

Handelsstrategien mit Mindestgarantien

Eine analytische Beschreibung

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Wirtschafts- und Gesellschaftswissenschaften

durch die

Rechts- und Staatswissenschaftliche Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität

Bonn

vorgelegt von Balder, Sven

aus Berlin

BONN 2009

Dekan: Prof. Dr. Erik Theissen
Erstreferent Prof. Dr. Klaus Sandmann
Zweitreferent Prof. Dr. Frank Riedel

Tag der mündlichen Prüfung: 26.06.2008

*Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online elektronisch publiziert.*

Zusammenfassung

Zweck von Handelsstrategien mit Mindestgarantien ist es eine untere Grenze von Vermögen zu sichern und dabei trotzdem von steigenden Finanzmärkten zu profitieren. Die Absicherung wird dabei häufig durch eine dynamische Strategie gewährleistet, deren Investitionsquote in risikobehaftete Anlagen typischerweise mit steigendem Wert wächst. Prominente Beispiele sind optionsbasierende Strategien, bei denen synthetisch eine Put-Option zur Sicherung des Portfolios nachgebildet wird, und proportionale Wertsicherungsstrategien wie die Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI).

Die vorliegende Arbeit untersucht wesentliche theoretische Eigenschaften dieser Strategien in einem Black-Scholes-Modellrahmen. Für die CPPI werden dabei zusätzlich Modifikationen betrachtet, die sich aus weitergehenden Absicherungsgedanken oder Marktunvollkommenheiten ergeben. Der Fokus liegt dabei auf den Auswirkungen von Beschränkungen in Form begrenzter Kreditaufnahmen und/oder Handelsbeschränkungen. Zu den Modifikationen, die sich aus anderen Absicherungen ergeben, gehören das Vorhandensein von amerikanischen Garantien, das heißt Garantien, die nicht nur am Ende des Investitionszeitraumes sondern dauerhaft einen bestimmten Wert garantieren, und Garantien, die jederzeit einen bestimmten Anteil des bisher maximal erreichten Wertes gewährleisten. Für Garantien in Standardform benötigen CPPI-Strategien im allgemeinen die Möglichkeit der unbegrenzten Kreditaufnahme. Begrenzungen der Kreditaufnahme machen es somit zunächst einmal notwendig die proportionalen Wertsicherungsstrategien neu zu definieren. Zum einen kann dies über die bereits erwähnten Anpassungen der Garantie erfolgen oder über eine direkte Beschränkung der Investitionsquote. Für die genannten Modifikationen werden die Dynamiken, Verteilungseigenschaften und die damit verbundenen Kennziffern bestimmt.

Eine andere Art von Beschränkung ergibt sich aus der Notwendigkeit diskreten Handelns. Insbesondere Auswirkungen auf die eingeschränkte Gewährleistung der Garantie werden im letzten Abschnitt der Arbeit untersucht.

Für Andrea

Danksagung

Die Motivation für die vorliegende Arbeit umspannt eine weitaus längere Zeitspanne als den reinen Promotionszeitraum. Aus diesem Grunde möchte ich an dieser Stelle nicht nur den Freunden und Kollegen danken, die mich während der Promotionsphase begleitet und unterstützt haben, sondern auch denen die mein Interesse an der Finanzmathematik über die Jahre hinweg aufrecht erhalten haben.

Während der Zeit meines Studiums bin ich vor allem Marco Schmidtgen, Robert Häusler und Stephan Schrameyer dankbar. Zum einen natürlich für die gegenseitige Unterstützung bei den Hausaufgaben und den Prüfungsvorbereitungen. Vor allem jedoch für die Geduld mir das Skatspielen beizubringen.

Für die Zeit, die ich bei Bankgesellschaft Berlin verbringen durfte, danke ich insbesondere Maria von Gablenz-Müller, Solvej Ziegler, Peter Foretnik, Thomas Wiedmann und Sven Frühholz. Sie alle gehören zu den wenigen Personen aus dem Bankbereich, die ich kennenlernen durfte, die die Zahlen mit denen sie arbeiten auch hinterfragt haben.

Für die Zeit in Mainz gilt mein Dank vor allem Anke Klewitz und Jürgen Arns für die gegenseitige Unterstützung bei Forschung und Lehre.

In Bonn bin ich insbesondere den Mitarbeitern und den assoziierten Mitarbeitern der Abteilung BWL III zu Dank verpflichtet. Namentlich handelt es sich dabei um Michael Brandl, An Chen, Haishi Huang, Simon Jäger, Birgit Koos, Anne Ruston, Xia Su, Michael Suchancki, Jens Wannenwetsch und Manuel Wittke. Sie alle waren nicht nur Kollegen gewesen, sondern sind Freunde geworden.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. Klaus Sandmann und Prof. Dr. Antje Mahayni. Professor Sandmann danke ich vor allem dafür, dass er mir die Möglichkeit der Promotion angeboten hat und mir bei meinen Forschungsvorhaben freie Wahl ließ. Vor allem danke ich ihm dafür, dass er mir jederzeit als Ansprechpartner zur Verfügung stand.

Antje danke ich dafür, dass sie mich in ihre Obhut übernommen hat und so erheblich zum Abschluss dieser Arbeit beigetragen hat. Die gemeinsamen Projekte und Diskussionen bilden die wesentliche Basis dieser Arbeit.

Für die lebenslange Unterstützung bei allen meinen Entscheidungen bin ich meinen Eltern, meinem Bruder und meinen Großeltern zu allergrößtem Dank verpflichtet.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Ökonomische und Mathematische Grundlagen und erste Strategien	7
1.1 Modell	8
1.2 Begriffe und Definitionen	9
1.2.1 Handelsstrategien	9
1.2.2 Maße zur Charakterisierung von Strategien	10
1.3 Mathematische Grundlagen	17
1.3.1 Eigenschaften der Brownschen Bewegung und ihres Maximums	18
1.3.2 Eigenschaften des Integrals der Geometrischen Brownschen Bewegung	23
1.3.3 Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift	27
1.4 Semi-statische und optionsbasierte Wertsicherungen	35
1.4.1 Stop-Loss Strategien	36
1.4.2 Option Based Portfolio Insurance (OBPI)	43
2 Proportionale Wertsicherungsstrategien ohne Beschränkungen	53
2.1 Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)	54
2.1.1 Dynamik und Verteilung	55
2.1.2 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten	59
2.2 CPPI mit konstantem Floor	63
2.2.1 Dynamik und Verteilung	64
2.2.2 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten	69
2.2.3 Vergleich mit einfacher CPPI	70
2.2.4 Investition regelmäßiger Prämien in eine CPPI	73
3 CPPI Strategien mit Kreditbeschränkungen	77
3.1 Beschränkte CPPI	78
3.1.1 Dynamik und Verteilung	79
3.1.2 Bedingte Verteilung	88
3.1.3 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten	94
3.2 CPPI mit Floor-Anpassung	98
3.2.1 Dynamik und Verteilung	99
3.2.2 Bedingte Verteilung	106
3.2.3 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten	108
3.3 Vergleich Wertsicherungsstrategien unter Kreditbeschränkungen	111
3.3.1 Vergleich CPPI-Strategien	111

3.3.2	Vergleich Beschränkte CPPI und OBPI	114
3.3.3	Sharpe Ratio als Risikomaß für Wertsicherungsstrategien	119
4	CPPI Strategien mit Handelsbeschränkungen	123
4.1	Handel gemäß des Wertprozesses	125
4.1.1	Definition der Strategie	125
4.1.2	Risikomaße der zeitdiskreten CPPI	127
4.1.3	Einfache zeitdiskrete CPPI unter Transaktionskosten	132
4.2	Handel gemäß Delta-Hedge	137
4.3	Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI	142
5	Fazit	147
A	Beweise	151
A.1	Einige Integralformeln	152
A.2	Beweise zur OBPI	154
A.3	Beweise zur CPPI mit konstantem Floor	156
A.4	Beweise zur beschränkten CPPI	159
A.5	Beweise zur CPPI mit Floor-Anpassung	165
A.6	Beweise zur CPPI in diskreter Zeit	170
	Literaturverzeichnis	179

Abbildungsverzeichnis

1	Asymmetrisches Risikoprofil von Investoren	1
1.1	Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift $\theta_0 > 0 > \theta_1$	27
1.2	Dichte der Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift bedingt auf den Endwert der Brownschen Bewegung	33
1.3	Rendite und Cash-Dominanz-Wahrscheinlichkeit der Stop-Loss-Strategie . .	40
1.4	Normierte Partizipationsrate der OBPI in Abhängigkeit des Partizipationslevel	45
1.5	Auszahlungsprofil der OBPI für verschiedene Partizipationsraten und -level .	46
1.6	Verteilung des Endwertes der OBPI für verschiedene Partizipationsraten und -level	47
1.7	Erwartungswert der OBPI	49
1.8	Cash-Lock-Wahrscheinlichkeiten der OBPI	51
2.1	Auszahlungsprofil der einfachen CPPI und OBPI	57
2.2	Investitionsquote der einfachen CPPI und OBPI	58
2.3	Erwartungswert und Varianz der einfachen CPPI	59
2.4	Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit der einfachen CPPI	60
2.5	Verteilung und Dichte der CPPI mit konstantem Floor	71
2.6	Cash-Lock und relativer Verlust der CPPI mit konstantem Floor	72
3.1	Verteilung und Dichte der beschränkten CPPI	87
3.2	Erwartete Auszahlung der beschränkten CPPI in Abhängigkeit vom Multiplier	88
3.3	Auszahlungsgrenzen der beschränkten CPPI (verschiedene Laufzeiten)	91
3.4	Auszahlungsgrenzen der beschränkten CPPI (verschiedene Multiplier)	92
3.5	Verteilung der beschränkten CPPI	96
3.6	Beispiel CPPI mit Floor-Anpassung	102
3.7	Verteilung der Floor-angepassten CPPI	106
3.8	Verteilung und Dichte von Strategien mit Kreditbeschränkung	112
3.9	50%- bzw. 80% Konfidenzintervalle der Auszahlung der beschränkten und der Floor-angepassten CPPI für $\sigma = 20\%$ und $T = 5$ Jahre	113
3.10	80%-Konfidenzintervalle der Auszahlung der beschränkten und der Floor- angepassten CPPI für $\sigma = 15\%(20\%, 25\%)$ und $T = 1$ Jahr	114
3.11	Bedingte Dichten der Strategien mit Kreditbeschränkung	115
3.12	Relative Verlustwahrscheinlichkeit von Strategien mit Kreditbeschränkung in Abhängigkeit der Laufzeit, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)	116
3.13	Rendite des Erwartungswertes von Strategien mit Kreditbeschränkung in Ab- hängigkeit der Laufzeit, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)	117

3.14	Cash-Dominanz-Wahrscheinlichkeit von Strategien mit Kreditbeschränkung, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)	118
3.15	Erwarteten Rendite von Strategien mit Kreditbeschränkung bei festem An- lagehorizont, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)	119
3.16	Sharpe Ratio für Strategien mit und ohne Kreditbeschränkung	120
4.1	Ausfallwahrscheinlichkeiten der zeitdiskreten CPPI	129
4.2	Verteilung des Endwertes der zeitdiskreten CPPI	136
4.3	Erwartungswerte für die Δ - und Wert-basierende Approximation	139
4.4	Histogramm für die Δ - und Wert-basierende Approximation	140
4.5	Ausfallwahrscheinlichkeit der zeitdiskreten, beschränkten CPPI	145
A.1	Geometrische Intuition zur Vertauschung der Integralgrenzen	166

Tabellenverzeichnis

- 2.1 Risikomaße unbeschränkter Strategien 74
- 3.1 Momente der einfachen und der beschränkten CPPI 85
- 3.2 Risikomaße für Strategien mit Kreditbeschränkung 121
- 4.1 Sensitivität der Risikomaße der zeitdiskreten CPPI 132
- 4.2 Momente und Risiko-Maße der zeitdiskreten CPPI 135
- 4.3 Multiplier und Ausfallwahrscheinlichkeit der zeitdiskreten CPPI 135
- 4.4 Simulierte Risikomaße 141

Einleitung

Das Ziel der modernen Portfolio-Theorie nach Markowitz (1952) und Sharpe (1964) besteht in der Bestimmung und Charakterisierung von optimaler Handelsstrategien. Dazu werden einerseits riskante Anlage wie Aktien betrachtet, die eine höhere Rendite bei höherem Risiko erwarten lassen, und andererseits risikolose Anlage, die eine geringe Rendite ohne Risiko besitzen, betrachtet. Dabei ist sowohl die Beschreibung des Risikos als auch der Optimalität von den Präferenzen des jeweiligen Investors abhängig. Häufig besteht das Risiko in der Schwankungsbreite der zukünftigen Wertentwicklung und die Optimalität ergibt sich aus der Maximierung des Verhältnis zwischen Rendite und und dem Risiko. Während es sich im einfachsten Fall um statische Strategien handelt, d.h. zu Beginn der Strategie erfolgt eine einmalige Aufteilung des Vermögens ohne weitere Anpassungen des Portfolios zu späteren Zeitpunkten, benötigen dynamische Strategien, die dem jeweiligen Marktumfeld angepasst werden, eine ständige Umschichtung zwischen den Anlagen. Im allgemeinen ergibt sich ein Zielkonflikt zwischen hohen Renditen und gleichzeitiger Beschränkung des Risikos.

Dieser Zielkonflikt verdeutlicht die Bedeutung von Anlagestrategien, die zum einen die Partizipation an steigenden Aktienkursen oder anderen riskanten Wertpapieren ermöglichen und zum anderen eine Begrenzung potentieller Verluste versprechen. Dieses asymmetrische Risikoprofil der Investoren ist in Abbildung 1 dargestellt. Unterschieden werden muss hier zwischen Anlagen, die nur die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes beschränken und solchen, die einen Verlust vollständig ausschließen. Um bei der Anlage in riskante Wertpapiere einen als Floor bezeichneten Portfoliomindestwert zu gewährleisten, ist es notwendig auf so genannte Handelsstrategien mit Mindestgarantie, auch als Wertsicherungsstrategien oder Portfolio Insurance bezeichnet, zurückzugreifen. Diese Strategien sollen in der Folge betrachtet werden.

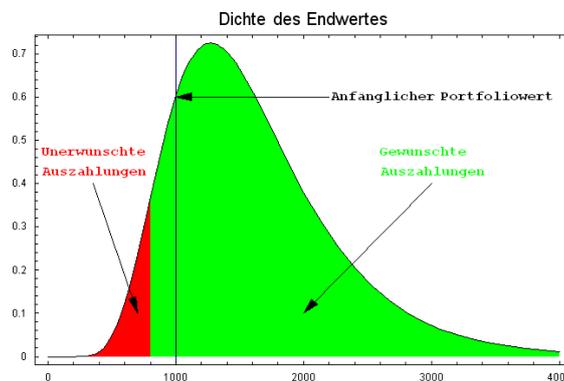


Abbildung 1: Asymmetrisches Risikoprofil von Investoren

Die Gründe für das erwähnte asymmetrische Risikoprofil von Investoren sind vielfältig und unter anderem Gegenstand der Untersuchungen der Verhaltensökonomie (Behavioral Finance). Des Weiteren führen aber auch gesetzliche Restriktionen zur Notwendigkeit von

Wertsicherungsstrategien. So sind beispielsweise Versicherungsunternehmen in Deutschland verpflichtet, bei kapitalbildenden Lebensversicherungen zumindest die eingezahlten Beiträge zu garantieren. Üblicherweise gehen die Versicherer darüber hinaus und garantieren eine Mindestverzinsung der eingezahlten Beiträge in Höhe des Höchstrechnungszins von derzeit 2,25% (Stand: 01. Januar 2008). Die Versicherungsunternehmen müssen dabei die Anlage der Kundengelder in einer Art und Weise vornehmen, dass ein Kapitalverlust am Ende der Laufzeit ausgeschlossen wird. Eine weitere Restriktion ergibt sich für Finanzdienstleister im Rahmen der privaten Altersvorsorge und der staatlichen Zuschüsse. Die Zulage und steuerliche Förderung werden gemäß des Gesetzes über die Zertifizierung von Altersvorsorgeverträgen (AltZertG) nur gewährt, sofern die Summe der eingezahlten Beiträge garantiert wird.

Eine erste Beschreibung der Portfolio Insurance findet sich in Brennan und Schwartz (1976) im Kontext der Lebensversicherung und der dort auftretenden Kapitalgarantien. Im gleichen Jahr wurde, Leland und Rubinstein (1988) folgend, die praktische Umsetzung vorbereitet. Eine allgemeine Beschreibung findet sich in Leland (1980) und führte in den achtziger Jahren zu ersten praktischen Anwendungen. Während sich diese ersten Beschreibungen auf die Absicherung einer riskanten Anlage mittels synthetischer Puts beziehen, die so genannte Option Based Portfolio Insurance, erfolgte die namentliche Erwähnung der so genannten proportionalen Wertsicherungsstrategien erstmalig in Black und Jones (1987) und Black und Perold (1988). Als eine dritte Klasse von Wertsicherungsstrategien lassen sich die so genannten Stop-Loss-Strategien identifizieren.

