte relative Häufigkeiten, sowie dazugehörige, einfache Devianz-Residuen (*probit*, *logit*, *cloglog* – untransformierte Konzentrationen -)



**Abb. 4.5:** Mehlkäfer-Experiment: Beobachtete Mortalitätsraten (kombinierte Daten) und geschätzte relative Häufigkeiten, sowie dazugehörige, einfache Devianz Residuen ( $\text{probit}$ ,  $\text{logit}$ ,  $\text{cloglog}$  – transformierte Konzentrationen:  $x^* = \lg_{10}(x)$ )

#### 4.3.5 Halblogistisches Modell

Das halblogistische Modell ist keine Standard-Linkfunktion, sondern eine Modifizierung der *logit*-Transformation, um den speziellen Verlauf der zahnmedizinischen Daten aus dieser Arbeit besser modellieren zu können. Diese Daten waren im Median so verteilt, dass deren Verlauf eher nur der oberen Hälfte einer sigmoiden Kurve glich, da die meisten Probanden bereits sehr dünne Tastfolien erspüren konnten (s. Kapitel 6 Ergebnisse). Dies führte zu der Idee, nur die obere Hälfte der *logit*-Linkfunktion, gestreckt auf den gesamten Wertebereich von 0 bis 1, als Modell zu verwenden.

Die dazugehörige Linkfunktion lautet wie folgt:

$$g(p) = \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right)$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \begin{cases} \frac{\exp(\eta) - 1}{\exp(\eta) + 1} & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

Die entsprechende Toleranzfunktion  $\tilde{f}(x^*) = \tilde{F}'(x^*)$  ist

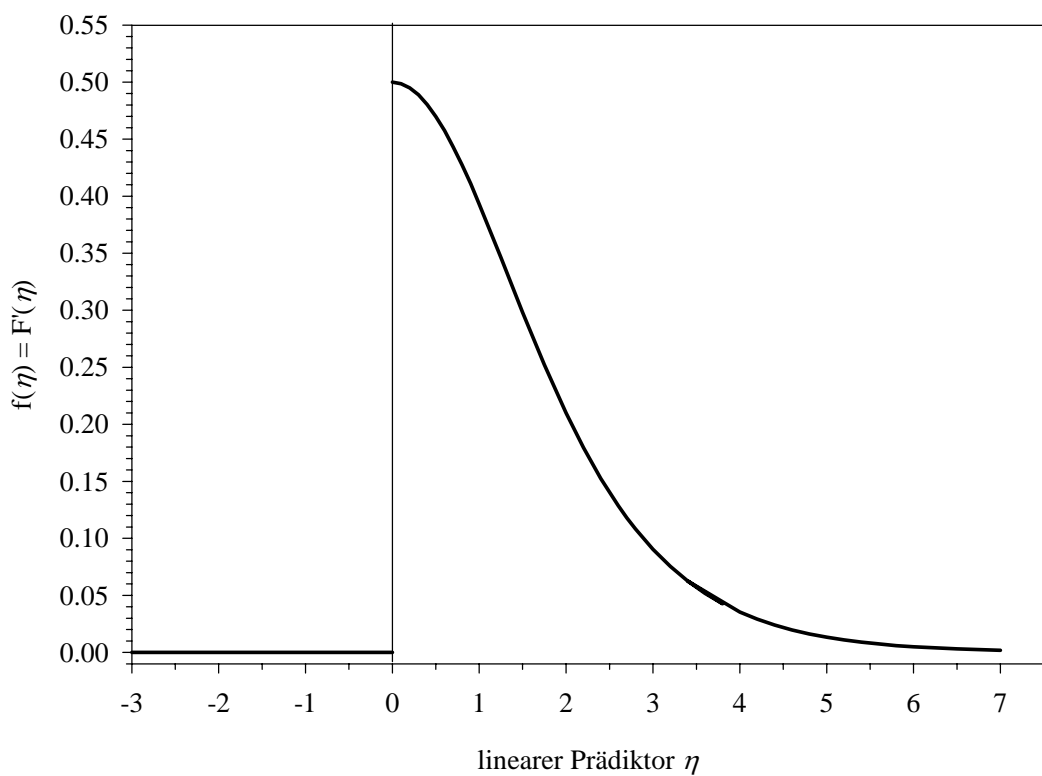
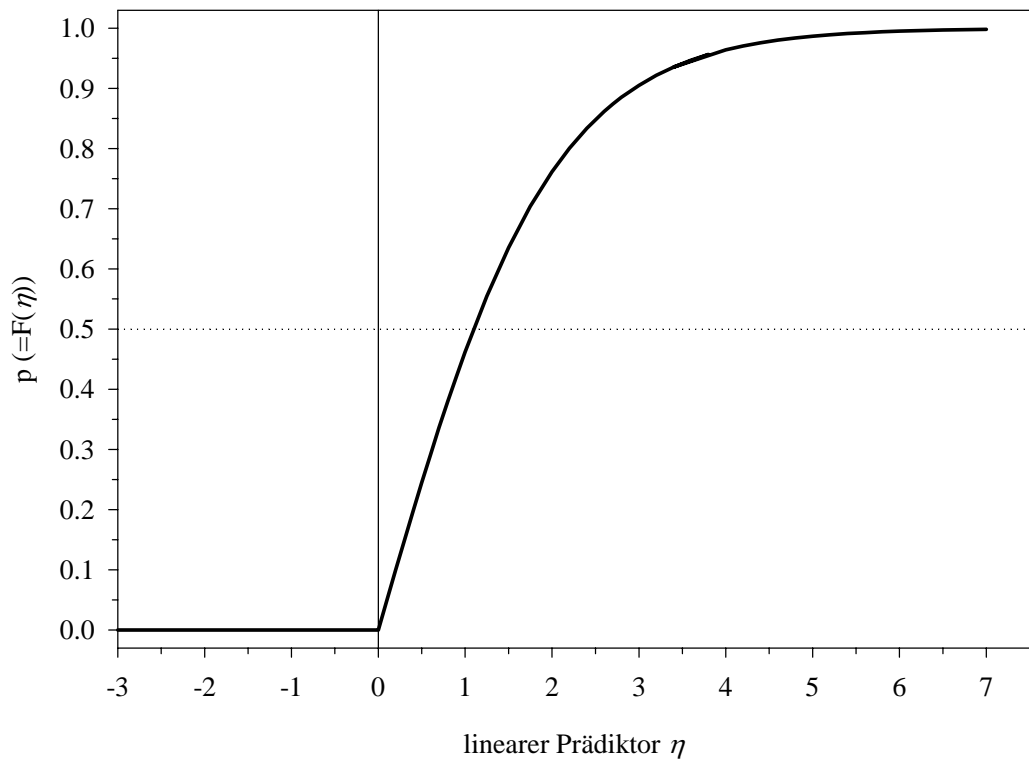
$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = F'(\eta) = \begin{cases} \frac{2 \cdot \exp(\eta)}{(\exp(\eta) + 1)^2} & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases}$$

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} \left( \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right) - \beta_1 \right).$$

Die Parameterschätzer für  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0.50}$ ,  $\mathcal{G}_{0.95}$  und  $\mathcal{G}_{0.99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in Tabelle 4.5 ( $\lg_{10}(\text{Konzentration})$ ) zu finden. Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung folgen danach.

Abbildung 4.6 zeigt die Verteilungs- und die Toleranzfunktion dieses Modells, jeweils standardisiert bzgl. des linearen Prädiktors  $\eta$ .



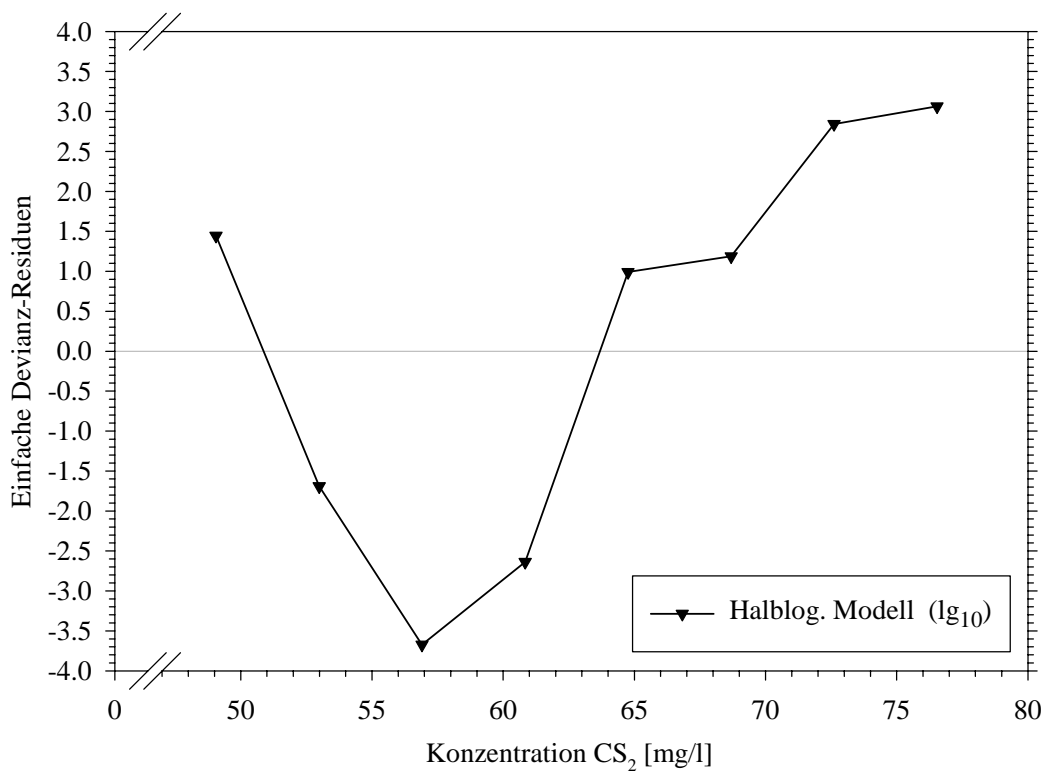
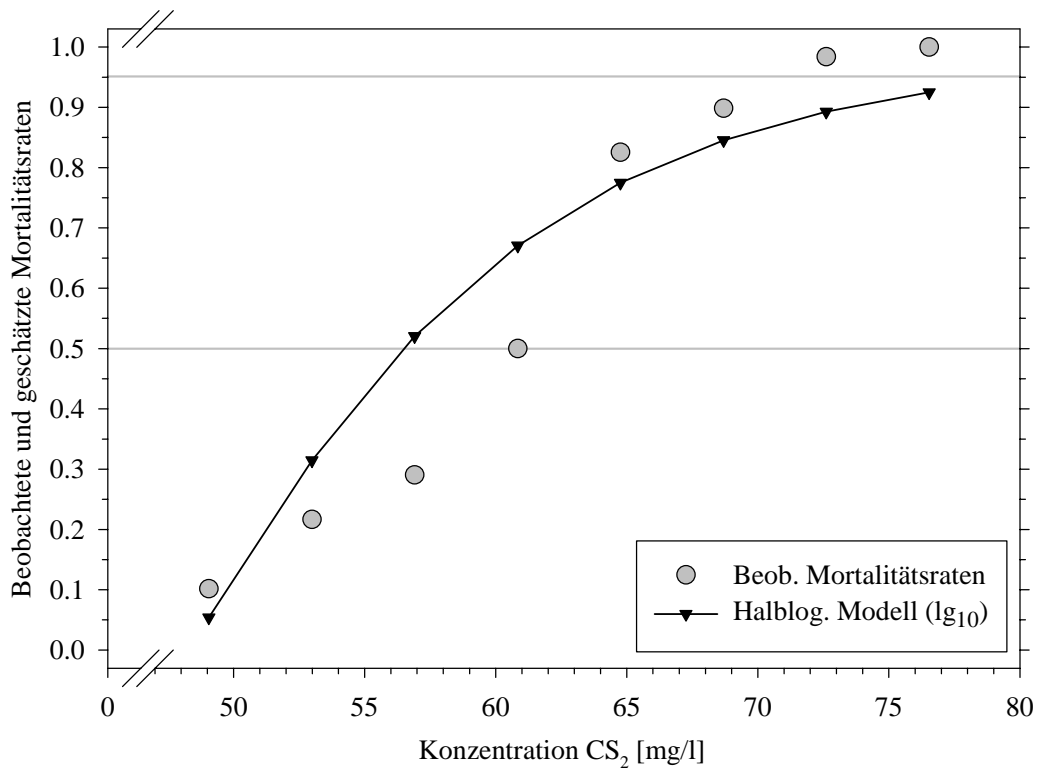
**Abb. 4.6:** Verteilungsfunktion  $p=F(\eta)$  und Toleranzfunktion  $f(\eta) = F'(\eta)$  für das halblogistische Modell

**Mehlkäfer-Experiment: Ergebnisse für das halblogistische Modell**

Diese Linkfunktion ist für die Modellierung des Beispieldatensatzes des Mehlkäfer-Experimentes eigentlich nicht geeignet, da diese Werte einen sigmoiden Verlauf haben. Dies zeigt sich in einem extrem hohen Wert für die Devianz. Der Vollständigkeit halber sind jedoch die Ergebnisse (Tab. 4.5) und grafischen Darstellungen (Abb. 4.7) analog zu den anderen Linkfunktionen nachfolgend aufgeführt.

Konzentration	Schätzer	Halblogistisches Modell
$x^* = \lg_{10}(x)$	Devianz	45.238
	$\beta_1$	-27.314
	$\beta_2$	16.219
	$\mathcal{Q}_{0.50}$	56.46
	[95%-K.I.]	[55.50; 57.44]
	$\mathcal{Q}_{0.95}$	81.27
	[95%-K.I.]	[76.56; 86.27]
	$\mathcal{Q}_{0.99}$	102.42
	[95%-K.I.]	[93.67; 111.99]

**Tab. 4.5:** Ergebnisse zur Modellierung der Mehlkäferdaten mit dem halblogistischen Modell (transformierte Konzentrationen:  $x^* = \lg_{10}(x)$ )



**Abb. 4.7:** Mehlkäfer-Experiment: Beobachtete Mortalitätsraten (kombinierte Daten) und geschätzte relative Häufigkeiten, sowie dazugehörige, einfache Devianz-Residuen (Halblogistisches Modell – transformierte Konzentrationen:  $x^* = \lg_{10}(x)$ )



Um eine größere Bandbreite von Modellen zu enthalten, wurden weitere Modelle entwickelt, die eine Verallgemeinerung der bisherigen Standard-Modelle darstellen. Erfahrungen zeigen, dass zwei zusätzliche Parameter bei der Modellierung der meisten Datensätze zu numerischen Problemen und flachen Likelihoods führen. Verallgemeinerungen mit nur einem zusätzlichen, dritten Parameter führen hier zu besseren Modellierungsergebnissen (Czado, 1997). Nachfolgend werden die Wichtigsten dieser Verallgemeinerungen beschrieben. Zu beachten ist, dass in der Psychophysik Modelle mit mehr als zwei Parametern zur Modellierung psychometrischer Funktionen nicht angewendet werden.

#### 4.3.6 Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)

Im Gegensatz zu den weiter unten folgenden Modellen mit drei Parametern beeinflusst bei der Box-Cox-Transformation der 3. Parameter nicht den linearen Prädiktor als Ganzes, sondern nur die unabhängige Variable  $x$ . Die zusätzliche Transformation beeinflusst also die systematische Komponente des Modells und nicht die Linkfunktion (McCullagh & Nelder, 1989). Die bisher vorgestellten Linkfunktionen wurden für die Analyse von Dosis-Wirkungsbeziehungen entwickelt. Eine natürliche Transformation der unabhängigen Variable (Dosis) war hier die Logarithmierung zur Basis  $e$  oder zur Basis 10, da die praktische Erfahrung zeigte, dass in den meisten Fällen eine Modellierung mit logarithmierten  $x$ -Werten bessere Ergebnisse brachte als eine Modellierung mit untransformierten  $x$ -Werten. Dies folgt aus der Arbeit von Weber-Fechner, obwohl dies gerade bei der Analyse von Dosis-Wirkungsbeziehungen bei Toxizitätsprüfungen auch kontrovers diskutiert wurde (Bliss, 1934). Eine aus diesen Überlegungen folgende Idee war es, die logarithmische Transformation in eine größere Familie monotoner Transformationen einzubetten.

Ein Beispiel hierfür ist die Box-Cox-Transformation, die erstmals 1964 von Box und Cox vorgeschlagen wurde (McCullagh & Nelder, 1989).

Hierbei werden die  $x$ -Werte wie folgt transformiert:

$$\text{boxcox}(x) = \begin{cases} (x^\lambda - 1) / \lambda & \lambda \neq 0 \\ \ln(x) & \lambda = 0 \end{cases}$$

Nach der Regel von de l'Hôpital (Bronstein & Semendjajew, 1981) gilt:  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda} = \ln(x)$ .

$\ln(x)$  ist die stetige Ergänzung der für  $\lambda=0$  nicht definierten Funktion  $\frac{x^\lambda - 1}{\lambda}$  (McCullagh & Nelder, 1989).

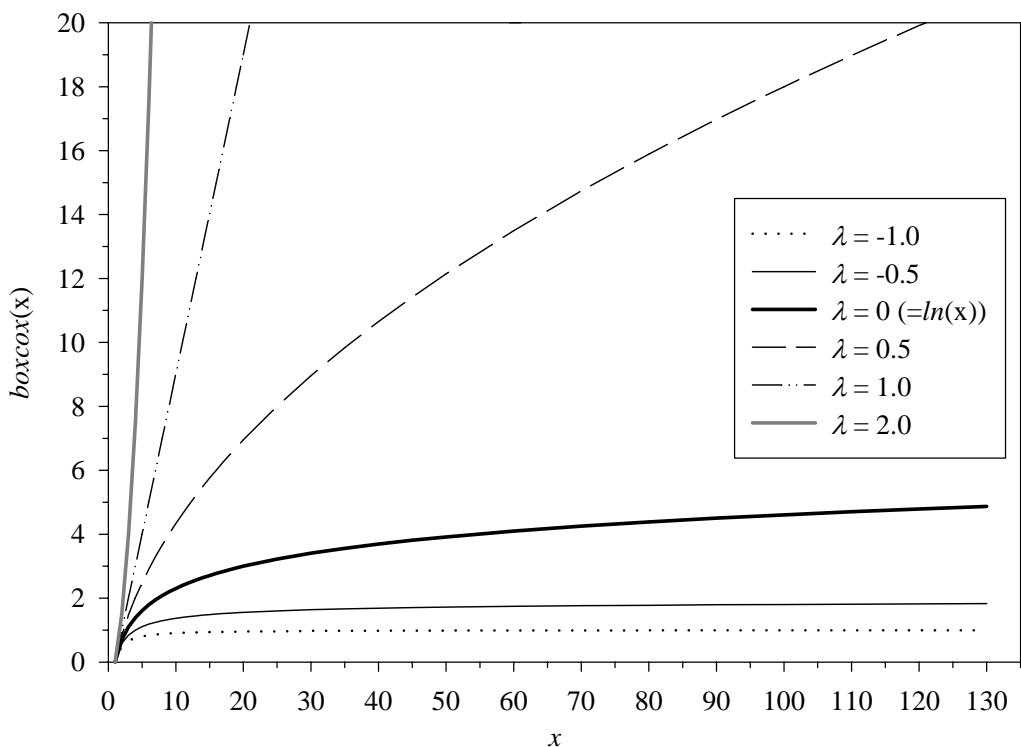
Die logarithmische Transformation ist also in der Box-Cox-Transformation enthalten. Guerrero & Johnson übertrugen diese Transformation auf Verallgemeinerte Lineare Modelle mit binären Daten (Guerrero & Johnson, 1982). Das Ziel war hier, die originale Dosis-Wirkungskurve annähernd symmetrisch zu machen, um bessere Modellierungsergebnisse mit der *logit*-Transformation zu erhalten. Wendet man diese Transformation auf die 2-parametrische *logit*-Linkfunktion an, handelt es sich also im Resultat um ein 3-parametrisches Modell.

Im Falle des *logit*-Links ist der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x$  gegeben durch

$$\mathcal{G}_p = bc^{-1} \left\{ \frac{1}{\beta_2} \left( \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) - \beta_1 \right) \right\} \text{ mit}$$

$$bc^{-1}(x) = \begin{cases} (\lambda \cdot x + 1)^{1/\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \exp(x) & \lambda = 0 \end{cases}.$$

Abbildung 4.8 stellt die Funktion  $boxcox(x)$  für verschiedene Werte von  $\lambda$  dar, wobei zur Illustration  $x$  die Werte zwischen 1 und 130 annimmt.



**Abb. 4.8:**  $boxcox(x)$  für  $\lambda$ -Werte zwischen -0.5 und +2.0

**Mehlkäfer-Experiment: Vergleich der Ergebnisse (*logit*, Box-Cox (*logit*))**

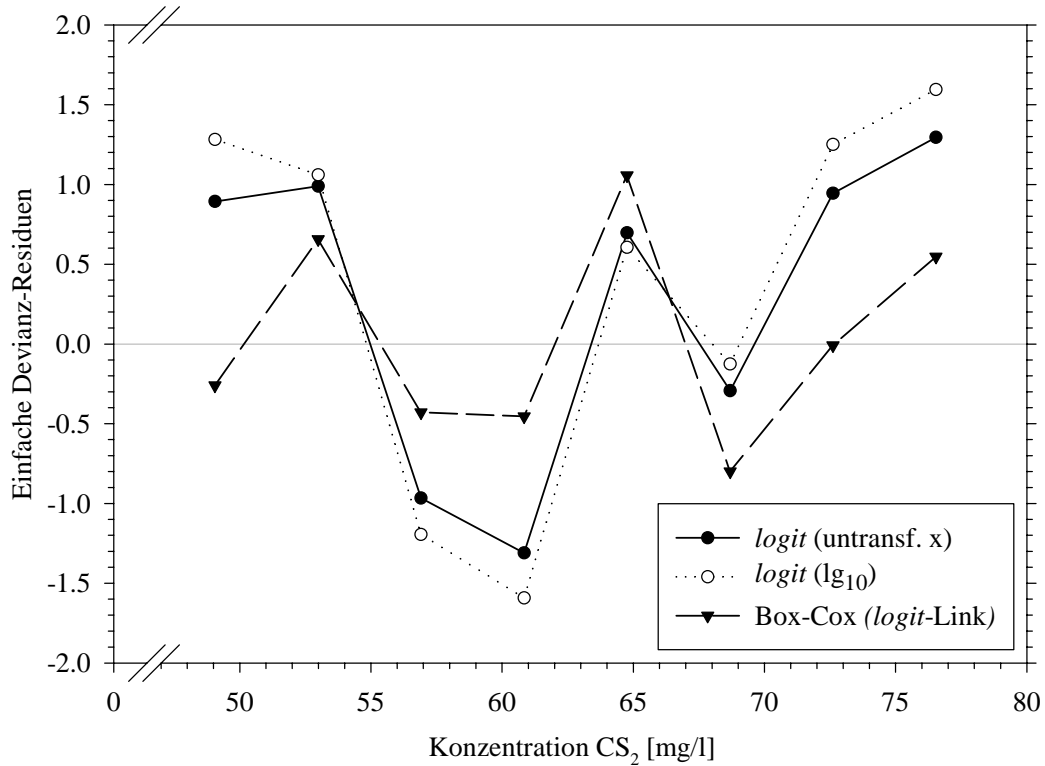
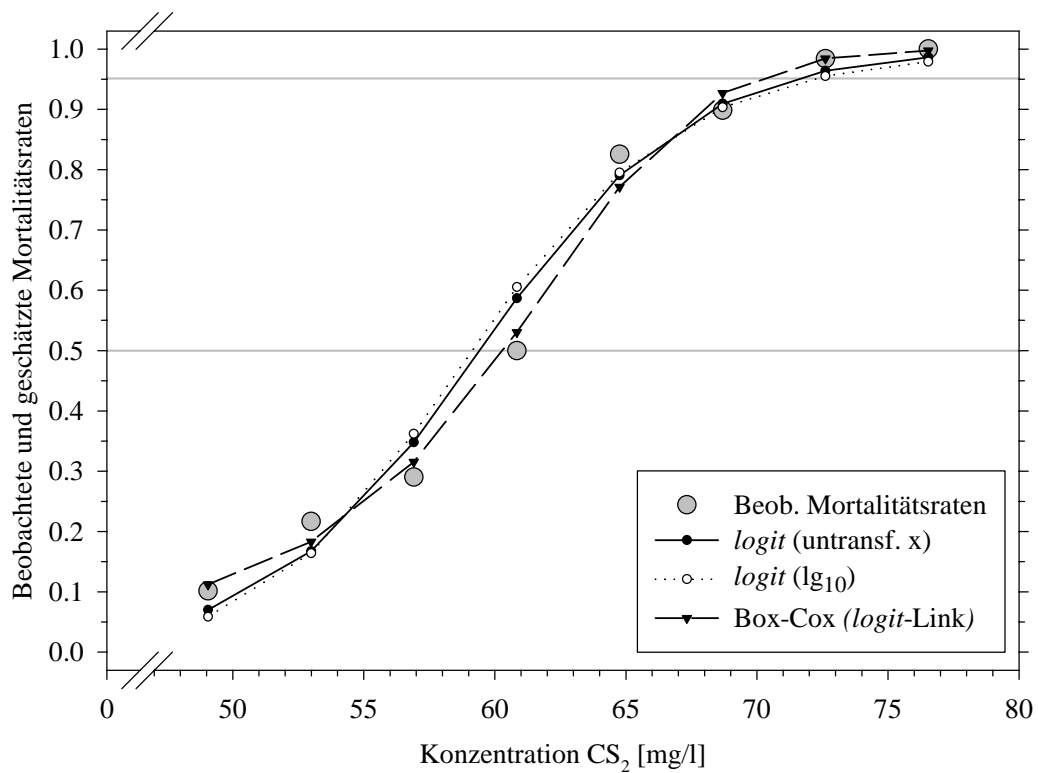
Bei der Modellierung des Beispieldatensatzes mit der Box-Cox-Transformation erhält man als Schätzer für  $\lambda$  einen sehr hohen Wert von 4.13. Das bedeutet, dass die Originalwerte sehr stark gestaucht werden. Dies hat zur Folge, dass der Schätzer für  $\beta_2$  verschwindend klein wird. Die so erhaltene Devianz ist deutlich kleiner als diejenige für den *logit*-Link (untransformierte oder logarithmierte x-Werte). Wegen der asymmetrischen Verteilung der Originaldaten ist es aber auf jeden Fall besser, für die Modellierung eine asymmetrische Linkfunktion zu verwenden. Die Modellierung mit der *cloglog*-Transformation erreicht bei nur zwei zu schätzenden Parametern eine ähnlich gute Devianz wie die Box-Cox-Transformation (s. Tab. 4.3 und 4.4).

Tabelle 4.6 fasst die Ergebnisse zusammen:

Schätzer	<i>Logit</i> (untransformierte x-Werte)	<i>Logit</i> ( $x^* = \lg_{10}(x)$ )	Box-Cox <i>logit</i> -Link (untransformierte x-Werte)
Devianz	7.566	11.221	2.945
$\beta_1$	-14.808	-60.716	-3.600
$\beta_2$	0.249	34.269	6.68E-7
$\lambda$	--	--	4.126
$\mathcal{D}_{0.50}$	59.42	59.12	60.35
[95%-K.I.]	[58.39; 60.46]	[58.10; 60.16]	[59.36; 61.34]
$\mathcal{D}_{0.95}$	71.24	72.05	69.76
[95%-K.I.]	[69.08; 73.39]	[69.58; 74.61]	[68.61; 70.90]
$\mathcal{D}_{0.99}$	77.86	80.50	73.66
[95%-K.I.]	[74.69; 81.04]	[76.44; 84.78]	[72.45; 74.88]

**Tab. 4.6:** Ergebnisse zur Modellierung der Mehlkäferdaten für den *logit*-Link (untransformierte und transformierte Konzentrationen) im Vergleich zur Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)

Abbildung 4.9 zeigt die durch die drei Linkfunktionen geschätzten Werte im Vergleich zu den beobachteten Mortalitätsraten, sowie die dazugehörigen einfachen Devianz-Residuen. Wie schon beim *cloglog*-Modell sieht man hier, dass nur bei den Konzentrationen 64.76 mg/l und 68.69 mg/l die Box-Cox-Transformation schlechtere Werte als die beiden anderen Modelle liefert.



**Abb. 4.9:** Mehlkäfer-Experiment: Beobachtete Mortalitätsraten (kombinierte Daten) und geschätzte relative Häufigkeiten, sowie dazugehörige, einfache Devianz-Residuen ( $\text{logit}$ -Link vs. Box-Cox-Transformation ( $\text{logit}$ -Link))

#### 4.3.7 Das Aranda-Ordaz-Modell

Aranda-Ordaz schlug zwei verschiedene Verallgemeinerungen vor, eines für symmetrische und eines für asymmetrische Verteilungen (Aranda-Ordaz, 1981). Da die experimentellen Daten als Grundlage der vorliegenden Arbeit eher eine asymmetrische Verteilung nahe legen, wird nachfolgend nur diese Verallgemeinerung vorgestellt.

Die dazugehörige Linkfunktion ist

$$g(p) = arord(p) = \ln \left\{ \frac{(1-p)^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right\}.$$

Hierbei ist  $\lambda$  neben  $\beta_1$  und  $\beta_2$  ein dritter Parameter, der ebenfalls zu schätzen ist.

Für  $\lambda=1$  erhalten wir  $logit(p)$ ; für  $\lim_{\lambda \rightarrow 0}$  das *cloglog*-Modell. Diese beiden Transformationen sind also in der Modellfamilie dieser Linkfunktion enthalten.

Die Umkehrfunktion von  $arord(p)$  ist dann:

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda \cdot e^\eta)^{-1/\lambda} & \lambda \cdot e^\eta > -1 \\ 1 & \lambda \cdot e^\eta \leq -1 \end{cases} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

Die dazugehörige Linkfunktion ist:

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = F'(\eta) = \begin{cases} e^\eta (1 + \lambda \cdot e^\eta)^{-\left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)} & \lambda \cdot e^\eta > -1 \\ 0 & \lambda \cdot e^\eta \leq -1 \end{cases}.$$

Aus  $\lambda \cdot e^{-\eta} > -1$  (und  $\lambda \cdot e^{-\eta} \leq -1$ ) folgt, dass  $\lambda$  auch negative Werte annehmen kann.

Die Analyse der Verteilungsfunktionen für verschiedene  $\lambda$ 's zeigt:

- (1) Für  $\lambda = -1$  ist  $F(\eta)$  an der Stelle  $\lambda \cdot e^\eta = -1$  ( $\eta = 0$ ) nicht stetig differenzierbar
- (2) Für  $\lambda = -0.5$  ist  $f(\eta)$  an der Stelle  $\lambda \cdot e^\eta = -1$  ( $\eta = \ln(2) = 0.693$ ) nicht stetig differenzierbar.

Da die Fisher-Informationsmatrix singular wird, treten bei  $\lambda = -1$  sowie in dessen näherer Umgebung numerische Probleme auf.

Das eigentliche Problem in diesem Bereich stellt aber die Restriktion  $\lambda \cdot e^{-\eta} > -1$  (bezogen auf  $\eta$ ) selbst dar.

- (1) Für  $\lambda \geq 0$  gilt  $\lambda \cdot e^{-\eta} > -1 \quad \forall \eta$  (wegen  $e^{-\eta} > 0 \quad \forall \eta$ )
- (2) Für  $\lambda < 0$  gilt:  $\eta < -\ln(-\lambda) \quad \forall \eta$

Da  $\eta = \beta_1 + \beta_2 x$  folgt aus der obigen Bedingung:  $\beta_2 = 0$

Somit ist in diesem Fall für eine Linearkombination von  $x$  entweder keine Schätzung möglich oder nur für einen beschränkten Bereich von  $x$ . Wenn die Schätzung nur für einen beschränkten Bereich von  $x$  möglich ist, z.B.  $x \leq x_0$ , dann gilt:

$p = 1$  für  $x > x_0$ . Das kann so interpretiert werden, dass ab einer Dicke von  $x_0$  alle entsprechenden Taststreifen ohne Ausnahme gespürt werden (also ohne jede Unsicherheit in der Beurteilung).

Diese Überlegungen führten wahrscheinlich dazu, dass Scholze et al. (Scholze et al., 2001) die Restriktion  $\lambda \geq 0$  vorschlugen.

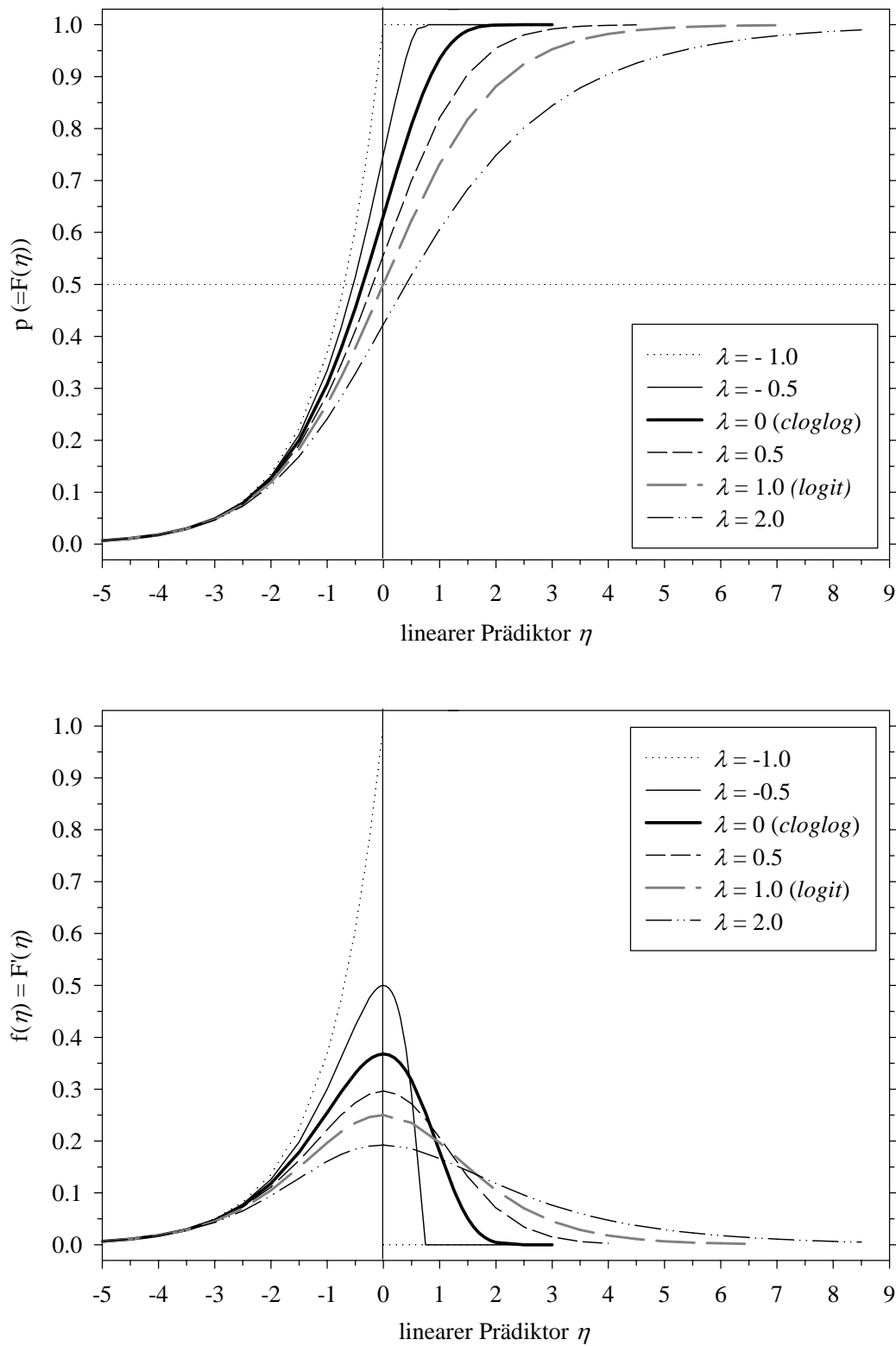
Bei den dieser Arbeit zu Grunde liegenden Daten aus dem zahnmedizinischen Experiment ist zu erwarten, dass die Modellierung mit der Aranda-Ordaz-Transformation eher zu negativen  $\lambda$ -Werten führt und somit zu Problemen bei stark asymmetrischen Verläufen (linkssteilen Toleranzfunktionen  $f$ ). Diese Verallgemeinerung der 2-parametrischen Linkfunktionen ist also für die Anpassung dieser Art von Daten nicht besonders geeignet. Das zeigen auch die Ergebnisse der Auswertung (s. Kapitel 6 Ergebnisse).

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} \left( \ln \left\{ \frac{(1-p)^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right\} - \beta_1 \right).$$

Die Parameterschätzer für  $\lambda$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0.50}$ ,  $\mathcal{G}_{0.95}$  und  $\mathcal{G}_{0.99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in Tabelle 4.7 zu finden ( $\lg_{10}(\text{Konzentration})$ ). Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung folgen im Anschluss daran.

Abbildung 4.10 zeigt sowohl die Verteilungs-, als auch die Toleranzfunktion des Aranda-Ordaz-Modells für verschiedene  $\lambda$ , jeweils standardisiert bzgl. des linearen Prädiktors  $\eta$ .



**Abb. 4.10:** Verteilungsfunktionen  $p=F(\eta)$  und dazugehörige Toleranzfunktionen  $f(\eta)=F'(\eta)$  des Aranda-Ordaz-Modells für  $\lambda$ -Werte zwischen  $-1.0$  und  $+2.0$

#### 4.3.8 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)

Prentice entwickelte eine weitere Verallgemeinerung, indem er die Wahrscheinlichkeitsfunktion mit Hilfe der kumulativen Verteilungsfunktion einer log F-Verteilung mit den Freiheitsgraden  $2 \cdot m_1$  und  $2 \cdot m_2$  modellierte (Prentice, 1975). Er führte damit zwei weitere Parameter ein, die zusätzlich geschätzt werden müssen. Diese Verallgemeinerung wiederum wurde auf zwei einfachere Modelle mit insgesamt jeweils drei Parametern reduziert. (Prentice, 1976; El-Saidi & George, 1990)

Allgemeines Modell mit zwei Parametern ( $m_1, m_2$ ):

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} \frac{e^{w \cdot m_1} (1 + e^w)^{-(m_1 + m_2)}}{\text{Beta}(m_1, m_2)} dw$$

mit  $\eta = \beta_1 + \beta_2 x^*$  und  $\text{Beta}(m_1, m_2) = \text{Beta-Verteilung mit Freiheitsgraden } m_1 \text{ und } m_2$ .

Modell I:

$m_2=1, m_1=\lambda$  ( $m_1$ -Modell von Prentice, Generalized Logit I-Modell nach Scholze et al.,  $\lambda \geq 0$ )

$$g(p) = \text{genlog}_I(p) = -\ln(p^{-1/\lambda} - 1)$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \left( \frac{e^\eta}{1 + e^\eta} \right)^\lambda = \frac{1}{(1 + e^{-\eta})^\lambda} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = F'(\eta) = \lambda \cdot e^{-\eta} \frac{1}{(1 + e^{-\eta})^{\lambda+1}}$$

Die Verteilung ist linksschief (rechtssteil) für  $\lambda < 1$  und rechtsschief (linkssteil) für  $\lambda > 1$ .

Es gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p = \exp(-\eta) \quad (\text{an 1 reflektierte Exponentialverteilung}) \text{ und}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p = \exp[\exp(-\eta)] \quad (\text{loglog-Transformation}).$$

Für  $\lambda = 1$  erhält man das *logit*-Modell (Prentice, 1975).

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} \left( -\ln(p^{-1/\lambda} - 1) - \beta_1 \right).$$



Modell II:

$m_1=1, m_2=\lambda$  ( $m_2$ -Modell von Prentice, Generalized Logit II-Modell nach Scholze et al.,  $\lambda \geq 0$ )

$$g(p) = \text{genlog}_2(p) = \ln \left\{ (1-p)^{-1/\lambda} - 1 \right\}$$

Die Umkehrfunktion lautet:

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = 1 - \frac{1}{(1 + e^\eta)^\lambda} = 1 - \left( \frac{e^{-\eta}}{1 + e^{-\eta}} \right)^\lambda \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = F'(\eta) = \lambda \cdot e^\eta \frac{1}{(1 + e^\eta)^{\lambda+1}}$$

Diese Verteilung ist rechtsschief (linkssteil) für  $\lambda < 1$  und linksschief (rechtssteil) für  $\lambda > 1$ .

Es gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} p = 1 - \exp(-\eta) \quad (\text{Exponentialverteilung}) \text{ und}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} p = 1 - \exp[\exp(-\eta)] \quad (\text{cloglog-Transformation}).$$

Für  $\lambda = 1$  erhält man ebenfalls das *logit*-Modell (Prentice, 1975).

Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $y$  ist

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} \left( \ln \left\{ (1-p)^{-1/\lambda} - 1 \right\} - \beta_1 \right).$$

Die Grenzwertverteilungen beider Modelle sind jeweils an 1 reflektierte Verteilungen ( $\lim_{\lambda \rightarrow 0} =$

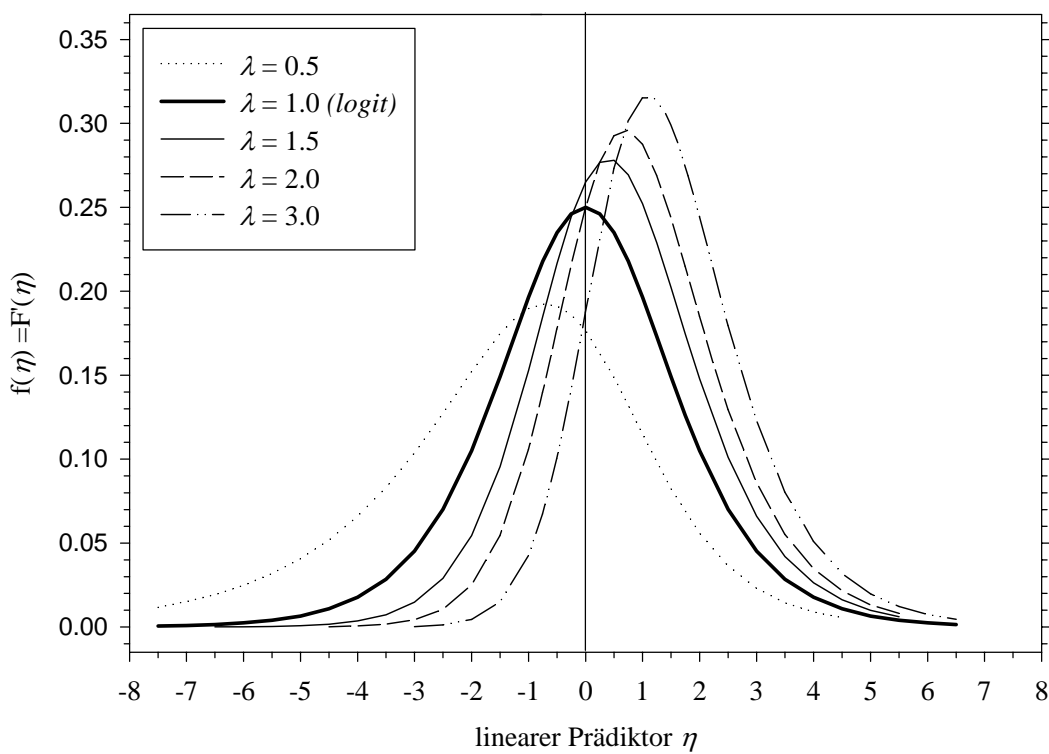
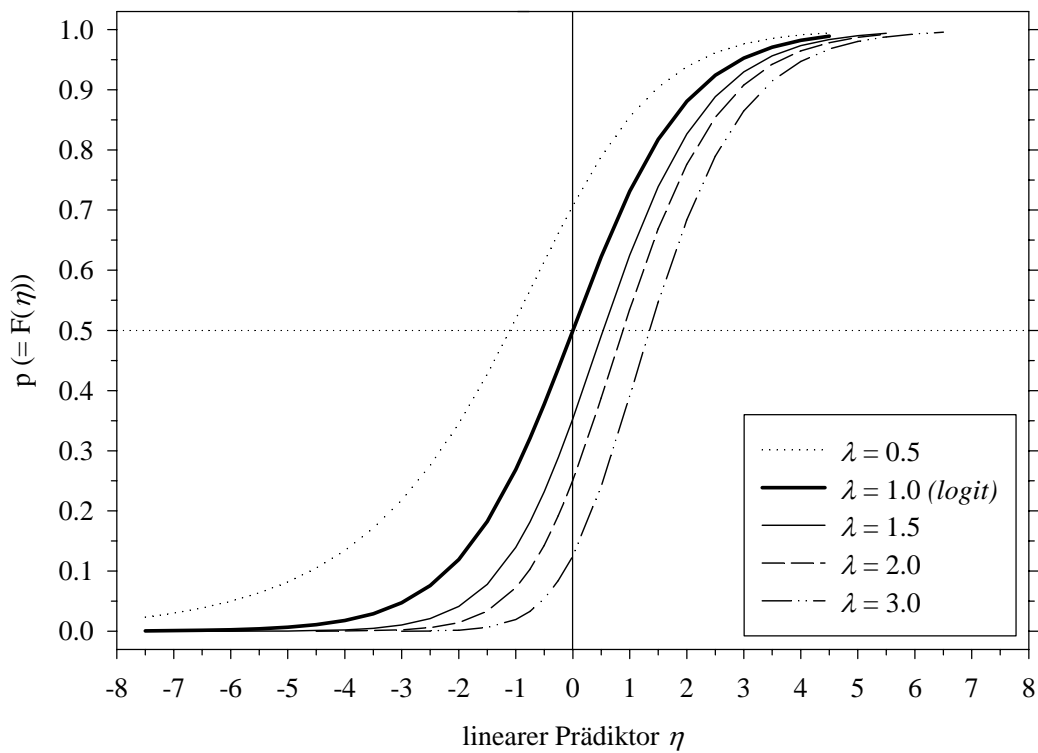
1-Exponentialverteilung, bzw. Exponentialverteilung;  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} = \text{loglog-Transformation}$ , bzw.