Die Unterscheidung in diese drei Klassen ergibt sich auf Grund der folgenden Charakteristika:

- OBPI-Strategien basieren auf der Verwendung derivativer Finanzprodukte. Typischerweise erfolgt die Absicherung eines risikobehafteten Portfolio mittels einer Put-Option. Alternativ lässt sich das Portfolio als Investition in die risikolose Anlage zuzüglich einer Call-Option darstellen. Bei Verwendung eines konkreten, vollständigen Modellrahmens kann das Derivat durch eine duplizierende Strategie synthetisiert werden. Das duplizierende Portfolio ist in der Regel als Funktion des Zeitpunktes und des Kurses der zugrunde liegenden Aktie bestimmt. Die Wertsicherungsstrategie ist somit eine dynamische Strategie, die ebenfalls eine Funktion des Kurses der zugrunde liegenden Aktie ist.
- Proportionale Wertsicherungsstrategien basieren auf der Differenz zwischen dem derzeitigen Portfoliowert und der gewünschten Garantie. Hierbei wird ein Vielfaches dieser Differenz in die zugrunde liegende Aktie investiert. Sofern dieser Multiplikator oder Multiplier nicht selbst vom Kurs der Aktie abhängt, handelt es sich hierbei also um

eine dynamische Strategie, die sich als Funktion des jeweiligen Portfoliowertes darstellen lässt. Im Falle eines konstanten Multipliers wird von einer Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI) gesprochen.

- Stop-Loss-Strategien sind dadurch gekennzeichnet, dass es sich um semi-statische Strategien handelt. Im Gegensatz zu den beiden anderen Strategien erfolgt keine dauerhaft-dynamische Portfolio-Anpassung sondern ausschließlich dann, wenn der Portfolio-Wert bestimmte Schranken erreicht. Im einfachstem Fall wird bis zum Erreichen einer unteren Schranke maximal in die riskante Anlage investiert. Nach dem Erreichen der Schranke wird ausschließlich in die risikolose Anlage investiert. Zwar verlangen diese Strategien kein dynamisches Handeln, jedoch ist es zur Gewährleistung der Garantie notwendig, die Wertentwicklung kontinuierlich zu beobachten.

Zusammengefasst kann also zum einen zwischen Modell-abhängigen Investitionsplänen (OBPI) und Modell-unabhängigen Investitionsplänen (CPPI) unterschieden werden. Zum anderen zwischen dynamischen und (semi-)statischen Strategien.

In einem konkreten Modellrahmen ist der Übergang zwischen diesen drei Kategorien fließend. Zunächst einmal lässt sich die Stop-Loss-Strategie als Investition in die risikolose Anlage zuzüglich einer Down-and-Out-Schranken- oder Barrier-Option darstellen und sich somit als optionsbasierende Strategie auffassen. Auf der anderen Seite zeigen Black und Perold (1992), dass eine proportionale Wertsicherungsstrategie unter Kreditbeschränkungen, wie wir sie in Kapitel 3.1 betrachten werden, mit wachsendem Multiplier gegen die Stop-Loss-Strategie konvergiert.

Des Weiteren lassen sich proportionale Wertsicherungsstrategien unter Handelsbeschränkungen betrachten, d.h. unter der Annahme, dass kein dynamisches Handeln möglich ist. Eine Betrachtung bezüglich fester Zeitpunkte erfolgt in Kapitel 4. Werden die Schranken hingegen in Abhängigkeit der Wertentwicklung des Portfolios festgelegt, so handelt es sich um eine semi-statische Strategie, die eine kontinuierliche Beobachtung des Wertes notwendig macht und somit als Stop-Loss-Strategie betrachten lässt. Eine solche Betrachtung erfolgt in Brandl (2007).

Im einfachsten Fall der proportionalen Wertsicherungsstrategie, d.h. sofern der Multiplier konstant ist und keine Beschränkungen vorliegen, lässt sich die Strategie, wie wir in Abschnitt 2.1 sehen werden, im Rahmen des Black-Scholes-Modell als Investition in die risikolose Anlage und Kauf eines Power-Kontraktes darstellen, kann also ebenfalls als optionsbasierende Strategie interpretiert werden. Umgekehrt gilt für die einfache OBPI, dass sie sich durch geeignete Wahl des Multipliers als proportionale Wertsicherungsstrategie darstellen lässt. Insbesondere muss der Multiplier dafür zeit- und vom Aktienkurs abhängig sein. Eine genaue Betrachtung erfolgt in Bertrand und Prigent (2002).

Ziel der vorliegenden Arbeit ist vor allem die Beschreibung der konstant-proportionalen Wertsicherungsstrategien. Hierbei liegt der Fokus auf der Betrachtung von Modifikationen der einfachen CPPI. Die gängige Literatur (u.a. Black und Perold (1992) oder Bertrand und Prigent (2002)) geht bei der Betrachtung der CPPI üblicherweise von einer Strategie ohne Kredit- und Handelsbeschränkungen und einer mit dem risikolosen Zins wachsenden Garantie aus. Unter praktischen Erwägungen ist eine solche Strategie häufig weder erwünscht noch umsetzbar, wie wir im folgenden darstellen werden.

Die Beschreibung der Strategien soll dabei auf möglichst analytischem Wege erfolgen. Alternativ lassen sich ein Teil der betrachteten Risikomaße, wie z.B. Erwartungswert und Varianz, auch durch Simulationen bestimmen. Wir werden, soweit möglich, auf diesen Weg verzichten, da sich insbesondere für die einfache CPPI zeigen wird, dass diese eine sehr hohe Kurtosis besitzt. Dies führt im allgemeinen dazu, dass Extremereignisse einen vergleichsweise starken Einfluss auf die erzielten Schätzungen besitzen und Simulationsergebnisse somit meist sehr ungenau sind. Dieses Problem stellt sich bei analytischen Betrachtung nicht. Umgekehrt lassen sich die vorgestellten Ergebnisse nutzen, um zu entscheiden, für welche Modifikationen sich unter Umständen doch verlässliche Simulationsergebnisse bestimmen lassen.

Das erste Kapitel beschäftigt sich zunächst mit der Beschreibung des Modellrahmens und der Vorstellung geeigneter Risikomaße zur Beschreibung der Eigenschaften von Wertsicherungsstrategien. Dieser Abschnitt bildet die ökonomischen Grundlagen. Da die betrachteten Modifikationen in der Regel eine starke Pfadabhängigkeit vom Kurs der Aktie aufweisen werden, schließt sich den ökonomischen Grundlagen ein Abschnitt mit mathematischen Grundlagen an, der vor allem der Beschreibung der Pfade der zugrunde liegenden Prozesse dient. Für den späteren Vergleich mit den proportionalen Wertsicherungsstrategien werden abschließend einige grundlegende Resultate für optionsbasierende und Stop-Loss-Strategien bestimmt. Insbesondere werden die vorgestellten Risikomaße für diese beiden Strategien hergeleitet.

Das zweite Kapitel behandelt die einfache CPPI, wie sie in der Literatur betrachtet wird, und ihre Eigenschaften. Hervorzuheben ist hierbei, dass die einfache CPPI pfadunabhängig ist und somit als Funktion des Aktienkurses dargestellt werden kann. Dies führt uns zur Interpretation der einfachen CPPI als Power-Kontrakt. Eine erste Modifikation besteht in der Betrachtung von Garantien, die nicht mit dem risikolosen Zins wachsen, sondern eine Verzinsung unterhalb der risikolosen besitzen. Hierbei liegt der Schwerpunkt auf Garantien,

die keine Verzinsung besitzen. Dieser Fall ergibt sich beispielsweise aus den oben beschriebenen gesetzlichen Restriktionen für Produkte der Altersvorsorge. Es erfolgt ein Vergleich zwischen der einfachen und der CPPI mit konstanter Garantie, der insbesondere eine Minderung der Schwankungsbreite des Portfoliowertes deutlich machen soll. Dieses geringere Risiko lässt sich aus einer zeitlichen Diversifikation schlussfolgern. Der gleiche Effekt lässt sich auch durch eine periodische Prämienzahlung erzielen. Eine Betrachtung der entsprechenden Dynamiken bildet den Abschluss des zweiten Kapitels.

Die Grundlage des dritten Kapitel bildet die Annahme, dass sich Investoren für das Verfolgen einer bestimmten Strategie nicht beliebig verschulden können oder dürfen. In diesem Fall muss entweder die Handlungsvorschrift der CPPI angepasst werden oder eine Anpassung der Garantie erfolgen. Die beiden resultieren Strategien werden als beschränkte CPPI bzw. als CPPI mit Floor-Anpassung bezeichnet. Neben der Bestimmung der Risikomaße wird der Fokus auf der Beschreibung der aus den Modifikationen folgenden Pfadabhängigkeit liegen. Auf den Schlusskurs der Aktie bedingte Verteilungen werden es uns ermöglichen die Auszahlung der modifizierten CPPI-Strategien direkt mit dem Auszahlungsprofil der OBPI zu vergleichen und Unterschiede und Gemeinsamkeiten zu bestimmen. Hierbei wird insbesondere auf die Wahl der Parameter, die die Strategie bestimmen, eingegangen und es werden Überlegungen vertieft, die eine möglichst optimale Wahl ermöglichen.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich zunächst wiederum mit der unbeschränkten CPPI. Gegenstand der Untersuchung ist die Frage, inwieweit eine diskrete Anwendung der Handlungsvorschrift Einfluss auf die Eigenschaften der CPPI besitzt und welche Probleme beachtet werden müssen. Wesentlicher Punkt ist dabei, dass zeitdiskreter Handel zu festen Zeitpunkten die eigentliche Idee der Wertsicherung verletzt. In einem fixen zeitdiskreten Rahmen ist es nicht mehr möglich bei gleichzeitig hoher Partizipation an Kursgewinnen der Aktie auch die Garantie mit Sicherheit einzuhalten. Die weiteren Untersuchungen basieren auf Risikomaßen, die diesen möglicherweise auftretenden absoluten Verlust charakterisieren. Daraus leiten wir Bedingungen an die Anzahl der Handelszeitpunkte und die Größe des Multipliers ab. Eine alternative Form der Diskretisierung kann aus der Interpretation der einfachen CPPI als Power-Kontrakt erzielt werden. Analog zur Diskretisierung von Optionen kann der sich ergebende Delta-Hedge in diskreter Zeit als Handlungsvorschrift verwendet werden. Wir werden die beiden Diskretisierungen auf ihr Konvergenzverhalten untersuchen und miteinander vergleichen. Abschließend wird auf die Überlegungen zur beschränkten CPPI zurückgegriffen und das Verlustrisiko dieser in einem diskreten Rahmen diskutiert.

Kapitel 1 - Ökonomische und Mathematische Grundlagen und erste Strategien

Dieses Kapitel soll sowohl die ökonomischen als auch die mathematischen Grundlagen der folgenden Kapitel bilden. Wir beschreiben zunächst den Modellrahmen in dem sich diese Arbeit bewegt. Es handelt sich hierbei um die Annahmen des klassischen Black-Scholes-Modells, das von stetigen Aktienkursen mit normalverteilten Renditen ausgeht. Für die Charakterisierung und den Vergleich der Strategien ist es notwendig festzulegen, durch welche Risiko- und Performance-Maße sie beschrieben werden sollen. Dazu stellen wir zum einen die klassischen Risikomaße der Portfolio-Theorie vor und auch Risikomaße, die speziell für die hier betrachteten Strategien mit Mindestgarantien von Bedeutung sind.

Im Rahmen des Black-Scholes-Modell wird der Aktienkurs durch eine geometrische Brownsche Bewegung modelliert. Da die später folgenden Strategie üblicherweise vom Pfad des Aktienkurses abhängig sein werden, benötigen wir für die Bestimmung der Verteilungseigenschaften der Strategien die Verteilungseigenschaften des Pfades des Aktienkurses und somit das Pfadverhalten der Brownschen Bewegung. Die notwendigen Grundlagen werden in Abschnitt 1.3 erzielt.

Während der Fokus dieser Arbeit in der Diskussion proportionaler Wertsicherungsstrategien liegt, werden in Abschnitt 1.4 zwei alternative Strategien vorgestellt, um diese später als Vergleich heranziehen zu können. Dabei handelt es sich zum einen um die optionsbasierenden Strategien, welche in diesem Modellrahmen durch eine dynamische Anlage beschrieben werden, und zum anderen um die Stop-Loss-Strategie, welche sich durch eine (semi-) statische Anlage beschreiben lässt. Insbesondere soll anhand dieser beiden Klassen eine erste Motivation für die betrachteten Risikomaße erfolgen.

1.1 Modell

Im Folgenden wird ein stetiges Finanzmarktmodell angenommen, das durch die Annahmen von Black und Scholes (1973) beschrieben wird. Der Finanzmarkt besteht aus zwei Anlagemöglichkeiten. Einer festverzinslichen, risikolosen Anlage B und einem risikobehafteten Wertpapier S . Die Anlage B wird durch die (gewöhnliche) Differentialgleichung

$$dB_t = B_t r dt$$

beschrieben, wobei r den risikolosen Zins bezeichnet. Setzen wir $B_0 = 1$, ergibt sich $B_t = e^{rt}$. Die risikobehaftete Anlage wird durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \quad (1.1.1)$$

beschrieben, wobei μ den Drift, σ die Volatilität der Aktie und W_t eine Brownsche Bewegung bezeichnen. Die Lösung der Differentialgleichung ist durch $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ gegeben. Insbesondere besitzt der Prozess (S_t) damit die folgenden Eigenschaften:

- Die Preispfade sind stetig.
- Die Preispfade besitzen unabhängige Zuwächse.
- Die relativen Zuwächse sind stationär.
- Die Verteilung ist lognormal.

Dieses Modell ist arbitragefrei und vollständig, so dass ein eindeutiges Martingalmaß existiert, unter dem sich Preise für Derivate bestimmen lassen. Das Ziel dieser Arbeit ist es jedoch nicht Bewertungen unter dem Martingalmaß vorzunehmen, sondern die tatsächlichen Verteilungen der Endwerte verschiedener Strategien und der daraus resultierenden Kennzahlen zu betrachten. In diesem Sinne wird, im Gegensatz zu den Ansätzen der Optionsbewertung, der tatsächliche Drift μ und nicht der risikolosen Zins r in Gleichung 1.1.1 verwendet.

Im Folgenden bezeichnen $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \phi(y) dy$ und $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ die Verteilungsfunktion bzw. Dichte der Normalverteilung. Für den Wert der Aktie zum Zeitpunkt t gilt somit:

$$P[S_t \leq s] = \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{s}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

bzw.

$$P[S_t \in ds] = \frac{1}{s\sigma\sqrt{t}} \phi\left(\frac{\ln \frac{s}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) ds$$

1.2 Begriffe und Definitionen

1.2.1 Handelsstrategien

Das Anlageverhalten eines Investor lässt sich durch eine Handelsstrategie Φ beschreiben, die angibt, welche Anteile in die vorhandenen Anlagen investiert werden. Für den Rest der Arbeit beschränken wir uns aufgrund der Annahmen des Black-Scholes-Modell auf Anlagemöglichkeiten in Form eines risikobehafteten Wertpapiers S und einer risikolosen Anlage B .

Definition 1.2.1 Eine *Strategie* ist ein \mathbb{R}^2 -wertiger previsibler Prozess $\Phi = (\phi^0, \phi^1)$. ϕ_t^0 und ϕ_t^1 bezeichnen dabei die Anzahl der gehaltenen risikolosen bzw. risikobehafteten Wertpapiere. Der *Wert des Portfolios* V_t^Φ zur Zeit t ist durch

$$V_t^\Phi = \phi_t^0 B_t + \phi_t^1 S_t$$

gegeben.

Bemerkung: Analog lässt sich die Strategie durch den relativen Anteil am Portfolio-Wert, den man in die Anlagen investiert, definieren. Sei dazu $\Pi = (\pi^0, \pi^1)$ der stochastische Prozess der die Investitionsquote beschreibt. Es gilt $\pi_t^0 = \frac{B_t}{V_t} \phi_t^0$, $\pi_t^1 = \frac{S_t}{V_t} \phi_t^1$ und $\pi_t^0 + \pi_t^1 = 1$.

Allgemein können sich Änderungen des Portfoliowertes zum einen durch die Preisbewegungen der beiden Anlagen ergeben und zum anderen durch Einlagen in bzw. Entnahmen aus dem Portfolio. Die aus den Preisbewegungen resultierenden Erträge werden durch den Gewinnprozess beschrieben.

Definition 1.2.2 Der *Gewinnprozess* einer Strategie Φ ist definiert durch

$$g_t^\Phi = \int_0^t \phi_t^0 dB_t + \int_0^t \phi_t^1 dS_t \quad .$$

Werden Einlagen und Entnahmen ausgeschlossen spricht man von einer selbstfinanzierenden Strategie.

Definition 1.2.3 Eine *selbstfinanzierende Strategie* Φ ist eine Strategie, für die gilt:

$$V_t^\Phi = V_0^\Phi + g_t^\Phi$$

bzw. $dV_t^\Phi = \phi_t^0 dB_t + \phi_t^1 dS_t$.

Wird die Strategie durch die Investitionsquoten beschrieben, ergibt sich

$$dV_t^\Pi = V_t^\Pi \left((1 - \pi_t^1) \frac{dB_t}{B_t} + \pi_t^1 \frac{dS_t}{S_t} \right) .$$

Für die Beschreibung der hier betrachteten Wertsicherungsstrategien führen wir zwei weitere Begriffe ein, die direkt auf den Zusammenhang zwischen dem Wert und der gewünschten Sicherung eingehen.

Definition 1.2.4 Der *Cushion* oder *Risikopuffer* einer Strategie Φ , die aktuell einen Wert G_t^Φ garantiert, ist die Differenz zwischen dem aktuellen Wert der Strategie und der derzeitigen Garantie

$$C_t^\Phi = V_t^\Phi - G_t^\Phi$$

Der *Hebel (Multiplier, Gearing Faktor)* einer Wertsicherungsstrategie Φ gibt das Verhältnis zwischen dem in die risikobehaftete Anlage investierten Kapital und dem Cushion an.

$$m_t^\Phi = \frac{\phi_t^1 S_t}{C_t^\Phi}$$

Der in die risikobehaftete Anlage investierte Betrag $m_t^\Phi C_t^\Phi$ wird als *Exposure* bezeichnet.

Für konstante m spricht man von einer linearen oder **proportionalen Wertsicherungsstrategie** bzw. **Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)**.

Häufig ist die aktuelle Garantie durch den Barwert einer bestimmten Endgarantie G gegeben, d.h. $G_t = Ge^{-r(T-t)}$. In Anlehnung an die Theorie der Optionsbewertung sprechen wir von einer **europäischen Garantie**, da der Betrag G selbst nur am Laufzeitende garantiert ist. Im Gegensatz dazu ist eine **amerikanische Garantie** dadurch gekennzeichnet, dass die Garantie zu jedem Zeitpunkt während der Laufzeit gleich ist, d.h. $G_t = G$ für alle $t \in [0, T]$. Um beide Fälle zu unterscheiden, nennen wir G_t den **Floor** einer Wertsicherungsgarantie.

1.2.2 Maße zur Charakterisierung von Strategien

Neben der Verteilung werden das Verlustrisiko und das Gewinnpotential durch eine Vielzahl von unterschiedlichen Kennziffern beschrieben. In Abhängigkeit der betrachteten Größe und des Zeithorizonts lassen sie sich in verschiedene Kategorien einteilen, von denen wir einige im Verlauf der Arbeit betrachten wollen.

Zielgrößen-unabhängige Risikomaße

Maße, die geeignet sind, eine Handelsstrategie ohne zusätzliche Annahme einer Zielgröße wie die Mindestrendite oder den Mindestgewinn zu beschreiben, werden als Zielgrößen-unabhängig bezeichnet. Dazu gehören die üblichen deskriptiven Maße wie Erwartungswert,

Varianz, Schiefe und Kurtosis des Endwertes oder der Rendite. Allgemein gehören dazu alle Momente des Erwartungswert der Strategie. Generell gehört auch die Dichte und die Verteilung des Endwertes zu diesen Maßen.

Definition 1.2.5 Die *Rendite des Erwartungswertes* einer Strategie Φ ist definiert durch

$$Y_t^\Phi = \frac{\ln E[V_t^\Phi] - \ln V_0}{t}$$

Die *erwartete Rendite* ist definiert durch

$$y_t^\Phi = \frac{E[\ln V_t^\Phi] - \ln V_0}{t}$$

Als Maß für die Schwankung und damit des Risikos wird neben der Varianz die Volatilität verwendet, die im Black-Scholes-Modell als relative Standardabweichung pro Zeiteinheit, üblicherweise ein Jahr, definiert ist.

Definition 1.2.6 Die *Volatilität* einer Strategie Φ ist definiert durch

$$\tilde{\sigma}_t^\Phi = \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var}[\ln \frac{V_t^\Phi}{V_0}]}$$

Ausgehend von normalverteilten Renditen, lässt sich die Volatilität auch durch

$$\sigma_t^\Phi = \sqrt{\frac{1}{t} \ln \frac{E[(V_t^\Phi)^2]}{E[V_t^\Phi]^2}}$$

darstellen. In Anlehnung an die obige Definition bezeichnen wir σ_t^Φ als **Volatilität des Erwartungswertes** und werden diese Definition alternativ zur eigentlichen Definition der Volatilität verwenden, da die Berechnung häufig einfacher ist.

Beispiel: Direktinvestition in die Aktie

Wir betrachten die Direktinvestition in eine Aktie, d.h. $V_t^\Phi = S_t$. Als Rendite des Erwartungswert ergibt sich

$$\frac{1}{t} \ln \frac{E[S_t]}{S_0} = \mu$$

und als erwartete Rendite

$$\frac{1}{t} E[\ln \frac{S_t}{S_0}] = \mu - \frac{1}{2} \sigma^2$$

Zur Vergleichbarkeit mit der Rendite der Aktie ist also die Rendite des Erwartungswert geeigneter.

Für die Volatilität ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_t &= \sqrt{\frac{1}{t} \ln \frac{E[(V_t^\Phi)^2]}{(E[V_t^\Phi])^2}} = \sqrt{\frac{1}{t} \ln \frac{S_0^2 e^{2(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + 2\sigma^2 t}}{S_0^2 e^{2\mu t}}} \\ &= \tilde{\sigma}_t = \sqrt{\frac{1}{t} \text{Var}[\ln \frac{S_t}{S_0}]} \end{aligned}$$

Beide Definition sind also im Beispiel identisch. Allgemein sind beides Maße für die Schwankungen einer Strategie. Inwieweit sie auch als Risikomaße einer Strategie mit Mindestgarantie sinnvoll sind, werden wir im Abschnitt 1.4.2 und vor allem im Abschnitt 3.3 behandeln.

Ende Beispiel: Direktinvestition in die Aktie

Risikoadjustierte Performance-Maße

Wird als Vergleichsgröße der risikolose Zinssatz gewählt, ergeben sich die Standardmaße der Portfoliotheorie wie die Überrendite und das Sharpe-Ratio. Im Gegensatz zur üblichen Definition im Rahmen des Capital Asset Pricing Model beschreiben wir das Schwankungsrisiko nicht durch die Volatilität als relative Standardabweichung pro Zeiteinheit, sondern durch die Volatilität des Erwartungswertes.

Definition 1.2.7 Die *Überrendite* einer Strategie ist durch

$$y_t^\Phi - r$$

gegeben, wobei r die Rendite der risikolosen Anlage angibt. Der *Marktpreis des Risikos* bzw. das *Sharpe-Ratio* lautet

$$\frac{y_t^\Phi - r}{\sigma_t^\Phi}$$

Das primäre Risiko einer Wertsicherungsstrategie besteht darin, dass das eigentliche Ziel, die Erzielung eines Mindestbetrages, nicht erreicht wird, d.h., dass die Wertsicherung nicht erfolgt. In diesem Falle sprechen wir von einem Ausfall oder Shortfall.

Definition 1.2.8 Das *Ausfallrisiko (Shortfall-Risiko, Gap-Risiko)* einer Strategie Φ besteht aus der Wahrscheinlichkeit, dass die gewünschte Absicherung nicht erzielt wird:

$$P[V_t^\Phi < G_t]$$

Das Shortfall-Risiko ist im Sinne von Artzner et al. (1999) nicht sub-additiv und somit kein kohärentes Risikomaß. Im Gegensatz dazu ist der erwartete Verlust, der die Grundlage der nächsten Definition bildet, kohärent.

Definition 1.2.9 Der *erwartete Verlust* einer Strategie Φ ist definiert durch

$$E[(G_t - V_t^\Phi)^+] \quad .$$

Der *bedingte erwarteter Verlust* einer Strategie Φ ist definiert durch

$$E[G_t - V_t^\Phi | V_t^\Phi \leq G_t] \quad .$$

Die beiden obigen Definitionen werden häufig auch als Lower Partial Moments der Ordnung Null und Ordnung Eins bezüglich der Zielgröße Mindestgarantie bezeichnet.

Insbesondere bezüglich des diskreten Handels wird der Fokus auf dem Gap-Risiko und dem bedingten Verlust liegen. Im Falle des stetigen Handels liegt (im angenommenen Modell) üblicherweise kein Gap-Risiko vor. Neben der Sicherung der Garantie ist jedoch des Weiteren von Interesse, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, einen höheren Gewinn als die risikolose Anlage zu erzielen, das Lower Partial Moment der Ordnung Null bezüglich der Zielgröße risikolose Verzinsung.

Definition 1.2.10 Die *relative Gewinnwahrscheinlichkeit* einer Strategie Φ bestimmt sich aus

$$P[V_t^\Phi \geq V_0 e^{rt}]$$

Entsprechend definiert sich die **relative Verlustwahrscheinlichkeit**.

langfristige Risikomaße

In der Praxis besitzen Produkte wie Investmentfonds und die damit verbundenen Strategien häufig keinen festen Anlagehorizont. In diesem Fall stellt sich die Frage, welches langfristige Verhalten beobachtet wird. Wir unterscheiden hier zwei Risikomaße.

Definition 1.2.11 Die *langfristige Rendite* (des Erwartungswerts) ist durch

$$y_\infty^\Phi = \lim_{t \rightarrow \infty} y_t^\Phi$$

gegeben.

Der Wert einer Handelsstrategie, deren Garantie mit dem risikolosen Zins wächst, wird zwangsläufig gegen unendlich konvergieren. Um trotzdem etwas über die Grenzverteilung aussagen zu können, betrachten wir die Verteilung des diskontierten Endwertes.

Definition 1.2.12 Die *langfristige Verteilung des diskontierten Endwertes* ist durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[V_t^\Phi e^{-rt} \leq v]$$

gegeben.

Als Spezialfall ergibt sich hier die langfristige relative Verlust- bzw. Gewinnwahrscheinlichkeit.

Beschreibung der Investitionsquote

Wie bereits erwähnt beziehen sich die hier betrachteten Strategien auf ein spezielles risikobehaftetes Wertpapier. In diesem Sinne ist es somit von Interesse ob und inwieweit die Strategie von Kurszuwachsen der Aktie profitiert. Ist die Strategie nur abhängig vom Endwert der zugrunde liegenden Anlage, sind die folgenden Definitionen von Interesse.

Definition 1.2.13 Die *Partizipationsrate* $p^\Phi(S)$ einer Strategie gibt an, in welchem Verhältnis der Endwert einer Strategie relativ zu den Veränderungen der Aktie wächst,

$$p^\Phi(S) = \frac{\partial}{\partial S} V_T^\Phi(S) .$$

Das *Partizipationslevel* L^Φ gibt an, für welchen Wert der Aktie die Partizipationsrate erstmalig positiv¹ ist,

$$L^\Phi = \inf \{ S \geq 0 \mid p^\Phi(S) > 0 \} .$$

Ist die Strategie vom Verlauf der Entwicklung der zugrunde liegenden Anlage abhängig, reichen die obigen Definitionen nicht aus. Im Falle pfadabhängiger Strategien ergibt sich eine zusätzliche Unsicherheit über die Auszahlung aus dem Kursverlauf der Aktie. Bei der in Abschnitt 1.4.1 betrachteten Stop-Loss-Strategie reicht es z.B. aus, dass der Kurs während der gesamten Laufzeit einmalig die Schranke unterschreitet, um keinerlei Partizipation mehr an zukünftigen Zuwachsen zu erhalten. Als ein Maß für die Pfadabhängigkeit betrachten wir deswegen in den folgenden Kapiteln die **bedingte Verteilung des Endwertes** der Strategie gegeben den Endwert der Aktie $P[V_T^\Phi \in dv \mid S_T = s]$.

Eng verknüpft mit der Pfadabhängigkeit ist die Investitionsquote einer Strategie, die nun thematisiert werden soll. Aus praktischer Sicht ist es offenkundig von besonderem Interesse, dass eine hohe Beteiligung an der risikobehafteten Anlage gewährleistet wird, um auch tatsächlich von der Überrendite der Aktie zu profitieren. Somit ist es zunächst von Interesse, ob die Investitionsquote unterhalb eines bestimmten Wertes sinkt.

Definition 1.2.14 Wir bezeichnen eine Strategie als **cash-dominiert**, falls die Investitionsquote in der risikobehafteten Anlage unter den Wert $\alpha \in [0, 1]$ sinkt.

Während sich zwischenzeitliche Kursschwankungen nicht ausschließen lassen, scheint es wichtiger, dass die Strategie die Möglichkeit besitzt, sich wieder von niedrigen Werten erholen kann. Dies soll daran gemessen werden, ob eine hinreichend große Investitionsquote wieder erreicht werden kann, nachdem diese zuvor unter ein bestimmtes Niveau gefallen ist.

¹Die Definition ist in dem Sinne zu verstehen, dass der Investor von Kurszuwachsen profitieren möchte. Bei Leerverkäufen der Aktie würde z.B. die Umkehrung sinnvoll sein.

Definition 1.2.15 Der $\alpha - \beta$ - *Cash-Lock in der Periode* $[t, T]$ bezeichnet das Ereignis, dass die Investitionsquote der Strategie zum Zeitpunkt T höchstens β beträgt, unter der Bedingung, dass sie zum Zeitpunkt t gerade α betrug. Die **Wahrscheinlichkeit eines Cash-Locks** ist somit durch

$$P[\Pi_T^V \leq \beta | \Pi_t = \alpha]$$

gegeben.

Anhand einer naiven Handelsstrategie werden diese Begriffe im nächsten Beispiel erläutert.

Beispiel: naive Wertsicherungsstrategie

Unter der naiven Wertsicherungsstrategie verstehen wir, dass zu Beginn genau der Betrag in die risikolose Anlage investiert wird, der zur Sicherung der Garantie benötigt wird. Der verbleibende Cushion wird zur Investition in die risikobehaftete Anlage verwendet.

$$\phi_t^0 = G_t \text{ und } \phi_t^1 = \frac{C_t}{S_t}$$

Aus der Annahme der Selbstfinanzierung folgt

$$\phi_t^0 = G_0 \text{ und } \phi_t^1 = \frac{C_0}{S_0} \quad \forall t \in [0, T]$$

Es handelt sich hierbei offensichtlich um eine statische, lineare Strategie, deren Hebel gerade 1 beträgt. Aufgrund der Statik ist offensichtlich, dass die Strategie zum einen pfadunabhängig ist und zum anderen die Allokationsregel nicht von einem angenommenem Modell abhängig ist. Insbesondere ist damit unabhängig von einem speziellen Modell kein Gap-Risiko vorhanden. Für den Wertprozess der Strategie gilt

$$V_t = G_t + C_0 \frac{S_t}{S_0} \quad .$$

Die Risikomaße der Strategie lassen sich direkt aus dem Wertprozess ableiten:

- Die Verteilung folgt direkt aus der Verteilung der Aktie.
- Die Investitionsquote ist steigend bei steigenden Kursen und umgekehrt fallend bei fallenden Kursen. Es handelt sich also um eine pro-zyklische Strategie.
- Die Gewinnwahrscheinlichkeit entspricht der Gewinnwahrscheinlichkeit der Aktie.
- Es erfolgt nur eine geringe Partizipation in Höhe des Verhältnisses zwischen anfänglichem Cushion und Garantie. Das Partizipationslevel liegt bei 0, da jeder Aktienkurs größer als Null zu einem Überschuss gegenüber der Garantie führt.

- Die langfristige erwartete Rendite entspricht dem Maximum aus der Aktienrendite μ und dem risikolosem Zins r . Die langfristige Wahrscheinlichkeit die risikolose Anlage zu übertreffen ist 1, sofern $\mu > r + \frac{1}{2}\sigma^2$ und 0 sonst.

Ende Beispiel: naive Wertsicherungsstrategie

1.3 Mathematische Grundlagen

In diesem Abschnitt sollen einige Eigenschaften der Brownschen Bewegung beschrieben werden.

Zunächst befassen wir uns mit der gemeinsamen Verteilung der Brownschen Bewegung und ihrem Maximum bzw. Minimum. Diese Ergebnisse werden die Grundlage für die Diskussion der Stop-Loss-Strategie, den bedingten Verteilungseigenschaften der beschränkten CPPI und den Verteilungseigenschaften der CPPI mit Garantie-Anpassung bilden.