*cloglog-Transformation*). Für  $\lambda = 1$  erhält man in beiden Fällen das *logit*-Modell. Beide Modelle können also über die Gegenwahrscheinlichkeiten ineinander übergeführt werden.

Da das  $m_1$ -Modell eine direkte Verallgemeinerung des *logit*-Modells darstellt, kommt in der vorliegenden Arbeit dieses Modell zur Anwendung.

Die Parameterschätzer für  $m_1=\lambda$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0,50}$ ,  $\mathcal{G}_{0,95}$  und  $\mathcal{G}_{0,99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in Tabelle 4.7 zu finden ( $\lg_{10}(\text{Konzentration})$ ). Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung folgen im Anschluss.

Abbildung 4.11 zeigt die bzgl. des linearen Prädiktors  $\eta$  standardisierten Verteilungs- und Toleranzfunktion des 3-parametrischen  $m_1$ -Modells von Prentice für verschiedene  $\lambda$ .



**Abb. 4.11:** Verteilungsfunktionen  $p=F(\eta)$  und dazugehörige Toleranzfunktionen  $f(\eta)=F'(\eta)$  des  $m_1$ -Modells von Prentice für  $\lambda$ -Werte zwischen +0.5 und +3.0

#### 4.3.9 4-Parameter-Modell von Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)

Bei den Modellen von Aranda-Ordaz und Prentice, sowie der Box-Cox-Transformation wirkt sich der zusätzliche Parameter auf den gesamten Definitionsbereich der unabhängigen Variable  $x$  aus. Stukel stellte ein Modell mit vier Parametern vor, bei dem einer der beiden neu eingeführten Parameter für die untere Hälfte der Funktion zuständig war, der andere für die obere Hälfte. So war es möglich, die beiden Enden der Funktion getrennt voneinander zu modellieren (Stukel, 1988).

$$g(p) = \text{stukel}(p) = h_{\alpha}^{-1} \left[ \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) \right]$$

Die Umkehrfunktion dazu lautet:

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \frac{\exp(h_{\alpha}(\eta))}{[1 + \exp(h_{\alpha}(\eta))]} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

Hierbei sind  $h_{\alpha}(\eta)$  streng monoton steigende, nichtlineare Funktionen von  $\eta (= \beta_1 + \beta_2 x^*)$ , die durch die beiden Formparameter  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  indiziert werden. Diese Funktionen  $h_{\alpha}(\eta)$  sind wie folgt definiert:

$$(i) \quad \eta \leq 0 \quad (p \leq 0.5)$$

$$h_{\alpha} = \begin{cases} -\alpha_2^{-1} (\exp(\alpha_2 |\eta|) - 1) & \alpha_2 > 0 \\ \eta & \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2^{-1} \cdot \ln(1 - \alpha_2 |\eta|) & \alpha_2 < 0 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \eta \geq 0 \quad (p \geq 0.5)$$

$$h_{\alpha} = \begin{cases} \alpha_1^{-1} (\exp(\alpha_1 |\eta|) - 1) & \alpha_1 > 0 \\ \eta & \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1^{-1} \cdot \ln(1 - \alpha_1 |\eta|) & \alpha_1 < 0 \end{cases}$$

Im Fall von  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  erhält man die *logit*-Transformation.

Die beiden Parameter beeinflussen unabhängig voneinander das Verhalten der beiden Enden der Kurve. Im Fall von  $\alpha_1 = \alpha_2$  ist die Kurve symmetrisch, ansonsten asymmetrisch.

Wenn  $\alpha_1$  (oder  $\alpha_2$ ) = 0 gesetzt werden, kann mit dem verbleibenden Parameter  $\alpha_2$  (bzw.  $\alpha_1$ ) der Fit am unteren (bzw. oberen) Ende verbessert werden. Diese Varianten werden auch als  $\alpha_2 h$ -Familie, bzw.  $\alpha_1 h$ -Familie bezeichnet.

Die asymmetrische Klasse, die durch  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$  bestimmt wird, entspricht der Box-Cox-Transformation, wie sie von Guerrero & Johnson vorgeschlagen wurde (Guerrero & Johnson, 1982; Stukel, 1988).

Verschiedene andere Transformationen können durch die obige Funktion angenähert werden, z.B. die *probit*-Transformation ( $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 0.165$ ) oder die *cloglog*-Transformation ( $\alpha_1 \approx 0.62$ ;  $\alpha_2 \approx -0.037$ ) (Stukel, 1988).

Bei den vorliegenden Daten aus dem zahnmedizinischen Experiment ging es darum, die Modellierung in der oberen Hälfte ( $p \geq 0.5$ ) zu verbessern. Hier ist also ein Modell aus der  $\alpha_1 h$ -Familie geeignet. Die Gleichungen können dann wie folgt vereinfacht werden ( $\alpha = \alpha_1$  wegen der besseren Lesbarkeit):

$$g(p) = stukel(p) = \begin{cases} p^* & \alpha > 0 \\ \alpha^{-1} \cdot \ln(\alpha \cdot p^* + 1) & \alpha = 0 \\ -\alpha^{-1} \cdot (\exp(-\alpha \cdot p^*) - 1) & \alpha < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} p^* \leq 0 \quad (p \leq 0.5) \\ p^* \geq 0 \quad (p \geq 0.5) \end{matrix}$$

$$\text{mit } p^* = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

Die Umkehrfunktion dazu lautet:

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = \frac{\exp(h_\alpha(\eta))}{[1 + \exp(h_\alpha(\eta))]} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und}$$

$$h_\alpha(\eta) = \begin{cases} \eta & \alpha > 0 \\ \alpha^{-1} (\exp(\alpha \cdot \eta) - 1) & \alpha = 0 \\ -\alpha^{-1} \cdot \ln(1 - \alpha \cdot \eta) & \alpha < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \eta \leq 0 \quad (p \leq 0.5) \\ \eta \geq 0 \quad (p \geq 0.5) \end{matrix}$$

Die Toleranzfunktion stellt sich dann wie folgt dar:

$$\tilde{f}(x^*) = f(\eta) = F'(\eta) = \frac{\exp(-h_\alpha(\eta)) \cdot h'_\alpha(\eta)}{[1 + \exp(-h_\alpha(\eta))]^2}$$

mit  $h_\alpha(\eta)$  wie oben und

$$h'_\alpha(\eta) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0 \\ \exp(\alpha \cdot \eta) & \alpha = 0 \\ 1/(1 - \alpha \cdot \eta) & \alpha < 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \eta \leq 0 \quad (p \leq 0.5) \\ \eta \geq 0 \quad (p \geq 0.5) \end{matrix}$$

Es gilt:  $h'_\alpha(0) = 1 \quad \forall \alpha$  und

$F'(0) = f(0) = 1/4 \quad \forall \alpha$ , sowie

$$F''(0) = f'(0) = \begin{cases} 0 & \eta \rightarrow 0_- \\ \alpha/4 & \eta \rightarrow 0_+ \end{cases}.$$

F ist also im Punkt  $\eta = 0$  zweimal differenzierbar, aber nur einmal stetig differenzierbar.

Diese Eigenschaften reichen aber aus, damit die Existenz eines Maximum-Likelihood-Schätzers für  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  bei gegebenem  $\alpha$  gesichert ist (Stukel, 1988).

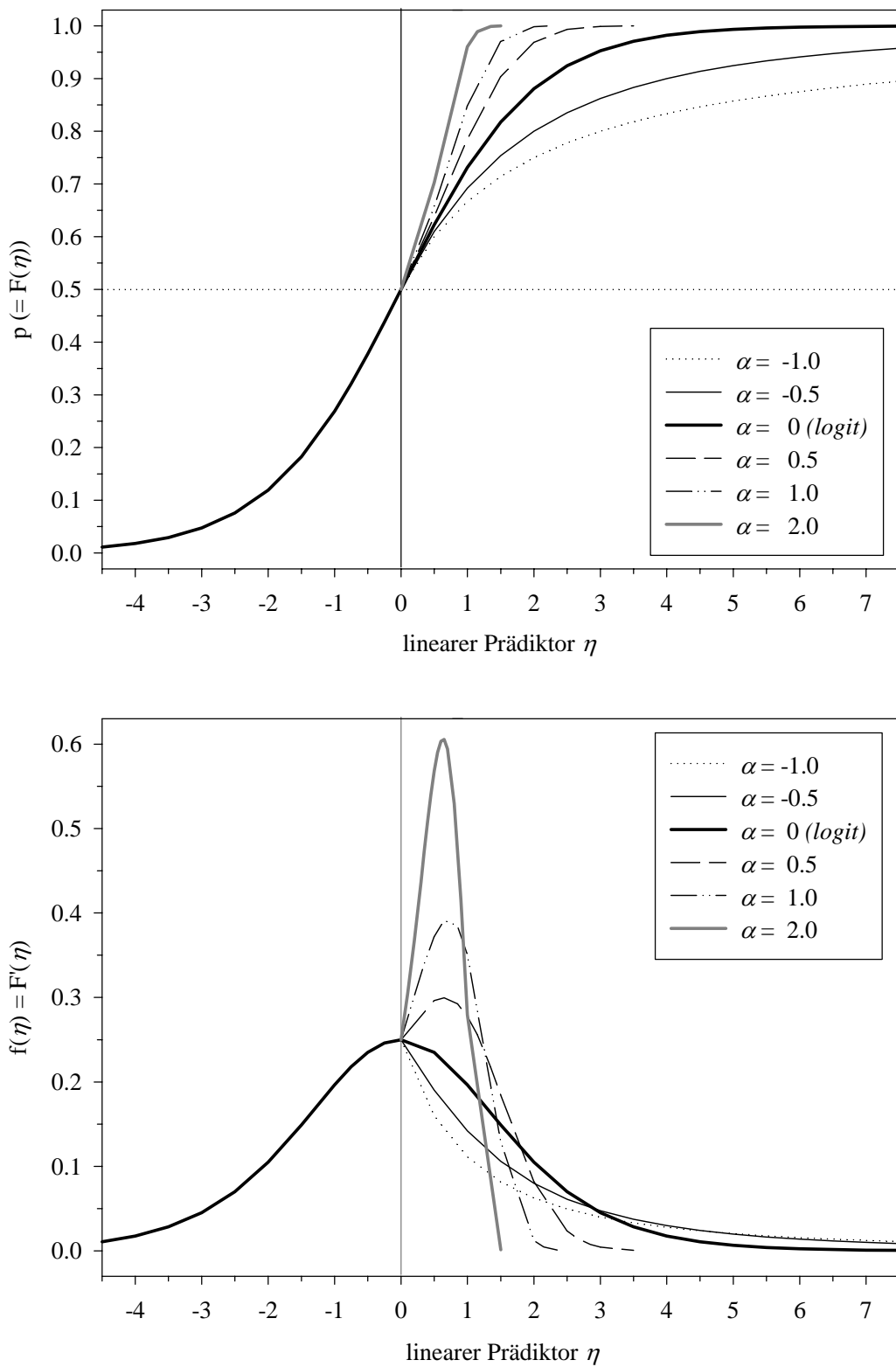
Der Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$  für  $x^*$  ist dann

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} \left( h_\alpha^{-1} \left[ \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) \right] - \beta_1 \right) \quad \text{mit} \quad .$$

$$h_\alpha^{-1}(u) = \begin{cases} u & p \leq 0.5 \\ \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha} [1 - \exp(-\alpha \cdot u)] & \alpha > 0 \\ u & \alpha = 0 \\ \frac{1}{\alpha} \cdot \ln(1 + \alpha \cdot u) & \alpha < 0 \end{array} \right\} & p \geq 0.5 \end{cases}$$

Abbildung 4.12 zeigt die bzgl. des linearen Prädiktors  $\eta$  standardisierten Verteilungs- und Toleranzfunktionen des  $\alpha_1 h$ -Modells für verschiedene  $\alpha$ . Diese Abbildungen zeigen, dass  $\alpha$  – im Gegensatz zu den vorigen Modellen von Aranda-Ordaz und Prentice – wirklich nur ein Formparameter ist.  $\beta_1$  bleibt weiterhin der Lageparameter, und  $-\beta_1/\beta_2$  ist weiterhin der Schätzwert für den 50%-Wert ( $\mathcal{G}_{0.50}$ ).

Die Parameterschätzer für  $\alpha$ ,  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die Schätzer für  $\mathcal{G}_{0.50}$ ,  $\mathcal{G}_{0.95}$  und  $\mathcal{G}_{0.99}$  bezogen auf den Beispieldatensatz des Mehlkäfer-Experimentes sind in Tabelle 4.7 zu finden ( $\lg_{10}(\text{Konzentration})$ ). Die Diskussion der Ergebnisse der Modellierung befindet sich im Anschluss daran.



**Abb. 4.12:** Verteilungsfunktionen  $p=F(\eta)$  und dazugehörige Toleranzfunktionen  $f(\eta)=F'(\eta)$  des  $\alpha_1h$ -Modells von Stukel für  $\alpha$  zwischen  $-1.0$  und  $+2.0$

**Mehlkäfer-Experiment: Vergleich der Ergebnisse (Aranda-Ordaz, Prentice, Stukel)**

Die Modellierung der ( $\lg_{10}$ -transformierten) Daten mit der Linkfunktion von Aranda-Ordaz ergibt einen Schätzer für  $\lambda$  von  $-0.01$ . Die Schätzwerte für die Mortalitätsraten und somit die Devianz-Residuen sind also annähernd dieselben wie für das *cloglog*-Modell. Für das Aranda-Ordaz-Modell erhält man eine Devianz von 3.44. Da das *cloglog*-Modell nur zwei Parameter enthält ist, bei einer Modellierung dieser Linkfunktion der Vorzug zu geben, da es einen Freiheitsgrad mehr besitzt als ein 3-parametrisches Modell).

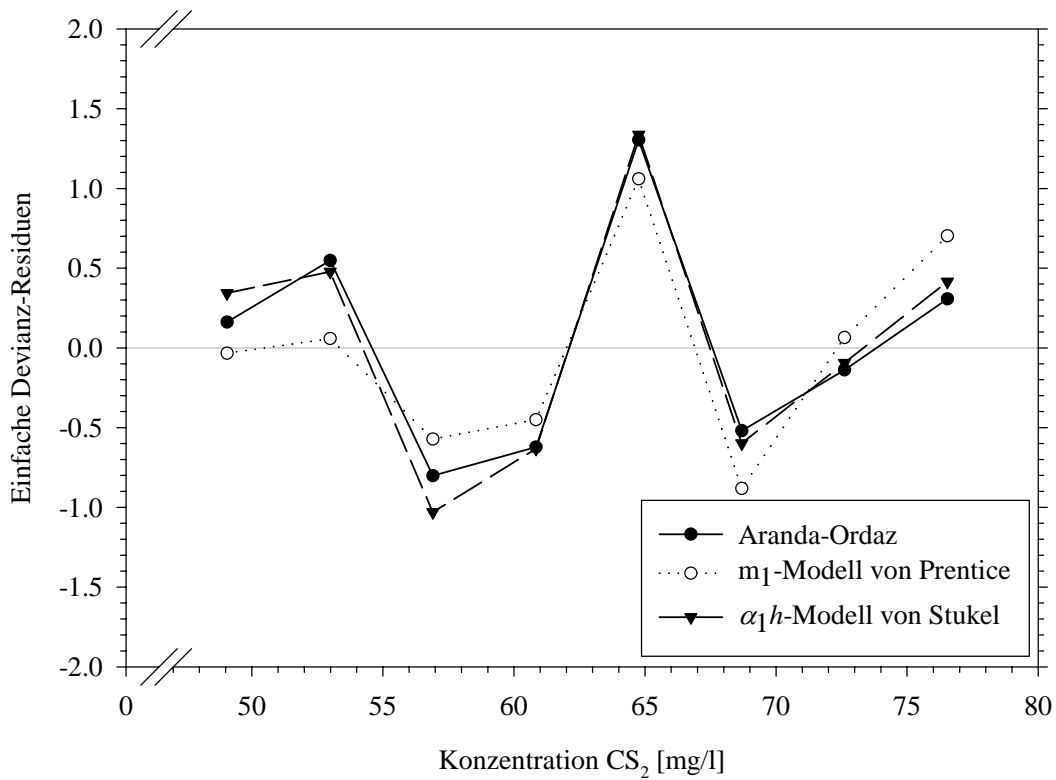
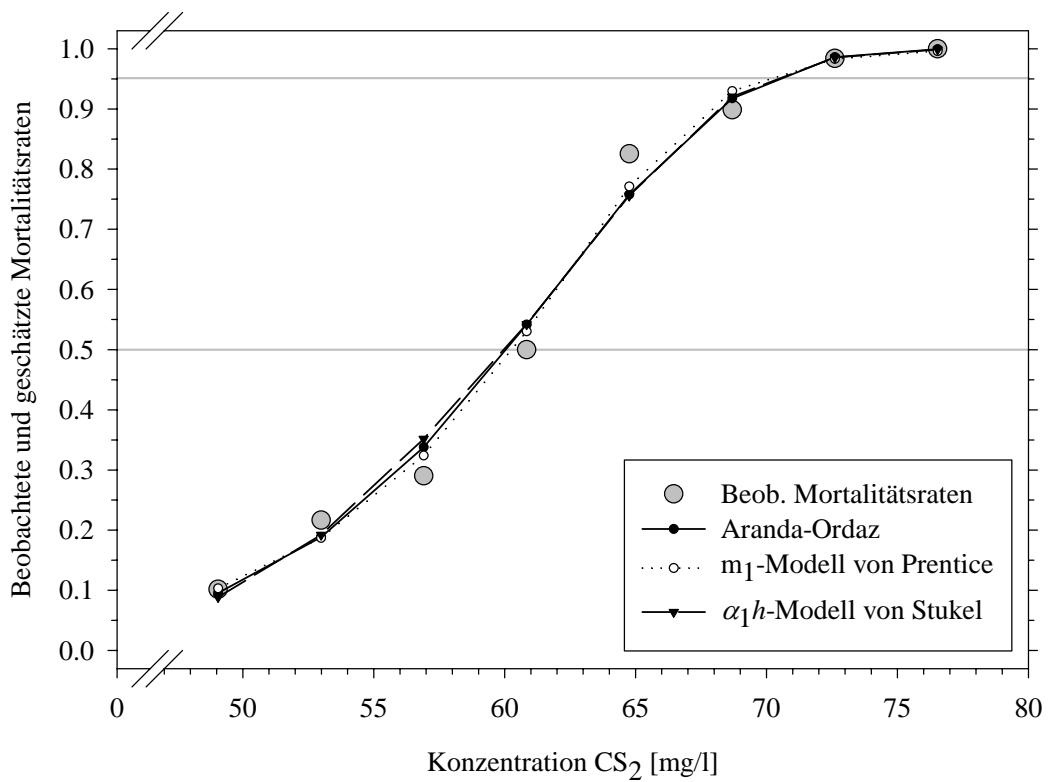
Da die Daten linksschief (rechtssteil) sind, ist hier das Generalized Linear Model I ( $=m_1$ -Modell von Prentice) das bessere der beiden Modelle (s. oben). Als Schätzwert für den dritten Parameter  $\lambda$  ( $=m_1$ ) erhält man 0.279. Die damit erzielte Devianz ist 3.26, also noch etwas besser als mit den Modellen *cloglog* und Aranda-Ordaz. Verglichen mit dem 2-parametrischen *cloglog*-Modell ist der Gewinn bezogen auf die Devianz aber nicht von Bedeutung. Auch hier ist das 2-parametrische *cloglog*-Modell aus denselben Gründen wie oben das bessere Modell.

Aus der Verteilung der Daten ergibt sich, dass eine bessere Anpassung in der rechten (oberen) Hälfte der Daten erforderlich ist. Dazu benötigt man das  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel. Als Schätzwert für den 3. Parameter  $\alpha$  ( $=\alpha_1$ ) erhält man 0.532, die Devianz ist 4.135. Die Devianz ist hier höher als beim *cloglog*-Modell. Dieses Modell ist im Vergleich also ebenfalls nicht besonders gut geeignet, diese Daten zu modellieren.

Nachfolgend sind die Ergebnisse der Modellierung mittels der Linkfunktionen von Aranda-Ordaz, Prentice und Stukel tabellarisch zusammengefasst und graphisch dargestellt.

Konzentration	Schätzer	Aranda-Ordaz	Prentice ( $m_1$ -Modell)	Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)
$x^* = \lg_{10}(x)$	Devianz	3.439	3.260	4.135
	$\beta_1$	-39.339	-116.303	-47.386
	$\beta_2$	21.907	63.971	26.649
	3. Parameter	$\lambda = -0.01$	$\lambda = 0.279$	$\alpha = 0.532$
	$\mathcal{G}_{0.50}$	60.09	60.34	60.00
	[95%-K.I.]	[58.90; 61.32]	[59.04 ; 61.66]	[58.69; 61.34]
	$\mathcal{G}_{0.95}$	70.00	69.68	69.92
	[95%-K.I.]	[68.39; 71.65]	[65.77 ; 73.81]	[64.17; 76.18]
	$\mathcal{G}_{0.99}$	73.18	74.09	73.34
	[95%-K.I.]	[70.29; 76.19]	[71.28 ; 77.00]	[65.17; 82.54]

**Tab. 4.7:** Ergebnisse zur Modellierung der Beispieldaten für die Modelle von Aranda-Ordaz, Prentice und Stukel



**Abb. 4.13:** Mehlkäfer-Experiment: Beobachtete Mortalitätsraten (kombinierte Daten) und geschätzte relative Häufigkeiten, sowie dazugehörige, einfache Devianz-Residuen (Aranda-Ordaz,  $m_1$ -Modell von Prentice,  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel)



## **5 Material und Methoden**

### **5.1 Probanden**

Die Probanden für dieses Experiment wurden in den Jahren 2001 und 2002 in Bonn und Bern rekrutiert. Hierbei wurden sämtliche Implantatpatienten der Poliklinik für Zahnärztliche Prothetik der Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn und der Klinik für Zahnärztliche Prothetik der Universität Bern, welche die Kriterien (Einzelzahn-Implantat mit natürlichem Zahn auf der kontralateralen Seite) erfüllten, angeschrieben. Es konnten ca. 80% der angeschriebenen Patienten als Probanden gewonnen werden. Insgesamt bestand die Stichprobe aus 68 Probanden, davon 40 Probanden aus Bonn (Zentrum 1) und 28 Probanden aus Bern (Zentrum 2). Das Experiment war als intraindividueller Vergleich der aktiven Tastsensibilität von Einzelzahn-Implantat im Vergleich zum natürlichen, kontralateralen Zahn geplant. Da die vorliegende Arbeit mögliche Modelle zur Beschreibung der Tastsensibilität natürlicher Zähne zum Thema hat, werden nachfolgend nur solche Experimente betrachtet.

Sechs der insgesamt 68 Probanden (vier aus Bonn und zwei aus Bern) besaßen je zwei Einzelzahnimplantate und führten das Experiment deshalb insgesamt viermal durch. Für den intraindividuellen Vergleich wurden nur die Werte des jeweils zuerst getesteten Implantat-Zahn-Paares herangezogen. Da es hier aber um einen Methodenvergleich geht, werden alle Versuche für die Analyse herangezogen.

Es handelt sich also insgesamt um die Ergebnisse von 74 Experimenten bei 68 Probanden. Die Messergebnisse von vier Experimenten bei insgesamt drei Probanden wurden aus der Analyse ausgeschlossen, da diese ganz offensichtlich nur zufällige Antworten gaben (Non-Compliance). In die endgültige Analyse gingen demnach die Ergebnisse von N=70 Experimenten bei 65 Probanden ein. Die Daten dieser Probanden sind in Anhang A4 aufgelistet. Die Daten der vier Experimente, die aus der Analyse ausgeschlossen wurden, finden sich in Anhang A5.

### **5.2 Ablauf des Experimentes**

Das Experiment wurde mit 3mm breiten Tastfolien aus Kupfer durchgeführt. Pro getestetem, natürlichem Zahn wurden 160 Einzelexperimente analog den Vorgaben (s. Kapitel 3.3 und Tab. 3.1) durchgeführt. Die Reihenfolge der Tastfolien wurde für jeden Probanden neu randomisiert. Die Probanden saßen mit geschlossenen Augen in aufrechter, bequemer Position auf dem Behandlungsstuhl. Über einen Kopfhörer wurde mittels eines Mischpultes weißes und rosa Rauschen übertragen, um ungewollte, zusätzliche Reizübertragungen über

die Knochenleitung auszuschließen. Der Untersucher hatte die Möglichkeit, über ein Mikrophon Anweisungen an die Probanden zu geben. Die Probanden sollten die Zunge im hinteren Bereich des Mundes belassen, um das Risiko der Detektierung der Folie über die Zunge zu minimieren.

Die Tastfolien wurden mit einem Folienhalter zwischen die zu untersuchenden Zähne platziert. Der Untersucher war gehalten, die Folie so zwischen die Zahnreihen zu positionieren, dass ein Wangen- oder Zungenkontakt vermieden wurde. Die Probanden sollten lediglich den Mund öffnen und schließen und hierbei maximal 5 Sekunden lang die Zähne zusammen beißen. Weiterhin sollten zwischen zwei Einzelexperimenten jeweils ca. 20 Sekunden Ruhezeit eingehalten werden (*Enkling*, 2004).

Der Proband gab nach jedem Einzelexperiment durch Eingabe über eine Computermouse an, ob er die Tastfolie spürte oder nicht (linke Maustaste = „Ja, gespürt“, rechte Maustaste = „Nein, nicht gespürt“). Der Proband hatte nur diese beiden Entscheidungsmöglichkeiten und musste sich innerhalb einer bestimmten Zeit (5 Sekunden) für eine der beiden Antworten entscheiden. Diese Eingaben wurden direkt im Computer über das Programm MedStats (Autor: Dipl.-Math. Ludger Kaylig) nach Foliendicken sortiert in einer ASCII-Datei gespeichert. Falls der Proband merkte, dass er sich bei der Eingabe geirrt hatte, sollte er dies dem Untersucher mitteilen. Diese Informationen wurden gesondert schriftlich vermerkt und nachträglich von Hand in die ASCII-Datei eingegeben.

### **5.3 Analysierte Linkfunktionen**

Zum Vergleich der Modellierungsfähigkeit der verschiedenen, bereits in Kapitel 4.3 vorgestellten Linkfunktionen wurden folgende Analysen durchgeführt:

Die Daten jedes einzelnen Experimentes jedes Probanden wurden nach Zähnen getrennt voneinander modelliert. Hierbei wurde bei jeder Linkfunktion die Tastfoliendicke sowohl untransformiert als auch (über den natürlichen Logarithmus) transformiert in das Modell mit einbezogen.

Wie in Kapitel 5.4 erläutert, wurde der mögliche Einfluss von Ausreißern nicht analysiert. Auch auf die Berücksichtigung der Anzahl falsch-positiver Angaben bei den Leerversuchen wurde beim Vergleich der Linkfunktionen verzichtet. Die Gründe hierfür finden sich in Kapitel 5.5

Folgende Linkfunktionen wurden analysiert:

(1) **2-parametrische Modelle**

*Probit*-Link

*Logit*-Link

*Cloglog*-Link

Halblogistisches Modell

(2) **3-parametrische Modelle**

Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)

Modell von Aranda-Ordaz

Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)

4-Parameter-Modell von Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)

## 5.4 Ausreißer

Im Rahmen einer Modellierung sollte auch der Einfluss von Ausreißern auf die Schätzung der Parameter untersucht werden. Die dazugehörigen Methoden sind vorwiegend graphischer Natur (*Collett*, 2003; *Atkinson*, 1985). Dies gilt insbesondere dann, wenn es sich nur um ein einzelnes Experiment handelt. In unserem Fall waren bei einigen Probanden einzelne Ausreißer auszumachen, bei anderen waren mögliche Ausreißer und hohe Variabilität nicht unterscheidbar. Da es sich in der vorliegenden Arbeit um eine Modellierung innerhalb einer Stichprobe von Experimenten und nicht um die Modellierung eines einzelnen Experimentes handelte, wurde auf eine eingehende Analyse möglicher Ausreißer verzichtet.

## 5.5 Leerversuche

Bei der Analyse von Dosis-Wirkungsbeziehungen im Rahmen von Toxizitätsprüfungen kennt man das Konzept der natürlichen Mortalität. Diese findet in der Psychophysik ihre konzeptuelle und rechnerische Entsprechung in der reinen Ratequote (Ergebnisse siehe Kapitel 4.2.7).

Aus früheren Untersuchungen zur aktiven Tastsensibilität natürlicher Zähne ist bekannt, dass die Anzahl falsch-positiver Leerversuche insgesamt vernachlässigbar ist (*Tryde et al.*, 1962; *Mericske-Stern*, 1994). Dies gilt auch für die vorliegenden Daten (s. Kapitel 6.2). Aus diesen Gründen wurde für den Vergleich der Linkfunktionen hinsichtlich ihrer Modellierungseigenschaften auf die Einbeziehung der Leerversuche verzichtet.

In der abschließenden Darstellung der Auswertung (s. Kapitel 6.7) werden die Ergebnisse der Vollständigkeit halber sowohl mit als auch ohne Einbeziehung der Leerversuche dargestellt.

## 5.6 Gütekriterien für die Auswahl eines Modells

Eine erste Bewertung der Güte eines Modells (d.h. einer Linkfunktion) erfolgte über die einfachen Devianz-Residuen. Hierbei wurden pro Tastfoliendicke der Median und die beiden Quartile der einfachen Devianz-Residuen über alle 70 Einzelexperimente ermittelt und graphisch aufgetragen. Zusätzlich wurde pro Proband die Devianz und die mittlere Devianz (= Devianz / Anzahl der Stützstellen  $k=11$ ) berechnet.

### Schritt 1:

Für jede analysierte Linkfunktion wurde entschieden, ob das Modell mit den untransformierten Tastfoliendicken oder das Modell mit den logarithmierten Tastfoliendicken die Daten am besten beschreibt.

### Schritt 2:

In einem zweiten Schritt wurde innerhalb der 2-parametrischen sowie der 3-parametrischen Linkfunktionen eine Auswahl der am besten geeigneten Modelle getroffen.

Um in diesen beiden Schritten die Güte eines Modells zu beurteilen, wurden folgende Kriterien aufgestellt, die auf den Devianz-Residuen und der mittleren Devianz basieren:

#### (1) Einfache Devianz-Residuen

- Gute Modelle resultieren in kleinen Residuen.
- Eventuelle Trends im Verlauf der Residuen führen zu einer schlechteren Bewertung der betrachteten Linkfunktion.
- Die Schätzgenauigkeit sollte vor allem in dem Bereich hoch sein, in dem sich der Schwellenwert (50%-Wert) befindet. Da in der zahnmedizinischen Literatur auch der 80%-Wert genannt wird, sollten auch in diesem Bereich die Devianz-Residuen so nah wie möglich bei Null liegen. Im Gegensatz dazu ist der Bereich, in dem die Probanden eine relative Erkennungswahrscheinlichkeit von 1 haben für die Schätzung nicht so wichtig.

#### (2) Anzahl der Probanden mit einer Devianz $\geq$ Grenzwert (s. Kapitel 4.2.4)

Je geringer der Anteil der Probanden ist, deren Devianz  $\geq$  dem Grenzwert ist, desto besser ist die Bewertung.

(3) Verteilung der mittleren Devianz (= Devianz / Anzahl der Stützstellen)

Die mittlere Devianz ermöglicht einen Gütevergleich zwischen 2- und 3-parametrischen Modellen. Eine niedrige mittlere Devianz resultiert in einer hohen Bewertung des Modells. Zusätzlich sollten möglichst wenig Ausreißer im oberen Bereich bezogen auf die mittlere Devianz in der gesamten Stichprobe zu finden sein.

Schritt 3:

In einem letzten Schritt wurde mittels Simulationen geprüft, welches der in den beiden ersten Schritten ausgewählten Modelle die vorliegenden Daten am besten beschreibt. Es wurden zu diesem Zweck nicht nur die einzelnen Probanden, sondern auch die dazugehörige Stichprobe (N=70) simuliert, da die Auswertung der Devianz-Residuen für die gesamte Stichprobe durchgeführt wurde.

Neben den o.g. Gütekriterien und den Simulationen spielen aber auch die mathematischen Eigenschaften des Modells eine Rolle. Kompliziertere Modelle wie die 3-parametrischen Linkfunktionen werden von der Standardsoftware nicht als Prozeduren bereitgestellt. Der zur Modellierung dieser Linkfunktionen benötigte Aufwand sollte in einem vernünftigen Verhältnis zum Gewinn von Schätzgenauigkeit durch die Einführung des dritten Parameters stehen.

## **5.7 Daten und Software**

Die Originaldaten wurden als Textfiles vom Untersucher übermittelt, zusammengefasst und als SAS-Datei gespeichert. Die Daten zu den Tastfoliendicken 100–200µm wurden zusammengefasst und der Tastfoliendicke 100µm zugeordnet, da bei diesen Dicken in 98.9% aller Fälle (1124/1136) die Tastfolien von den Probanden erkannt wurden.

Die Modellierung mittels *probit*-, *logit*- und *cloglog*-Link erfolgte mit Hilfe von Standardsoftware (SAS release 8.2 für PC, darin PROC LOGISTIC und PROC PROBIT). Die Modellierung unter Berücksichtigung der Leerversuche (natürliche Mortalität / reine Ratequote) ist nur mit PROC PROBIT möglich.

Für die Modellierung mittels Box-Cox-Transformation, sowie den Modellen von Aranda-Ordaz, Prentice und dem halblogistischen Modell standen keine Standardprozeduren zur Verfügung. Die Werte der Schätzer wurden hier sequentiell mit Hilfe von SAS (PROC GENMOD) ermittelt.

Für die Modellierung durch das 4-Parameter-Modell von Stukel existiert ein Programm, welches auf S-PLUS basiert (*Serachitopol*, 1995). Weil S-PLUS als Software nicht zur Verfügung stand, wurde dieses für R unter UNIX angepasst (*R Development Core Team*, 2004).

Die Graphiken wurden mit Hilfe von SigmaPlot 2000 für PC erstellt.

### 5.8 Modelle außerhalb des Fokus dieser Arbeit

Neben den Modellen, die in der vorliegenden Arbeit besprochen werden, gibt es noch weitere Modelle und erweiterte Linkfunktionen, die zwar untersucht wurden, aber aufgrund schlechter Ergebnisse keinen Eingang in den Ergebnisteil gefunden haben.

Es sind dies:

- Bei den 2-parametrischen Linkfunktionen *probit*, *logit* und *cloglog* die Einführung eines dritten Parameters über den linearen Prädiktor (z.B. Tastfoliendicke<sup>2</sup>).
- Bei dem 2-parametrischen halblogistischen Modell die Einführung eines dritten Parameters analog zum  $m_1$ -Modell von Prentice:

$$g(p) = \ln\left(\frac{1 + p^{1/\lambda}}{1 - p^{1/\lambda}}\right) \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = \begin{cases} \left(\frac{\exp(\eta) - 1}{\exp(\eta) + 1}\right)^\lambda & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases} \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*.$$

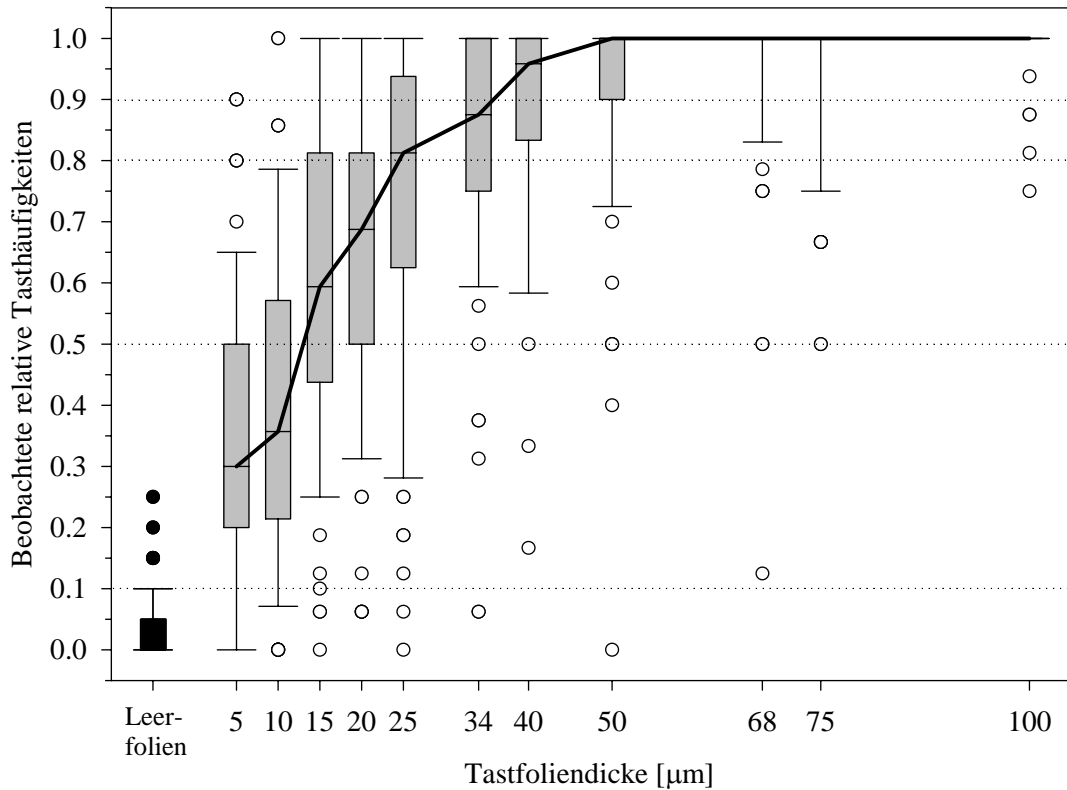
- Die Analyse der Daten durch das 4-Parameter-Modell von Stukel ( $\alpha_1 \alpha_2 h$ -Modell).

Keines dieser Modelle führte durch den zusätzlichen Parameter zu einer signifikanten Verbesserung der Modellierungsergebnisse, da die Devianz sich nicht wesentlich verkleinerte. Sie wurden deshalb nicht in die vorliegende Arbeit aufgenommen.

## 6 Ergebnisse

### 6.1 Überblick über die Daten

Einen ersten Überblick über die Daten und den medianen Verlauf der beobachteten, relativen Tasthäufigkeiten zeigt die folgende Abbildung 6.1.



**Abb. 6.1:** Boxplots der beobachteten relativen Tasthäufigkeiten, sowie Verlauf der Mediane (N=70)

Es ist gut zu erkennen, dass die Daten im Bereich ab 15  $\mu\text{m}$  die obere Hälfte einer S-förmigen Kurve darstellen. Die Daten im unteren Bereich sind aufgrund der Experiment immanenten Begrenzung unterrepräsentiert. Der Punkt bei 10  $\mu\text{m}$  fügt sich noch gut in den oberen Verlauf der Kurve ein, am Punkt 5  $\mu\text{m}$  schwenkt die Kurve in den unteren S-Bogen ein. Da noch dünnere Tastfolien nicht getestet wurden, kann dies jedoch nicht verlässlich bewiesen werden. Es wäre zu prüfen, ob die Werte bei 5  $\mu\text{m}$  nur Ausreißer nach oben darstellen. Gegen diese Vermutung spricht allerdings, dass bei Probanden mit höheren 50%-Werten sehr wohl S-förmige Verläufe beobachtet werden. Nur bei Probanden mit sehr niedrigen 50%-Werten ähneln die Verläufe der Verteilungsfunktion einer Exponentialverteilung.

Der geschätzte 50%-Wert befindet sich im Bereich zwischen 10 und 15 $\mu\text{m}$  bei ca. 12 $\mu\text{m}$ , der geschätzte 80%-Wert bei ca. 24 $\mu\text{m}$ . Die Modelle sollten also v.a. in diesen Bereichen so genau wie möglich sein. Es gibt zwar Probanden mit 50%- und 80%-Werten in höheren Bereichen, aber bei einem Großteil der Probanden werden die entsprechenden Werte im Bereich zwischen 10 $\mu\text{m}$  und 34 $\mu\text{m}$  liegen.

Für die Berechnung des Supportbereiches benötigt man die 10%- und 90%-Werte. Für die meisten Probanden ist der 10%-Wert kleiner als 5 $\mu\text{m}$  und kann deshalb nur aus dem Modell extrapoliert werden. Dies gilt nicht für den 90%-Wert, der bei ca. 36 $\mu\text{m}$  liegt. Da der 10%-Wert, also die untere Grenze des Supportbereiches, bei den meisten Probanden extrapoliert werden muss, wird die Schätzung für den Supportbereich eher ungenau sein.

## 6.2 Leerversuche

Fast 85% aller Probanden haben entweder alle 20 Leerversuche ( $44/70=63\%$ ) oder zumindest 19 von ihnen ( $15/70=21\%$ ) richtig als leer erkannt. Die restlichen elf Probanden haben von den 20 Leerversuchen entweder zwei ( $n=6$ ), drei ( $n=3$ ), vier oder fünf (jeweils  $n=1$ ) fälschlicherweise als echte Tastfolie bezeichnet. Bei einer genaueren Betrachtung der Daten dieser Probanden kann man feststellen, dass diese vergleichsweise hohen reinen Ratequoten sich jedoch immer in den weiteren Datenverlauf des einzelnen Probanden einfügen (s. Anhang A7). In Kapitel 6.8 finden sich die Ergebnisse der Modellierung der zahnmedizinischen Daten sowohl mit als auch ohne Einbeziehung der reinen Ratequote.



### 6.3 2-parametrische Modelle

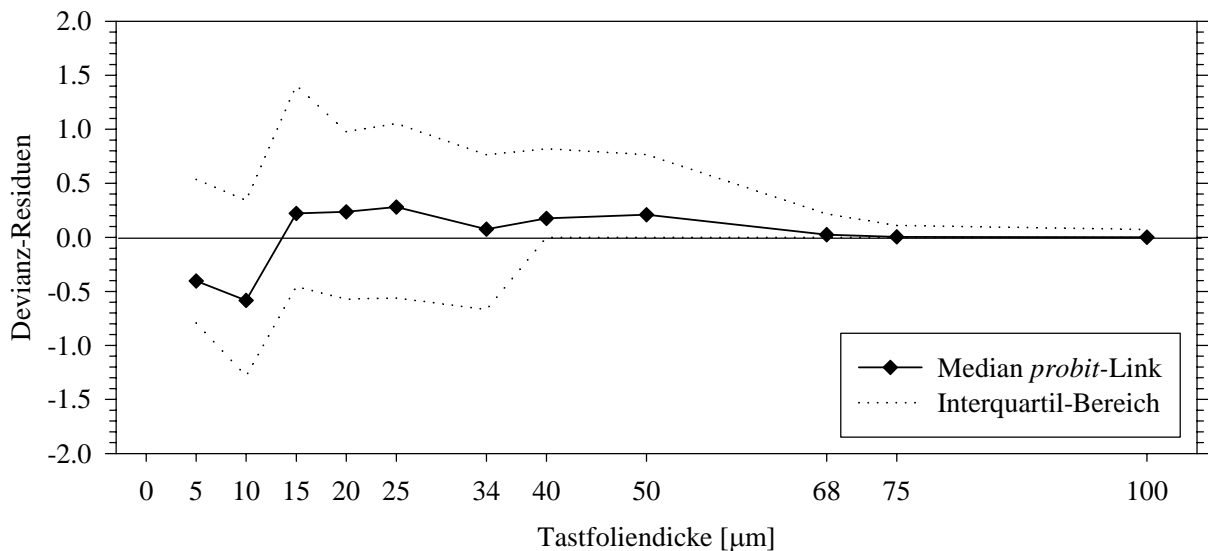
#### 6.3.1 Probit-Transformation

$$\text{probit}(p) = \Phi^{-1}(p) \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und } x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Ein erster Modellierungsversuch ohne Transformation der Tastfoliendicke zeigt, dass keine gute Anpassung der Werte möglich ist. Dies illustriert die folgende Abbildung 6.2 .



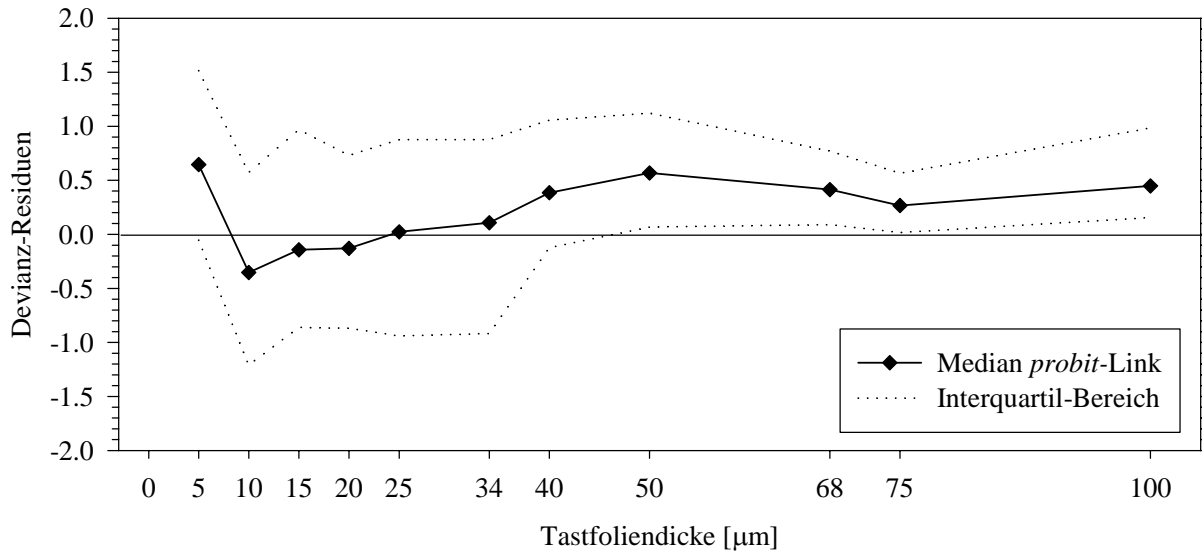
**Abb. 6.2:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die *probit*-Linkfunktion (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100µm, N=70)

Hier zeigt sich, dass vor allem die Modellierung im vorderen Bereich der Tastfoliendicke, in dem sich auch der zu schätzende 50%-Wert befindet, sehr schlecht ist. Die Annäherung des Modells an hohe Tastfoliendicken ab ca. 34 µm ist allerdings zufriedenstellend.

Der Anteil der Probanden, deren Devianzwerte oberhalb des Grenzwertes von 16.92 liegen, ist mit 14/70 (= 20%) relativ hoch. Die mittlere Devianz mit einem Median von 1.08 (Minimum=0.0, Maximum=3.08) entspricht diesem Ergebnis. Tabelle 6.1 zeigt alle deskriptiven Statistiken.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

Transformiert man die Tastfoliendicke mittels des natürlichen Logarithmus, so erhält man nach der Modellierung die folgende Abbildung 6.3 zum Verlauf der Devianz-Residuen.



**Abb. 6.3:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die *probit*-Linkfunktion ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm, N=70)

An dieser Abbildung erkennt man deutlich, dass sich im hinteren Bereich der Tastfoliendicke das *probit*-Modell nicht hinreichend schnell an die Daten annähert. Das spricht für eine Asymmetrie in den Daten, d.h. im höheren Tastfoliendickenbereich steigt die Kurve schneller an als im niedrigeren Tastfoliendickenbereich. Zusätzlich erkennt man einen linear ansteigenden Trend der Residuen im Bereich zwischen 10µm und 50µm.

Die schlechtere Anpassung an die Daten erkennt man ebenfalls an dem höheren Anteil der Probanden, deren Devianz oberhalb des Grenzwertes liegt: 26/70 (= 37%). Auch die mittlere Devianz ist mit einem Median von 1.26 (Minimum = 0.0, Maximum=3.34) wesentlich höher als bei dem Modell, welches die Dicken untransformiert berücksichtigt. Tabelle 6.1 zeigt alle deskriptiven Statistiken.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 16.92		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	≥ GW						
Dicke	56 (80%)	14 (20%)	70	1.12	0.62	0.00	1.08	3.08
<i>ln</i> (Dicke)	44 (63%)	26 (37%)	70	1.27	0.62	0.00	1.26	3.34

**Tab. 6.1:** Ergebnisse der Modellierung für den *probit*-Link  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und  
deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Der Vergleich der beiden Modelle anhand der drei Gütekriterien (Verlauf der Devianz-Residuen, Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes, mittlere Devianz) ergibt, dass für den *probit*-Link die Modellierung mit den untransformierten Tastfoliendicken die besseren Ergebnisse liefert.

### 6.3.2 Logit-Transformation

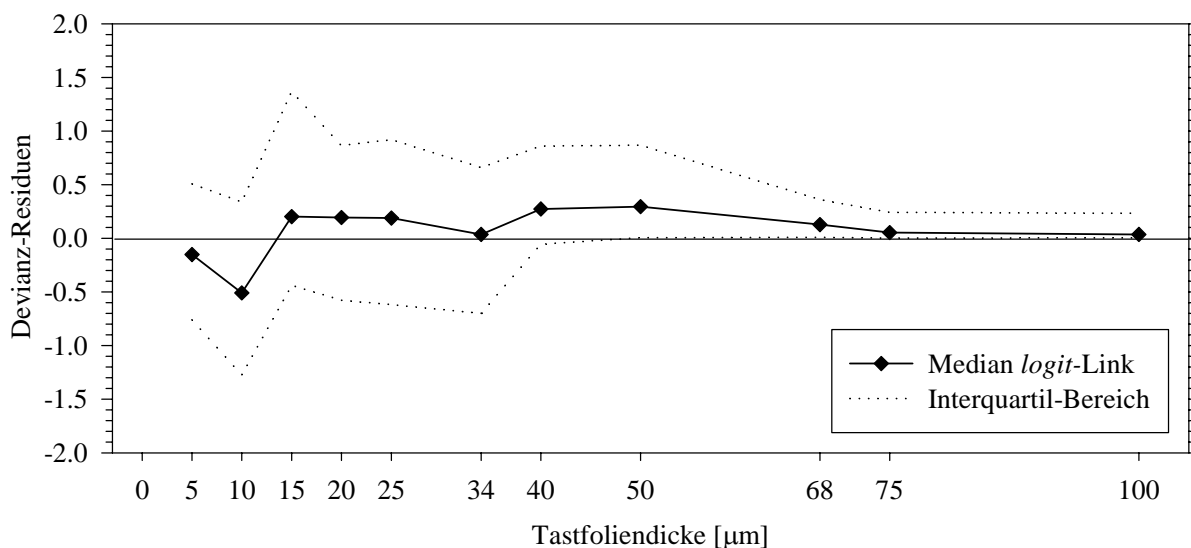
$$\text{logit}(p) = \ln\{p/(1-p)\} \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und } x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Da *logit*- und *probit*-Link sich in ihrer Form nur unwesentlich voneinander unterscheiden, ist zu erwarten, dass die Modellierung der Daten mit dem *logit*-Link ähnlich ausfällt wie diejenige mit der *probit*-Linkfunktion.

Den medianen Verlauf der Devianz-Residuen bei der Modellierung der untransformierten Tastfoliendicken zeigt Abbildung 6.4.



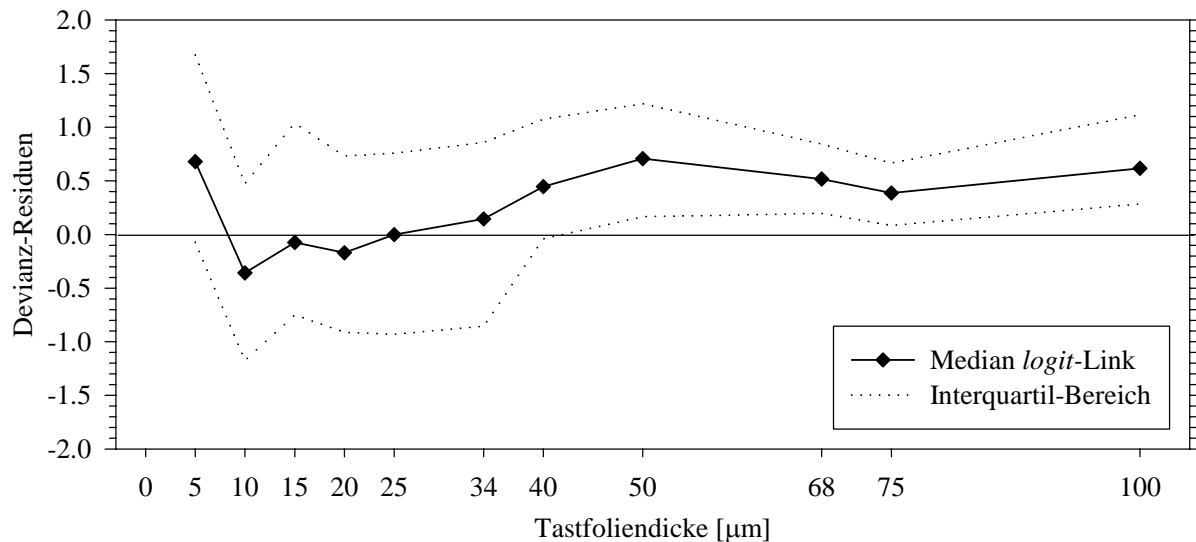
**Abb. 6.4:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die *logit*-Linkfunktion (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100µm, N=70)

Die Kurven unterscheiden sich in der Tat nur unwesentlich von derjenigen der *probit*-Transformation. Sie ist im vorderen Bereich (5-15µm) allerdings etwas besser.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 16.92 ist mit 11/70 (= 16%) etwas niedriger als bei der *probit*-Transformation. Die deskriptiven Statistiken zur mittleren Devianz zeigen ebenfalls ähnliche Werte (Median=1.06, Minimum=0.00, Maximum=2.78). Tabelle 6.2 zeigt alle deskriptiven Statistiken.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

Auch hier zeigen sich im Vergleich zur *probit*-Transformation ähnliche Ergebnisse. Die zur *logit*-Transformation gehörenden Verläufe der Devianz-Residuen zeigt Abbildung 6.5.



**Abb. 6.5:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die *logit*-Linkfunktion ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm, N=70)

Auch hier ist – wie beim *probit*-Link – der ansteigende Trend der Residuen im Bereich 10-50µm zu beobachten. Außerdem ist das Modell im hinteren Bereich ebenfalls nicht steil genug, d.h. die geschätzten relativen Tasthäufigkeiten erreichen nicht die im Versuch beobachteten relativen Tasthäufigkeiten. Am unteren Ende der Skala (5µm) weicht es am stärksten von den beobachteten Werten ab.

Die schlechteren Eigenschaften dieses Modells zeigen sich auch in den anderen Gütekriterien. Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 16.92 ist mit 26/70 (= 37%) genauso hoch wie bei der *probit*-Transformation. Auch die mittlere Devianz ist ähnlich schlecht mit einem Median von 1.28 (Minimum=0.00, Maximum=3.08). Tabelle 6.2 zeigt alle diesbezüglichen deskriptiven Statistiken.

## (iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 16.92		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	≥ GW						
Dicke	59 (84%)	11 (16%)	70	1.11	0.58	0.00	1.06	2.78
$\ln(\text{Dicke})$	44 (63%)	26 (37%)	70	1.29	0.61	0.00	1.28	3.08

**Tab. 6.2:** Ergebnisse der Modellierung für den *logit*-Link  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und  
deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Auch für den *logit*-Link gilt, dass die Modellierung mit den untransformierten Tastfolien-  
dicken die besseren Ergebnisse liefert.

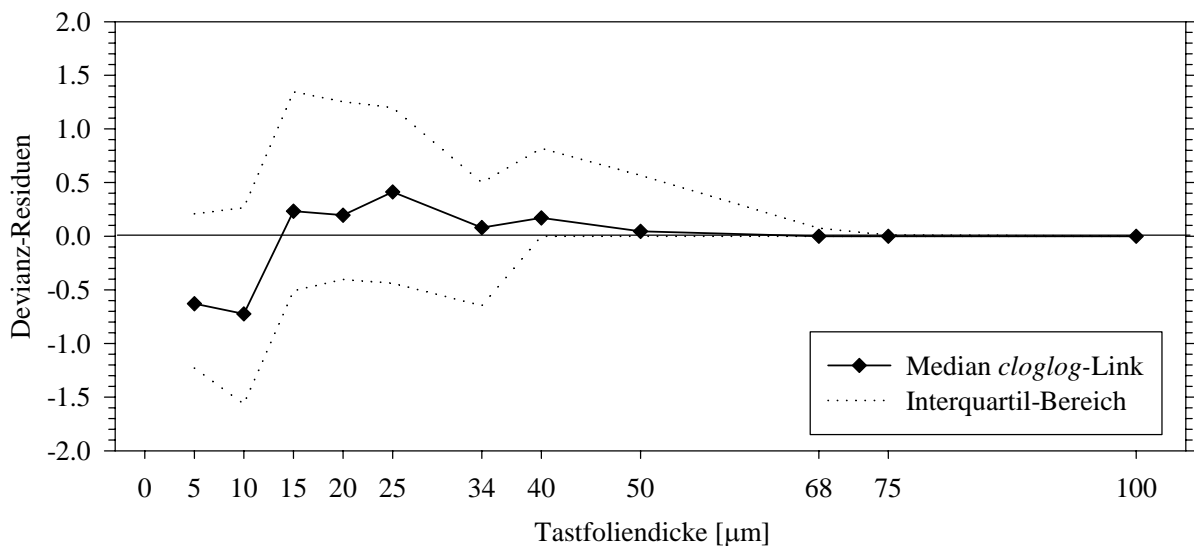
### 6.3.3 Cloglog-Transformation

$$\text{cloglog}(p) = \ln\{-\ln(1-p)\} \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = 1 - \exp[-\exp(\eta)]$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und } x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Die *cloglog*-Transformation ist asymmetrisch und aus diesem Grund besser zur Modellierung der vorliegenden Daten geeignet als die symmetrischen *probit*- und *logit*-Linkfunktionen. Dies gilt allerdings nicht für die Modellierung der untransformierten Tastfoliendicken, wie die folgende Abbildung 6.6 zeigt.



**Abb. 6.6:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die *cloglog*-Linkfunktion (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

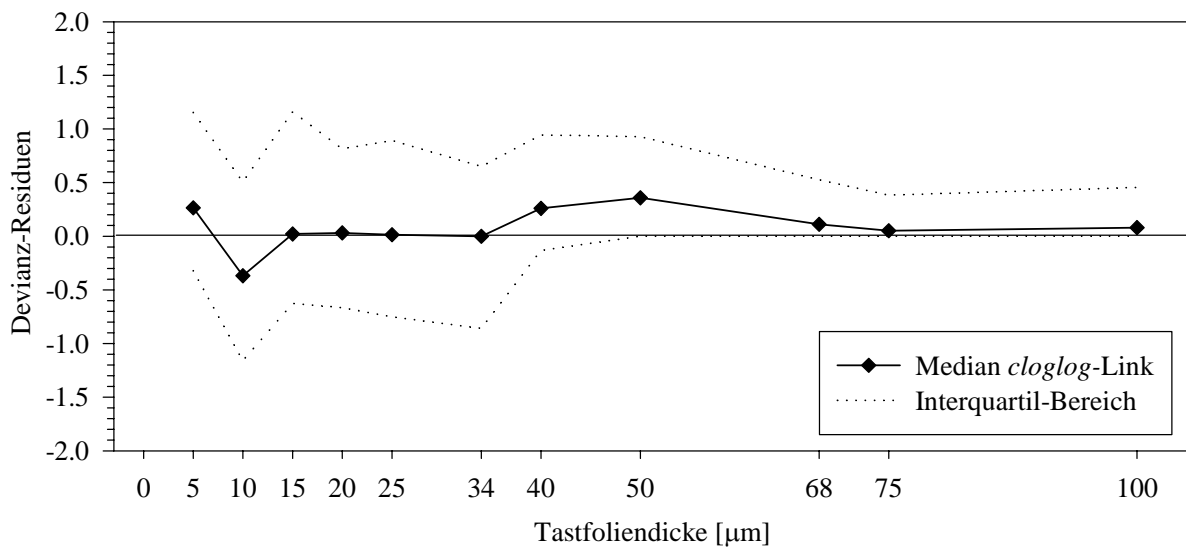
In der obigen Graphik sieht man, dass das Modell mit dem *cloglog*-Link zwar besser ist als die Modelle mit *probit*- oder *logit*-Link, dass aber noch Verbesserungen möglich sind. Während kleine Tastfoliendicken (5 $\mu\text{m}$  und 10 $\mu\text{m}$ ) deutlich überschätzt werden, werden größere Tastfoliendicken (15-25 $\mu\text{m}$ ) eher unterschätzt. Ab einer Tastfoliendicke von ca. 34 $\mu\text{m}$  zeigt die Modellierung dagegen sehr gute Ergebnisse. Dieser Bereich ist aber für die Praxis eher unbedeutend, da die meisten Probanden dort eine relative Tasthäufigkeit von 80% oder mehr besitzen.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz von mindestens 16.92 ist mit 16/70 (= 23%) höher als für die entsprechenden Modelle mit der *probit*-, bzw. *logit*-Transformation.

Auch die mittlere Devianz zeigt mit einem Median von 1.11 (Minimum=0.0, Maximum=3.37) schlechte Ergebnisse. Die gesamten deskriptiven Statistiken zu diesem Modell zeigt Tabelle 6.3.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

Eine Verbesserung tritt ein, wenn die Tastfoliendicken logarithmiert in das Modell eingehen. Dies zeigt Abbildung 6.7.



**Abb. 6.7:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die *cloglog*-Linkfunktion ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm, N=70)

Das *cloglog*-Modell, angewendet auf die logarithmierten Tastfoliendicken, liefert vor allem im Bereich zwischen 15 und 34µm sehr gute Ergebnisse. Es ist, verglichen mit den beiden ersten Modellen, bisher das beste Modell. Im Bereich von 5-15µm wären aber noch Verbesserungen nötig. In diesem Bereich (vermuteter Bereich des 50%-Wertes) ist die mediane Schätzung zu weit entfernt von den beobachteten Daten. Es ist aber auch bei diesem Modell zu erkennen, dass der Anstieg der Kurven in der 2. Hälfte des Tastfoliendickenbereichs (34-68µm) nicht ausreicht, um die beobachteten relativen Tasthäufigkeiten zu erreichen. Dieser Bereich ab 34µm ist für die Praxis allerdings nicht mehr relevant.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 16.92 ist mit 16/70 (= 23%) genauso schlecht wie bei der Modellierung mit den untransformierten Tastfoliendicken. Die mittlere Devianz ist mit einem Median von 1.15 (Minimum=0.0,



Maximum=2.64) sogar schlechter. Tabelle 6.3 zeigt die dazugehörigen deskriptiven Statistiken.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 16.92		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	≥ GW						
Dicke	54 (77%)	16 (23%)	70	1.18	0.69	0.00	1.11	3.37
ln(Dicke)	54 (77%)	16 (23%)	70	1.14	0.55	0.00	1.15	2.64

**Tab. 6.3:** Ergebnisse der Modellierung für den *cloglog*-Link  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und  
Deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Sowohl die Werte der mittleren Devianz als auch Verlauf der Devianz-Residuen sprechen beim *cloglog*-Modell für die Logarithmierung der Tastfoliendicken. Beim ersten Modell ist die Annäherung an die beobachteten Daten in dem interessierenden Bereich viel schlechter als beim zweiten Modell. Bei Einbeziehung der logarithmierten Tastfoliendicken erreichen die geschätzten Verläufe im Bereich zwischen 34 und 68µm nicht die beobachteten relativen Tasthäufigkeiten. Im Bereich zwischen 15 und 34µm ist die Annäherung an die Daten aber fast perfekt. Aus diesem Grund ist dem Modell mit den logarithmierten Werten der Vorzug zu geben. Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes ist für eine Entscheidung hier nicht ausschlaggebend, da er für beide Varianten gleich hoch ist.

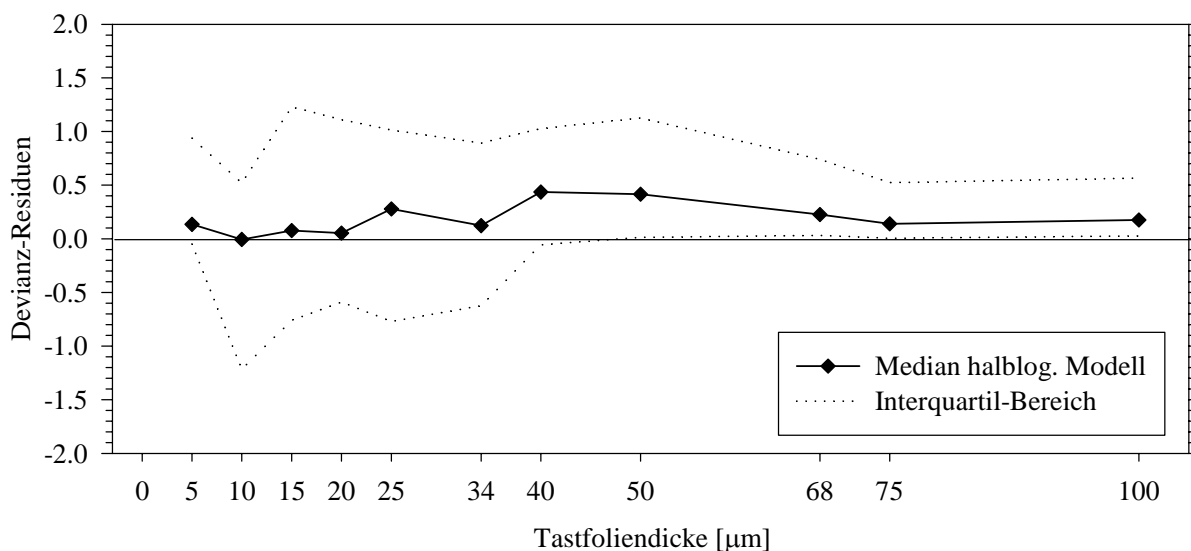
### 6.3.4 Halblogistisches Modell

$$g(p) = \ln\left(\frac{1+p}{1-p}\right) \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = \begin{cases} \frac{\exp(\eta) - 1}{\exp(\eta) + 1} & \eta \geq 0 \\ 0 & \eta < 0 \end{cases}$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und} \quad x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Wie der mediane Verlauf der beobachteten relativen Tasthäufigkeit in Abbildung 6.8 zeigt, liefert die Modellierung der untransformierten Daten mittels des halblogistischen Modells im vorderen Bereich (5-20 $\mu\text{m}$ ) bessere Ergebnisse als die Modellierung mit allen bisher betrachteten Linkfunktionen. Im hinteren Bereich erreicht das Modell aber wiederum nicht die beobachteten relativen Tasthäufigkeiten, die geschätzten relativen Tasthäufigkeiten sind also zu niedrig. Hier zeigt die *cloglog*-Linkfunktion die besseren Ergebnisse.

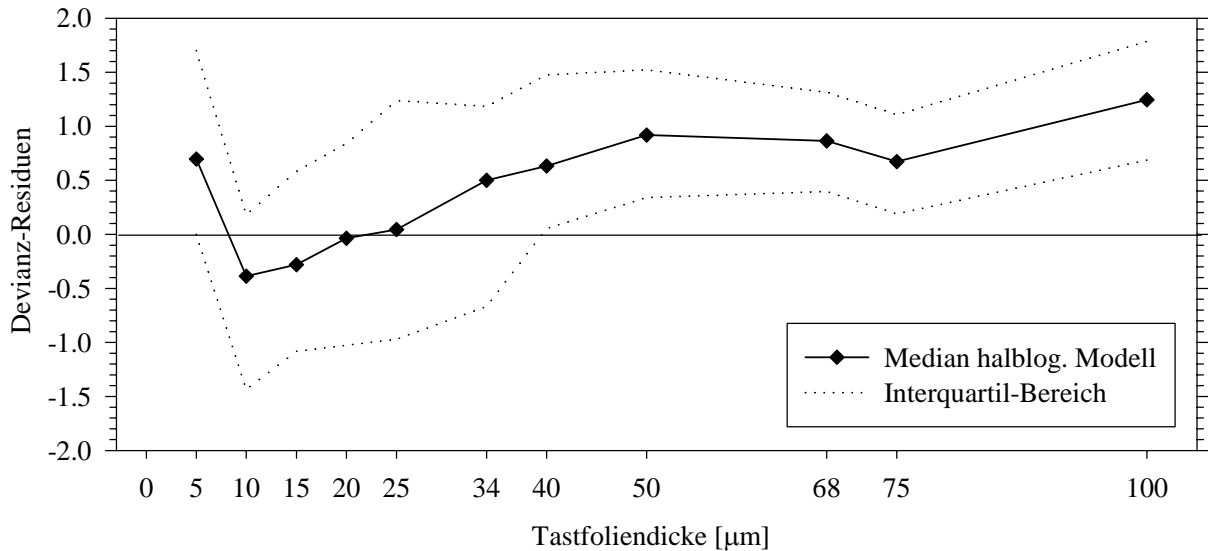


**Abb. 6.8:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das halblogistische Modell (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes ist mit 19/70 (= 27%) verhältnismäßig hoch. Auch die Werte zur mittleren Devianz sind nicht besonders gut (Median=1.18, Minimum=0.00, Maximum=9.79). Tabelle 6.4 zeigt die dazugehörigen deskriptiven Statistiken.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

Die Modellierung unter Einbeziehung der transformierten Tastfoliendicken führt zu sehr schlechten Ergebnissen. Dies zeigt Abbildung 6.9.



**Abb. 6.9:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das halblogistische Modell ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 16.92 ist mit 38/70 (= 54%) der bisher höchste Wert. Auch der Median der mittleren Devianz zeigt mit 1.70 in dieselbe Richtung (Minimum=0.00, Maximum=17.67). Alle deskriptiven Statistiken können Tabelle 6.4 entnommen werden.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 16.92		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	$\geq$ GW						
Dicke	51 (73%)	19 (27%)	70	1.38	0.00	1.18	9.79	1.38
$\ln(\text{Dicke})$	32 (46%)	38 (54%)	70	2.88	3.28	0.00	1.70	17.67

**Tab. 6.4:** Ergebnisse der Modellierung für das halblogistische Modell  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Beim halblogistischen Modell ist klar ersichtlich, dass nur die Modellierung mit den untransformierten Tastfoliendicken annehmbare Ergebnisse liefert.

### 6.3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse für die 2-parametrischen Modelle

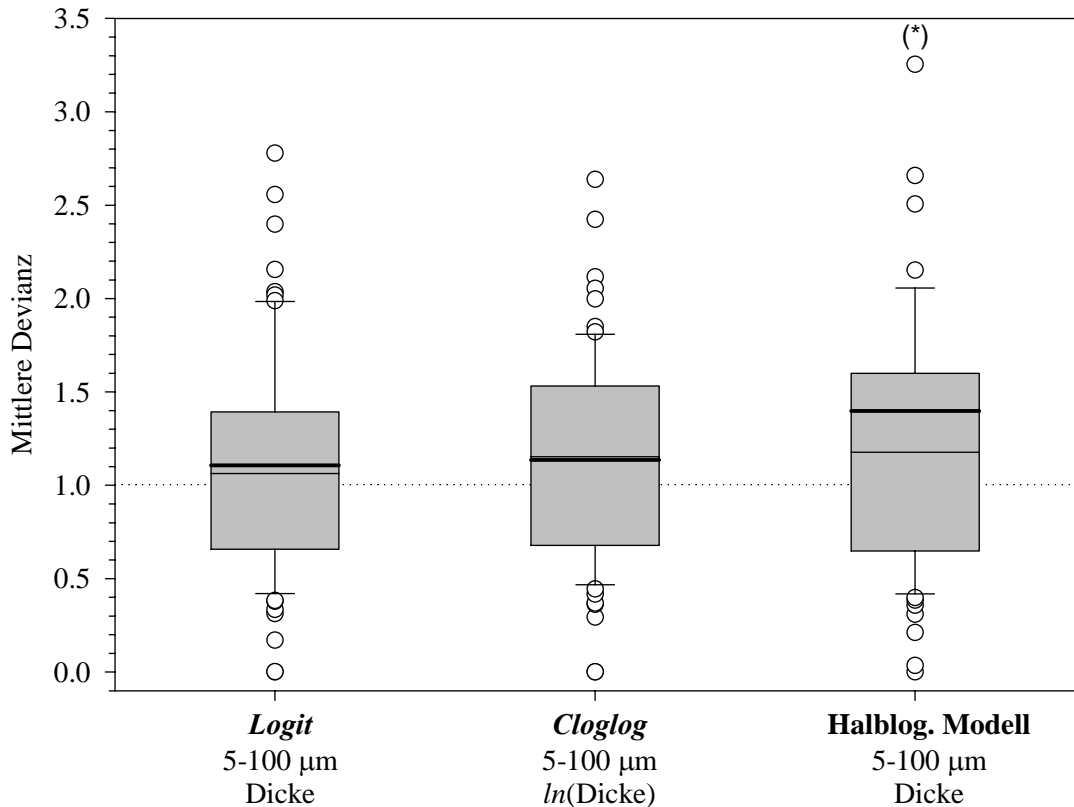
Die bisherigen Ergebnisse für die 2-parametrischen Modelle können wie folgt zusammengefasst werden:

- Der Vorteil der 2-parametrischen Modelle ist ihre Einfachheit. Die ersten drei Modelle (*probit*, *logit*, *cloglog*) sind in jeder Standardsoftware implementiert (z.B. PROC PROBIT oder PROC LOGISTIC in SAS). Da sich beim Halblogistischen Modell beide Parameter im linearen Prädiktor befinden, kann auch dieses Modell ohne zusätzlichen Aufwand leicht angepasst werden (z.B. über PROC GENMOD in SAS).
- Die Einfachheit der 2-parametrischen Modelle ist aber zugleich ihr Nachteil, da nicht alle Aspekte der Daten erfasst werden können.
- Die Modellierung der Daten mit der *probit*-, bzw. *logit*-Linkfunktion unter Einbeziehung der untransformierten Tastfoliendicken liefert trotzdem gute Ergebnisse.
- Im Gegensatz dazu müssen bei der *cloglog*-Linkfunktion die Tastfoliendicken logarithmiert in das Modell eingehen, um gute Ergebnisse zu liefern. Diese Modellierung ist vor allem im Bereich von 15-34µm sehr gut, also im Bereich des 80%-Wertes.
- Das halblogistische Modell wiederum liefert nur für die untransformierten Tastfoliendicken gute Schätzungen. Im Gegensatz zum *cloglog*-Modell ist hier die Modellierung im Bereich des 50%-Wertes (5-20µm) besser als im Bereich des 80%-Wertes. Der 80%-Wert wird hier eher unterschätzt werden, da die durch das halblogistische Modell geschätzten Werte nicht an die beobachteten relativen Tasthäufigkeiten heranreichen.
- Ein Nachteil des halblogistischen Modells ist, dass es die vorliegenden Daten nur so gut annähert, weil die Mehrzahl der Probanden bereits extrem dünne Tastfolien ertasten konnten. Für Probanden mit S-förmigen Verläufen ist dieses Modell nicht passend (s. dazu auch Beispieldatensatz, Kapitel 4.3.5). Es kann also kein allgemein gültiges Modell zur Beschreibung der aktiven Tastsensibilität sein.
- Es ist nicht klar, ob eher symmetrische Modelle wie *probit* und *logit* oder asymmetrische Modelle wie *cloglog* für die vorliegenden Daten geeignet sind. Zur endgültigen Klärung dieser Frage sind hier Simulationen hilfreich (s. Kapitel 6.6).

Schlussfolgerung: Folgende Modelle werden weiter untersucht:

- *Logit*-Transformation (Dicke, 5-100µm)
- *Cloglog*-Transformation ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm)
- Halblogistisches Modell (Dicke, 5-100µm)

Die *probit*-Transformation ist bei kleiner Fallzahl der *logit*-Transformation sehr ähnlich. Aus diesen Gründen kommt sie nicht in die weitere Auswahl. Abbildung 6.10 zeigt die Verteilungen der mittleren Devianz für die drei oben ausgewählten Modelle.



(\*) Extremwerte: 4.13, 6.32, 9.79

**Abb. 6.10:** Verteilung der mittleren Devianz in der Stichprobe (N=70) für die drei besten 2-parametrischen Modelle

Aus dieser Abbildung ist deutlich erkennbar, dass das halblogistische Modell nicht wirklich gut ist, da es einige sehr hohe Extremwerte gibt. Auch der Median der mittleren Devianz ist bei diesem Modell höher als bei den anderen beiden Modellen. Bei der *logit*-Linkfunktion ist die mediane mittlere Devianz etwas niedriger als bei der *cloglog*-Linkfunktion. Die Verteilung der mittleren Devianz zeigt aber keine wesentlichen Unterschiede zwischen diesen beiden Modellen.

Bei den 2-parametrischen Linkfunktionen reduziert sich also die Auswahl des am besten geeigneten Modells auf eine Entscheidung zwischen der

- *logit*-Transformation (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100µm) und der
- *cloglog*-Transformation ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm).

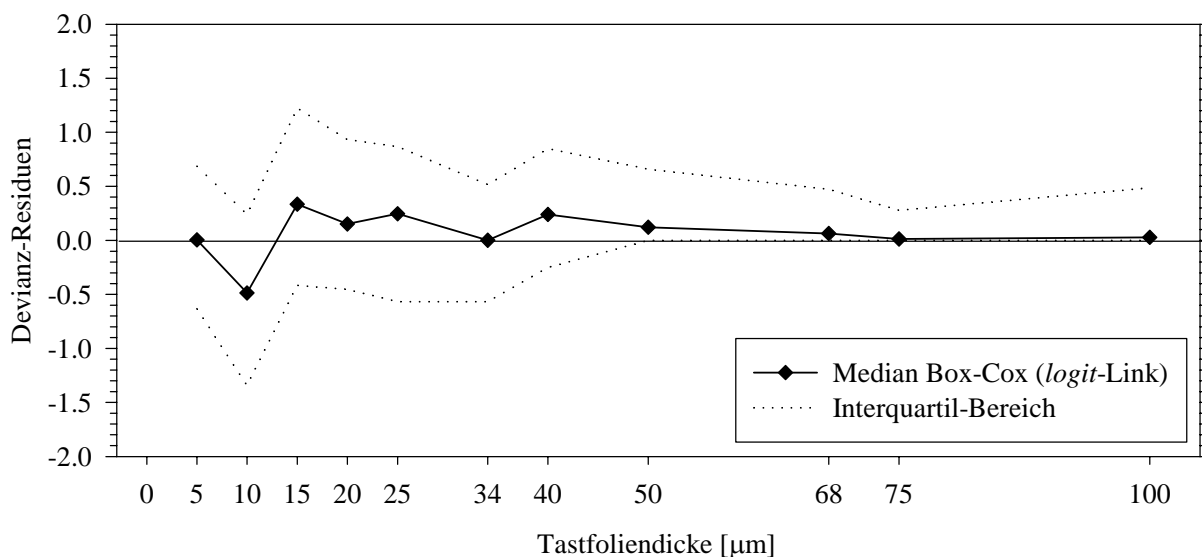
## 6.4 3-parametrische Modelle

### 6.4.1 Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)

$$bc\text{-}logit(p) = \ln\{p/(1-p)\} \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = \frac{\exp(\eta)}{1 + \exp(\eta)}$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 \cdot \text{boxcox}(x) \quad \text{mit } \text{boxcox}(x) = \begin{cases} (x^\lambda - 1) / \lambda & \lambda \neq 0 \\ \ln(x) & \lambda = 0 \end{cases}$$

Der zusätzlich eingeführte Parameter  $\lambda$  kontrolliert die Transformation der Tastfoliendicke. Bei diesem Modell kann deswegen nicht zwischen dem Modell mit untransformierten Tastfoliendicken und einem Modell mit logarithmierten Tastfoliendicken unterschieden werden. Die folgende Abbildung 6.11 zeigt den Verlauf der Devianz-Residuen bei der Box-Cox-Transformation (*logit*-Link).



**Abb. 6.11:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für die Box-Cox-Transformation des *logit*-Links (5-100µm, N=70)

Die Verbesserung gegenüber der Modellierung mit der *logit*-Transformation (untransformierte Tastfoliendicken, vgl. Abb. 6.4) ist nicht wesentlich. Der zusätzliche Parameter  $\lambda$  führt nicht zu einer Symmetrie, die eine Modellierung mittels der *logit*-Linkfunktion erlauben würde. Die Annäherung im unteren Tastfoliendickenbereich ist ebenfalls nicht verbessert. Zu sehen ist jedoch, dass nun der linear ansteigende Trend im Bereich zwischen 10µm und 50µm nicht mehr vorhanden ist.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes ist mit 9/70 (13%) bisher am geringsten. Die mittlere Devianz ist ebenfalls am niedrigsten mit einem Median von 0.86 (Minimum=0.00, Maximum=2.37). Allerdings ist hier zu beachten, dass die Einführung eines dritten Parameters auf jeden Fall bessere Ergebnisse in der Modellierung bringt, was sich in einer geringeren Devianz widerspiegelt. Tabelle 6.5 zeigt die deskriptiven Statistiken.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 15.51		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	≥ GW						
Box-Cox ( <i>logit</i> -Link)	61 (87%)	9 (13%)	70	0.89	0.52	0.00	0.86	2.37

**Tab. 6.5:** Ergebnisse der Modellierung für die Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und  
deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Bei den folgenden beiden Modellen (Aranda-Ordaz,  $m_1$ -Modell von Prentice) handelt es sich ebenfalls um Modelle mit drei Parametern. Dieser dritte Parameter kann als Formparameter interpretiert werden. Er beeinflusst generell (also über den ganzen Tastfoliendickenbereich) die Stärke der Asymmetrie und den Verlauf der beiden Enden der Kurve. Allerdings können die beiden anderen Parameter  $\beta_1$  und  $\beta_2$  im linearen Prädiktor jetzt nicht mehr als Lage- bzw. Steilheitsparameter interpretiert werden, wie dies bei den 2-parametrischen Modellen der Fall ist.

### 6.4.2 Das Aranda-Ordaz-Modell

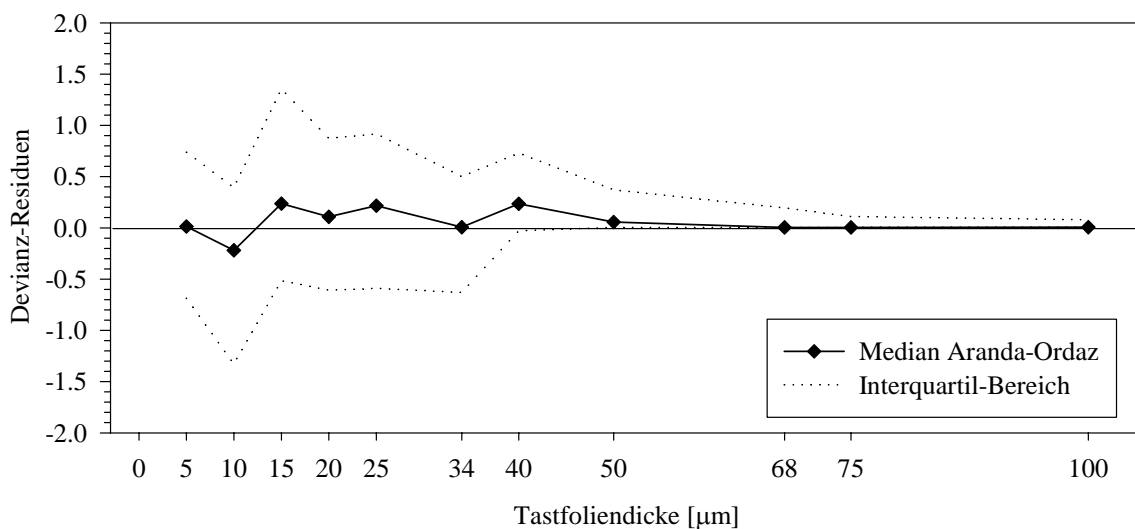
$$arord(p) = \ln \left\{ \frac{(1-p)^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right\} \quad \text{bzw.}$$

$$p = F(\eta) = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda \cdot e^\eta)^{-1/\lambda} & \lambda \cdot e^\eta > -1 \\ 1 & \lambda \cdot e^\eta \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und } x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Die Modellierung der untransformierten Tastfoliendicken mittels der von Aranda-Ordaz vorgeschlagenen Linkfunktion war schwierig, da bei insgesamt 27 Probanden (27/70 = 39%) negative Werte für  $\lambda$  geschätzt wurden. Bei drei dieser Probanden lagen die Schätzwerte unterhalb von  $-0.70$  und führten zu Schwierigkeiten bei der Invertierung der Fisher-Informationen-Matrix (s. Kapitel 4.2.2 und 4.2.3). Bei 14 Probanden lagen die Werte von  $\lambda$  im Intervall  $(-0.40; -0.60]$ , bei sechs Probanden im Intervall  $(-0.10; -0.40]$ . Die restlichen vier Probanden hatten Schätzwerte für  $\lambda$ , die sehr nahe bei der Null lagen. Die 43 Probanden mit Schätzwerten von  $\lambda \geq 0$  konnten in folgende Untermengen eingeteilt werden: 15 Probanden hatten  $\lambda$ -Werte im Bereich  $[0; 2)$ , acht Probanden hatten  $\lambda$ -Werte im Bereich  $[2; 5)$  und 20 Probanden hatten sehr hohe Schätzwerte ( $\lambda \geq 5$ ). Diese wurden aus praktischen Gründen auf  $\lambda=5.0$  gesetzt, da noch größere Werte für  $\lambda$  in keiner wesentlichen Maximierung der Log-Likelihood resultierte. Die medianen Verläufe der Devianz-Residuen zeigt Abbildung 6.12.



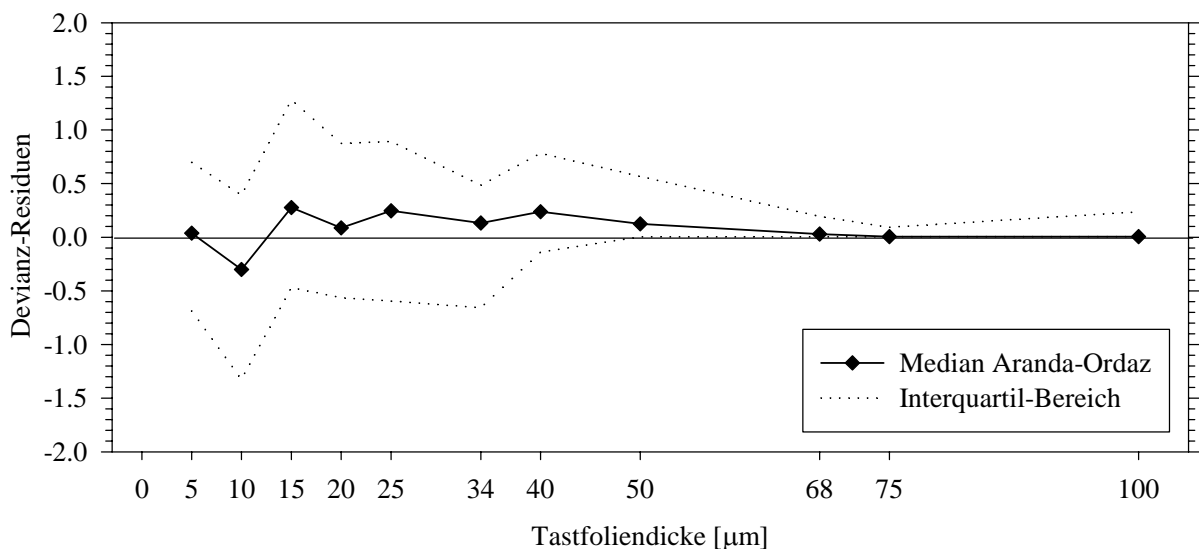
**Abb. 6.12:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das *Aranda-Ordaz*-Modell (untransformierte Foliendicken, auch negative  $\lambda$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , N=67)



Der Verlauf zeigt keinen linearen Trend mehr. Im hinteren Bereich reichen die geschätzten Werte nah genug an die beobachteten Werte heran. Nur im vorderen Bereich liegen die geschätzten Werte eher unterhalb der beobachteten Werte.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 15.51 lag mit 11/67 (16%) im Bereich der Ergebnisse der 2-parametrischen Modelle, brachte also keine wirkliche Verbesserung. Die Verteilung der mittleren Devianz zeigte mit einem Median von 0.88 allerdings bessere Werte (Minimum=0.0, Maximum=2.59). Diese waren wegen des dritten Parameters auch zu erwarten.

Um die mathematischen Probleme zu umgehen, die sich durch negative Schätzwerte für  $\lambda$  ergeben, kann man den Wertebereich von  $\lambda$  auch auf  $\lambda \geq 0$  beschränken (Scholze et al., 2001). Dies entspricht dann an der unteren Grenze des Wertebereichs der Modellierung mittels der *cloglog*-Transformation. Die dazugehörigen Verläufe der Devianz-Residuen zeigt die folgende Abbildung 6.13.



**Abb. 6.13:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das *Aranda-Ordaz*-Modell (untransformierte Foliendicken,  $\lambda \geq 0$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

Im Vergleich zur vorigen Abbildung 6.12 sind die Modellierungsergebnisse nur unwesentlich schlechter. Indem man die Schätzwerte auf den nichtnegativen Wertebereich beschränkt, führt dies aber in den meisten Fällen zu einer Entscheidung für das *cloglog*-Modell. In diesen Fällen würde dieses 2-parametrisches Modell also völlig ausreichen. Andererseits gibt es einige Probanden mit sehr steilen Verläufen, bei denen ein dritter Parameter bessere Modellierungsergebnisse mit sich führt.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes ist mit 13/70 (=19%) Probanden nur unwesentlich geringer, liegt aber bei den Werten für die 2-parametrischen Modelle. Auch die Werte für die mittlere Devianz liegen mit einem Median von 0.96 (Minimum=0.0, Maximum=2.59) in diesen Bereichen. Die Einführung eines dritten Parameters bedeutet in diesem Fall also keinerlei Gewinn. Tabelle 6.6 zeigt alle deskriptiven Statistiken.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

In Handhabung und Ergebnissen ist diese Linkfunktion für die Modellierung der logarithmierten Daten unbrauchbar. Für  $\lambda > 0$  (19 Probanden) unterschieden sich die geschätzten Wahrscheinlichkeiten nicht wesentlich vom *logit*- oder *probit*-Modell. Bei  $\lambda \rightarrow 0$  (7 Probanden) näherte sich das Modell dem *cloglog*-Modell (ohne Abbildung).