Der Abschnitt zur gemeinsamen Verteilung der Geometrischen Brownschen Bewegung und des arithmetischen Mittels der Geometrischen Brownschen Bewegung wird zur Bestimmung der Eigenschaften der CPPI mit konstanter Garantie benötigt. Dazu bestimmen wir in Anlehnung an Yor (1992) die Momente des Produktes der Geometrischen Brownschen Bewegung und ihres arithmetischen Mittels. Des Weiteren geben wir eine Integraldarstellung für die Verteilungsfunktion an.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich in Anlehnung an Karatzas und Shreve (1984) und Beneš et al. (1980) mit einer Brownschen Bewegung, die unterschiedlichen Drift auf der positiven und negativen Halbachse besitzt. Die zitierten Laplace-Transformationen werden hilfreich bei der Bestimmung der Verteilung und der Momente der beschränkten CPPI sein, wohingegen die Integraldarstellungen bei der Beschreibung der Pfadabhängigkeit von Nutzen sind.

1.3.1 Eigenschaften der Brownschen Bewegung und ihres Maximums

Der folgende Abschnitt beschreibt einige grundsätzliche Verteilungseigenschaften der Brownschen Bewegung und ihres Maximums, auf die im folgenden zurückgegriffen wird.

Es sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung und $(M_t)_{t \geq 0}$ der Prozess ihres laufenden Maximums, d.h. $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} W_s$. Ferner bezeichnen $\mathcal{N}(x)$ bzw. $\phi(x)$ die Verteilungsfunktion bzw. die Dichte der Standardnormalverteilung. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

Theorem 1.3.1 Für alle $t > 0$ und $a \leq b$ $b \geq 0$ gilt:

$$P[W_t \leq a, M_t \leq b] = \mathcal{N}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{a-2b}{\sqrt{t}}\right) \quad (1.3.1)$$

Beweis : Aus dem Reflektionsprinzip folgt:

$$P[W_t \leq a, M_t \geq b] = P[W_t \geq 2b - a] = 1 - \mathcal{N}\left(\frac{2b - a}{\sqrt{t}}\right)$$

und damit

$$\begin{aligned} P[W_t \leq a, M_t \leq b] &= P[W_t \leq a] - P[W_t \leq a, M_t \geq b] \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{a-2b}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

■

Als direkte Folge für $a = b$ ergibt sich

Korollar 1.3.2 Für das Maximum einer Brownschen Bewegung gilt:

$$P[M_t \leq b] = \mathcal{N}\left(\frac{b}{\sqrt{t}}\right) - \mathcal{N}\left(\frac{-b}{\sqrt{t}}\right) \quad (1.3.2)$$

Die Anwendung der Girsanov-Transformation auf Theorem 1.3.1 liefert die folgende Eigenschaft für die Brownsche Bewegung mit Drift. Sei dazu $(W_t^\mu)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Drift μ

Theorem 1.3.3 Für alle $t > 0$ und $a \leq b$ und $b \geq 0$ gilt:

$$P[W_t^\mu \leq a, M_t^\mu \leq b] = \mathcal{N}\left(\frac{a - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu b} \mathcal{N}\left(\frac{a - 2b - \mu t}{\sqrt{t}}\right)$$

Beweis : Durch

$$\frac{dQ}{dP} = \varepsilon(\mu W_t)$$

sei ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß

$$Q(A) := E\left[\mathbb{1}_A \frac{dQ}{dP}\right]$$

für alle Ereignisse $A \in \mathcal{F}_\infty$ definiert, wobei ε das stochastische Exponential $\varepsilon(X)_t := e^{X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t}$ bezeichnet. Nach dem Girsanov-Theorem und Lévy's Charakterisierung der Brownschen Bewegung ist

$$W_t - \langle W_t, \mu W_t \rangle = W_t - \mu t$$

eine Brownsche Bewegung unter Q . Bezeichnen wir mit $T_b := \inf\{t > 0 : W_t = b\}$ den ersten Zeitpunkt, zu dem die Brownsche Bewegung den Wert b annimmt (man beachte, dass $\{T_b > t\} = \{M_t < b\}$ P-fs. gilt), so erhält man

$$\begin{aligned} P[W_t^\mu \leq a, M_t^\mu \leq b] &= Q[W_t \leq a, T_b > t] \\ &= E^P\left[\mathbb{1}_{\{W_t \leq a, T_b > t\}} e^{\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t}\right]. \end{aligned}$$

Durch Differenzieren von 1.3.1 nach a ergibt sich

$$\begin{aligned} P[W_t^\mu \leq a, M_t^\mu \leq b] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^a \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{t}} - e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2b)^2}{t}} \right) e^{\mu x - \frac{1}{2}\mu^2 t} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^a \left(e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu t)^2}{t}} - e^{2b\mu} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-2b-\mu t)^2}{t}} \right) dx \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{a - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu b} \mathcal{N}\left(\frac{a - 2b - \mu t}{\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

■

Für das Maximum einer Brownschen Bewegung mit Drift gilt analog zu 1.3.2

$$P[M_t^\mu \leq b] = \mathcal{N}\left(\frac{b - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\mu b} \mathcal{N}\left(\frac{-b - \mu t}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.3.3)$$

Insbesondere folgt

$$\begin{aligned} P[W_t > \alpha + \beta t \text{ für irgendein } t > 0] &= \lim_{t \rightarrow \infty} P[M_t^{-\beta} \geq \alpha] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 1 - \mathcal{N}\left(\frac{\alpha + \beta t}{\sqrt{t}}\right) + e^{-2\beta\alpha} \mathcal{N}\left(\frac{-\alpha + \beta t}{\sqrt{t}}\right) \\ &= \begin{cases} 1 & \beta \leq 0 \\ e^{-2\beta\alpha} & \text{falls } \beta > 0 \end{cases}. \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Durch das Ausnutzen der Unabhängigkeit der Zuwächse der Brownschen Bewegung lässt sich die obige Formel für $\mu > 0$ folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned} P[W_t > \alpha + \beta t \text{ für } t > s | W_s = \gamma] &= P[W_t - W_s > \alpha + \beta(t - s) + \beta s \text{ für } t > s | W_0 = \gamma] \\ &= P[W_{t-s} > \alpha + \beta(t - s) + \beta s - \gamma \text{ für } t - s > 0] \\ &= e^{-2\beta(\alpha + \beta s - \gamma)} \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Dies bildet die Grundlage für das folgende Korollar.

Korollar 1.3.4 *Für das Maximum der auf den Endwert konditionierten Brownschen Bewegung gilt*

$$P[M_T \geq \beta | W_T = \alpha] = e^{-\frac{2\beta(\beta - \alpha)}{T}} \quad .$$

Dies gilt ebenfalls, wenn man zusätzlich für die Brownsche Bewegung einen Drift unterstellt

$$P[M_T^\mu \geq \beta | W_T^\mu = \alpha] = e^{-\frac{2\beta(\beta - \alpha)}{T}} \quad . \quad (1.3.6)$$

Beweis : Es ist allgemein bekannt, dass, falls $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist, der zeit-invertierte Prozess

$$Y_t = \begin{cases} tW_{\frac{1}{t}} & 0 < t < \infty \\ 0 & \text{falls } t = 0 \end{cases}$$

ebenfalls eine Brownsche Bewegung ist (vgl. z.B. Karatzas und Shreve (1991, Lemma 2.9.4)). Angewandt auf Gleichung 1.3.5 ergibt das

$$\begin{aligned} e^{-2\beta(\beta s - \tilde{\alpha})} &= P[W_t \geq \beta t \text{ für } t > s | W_s = \tilde{\alpha}] \\ &= P[tW_{\frac{1}{t}} \geq \beta t \text{ für } t > s | sW_{\frac{1}{s}} = \tilde{\alpha}] \\ &= P[W_{\frac{1}{t}} \geq \beta \text{ für } \frac{1}{t} < T | W_T = \tilde{\alpha}T] \quad \text{mit } T := \frac{1}{s} \\ &= P[M_T \geq \beta | W_T = \alpha] \quad \text{mit } \alpha = \tilde{\alpha}T \end{aligned}$$

also

$$P[M_T \geq \beta | W_T = \alpha] = e^{-2\beta \frac{\beta - \alpha}{T}} \quad .$$

Für den zweiten Teil benötigen wir, dass die auf den Endwert konditionierte Brownsche Bewegung einer Brownschen Brücke $(B_t^{0 \rightarrow \alpha})_{0 \leq t \leq T}$ entspricht (vgl. Karatzas und Shreve (1991, Kapitel 5.6.B)). Die Brownsche Brücke lässt sich darstellen als

$$B_t^{0 \rightarrow \alpha} = W_t + \frac{t}{T}\alpha - \frac{t}{T}W_T \quad .$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
P\left[\max_{0 \leq t \leq T} W_t \geq \beta \mid W_T = \alpha + \mu T\right] &= P\left[\max_{0 \leq t \leq T} B_t^{0 \rightarrow \alpha + \mu T} \geq \beta\right] \\
&= P\left[\max_{0 \leq t \leq T} \left\{W_t + \frac{t}{T}(\alpha + \mu T) - \frac{t}{T}W_T\right\} \geq \beta\right] \\
&= P\left[\max_{0 \leq t \leq T} \left\{W_t + \frac{t}{T}\alpha - \frac{t}{T}W_T\right\} \geq \beta - \mu t\right] \\
&= P\left[\max_{0 \leq t \leq T} W_t \geq \beta - \mu t \mid W_T = \alpha\right] \\
&= P\left[M_t^\mu \geq \beta \mid W_T = \alpha\right] \quad .
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt

$$\begin{aligned}
&P\left[M_T^\mu \geq \beta \mid W_T^\mu = \alpha\right] \\
&= P\left[M_T^\mu \geq \beta \mid W_T = \alpha - \mu T\right] \\
&= P\left[M_T \geq \beta \mid W_T = \alpha\right] \quad .
\end{aligned}$$

■

Die obigen Formel lassen sich analog auch für das Minimum $(m_t)_{t \geq 0}$ der Brownschen Bewegung mit Drift, $m_t^\mu := \min_{0 \leq s \leq t} W_s^\mu$, und den Endwert bestimmen. Insbesondere folgt aus der Symmetrie der Brownschen Bewegung

$$(W_t^\mu, m_t^\mu) \stackrel{d}{=} (-W_t^{-\mu}, -M_t^{-\mu})$$

und somit für $a > b$ und $b < 0$

$$\begin{aligned}
P[W_t^\mu \leq a, m_t^\mu \geq b] &= P[W_t^{-\mu} \geq -a, M_t^{-\mu} \leq -b] \\
&= P[M_t^{-\mu} \leq -b] - P[W_t^{-\mu} \leq -a, M_t^{-\mu} \leq -b] \quad (1.3.7)
\end{aligned}$$

Weiterhin lässt sich auch direkt die Verteilung der Differenz zwischen dem Maximum und dem Endwert einer Brownschen Bewegung bestimmen. Man beachte, dass das Ergebnis ohne Drift der Brownschen Bewegung wiederum direkt aus dem Reflektionsprinzip abgeleitet werden könnte.

Korollar 1.3.5 *Für die Differenz des Maximums und des Endwertes einer Brownschen Bewegung mit Drift, $(M_t^\mu - W_t^\mu)$, gilt*

$$P[M_t^\mu - W_t^\mu \leq b] = \mathcal{N}\left(\frac{b + \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2b\mu} \mathcal{N}\left(\frac{-b + \mu t}{\sqrt{t}}\right) \quad (1.3.8)$$

für $b \geq 0$.

Beweis : Mit $M_t^\mu \geq 0$ folgt:

$$\begin{aligned} P[M_t^\mu - W_t^\mu \leq b] &= \int_{-\infty}^{\infty} P[M_t^\mu - W_t^\mu \leq b | W_t^\mu = x] \cdot P[W_t^\mu \in dx] \\ &= \int_{-b}^{\infty} P[M_t^\mu \leq b + x | W_t^\mu = x] \cdot P[W_t^\mu \in dx] \end{aligned}$$

Einsetzen der Dichte für die Brownsche Bewegung und Verwenden von Korollar 1.3.4 ergibt

$$\begin{aligned} &= \int_{-b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(1 - e^{-\frac{2(b+x)b}{t}}\right) e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu t)^2}{t}} dx \\ &= 1 - \mathcal{N}\left(\frac{-b - \mu t}{\sqrt{t}}\right) - \int_{-b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu t)^2 + 4b^2 + 4xb}{t}} dx \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{b + \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2b\mu} \int_{-a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu t + 2b)^2}{t}} dx \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{b + \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2b\mu} \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{-b - \mu t + 2b}{\sqrt{t}}\right)\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{b + \mu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{-2b\mu} \mathcal{N}\left(\frac{-b + \mu t}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

■

Zur Vollständigkeit betrachten wir nun die Dichte der ersten Treffzeit $T_b^\mu := \inf_{t \geq 0} \{W_t + \mu t = b\}$, welche sich aus den Formeln für das Maximum bzw. Minimum durch die Beziehungen $P[T_b^\mu \leq t] = P[M_t^\mu \geq b]$ für $b > 0$ bzw. $P[T_b^\mu \leq t] = P[m_t^\mu \leq b]$ für $b < 0$ und Differenzieren ergibt:

Korollar 1.3.6 Die Dichte der ersten Treffzeit ist für alle $b \in \mathbb{R}$ durch

$$P[T_b^\mu \in dt] = \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-\mu t)^2}{t}} dt$$

bestimmt.

1.3.2 Eigenschaften des Integrals der Geometrischen Brownschen Bewegung

Wir betrachten das kontinuierliche, arithmetische Mittel einer geometrischen Brownschen Bewegung $(W_t)_{t \geq 0}$ mit konstantem Drift θ .²

$$A_t = \int_0^t e^{\theta s + \sigma W_s} ds$$

Als Integral über lognormalverteilte Zufallsvariablen ist die Verteilung nicht in geschlossener Form darstellbar. Es lassen sich jedoch die Momente berechnen und eine Integraldarstellung für die auf den Endwert der Brownschen Bewegung bedingte Verteilung angeben.

Theorem 1.3.7 Sei $\varsigma \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die folgenden Aussagen

1. Für $\alpha > \max \left\{ \frac{\varsigma^2}{2}, \frac{(\varsigma+n)^2}{2} \right\}$ gilt

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} E \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{\varsigma W_t} \right] dt = \frac{n!}{\prod_{j=0}^n \left(\alpha - \frac{(\varsigma+j)^2}{2} \right)} . \quad (1.3.9)$$

2. Für $t \geq 0$ gilt

$$E \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{\varsigma W_t} \right] = n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma)} e^{\frac{1}{2}(\varsigma+j)^2 t} . \quad (1.3.10)$$

$$\text{mit } c_j^{(\varsigma)} = \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq n}} \frac{2}{(\varsigma+j)^2 - (\varsigma+k)^2}$$

Beweis : 1. Wir definieren zunächst

$$\begin{aligned} \Phi_{n,t}(\varsigma) &= E \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{\varsigma W_t} \right] \\ &= n! E \left[\int_0^t \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-1}} e^{W_{s_1} + W_{s_2} + \dots + W_{s_n} + \varsigma W_t} ds_n \dots ds_1 \right] . \end{aligned}$$

Ausnutzen der Unabhängigkeit der Zuwächse einer Brownschen Bewegung liefert

$$\begin{aligned} &E \left[e^{W_{s_1} + W_{s_2} + \dots + W_{s_n} + \varsigma W_t} \right] \\ &= E \left[e^{\varsigma(W_t - W_{s_1}) + (\varsigma+1)(W_{s_1} - W_{s_2}) + \dots + (\varsigma+n-1)(W_{s_{n-1}} - W_{s_n}) + (\varsigma+n)W_{s_n}} \right] \\ &= e^{\frac{1}{2}(\varsigma^2(t-s_1) + (\varsigma+1)^2(s_1-s_2) + \dots + (\varsigma+n-1)^2(s_{n-1}-s_n) + (\varsigma+n)^2 s_n)} \end{aligned}$$

²Die Resultate und Beweise entsprechen denen in Yor (1992) Im Wesentlichen wurde hier die Notation angepasst. Für die Momente haben wir die Resultate dahingehend verallgemeinert, dass kein positiver Drift vorausgesetzt werden muss.

und somit durch Vertauschen von Erwartungswert und Integration

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-\alpha t} \Phi_{n,t}(\varsigma) dt \\ &= n! \int_0^\infty e^{-\alpha t} \int_0^t \int_0^{s_1} \\ & \quad \dots \int_0^{s_{n-1}} e^{\frac{1}{2}(\varsigma^2(t-s_1) + (\varsigma+1)^2(s_1-s_2) + \dots + (\varsigma+n-1)^2(s_{n-1}-s_n) + (\varsigma+n)^2 s_n)} ds_n \dots ds_1 dt \end{aligned}$$

und Vertauschen der Integrationsreihenfolge

$$= n! \int_0^\infty e^{-(\alpha - \frac{(\varsigma+n)^2}{2})s_n} \int_{s_n}^\infty e^{-(\alpha - \frac{(\varsigma+n-1)^2}{2})(s_{n-1}-s_n)} \dots \int_{s_1}^\infty e^{-(\alpha - \frac{\varsigma^2}{2})(t-s_1)} dt \dots ds_{n-1} ds_n$$

Mit $\alpha > \max \left\{ \frac{\varsigma^2}{2}, \frac{(\varsigma+n)^2}{2} \right\}$ sind die uneigentlichen Integrale jeweils wohldefiniert und es ergibt sich Gleichung 1.3.9.

2. Die Partialbruchzerlegung³ der rechten Seite in Gleichung 1.3.9 liefert

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^n \left(\alpha - \frac{(\varsigma+j)^2}{2} \right)} = \sum_{j=0}^n \frac{c_j^{(\varsigma)}}{\alpha - \frac{(\varsigma+j)^2}{2}}$$

mit $c_j^{(\varsigma)}$ aus dem Theorem. Somit gilt für alle α , die die Bedingung aus dem Theorem erfüllen

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t} \Phi_{n,t}(\varsigma) dt = n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma)} \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{\frac{(\varsigma+j)^2}{2} t} dt$$

und somit

$$\Phi_{n,t}(\varsigma) = n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma)} e^{\frac{(\varsigma+j)^2}{2} t} .$$

Also Gleichung 1.3.10. ■

Eine einfache Anwendung des Girsanov-Theorem liefert folgendes Korollar:

Korollar 1.3.8 Für $\theta \in \mathbb{R}$ gilt:

$$E \left[\left(\int_0^t e^{\theta s + W_s} ds \right)^n e^{\varsigma(\theta t + W_t)} \right] = n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma+\theta)} e^{(\theta + \frac{1}{2}(\varsigma+j))(\varsigma+j)t} . \quad (1.3.11)$$

³Wie sich durch Induktion leicht zeigen lässt, gilt für eine beliebige Folge $(c_j)_{j=0, \dots, n}$ und $x \in \mathbb{R}$, $x \neq c_j \forall j$:

$$\prod_{j=0}^n \frac{1}{x + c_j} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{x + c_j} \prod_{k \neq j} \frac{1}{c_k - c_j}$$

Beweis : Das äquivalente Maß Q sei durch die Radon-Nikodym-Dichte

$$\frac{dQ}{dP} = e^{\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t}$$

definiert. Unter diesem Maß ist $W_t - \theta t$ eine Brownsche Bewegung und somit

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^t e^{\theta s + W_s} ds \right)^n e^{\varsigma(\theta t + W_t)} \right] &= E^Q \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{\varsigma W_t} \right] \\ &= E \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{\varsigma W_t} \frac{dQ}{dP} \right] \\ &= E \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{\varsigma W_t} e^{\theta W_t - \frac{1}{2}\theta^2 t} \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t} E \left[\left(\int_0^t e^{W_s} ds \right)^n e^{(\varsigma + \theta)W_t} \right] \end{aligned}$$

Mit Theorem 1.3.7 und Ersetzen von ς durch $(\varsigma + \theta)$ folgt

$$\begin{aligned} &= e^{-\frac{1}{2}\theta^2 t} n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma + \theta)} e^{\frac{1}{2}(\varsigma + \theta + j)^2 t} \\ &= n! \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma + \theta)} e^{(\theta + \frac{\varsigma + j}{2})(\varsigma + j)t} \quad . \end{aligned}$$

■

Ein weitere Verallgemeinerung auf Prozesse mit beliebiger aber konstanter Volatilität liefert

Korollar 1.3.9 Für $\theta \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ gilt:

$$E \left[\left(\int_0^t e^{\theta s + \sigma W_s} ds \right)^n e^{\varsigma(\theta t + \sigma W_t)} \right] = \frac{n!}{\sigma^{2n}} \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma + \frac{\theta}{\sigma^2})} e^{(\theta + \frac{\sigma^2}{2}(\varsigma + j))(\varsigma + j)t} \quad . \quad (1.3.12)$$

Beweis : Ergibt sich direkt aus der Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung⁴, d.h.

$$\begin{aligned} E \left[\left(\int_0^t e^{\theta s + \sigma W_s} ds \right)^n e^{\varsigma(\theta t + \sigma W_t)} \right] &= E \left[\left(\int_0^t e^{\theta s + W_{\sigma^2 s}} ds \right)^n e^{\varsigma(\theta t + W_{\sigma^2 t})} \right] \\ &= E \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\sigma^2 t} e^{\frac{\theta}{\sigma^2} s + W_s} ds \right)^n e^{\varsigma(\theta t + W_{\sigma^2 t})} \right] \end{aligned}$$

und mit $\tilde{t} := \sigma^2 t$

$$= E \left[\left(\frac{1}{\sigma^2} \int_0^{\tilde{t}} e^{\frac{\theta}{\sigma^2} s + W_s} ds \right)^n e^{\varsigma(\frac{\theta}{\sigma^2} \tilde{t} + W_{\tilde{t}})} \right]$$

⁴Skalierungseigenschaft: Falls $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung ist, so ist auch $(\frac{1}{\sqrt{c}} W_{c \cdot t})_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung, vgl. Karatzas und Shreve (1991, Lemma 2.9.4).

Aus Gleichung 1.3.11 folgt

$$= \frac{n!}{\sigma^{2n}} \sum_{j=0}^n c_j^{(\varsigma + \frac{\theta}{\sigma^2})} e^{(\frac{\theta}{\sigma^2} + \frac{1}{2}(\varsigma+j))(\varsigma+j)\tilde{t}}$$

Einsetzen der Definition von \tilde{t} ergibt die Behauptung. ■

Als zweiten Punkt neben den Momenten soll abschließend die Verteilung von

$$\int_0^t e^{2(\theta s + W_s)} ds$$

diskutiert werden. Wir beschränken uns auf die Darstellung der Ergebnisse und verweisen für die Herleitung auf Yor (1992, Abschnitt 6).

Proposition 1.3.1 Sei $a_t(x, u) du := P \left[\int_0^t e^{2W_s} ds \in du \mid W_t = x \right]$, d.h. $a_t(x, u)$ beschreibt die bedingte Dichte des kontinuierlichen, arithmetischen Mittels. Dann gilt

$$a_t(x, u) = \frac{1}{u\pi} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{x^2 + \pi^2}{t} - \frac{(e^x - 1)^2}{u} \right)} \psi \left(\frac{e^x}{u}, t \right)$$

mit

$$\psi(r, t) = \int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2t}} e^{-r \cosh y} \sinh y \sin \frac{\pi y}{t} dy$$

Analog zu den Überlegungen von Korollar 1.3.4 aus dem letzten Abschnitt zum Maximum einer Brownschen Bewegung gilt die obige Aussage unabhängig von einem möglicherweise vorhandenem Drift.

Korollar 1.3.10 Es gilt:

$$P \left[\int_0^t e^{2(W_s + \theta s)} ds \in du \mid W_t + \theta t = x \right] = a_t(x, u) du$$

Beweis : Aus der Darstellung der Brownschen Brücke

$$B_s^{0 \rightarrow x} = W_s + \frac{s}{t}x - \frac{s}{t}W_t$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} P \left[\int_0^t e^{2(W_s + \theta s)} ds \in du \mid W_t = x - \theta t \right] &= P \left[\int_0^t e^{2(B_s^{0 \rightarrow (x - \theta t)} + \theta s)} ds \in du \right] \\ &= P \left[\int_0^t e^{2(W_s + \frac{s}{t}(x - \theta t) - \frac{s}{t}W_t + \theta s)} ds \in du \right] \\ &= P \left[\int_0^t e^{2(W_s + \frac{s}{t}x - \frac{s}{t}W_t)} ds \in du \right] \\ &= P \left[\int_0^t e^{2W_s} ds \in du \mid W_t = x \right] . \end{aligned}$$

■



Abbildung 1.1: Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift $\theta_0 > 0 > \theta_1$

1.3.3 Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift

Im folgenden Abschnitt werden die Verteilungseigenschaften einer Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift vorgestellt. Dabei handelt es sich um eine Brownsche Bewegung, welche, je nachdem ob sie sich im positiven oder negativen Bereich aufhält, einen unterschiedlichen Drift besitzt. Abbildung 1.1 stellt exemplarisch einen Pfad dieses stochastischen Prozesses dar. Eine Betrachtung findet sich erstmalig in Beneš et al. (1980), wo die Verteilung durch eine Laplace Transformation bestimmt wird. Im Gegensatz dazu finden sich bei Karatzas und Shreve (1984) Darstellungen als Doppel-Integral für die Dichte. Für die in dieser Arbeit betrachteten Probleme hat es sich als zweckmäßig erwiesen, dass für grundlegende Eigenschaften wie Verteilungsfunktion und Momente eine numerische Berechnung der inversen Laplace Transformation effizienter als die numerische Berechnung der auftretenden Integrale ist. Umgekehrt lassen sich jedoch, ausgehend von den Überlegungen von Karatzas und Shreve (1984), für die auf den Endwert bedingte Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift geschlossene Darstellungen bestimmen, so dass an dieser Stelle auf beide Ergebnisse eingegangen wird. Ausgehend von der Definition bestimmen wir zunächst eine schwache Lösung für die Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift.

Definition 1.3.1 *Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift, falls er die stochastische Differentialgleichung*

$$dX_t = \Theta(X_t)dt + dW_t \quad , \quad X_0 = x_0 \quad (1.3.13)$$

mit

$$\Theta(x) = \begin{cases} \theta_1 & x \leq 0 \\ \theta_0 & x > 0 \end{cases}$$

erfüllt. Dabei ist $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung mit Start in 0.

Als einfache Anwendung des Girsanov-Theorem ergibt sich

Lemma 1.3.11 Sei $(W_t)_{t \geq 0}$ eine Brownsche Bewegung bezüglich P , dann ist (W_t, Q) eine schwache Lösung der SDE 1.3.13, wobei Q durch den Dichte-Prozess bezüglich P

$$\left. \frac{dQ}{dP} \right|_t := \varepsilon \left(\int_0^t \Theta(W_u) dW_u \right) = \exp \left(\int_0^t \Theta(W_u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \Theta(W_u)^2 du \right) \quad (1.3.14)$$

definiert ist.

Beweis : Sei Q gemäß dem Lemma definiert. Nach Girsanov-Theorem ist

$$\begin{aligned} W_t - & \left\langle \int_0^t \Theta(W_u) dW_u, \int_0^t dW_u \right\rangle \\ = & W_t - \int_0^t \Theta(W_u) du \end{aligned}$$

eine Brownsche Bewegung unter Q . Insbesondere ist W_t somit eine schwache Lösung von 1.3.13 unter Q . ■

Lemma 1.3.12 Der in 1.3.14 definierte Dichte-Prozess lässt sich darstellen als

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left(W_t \cdot \Theta(W_t) - W_0 \cdot \Theta(W_0) + (\theta_1 - \theta_0) L_t - \frac{1}{2} \theta_1^2 t + \frac{1}{2} (\theta_1^2 - \theta_0^2) \Gamma_t \right)$$

dabei bezeichnet L_t die Lokalzeit in 0 und Γ_t die Aufenthaltsdauer in der positiven Halbachse bis t ⁵.

Beweis : Wir betrachten zunächst das erste Integral auf der rechten Seite in 1.3.14. Sei dazu die Funktion $F(z)$ definiert durch

$$F(z) := \int_0^z \Theta(y) dy = z\Theta(z)$$

Anwendung der Itô-Tanaka Formel (vgl. z.B. Revuz und Yor, 1998, chap. VI) und Beachtung der Sprungstelle von $\Theta(z)$ an der Stelle 0 ergibt

$$\begin{aligned} F(W_t) &= F(W_0) + \int_0^t F'(W_u) dW_u + \int_{-\infty}^{\infty} L_t^a F''(da) \\ &= F(W_0) + \int_0^t \Theta(W_u) dW_u + (\theta_0 - \theta_1) L_t \end{aligned}$$

oder anders ausgedrückt

$$\int_0^t \Theta(W_u) dW_u = W_t \cdot \Theta(W_t) - W_0 \cdot \Theta(W_0) + (\theta_1 - \theta_0) L_t \quad .$$

⁵Für die hier verwendete Definition der Lokalzeit vgl. Karatzas und Shreve (1991)

Das zweite Integral lässt sich folgt aufspalten

$$\begin{aligned} \int_0^t \Theta(W_u)^2 du &= \int_0^t \theta_1^2 \mathbb{1}_{\{W_u \leq 0\}} du + \int_0^t \theta_0^2 \mathbb{1}_{\{W_u > 0\}} du \\ &= \int_0^t \theta_1^2 (1 - \mathbb{1}_{\{W_u > 0\}}) du + \int_0^t \theta_0^2 \mathbb{1}_{\{W_u > 0\}} du \\ &= \theta_1^2 t + (\theta_0^2 - \theta_1^2) \Gamma_t \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die Behauptung. ■

Für die Herleitung der gemeinsamen Verteilung des Triplet (W_t, L_t, Γ_t) sei auf Karatzas und Shreve (1991, Kapitel 6) bzw. Karatzas und Shreve (1984) verwiesen. Wir geben an dieser Stelle nur das Ergebnis an.

Theorem 1.3.13 Die gemeinsame Verteilung (W_t, L_t, Γ_t) with $W_0 = x_0$ ist durch

$$\begin{aligned} P_{x_0}(W_t \in dx, L_t \in db, \Gamma_t^W \in d\tau) &= 2h(\tau, b + x_0^+ + x^+)h(t - \tau, b - x_0^- - x^-) \\ &=: p^{x_0, t}(x, b, \tau) d\tau db dx \end{aligned}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $h(s, y)$ die Dichtefunktion einer Invers-Gauß-verteiltern Zufallsvariable

$$h(s, y) = \frac{|y|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left[-\frac{y^2}{2s}\right] ds$$

und $x^+ := \max(x, 0)$, $x^- := \min(x, 0)$.

Falls $x_0 < 0$ und $x < 0$ (bzw. $x_0 > 0$ und $x > 0$) ergeben sich zusätzlich die folgenden Punktwahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P_{x_0}(W_t \in dx, L_t = 0, \Gamma_t^W = 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(x_0-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x_0+x)^2}{2t}} \right) dx \\ \left(P_{x_0}(W_t \in dx, L_t = 0, \Gamma_t^W = t) \right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(x_0-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x_0+x)^2}{2t}} \right) dx \end{aligned} .$$

Man beachte, dass die Punktwahrscheinlichkeiten das Ereignis „Brownsche Bewegung mit Start in x_0 besitzt nie den Wert 0“ beschreiben. Insgesamt ergibt sich

Korollar 1.3.14 Die Dichtefunktion für X_t ist gegeben durch

$$P(X_t \in dx, \Gamma_t^X \in d\tau) = e^{x \cdot \Theta(x) - x_0 \cdot \Theta(x_0) - \frac{1}{2} \theta_1^2 (t-\tau) - \frac{1}{2} \theta_0^2 \tau} F^{x_0, t, \theta_1 - \theta_0}(x, \tau) d\tau dx$$

und für $x_0, x > 0$ (für $x_0, x < 0$ ergibt sich $P(X_t \in dx, \Gamma_t^X = 0)$ analog)

$$P(X_t \in dx, \Gamma_t^X = t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(x_0-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x_0+x)^2}{2t}} \right) e^{\Theta(x) - \Theta(x_0) - \frac{1}{2} \Theta(x)^2 t} dx$$

wobei

$$F^{x_0, t, \theta_1 - \theta_0}(x, \tau) = \int_0^\infty \frac{(b - x^- - x_0^-)(b + x_0^+ + x^+)}{\pi \sqrt{\tau^3(t - \tau)^3}} e^{b(\theta_1 - \theta_0) - \frac{(b + x_0^+ + x^+)^2}{2\tau} - \frac{(b - x_0^- - x^-)^2}{2(t - \tau)}} db$$

Beweis : Mit Lemma 1.3.12 ergibt sich

$$\begin{aligned} P(X_t \in dx, \Gamma_t^X \in d\tau) &= Q(W_t \in dx, \Gamma_t^W \in d\tau) \\ &= E \left[\mathbb{1}_{\{W_t \in dx, \Gamma_t^W \in d\tau\}} \frac{dQ}{dP} \right] \end{aligned}$$

Zusammen mit Theorem 1.3.13

$$= e^{x\Theta(x) - x_0\Theta(x_0) - \frac{1}{2}\theta_1^2(t - \tau) - \frac{1}{2}\theta_0^2\tau} \underbrace{\int_0^\infty e^{(\theta_1 - \theta_0)b} p^{x_0, t}(x, b, \tau) db}_{=: F^{x_0, t, \theta_1 - \theta_0}(x, \tau)} d\tau dx$$

Die Punktwahrscheinlichkeiten ergeben sich entsprechend. ■

Die Ergebnisse von Karatzas und Shreve (1984) wurden dabei insofern erweitert, als dass wir mit A.1.4 eine geschlossene Darstellung für das Integral F besitzen. Zur Berechnung der Dichtefunktion von X_t ist es somit ausreichend das Integral über τ numerisch zu berechnen. Aufgrund der bekannten effizienten Algorithmen zur Bestimmung der inversen Laplace-Transformation (vgl. z.B. Abate und Valkó (2004)) ist der Rechenaufwand jedoch wie erwähnt geringer, falls die Verteilungsfunktion und die Momente über die folgende Laplace-Transformation der Dichte bestimmt werden.