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes war erheblich höher als bei den 2-parametrischen Modellen (30/66 = 45%). Auch die mittlere Devianz lag mit einem Median von 1.35 viel zu hoch (Minimum=0.0, Maximum=3.48). Tabelle 6.6 zeigt alle dazugehörigen deskriptiven Statistiken.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 15.51		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	≥ GW						
Dicke	56 (84%)	11 (16%)	67	0.96	0.56	0.00	0.88	2.59
Dicke ( $\lambda \geq 0$ )	57 (81%)	13 (19%)	70	0.99	0.54	0.00	0.96	2.59
$\ln(\text{Dicke})$	36 (55%)	30 (45%)	66	1.30	0.68	0.00	1.35	3.48

**Tab. 6.6:** Ergebnisse der Modellierung für das *Aranda-Ordaz*-Modell  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und  
deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Modellierung der untransformierten Tastfolien-dicken hier die besseren Modellierungsergebnisse zeigt. Die große Anzahl an Probanden mit sehr hohen Schätzwerten für  $\lambda$  zeigt, dass ein dritter Parameter für die Anpassung von sehr steilen Verläufen von Vorteil ist. Da das Modell von Aranda-Ordaz bei negativen Schätzwerten für  $\lambda$  aber mathematische Probleme birgt (Invertierung der Fisher-Informations-Matrix), stellt sich hier die Frage, ob andere Modelle nicht die gleichen Ergebnisse mit weniger mathematischen Problemen liefern könnten.

Generell betrachtet ist das Aranda-Ordaz-Modell für die vorliegenden Daten ungeeignet. Bessere Ergebnisse könnte das  $m_1$ -Modell von Prentice liefern. Diese werden im folgenden Abschnitt dargestellt.

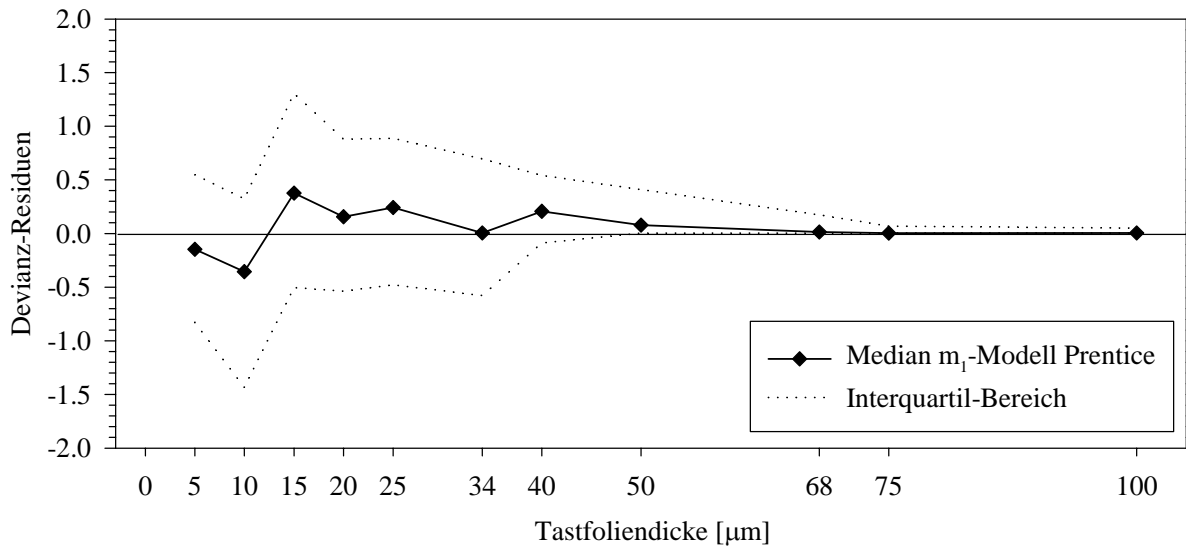
#### 6.4.3 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell von Prentice)

$$\text{genlogl}(p) = -\ln(p^{-1/\lambda} - 1) \quad \text{bzw.} \quad p = F(\eta) = \left( \frac{e^\eta}{1 + e^\eta} \right)^\lambda = \frac{1}{(1 + e^{-\eta})^\lambda}$$

$$\text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und} \quad x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Alle Probanden, bei denen die Modellierung mit dem Aranda-Ordaz-Modell zu Problemen führte, hatten bei der Modellierung mit dem  $m_1$ -Modell ebenfalls Schätzwerte für  $\lambda$  sehr nahe bei oder im Grenzbereich. Insgesamt handelte es sich um 45 Probanden ( $45/70 = 64\%$ ), davon 17 im unteren Grenzbereich ( $\lambda \rightarrow 0$ :  $n=3$ ;  $0.001 \leq \lambda \leq 0.01$ :  $n=14$ ) und 28 im oberen Grenzbereich ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Allerdings führte das im Gegensatz zum Aranda-Ordaz-Modell nicht zu mathematischen Problemen (z.B. bei der Invertierung der Fisher-Informations-Matrix). Wie Abbildung 6.14 zeigt, lässt der Verlauf der Devianz-Residuen aber auch hier nicht unbedingt auf eine Verbesserung gegenüber den 2-parametrischen Modellen schließen.



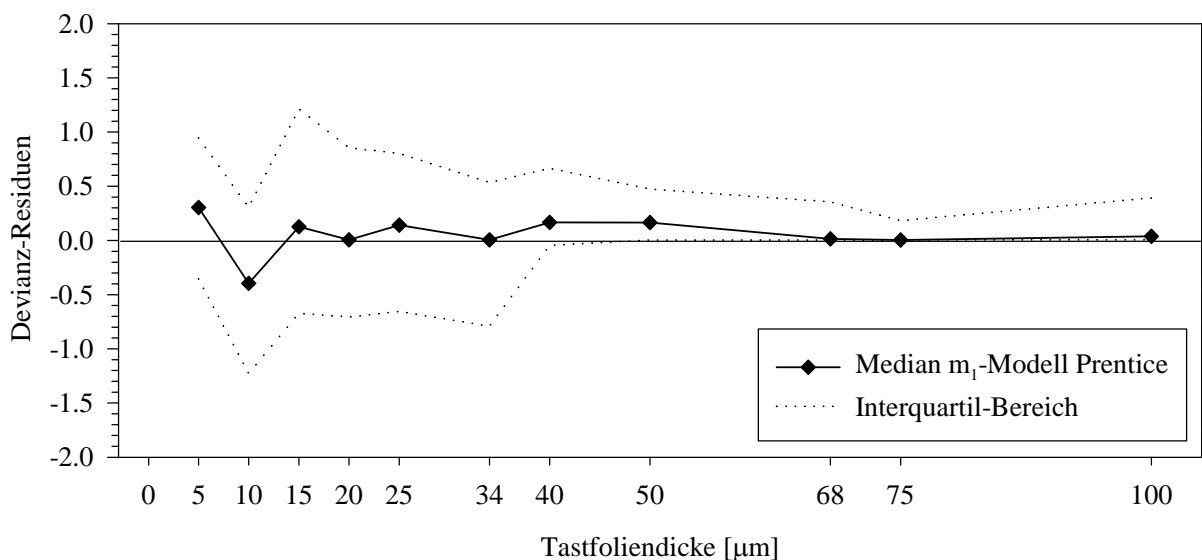
**Abb. 6.14:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das  $m_1$ -Modell von Prentice (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 15.51 lag mit 11/70 Probanden (=16%) im Bereich der 2-parametrischen Modelle. Die mittlere Devianz war mit einem Median von 0.89 etwas besser (Minimum=0.0, Maximum=2.67), wenn auch nicht soviel besser, wie mit der Einführung eines dritten Parameters zu erwarten war. Tabelle 6.7 zeigt alle deskriptiven Statistiken.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

Die Modellierung der transformierten Tastfoliendicken zeigt vor allem im Bereich ab 15 $\mu\text{m}$  sehr gute Ergebnisse, aber im vorderen Bereich sind die Werte noch sehr weit von den beobachteten relativen Tasthäufigkeiten entfernt. Da sich gerade hier die meisten 50%-Werte befinden, ist auch dieses Modell für die vorliegenden Daten nicht so gut geeignet.

Zusätzlich ergaben sich auch hier extreme Werte für die Schätzer von  $\lambda$ : insgesamt 41/70 (=59%), davon 31 im unteren Bereich ( $\lambda \rightarrow 0$ : n=8;  $0.001 \leq \lambda \leq 0.01$ : n=23) und zehn im oberen Bereich ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Den medianen Verlauf der dazugehörigen Devianz-Residuen zeigt Abbildung 6.15.



**Abb. 6.15:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das  $m_1$ -Modell von Prentice ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes bewegt sich mit 10/70 (=14%) im selben Rahmen wie beim obigen Modell. Die mittlere Devianz ist aber mit einem Median von 0.96 nur so gut wie die 2-parametrischen Modelle (Minimum=0.0, Maximum=2.35). Die folgende Tabelle 6.7 zeigt alle deskriptiven Statistiken.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 15.51		N	Mittelwert	Stand.-abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	≥ GW						
Dicke	59 (84%)	11 (16%)	70	0.96	0.57	0.00	0.89	2.67
$\ln(\text{Dicke})$	60 (86%)	10 (14%)	70	0.95	0.52	0.00	0.96	2.35

**Tab. 6.7:** Ergebnisse der Modellierung für das  $m_1$ -Modell von Prentice  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes  
deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass beim  $m_1$ -Modell von Prentice die Modellierung unter Einbeziehung der untransformierten Tastfoliendicken die besseren Ergebnisse liefert.

Bei den Modellen von Aranda-Ordaz und Prentice, sowie der Box-Cox-Transformation wirkt sich der zusätzliche Parameter auf den gesamten Definitionsbereich der unabhängigen Variable  $x$  aus. Stukel stellte ein Modell mit vier Parametern vor, bei dem einer der beiden neu eingeführten Parameter für die untere Hälfte der Funktion zuständig war, der andere für die obere Hälfte. So war es möglich, die beiden Enden der Funktion getrennt voneinander zu modellieren (Stukel, 1988). Die zahnmedizinischen Daten wurden mit dem  $\alpha_1 h$ -Modell analysiert, bei welchem der zusätzliche Parameter  $\alpha_1$  ( $=:\alpha$ ) die obere Hälfte der Funktion beeinflusst.

#### 6.4.4 $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel

$$stukel(p) = \begin{cases} \begin{cases} p^* & \alpha > 0 \\ \alpha^{-1} \cdot \ln(\alpha \cdot p^* + 1) & \alpha = 0 \\ -\alpha^{-1} \cdot (\exp(-\alpha \cdot p^*) - 1) & \alpha < 0 \end{cases} & \begin{matrix} p^* \leq 0 \quad (p \leq 0.5) \\ p^* \geq 0 \quad (p \geq 0.5) \end{matrix} \end{cases}$$

$$\text{mit } p^* = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

$$\text{bzw. } p = F(\eta) = \frac{\exp(h_\alpha(\eta))}{[1 + \exp(h_\alpha(\eta))]}$$

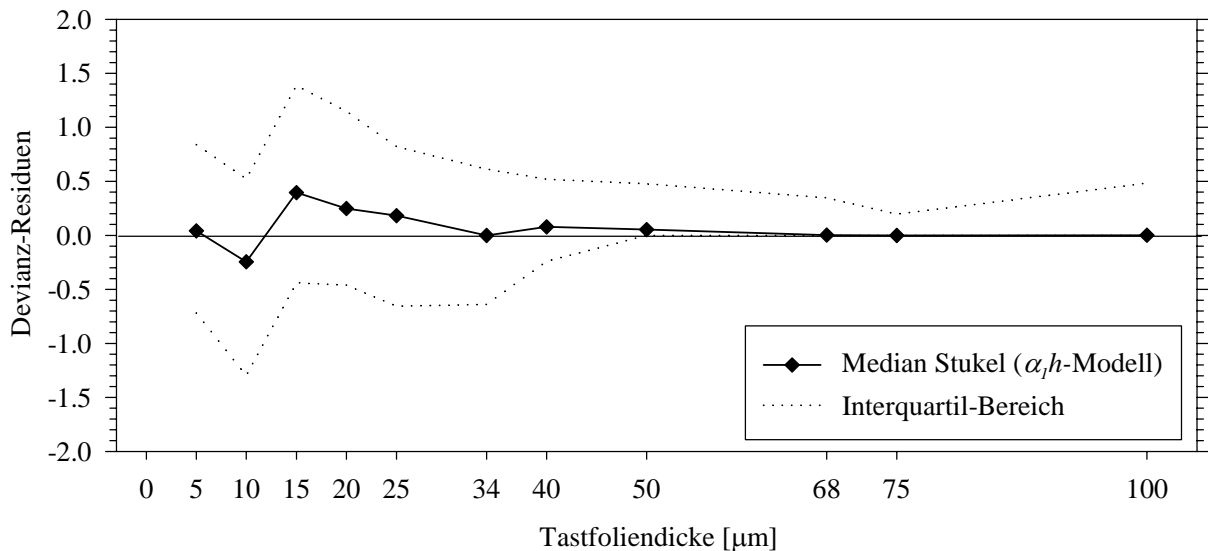
mit

$$h_\alpha(\eta) = \begin{cases} \begin{cases} \eta & \alpha > 0 \\ \eta & \alpha = 0 \\ -\alpha^{-1} \cdot \ln(1 - \alpha \cdot \eta) & \alpha < 0 \end{cases} & \begin{matrix} \eta \leq 0 \quad (p \leq 0.5) \\ \eta \geq 0 \quad (p \geq 0.5) \end{matrix} \end{cases}$$

$$\text{und } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^*, \text{ sowie } x^* = \begin{cases} \text{Dicke} \\ \ln(\text{Dicke}) \end{cases}.$$

(i)  $x^* = \text{Dicke}$

Den medianen Verlauf der Devianz Residuen für die untransformierten Tastfoliendicken zeigt die folgende Abbildung 6.16.



**Abb. 6.16:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100μm, N=70)

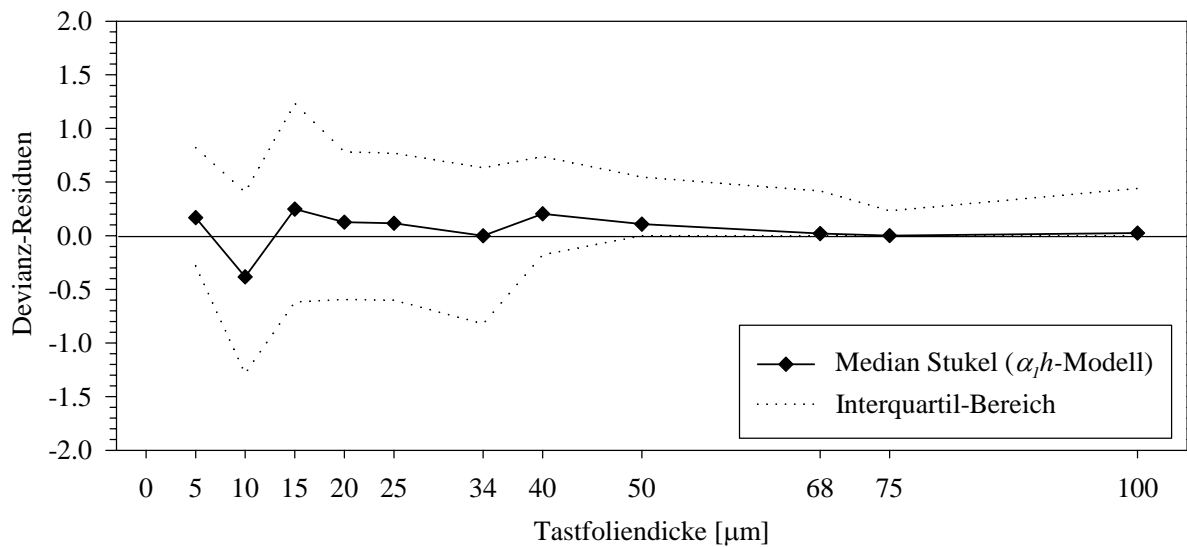
Sie zeigt vor allem im vorderen, wichtigen Bereich (5-25μm) keinerlei Verbesserung. Im hinteren Bereich erreicht es die beobachteten, relativen Tasthäufigkeiten sehr gut. Dies ist aber der Bereich, der für die Modellierung nicht so interessant ist.

Der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes von 15.51 entspricht mit 13/70 (=19%) demjenigen der 2-parametrischen Modelle. Auch die mittlere Devianz ist mit einem Median von 0.99 (Minimum=0.0, Maximum=3.03) nicht besser als die der 2-parametrischen Modelle. Dieses Modell ist also für die vorliegenden Daten nicht geeignet. Tabelle 6.8 liefert alle dazugehörigen deskriptiven Statistiken.

(ii)  $x^* = \ln(\text{Dicke})$

Im Vergleich zu den 2-parametrischen Modellen ist hier eine Verbesserung zu erkennen. Diese Verbesserung äußert sich im oberen Tastfoliendickenbereich, da  $\alpha_1$  den Formparameter für diesen Bereich darstellt. Diese Transformation ist aber auch im unteren Bereich nahe der Null besser als die *logit*-, die *cloglog*- und die Box-Cox-Transformation (*logit*-Link).

Abbildung 6.17 zeigt den medianen Verlauf der Devianz-Residuen für die transformierten Tastfoliendicken.



**Abb. 6.17:** Medianer Verlauf der Devianz-Residuen für das  $\alpha_1h$ -Modell von Stukel ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , N=70)

Hier ist der Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes ähnlich dem vorigen Modell (14/70=20%). Die mittlere Devianz zeigt in ihrer Verteilung aber etwas bessere Werte mit einem Median von 0.92 (Minimum=0.00, Maximum=2.38). Alle deskriptiven Statistiken können Tabelle 6.8 entnommen werden.

(iii) Zusammenfassung

Modell	Grenzwert (GW) = 15.51		N	Mittel- wert	Stand.- abw.	Min.	Median	Max.
	< GW	$\geq$ GW						
Dicke	57 (81%)	13 (19%)	70	1.03	0.64	0.00	0.99	3.03
$\ln(\text{Dicke})$	56 (80%)	14 (20%)	70	0.92	0.54	0.00	0.92	2.38

**Tab. 6.8:** Ergebnisse der Modellierung für das  $\alpha_1h$ -Modell von Stukel  
Anteil der Probanden mit einer Devianz oberhalb des Grenzwertes und  
deskriptive Statistiken zur mittleren Devianz



Das Modell, welches die logarithmierten Tastfoliendicken mit einbezieht, ist für die vorliegenden Daten besser geeignet. Insgesamt stellt aber hier die Einführung eines dritten Parameters keine wesentliche Verbesserung im Vergleich zur Modellierung mit dem *logit*-Link dar.

#### 6.4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse für die 3-parametrischen Modelle

Die bisherigen Ergebnisse für die 3-parametrischen Modelle können wie folgt zusammengefasst werden:

- Der Vorteil der 3-parametrischen gegenüber den 2-parametrischen Modellen liegt darin, dass sie genereller sind. Bei den Modellen von Aranda-Ordaz, Prentice und Stukel stellen die 2-parametrischen Modelle Spezialfälle dar. Ein weiterer Parameter bedeutet auch, dass die Daten besser angepasst werden können.
- Ein Nachteil der 3-parametrischen Modelle ist die Tatsache, dass sie nicht standardmäßig implementiert sind. Die Box-Cox-Transformation und die Modelle von Aranda-Ordaz und Prentice können z.B. mittels PROC GENMOD in SAS angepasst werden. Dazu muss man aber über den 3. Parameter iterieren. Hat man nur ein Experiment auszuwerten, ist der Aufwand gering. Da aber hier die Daten jedes Probanden für sich modelliert werden, ist der Arbeitsaufwand enorm.

Nur für das Modell von Stukel existiert ein Programm in S-PLUS, das auch leicht auf R umgeschrieben werden kann (*Serachitopol*, 1995). Dieses Programm läuft nur in einer UNIX-Umgebung.

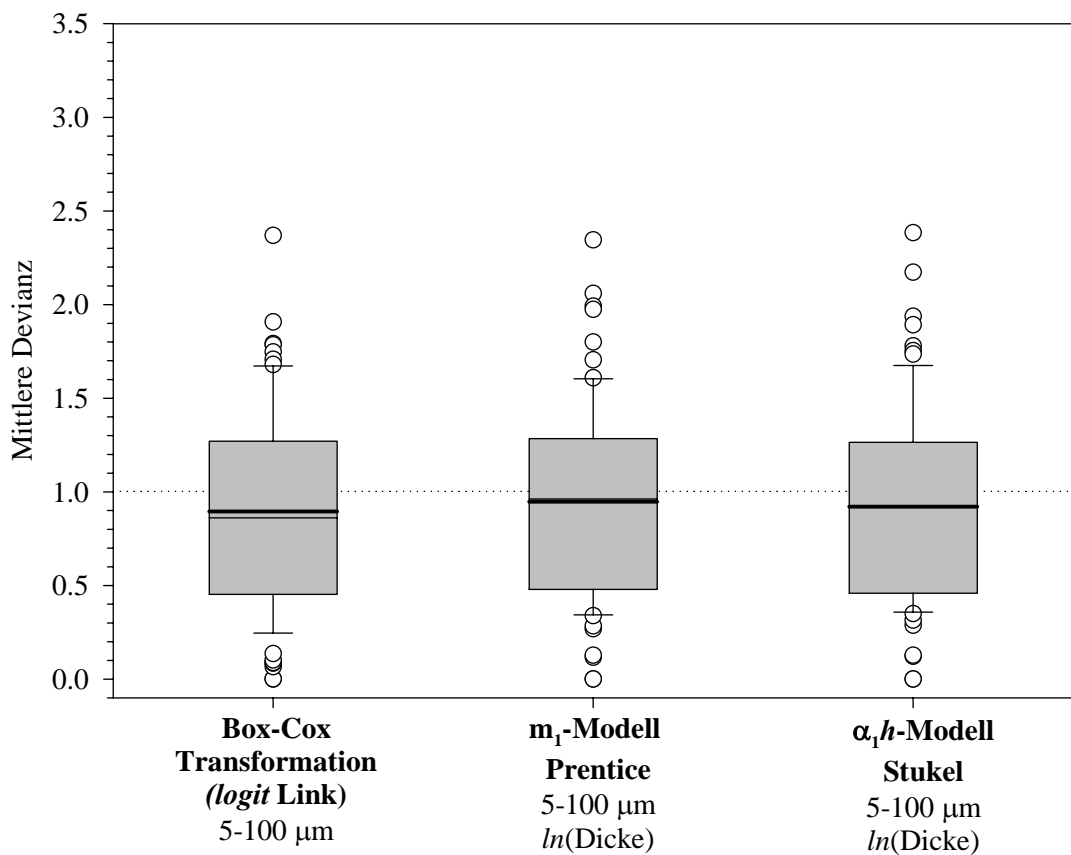
- Die Box-Cox-Transformation bringt nicht den gewünschten Symmetrieeffekt und verbessert die Ergebnisse der Modellierung nur marginal.
- Das Modell von Aranda-Ordaz ist aufgrund seiner mathematischen Schwierigkeiten bei der Schätzung von negativen  $\lambda$  (Invertierung der Fisher-Informations-Matrix) nicht für die vorliegenden Daten geeignet.
- Das  $m_1$ -Modell von Prentice birgt zwar nicht die mathematischen Schwierigkeiten wie das Modell von Aranda-Ordaz, erreicht bei den vorliegenden Daten aber ebenfalls seine Grenzen. Dies zeigt die große Anzahl von Schätzwerten für  $\lambda$  in den beiden Extrembereichen  $\lambda \rightarrow 0$  und  $\lambda \geq 5$ . Das Modell zeigt gute Ergebnisse im Bereich ab  $15\mu\text{m}$ , also im Bereich des 80%-Wertes. In der Umgebung des 50%-Wertes liegen die geschätzten Werte aber noch zu weit von den beobachteten relativen Tasthäufigkeiten entfernt.

- Das  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel modelliert die Daten etwas besser als das  $m_1$ -Modell von Prentice. Es zeigt im vorderen Bereich ebenfalls noch große Abstände zu den beobachteten, relativen Tasthäufigkeiten. Diese Abstände sind aber etwas kleiner als bei dem Modell von Prentice. Im hinteren Bereich sind beide Modelle ähnlich gut. Aus praktischen Erwägungen ist dem Modell von Stukel der Vorzug zu geben, da eine Modellierung trotz anderer Umgebung hier schneller und einfacher durchzuführen ist.
- Ein Vorteil des  $m_1$ -Modells von Prentice ist seine Universalität im Gegensatz zu dem gestückelten  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel.

Schlussfolgerung: Folgende Modelle werden weiter untersucht:

- Box-Cox-Transformation (*logit*-Link, 5-100 $\mu\text{m}$ )
- $m_1$ -Modell von Prentice ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , mit Grenzwertverteilungen)
- $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ )

Abbildung 6.18 zeigt die Verteilung der mittleren Devianz für die drei ausgewählten Modelle.



**Abb. 6.18:** Verteilung der mittleren Devianz in der Stichprobe (N=70) für die drei besten 3-parametrischen Modelle

Aus dieser Abbildung ist erkennbar, dass die Verteilung der mittleren Devianz bei allen diesen Modellen sehr ähnlich ist. Eine Entscheidung für eines der drei Modelle kann nur nach einer weitergehenden Analyse getroffen werden.

## 6.5 Erste Auswahl geeigneter Modelle

Aufgrund der obigen Ergebnisse werden folgende Modelle mit Hilfe von Simulationen (über das Probandenkollektiv,  $N=70$ ) näher untersucht:

- *Logit*-Transformation (Dicke, 5-100 $\mu\text{m}$ )
- *Cloglog*-Transformation ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ )
- Halblogistisches Modell (Dicke, 5-100 $\mu\text{m}$ )
- Box-Cox-Transformation (*logit*-Link, 5-100 $\mu\text{m}$ )
- $m_1$ -Modell von Prentice ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ , mit Grenzwertverteilungen)
- $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ )

Dazu ist im Folgenden mittels Simulationen zu klären, wie wahrscheinlich die beobachteten Ergebnisse sind, wenn die Verteilung der Antworten im Patientenkollektiv tatsächlich dem untersuchten Modell entspricht.

## 6.6 Simulationen

Die Daten wurden mit den aus den jeweiligen Modellen geschätzten, relativen Tasthäufigkeiten simuliert.

Bei den 2-parametrischen Modellen wurde die Stichprobe der  $N=70$  Probanden 250mal simuliert. Simulationen mit 1000 Stichproben brachten keine wesentlich anderen Ergebnisse. Bei den 3-parametrischen Modellen wurde die Stichprobe jeweils 100mal simuliert. Auch hier führten Simulationen mit mehr als höheren Anzahlen nicht zu anderen Ergebnissen.

Pro simulierter Stichprobe wurden die 70 Probanden dann getrennt modelliert (analog zur Struktur des Ergebnisteils, s. Kapitel 6.3 bzw. 6.4). Die daraus resultierenden, einfachen Devianz-Residuen wurden pro Dicke und pro Stichprobe über den Median zusammengefasst. So erhielt man pro simulierter Stichprobe einen medianen Verlauf der dazugehörigen Devianz-Residuen. Für die 2-parametrischen Modelle ergaben sich so 250 mediane Verläufe, für die 3-parametrischen Modelle waren es pro analysierter Linkfunktion 100 mediane Verläufe.

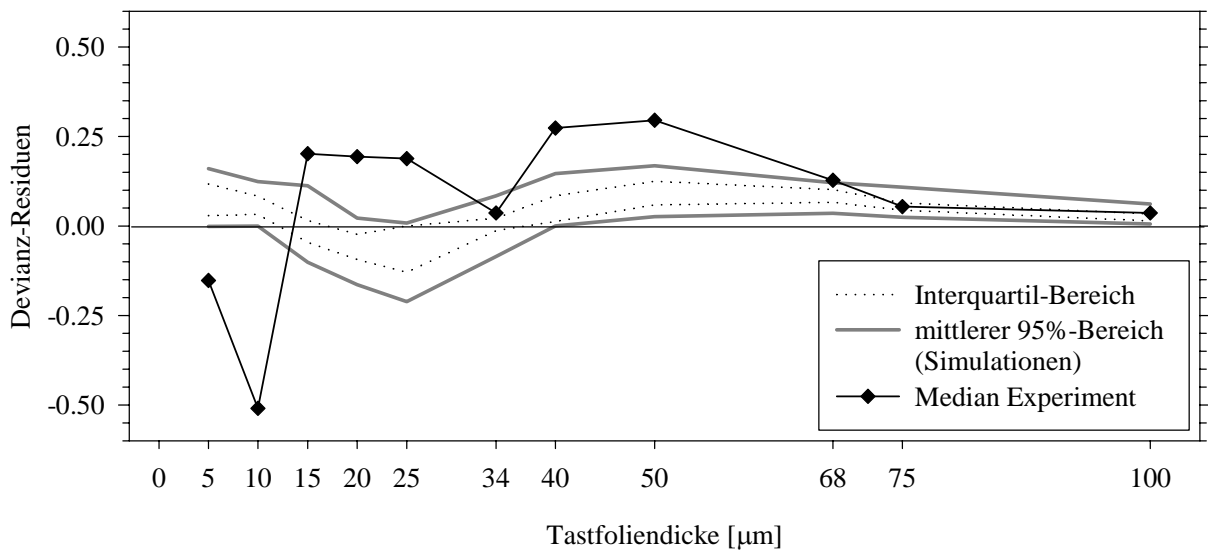
In den folgenden Abbildungen sind sowohl der Interquartilbereich (25%- bis 75%-Quantil) als auch der mittlere 95%-Bereich (2.5%- bis 97.5%-Quantil) dieser medianen Verläufe dargestellt. Der mediane Verlauf der Devianz-Residuen aus den Originaldaten ist ebenfalls aufgetragen, um ihn direkt mit den Ergebnissen aus den Simulationen vergleichen zu können.

Allgemein fällt auf, dass die medianen Verläufe aus den Simulationen nicht gleichmäßig um die Nulllinie schwanken, sondern eine kurvige Struktur aufweisen. Dies ist sowohl bedingt durch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Binomialverteilung als auch durch die geringe Anzahl von Versuchen pro Stützstelle. Zusätzlich fallen besonders Abweichungen im Bereich sehr kleiner ( $p < 0.05$ ) und sehr großer ( $p > 0.95$ ) Wahrscheinlichkeiten ins Gewicht (eigene Untersuchungen). Hinzu kommt noch die Variation in der Stichprobe selbst.

### 6.6.1 *Logit*-Transformation (Simulationen)

Abbildung 6.19 zeigt die Simulationsergebnisse für die *logit*-Transformation. Hier ist deutlich erkennbar, dass die Ergebnisse der Modellierung der Originaldaten nur im hintersten Bereich mit den simulierten Daten konform gehen. Ansonsten stimmen sie nicht überein, vor allem im vorderen Bereich bis 10  $\mu\text{m}$ . Hier sind die Werte aus dem Experiment deutlich niedriger als die simulierten Werte. Es fällt weiterhin auf, dass im Bereich der Tastfoliendicken bis 34  $\mu\text{m}$  gegenläufige Tendenzen der beobachteten Werte im Vergleich zu den simulierten Werte zu beobachten sind.

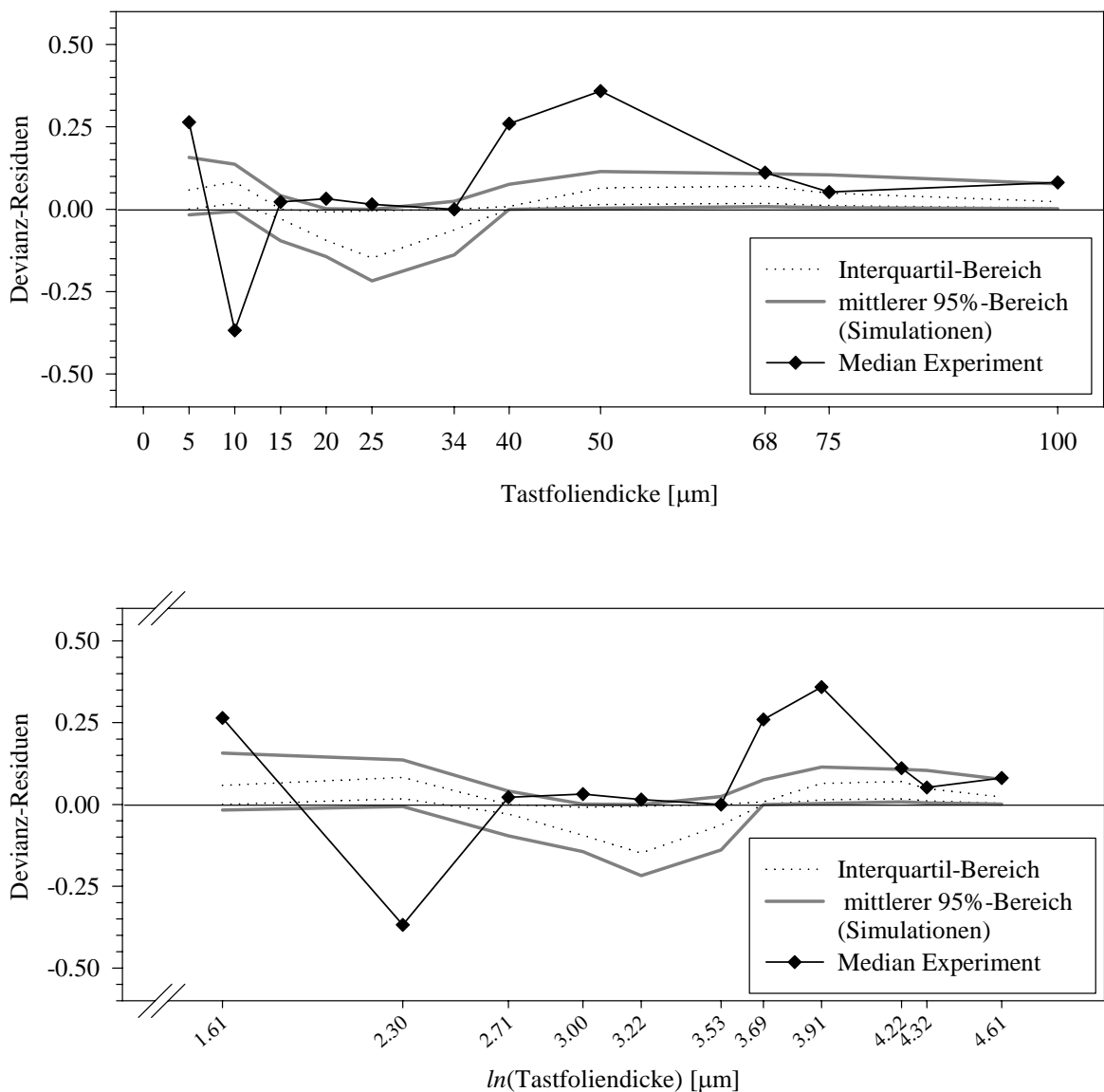
Auch die Simulationen legen demnach den Schluss nahe, dass der *logit*-Link nicht geeignet ist, die vorliegenden Daten in sinnvoller Weise zu modellieren.



**Abb. 6.19:** *logit*-Linkfunktion (untransformierte Tastfoliendicken, 5-100  $\mu\text{m}$ )  
Simulationen der medianen Verläufe der Devianz-Residuen (N=250)  
im Vergleich zu medianem Verlauf aus dem Experiment

### 6.6.2 Cloglog-Transformation (Simulationen)

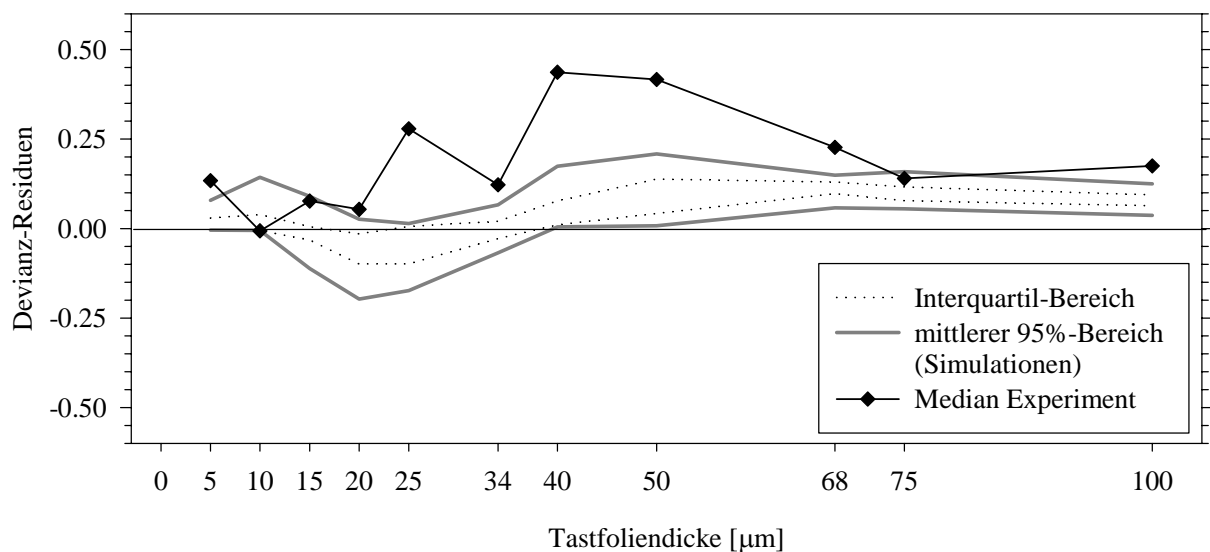
Im Gegensatz zur *logit*-Transformation zeigen die Simulationen zur *cloglog*-Transformation im Bereich zwischen 15 und 34  $\mu\text{m}$  weitaus bessere Ergebnisse. Im Bereich zwischen 34 und 68  $\mu\text{m}$  reichen die Ergebnisse der Modellierung der Originaldaten nicht an die simulierten Daten heran. Danach sind die Werte wieder zufriedenstellend. Nicht zufriedenstellend sind nur die Werte bei 5  $\mu\text{m}$  und 10  $\mu\text{m}$ , die komplett aus dem 95%-Bereich der Simulationen herausfallen. Die Verläufe sind in Abbildung 6.20 dargestellt, sowohl mit linearer als auch mit logarithmierter x-Achse, da die Tastfoliendicken logarithmiert in das Modell eingehen.



**Abb. 6.20:** *cloglog*-Linkfunktion ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100  $\mu\text{m}$ )  
Simulationen der medianen Verläufe der Devianz-Residuen (N=250)  
im Vergleich zu medianem Verlauf aus dem Experiment

### 6.6.3 Halblogistisches Modell (Simulationen)

Wie die folgende Abbildung 6.21 zeigt, liegen die Ergebnisse der simulierten Stichproben weit von den beobachteten Werten entfernt, v.a. im Bereich ab  $20\mu\text{m}$ . Nur im davor liegenden Abschnitt stimmen die beobachteten Mediane mit den simulierten Werten überein. Da dieser Bereich aber insgesamt gesehen zu klein ist, eignet sich auch das halblogistische Modell nicht für die Modellierung der vorliegenden Daten. Dies deuteten aber bereits die Ergebnisse in Kapitel 6.3.4 an.

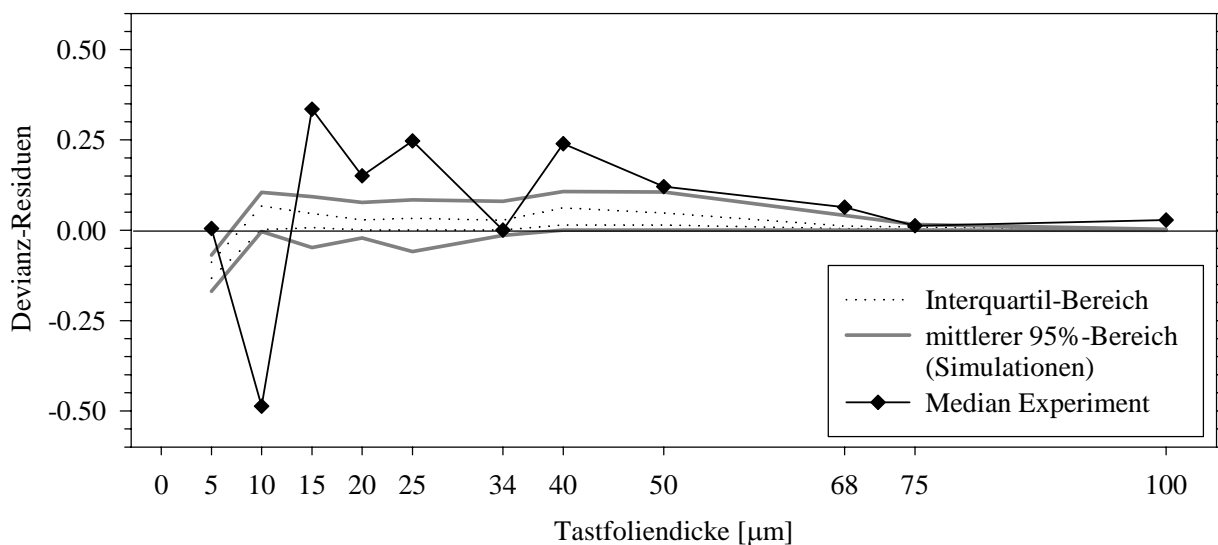


**Abb. 6.21:** Halblogistisches Modell (untransformierte Foliendicken, 5-100 $\mu\text{m}$ )  
Simulationen der medianen Verläufe der Devianz-Residuen (N=250)  
im Vergleich zu medianem Verlauf aus dem Experiment

#### 6.6.4 Box-Cox-Transformation (*logit*-Link, Simulationen)

Obwohl die Box-Cox-Transformation bei den Originaldaten gute Ergebnisse, vor allem für die mittlere Devianz lieferte, ist der mediane Verlauf der einfachen Devianz-Residuen weit von den simulierten Daten entfernt. Dies illustriert Abbildung 6.22. Nur im hinteren Bereich (ab einer Tastfoliendicke von 50 $\mu\text{m}$ ) nähert sich die Kurve der Originaldaten dem 95%-Bereich der Simulationen an. Zu beachten ist hier, dass der 95%-Bereich der Simulationen enger ist als bei den 2-parametrischen Modellen, da ein Parameter mehr im Modell ist.

Die Box-Cox-Transformation für den *logit*-Link ist deswegen trotz des 3. Parameters kein geeignetes Modell für die vorliegenden Daten.