Theorem 1.3.15 (Beneš et al. (1980)) Sei $\bar{p}(\lambda, x_0, z, \theta_0, \theta_1)$ die Laplace-Transformation von $P_{x_0}(X_t \in dz)$ bezüglich t , d.h.

$$\bar{p}(\lambda, x_0, z, \theta_0, \theta_1) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_{x_0}(X_t \in dz) dt$$

Dann ist $\bar{p}(\lambda, x_0, z, \theta_0, \theta_1)$ für $x_0 \geq 0$ durch

$$\bar{p}(\lambda, x_0, z, \theta_0, \theta_1) = \begin{cases} K_1(\lambda) e^{zK_2(\lambda)} & z < 0 < x_0 \\ K_3(\lambda) e^{zK_4(\lambda)} + K_5(\lambda) e^{zK_6(\lambda)} & 0 < z < x_0 \\ (K_5(\lambda) + e^{2x_0\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} K_3(\lambda)) e^{zK_6(\lambda)} & \text{für } 0 < x_0 < z \end{cases} \quad (1.3.15)$$

gegeben und $\bar{p}(\lambda, x_0, z, \theta_0, \theta_1) = \bar{p}(\lambda, -x_0, -z, -\theta_1, -\theta_0)$ für $x_0 < 0$. Die Funktionen K_i sind

gegeben durch

$$\begin{aligned}
K_1(\lambda) &= \frac{2e^{-x_0(\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})}}{\theta_0 - \theta_1 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}} = \frac{2e^{-x_0 K_4(\lambda)}}{K_4(\lambda) - K_8(\lambda)} \\
K_2(\lambda) &= \theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda} \\
K_3(\lambda) &= \frac{e^{-x_0(\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})}}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} = \frac{2e^{-x_0 K_4(\lambda)}}{K_4(\lambda) - K_6(\lambda)} \\
K_4(\lambda) &= \theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} \\
K_5(\lambda) &= \frac{e^{-x_0(\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})}}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} \frac{\theta_1 - \theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} - \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}{\theta_0 - \theta_1 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}} \\
&= \frac{2(K_8(\lambda) - K_6(\lambda))e^{-x_0 K_4(\lambda)}}{(K_4(\lambda) - K_6(\lambda))(K_4(\lambda) - K_8(\lambda))} \\
K_6(\lambda) &= \theta_0 - \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} \\
K_8(\lambda) &= \theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}
\end{aligned}$$

Für $x_0 < 0$ bezeichnen wir die entsprechenden K_i mit \tilde{K}_i .

Ausgehend von der gemeinsamen Verteilung der Aufenthaltsdauer und des Endwertes in Korollar 1.3.14 ist es möglich, die Verteilung von X_t bedingt auf den Wert der Brownschen Bewegung W_t zu bestimmen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei dazu $\theta_0 > \theta_1$. Es sei der Wert der Brownschen Bewegung durch $W_t = s$ gegeben. Dann ist offensichtlich, dass X_t im Intervall

$$X_t \in [x_0 + \theta_1 t + s, x_0 + \theta_0 t + s]$$

liegen muss. Des Weiteren ist es, in Abhängigkeit des Startwertes x_0 , möglich, dass der Prozess X_t seinen Drift bis zur Zeit t nie geändert hat, d.h. das Vorzeichen von X_t bleibt gleich. In diesem Fall gilt das Lemma

Lemma 1.3.16 Sei $x_0 > 0$ ($x_0 < 0$) und $x_0 + \theta_0 t + s \geq 0$ ($x_0 + \theta_1 t + s \leq 0$). Dann gilt

$$\begin{aligned}
P[X_t = x_0 + \theta_0 t + s | W_t = s] &= 1 - \exp\left(-2 \frac{x_0(x_0 + s + \theta_0 t)}{t}\right) \\
\left(P[X_t = x_0 + \theta_1 t + s | W_t = s] &= 1 - \exp\left(-2 \frac{x_0(x_0 + s + \theta_1 t)}{t}\right)\right)
\end{aligned}$$

Beweis : Der Beweis beschränkt sich auf den Fall $x_0 > 0$. Man beachte zunächst, dass das Ereignis $X_t = x_0 + \theta_0 t + s$ mit dem Ereignis $\min_{s \leq t}(X_s) \geq 0$ übereinstimmt, d.h. dem Ereignis, dass die Brownsche Bewegung nie die positive Halbachse verlässt. Mit

den Überlegungen zu Korollar 1.3.4 folgt

$$\begin{aligned}
& P[X_t = x_0 + \theta_0 t + s | W_t = s] \\
&= P[\min_{s \leq t} X_s \geq 0 | W_t = s] \\
&= P[\min_{s \leq t} x_0 + W_t^{\theta_0} \geq 0 | W_t = s] \\
&= P[\max_{s \leq t} W_t^{-\theta_0} \leq x_0 | W_t = -s] \\
&= P[\max_{s \leq t} W_t \leq x_0 | W_t = -s - \theta_0 t] \\
&= 1 - e^{-\frac{2x_0(x_0 + s + \theta_0 t)}{t}}
\end{aligned}$$

■

Des Weiteren lässt sich nun die auf $W_t = s$ bedingte Dichte für die Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift im Intervall $]x_0 + \theta_1 t + s, x_0 + \theta_0 t + s[$ angeben. Dazu beachte man zunächst, dass, ausgehend von der Stochastischen Differentialgleichung 1.3.13, zwischen X_t und W_t die Beziehung

$$W_t = X_t - x_0 - \int_0^t \Theta(X_s) ds \quad (1.3.16)$$

$$= X_t - x_0 - \theta_1 t + \Gamma_t^X(\theta_1 - \theta_0) \quad (1.3.17)$$

besteht. Ausgehend von der Aufenthaltsdauer und dem Wert des Prozess X_t lässt sich der Wert der Brownschen Bewegung W_t bestimmen. Das führt zum nächsten Resultat

Theorem 1.3.17 *O.B.d.A sei $\theta_0 > \theta_1$. Bedingt auf $W_t = s$ und $\forall x_0 \in \mathbb{R}, x \in (x_0 + \theta_1 t + s, x_0 + \theta_0 t + s)$ ist die Verteilungsfunktion für X_t durch die Dichtefunktion*

$$P(X_t \in dx | W_t = s) = \frac{\sqrt{2\pi t}}{\theta_0 - \theta_1} e^{\frac{1}{2t}s^2} e^{x\Theta(x) - x_0\Theta(x_0) - \frac{1}{2}\theta_1^2(t-\hat{\tau}) - \frac{1}{2}\theta_0^2\hat{\tau}} F^{x_0, t, \theta_1 - \theta_0}(x, \hat{\tau})$$

mit

$$\hat{\tau} = \frac{s + x_0 - x + \theta_1 t}{(\theta_1 - \theta_0)}$$

bestimmt.

Beweis : Es sei zunächst an zwei Eigenschaften von Dichtefunktionen erinnert. Falls Z eine Zufallsvariable mit Dichtefunktion $g(z)$ ist, Y eine weitere Zufallsvariable und die gemeinsame Dichtefunktion von Y und Z durch $h(y, z)$ gegeben ist, lässt sich die auf Z bedingte Dichtefunktion von Y für $g(z) > 0$ durch $P[Y \in dy | Z = z] = \frac{h(y, z)}{g(z)} dy$ angeben.

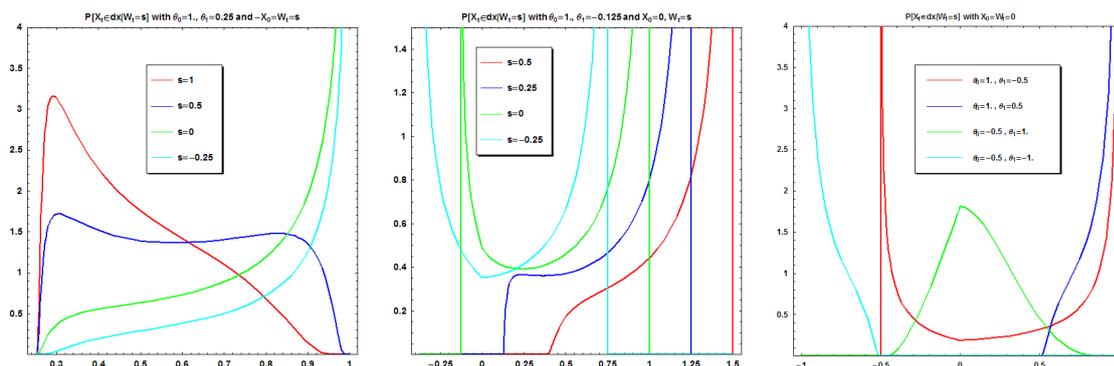


Abbildung 1.2: Dichte der Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift bedingt auf den Endwert der Brownschen Bewegung

Des Weiteren ist die Dichtefunktion von $a + c \cdot Z$, für $a, c \in \mathbb{R}$, durch $P[a + cZ \in dz] = \frac{1}{|c|} g\left(\frac{z-a}{c}\right) dz$ bestimmt.

Sei nun f die gemeinsame Dichtefunktion von X_t und Γ_t^X aus Korollar 1.3.14, d.h. $f(x, \tau) dx d\tau = P[X_t \in dx, \Gamma_t^X \in d\tau]$. Damit und der obigen Darstellung der Brownschen Bewegung ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P[X_t \in dx | W_t = s] &= \frac{P[X_t \in dx, W_t \in ds]}{P[W_t \in ds]} \\
 &= \frac{P[X_t \in dx, x - x_0 - \theta_1 t + \Gamma_t^X(\theta_1 - \theta_0) \in ds]}{P[W_t \in ds]} \\
 &= \frac{\frac{1}{|\theta_1 - \theta_0|} f\left(x, \overbrace{\frac{s + x_0 - x + \theta_1 t}{\theta_1 - \theta_0}}^{=: \hat{\tau}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{s^2}{2t}}} dx
 \end{aligned}$$

Einsetzen von $f(x, \hat{\tau})$ ergibt die Behauptung. ■

In Abbildung 1.2 werden zur Illustration die Dichten für verschiedene Brownsche Bewegungen mit wechselndem Drift dargestellt. In der linken Abbildung wird der Startwert der Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift gerade so gewählt, dass die Träger der Dichtefunktion für verschiedene Endwerte der Brownschen Bewegung identisch sind. Zu beachten ist dabei, dass die sich ergebenden Punktwahrscheinlichkeiten nicht dargestellt wurden. So gilt z.B. in der linken Abbildung für den Endwert der Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift auf einen bedingten Endwert der Brownschen Bewegung von $W_T = -0.25$ und den daraus folgenden Startwert $x_0 = 0.25$, dass dieser, gemäß Lemma 1.3.16, mit 40%-iger Wahrscheinlichkeit gerade genau gleich 1 ist.

Die mittlere Abbildung gibt die bedingte Dichtefunktion der Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift bei gleichem Startwert und unterschiedlichen Endwerten der Brownschen Bewegung an. Insbesondere sind damit die Träger nicht mehr identisch. Je höher der Endwert der Brownschen Bewegung, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift in der Nähe der oberen Grenze liegt. Intuitiv ist das somit zu erklären, dass höhere Endwerte der Brownschen Bewegung implizieren, dass sich die Brownsche Bewegung länger in der positiven Halbachse aufgehalten hat und somit von dem dort größeren Drift profitiert.

Die rechte Abbildung verdeutlicht den Einfluss des Vorzeichen des Drifts auf die Dichten. Dazu sind X_0 und W_T so gewählt, dass keine Punktwahrscheinlichkeiten auftreten. In diesem Fall erkennt man, dass, falls der Drift positiv ist, wenn X_t positiv und umgekehrt (roter Graph), die Wahrscheinlichkeiten für einen Aufenthalt an den Rändern groß wird. Intuitiv erklärt sich das dadurch, dass nur zu Beginn Unsicherheit über das Vorzeichen vorliegt. Danach führt der Drift die Brownsche Bewegung vom Nullpunkt weg. Falls der Drift positiv ist, wenn X_t negativ ist, und negativ, wenn X_t positiv ist, zeigt sich, dass sich die Wahrscheinlichkeit auf die Nähe des Nullpunktes konzentriert. Der Drift führt den Prozess X_t jeweils zum Nullpunkt zurück.

1.4 Semi-statische und optionsbasierte Wertsicherungen

Es sollen im folgenden die wesentlichen Eigenschaften der optionsbasierenden Wertsicherungsstrategien und der Stop-Loss-Strategien vorgestellt werden. Bei beiden Strategien handelt es sich um Strategien mit beschränktem Kapitalbedarf, weswegen wir sie zum Vergleich mit den in Kapitel 3 behandelten Strategien verwenden werden.

Wie erwähnt, lassen sich Stop-Loss-Strategien auch als Strategien, die auf einer Barrier-Option basieren, interpretieren. Häufig findet dies im Rahmen so genannter Turbo-Zertifikate statt, vgl. z.B. Mahayni und Suchanecki (2006).

Zusätzlich lassen sich Stop-Loss-Strategien als Grenzwert der in Abschnitt 3.1 behandelten beschränkten CPPI-Strategien auffassen, vgl. Black und Perold (1992).

Des Weiteren werden wir sehen, dass sich eine Vielzahl der später betrachteten Modifikationen der CPPI und auch die CPPI selbst, als Optionen bezüglich einer synthetischen Anlage darstellen lassen. Dies ist eine zusätzliche Motivation sich an dieser Stelle mit den beiden Wertsicherungsstrategien zu beschäftigen.

1.4.1 Stop-Loss Strategien

Die Stop-Loss-Strategie beschreibt die Investition in eine risikobehaftete Anlage S_t . Sobald der Wert der Investition nur noch einer vorher festgelegten, möglicherweise zeitabhängigen, unteren Grenze G_t entspricht, wird die Investition aufgelöst und der Restwert in die risikolose Anlage angelegt.

Formal ist die Strategie definiert durch

$$\phi_t^{SL,1} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{V_0}{S_0}$$

$$\phi_t^{SL,0} = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}} \frac{G_\tau}{B_\tau} \quad ,$$

wobei $\tau := \inf\{t \geq 0 : V_t^{SL} = G_t\}$ der Umschichtungszeitpunkt ist. Die Strategie ist offensichtlich selbstfinanzierend und statisch bis auf maximal einen Handelszeitpunkt. Es wird jedoch eine stetige Beobachtung des Kursverlaufes der risikobehafteten Anlage erfordert. Eine analoge Definition für die Stop-Loss-Strategie durch die Investitionsquoten ist durch $\Pi_t^{SL,1} = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$ bzw. $\Pi_t^{SL,0} = \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$ gegeben. Für den Wertprozess der Strategie gilt:

$$V_t^{SL} = V_0 \frac{S_t}{S_0} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} + G_\tau \frac{B_t}{B_\tau} \mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}$$

Üblicherweise wird die Garantie entweder als konstant über die Laufzeit angenommen (SL1) oder als mit der risikolosen Zinsrate wachsend (SL2). Im Sinne eines festen Anlagehorizontes lässt sich der Unterschied so interpretieren, dass die Garantie entweder zu jedem Zeitpunkt gewährleistet wird oder nur zum Laufzeitende und somit einer amerikanischen oder europäischen Garantie entspricht. Für den Endwert der Strategie gilt somit $V_T^{SL1} = V_0(S_T/S_0)\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + G \exp((T - \tau)r)\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}$ bzw. $V_T^{SL2} = V_0(S_T/S_0)\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} + G\mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}}$. Aus der obigen Beschreibung ergibt sich insbesondere die folgende Interpretation der Stop-Loss-Strategie als Handelsstrategie in Barrier-Optionen:

$\mathbf{G}_\tau \equiv \mathbf{G}$: Kauf einer Down-and-Out-Barrier-Option mit Rebate-at-Hit G , Basispreis 0 und Schranke G

$\mathbf{G}_t = \mathbf{G}e^{-r(\mathbf{T}-t)}$: Kauf einer Down-and-Out-Barrier-Option mit Rebate-at-Expiry G , Basispreis 0 und mit r wachsender Schranke G_t

Alternativ lassen sich auch beide Strategien als Investition in die risikolose Anlage des für die Garantie notwendigen Betrages und Kauf einer entsprechenden Barrier-Option ohne Rebate aber mit Basispreis G auffassen.

Stop-Loss Strategie mit europäischer Garantie

Die nächsten Ergebnisse beziehen sich auf den Fall einer Garantieleistung am Laufzeitende. Somit kann der Anlagehorizont als a priori bekannt angesehen werden. Eine weitere Interpretation ergibt sich aus der Annahme eines Investors, dessen Ziel ist, dass ein gewisser Teil G_0 seines Kapitals V_0 mit dem risikolosen Zins wächst. In diesem Sinne ist der Anlagehorizont unbestimmt. Mit den Ergebnissen aus Kapitel 1.3.1 lassen sich direkt die Verteilungseigenschaften angeben. Der anfänglich Aktienkurs sei auf $S_0 = 1$ normiert.

Proposition 1.4.1 *Für die Verteilung des Wertes V_t^{SL2} der Stop-Loss-Strategie zum Zeitpunkt t gilt:*

$$P[V_t^{SL2} \leq w] = N\left(\frac{\ln \frac{w}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{V_0}{G_0}\right)^{1-2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N\left(\frac{2\ln G_0 - \ln(wV_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad (1.4.1)$$

für $w \geq G_t$ und

$$P[V_t^{SL2} \in dw] = \frac{1}{w\sigma\sqrt{t}} \left(\phi\left(\frac{\ln \frac{w}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{V_0}{G_0}\right)^{1-2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} \phi\left(\frac{2\ln G_0 - \ln(wV_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \right) dw$$

für $w > G_t$ bzw.

$$P[V_t^{SL2} = G_t] = N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{V_0}{G_0}\right)^{1-2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Man beachte, dass bei der Stop-Loss-Strategie im Sinne der Definitionen zu den Risikomaßen in Abschnitt 1.2 die Ereignisse Cash-Lock und Cash-Dominanz identisch sind. Sobald die Investitionsquote einmalig unter 100% fällt, besteht keine Möglichkeit in der Zukunft ohne Kapitalzufluss von außen eine Investitionsquote oberhalb von Null zu erreichen. Somit gibt die letzte Gleichung auch gleichzeitig die Wahrscheinlichkeit für die Cash-Dominanz an. Die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit bedingt auf eine Investitionsquote unter 100% beträgt 1. Dieses Ereignis ist, wie bereits erwähnt, aus Sicht eines Investors äußerst unerwünscht und verdient damit besondere Beachtung. Abbildung 1.3 zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für ein cash-dominiertes Portfolio im Falle hoher Garantien bereits für kurze Laufzeiten sehr hohe Werte annehmen kann.

Beweis Proposition 1.4.1 : Wir zerlegen zunächst die Verteilung in die beiden Bestandteile 'Treffer der Schranke' und 'Nicht-Treffen der Schranke'

$$P[V_t^{SL2} \leq w] = P[V_t^{SL2} = G_t, \tau \leq t] + P[V_t^{SL2} \leq w, \tau > t] \quad (1.4.2)$$

Das Ereignis 'Treffen der Schranke' lässt sich umschreiben zu

$$\begin{aligned} \{\tau \leq t\} &= \left\{ \min_{0 \leq s \leq t} V_s^{SL2} / G_s \leq 1 \right\} \\ &= \left\{ \min_{0 \leq s \leq t} W_s + \frac{\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} s \leq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{G_0}{V_0} \right\} \\ &= \left\{ m_t^\nu \leq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{G_0}{V_0} \right\} \quad \text{mit } \nu := \frac{\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} \end{aligned}$$

Ausnutzen der Ergebnisse aus Kapitel 1.3.1 führt zu

$$\begin{aligned} P[V_t^{SL2} = G_t] &= P[\tau \leq t] = P \left[m_t^\nu \leq \frac{\ln \frac{G_0}{V_0}}{\sigma} \right] \\ &= P \left[M_t^{-\nu} \geq \frac{\ln \frac{V_0}{G_0}}{\sigma} \right] \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

$$\begin{aligned} &= N \left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{V_0}{G_0} \right)^{1-2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N \left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned} \quad (1.4.4)$$

und

$$\begin{aligned} P[V_t^{SL2} \leq w, \tau > t] &= P \left[W_t^\nu \leq \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{w}{V_0} - rt \right), m_t^\nu \geq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{G_0}{V_0} \right] \\ &= P \left[M_t^{-\nu} \leq \frac{\ln \frac{V_0}{G_0}}{\sigma} \right] - P \left[W_t^{-\nu} \leq \frac{\ln \frac{V_0}{w} + rt}{\sigma}, M_t^{-\nu} \leq \frac{\ln \frac{V_0}{G_0}}{\sigma} \right] \end{aligned}$$

Zusammen mit Gleichung 1.4.3 ergibt sich für Gleichung 1.4.2

$$\begin{aligned} P[V_t^{SL2} \leq w] &= 1 - P \left[W_t^{-\nu} \leq \frac{\ln \frac{V_0}{w} + rt}{\sigma}, M_t^{-\nu} \leq \frac{\ln \frac{V_0}{G_0}}{\sigma} \right] \\ &= N \left(\frac{\ln \frac{w}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \left(\frac{V_0}{G_0} \right)^{1-2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N \left(\frac{2 \ln G_0 - \ln(wV_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Die Dichte ergibt sich durch Gleichung 1.4.4 und Differenzieren von 1.4.1. ■

Ausgehend von der Darstellung der Dichte lassen sich damit auch die Momente der Stop-Loss-Strategie bestimmen. Mit Hilfe der Integralformel aus Lemma A.1.1 folgt sofort

Proposition 1.4.2 *Das n -te Moment der Stop-Loss-Strategie ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} E[(V_t^{SL2})^n] &= G_0^n e^{nrt} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad + G_0^n e^{nrt} \left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-r}{\sigma^2}-1} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad + V_0^n e^{n(\mu + \frac{n-1}{2}\sigma^2)t} N\left(\frac{\ln \frac{V_0}{G_0} + (\mu - r + \frac{2n-1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad - G_0^n e^{n(\mu + \frac{n-1}{2}\sigma^2)t} \left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-r}{\sigma^2}+n-1} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r + \frac{2n-1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Da der Erwartungswert von speziellem Interesse ist, sei er hier explizit angegeben.

Korollar 1.4.1 *Der Erwartungswert der Stop-Loss-Strategie lautet*

$$\begin{aligned} E[V_t^{SL2}] &= G_0 e^{rt} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + V_0 e^{rt} \left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\quad - G_0 e^{\mu t} \left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + V_0 e^{\mu t} N\left(\frac{\ln \frac{V_0}{G_0} + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Interessanterweise gilt für wachsende Laufzeiten bei gleicher anfänglicher Garantie, dass die Rendite des Erwartungswertes, selbst wenn der Cash-Lock mit Sicherheit eintritt, gegen die Rendite der Aktie konvergiert, sofern der Drift der risikobehafteten Anlage größer als der risikolose Zins ist. Offensichtlich ist die notwendige und hinreichende Bedingung für den sicheren Eintritt eines Cash-Locks für $t \rightarrow \infty$ nach Gleichung 1.4.4 durch $\mu < r + \frac{1}{2}\sigma^2$ bestimmt⁶. Eine Abschätzung des Erwartungswertes unter den trivialen Annahmen $V_0 > G_0$ und $\mu > r$ ergibt

$$\begin{aligned} E[V_t^{SL2}] &\geq V_0 e^{\mu t} N\left(\frac{\ln \frac{V_0}{G_0} + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - G_0 e^{\mu t} \left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-r}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \frac{G_0}{V_0} + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &\geq (V_0 - G_0) e^{\mu t} N\left(\frac{\ln \frac{V_0}{G_0} + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) . \end{aligned}$$

Für die Rendite des Erwartungswertes ergibt sich

$$\frac{\ln(E[V_t^{SL2}]/V_0)}{t} \geq \frac{\ln(V_0 - G_0) + \mu t + \ln N\left(\frac{\ln \frac{V_0}{G_0} + (\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \ln V_0}{t} .$$

⁶Für $\mu > \frac{1}{2}\sigma^2$ beträgt die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit für lange Laufzeiten $\left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-(r+\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma^2}}$.

Für $t \rightarrow \infty$ konvergiert die Normalverteilung gegen 1 und somit $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(E[V_t^{SL2}]/V_0)}{t} \geq \mu$. Da die Strategie maximal zu 100% in der Aktie investiert ist, muss umgekehrt jedoch $\frac{\ln(E[V_t^{SL2}]/V_0)}{t} \leq \mu$ für alle $t \geq 0$ gelten. Also

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(E[V_t^{SL}]/V_0)}{t} = \mu \quad .$$

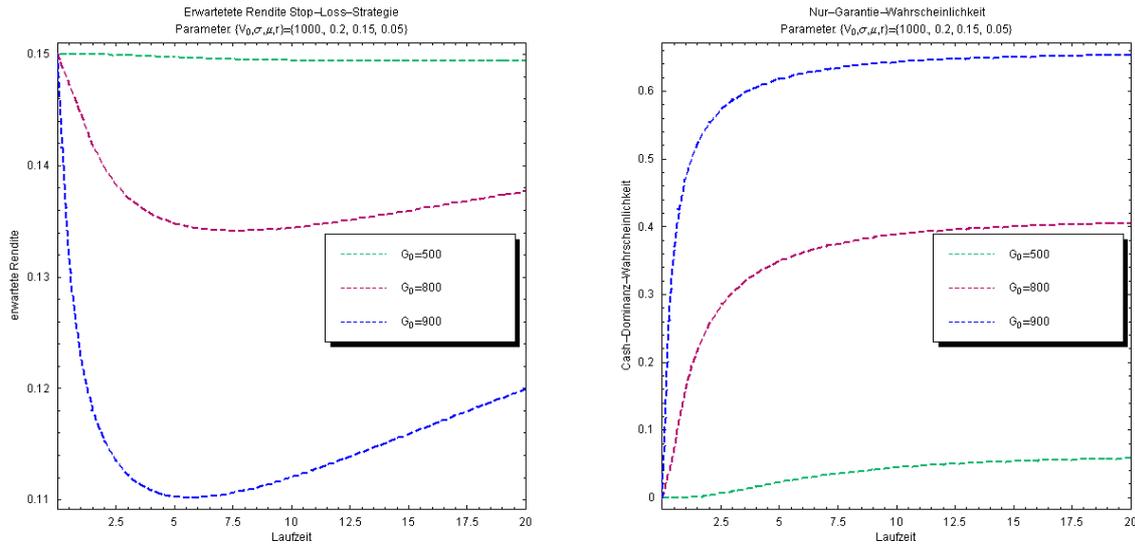


Abbildung 1.3: Rendite und Cash-Dominanz-Wahrscheinlichkeit der Stop-Loss-Strategie

Eine weitere interessante Eigenschaft, die man aus den Abbildungen 1.3 erkennt, ist die Existenz eines Minimums in der Rendite des Erwartungswertes⁷. Ein längerer Anlagehorizont führt also weder automatisch zu einer größeren oder kleineren Rendite des Erwartungswertes.

Stop-Loss Strategie mit amerikanischer Garantie

Analog zum vorherigen Abschnitt lassen sich die Formeln für den Fall angeben, dass die Garantie zu jedem Zeitpunkt gewährleistet wird. Der Unterschied liegt im wesentlichen in der anderen Schrankenbedingung und dass für einen Zeitpunkt nach dem Treffen der Schranke der Wert der Strategie vom Zeitpunkt des Treffens abhängt, da der Betrag G für die Differenz dieser beiden Zeitpunkte mit der Rate r verzinst wird.

Exemplarisch sei an dieser Stelle nur die Verteilungsfunktion angegeben.

⁷Auf einen Beweis für diese Eigenschaft sei hier verzichtet. Intuitiv ergibt sich das jedoch aus dem oben genannten Grenzwert und der Tatsache, dass die erwartete Rendite der Stop-Loss-Strategie mit beliebig kurzer Laufzeit ebenfalls der Rendite der Aktie entspricht.

Proposition 1.4.3 Für die Verteilung des Wertes V_t^{SL1} der Stop-Loss-Strategie zum Zeitpunkt t gilt:

$$\begin{aligned}
P[V_t^{SL1} \leq w] &= N\left(\frac{\ln \frac{w}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{V_0}{G}\right)^{1-2\frac{\mu}{\sigma^2}} N\left(\frac{2\ln G - \ln(wV_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
&\quad - N\left(\frac{\ln \frac{G}{V_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\left(t + \frac{1}{r}\ln \frac{G}{w}\right)^+}{\sigma\sqrt{\left(t + \frac{1}{r}\ln \frac{G}{w}\right)^+}}\right) \\
&\quad - \left(\frac{V_0}{G}\right)^{1-2\frac{\mu}{\sigma^2}} N\left(\frac{\ln \frac{G}{V_0} + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\left(t + \frac{1}{r}\ln \frac{G}{w}\right)^+}{\sigma\sqrt{\left(t + \frac{1}{r}\ln \frac{G}{w}\right)^+}}\right)
\end{aligned}$$

für $w \geq G$

Da die Strategie im weiteren Verlauf nicht zum Vergleich mit den proportionalen Strategien⁸ herangezogen wird, verzichten wir auf die weiteren Eigenschaften.

Bewertung und Stop-Loss-Start-Gain Strategie

Ein wesentlicher Kritikpunkt der Stop-Loss-Strategien liegt in der beschriebenen Cash-Lock-Problematik. Obwohl der Wert der risikobehafteten Anlage am Laufzeitende möglicherweise um ein Vielfaches gestiegen ist, reicht es aus, dass zu einem einzigen Zeitpunkt die Schrankenbedingung verletzt war, um nur noch die Garantie zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit die Schranke zu verletzen, nimmt jedoch zumindest sofern auch die Garantie wächst mit wachsender Laufzeit zu. Während man also bei einer Aktieninvestition ohne Garantie bei längeren Laufzeiten zumindest teilweise davon ausgeht, dass die Investition sicherer wird, da sich die Verluste langfristig durch die Gewinne ausgleichen, ist bei der Stop-Loss-Strategie das Gegenteil zu beobachten.

Aus diesem Grund sei hier zusätzlich auf die Stop-Loss-Start-Gain Strategien verwiesen, die eine vollständige Investition in die risikobehaftete Anlage vorschreiben, sofern der Kurs oberhalb der Garantielinie liegt, und eine 100%ige Investition in eine risikolose Anlage, sofern der Kurs unterhalb der Garantielinie liegt. Formal ist eine selbstfinanzierende Modifikation dieser Strategie durch die Investitionsquoten $\Pi_t^{SLG,1} = \mathbb{1}_{\{V_t > G_t\}}$ und $\Pi_t^{SLG,0} = \mathbb{1}_{\{V_t \leq G_t\}}$ definiert. Wie jedoch Carr und Jarrow (1990) beschreiben, impliziert diese Strategie selbst in einem stetigen Modell wie dem Black-Scholes-Modell Kosten, sobald eine Umschichtung vorgenommen werden muss. Intuitiv lässt sich das damit erklären, dass es selbst bei stetigen Kursbewegungen nicht möglich ist, genau zu dem spezifizierten Wert zu handeln. Aus mathematischer Sicht sind die Kosten für eine einzelne Umschichtung zwar gleich Null, jedoch

⁸Die in Abschnitt 2.2 behandelten proportionalen Strategien, die ebenfalls eine amerikanische Garantie besitzen, setzen die Möglichkeit der unbeschränkten Kapitalaufnahme voraus und lassen sich deswegen nur unzureichend mit der Stop-Loss-Strategie vergleichen.

muss aufgrund der Selbst-Ähnlichkeit der Brownschen Bewegung unendlich oft gehandelt werden. Gemäß der Itô-Tanaka-Formel lassen sich die Kosten als Funktion der Lokalzeit der Brownschen Bewegung angeben. Diese Kosten lassen sich analog zur OBPI als implizite Optionsprämie betrachten. Insbesondere kann diese beliebig groß werden, so dass hier die Garantie nicht gewährleistet werden kann. Aus diesem Grunde verzichten wir auf eine weitergehende Diskussion dieser Strategie und verweisen auf Carr und Jarrow (1990). Es sei jedoch an dieser Stelle erwähnt, dass sich die in Abschnitt 3.1 betrachtete beschränkte CPPI als Approximation der Stop-Loss-Start-Gain-Strategie darstellen lässt, wobei die Transaktionskosten bzw. die implizite Prämie dann beschränkt sein wird.