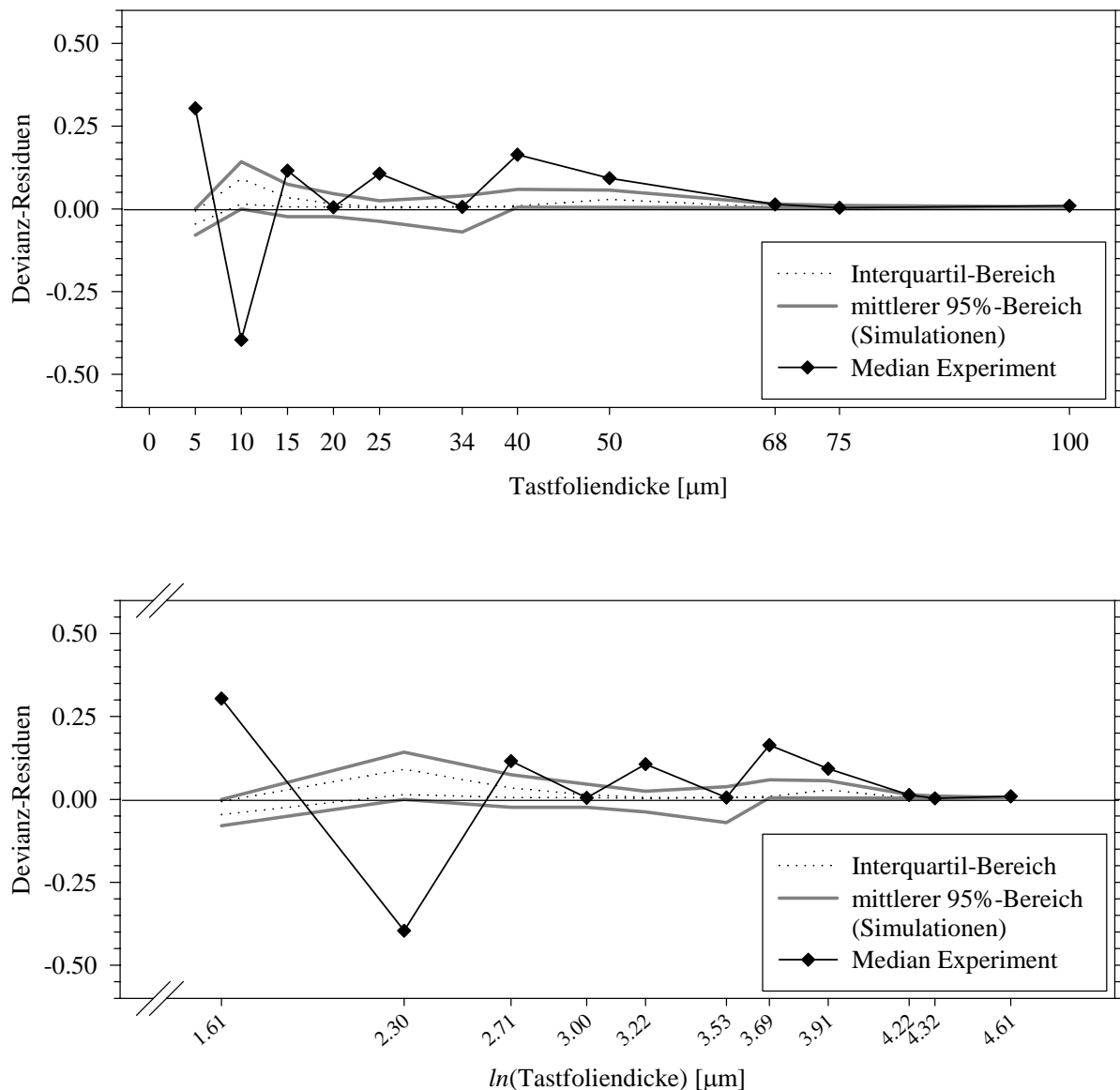
**Abb. 6.22:** Box-Cox-Transformation (*logit*-Link, 5-100 $\mu\text{m}$ )  
Simulationen der medianen Verläufe der Devianz-Residuen (N=100)  
im Vergleich zu medianem Verlauf aus dem Experiment



### 6.6.5 $m_1$ -Modell von Prentice (mit Grenzwertverteilungen, Simulationen)

Die Simulationsergebnisse zum  $m_1$ -Modell von Prentice liefern einen noch engeren 95%-Bereich als für die Box-Cox-Transformation. Auch hier liegen die medianen Werte der Devianz-Residuen der Originaldaten zu weit von diesem Bereich entfernt, wie Abbildung 6.23 zu entnehmen ist. Da die Tastfoliendicke logarithmiert in das Modell eingeht, werden analog zur *cloglog*-Transformation beide Darstellungsmöglichkeiten gezeigt.

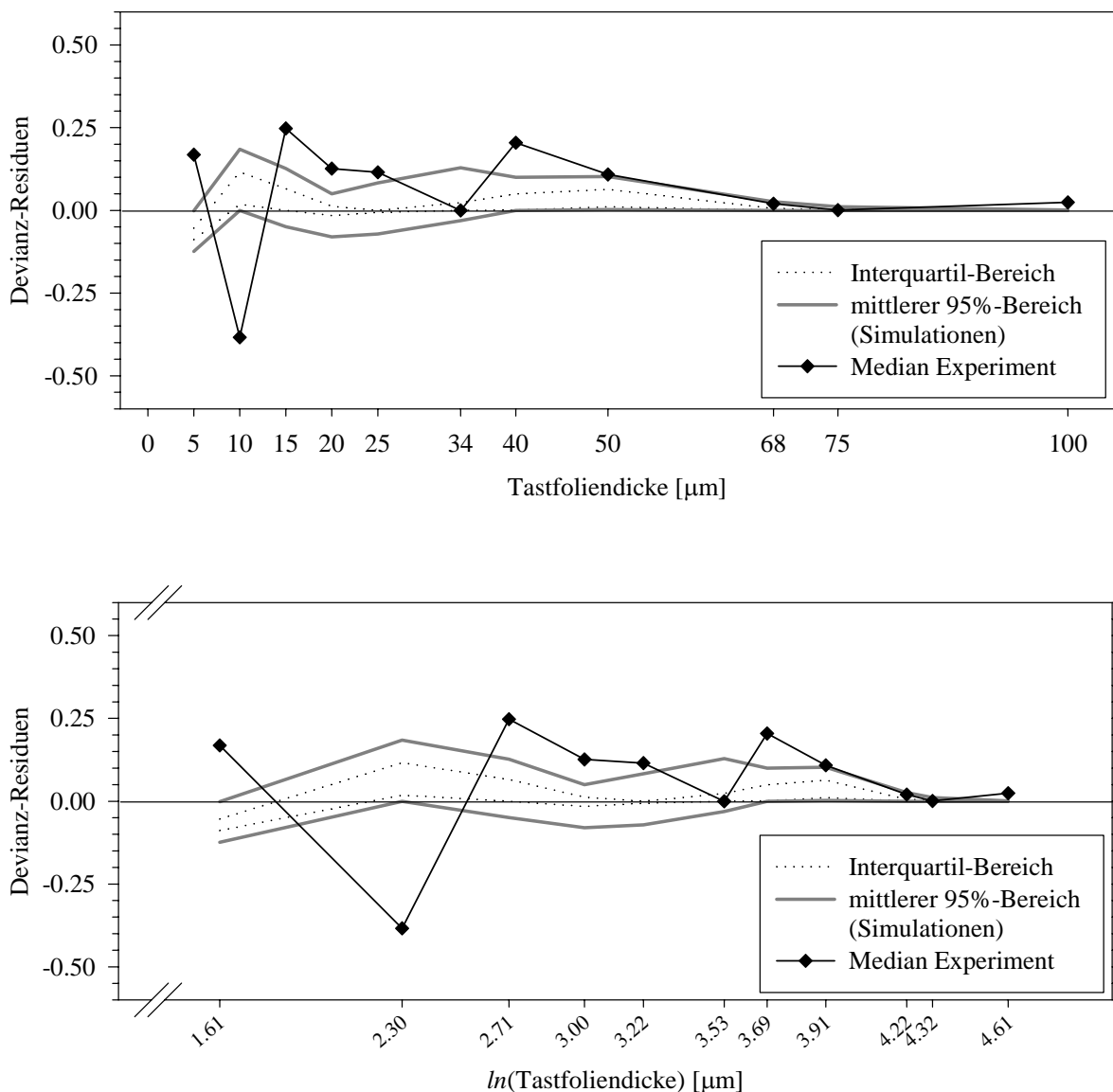
Dieses Modell ist trotz seines 3. Parameters also ebenfalls nicht geeignet, die vorliegenden Daten hinreichend gut zu beschreiben.



**Abb. 6.23:**  $m_1$ -Modell von Prentice ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100 $\mu\text{m}$ )  
Simulationen der medianen Verläufe der Devianz-Residuen (N=100)  
im Vergleich zu medianem Verlauf aus dem Experiment

### 6.6.6 $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel (Simulationen)

Auch das  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel ist kein geeignetes Modell, um die Daten adäquat zu beschreiben. Im Vergleich zum einfachen *logit*-Link (s. Kapitel 6.6.1) liegen die beobachteten medianen Devianz-Residuen näher an den simulierten Werten, deuten also auf eine Verbesserung der Schätzgenauigkeit hin. Sie liegen aber immer noch außerhalb des 95%-Bereiches, wie die folgenden Abbildungen zeigen. Zusätzlich zeigen die aus dem Experiment geschätzten Mediane bei 5  $\mu\text{m}$  und 10  $\mu\text{m}$  eine gegenläufige Tendenz im Vergleich zu den simulierten Werten.



**Abb. 6.24:**  $\alpha_1 h$ -Modell von Stukel ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100  $\mu\text{m}$ )  
Simulationen der medianen Verläufe der Devianz-Residuen (N=100)  
im Vergleich zu medianem Verlauf aus dem Experiment

## 6.7 Zusammenfassung aller Ergebnisse

Bereits die Analyse der Devianz-Residuen und die Beurteilung der untersuchten Linkfunktionen anhand der Gütekriterien aus Kapitel 5.6 zeigte, dass 3-parametrische Linkfunktionen keinen sichtbaren Vorteil gegenüber 2-parametrischen Linkfunktionen haben. Die Simulationen kommen zu denselben Ergebnissen. Zusätzlich lassen sie den Schluss zu, dass von allen hier untersuchten Linkfunktionen nur die *cloglog*-Transformation die Daten hinreichend gut beschreibt. Dies gilt in erster Linie für den Bereich zwischen 15µm und 34µm. Bei größeren Tastfoliendicken erreicht auch das *cloglog*-Modell nicht schnell genug die beobachteten Daten. Die relativen Tasthäufigkeiten werden hier also im Bereich von 34µm bis 68µm unterschätzt. Im Bereich zwischen 5µm und 15µm zeigen alle untersuchten Linkfunktionen – außer dem halblogistischen Modell - dieselben schlechten Ergebnisse. Dies liegt sowohl an der geringen Anzahl von Stützstellen in diesem Bereich als auch an der Anzahl der Versuche pro Stützstelle, die hier geringer ist als bei den Stützstellen im Bereich zwischen 15µm und 34µm. Die geringe Anzahl von Stützstellen im vorderen Bereich fällt vor allem bei denjenigen Modellen ins Gewicht, bei denen die Tastfoliendicken logarithmiert in die Formel eingehen, wie dies auch beim *cloglog*-Modell der Fall ist.

Im folgenden Kapitel werden die experimentellen Daten der vorliegenden Arbeit mit dem *cloglog*-Modell ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm) analysiert, und die für die Praxis relevanten Größen errechnet. Es sind dies:

- 50%-Wert (Schwellenwert; Tryde et al., 1962; Utz, 1986; Jacobs & van Steenberghe, 1994; Müller et al., 1995)
- 80%-Wert (Karlsson & Molin, 1995)
- 10%-Wert, 90%-Wert und daraus resultierender Supportbereich (Alcalá-Quintana & García-Pérez, 2004)

Diese Größen werden den Ergebnissen aus früheren zahnmedizinischen Arbeiten gegenüber gestellt. Die Darstellung und der Vergleich der Ergebnisse sind rein deskriptiv, da deren statistische Bewertung nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit war. Zusätzlich werden die zahnmedizinischen Daten sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der reinen Ratequote analysiert, um deren Einfluss auf die Ergebnisse beurteilen zu können.

Auf die Beschreibung der Steigung im 50%-Wert wird verzichtet. Da die *cloglog*-Linkfunktion asymmetrisch ist, ist der Punkt der höchsten Steigung nicht der 50%-Wert, sondern der 63.2%-Wert ( $1-e^{-1}$ ). Hinzu kommt, dass die Tastfoliendicken logarithmiert in das Modell einfließen, und die dazugehörige Steigung so nicht auf die untransformierten Tastfoliendicken übertragbar ist.

## 6.8 Modellierung der Daten mit der *cloglog*-Transformation

Die *cloglog*-Transformation ist wie folgt definiert:

$$g(p) = \text{cloglog}(p) = \ln\{-\ln(1-p)\}, \text{ bzw.}$$

$$p = \tilde{F}(x^*) = F(\eta) = 1 - \exp[-\exp(\eta)] \quad \text{mit } \eta = \beta_1 + \beta_2 x^* \quad \text{und } x^* = \ln(x).$$

Zur Berechnung des Schwellenwertes und der anderen Größen benötigt man den Punktschätzer  $\mathcal{G}_p$ . Dieser lautet im Falle der *cloglog*-Transformation für  $x$  wie folgt:

$$\mathcal{G}_p = \exp(\tilde{\mathcal{G}}_p) \quad \text{mit } \tilde{\mathcal{G}}_p = \frac{1}{\beta_2} (\ln\{-\ln(1-p)\} - \beta_1).$$

Für den Supportbereich benötigt man den 10%-Wert und den 90%-Wert. Der 10%-Wert und damit auch der Supportbereich ist in seiner Schätzung unsicher, da er bei der Mehrzahl der Probanden im Intervall  $[0\mu\text{m}; 5\mu\text{m}]$  liegt und aus dem Modell extrapoliert werden muss.

Tabelle 6.9 zeigt die deskriptiven Statistiken für alle Probanden ( $N=70$ ) zu diesen Variablen, ohne Berücksichtigung der reinen Ratequote. Insgesamt vier Probanden (Nr. 1/20, 1/9, 1/15 und 2/26) haben extrem hohe Ergebnisse für den 10%-Wert, bzw. den 90%-Wert. Aus diesem Grund sind die Mittelwerte für diese Variablen und den daraus resultierenden Supportbereich nach oben verzerrt. Der Median ist in diesem Fall das bessere Maß zur Beschreibung der Größen.

$[\mu\text{m}]$	N	Mittelwert	Stand. abw.	95%-Konfidenzintervall	Min.	Median	Max.
50%-Wert	70	14.4	12.1	[11.5; 17.2]	0.5	11.3	68.2
80%-Wert	70	30.7	22.1	[25.5; 36.0]	2.9	25.5	136.9
10%-Wert	70	4.1	5.7	[ 2.8; 5.5]	0.004	2.4	30.4
90%-Wert	70	46.2	43.9	[35.7; 56.7]	5.0	33.8	340.5
Supportbereich	70	42.1	43.4	[31.7; 52.4]	0.8	29.8	340.3

**Tab. 6.9:** Deskriptive Statistiken *cloglog*-Transformation  
ohne Berücksichtigung der reinen Ratequote ( $N=70$ )

Die Modellierung der experimentellen Daten der vorliegenden Arbeit ergibt einen medianen 50%-Wert von  $11\mu\text{m}$ , sowie einen medianen 80%-Wert von  $24\mu\text{m}$ . Der Supportbereich ist im Median ungefähr  $30\mu\text{m}$  breit.

Die Berücksichtigung der reinen Ratequote führt zu keiner sichtbaren Veränderung der Werte, was bereits die Ergebnisse zu den Leerversuchen (s. Kapitel 6.2) vermuten ließen. Dies zeigt Tabelle 6.10. Die Mediane des 50%-Wertes, des 80%-Wertes und des Supportbereiches bleiben dieselben wie ohne Berücksichtigung der reinen Ratequote.

[µm]	N	Mittelwert	Stand.-abw.	95%-Konfidenzintervall	Min.	Median	Max.
50%-Wert	70	14.9	12.2	[12.0; 17.8]	0.8	11.7	68.2
80%-Wert	70	31.4	22.0	[26.2; 36.6]	4.1	25.9	136.9
10%-Wert	70	4.4	5.8	[ 3.0; 5.7]	0.005	2.5	30.4
90%-Wert	70	46.7	43.9	[36.3; 57.2]	5.1	34.0	340.5
Supportbereich	70	42.4	43.3	[32.1; 52.7]	0.8	29.8	340.3

**Tab. 6.10:** Deskriptive Statistiken *cloglog*-Transformation mit Berücksichtigung der reinen Ratequote (N=70)

In Anhang A6 sind für jeden Probanden die Schätzer  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sowie die daraus ermittelten 50%-Werte, 80%-Werte, 10%-Werte, 90%-Werte und die Supportbereiche aufgelistet. Bei Probanden mit einer reinen Ratequote  $> 0$  sind diese Größen sowohl ohne als auch mit Berücksichtigung der reinen Ratequote dargestellt.

In Anhang A7 sind die beobachteten, relativen Tasthäufigkeiten und die mittels der *cloglog*-Transformation geschätzten Werte für jeden einzelnen Probanden graphisch dargestellt. Auf diesen Abbildungen ist erkennbar, dass nur bei zwei Probanden (Nr. 1/7 und 1/29) die Berücksichtigung der reinen Ratequote einen sichtbaren Einfluss auf die geschätzten relativen Häufigkeiten hat.

Die Mittelwerte und Mediane zum 50%- und 80%-Wert aus früheren zahnmedizinischen Arbeiten sind in Tabelle 6.11 zusammengestellt. Die Ergebnisse der hier analysierten Daten zeigen, verglichen mit den früheren Arbeiten, etwas niedrigere Werte. Beim 80%-Wert stimmen die Ergebnisse überein. Allerdings liegt hier nur eine einzige zahnmedizinische Vergleichsarbeit vor.

Autor(en) (Jahr)	Folien- material	Zahnposition	N	Mittelwert ± Std.abw.	Median
<b>50%-Wert</b>					
<i>Tryde et al. (1962)</i>	Silber	Prämolaren / Molaren	10	20.0 ± 11.3µm (n=8) 2 Probanden hatten 50%-Werte < 10µm	15.5µm
<i>Utz (1986)</i>	Kupfer	Frontzähne	72	35 ± 34µm	29µm
		Eckzahn	66	108 ± 101µm	63µm
		Prämolaren	71	21 ± 14µm	17µm
		Molaren	72	22 ± 17µm	17µm
<i>Jacobs &amp; van Steenberghe (1991)</i>	Stahl	Frontzähne	12	17µm	
<i>Jacobs, Schotte &amp; van Steenberghe (1992)</i>	Alu (20°C)	Frontzähne	15	11.9 ± 7.5µm	
	Alu (35°C)	Frontzähne	15	15.5 ± 8.3µm	
	Stahl (20°C)	Frontzähne	15	17.7 ± 5.0µm	
	Stahl (35 °C)	Frontzähne	15	23.3 ± 7.4µm	
	Zinn (20°C)	Frontzähne	15	19.5 ± 7.9µm	
	Zinn (35 °C)	Frontzähne	15	25.4 ± 7.9µm	
<i>Jang &amp; Kim (2001)</i>	?	Frontzahn 1	10	11.7 ± 6.3µm	
		Frontzahn 2	10	14.3 ± 7.6µm	
		Eckzahn	10	15.9 ± 6.8µm	
		Prämolar 1	10	15.1 ± 5.2µm	
		Prämolar 2	10	16.1 ± 4.6µm	
		Molar 1	10	18.7 ± 5.3µm	
		Molar 2	10	22.8 ± 8.9µm	
<b>80%-Wert</b>					
<i>Karlsson &amp; Molin (1995)</i>	Plastik	Prämolaren/ Molaren	20	24µm	

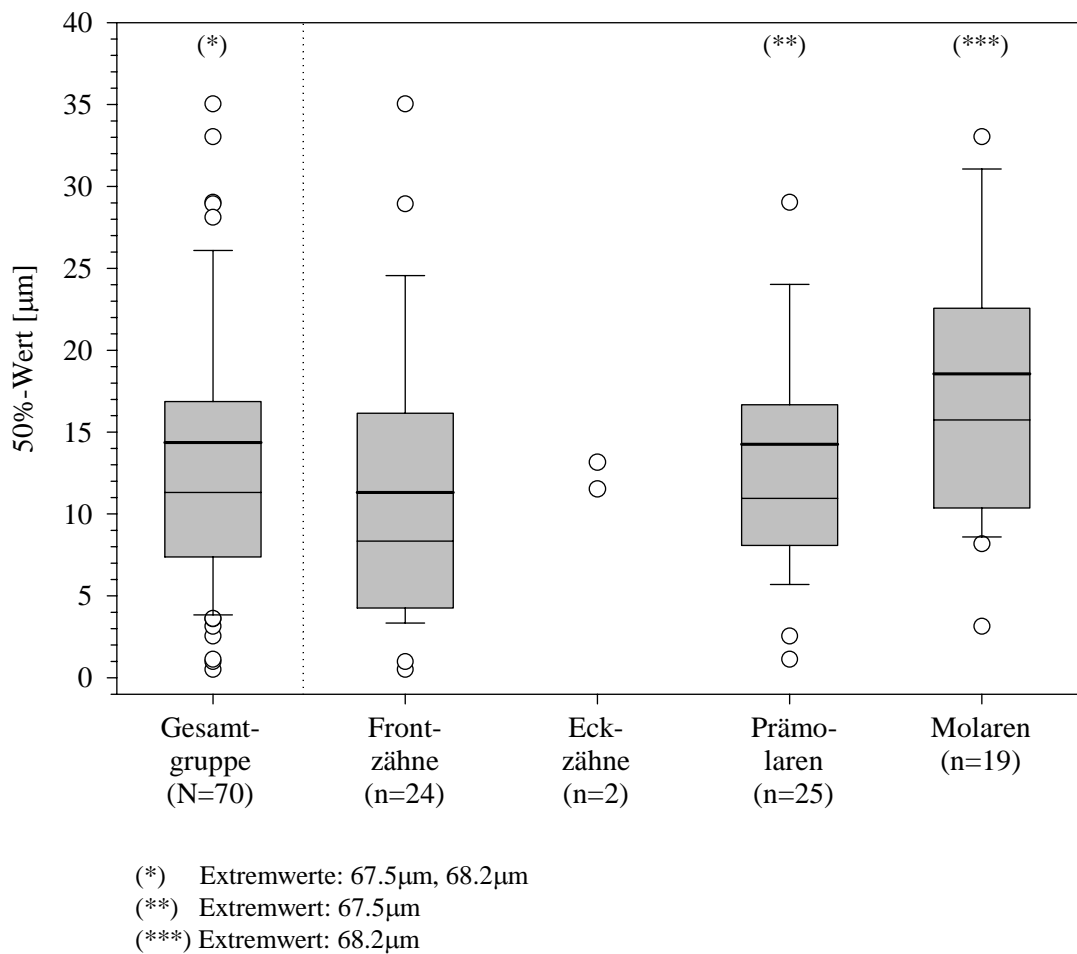
**Tab. 6.11:** Ergebnisse zur absoluten Schwelle aktiver Tastsensibilität natürlicher Zähne (50%-, bzw. 80%-Wert, frühere zahnmedizinische Studien)

Tabelle 6.12 zeigt die deskriptiven Statistiken analog zu Tabelle 6.9, aufgeteilt nach Zahnposition, um diese besser mit den Ergebnissen aus früheren Studien vergleichen zu können. Da es nur zwei Probanden (Nr. 1/8 und 2/6b) mit untersuchten Eckzähnen gibt, werden deren Werte nur in den Abbildungen, aber nicht in der Tabelle aufgeführt.

[µm]	N	Mittelwert	Stand.-abw.	95%-Konfidenzintervall	Min.	Median	Max.
<b>Frontzähne</b>							
50%-Wert	24	11.3	9.2	[ 7.4; 15.2]	0.5	8.3	35.0
80%-Wert	24	33.6	28.7	[21.5; 45.7]	2.9	28.9	136.9
10%-Wert	24	2.7	2.8	[ 1.1; 3.5]	0.004	0.8	10.7
90%-Wert	24	60.5	67.9	[31.8; 89.1]	5.0	42.2	340.5
Supportbereich	24	58.2	68.3	[29.4; 87.1]	2.8	39.6	340.3
<b>Prämolaren</b>							
50%-Wert	25	14.3	12.9	[ 8.9; 19.6]	1.1	10.9	67.5
80%-Wert	25	26.2	17.6	[19.0; 33.5]	10.0	23.2	98.9
10%-Wert	25	4.7	6.3	[ 2.1; 7.4]	0.008	2.2	28.7
90%-Wert	25	35.2	20.3	[26.8; 43.5]	10.4	31.8	116.3
Supportbereich	25	30.4	16.4	[23.6; 37.2]	0.8	28.5	87.6
<b>Molaren</b>							
50%-Wert	19	18.6	14.1	[11.8; 25.4]	3.1	15.7	68.2
80%-Wert	19	32.8	18.9	[23.7; 41.9]	9.1	27.1	97.8
10%-Wert	19	5.9	7.1	[ 2.5; 9.4]	0.3	3.4	30.4
90%-Wert	19	42.3	21.6	[31.9; 52.7]	14.2	37.9	114.1
Supportbereich	19	36.4	16.3	[28.5; 44.2]	13.9	33.0	83.7

**Tab. 6.12:** Deskriptive Statistiken *cloglog*-Transformation  
ohne Berücksichtigung der reinen Ratequote, nach Zahnposition (N=68)

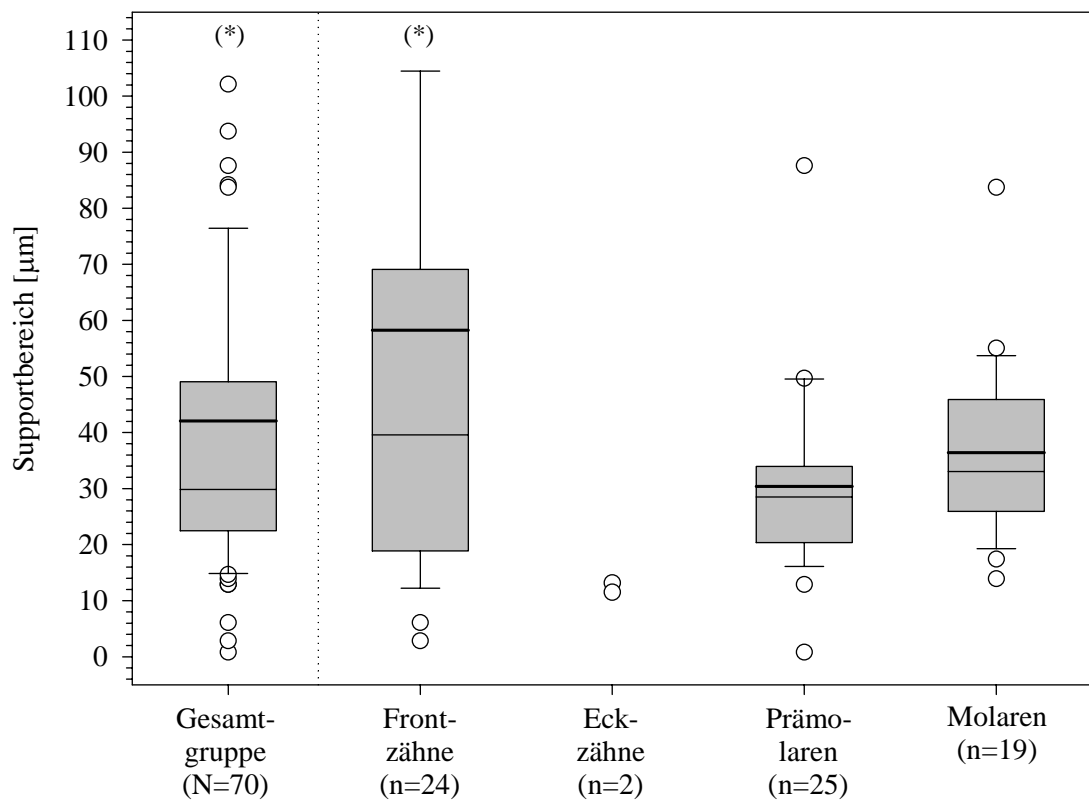
Es fällt auf, dass der Median der 50%-Werte über die Zahnposition hinweg größer wird. Dies entspricht dem Trend, wie er auch bei früheren zahnmedizinischen Arbeiten beschrieben wurde (Jang & Kim, 2001). Für die Frontzähne stehen sie allerdings im Gegensatz zu den Ergebnissen von Utz, der hier deutlich höhere Werte fand (Utz, 1986). Abbildung 6.25 zeigt die Boxplots für den 50%-Wert für alle Probanden und nach Zahnposition getrennt.



**Abb. 6.25:** *cloglog*-Transformation ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm)  
 Boxplots zum 50%-Wert

Im Gegensatz zu den Ergebnissen des 50%-Wertes gilt für den Supportbereich, dass dieser im Median für die Frontzähne deutlich breiter ist als für die hinteren Zähne (Prämolaren und Molaren). Das bedeutet, dass bei den hinteren Zähnen die Schwelle zwar etwas höher liegt als bei den Frontzähnen, der Gesamtbereich der Tastsensibilität sich hier aber über einen viel kleineren Bereich erstreckt. Abbildung 6.26 zeigt die Boxplots zum Supportbereich.





(\*) Extremwerte: 125.5µm, 340.3µm

**Abb. 6.26:** *cloglog*-Transformation ( $\ln(\text{Dicke})$ , 5-100µm)  
Boxplots zum Supportbereich

In der Stichprobe, die der vorliegenden Arbeit zugrunde liegt, sind die mit Hilfe des *cloglog*-Modells errechneten Werte sehr schief verteilt. Mittelwert und Standardabweichung sind also keine geeigneten Maßzahlen zur Beschreibung dieser Werte. Diesen Tatbestand erkennt man bereits in früheren zahnmedizinischen Arbeiten, in denen sowohl Mittelwert als auch Median angegeben wurden (Tryde et al., 1962; Utz, 1986). Diese Asymmetrie sollte auch bei der Analyse zukünftiger Studien beachtet werden.

## 7 Diskussion

Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit waren Untersuchungen zur aktiven Tastsensibilität natürlicher Zähne, die in erster Linie den 50%-Wert als Schwellenwert des Tastempfindens definierten (Tryde et al., 1962; Utz, 1986; Jacobs & van Steenberghe, 1994; Müller et al., 1995). Aus den dazu durchgeführten Experimenten konnten aber keine weiteren Parameter, wie z.B. die Steigung im Schwellenwert deduziert werden, da deren Aufbau nicht dazu geeignet war. Ziel dieser Arbeit war es daher, zuerst einen geeigneten Versuchsaufbau zu entwickeln. Dieser sollte es ermöglichen, die so erhaltenen Daten mittels einer mathematischen Funktion zu modellieren.

Das Schwellenwertkonzept findet in der Psychophysik seinen theoretischen Unterbau. Die Konstanzmethode ist hier ein möglicher experimenteller Ansatz. Die so erhaltenen Daten können dann mittels einer psychometrischen Funktion angepasst werden (Klein, 2001). Deren mathematische Entsprechung in der Wahrscheinlichkeitstheorie stellt die Linkfunktion, bzw. deren Umkehrfunktion aus dem Bereich der Verallgemeinerten Linearen Modelle dar. Neben Funktionen mit zwei, aus den Daten zu schätzenden, Parametern existieren auch Verallgemeinerungen mit drei oder vier Parametern. Erfahrungen zeigen aber, dass vier Parameter bei der Modellierung der meisten Datensätze zu einer Überparametrierung führen. Dies hat nicht nur numerische Probleme zu Folge, sondern führt auch dazu, dass die so erhaltenen Modelle nicht allgemein übertragbar sind (Czado, 1997). Aus diesem Grund wurden vier 2-parametrische und vier 3-parametrische Linkfunktionen als mögliche Modelle in die Arbeit aufgenommen. Drei der vier 2-parametrischen Linkfunktionen sind auch in der Psychophysik gebräuchlich. Modelle mit mehr als zwei Parametern werden zur Modellierung psychometrischer Funktionen jedoch nicht verwendet. Ein Vorteil der 2-parametrischen Modelle ist ihre Einfachheit. Zusätzlich sind sie in jeder Standardsoftware implementiert oder können leicht in ihr angepasst werden. Ihre Einfachheit ist aber zugleich ihr Nachteil, da nur zwei Parameter nicht unbedingt alle Aspekte der Daten erfassen. Eine Alternative bieten Modelle mit drei Parametern, in denen die 2-parametrischen Modelle als Spezialfälle enthalten sind. Hiermit können die Daten besser angepasst werden. Es besteht aber die Gefahr, dass ein dritter Parameter zu einer Überparametrierung führt. Ein weiterer Nachteil besteht darin, dass sie nicht standardmäßig implementiert sind, was den Arbeitsaufwand erhöht.

Die Analyse der Daten zeigte mehrere strukturelle Probleme auf. Im unteren Bereich der Tastfoliendicke war die Anzahl der Stützstellen nicht hoch genug. Bedingt durch die

Materialeigenschaften war die Tastfolie mit einer Dicke von  $5\mu\text{m}$  die dünnste Folie, die eine noch gerade eben akzeptable Formstabilität aufwies. Trotzdem war sie sehr anfällig und musste in der Regel mehrfach pro Proband ausgewechselt werden, da sie beim Aufbeißen zerriss. Tastfolien mit einer Dicke von  $1\mu\text{m}$  konnten nicht verwendet werden, da sie noch anfälliger auf Risse waren. Hinzu kam, dass sie die Tendenz besaßen, sich einzufalten, wodurch ihre Dicke verändert wurde (Enkling, 2004).

Weiterhin gab es noch zu viele Tastfolien, deren Entdeckungswahrscheinlichkeit 100% betrug. Diese Teilexperimente trugen also keine Information bzgl. des Schwellenwertes bei. Diese dicken Tastfolien wurden benutzt, weil im Experiment auch die Tastsensibilität der Implantate untersucht werden sollte. Diese wurde niedriger eingeschätzt als die Tastsensibilität natürlicher Zähne. Andere, nicht kontrollierbare Fehlerquellen bei der Datenerhebung waren absichtlich oder unabsichtlich gegebene falsche Angaben durch Probanden (Non-Compliance, Drücken der falschen Taste) und Irrtümer auf Seiten des Untersuchers (Aussuchen der falschen Tastfolie).

Diese strukturellen Probleme führten bei der Analyse dazu, dass bis auf das 2-parametrische, halblogistische Modell alle untersuchten Linkfunktionen im unteren Bereich der Tastfoliendicken ( $5\text{--}15\mu\text{m}$ ) schlechte Ergebnisse zeigten. Über den ganzen Wertebereich der Tastfolien hinweg betrachtet waren die 3-parametrischen Modelle nicht besser als die 2-parametrischen Modelle. Die Entscheidung für das am besten geeignete Modell konnte also auf die 2-parametrischen Modelle beschränkt werden. Hier waren es neben den für die beobachteten Daten kleinsten Devianz-Residuen im Bereich von  $15\text{--}34\mu\text{m}$  vor allem die Ergebnisse aus den Simulationen, die für die *cloglog*-Transformation mit logarithmierten Tastfoliendicken sprachen. Die Integration eines zusätzlichen Parameters  $\gamma$  zur Berücksichtigung der reinen Ratequote führte zu keiner wesentlichen Änderung der anderen Parameterschätzer. Es war demnach nicht nötig, für die zahnmedizinischen Daten eine Ratequote zu modellieren.

In der Psychophysik wird die *cloglog*-Transformation, welche die  $x$ -Werte logarithmiert einbezieht, als Weibull-Modell bezeichnet. Dort ist sie v.a. in der Analyse visueller Daten sehr verbreitet (Klein, 2001; Wichmann, persönliche Auskunft Mai 2005). Eine Interpretation hinsichtlich des zugrunde liegenden Mechanismus scheint jedoch nicht zu existieren. Welchen Beitrag kann die *cloglog*-Linkfunktion zum Verständnis des Mechanismus der aktiven Tastsensibilität leisten?

Extremwertverteilungen tauchen v.a. in Situationen mit abhängigen Daten auf (Davison, 1998). Dies könnte eine mögliche Erklärung dafür sein, warum die *cloglog*-Transformation,

bzw. das Weibull-Modell ein gutes Modell für psychophysische Daten und die zahnmedizinischen Daten aus der vorliegenden Arbeit darstellt, da für jeden Probanden die Beobachtungen als abhängige Ereignisse bewertet werden. Bei einer Auswertung mittels Verallgemeinerter Linearer Modelle und/oder psychometrischer Funktionen ist damit die wichtige Voraussetzung der Unabhängigkeit verletzt. In der Psychophysik wird dieses Problem nicht thematisiert. Hier wird davon ausgegangen, dass trainierte Testpersonen, wie sie vorwiegend bei visuellen Experimenten eingesetzt werden, unabhängige Beobachtungen liefern (Wichmann, persönliche Auskunft, Mai 2005).

Weiterhin gehört die *cloglog*-Linkfunktion als Minimum-Verteilung zu den Extremwertverteilungen. Sie wird zur Analyse von Daten aus Versuchen zur Bruchfestigkeit von Materialien herangezogen. Die Bruchfestigkeit wird mit Hilfe der Theorie des schwächsten Gliedes (engl. weakest link theory) beschrieben. Laut dieser Theorie bricht das Material dann, wenn die angewendete Kraft größer ist als die Toleranzgrenze der schwächsten Stelle des Materials (Collett, 2003). Angewandt auf vorliegende Situation könnte das bedeuten, dass die Reaktionsneigung des Probanden bereits zu „ja“ tendiert, wenn der sensorische Prozess sich noch im unsicheren Bereich kurz unterhalb des Schwellenwertes befindet. Dies führt in diesem Bereich zu höheren relativen Tasthäufigkeiten.

Eine andere Möglichkeit wäre, dass der Proband im Verlauf des Experimentes ein Gedächtnis (Lerneffekt) für bereits früher gefühlte Tastfolien aufbaut. Dann würden im Verlauf des Experimentes die Tasthäufigkeiten bezogen auf dieselben Folien über die Zeit hinweg ansteigen. Das würde vor allem die relativen Tasthäufigkeiten vor und kurz nach der Tastschwelle beeinflussen. Eine Analyse der Daten im Zusammenhang mit ihrer zeitlichen Abfolge im Experiment war hier aber nicht möglich, da die Daten bereits während des Experimentes von der Software kumuliert wurden.

Insgesamt gesehen ist die *cloglog*-Transformation für die Modellierung der aktiven Tastsensibilität natürlicher Zähne wahrscheinlich zu einfach, da Adaptationsprozesse, Lerneffekte und andere Formen nichtstationärer Prozesse nicht berücksichtigt werden (Kuss et al., 2005).

Es wäre sicherlich lohnenswert, den experimentellen Aufbau durch eine bessere Platzierung der Stützstellen in Bezug auf den zu schätzenden Schwellenwert zu verbessern. Solche optimalen Pläne sind im Bereich der Dosis-Wirkungsbeziehungen sehr gut beschrieben. Als besonders geeignet – auch für kleine Stichprobenumfänge – haben sich optimale Pläne mit 5 bzw. 7 Stützstellen erwiesen (Nottingham & Birch, 1998; Huang, 2003). Optimale Pläne

existieren auch für experimentelle Situationen, in denen der Wertebereich für die erklärende Variable  $x$  beschränkt ist (*Biedermann et al.*, 2004). Einen optimalen Plan kann es aber nur für jeweils einen Probanden, bzw. eine psychometrischen Funktion geben. Für verschiedene Probanden resultiert dies u. U. in verschiedenen optimalen Plänen, die nicht immer kombinierbar sind. Für psychophysische Methoden wurde gezeigt, dass die richtige Wahl der Stützstellen die Gesamtzahl der Einzelversuche pro Proband auf unter 120 senken kann (*Wichmann & Hill*, 2001b). Ohne Vorwissen sind optimale Pläne allerdings nicht herstellbar. Ist man nur an einem Schätzer für den Schwellenwert interessiert, so bieten adaptive Prozeduren eine Alternative zur Konstanzmethode. Ihr einziger Nachteil ist, dass mit ihrer Hilfe keine weiteren Größen, wie z.B. die Steigung der psychometrischen Funktion ableitbar sind. Neuere Analyseansätze deuten jedoch darauf hin, dass auch die Steigung errechnet werden kann (*Klein*, 2001). Der Vorteil adaptiver Prozeduren liegt darin, dass bei ihnen im Mittel weniger Einzelversuche nötig sind als bei der Konstanzmethode. Die Versuchsdauer wird als insgesamt kürzer und somit weniger anstrengend für den Probanden. Auch ist die Vorschrift der Versuchsdurchführung wesentlich unkomplizierter (*Klein*, 2001; *Leek*, 2001; *Treutwein*, 1995).

Es stellt sich die Frage, ob eine andere Art der Analyse zu besseren, d.h. weniger verzerrten Schätzern führen würde. Andere Auswertestrategien existieren sowohl für Dosis-Wirkungsbeziehungen als auch in der Psychophysik. Nichtparametrische Methoden mit Hilfe des Spearman-Kärber Schätzers wurde von Miller und Ulrich vorgeschlagen (*Miller & Ulrich*, 2001). Richtig angewandt können nichtparametrische Methoden genauso gut wie parametrische Methoden sein (*Klein*, 2001). In der Analyse von Daten zur Beschreibung von Dosis-Wirkungsbeziehungen werden auch semiparametrische Verfahren vorgeschlagen (*Nottingham & Birch*, 2000). Ein anderer Ansatz nimmt als Verteilung nicht die Binomialverteilung, sondern eine Beta-Binomialverteilung an (*Collett*, 2003; *Kuss et al.*, 2005). Zusätzlich zu frequentistischen Verfahren werden auch Bayes-Verfahren für die Analyse psychometrischer Daten beschrieben. Diese stellen eine Anwendung von Monte-Carlo-Verfahren, basierend auf Markov-Ketten (engl. Markov Chain Monte Carlo Sampling, MCMC), dar und sollen exaktere Punktschätzer und Konfidenzintervalle liefern als frequentistische Bootstrap-Methoden (*Chen et al.*, 1999; *Kuss et al.*, 2005). Ebenso werden analytische Verfahren aus dem Bereich neuronaler Netzwerke in Erwägung gezogen, da deren Funktionsklassen reicher sind als die „klassischen“ 2-parametrischen Linkfunktionen der Verallgemeinerten Linearen Modelle (*Kuss et al.*, 2005).

Die vorliegende Arbeit hatte zum Ziel, die zahnmedizinischen Daten zu den natürlichen Zähnen zu modellieren. Die Frage ist, durch welches Modell die ebenfalls während des Experimentes erhobenen Daten zu den Implantaten am besten beschrieben werden. Ist dies auch das *cloglog*-Modell, dann könnte für den intraindividuellen Vergleich nicht nur der 50%-Wert, sondern auch der Supportbereich herangezogen werden. Werden die Implantatdaten besser durch ein anderes Modell beschrieben, so könnte dieses Hinweise auf den dort vermuteten, der Osseoperzeption zugrunde liegenden Mechanismus liefern.

In der dieser Arbeit zugrunde liegenden Stichprobe war die Verteilung des 50%-Wertes in der Stichprobe sehr asymmetrisch. Dies war konform zu Ergebnissen früherer Autoren (*Tryde et al.*, 1962; *Utz*, 1986). Dies sollte bei der Planung und statistischen Auswertung zukünftiger Studien in diesem Bereich auf jeden Fall berücksichtigt werden.

„All models are wrong. Some, though, are more useful than others and we should seek those.“  
McCullagh & Nelder, 1989

## 8 Zusammenfassung

In der Zahnmedizin wird die feine Tastsensibilität natürlicher Zähne seit langem beschrieben. Hierzu durchgeführte Experimente dienten in erster Linie dazu, Schwellenwerte zu bestimmen. Die Modellierung der Tastsensibilität über verschiedene Tastfoliendicken hinweg mittels mathematischer Funktionen war hingegen nicht von Interesse. Die vorliegende Arbeit schließt diese Lücke.

Auf der Basis der für diese Fragestellung grundlegenden Arbeit von Tryde et al. aus dem Jahr 1962 zur Tastsensibilität natürlicher Zähne wurde deren experimenteller Ansatz so modifiziert, dass eine mathematische Modellierung der Daten möglich war. Es flossen sowohl Überlegungen aus der statistischen Wahrscheinlichkeitstheorie der Verallgemeinerten Linearen Modelle als auch der Theorie psychophysischer Funktionen aus der Psychophysik in die Planung des neuen Experimentes. Dieses Experiment wurde als intraindividueller Vergleich der aktiven Tastsensibilität vom Einzelzahn-Implantat im Vergleich zum natürlichen, kontralateralen Zahn geplant. Die vorliegende Arbeit betrachtet nur die Experimente zu den natürlichen Zähnen.

Die Datenbasis bildeten insgesamt  $N=70$  Versuche von 65 Probanden aus den beiden Zentren Bonn und Bern, die in den Jahren 2001 und 2002 an dem Experiment teilnahmen. Die Daten jedes einzelnen Versuches wurde für sich modelliert, wobei jeder dieser  $N=70$  Versuche aus 160 Einzelexperimenten bestand.

Es wurden insgesamt acht verschiedene Modelle hinsichtlich ihrer Modellierungseigenschaften untersucht, darunter vier Modelle mit zwei zu schätzenden Parametern und vier Modelle mit drei zu schätzenden Parametern. Darunter waren symmetrische und asymmetrische Funktionen. Die Tastfoliendicke wurde sowohl untransformiert als auch logarithmiert in die Modelle integriert.

Anhand verschiedener Gütekriterien, die auf Devianz-Residuen und mittlerer Devianz basieren, wurde eine erste Auswahl geeigneter Modelle getroffen. Diese wurden dann mittels Simulationen über die gesamte Stichprobe von  $N=70$  weiter reduziert.

Als am besten geeignet zur Beschreibung der Tastsensibilität natürlicher Zähne stellte sich das asymmetrische, 2-parametrische *cloglog*-Modell heraus, bei dem die Tastfoliendicke logarithmiert berücksichtigt wird. Dieses wird in der Psychophysik auch als Weibull-Modell bezeichnet. Kombiniert mit der reinen Ratequote kann mit ihm zwischen sensorischem und Entscheidungsprozeß unterschieden werden. Die Berücksichtigung der reinen Ratequote führte zu keiner wesentlichen Änderung der Ergebnisse.

Eine Analyse der zahnmedizinischen Daten ergab etwas niedrigere Werte für den 50%-Wert (Schwellenwert) als bisher beschrieben. Als zusätzlicher Parameter kann der Supportbereich aus dem Modell berechnet werden. Auch weitere Größen wie z.B. die Steigung der Funktion im 50%-Wert oder die stärkste Steigung können hieraus abgeleitet werden.

Das Weibull-Modell ist auch in der Psychophysik stark vertreten. Es stellt sich hier die Frage, ob es für die zahnmedizinischen Daten nur als beschreibendes oder auch als mechanistisches Modell angesehen werden kann. Mathematisch gesehen gehört es zu den Extremwertfunktionen und beschreibt die Verteilung von Minima. Weiterhin kommt dieses Modell auch im Zusammenhang mit der Beschreibung verbundener Daten vor, wie es in der vorliegenden Arbeit der Fall war. Insgesamt gesehen ist es ein adäquates Modell, aber wahrscheinlich zu simpel, da Adaptationsprozesse, Lerneffekte und andere Formen nichtstationärer Prozesse nicht berücksichtigt werden.

Die Analyse der Implantatdaten könnte weitere Informationen zum Mechanismus liefern, welcher der Tastsensibilität zugrunde liegt. Liegt das Interesse nur in der Schätzung des Schwellenwertes, so bieten adaptive Prozeduren aus dem Bereich der Psychophysik vereinfachte experimentelle Ansätze.



## 9 Literaturverzeichnis

- Agresti A** (1990). *Categorical Data Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Alcalá-Quintana R, García-Pérez MA** (2004). The role of parametric assumptions in adaptive Bayesian estimation. *Psych Meth* 9 (2): 250-271.
- Aranda-Ordaz FJ** (1981). On two families of transformations to additivity for binary response data. *Biometrika* 68 (2): 357-363.
- Atkinson AC** (1985). *Plots, Transformations and Regression*. Clarendon Press, Oxford
- Bender R** (1999). Quantitative Risk Assessment in Epidemiological Studies Investigating Threshold Effects. *Biom J* 41 (3): 305-319.
- Biedermann S, Dette H, Zhu W** (2004). Optimal designs for dose-response models with restricted design spaces. Technical Report Reihe des SFB 475 N.r 40/04  
<http://www.sfb475.uni-dortmund.de/dienst/de/content/veroeff-d/tr04-d.html> (Dez. 2004).
- Bliss CI** (1935). The Calculation of the Dose-Mortality Curve. *Ann Appl Biol* 22: 134-167.
- Bronstein IN, Semendjajew KA** (1981). *Taschenbuch der Mathematik* (20.Auflage, herausgegeben von Grosche G, Ziegler V). Gemeinschaftsausgabe Verlag Nauka, Moskau und BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig
- Chen MH, Dey DK, Shao QM** (1999). A New Skewed Link Model for Dichotomous Quantal Response Data. *J Am Stat Ass* 94 (448): 1172-1186.
- Collett D** (2003). *Modelling Binary Data* (2<sup>nd</sup> ed.). Boca Raton: Chapman & Hall / CRC Press LLC
- Czado C** (1997). On Selecting Parametric Link Transformation Families in Generalized Linear Models. *J Stat Plan & Inf* 61: 125-139.
- Davison AC** (1998). *Extreme Values* in Encyclopedia of Biostatistics (eds.: Armitage P, Colton T, pp 1463-1467), John Wiley & Sons.
- Dobson AJ** (2001). *An Introduction to Generalized Linear Models* (2<sup>nd</sup> ed.). Chapman & Hall/CRD, London
- El-Saidi MA, George EO** (1990). A Generalized Logistic Model for Quantal Response Bioassay. *Biom J* 32 (8): 943-954.
- Enkling N** (2004). Aktive taktile Sensibilität von Einzelzahnimplantaten im Vergleich zu natürlichen Zähnen. Eine einseitig verblindete, randomisierte, klinische split-mouth Studie an 71 Probanden aus Bern und Bonn. *Med. Diss.*, Universität Bern
- Falmagne JC** (1985). *Elements of psychophysical theory*. Oxford: Oxford University Press

- Finney DJ** (1971). *Probit analysis* (3<sup>rd</sup> ed.). Cambridge University Press
- Guerrero VM, Johnson RA** (1982). Use of the Box-Cox transformation with binary response models. *Biometrika* 69 (2): 309-314.
- Griffin CJ, Harris R** (1968). Unmyelinated nerve endings in the periodontal membrane of human teeth. *Archs Oral Biol* 13: 1207-1212.
- Harvey Jr. LO** (2004). Detection Theory: Sensitivity and Response Bias. [http://psych.colorado.edu/~lharvey/P4165/P4165\\_2004\\_Fall/2004\\_Fall\\_pdf/P4165\\_SDT.pdf](http://psych.colorado.edu/~lharvey/P4165/P4165_2004_Fall/2004_Fall_pdf/P4165_SDT.pdf) (Febr. 2005)
- Hatscher M** (1997). Skript zur Vorlesung „Theorien der visuellen Wahrnehmung“ von Dr. Peter Wolff. <http://psycho.uni-osnabrueck.de/~fachschaft/skripte/skriptal.doc> (11.5.2005)
- Hollstein W** (1933). Untersuchung über das “Dickenunterscheidungsvermögen” bei natürlichen Zähnen und insbesondere bei festsitzenden und herausnehmbarem abgestützten Ersatz. *Dtsch Mschr Zahnheilk* 51: 385-403.
- Hosmer DW, Lemeshow S** (2000). *Applied Logistic Regression* (2<sup>nd</sup> ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.
- Huang Y** (2003). Selection of number of dose levels and its robustness for binary response. *J Appl Stat* 30 (10): 1135-1146.
- Jacobs R, van Steenberghe D** (1991). Comparative evaluation of the oral tactile function by means of teeth or implant-supported prostheses. *Clin Oral Impl Res* 2: 75-80.
- Jacobs R, Schotte A, van Steenberghe D** (1992). Influence of temperature and foil hardness on interocclusal tactile threshold. *J Periodont Res* 27: 581-587.
- Jacobs R, van Steenberghe D** (1994). Role of periodontal ligament receptors in the tactile function of teeth: a review. *J Periodont Res* 29:153-167.
- Jacobs R (ed.)** (1998). Neurological versus psychophysical assessment of osseoperception. In: Osseoperception (Leuven: Catholic University Leuven, Department of Periodontology): 75-88.
- Jang KS, Kim YS** (2001). Comparison of oral sensory function in complete denture and implant-supported prosthesis wearers. *J of Oral Rehabilitation* 28: 220-225
- Karlsson S, Molin M** (1995). Effects of gold and bonded ceramic inlays on the ability to perceive occlusal thickness. *J Oral Rehabil* 22:9-13.
- Klein SA** (2001). Measuring, estimating, and understanding the psychometric function: A commentary. *Perc & Psych* 63 (8): 1421-1455.
- Kreienbrock L, Schach S** (1997). *Epidemiologische Methoden* (2. Aufl.). Gustav Fischer Verlag Stuttgart.

- Kulikov J** (1980). Untersuchungen über die physiologische und pathologische Zahnbeweglichkeit. *Zahnärztl Praxis* 31: 439.
- Kuss M, Jäkel F, Wichmann FA** (2005). Approximative Bayesian Inference for Psychometric Functions using MCMC Sampling (Technical Report No. 135). <ftp://ftp.kyb.tuebingen.mpg.de/pub/mpi-memos/pdf/TR-135.pdf> (April 2005)
- Leek MR** (2001). Adaptive procedures in psychophysical research. *Perc & Psych* 63 (8): 1279-1292.
- Lundqvist S, Haraldson T** (1984). Occlusal perception of thickness in patients with bridges on osseointegrated implants in the maxilla. *Scand J Dent Res* 98: 544-549.
- Maeda T, Ochi K, Nakakura-Ohshima K, Youn H, Wakisaka S** (1999). The Ruffini ending as the primary mechanoreceptor in the periodontal ligament: its morphology, cytochemical features, regeneration, and development. *Crit Rev Oral Biol & Med* 10: 307-327.
- McCullagh P, Nelder JA** (1989). *Generalized Linear Models* (2<sup>nd</sup> ed.). Chapman & Hall/CRC London.
- Mericske-Stern R, Assal P, Mericske E, Bürgin W** (1995). Occlusal Force and Oral Tactile Sensibility Measured in Partially Edentulous Patients with ITI Implants. *Int J Oral Maxillofac Implants* 10: 345-354.
- Mericske-Stern R, Zarb GA** (1996). In vivo measurements of some functional aspects with mandibular fixed prostheses supported by implants. *Clin Oral Impl Res* 7:153-161.
- Miller J, Ulrich R** (2001). On the analysis of psychometric functions: The Spearman-Kärber Method. *Perc & Psych* 63 (8): 1399-1420.
- Morgan BJT** (1992). *Analysis of Quantal Response Data*. Chapman & Hall/CRC London.
- Morgan BJT** (1998a) *Quantal Response Models* in Encyclopedia of Biostatistics (eds.: Armitage P, Colton T, pp 3618-3625), John Wiley & Sons.
- Morgan BJT** (1998b) *Stimulus-Response Studies* in Encyclopedia of Biostatistics (eds.: Armitage P, Colton T, pp 4312-4314), John Wiley & Sons.
- Müller F, Link I, Fuhr K, Utz, KH** (1995). Studies on adaptation to complete dentures. Part II: Oral stereognosis and tactile sensibility. *J Oral Rehabil* 22:759-767.
- Nottingham QJ, Birch JB** (1998). A Note on the Small Sample Behavior of Logistic Regression in a Bioassay Setting. *J Biopharm Stat* 8 (4): 565-576.
- Nottingham QJ, Birch JB** (2000). A Semiparametric Approach to analysing Dose-Response Data. *Stat Med* 19: 389-404.

- Prentice RL** (1975). Discrimination among some parametric models. *Biometrika* 62 (3): 607-614.
- Prentice RL** (1976). A Generalization of the Probit and Logit Methods for Dose Response Curves. *Biometrics* 32: 761-768.
- Preti G, Gassino G, Lombardi M, Mazzone P** (1994). Monitoring of the discrimination threshold for interocclusal thicknesses in rehabilitated edentulous patients. *J of Oral Rehabilitation* 21: 185-190.
- R Development Core Team** (2004). *R: A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.  
ISBN 3-900051-00-3, URL <http://www.R-project.org>.
- Rosenbauer KA, Engelhardt JP, Koch H, Stüttgen U** (1998). *Klinische Anatomie der Kopf- und Halsregion für Zahnmediziner*. Thieme Verlag Stuttgart
- Schmidt RF** (Hrsg., 1980). *Grundriß der Sinnesphysiologie* (4. korr. Aufl.). Springer Verlag Berlin Heidelberg New York
- Scholze M, Boedeker W et al.** (2001). A General best-fit Method for Concentration-Response Curves and the Estimation of Low-Effect Concentrations. *Env Toxic Chem* 20 (2): 448-457.
- Schroeder HE** (1992). *Orale Strukturbiologie*. Thieme Verlag Stuttgart
- Sen PK** (1998). *Biological Assay, Overview* in Encyclopedia of Biostatistics (eds.: Armitage P, Colton T, pp 372-384), John Wiley & Sons.
- Serachitopol D** (1995). STUKEL - Stukel's Generalizations of the Logistic Link Function (S-PLUS program). <http://odin.mdacc.tmc.edu/anonftp/#STUKEL> (Mai 2004)
- Sireci SG, Wainer H, Braun H** (1998) *Psychometrics, Overview* in Encyclopedia of Biostatistics (eds.: Armitage P, Colton T, pp 3577-3602), John Wiley & Sons.
- Strand AL** (1930). Measuring the toxicity of insect fumigants. *Industr Engng Chem* (Anal. ed.) 2: 4-8.
- Strasburger H** (2001). Converting between measures of slope of the psychometric function. *Perc & Psych* 63 (8): 1348-1355.
- Stukel T** (1988). Generalized Logistic Models. *J Am Stat Ass* 83: 426-431.
- Theil E** (1931). Bis zu welchem Grad kann die Tastfähigkeit der menschlichen Zahnreihenglieder festgestellt werden? *Dtsch Mschr Zahnheilk* 49: 270-278.
- Throne JE, Weaver DK, Baker JE** (1995). Probit Analysis: Assessing Goodness-of-Fit Based on Backtransformation and Residuals. *J Econ Entomol* 88 (5): 1513-1516.

- Tosteson TD, Demidenko E** (1998) *Maximum Likelihood* in Encyclopedia of Biostatistics (eds.: Armitage P, Colton T, pp 2482-2485), John Wiley & Sons.
- Treutwein B** (1995). Adaptive psychophysical procedures. *Vision Res* 25 (17): 2503-2522.
- Tryde G, Frydenberg O, Brill N** (1962). An assessment of the tactile sensibility in human teeth: An evaluation of a quantitative method. *Acta Odont Scand* 20: 233-256.
- Utz KH** (1986). Untersuchungen über die interokklusale taktile Feinsensibilität natürlicher Zähne mit Hilfe von Kupferfolien. *Dtsch Zahnärztl Z* 41: 1097-1100.
- van Steenberghe D** (1979). The role and function of periodontal neural receptors in man. *Thesis*, University of Leuven
- Wedig AM** (1999). Studie zur oralen taktilen Sensibilität bei Prothesenträgern mit natürlichen Wurzeln oder Implantaten. Ein Vergleich. *Med. Diss.*, Universität Bern
- Wichmann FA, Hill NJ** (2001a). The psychometric function: I. Fitting, sampling, and goodness of fit. *Perc & Psych* 63 (8): 1293-1313.
- Wichmann FA, Hill NJ** (2001b). The psychometric function: II. Bootstrap-based confidence intervals and sampling. *Perc & Psych* 63 (8): 1314-1329.
- Wu JW, Hung WL, Lee HM** (2000). Some Moments and Limit Behaviours of the Generalized Logistic Distribution with Applications. *Proc Natl Sci Counc ROC(A)* 24 (1): 7-14.
- Yoon YS** (2004). Statistische Untersuchungen zu Ermittlungsmethoden der Empfundenen Luftqualität. Dissertation in den Ingenieur-Wissenschaften.  
<http://edocs.tu-berlin.de/diss/2004/yoonyonsang.pdf> (11.5.2005)
- Zwisler R** (1998). Psychophysische Methoden.  
<http://www.zwisler.de/scripts/methoden/node4.html> (Febr. 2005)

## Anhang

<b>A1 Linkfunktionen I: Fisher-Information <math>I</math></b>	<b>135</b>
A1.1 <i>Probit</i> -Transformation	135
A1.2 <i>Logit</i> -Transformation	135
A1.3 <i>Cloglog</i> -Transformation	136
A1.4 Halblogistisches Modell	136
A1.5 Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	137
A1.6 Das Aranda-Ordaz-Modell	138
A1.7 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell nach Prentice)	139
A1.8 4-Parameter-Modell nach Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)	139
<b>A2 Linkfunktionen II: Punktschätzer <math>\mathcal{P}</math> und dessen Varianz</b>	<b>142</b>
A2.1 <i>Probit</i> -Transformation	142
A2.2 <i>Logit</i> -Transformation	142
A2.3 <i>Cloglog</i> -Transformation	142
A2.8 Halblogistisches Modell	143
A2.5 Box-Cox-Transformation ( <i>logit</i> -Link)	143
A2.6 Das Aranda-Ordaz-Modell	144
A2.7 Generalized Logit-Modell ( $m_1$ -Modell nach Prentice)	144
A2.8 4-Parameter-Modell nach Stukel ( $\alpha_1 h$ -Modell)	144
<b>A3 Exponentialfamilie</b>	<b>146</b>
<b>A4 Daten der analysierten Probanden (N=70)</b>	<b>148</b>
<b>A5 Daten der aus der Analyse ausgeschlossenen Probanden (n=4)</b>	<b>157</b>
<b>A6 <i>Cloglog</i>-Transformation: Schätzer für <math>\beta_1</math>, <math>\beta_2</math>, 50%-Wert, 80%-Wert, 10%-Wert, 90%-Wert und Supportbereich (Liste aller Probanden (N=70), ohne und mit Berücksichtigung der reinen Ratequote)</b>	<b>158</b>
<b>A7 <i>Cloglog</i>-Transformation: Beobachtete und geschätzte relative Tasthäufigkeiten (alle Probanden (N=70), ohne und mit Berücksichtigung der reinen Ratequote)</b>	<b>161</b>

## A1 Linkfunktionen I: Fisher-Information $I$

$$\ln L(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^k r_i \cdot \ln(p_i) + \sum_{i=1}^k (n_i - r_i) \cdot \ln(1 - p_i) + C$$

### A1.1 Probit-Transformation

$$p_i = F(\eta_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\eta_i} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) du \quad \text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = F_0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = F_0 \cdot x_i$$

$$\text{mit } F_0 = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}\eta_i^2\right).$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k F_0^2 \cdot n_i \frac{1}{p_i(1-p_i)} & \sum_{i=1}^k F_0^2 \cdot n_i x_i \frac{1}{p_i(1-p_i)} \\ \sum_{i=1}^k F_0^2 \cdot n_i x_i \frac{1}{p_i(1-p_i)} & \sum_{i=1}^k F_0^2 \cdot n_i x_i^2 \frac{1}{p_i(1-p_i)} \end{pmatrix}$$

### A1.2 Logit-Transformation

$$p_i = F(\eta_i) = \frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)} \quad \text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = p_i(1-p_i)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = x_i p_i(1-p_i)$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i p_i(1-p_i) \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 p_i(1-p_i) \end{pmatrix}$$

### A1.3 Cloglog-Transformation

$$p_i = F(\eta_i) = 1 - \exp[-\exp(\eta_i)] \quad \text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = F_0 (1 - p_i)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = x_i F_0 (1 - p_i)$$

$$\text{mit } F_0 = \exp(\eta_i).$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i F_0^2 \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 \frac{1-p_i}{p_i} \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0^2 \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 \frac{1-p_i}{p_i} \end{pmatrix}$$

### A1.4 Halblogistisches Modell

$$p_i = F(\eta_i) = \frac{\exp(\eta_i) - 1}{\exp(\eta_i) + 1} \quad \text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = (1 - p_i) \cdot F_0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = x_i (1 - p_i) \cdot F_0$$

$$\text{mit } F_0 = \frac{\exp(\eta_i)}{\exp(\eta_i) + 1}.$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i \cdot F_0^2 \cdot \frac{(1-p_i)}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 \cdot \frac{(1-p_i)}{p_i} \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0^2 \cdot \frac{(1-p_i)}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 \cdot \frac{(1-p_i)}{p_i} \end{pmatrix}$$



A1.5 Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)

$$p_i = F(\eta_i) = \frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)}$$

mit  $\eta_i = \beta_1 + \beta_2 \cdot bc(x_i)$  und

$$bc(x_i) = \begin{cases} (x_i^\lambda - 1) / \lambda & \lambda \neq 0 \\ \ln(x_i) & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = p_i(1 - p_i)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = bc(x_i) p_i(1 - p_i)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = p_i(1 - p_i) \cdot \beta_2 \cdot \frac{\partial bc(x_i)}{\partial \lambda} \text{ mit}$$

$$\frac{\partial bc(x_i)}{\partial \lambda} = F_{bc} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} [x_i^\lambda \cdot \ln(x_i) - bc(x_i)] & \lambda \neq 0 \\ 0 & \lambda = 0 \end{cases}.$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i p_i (1 - p_i) & & \\ \sum_{i=1}^k bc(x_i) n_i p_i (1 - p_i) & \sum_{i=1}^k bc(x_i)^2 n_i p_i (1 - p_i) & \\ \sum_{i=1}^k \beta_2 F_{bc} n_i p_i (1 - p_i) & \sum_{i=1}^k bc(x_i) \beta_2 F_{bc} n_i p_i (1 - p_i) & \sum_{i=1}^k \beta_2^2 F_{bc}^2 n_i p_i (1 - p_i) \end{pmatrix}$$

## A1.6 Das Aranda-Ordaz-Modell

$$p_i = \begin{cases} 1 - (1 + \lambda \cdot e^{\eta_i})^{-1/\lambda} & \lambda \cdot e^{\eta_i} > -1 \\ 1 & \lambda \cdot e^{\eta_i} \leq -1 \end{cases} \quad \text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = (1 - p_i) F_0 e^{\eta_i}$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = (1 - p_i) F_0 e^{\eta_i} x_i$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} (1 - p_i) [\lambda \cdot F_0 e^{\eta_i} + \ln(F_0)] & \lambda \cdot e^{\eta_i} > -1 \\ 0 & \lambda \cdot e^{\eta_i} \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{mit } F_0 = \frac{1}{1 + \lambda \cdot e^{\eta_i}}.$$

$$I = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i (F_0 e^{\eta_i})^2 \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i (F_0 e^{\eta_i})^2 \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 (F_0 e^{\eta_i})^2 \frac{1-p_i}{p_i} \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i (F_0 e^{\eta_i})^2 \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 (F_0 e^{\eta_i})^2 \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^3 (F_0 e^{\eta_i})^2 \frac{1-p_i}{p_i} \\ \sum_{i=1}^k n_i F_0 e^{\eta_i} \frac{1}{\lambda^2} [\dots] \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0 e^{\eta_i} \frac{1}{\lambda^2} [\dots] \frac{1-p_i}{p_i} & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0 e^{\eta_i} \frac{1}{\lambda^2} [\dots] \frac{1-p_i}{p_i} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } [\dots] = [\lambda \cdot F_0 e^{\eta_i} + \ln(F_0)].$$

A1.7 Generalized Logit-Modell (m<sub>1</sub>-Modell nach Prentice)

$$p_i = F(\eta_i) = \left( \frac{\exp(\eta_i)}{1 + \exp(\eta_i)} \right)^\lambda = \frac{1}{(1 + \exp(-\eta_i))^\lambda} \quad \text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i.$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = \lambda \cdot p_i (1 - F_0)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = \lambda \cdot x_i p_i (1 - F_0)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = \ln(F_0) \cdot p_i$$

$$\text{mit } F_0 = \frac{1}{1 + \exp(-\eta_i)}.$$

$$I = \begin{pmatrix} \lambda^2 \sum_{i=1}^k n_i (1 - F_0)^2 \frac{P_i}{1 - p_i} & \lambda^2 \sum_{i=1}^k n_i x_i (1 - F_0)^2 \frac{P_i}{1 - p_i} & \lambda^2 \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 (1 - F_0)^2 \frac{P_i}{1 - p_i} \\ \lambda \sum_{i=1}^k n_i \cdot \ln(F_0) (1 - F_0) \frac{P_i}{1 - p_i} & \lambda \sum_{i=1}^k n_i x_i \cdot \ln(F_0) (1 - F_0) \frac{P_i}{1 - p_i} & \sum_{i=1}^k n_i (\ln(F_0))^2 \frac{P_i}{1 - p_i} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F_0 = \frac{1}{1 + \exp(-\eta_i)}.$$

A1.8 4-Parameter-Modell nach Stukel ( $\alpha_I h$ -Modell)

$$p_i = F(\eta_i) = \frac{\exp(h_\alpha(\eta_i))}{[1 + \exp(h_\alpha(\eta_i))]}$$

$$\text{mit } \eta_i = \beta_1 + \beta_2 x_i \quad \text{und}$$

$$h_\alpha(\eta_i) = \begin{cases} \begin{cases} \eta_i & \alpha > 0 \\ \alpha^{-1} (\exp(\alpha \cdot \eta_i) - 1) & \alpha < 0 \end{cases} & \eta_i \leq 0 \quad (p_i \leq 0.5) \\ \begin{cases} \eta_i & \alpha = 0 \\ -\alpha^{-1} \cdot \ln(1 - \alpha \cdot \eta_i) & \alpha < 0 \end{cases} & \eta_i \geq 0 \quad (p_i \geq 0.5) \end{cases}$$

(a)  $\alpha > 0$ 

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = p_i(1-p_i)F_0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = p_i(1-p_i)x_iF_0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = p_i(1-p_i)\frac{F_0\eta_i - h_\alpha(\eta_i)}{\alpha}$$

$$\text{mit } F_0 = \begin{cases} 1 & \eta_i \leq 0 \ (p_i \leq 0.5) \\ \exp(\alpha\eta_i) & \eta_i \geq 0 \ (p_i \geq 0.5) \end{cases}.$$

$$I = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i F_0^2 p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 p_i(1-p_i) \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0^2 p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 p_i(1-p_i) \\ \sum_{i=1}^k n_i F_0 F_{st} p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0 F_{st} p_i(1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i F_{st}^2 p_i(1-p_i) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F_{st} = \begin{cases} 0 & \eta_i \leq 0 \ (p_i \leq 0.5) \\ \frac{F_0\eta_i - h_\alpha(\eta_i)}{\alpha} & \eta_i \geq 0 \ (p_i \geq 0.5) \end{cases}.$$

(b)  $\alpha < 0$ 

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_1} = p_i(1-p_i)F_0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \beta_2} = p_i(1-p_i)x_iF_0$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial \lambda} = p_i(1-p_i)\frac{F_0\eta_i - h_\alpha(\eta_i)}{\alpha}$$

$$\text{mit } F_0 = \begin{cases} 1 & \eta_i \leq 0 \ (p_i \leq 0.5) \\ \frac{1}{1-\alpha\eta_i} & \eta_i \geq 0 \ (p_i \geq 0.5) \end{cases}.$$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k n_i F_0^2 p_i (1-p_i) & & \\ \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0^2 p_i (1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i^2 F_0^2 p_i (1-p_i) & \\ \sum_{i=1}^k n_i F_0 F_{st} p_i (1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i x_i F_0 F_{st} p_i (1-p_i) & \sum_{i=1}^k n_i F_{st}^2 p_i (1-p_i) \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } F_{st} = \begin{cases} 0 & \eta_i \leq 0 \ (p_i \leq 0.5) \\ \frac{F_0 \eta_i - h_\alpha(\eta_i)}{\alpha} & \eta_i \geq 0 \ (p_i \geq 0.5) \end{cases}.$$

## A2 Linkfunktionen II: Punktschätzer $\mathcal{G}_p$ und dessen Varianz

Varianz von  $\mathcal{G}_p$ :  $\sigma^2 = \gamma^T \cdot I \cdot \gamma$

Die Varianz-Kovarianz-Matrix  $I^{-1}$  ist die Inverse der Fisher-Information (s. Anhang 1).

### A2.1 Probit-Transformation

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = \Phi^{-1}(p).$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

### A2.2 Logit-Transformation

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

### A2.3 Cloglog-Transformation

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = \ln\{-\ln(1-p)\}.$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

## A2.8 Halblogistisches Modell

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = \ln \left( \frac{1+p}{1-p} \right).$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

A2.5 Box-Cox-Transformation (*logit*-Link)

$$\mathcal{G}_p^0 = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = \ln \left( \frac{p}{1-p} \right).$$

$$\mathcal{G}_p = bc^{-1}(\mathcal{G}_p^0) \quad \text{mit } bc^{-1}(u) = \begin{cases} (\lambda \cdot u + 1)^{1/\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \exp(u) & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = \begin{cases} -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p \frac{1}{(\lambda \mathcal{G}_p^0 + 1)} & \lambda \neq 0 \\ -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = \begin{cases} -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p \frac{\mathcal{G}_p^0}{(\lambda \mathcal{G}_p^0 + 1)} & \lambda \neq 0 \\ -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p \mathcal{G}_p^0 & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2} \mathcal{G}_p \left[ \frac{\lambda \mathcal{G}_p^0}{\lambda \mathcal{G}_p^0 + 1} - \ln(\lambda \mathcal{G}_p^0 + 1) \right] & \lambda \neq 0 \\ \exp(\mathcal{G}_p^0) & \lambda = 0 \end{cases}$$

## A2.6 Das Aranda-Ordaz-Modell

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = \ln \left\{ \frac{(1-p)^{-\lambda} - 1}{\lambda} \right\}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{[(1-p)^\lambda - 1] - \lambda \cdot \ln(1-p)}{\lambda[(1-p)^\lambda - 1]}$$

A2.7 Generalized Logit-Modell (m<sub>1</sub>-Modell nach Prentice)

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = -\ln(p^{-1/\lambda} - 1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{\ln(p)}{\lambda^2 (1 - p^{1/\lambda})}$$

A2.8 4-Parameter-Modell nach Stukel ( $\alpha_I h$ -Modell)

$$\mathcal{G}_p = \frac{1}{\beta_2} (g(p) - \beta_1) \quad \text{mit } g(p) = h_\alpha^{-1} \left[ \ln \left( \frac{p}{1-p} \right) \right]$$

$$\text{und } h_\alpha^{-1}(u) = \begin{cases} \begin{cases} \alpha^{-1} (\ln(\alpha \cdot u + 1)) & \alpha > 0 \\ u & \alpha = 0 \\ \alpha^{-1} \cdot (1 - \exp(-\alpha \cdot u)) & \alpha < 0 \end{cases} & \begin{matrix} p \leq 0.5 \\ \\ p_i \geq 0.5 \end{matrix} \end{cases}$$



(a)  $\alpha > 0$ 

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} \ln(u+1) - \frac{u}{\alpha \cdot u + 1} \right) \quad \text{mit } u = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

(b)  $\alpha < 0$ 

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} = -\frac{1}{\beta_2} \cdot \frac{1}{\alpha} \left( -\frac{1}{\alpha} [\exp(-\alpha \cdot u) - 1] - u \cdot \exp(-\alpha \cdot u) \right) \quad \text{mit } u = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right).$$

(c)  $\alpha = 0$ 

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_1} = -\frac{1}{\beta_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \beta_2} = -\frac{1}{\beta_2} \mathcal{G}_p$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial \lambda} = 0.$$

### A3 Exponentialfamilie

Eine Zufallsvariable  $Y$  besitzt eine Verteilung aus der Exponentialfamilie, wenn diese wie folgt dargestellt werden kann:

$$f_Y(y; \xi; \phi) = \exp\{(y\xi - b(\xi))/a(\phi) + c(y, \phi)\} \text{ für spezifische Funktionen } a(\cdot), b(\cdot) \text{ und } c(\cdot).$$

Wenn  $\phi$  bekannt ist, dann ist dies eine Exponentialfamilie mit kanonischem Parameter  $\xi$ .

Für die Binomialverteilung mit  $E(Y)=p$  gilt:

$$\begin{aligned} f_Y(y; p) &= \binom{n}{ny} p^{ny} \cdot (1-p)^{n-ny} \\ &= \exp\left\{n \cdot y \cdot \ln(p) + n \cdot \ln(1-p) - n \cdot y \cdot \ln(1-p) + \ln\left(\binom{n}{ny}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{n \cdot y(\ln(p) - \ln(1-p)) + n \cdot \ln(1-p) + \ln\left(\binom{n}{ny}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{n \cdot y \cdot \ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + n \cdot \ln(1-p) + \ln\left(\binom{n}{ny}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\frac{y \cdot \xi - b(\xi)}{a(\phi)} + c(y, \phi)\right\} \\ &= f_Y(y; \xi; \phi) \end{aligned}$$

mit

$$\xi = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),$$

$$b(\xi) = \ln(1-p) = \ln(1 + e^{\xi}),$$

$$a(\phi) = \frac{1}{n} \quad \text{und}$$

$$c(y, \phi) = \ln\left(\binom{n}{ny}\right).$$

Wenn die Verteilung von  $Y$  zur Exponentialfamilie gehört, also wie oben dargestellt werden kann, dann gilt weiterhin:

- (1)  $E(Y) = b'(\xi)$  ( $= p$  im Falle der Binomialverteilung) und
- (2)  $\text{Var}(Y) = b''(\xi) a(\phi)$  ( $= p(1-p)$  im Falle der Binomialverteilung).

Bezeichnungen:

$\phi$  wird aufgrund seiner Rolle bei der Berechnung der Varianz auch als Dispersionsparameter bezeichnet.

$\xi$  ist der kanonische (oder natürliche) Parameter. Zu jeder Verteilung aus der Exponentialfamilie existiert eine so genannte kanonische Linkfunktion  $g$ , die wie folgt definiert ist:  $g(\mu) = g(p) = \xi$ .

Im Falle der Binomialverteilung ist die kanonische Linkfunktion  $g(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$ .

Kanonische Linkfunktionen haben günstige Eigenschaften in Bezug auf die Schätzer für  $\beta$ . (*Morgan, 1992; McCullagh & Nelder, 1989*). Es sind aber nicht unbedingt die besten Schätzfunktionen in Bezug auf reelle Daten.

**A4 Daten der analysierten Probanden (N=70)**

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
1	1	0	20	2	1	13a	0	20	0
1	1	5	10	9	1	13a	5	10	6
1	1	10	14	14	1	13a	10	14	5
1	1	15	16	16	1	13a	15	16	6
1	1	20	16	16	1	13a	20	16	12
1	1	25	16	16	1	13a	25	16	16
1	1	34	16	16	1	13a	34	16	15
1	1	40	12	12	1	13a	40	12	12
1	1	50	10	10	1	13a	50	10	10
1	1	68	8	8	1	13a	68	8	8
1	1	75	6	6	1	13a	75	6	6
1	1	100	16	16	1	13a	100	16	16
1	10	0	20	0	1	13b	0	20	0
1	10	5	10	9	1	13b	5	10	6
1	10	10	14	7	1	13b	10	14	5
1	10	15	16	10	1	13b	15	16	12
1	10	20	16	12	1	13b	20	16	8
1	10	25	16	12	1	13b	25	16	15
1	10	34	16	15	1	13b	34	16	13
1	10	40	12	12	1	13b	40	12	12
1	10	50	10	10	1	13b	50	10	10
1	10	68	8	8	1	13b	68	8	8
1	10	75	6	6	1	13b	75	6	6
1	10	100	16	16	1	13b	100	16	16
1	11	0	20	1	1	14	0	20	0
1	11	5	10	5	1	14	5	10	1
1	11	10	14	6	1	14	10	14	4
1	11	15	16	10	1	14	15	16	5
1	11	20	16	15	1	14	20	16	10
1	11	25	16	13	1	14	25	16	13
1	11	34	16	13	1	14	34	16	16
1	11	40	12	12	1	14	40	12	12
1	11	50	10	10	1	14	50	10	8
1	11	68	8	8	1	14	68	8	8
1	11	75	6	3	1	14	75	6	5
1	11	100	16	14	1	14	100	16	16
1	12	0	20	5	1	15	0	20	0
1	12	5	10	9	1	15	5	10	0
1	12	10	14	14	1	15	10	14	0
1	12	15	16	14	1	15	15	16	2
1	12	20	16	16	1	15	20	16	1
1	12	25	16	16	1	15	25	16	1
1	12	34	16	16	1	15	34	16	1
1	12	40	12	12	1	15	40	12	2
1	12	50	10	10	1	15	50	10	0
1	12	68	8	8	1	15	68	8	4
1	12	75	6	6	1	15	75	6	4
1	12	100	16	16	1	15	100	16	14

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
1	16	0	20	1	1	20	0	20	0
1	16	5	10	8	1	20	5	10	8
1	16	10	14	9	1	20	10	14	7
1	16	15	16	14	1	20	15	16	7
1	16	20	16	15	1	20	20	16	9
1	16	25	16	14	1	20	25	16	14
1	16	34	16	13	1	20	34	16	10
1	16	40	12	10	1	20	40	12	10
1	16	50	10	10	1	20	50	10	6
1	16	68	8	8	1	20	68	8	7
1	16	75	6	5	1	20	75	6	6
1	16	100	16	16	1	20	100	16	15
1	17	0	20	0	1	21	0	20	2
1	17	5	10	2	1	21	5	10	3
1	17	10	14	2	1	21	10	14	4
1	17	15	16	16	1	21	15	16	12
1	17	20	16	14	1	21	20	16	13
1	17	25	16	16	1	21	25	16	15
1	17	34	16	16	1	21	34	16	16
1	17	40	12	12	1	21	40	12	12
1	17	50	10	10	1	21	50	10	8
1	17	68	8	8	1	21	68	8	8
1	17	75	6	6	1	21	75	6	6
1	17	100	16	16	1	21	100	16	16
1	18	0	20	3	1	22	0	20	1
1	18	5	10	5	1	22	5	10	1
1	18	10	14	9	1	22	10	14	5
1	18	15	16	12	1	22	15	16	9
1	18	20	16	11	1	22	20	16	4
1	18	25	16	15	1	22	25	16	11
1	18	34	16	11	1	22	34	16	13
1	18	40	12	10	1	22	40	12	9
1	18	50	10	5	1	22	50	10	9
1	18	68	8	8	1	22	68	8	8
1	18	75	6	5	1	22	75	6	5
1	18	100	16	16	1	22	100	16	16
1	19	0	20	0	1	23	0	20	2
1	19	5	10	2	1	23	5	10	4
1	19	10	14	1	1	23	10	14	9
1	19	15	16	4	1	23	15	16	12
1	19	20	16	11	1	23	20	16	11
1	19	25	16	6	1	23	25	16	8
1	19	34	16	11	1	23	34	16	13
1	19	40	12	7	1	23	40	12	10
1	19	50	10	10	1	23	50	10	10
1	19	68	8	8	1	23	68	8	8
1	19	75	6	6	1	23	75	6	5
1	19	100	16	16	1	23	100	16	16

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
1	24	0	20	0	1	28	0	20	1
1	24	5	10	2	1	28	5	10	5
1	24	10	14	8	1	28	10	14	12
1	24	15	16	9	1	28	15	16	14
1	24	20	16	8	1	28	20	16	16
1	24	25	16	16	1	28	25	16	16
1	24	34	16	16	1	28	34	16	15
1	24	40	12	12	1	28	40	12	12
1	24	50	10	10	1	28	50	10	10
1	24	68	8	8	1	28	68	8	8
1	24	75	6	6	1	28	75	6	6
1	24	100	16	16	1	28	100	16	16
1	25	0	20	0	1	29	0	20	3
1	25	5	10	3	1	29	5	10	0
1	25	10	14	7	1	29	10	14	3
1	25	15	16	8	1	29	15	16	5
1	25	20	16	8	1	29	20	16	8
1	25	25	16	4	1	29	25	16	6
1	25	34	16	13	1	29	34	16	8
1	25	40	12	11	1	29	40	12	7
1	25	50	10	10	1	29	50	10	7
1	25	68	8	8	1	29	68	8	6
1	25	75	6	6	1	29	75	6	6
1	25	100	16	16	1	29	100	16	16
1	26	0	20	0	1	2a	0	20	0
1	26	5	10	6	1	2a	5	10	2
1	26	10	14	9	1	2a	10	14	11
1	26	15	16	10	1	2a	15	16	11
1	26	20	16	12	1	2a	20	16	15
1	26	25	16	13	1	2a	25	16	16
1	26	34	16	15	1	2a	34	16	16
1	26	40	12	11	1	2a	40	12	12
1	26	50	10	10	1	2a	50	10	10
1	26	68	8	8	1	2a	68	8	8
1	26	75	6	6	1	2a	75	6	6
1	26	100	16	16	1	2a	100	16	16
1	27	0	20	0	1	2b	0	20	0
1	27	5	10	2	1	2b	5	10	4
1	27	10	14	8	1	2b	10	14	8
1	27	15	16	9	1	2b	15	16	11
1	27	20	16	8	1	2b	20	16	11
1	27	25	16	14	1	2b	25	16	15
1	27	34	16	15	1	2b	34	16	16
1	27	40	12	12	1	2b	40	12	12
1	27	50	10	10	1	2b	50	10	10
1	27	68	8	8	1	2b	68	8	8
1	27	75	6	6	1	2b	75	6	6
1	27	100	16	16	1	2b	100	16	16

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
1	3	0	20	0	1	33	0	20	2
1	3	5	10	2	1	33	5	10	4
1	3	10	14	1	1	33	10	14	11
1	3	15	16	1	1	33	15	16	8
1	3	20	16	9	1	33	20	16	11
1	3	25	16	2	1	33	25	16	16
1	3	34	16	15	1	33	34	16	16
1	3	40	12	11	1	33	40	12	12
1	3	50	10	10	1	33	50	10	10
1	3	68	8	8	1	33	68	8	8
1	3	75	6	6	1	33	75	6	6
1	3	100	16	16	1	33	100	16	16
1	30	0	20	0	1	34	0	20	1
1	30	5	10	4	1	34	5	10	4
1	30	10	14	12	1	34	10	14	6
1	30	15	16	14	1	34	15	16	8
1	30	20	16	16	1	34	20	16	10
1	30	25	16	16	1	34	25	16	14
1	30	34	16	15	1	34	34	16	16
1	30	40	12	12	1	34	40	12	11
1	30	50	10	10	1	34	50	10	10
1	30	68	8	8	1	34	68	8	8
1	30	75	6	6	1	34	75	6	6
1	30	100	16	16	1	34	100	16	16
1	31	0	20	3	1	35a	0	20	0
1	31	5	10	5	1	35a	5	10	6
1	31	10	14	9	1	35a	10	14	7
1	31	15	16	12	1	35a	15	16	7
1	31	20	16	11	1	35a	20	16	12
1	31	25	16	15	1	35a	25	16	15
1	31	34	16	11	1	35a	34	16	15
1	31	40	12	10	1	35a	40	12	12
1	31	50	10	5	1	35a	50	10	10
1	31	68	8	8	1	35a	68	8	8
1	31	75	6	6	1	35a	75	6	6
1	31	100	16	16	1	35a	100	16	16
1	32	0	20	0	1	35b	0	20	0
1	32	5	10	3	1	35b	5	10	6
1	32	10	14	2	1	35b	10	14	5
1	32	15	16	13	1	35b	15	16	10
1	32	20	16	12	1	35b	20	16	8
1	32	25	16	16	1	35b	25	16	15
1	32	34	16	13	1	35b	34	16	13
1	32	40	12	12	1	35b	40	12	11
1	32	50	10	9	1	35b	50	10	10
1	32	68	8	8	1	35b	68	8	8
1	32	75	6	6	1	35b	75	6	6
1	32	100	16	16	1	35b	100	16	16

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
1	36	0	20	1	1	40	0	20	0
1	36	5	10	0	1	40	5	10	2
1	36	10	14	4	1	40	10	14	1
1	36	15	16	6	1	40	15	16	4
1	36	20	16	11	1	40	20	16	11
1	36	25	16	13	1	40	25	16	6
1	36	34	16	11	1	40	34	16	11
1	36	40	12	10	1	40	40	12	7
1	36	50	10	5	1	40	50	10	10
1	36	68	8	7	1	40	68	8	8
1	36	75	6	6	1	40	75	6	6
1	36	100	16	16	1	40	100	16	16
1	37	0	20	0	1	6	0	20	0
1	37	5	10	4	1	6	5	10	5
1	37	10	14	3	1	6	10	14	3
1	37	15	16	9	1	6	15	16	10
1	37	20	16	10	1	6	20	16	12
1	37	25	16	8	1	6	25	16	12
1	37	34	16	13	1	6	34	16	16
1	37	40	12	7	1	6	40	12	12
1	37	50	10	8	1	6	50	10	9
1	37	68	8	6	1	6	68	8	8
1	37	75	6	4	1	6	75	6	6
1	37	100	16	16	1	6	100	16	16
1	38	0	20	2	1	7	0	20	1
1	38	5	10	5	1	7	5	10	3
1	38	10	14	6	1	7	10	14	3
1	38	15	16	10	1	7	15	16	4
1	38	20	16	13	1	7	20	16	7
1	38	25	16	13	1	7	25	16	3
1	38	34	16	13	1	7	34	16	5
1	38	40	12	12	1	7	40	12	6
1	38	50	10	10	1	7	50	10	4
1	38	68	8	8	1	7	68	8	6
1	38	75	6	4	1	7	75	6	6
1	38	100	16	16	1	7	100	16	16
1	39	0	20	1	1	8	0	20	0
1	39	5	10	2	1	8	5	8	4
1	39	10	14	2	1	8	10	8	3
1	39	15	16	7	1	8	15	10	1
1	39	20	16	12	1	8	20	10	8
1	39	25	16	14	1	8	25	10	7
1	39	34	16	16	1	8	34	14	13
1	39	40	12	10	1	8	40	16	13
1	39	50	10	10	1	8	50	16	12
1	39	68	8	8	1	8	68	14	11
1	39	75	6	6	1	8	75	10	9
1	39	100	16	16	1	8	100	24	24

... wird fortgesetzt



Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
1	9	0	20	0	2	12	0	20	1
1	9	5	10	4	2	12	5	10	3
1	9	10	14	3	2	12	10	14	11
1	9	15	16	9	2	12	15	16	16
1	9	20	16	10	2	12	20	16	16
1	9	25	16	8	2	12	25	16	15
1	9	34	16	12	2	12	34	16	16
1	9	40	12	7	2	12	40	12	12
1	9	50	10	8	2	12	50	10	10
1	9	68	8	4	2	12	68	8	8
1	9	75	6	4	2	12	75	6	6
1	9	100	16	12	2	12	100	16	16
2	1	0	20	0	2	13	0	20	0
2	1	5	10	4	2	13	5	10	0
2	1	10	14	7	2	13	10	14	4
2	1	15	16	7	2	13	15	16	7
2	1	20	16	8	2	13	20	16	13
2	1	25	16	4	2	13	25	16	13
2	1	34	16	12	2	13	34	16	16
2	1	40	12	11	2	13	40	12	12
2	1	50	10	10	2	13	50	10	10
2	1	68	8	8	2	13	68	8	8
2	1	75	6	6	2	13	75	6	6
2	1	100	16	16	2	13	100	16	16
2	10	0	20	4	2	14	0	20	0
2	10	5	10	8	2	14	5	10	0
2	10	10	14	11	2	14	10	14	4
2	10	15	16	13	2	14	15	16	11
2	10	20	16	12	2	14	20	16	12
2	10	25	16	14	2	14	25	16	15
2	10	34	16	15	2	14	34	16	13
2	10	40	12	12	2	14	40	12	11
2	10	50	10	10	2	14	50	10	10
2	10	68	8	8	2	14	68	8	8
2	10	75	6	6	2	14	75	6	6
2	10	100	16	16	2	14	100	16	16
2	11	0	20	0	2	15	0	20	0
2	11	5	10	0	2	15	5	10	1
2	11	10	14	1	2	15	10	14	6
2	11	15	16	4	2	15	15	16	1
2	11	20	16	2	2	15	20	16	6
2	11	25	16	3	2	15	25	16	10
2	11	34	16	6	2	15	34	16	12
2	11	40	12	9	2	15	40	12	8
2	11	50	10	9	2	15	50	10	10
2	11	68	8	8	2	15	68	8	7
2	11	75	6	6	2	15	75	6	6
2	11	100	16	16	2	15	100	16	16

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
2	16	0	20	0	2	2	0	20	0
2	16	5	10	0	2	2	5	10	3
2	16	10	14	0	2	2	10	14	7
2	16	15	16	6	2	2	15	16	14
2	16	20	16	1	2	2	20	16	12
2	16	25	16	5	2	2	25	16	15
2	16	34	16	11	2	2	34	16	16
2	16	40	12	10	2	2	40	12	12
2	16	50	10	10	2	2	50	10	10
2	16	68	8	8	2	2	68	8	8
2	16	75	6	6	2	2	75	6	6
2	16	100	16	16	2	2	100	16	16
2	17	0	20	2	2	20	0	20	0
2	17	5	10	4	2	20	5	10	0
2	17	10	14	10	2	20	10	14	0
2	17	15	16	16	2	20	15	16	4
2	17	20	16	14	2	20	20	16	4
2	17	25	16	13	2	20	25	16	5
2	17	34	16	13	2	20	34	16	6
2	17	40	12	12	2	20	40	12	12
2	17	50	10	10	2	20	50	10	10
2	17	68	8	8	2	20	68	8	8
2	17	75	6	6	2	20	75	6	6
2	17	100	16	16	2	20	100	16	16
2	18	0	20	1	2	21	0	20	0
2	18	5	10	4	2	21	5	10	3
2	18	10	14	4	2	21	10	14	2
2	18	15	16	10	2	21	15	16	3
2	18	20	16	13	2	21	20	16	9
2	18	25	16	10	2	21	25	16	11
2	18	34	16	14	2	21	34	16	11
2	18	40	12	10	2	21	40	12	11
2	18	50	10	10	2	21	50	10	9
2	18	68	8	7	2	21	68	8	8
2	18	75	6	5	2	21	75	6	4
2	18	100	16	16	2	21	100	16	16
2	19	0	20	0	2	22a	0	20	0
2	19	5	10	2	2	22a	5	10	5
2	19	10	14	1	2	22a	10	14	12
2	19	15	16	4	2	22a	15	16	16
2	19	20	16	7	2	22a	20	16	16
2	19	25	16	8	2	22a	25	16	14
2	19	34	16	9	2	22a	34	16	14
2	19	40	12	10	2	22a	40	12	8
2	19	50	10	10	2	22a	50	10	10
2	19	68	8	8	2	22a	68	8	8
2	19	75	6	6	2	22a	75	6	6
2	19	100	16	16	2	22a	100	16	16

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
2	22b	0	20	0	2	26	0	20	0
2	22b	5	10	4	2	26	5	10	0
2	22b	10	14	4	2	26	10	14	0
2	22b	15	16	16	2	26	15	16	0
2	22b	20	16	16	2	26	20	16	1
2	22b	25	16	16	2	26	25	16	0
2	22b	34	16	16	2	26	34	16	1
2	22b	40	12	10	2	26	40	12	4
2	22b	50	10	10	2	26	50	10	8
2	22b	68	8	8	2	26	68	8	1
2	22b	75	6	6	2	26	75	6	3
2	22b	100	16	16	2	26	100	16	13
2	23	0	20	1	2	27	0	20	1
2	23	5	10	2	2	27	5	10	0
2	23	10	14	7	2	27	10	14	5
2	23	15	16	7	2	27	15	16	9
2	23	20	16	13	2	27	20	16	7
2	23	25	16	9	2	27	25	16	12
2	23	34	16	14	2	27	34	16	14
2	23	40	12	11	2	27	40	12	12
2	23	50	10	10	2	27	50	10	10
2	23	68	8	7	2	27	68	8	8
2	23	75	6	6	2	27	75	6	6
2	23	100	16	16	2	27	100	16	16
2	24	0	20	0	2	28	0	20	0
2	24	5	10	7	2	28	5	10	1
2	24	10	14	10	2	28	10	14	0
2	24	15	16	16	2	28	15	16	8
2	24	20	16	15	2	28	20	16	9
2	24	25	16	15	2	28	25	16	12
2	24	34	16	16	2	28	34	16	12
2	24	40	12	12	2	28	40	12	12
2	24	50	10	10	2	28	50	10	10
2	24	68	8	8	2	28	68	8	8
2	24	75	6	6	2	28	75	6	6
2	24	100	16	16	2	28	100	16	16
2	25	0	20	0	2	3	0	20	1
2	25	5	10	2	2	3	5	10	2
2	25	10	14	7	2	3	10	14	4
2	25	15	16	16	2	3	15	16	13
2	25	20	16	15	2	3	20	16	7
2	25	25	16	11	2	3	25	16	12
2	25	34	16	15	2	3	34	16	15
2	25	40	12	12	2	3	40	12	11
2	25	50	10	10	2	3	50	10	9
2	25	68	8	8	2	3	68	8	8
2	25	75	6	6	2	3	75	6	6
2	25	100	16	16	2	3	100	16	16

... wird fortgesetzt

Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt	Zentr. Nr.	Prob. Nr.	Dicke	N	N ge- spürt
2	4	0	20	0	2	8	0	20	0
2	4	5	10	2	2	8	5	10	0
2	4	10	14	1	2	8	10	14	10
2	4	15	16	13	2	8	15	16	14
2	4	20	16	12	2	8	20	16	14
2	4	25	16	15	2	8	25	16	15
2	4	34	16	16	2	8	34	16	16
2	4	40	12	12	2	8	40	12	12
2	4	50	10	10	2	8	50	10	10
2	4	68	8	8	2	8	68	8	8
2	4	75	6	6	2	8	75	6	6
2	4	100	16	16	2	8	100	16	16
2	5	0	20	0	2	9	0	20	1
2	5	5	10	0	2	9	5	10	2
2	5	10	14	5	2	9	10	14	3
2	5	15	16	16	2	9	15	16	10
2	5	20	16	16	2	9	20	16	9
2	5	25	16	16	2	9	25	16	11
2	5	34	16	16	2	9	34	16	10
2	5	40	12	12	2	9	40	12	10
2	5	50	10	10	2	9	50	10	9
2	5	68	8	8	2	9	68	8	8
2	5	75	6	6	2	9	75	6	6
2	5	100	16	16	2	9	100	16	16
2	6a	0	20	1					
2	6a	5	10	0					
2	6a	10	14	0					
2	6a	15	16	7					
2	6a	20	16	1					
2	6a	25	16	12					
2	6a	34	16	15					
2	6a	40	12	12					
2	6a	50	10	10					
2	6a	68	8	8					
2	6a	75	6	6					
2	6a	100	16	16					
2	6b	0	20	0					
2	6b	5	8	4					
2	6b	10	8	1					
2	6b	15	10	5					
2	6b	20	10	7					
2	6b	25	10	9					
2	6b	34	14	14					
2	6b	40	16	16					
2	6b	50	16	15					
2	6b	68	14	14					
2	6b	75	10	10					
2	6b	100	24	24					

**A5 Daten der aus der Analyse ausgeschlossenen Probanden (n=4)**

<b>Zentr. Nr.</b>	<b>Prob. Nr.</b>	<b>Dicke</b>	<b>N</b>	<b>N ge- spürt</b>	<b>Zentr. Nr.</b>	<b>Prob. Nr.</b>	<b>Dicke</b>	<b>N</b>	<b>N ge- spürt</b>
1	4a	0	20	9	1	5	0	20	10
1	4a	5	10	6	1	5	5	10	8
1	4a	10	14	12	1	5	10	14	12
1	4a	15	16	9	1	5	15	16	16
1	4a	20	16	14	1	5	20	16	15
1	4a	25	16	14	1	5	25	16	16
1	4a	34	16	15	1	5	34	16	16
1	4a	40	12	10	1	5	40	12	12
1	4a	50	10	10	1	5	50	10	10
1	4a	68	8	8	1	5	68	8	8
1	4a	75	6	5	1	5	75	6	5
1	4a	100	16	16	1	5	100	16	16
1	4b	0	20	8	2	7	0	20	4
1	4b	5	10	6	2	7	5	10	3
1	4b	10	14	10	2	7	10	14	2
1	4b	15	16	12	2	7	15	16	7
1	4b	20	16	13	2	7	20	16	6
1	4b	25	16	11	2	7	25	16	7
1	4b	34	16	7	2	7	34	16	4
1	4b	40	12	7	2	7	40	12	6
1	4b	50	10	6	2	7	50	10	5
1	4b	68	8	8	2	7	68	8	3
1	4b	75	6	5	2	7	75	6	1
1	4b	100	16	14	2	7	100	16	11

**A6 Cloglog-Transformation: Schätzer für  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , 50%-Wert, 80%-Wert, 10%-Wert, 90%-Wert und Supportbereich**  
**(Liste aller Probanden (N=70), ohne und mit Berücksichtigung der reinen Ratequote)**

Zentr./ Proband Nr.	reine Rate- quote	$\beta_1$	$\beta_2$	50%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	80%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	10%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	90%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	Support- bereich [ $\mu\text{m}$ ]
1/1	0	-5.0541	3.6585	3.6	4.5	2.2	5.0	2.8
	0.10	-2.3429	1.9449	2.8	4.3	1.0	5.1	4.1
1/10	0	-1.5747	0.6944	5.7	19.2	0.4	32.1	31.7
1/11	0	-0.9755	0.4273	4.2	29.9	0.1	69.1	69.0
	0.05	-1.0515	0.4395	4.8	32.3	0.1	73.0	72.9
1/12	0	-0.0390	0.4826	0.5	2.9	0.01	6.1	6.1
	0.25	-0.2749	0.5366	0.8	4.1	0.01	7.9	7.9
1/13a	0	-3.3201	1.2475	10.7	21.0	2.4	27.9	25.6
1/13b	0	-2.4339	0.9247	9.4	23.3	1.2	34.3	33.0
1/14	0	-3.7012	1.2098	15.7	31.6	3.3	42.5	39.2
1/15	0	-10.2103	2.3315	68.2	97.8	30.4	114.1	83.7
1/16	0	-0.3606	0.3376	1.0	11.9	0.01	34.4	34.4
	0.05	-0.4188	0.3476	1.2	13.1	0.01	36.8	36.7
1/17	0	-6.2612	2.4527	11.1	15.6	5.1	18.0	12.9
1/18	0	-0.9211	0.3959	4.1	34.1	0.01	84.2	84.2
	0.15	-1.2339	0.4528	6.8	43.6	0.1	96.2	96.1
1/19	0	-5.0508	1.4859	23.4	41.2	6.6	52.5	45.9
1/20	0	-1.1220	0.4047	6.5	51.8	0.1	125.6	125.5
1/21	0	-2.7271	1.0460	9.6	21.4	1.6	30.1	28.5
	0.10	-3.0353	1.1198	10.8	23.0	2.0	31.7	29.7
1/22	0	-3.6010	1.1060	18.6	39.9	3.4	55.1	51.7
	0.05	-3.8930	1.1745	20.1	41.3	4.0	56.0	51.9
1/23	0	-1.7368	0.6471	8.3	30.6	0.5	53.1	52.7
	0.10	-2.0448	0.7148	10.5	34.0	0.8	56.1	55.4
1/24	0	-4.3221	1.5849	12.1	20.6	3.7	25.9	22.2
1/25	0	-3.5106	1.1176	16.7	35.4	3.1	48.8	45.7
1/26	0	-1.8091	0.7632	6.6	20.0	0.6	31.9	31.4
1/27	0	-3.7511	1.3416	12.5	23.4	3.1	30.5	27.4
1/28	0	-1.4512	0.8427	3.6	9.8	0.4	15.1	14.7
	0.05	-1.5261	0.8610	3.8	10.2	0.4	15.5	15.1
1/29	0	-4.5972	1.2572	28.9	56.5	6.5	75.2	68.7
	0.15	-6.3131	1.6521	36.6	60.9	11.7	75.7	64.0
1/2a	0	-3.7478	1.5905	8.4	14.2	2.6	17.8	15.3
1/2b	0	-3.0465	1.2148	9.1	18.2	1.9	24.4	22.5
1/3	0	-7.7916	2.3342	24.1	34.5	10.7	40.3	29.5

... wird fortgesetzt

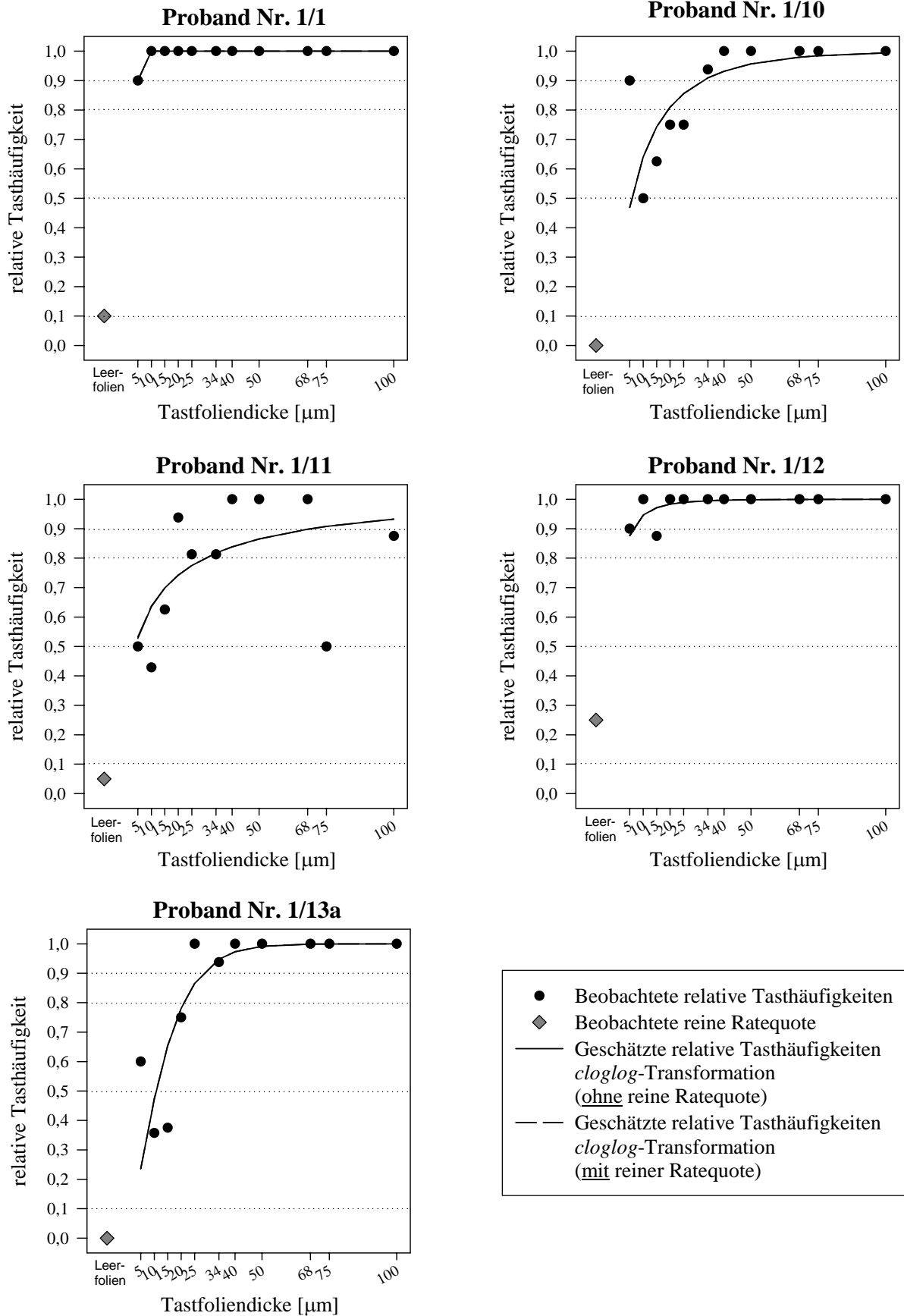
Zentr./ Proband Nr.	reine Rate- quote	$\beta_1$	$\beta_2$	50%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	80%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	10%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	90%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	Support- bereich [ $\mu\text{m}$ ]
1/30	0	-1.7563	0.9411	4.4	10.7	0.6	15.7	15.1
1/31	0	-1.0630	0.4477	4.7	31.1	0.1	69.2	69.2
	0.15	-1.4057	0.5142	7.5	38.8	0.2	77.9	77.7
1/32	0	-3.0517	1.1220	10.9	23.2	2.0	31.9	29.9
1/33	0	-2.8489	1.1578	8.5	17.7	1.7	24.1	22.4
	0.10	-3.4248	1.3259	10.0	19.0	2.4	24.8	22.4
1/34	0	-3.3637	1.2219	11.6	23.2	2.5	31.0	28.6
	0.05	-3.7243	1.3231	12.7	23.9	3.0	31.3	28.3
1/35a	0	-2.7306	1.0630	9.2	20.4	1.6	28.6	27.0
1/35b	0	-2.5052	0.9184	10.3	25.7	1.3	37.9	36.6
1/36	0	-3.3509	1.0168	18.8	43.1	3.0	61.3	58.3
	0.05	-3.5463	1.0578	20.2	44.8	3.4	62.9	59.5
1/37	0	-2.2657	0.6811	16.3	56.0	1.0	94.7	93.7
1/38	0	-1.7080	0.6711	7.4	25.9	0.4	44.2	43.7
	0.10	-1.9588	0.7243	9.0	28.8	0.7	47.3	46.6
1/39	0	-4.7018	1.6016	15.0	25.4	4.6	31.7	27.1
	0.05	-5.1484	1.7258	16.0	26.0	5.4	32.0	26.7
1/40	0	-5.0508	1.4859	23.4	41.2	6.6	52.5	45.9
1/6	0	-3.0433	1.1113	11.1	23.7	2.0	32.8	30.7
1/7	0	-4.1567	1.0657	35.0	77.2	6.0	108.1	102.1
	0.05	-5.3529	1.3589	39.2	72.9	9.8	94.9	85.1
1/8	0	-2.2463	0.7294	13.2	41.8	1.0	68.2	67.3
1/9	0	-1.4576	0.3931	16.1	136.9	0.1	340.5	340.3
2/1	0	-3.3265	1.0513	16.7	37.2	2.8	52.3	49.5
2/10	0	-0.8724	0.5421	2.5	12.0	0.1	23.3	23.2
	0.20	-1.2825	0.6369	4.2	15.8	0.2	27.7	27.5
2/11	0	-8.8011	2.4116	33.0	46.8	15.1	54.3	39.2
2/12	0	-2.7135	1.3341	5.8	10.9	1.4	14.3	12.9
	0.05	-2.8232	1.3649	6.0	11.2	1.5	14.6	13.1
2/13	0	-6.8722	2.3795	15.4	21.9	7.0	25.5	18.5
2/14	0	-4.0953	1.4271	13.6	24.6	3.6	31.6	28.0
2/15	0	-4.6313	1.3652	22.7	42.1	5.7	54.8	49.1
2/16	0	-9.4332	2.7176	28.1	38.3	14.1	43.7	29.7
2/17	0	-1.3752	0.6802	4.4	15.2	0.3	25.7	25.5
	0.10	-1.5560	0.7198	5.2	16.8	0.4	27.7	27.3
2/18	0	-2.2290	0.7804	10.9	32.0	1.0	50.7	49.7
	0.05	-2.3914	0.8163	11.9	33.5	1.2	52.0	50.8
2/19	0	-5.7741	1.7011	24.0	39.4	7.9	48.6	40.7

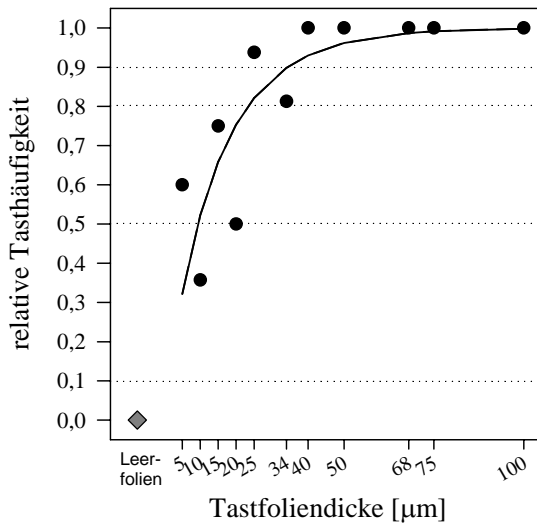
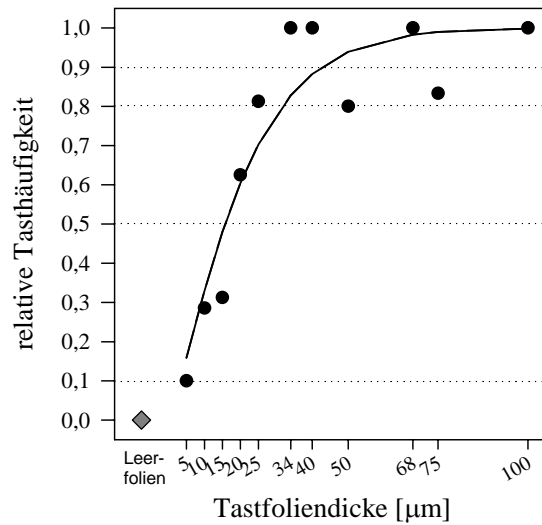
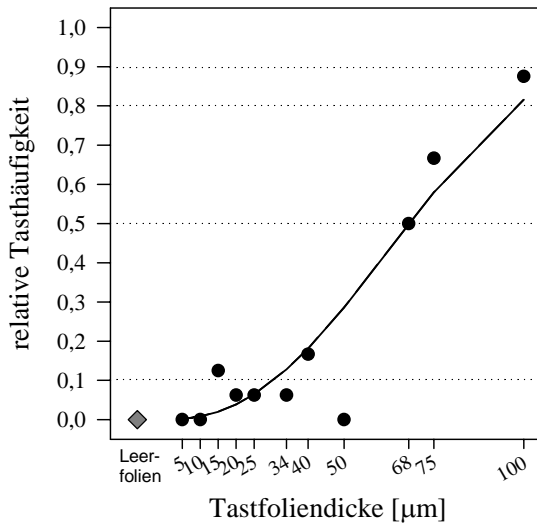
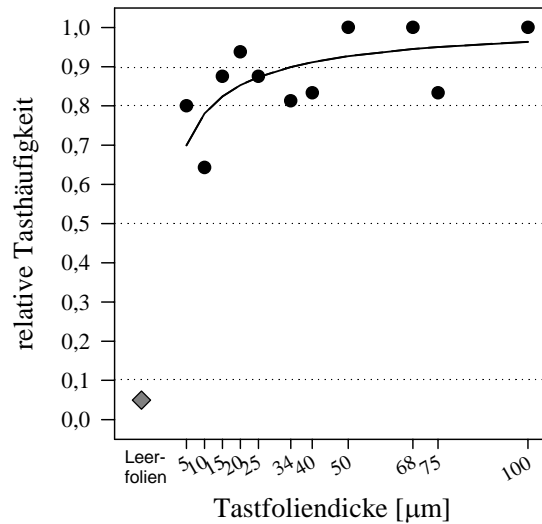
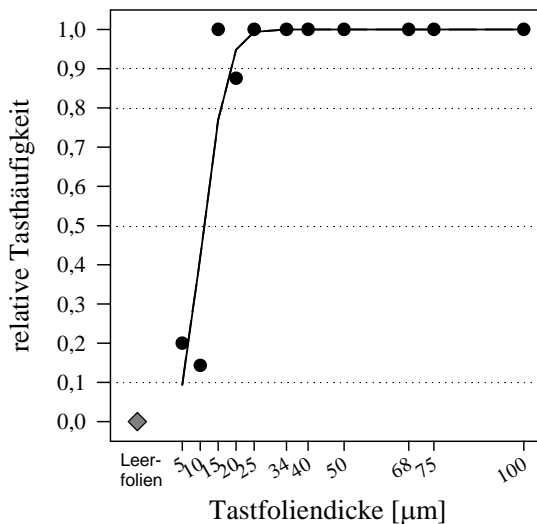
... wird fortgesetzt

Zentr./ Proband Nr.	reine Rate- quote	$\beta_1$	$\beta_2$	50%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	80%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	10%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	90%- Wert [ $\mu\text{m}$ ]	Support- bereich [ $\mu\text{m}$ ]
2/2	0	-3.3364	1.3521	9.0	16.8	2.2	21.9	19.6
2/20	0	-9.7797	2.7946	29.0	39.2	14.8	44.6	29.8
2/21	0	-3.7181	1.1174	20.1	42.7	3.7	58.8	55.1
2/22a	0	-0.4104	0.3847	1.1	10.0	0.01	25.4	25.4
2/22b	0	-2.3213	1.0259	6.7	15.3	1.1	21.7	20.6
2/23	0	-2.9369	1.0010	13.0	30.2	2.0	43.3	41.3
	0.05	-3.1464	1.0507	14.1	31.4	2.3	44.2	41.8
2/24	0	-1.2792	0.7966	3.1	9.1	0.3	14.2	13.9
2/25	0	-2.6033	1.0645	8.2	18.0	1.4	25.3	23.9
2/26	0	-9.6525	2.2048	67.5	98.9	28.7	116.3	87.6
2/27	0	-5.2844	1.7451	16.7	27.1	5.7	33.3	27.6
	0.05	-5.6919	1.8556	17.6	27.8	6.4	33.7	27.3
2/28	0	-6.0180	1.9218	18.9	29.3	7.1	35.4	28.3
2/3	0	-3.3912	1.1604	13.6	28.0	2.7	38.1	35.5
	0.05	-3.6483	1.2254	14.6	29.0	3.1	38.8	35.7
2/4	0	-5.9069	2.1544	13.1	19.3	5.5	22.8	17.4
2/5	0	-90.3425	38.8805	10.1	10.3	9.6	10.4	0.8
2/6a	0	-10.5756	3.2975	22.1	28.5	12.5	31.8	19.3
	0.05	-11.7852	3.6433	23.0	28.9	13.7	31.9	18.2
2/6b	0	-3.3743	1.2305	11.5	22.9	2.5	30.6	28.1
2/8	0	-4.0525	1.6576	9.2	15.4	3.0	19.1	16.1
2/9	0	-3.5176	1.1152	16.9	35.9	3.1	49.5	46.4
	0.05	-3.8361	1.1936	18.3	37.1	3.8	50.0	46.3



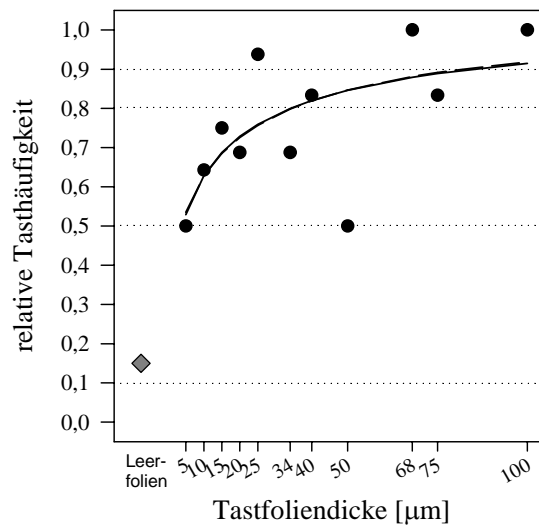
**A7 Cloglog-Transformation: Beobachtete und geschätzte relative Tasthäufigkeiten (alle Probanden (N=70), ohne und mit Berücksichtigung der reinen Ratequote)**



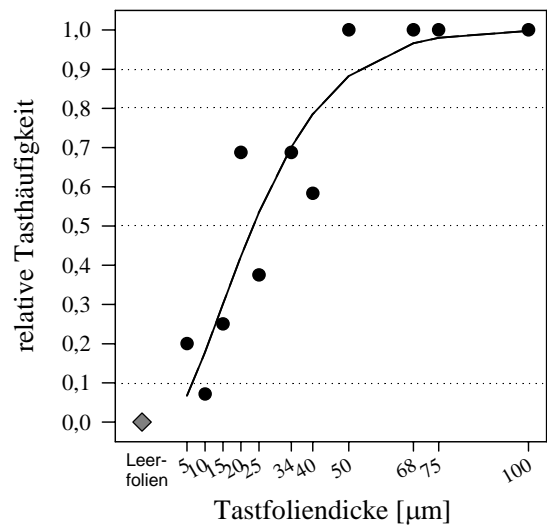
**Proband Nr. 1/13b****Proband Nr. 1/14****Proband Nr. 1/15****Proband Nr. 1/16****Proband Nr. 1/17**

- Beobachtete relative Tasthäufigkeiten
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

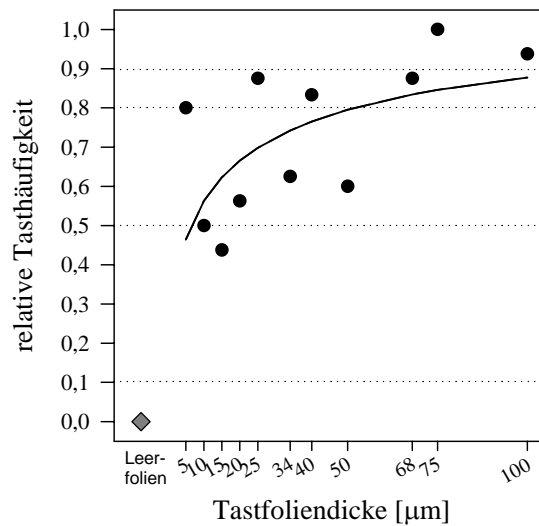
Proband Nr. 1/18



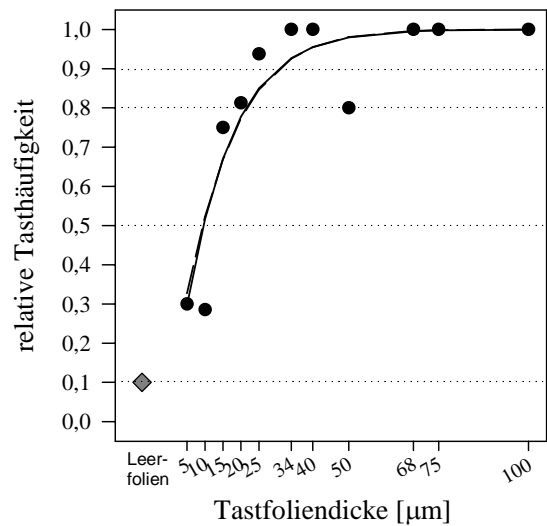
Proband Nr. 1/19



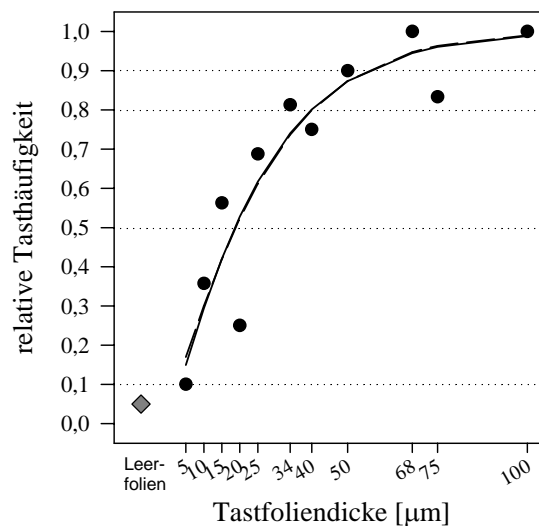
Proband Nr. 1/20



Proband Nr. 1/21

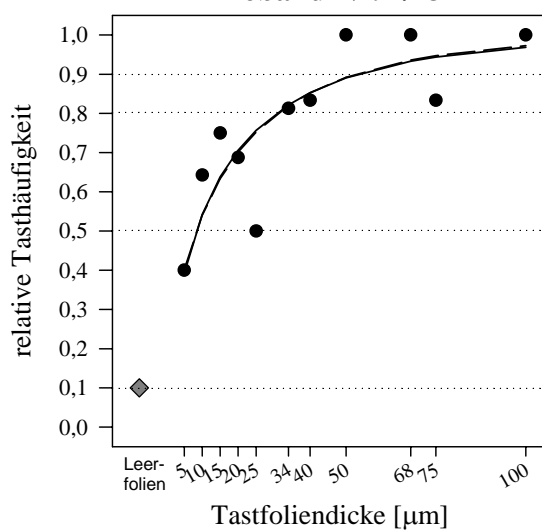


Proband Nr. 1/22

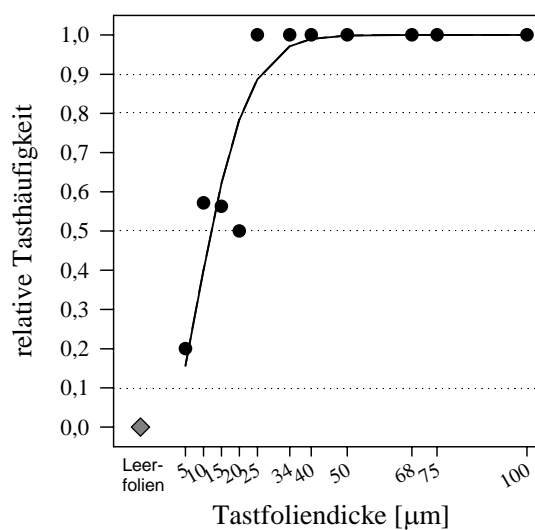


- Beobachtete relative Tasthäufigkeiten
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

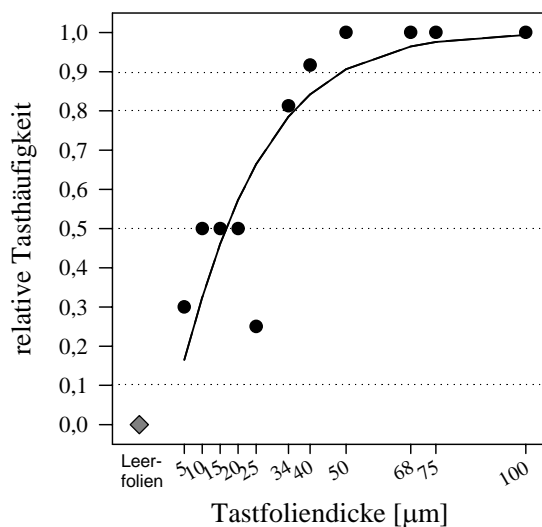
Proband Nr. 1/23



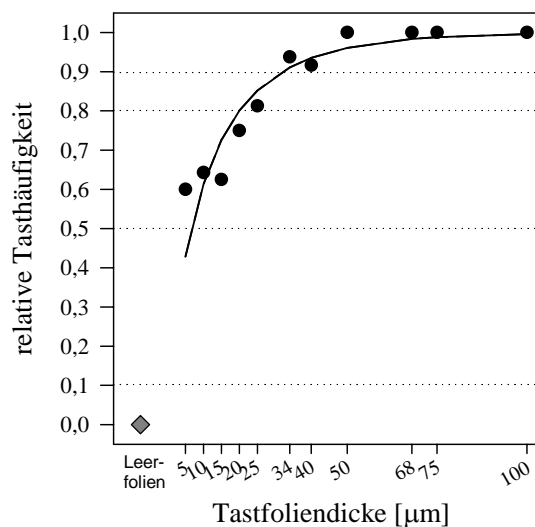
Proband Nr. 1/24



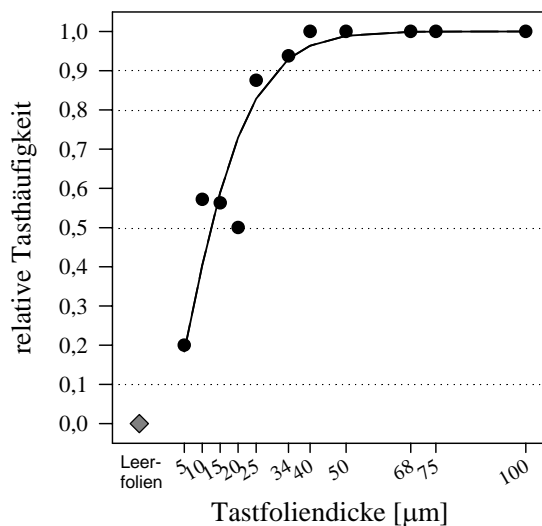
Proband Nr. 1/25



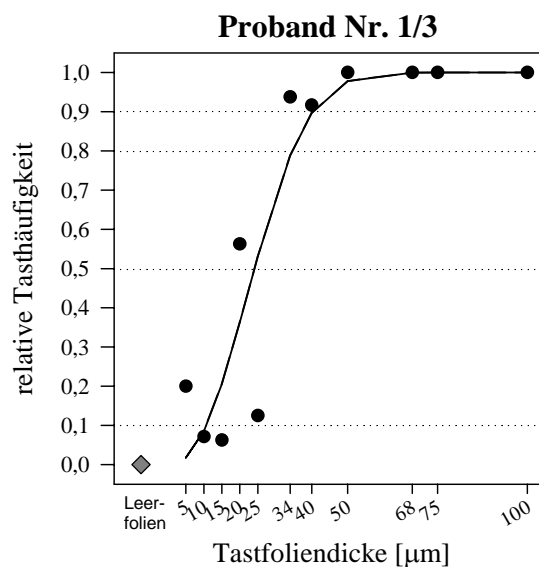
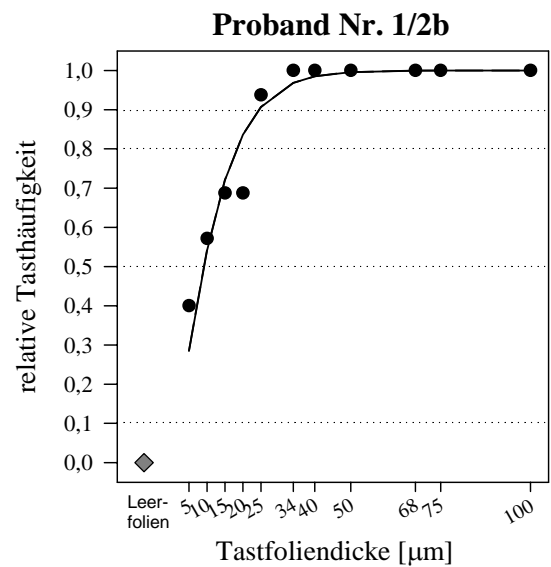
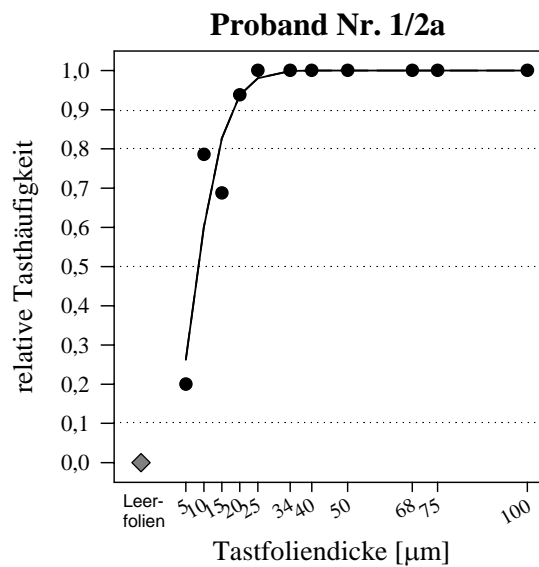
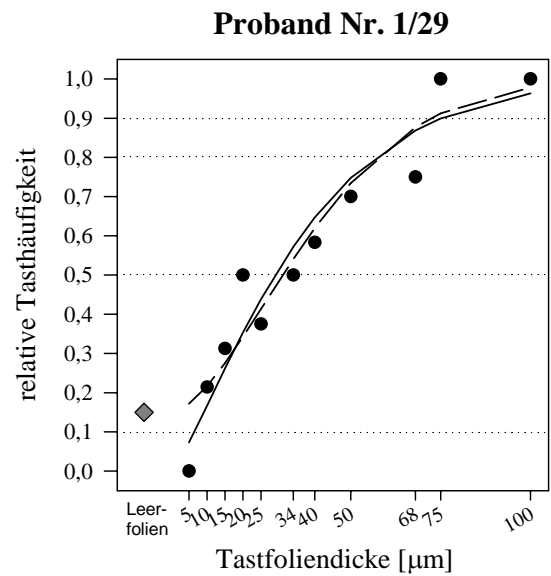
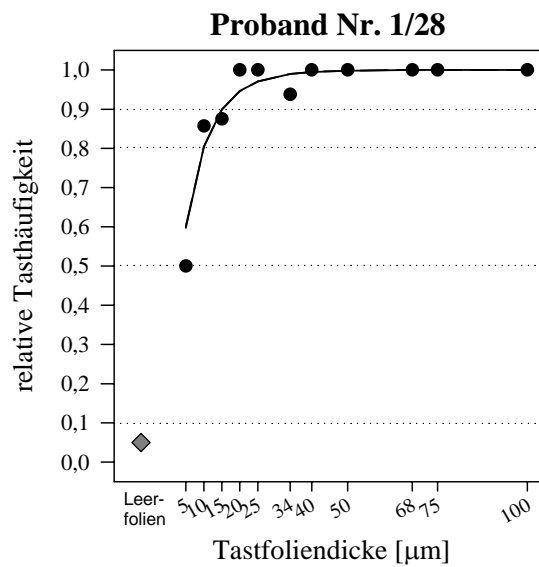
Proband Nr. 1/26



Proband Nr. 1/27

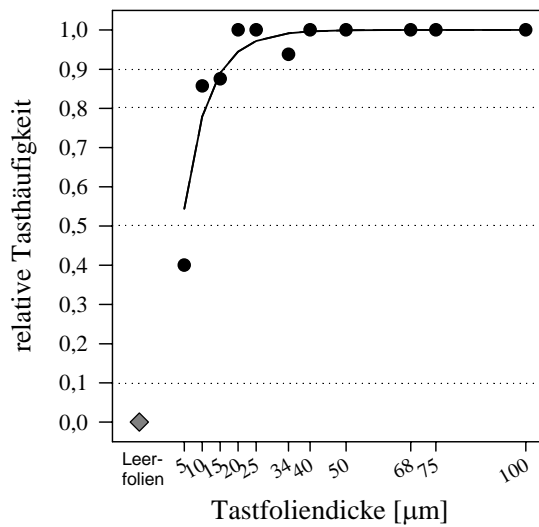


- Beobachtete relative Tasthäufigkeiten
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

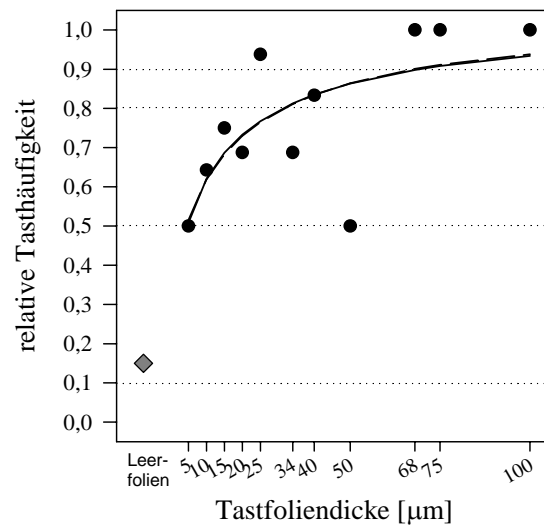


- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue  
*cloglog*-Transformation  
(ohne reine Ratequote)
- - - Geschätzte relative Tastreue  
*cloglog*-Transformation  
(mit reiner Ratequote)

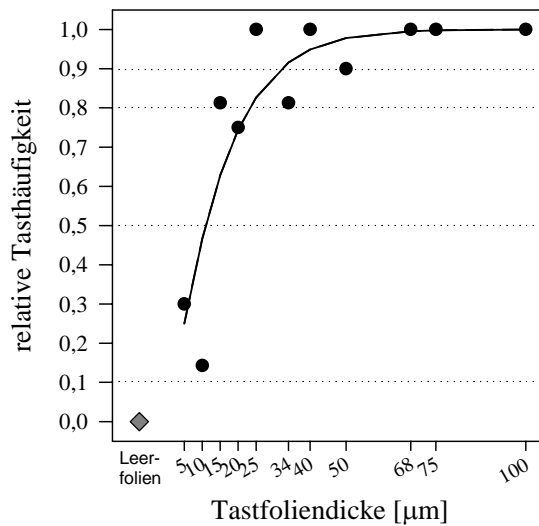
Proband Nr. 1/30



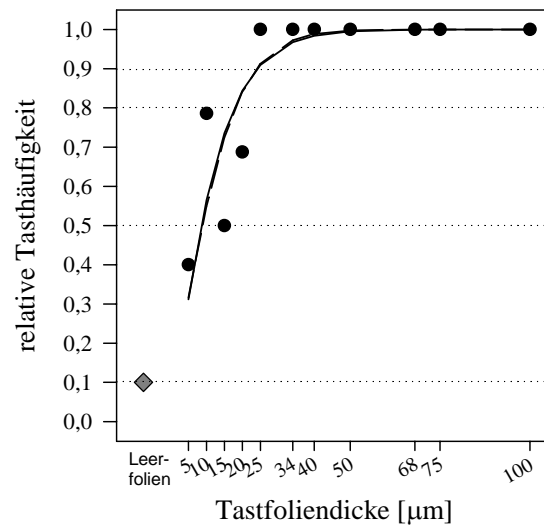
Proband Nr. 1/31



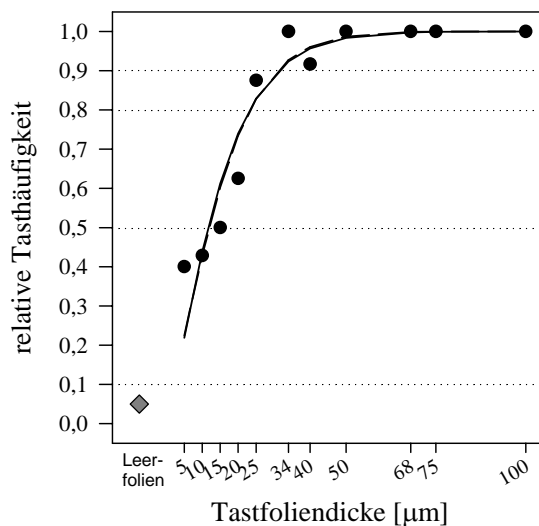
Proband Nr. 1/32



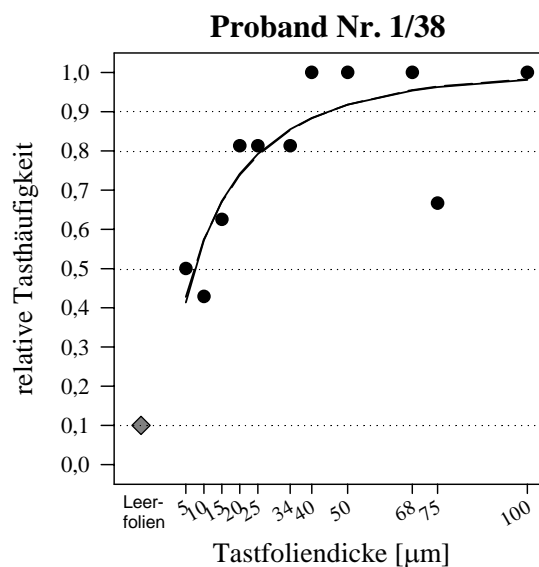
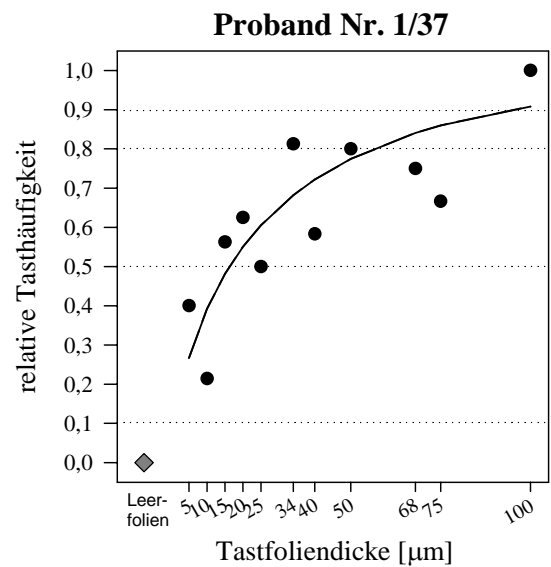
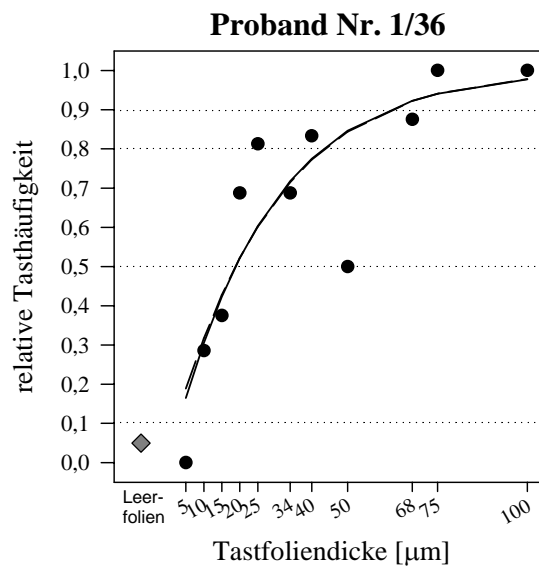
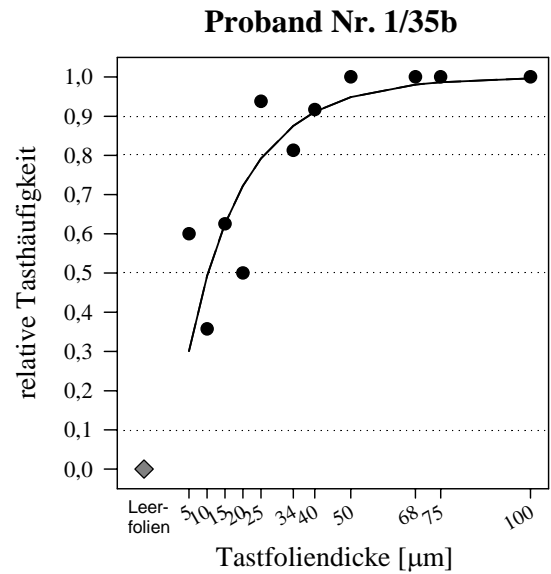
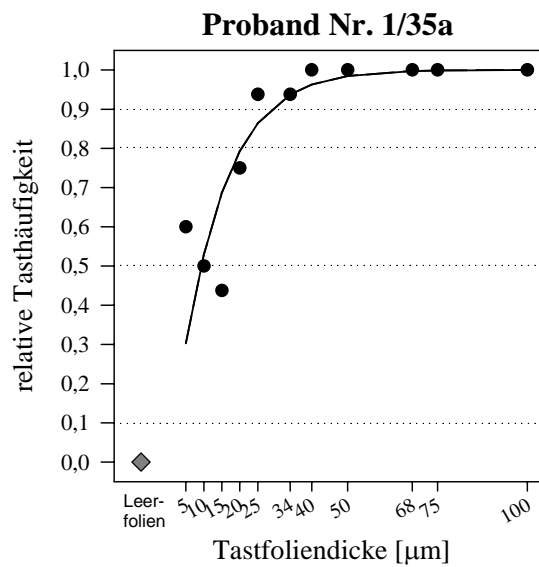
Proband Nr. 1/33



Proband Nr. 1/34

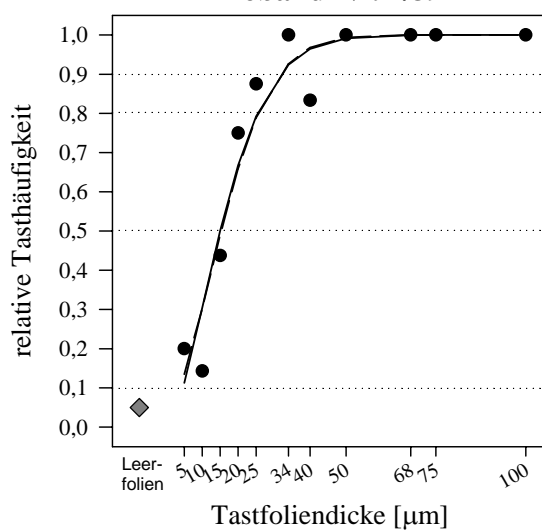


- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tastreue *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

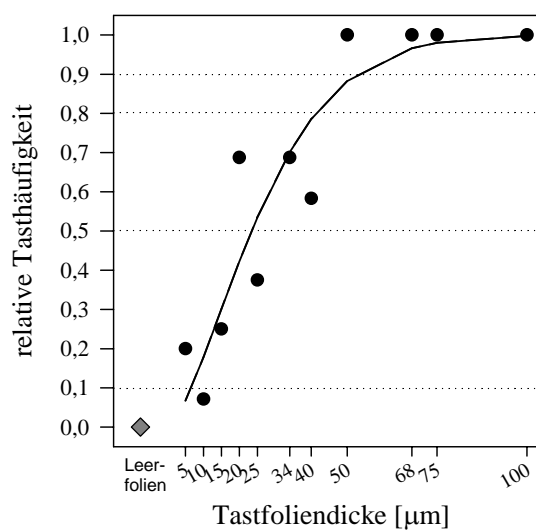


- Beobachtete relative Tasthäufigkeiten
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

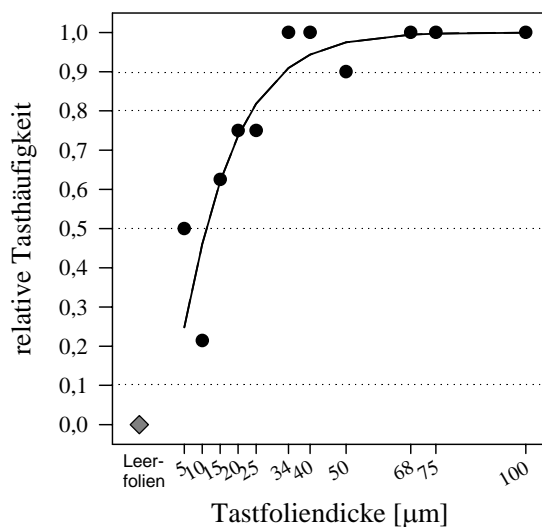
Proband Nr. 1/39



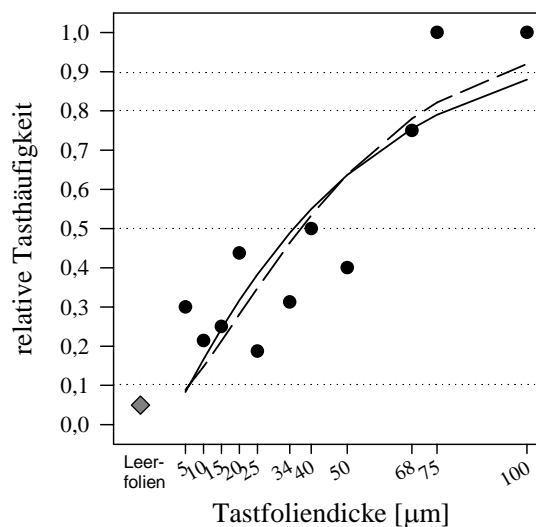
Proband Nr. 1/40



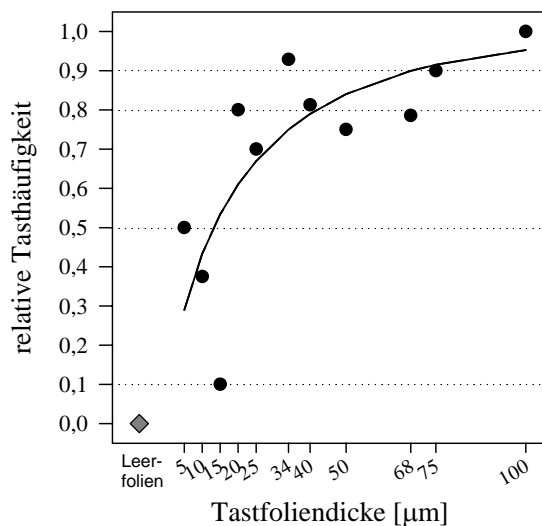
Proband Nr. 1/6



Proband Nr. 1/7



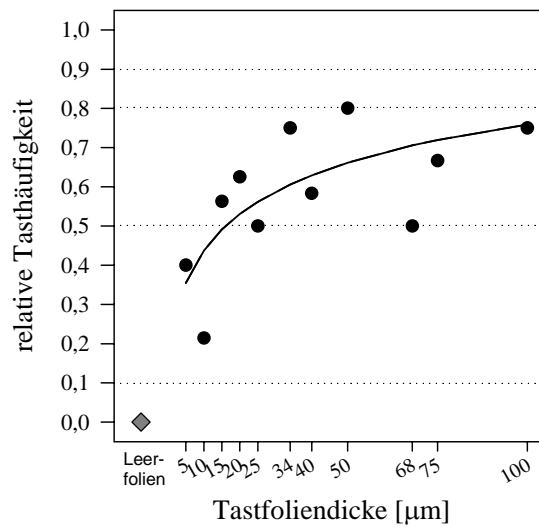
Proband Nr. 1/8



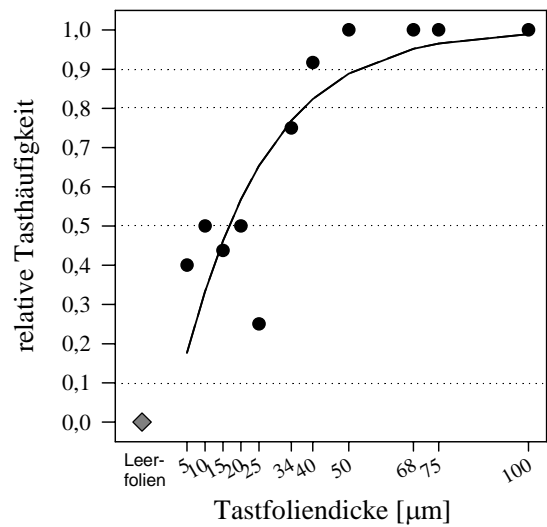
- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue  
cloglog-Transformation  
(ohne reine Ratequote)
- - - Geschätzte relative Tastreue  
cloglog-Transformation  
(mit reiner Ratequote)



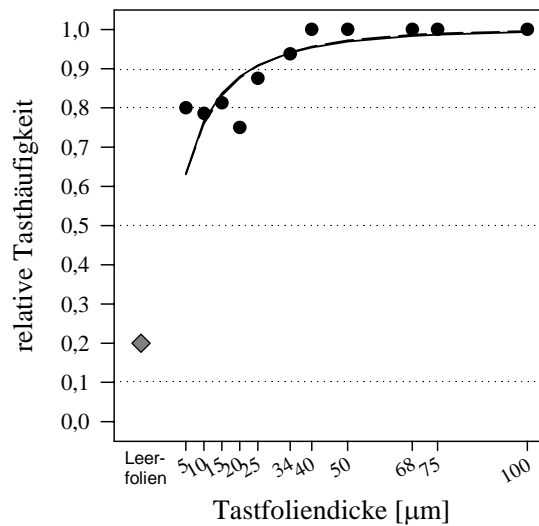
Proband Nr. 1/9



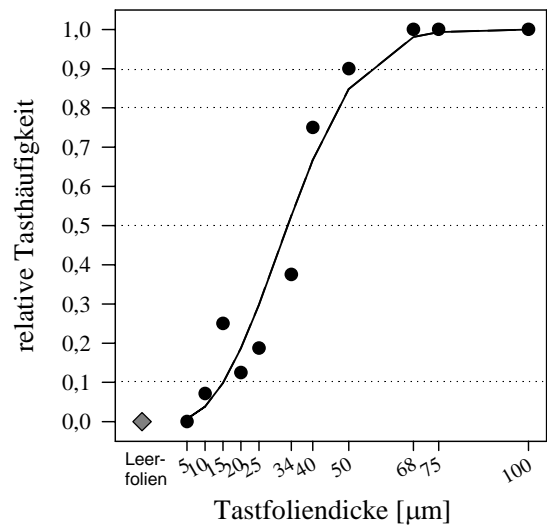
Proband Nr. 2/1



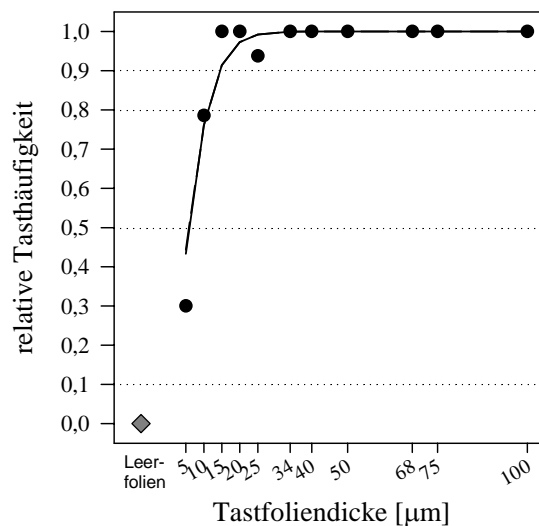
Proband Nr. 2/10



Proband Nr. 2/11

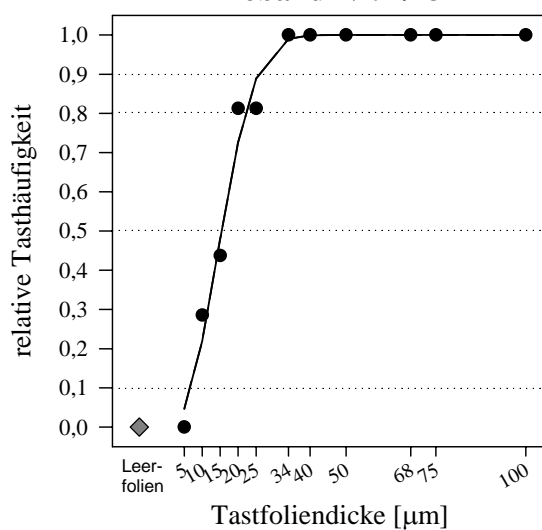


Proband Nr. 2/12

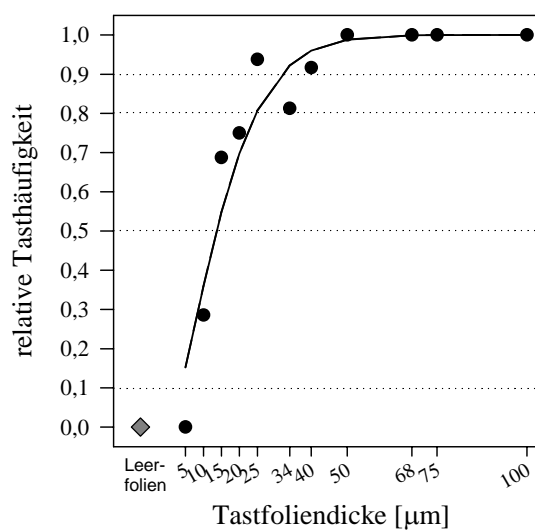


- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue  
*cloglog*-Transformation  
(ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tastreue  
*cloglog*-Transformation  
(mit reiner Ratequote)

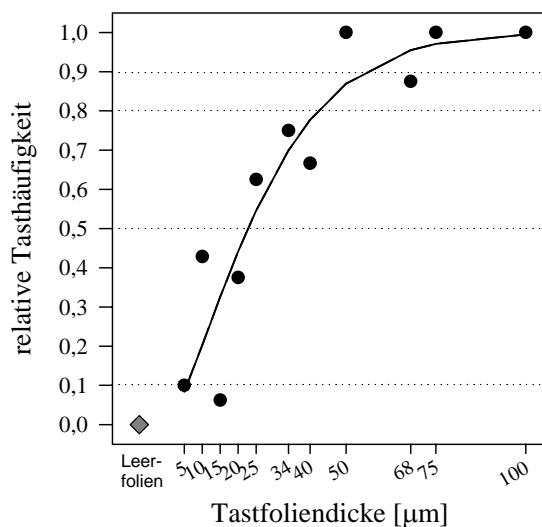
Proband Nr. 2/13



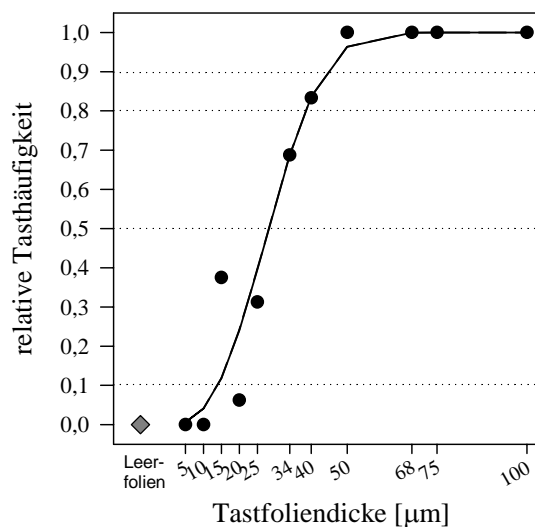
Proband Nr. 2/14



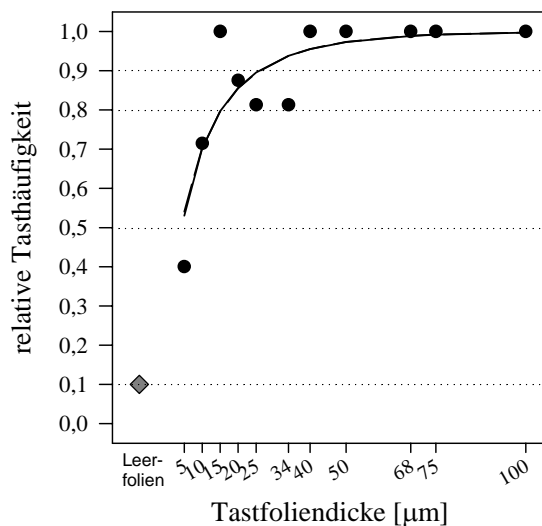
Proband Nr. 2/15



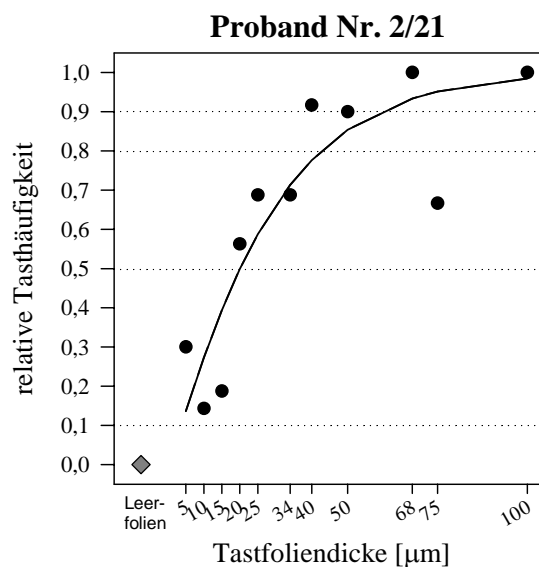
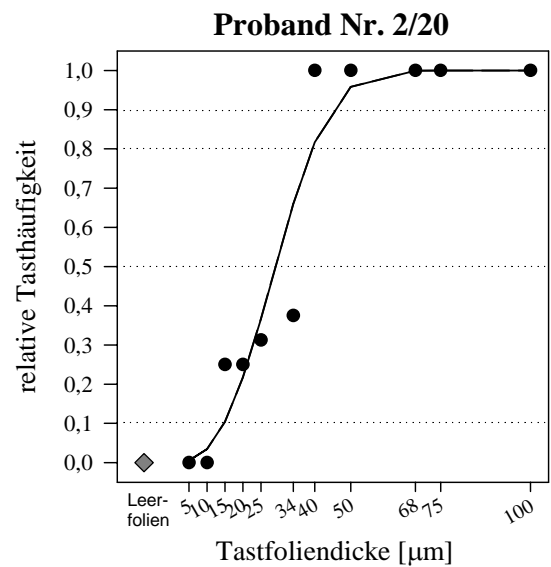
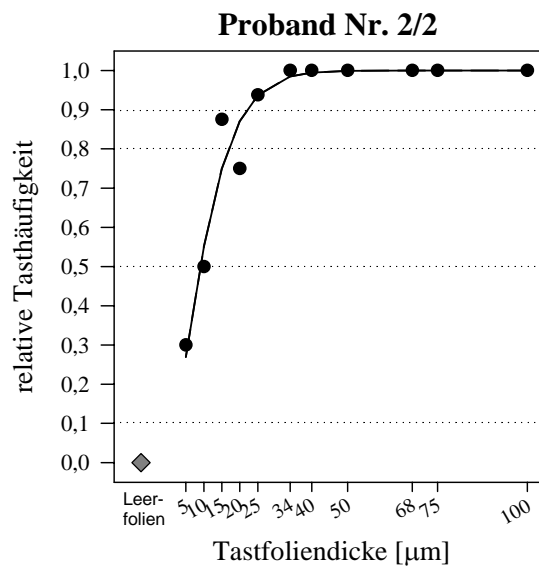
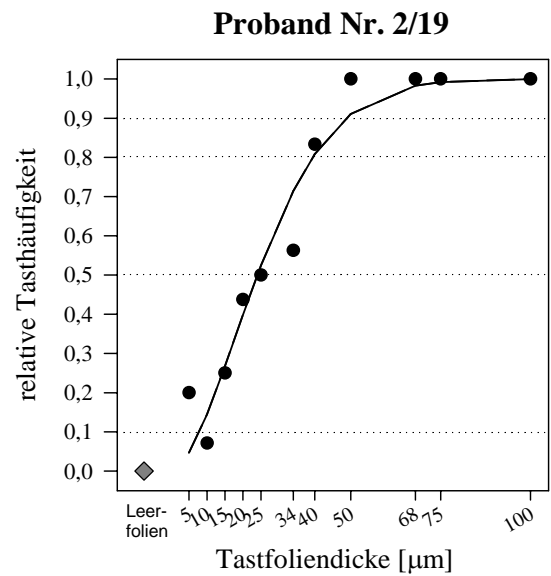
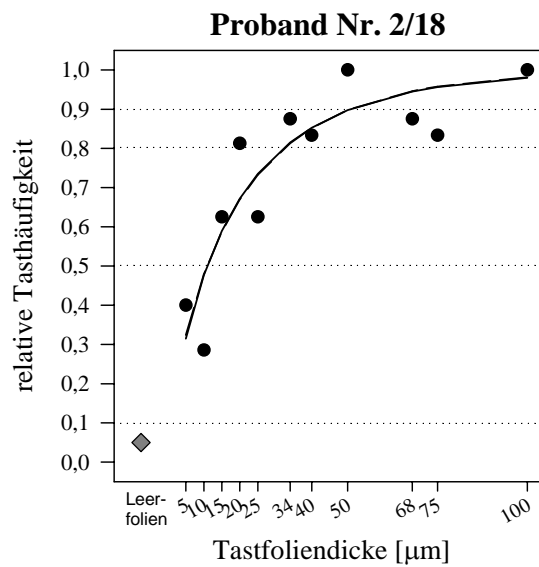
Proband Nr. 2/16



Proband Nr. 2/17

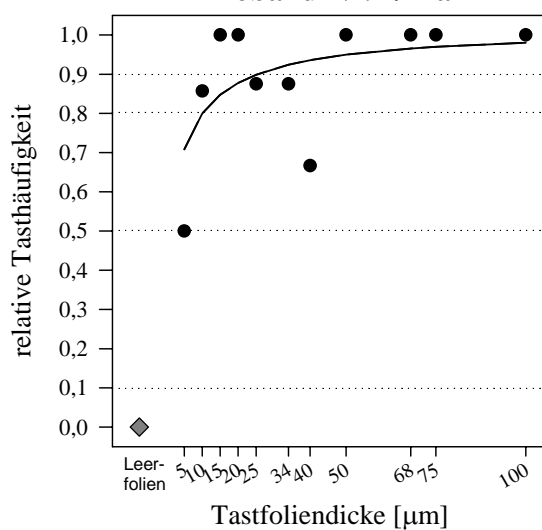


- Beobachtete relative Tasthäufigkeiten
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- - - Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

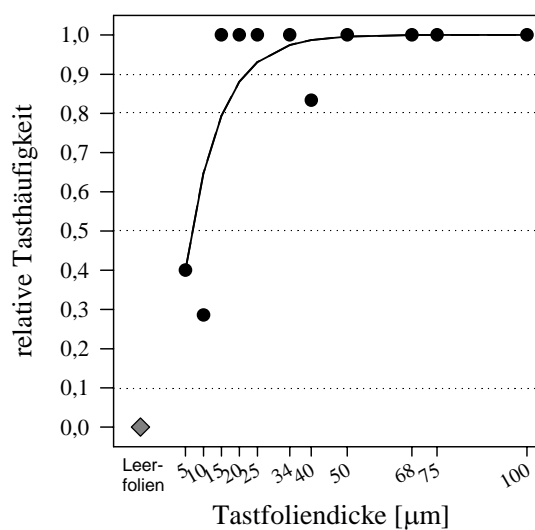


- Beobachtete relative Tasthäufigkeiten
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tasthäufigkeiten *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

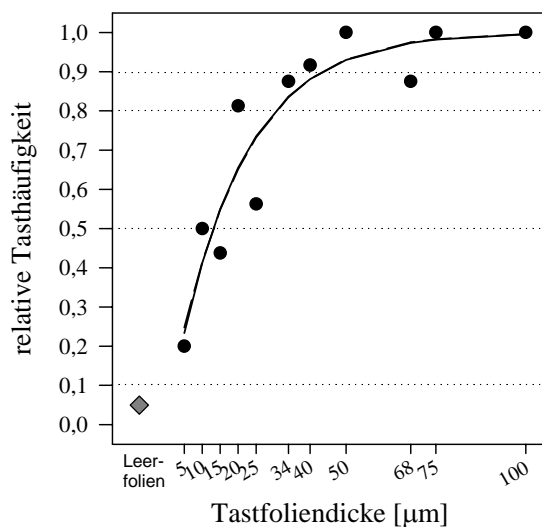
Proband Nr. 2/22a



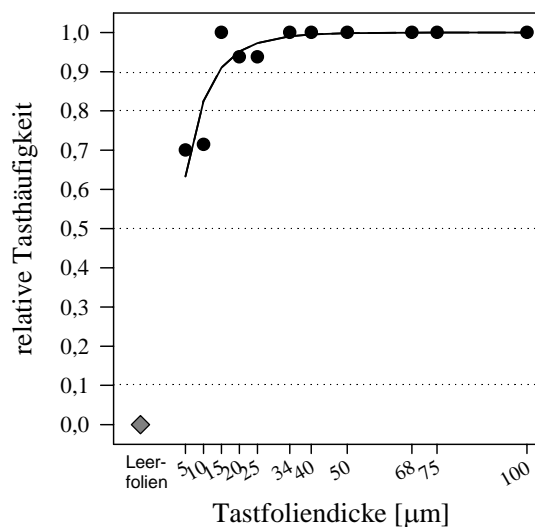
Proband Nr. 2/22b



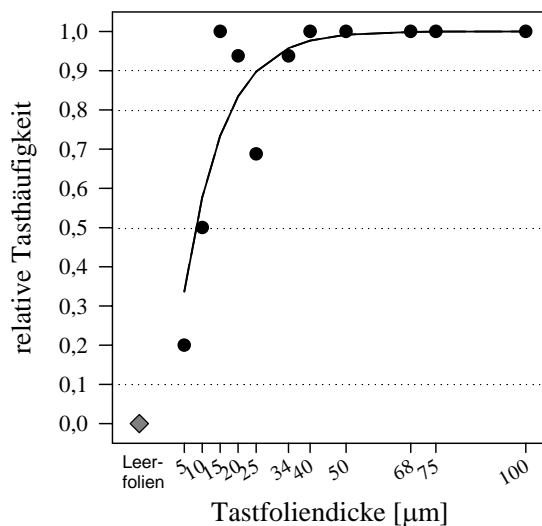
Proband Nr. 2/23



Proband Nr. 2/24

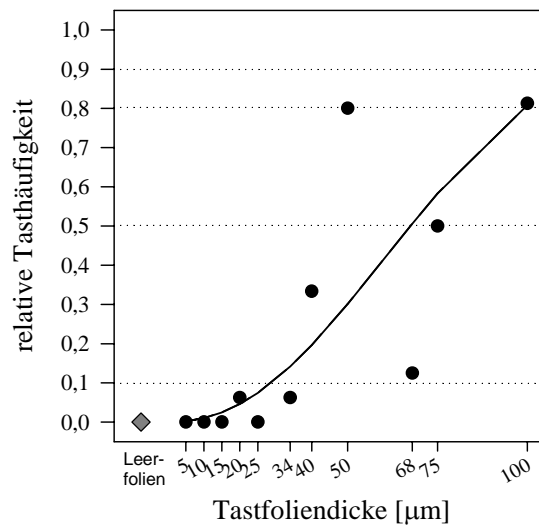


Proband Nr. 2/25

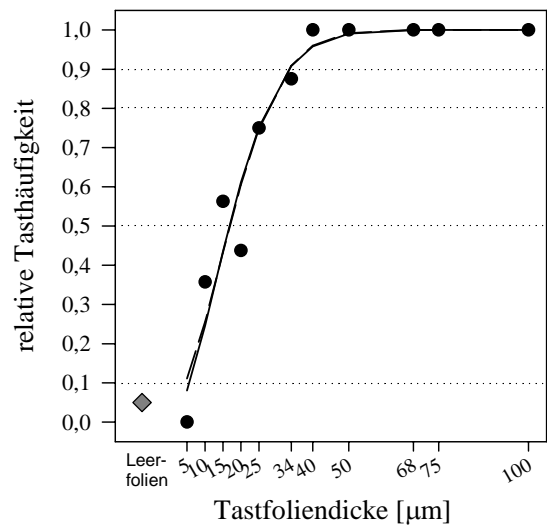


- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue  
cloglog-Transformation  
(ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tastreue  
cloglog-Transformation  
(mit reiner Ratequote)

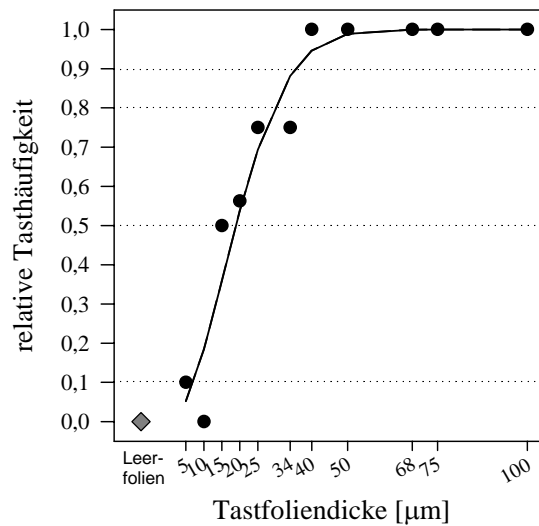
Proband Nr. 2/26



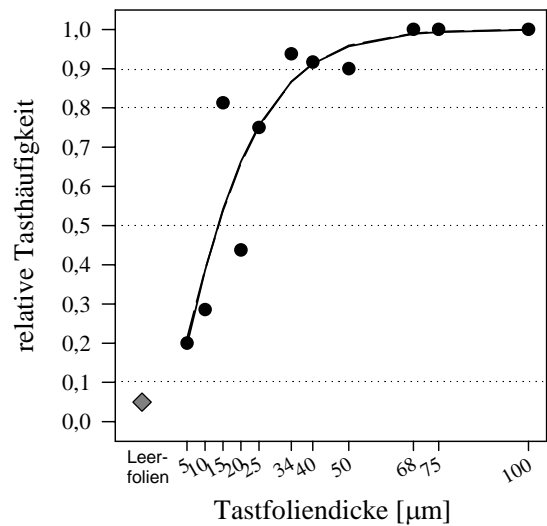
Proband Nr. 2/27



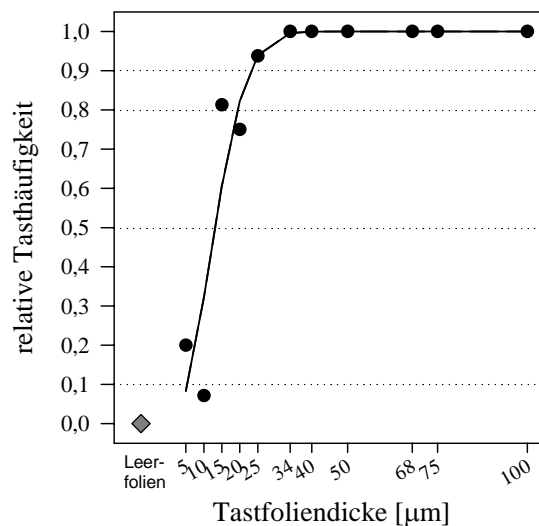
Proband Nr. 2/28



Proband Nr. 2/3

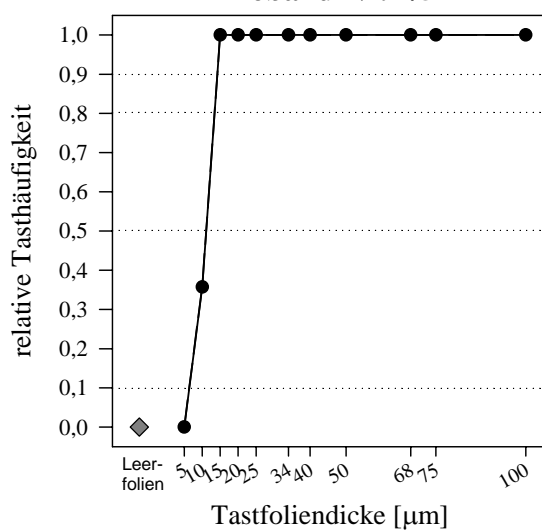


Proband Nr. 2/4

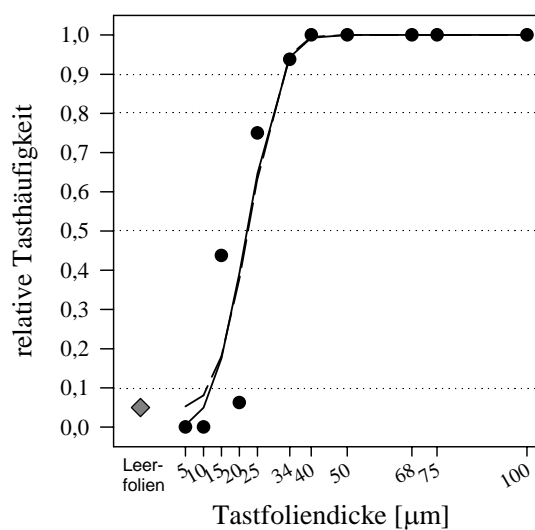


- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue  
*cloglog*-Transformation  
(ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tastreue  
*cloglog*-Transformation  
(mit reiner Ratequote)

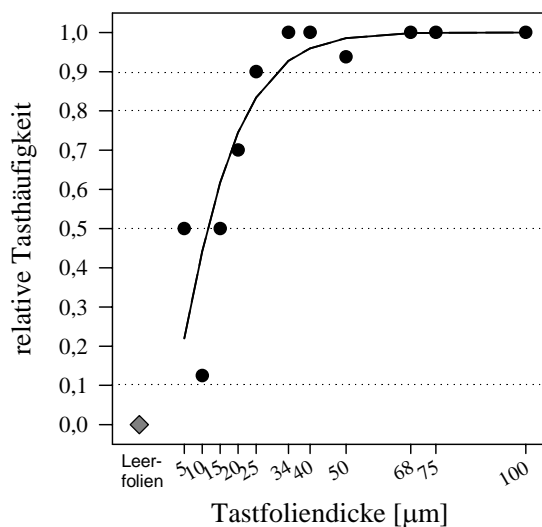
Proband Nr. 2/5



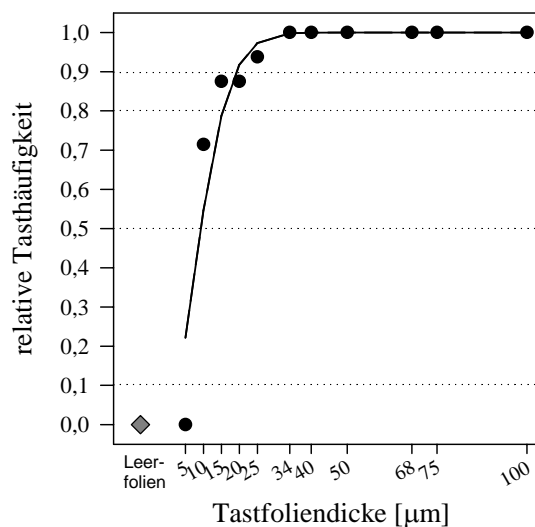
Proband Nr. 2/6a



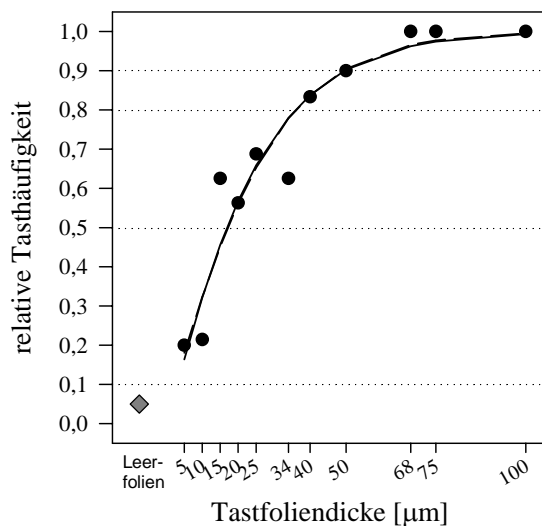
Proband Nr. 2/6b



Proband Nr. 2/8



Proband Nr. 2/9



- Beobachtete relative Tastreue
- ◆ Beobachtete reine Ratequote
- Geschätzte relative Tastreue *cloglog*-Transformation (ohne reine Ratequote)
- — Geschätzte relative Tastreue *cloglog*-Transformation (mit reiner Ratequote)

## Danksagung

Mein Dank gilt in erster Linie und besonders Herrn Prof. Dr. rer. nat. Max P. Baur (Institut für Medizinische Biometrie, Informatik und Epidemiologie, IMBIE) und Herrn Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Alt (Abteilung für Theoretische Biologie) für die Überlassung des Themas, die gute Betreuung, zahlreiche Anregungen, sowie ein stetes Interesse am Fortgang der Arbeit.

Dies gilt auch für Herrn Prof. Dr. med. dent. Karl-Heinz Utz (Poliklinik für Zahnärztliche Prothetik I) und Herrn Prof. Dr. med. dent. W. Götz (Poliklinik für Kieferorthopädie), die mir bei allen Fragen zur Zahnmedizin mit Rat und Tat beiseite standen.

Den Anstoß zu dieser Arbeit bildete zweifelsohne die Zusammenarbeit mit Herrn Dr. med. Dr. med. dent. Norbert Enkling (Poliklinik für Zahnärztliche Prothetik I der Universität Bonn, jetzt Zahnmedizinische Tagesklinik und Therapiezentrum für Zahnbehandlungsangst in Bochum), der mich mit dem Thema Tastsensibilität natürlicher Zähne und Implantate bekannt machte. Die Diskussionsergebnisse zahlreicher Sitzungen führten schließlich zu dem in dieser Arbeit verwendeten experimentellen Aufbau. Seine gewinnende Art und Gewissenhaftigkeit trugen dazu bei, dass so viele Probanden für das Experiment gewonnen werden konnten.

Ohne die Möglichkeit, die während der Entstehung dieser Arbeit auftauchenden statistischen und mathematischen Fragen zu diskutieren, wäre diese Arbeit sicher nicht so „rund“ geworden. Dies verdanke ich vor allem meinem Chef Herrn Dr. Rolf Fimmers, sowie meinen Kollegen Herrn Dipl.-Inform. Arnfried Schiller und Frau Dipl.-Math. Manuela Bogdanow (alle IMBIE). Alle drei waren auch geduldige Korrekturleser und halfen mir durch viele Formulierungs-Durststrecken.

Mein herzlicher Dank gebührt Herrn Dr. Felix A. Wichmann (Max-Planck-Institut für biologische Kybernetik, Tübingen), der mir sämtliche Fragen bzgl. des für mich doch sehr fremden Gebietes der Psychophysik geduldig beantwortete.

Unserer Bibliothekarin des IMBIE, Frau Schillo und ihrer Vertretung Frau Michalke, gilt mein großer Dank für ihr Engagement in der Beschaffung der für diese Arbeit benötigten Bücher und Veröffentlichungen.

Nicht zuletzt danke ich meinem Mann Norbert und meinen Kindern Matthias und Gereon für ihren Rückhalt und ihre Hilfe im privaten Bereich, sowie für ihre Geduld, wenn sie zeitweise von Tastsensibilität und Mathematik auf den zweiten Platz verdrängt wurden.

Meiner Mutter danke ich für ihre moralische Unterstützung und ihre Liebe. Ihr Vorbild hat mir gezeigt, dass Alter keine Rolle spielt und jede Reise mit dem ersten Schritt beginnt.

Ihnen ist diese Arbeit gewidmet.

## Lebenslauf

von Claudia Nicolay, geb. Maschler

<b>Persönliche Angaben</b>	Geburtsdatum: 21.09.1962	
	Eltern: Max Maschler (†), Elisabeth Maschler geb. Rotermund	
	Geburtsort: Villingen, jetzt Villingen-Schwenningen (Schwarzwald)	
	Familienstand: verheiratet (seit 1992), 2 Kinder (geb. 1993, 1995)	
	Staatsangehörigkeit: deutsch	
<b>Ausbildung</b>	1972 – 1979	Zinzendorfgynasium Königsfeld
	1979 – 1980	Collège Lucie Berger, Strasbourg/Frankreich
	1980 – 1982	Zinzendorfgynasium Königsfeld
		<b>Abitur (Mai 1982)</b>
	1982 – 1988	Ludwig-Maximilian-Universität München <b>Diplom in Statistik (Dezember 1988)</b>
<b>Beruflicher Werdegang</b>	1989 – 1993	Institut für Medizinische Dokumentation und Statistik der Universität zu Köln <b>Wissenschaftliche Mitarbeiterin</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Biometrie</li></ul>
	1994 – 1995	FOCUS (Auftragsforschungsinstitut für die pharmazeutische Industrie), Neuss <ul style="list-style-type: none"><li>• Biometrie</li></ul>
	1996 – 1998	Klinik und Poliklinik für Unfallchirurgie / Institut für Mediz. Statistik, Datenverarbeitung und Dokumentation der Universität Bonn <b>Wissenschaftliche Mitarbeiterin</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Biometrie</li></ul>
	seit 1999	Institut für Medizinische Biometrie, Informatik und Epidemiologie der Universität Bonn <b>Wissenschaftliche Mitarbeiterin</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Biometrie</li></ul>