1.4.2 Option Based Portfolio Insurance (OBPI)

Das Konzept der Option Based Portfolio Insurance besteht im einfachsten Fall aus dem Kauf einer bestimmten Anzahl von risikobehafteten Aktien S , die durch den gleichzeitigen Kauf oder die synthetische Nachbildung der gleichen Anzahl von Put-Optionen abgesichert werden. Unabhängig vom tatsächlichen Wert S_T der Aktie zum Laufzeitende T wird der Wert des Portfolio mindestens so groß wie der Strike der Put-Option sein. Falls der Finanzmarkt vollständig ist, sind die Kosten der Absicherung a priori bekannt und mindern den für die risikobehaftete Anlage zur Verfügung stehenden Betrag. Es ist somit nicht möglich, den gesamten Betrag V_0 in die Anlage S zu investieren⁹, sondern nur den Anteil $\frac{\alpha}{V_0} < 1$. Zu einer gegebenen Endgarantie $G = G_T$ bestimmt sich die Auszahlung der OBPI somit durch

$$V_T = \alpha S_T + \alpha \left(\frac{G}{\alpha} - S_T \right)^+ \geq G \quad .$$

Im Sinne der Definitionen von Abschnitt 1.2 gibt α die Partizipationsrate und $\frac{G}{\alpha}$ das Partizipationslevel an.

Sofern der anfänglich zur Verfügung stehende Betrag V_0 vollständig in die riskante Anlage und die zur Absicherung benötigten Put-Optionen investiert werden soll und zusätzliche Kreditaufnahmen ausgeschlossen sind, muss α als Lösung von

$$V_0 = \alpha S_0 + \alpha Put_0[S, \frac{G}{\alpha}, T]$$

bestimmt werden. Es kann leicht gezeigt werden, dass, sofern alle Optionen gehandelt werden, unter Ausschluss von Arbitrage immer eine eindeutige Lösung für α existiert (vgl. z.B. El Karoui et al. (2005)). Nutzen wir die Put-Call-Parität aus, so lässt sich die obige Gleichung durch

$$C_0 = \alpha \cdot Call_0[S, \frac{G}{\alpha}, t] ,$$

darstellen. C_0 gibt dabei wie üblich den anfänglichen Cushion $V_0 - G_0$ an. Der Endwert ist dann durch

$$V_T = G_T + \alpha \left(S_T - \frac{G}{\alpha} \right)^+$$

gegeben. Es handelt sich also um die risikolose Investition des für die Garantie benötigten Betrages und der Investition des Cushions in α Call-Optionen mit Strike $\frac{G_T}{\alpha}$.

Wir bezeichnen diese Strategie als einfache OBPI oder OBPI im engeren Sinne und geben nun eine nahe liegende Verallgemeinerung an.

⁹ S_0 ist im folgenden auf 1 normiert

Verallgemeinerte OBPI

Analog zur naiven Strategie (vgl. das Beispiel in Abschnitt 1.2) wird bei der OBPI der für die Garantie notwendige Betrag risikolos angelegt, während der Überschuss in eine risikobehaftete Anlage, in diesem Fall die Call-Option, investiert wird. Daraus ergibt sich direkt eine Verallgemeinerung der Option Based Portfolio Insurance. Anstatt α Call-Optionen mit Strike G_T/α zu halten, ist es auch möglich $\tilde{\alpha}$ Call-Optionen mit Strike $K(\alpha) = \frac{G_T}{\beta(\alpha)}$ zu kaufen. Damit kann entweder die Partizipationsrate oder das Partizipationslevel im Gegensatz zur einfachen OBPI frei gewählt werden. Sofern es sich um tatsächlich gehandelte Optionen handelt, ist dabei eine anfängliche Kreditaufnahme nicht notwendig. Es ist somit möglich, bei der OBPI zu 100% an zusätzlichen Gewinnen der Anlage S zu partizipieren, sofern der Kurs der Anlage ein zu bestimmendes Partizipationslevel überschreitet. Intuitiv gibt $\beta(\alpha)$ den Faktor an, um den die Anlage S gegenüber der Garantie größer sein muss, damit an Kursveränderungen der Anlage partizipiert werden kann. Je kleiner dabei β ist, desto größer muss der Schlusskurs sein, um von potentiellen Zuwächsen zu profitieren.

Falls die Optionen gehandelt werden, erhält man somit eine statische Strategie. Da S jedoch selbst ein Portfolio sein kann, ist nicht immer zu erwarten, dass entsprechende Optionen mit dem gewünschten Strike und Laufzeit am Finanzmarkt gehandelt werden. In diesem Fall müssen die Optionen dynamisch dupliziert werden¹⁰. Im Black-Scholes-Modell erhält man die folgende selbstfinanzierende Strategie

$$\begin{aligned}\phi_t^{O,0} &= \frac{G_t + \alpha \left(Call_t[S, K(\alpha), T] - \Delta_t^{Call[S, K(\alpha), T]} S_t \right)}{B_t} \\ \phi_t^{O,1} &= \alpha \Delta_t^{Call[S, K(\alpha), T]}\end{aligned}$$

mit dem Barwert der Endgarantie $G_t = Ge^{-r(T-t)}$. Δ^H gibt wie üblich die Anzahl der zu haltenden Aktien S an, die notwendig sind um die Auszahlung H abzusichern. Mit der Black-Scholes-Formel für den Wert und dem Delta einer Call-Option ein, ergibt sich

Definition 1.4.1 Die (verallgemeinerte) Option Based Portfolio Insurance mit Anfangswert V_0 und Endgarantie G zur Zeit T ist durch die Handelsstrategie $\phi^O = (\phi^{O,0}, \phi^{O,1})$ mit

$$\phi_t^{O,0} = G_t - \alpha e^{-r(T-t)} K(\alpha) \mathcal{N}(d_-) \quad \text{und} \quad \phi_t^{O,1} = \alpha \mathcal{N}(d_+)$$

und

$$d_{\pm} = \frac{\ln \frac{S_t}{K(\alpha)} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

definiert. Zusätzlich soll für die Partizipationsrate α und das Partizipationslevel $K(\alpha)$ die Anfangsbedingung $C_0 = \alpha(S_0 \mathcal{N}(d_+) - K(\alpha)e^{-rT} \mathcal{N}(d_-))$ erfüllt sein.

¹⁰Dazu muss der Finanzmarkt vollständig sein. Diese Annahme ist mit dem hier zugrunde liegenden Black-Scholes-Modell erfüllt.

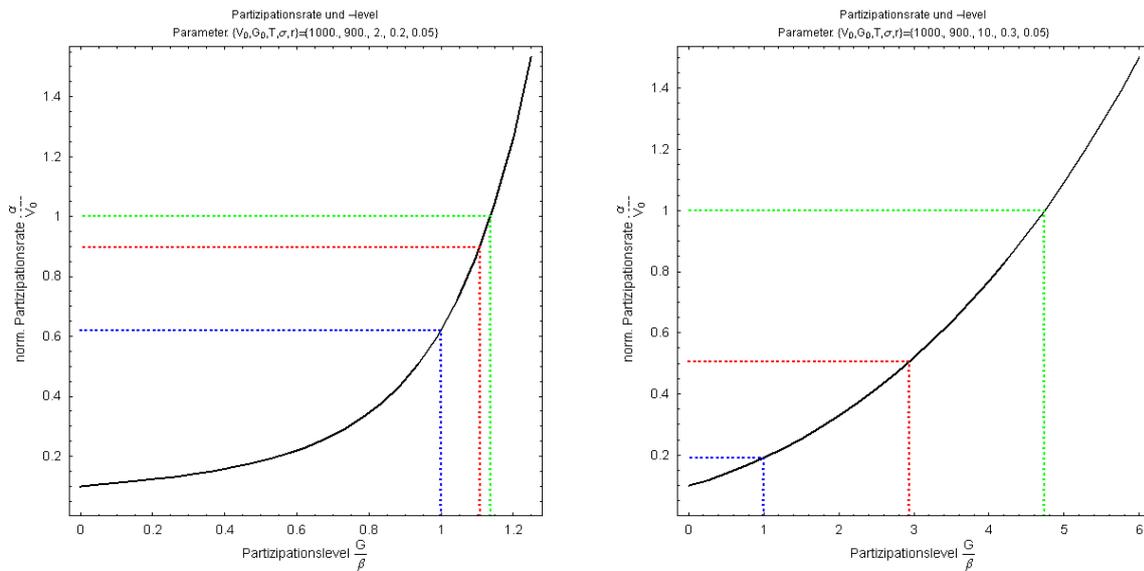


Abbildung 1.4: Normierte Partizipationsrate der OBPI in Abhängigkeit des Partizipationslevel

Zu dieser Definition einige Bemerkungen:

- Im Black-Scholes-Modell ergibt sich die Auszahlung

$$V_T = G + \alpha (S_T - K(\alpha))^+$$

Insbesondere ist die Strategie damit pfadunabhängig.

- Da der Preis einer Call-Option monoton fallend im Basispreis $K(\alpha)$ ist, folgt direkt, dass eine höhere Partizipationsrate nur zu Lasten eines höheren Partizipationslevel erreicht werden kann.
- Eine hohe Partizipationsraten impliziert, dass Leerverkäufe in der risikolosen Anlage, d.h. Kreditaufnahmen, nicht ausgeschlossen werden können, um die Strategie zu duplizieren. Nach der Definition für die zuhaltenden Anteile der risikolosen Anlage ist eine hinreichende und notwendige Bedingung für den Ausschluss von Krediten durch $\alpha K(\alpha) < G$ bzw. $K(\alpha) < \frac{G}{\alpha}$ gegeben. Die OBPI im engeren Sinne ist also diejenige Strategie, die das Partizipationslevel und damit die Partizipationsrate unter Ausschluss von Leerverkäufen der risikolosen Anlage maximiert.

Die Abbildung 1.4 verdeutlicht diesen Zusammenhang zwischen Partizipationsrate und Partizipationslevel. Um den Einfluss der Laufzeit und der Volatilität darzustellen betrachten wir links einen Anlagehorizont von 10 Jahren bei einer Volatilität von 30% und rechts einen Anlagehorizont von 2 Jahren bei einer Volatilität von 20%. Die einfache OBPI beteiligt den Investor mit 50% bzw. 90% an den Gewinnen der Anlage S . Diese Beteiligung erfolgt aber

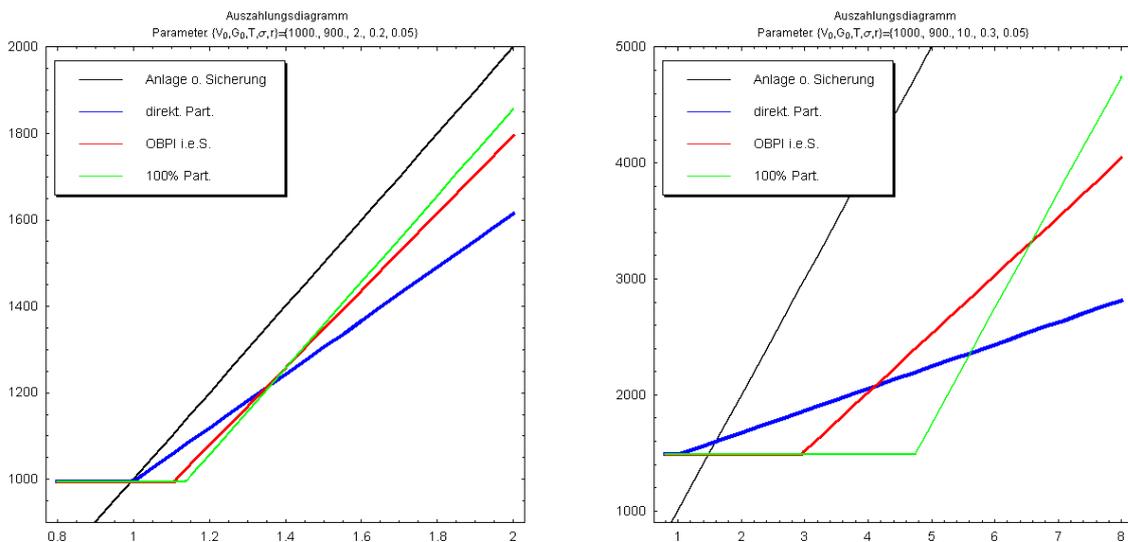


Abbildung 1.5: Auszahlungsprofil der OBPI für verschiedene Partizipationsraten und -level

nur unter der Voraussetzung, dass die Anlage auf das 2,9fache bzw. 1,10fache ihres anfänglichen Wertes gestiegen ist (rote Linie). Soll eine Beteiligung an den Zuwächsen gegenüber dem heutigen Kurs erfolgen, liegt die Beteiligungsrate nur bei 19% bzw. 62% (blaue Linie). Falls umgekehrt eine Beteiligung von 100% gewünscht wird, kann diese nur ab einem einem Wert der Aktie vom 4,7fachen bzw. 1,13fachen des Anfangswertes gewährt werden. Die Abbildungen und die Auszahlungsdiagramme 1.5 legen nahe, dass insbesondere für lange Laufzeiten und/oder hohe Volatilitäten der Einsatz der OBPI zur Absicherung eines Portfolios problematisch erscheint. Diese Effekte werden in den folgenden Untersuchungen weiter verdeutlicht.

Verteilungseigenschaften

Dichte und Verteilungsfunktion für die OBPI folgen direkt aus der Lognormalverteilung der risikobehafteten Anlage. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir ab jetzt an, dass $S_0 = 1$ gilt.

Proposition 1.4.4 *Die Verteilung und Dichte des Endwertes der verallgemeinerten OBPI sind durch*

$$P[V_T \leq v] = \mathcal{N} \left(\frac{\ln \left(\frac{v-G}{\alpha} + K(\alpha) \right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \quad (1.4.5)$$

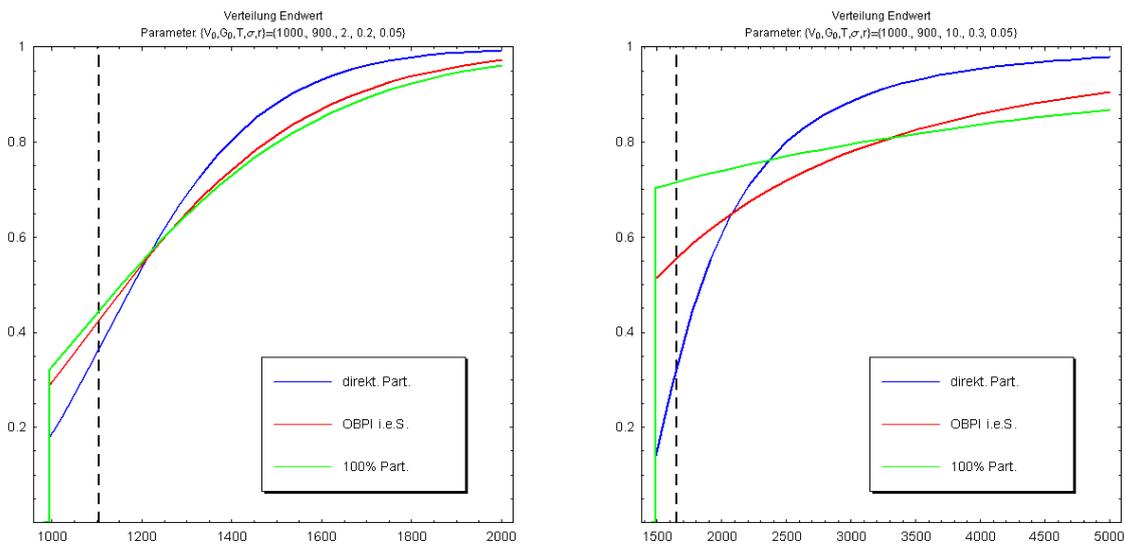


Abbildung 1.6: Verteilung des Endwertes der OBPI für verschiedene Partizipationsraten und -level

für $v \geq G$ und

$$P[V_T \in dv] = \frac{1}{(v - G + \alpha K(\alpha)) \sigma \sqrt{T}} \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{v-G}{\alpha} + K(\alpha) \right) - (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) \quad \forall v > G$$

$$P[V_T = G] = \mathcal{N} \left(\frac{\ln K(\alpha) - (\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

gegeben.

Beweis : Die Verteilung folgt direkt aus $P[V_T \leq v] = P[S_T \leq \frac{v-G}{\alpha} + K(\alpha)]$ und der Lognormalverteilung von S . Die Dichte berechnet sich durch Differenzieren. Die Punkt-Wahrscheinlichkeit bestimmt sich aus $P[V_T = G] = P[S_T \leq K(\alpha)]$. ■

Die Wahrscheinlichkeit, nur die Garantie zu erhalten, ist erwartungsgemäß monoton wachsend im Partizipationslevel $K(\alpha)$. Eine zweite Beobachtung betrifft die relative Verlustwahrscheinlichkeit. Die Wahrscheinlichkeit, eine geringere als die risikolose Verzinsung zu erhalten, ist monoton wachsend im Partizipationslevel. Dazu betrachten wir die Verteilungsfunktionen zweier OBPI-Strategien mit bis auf die Partizipation identischen Parametern. Gemäß Gleichung 1.4.5 schneiden sich die Verteilungsfunktionen im Punkt v genau dann, falls

$$\frac{v - G}{\tilde{\alpha}} + K(\tilde{\alpha}) = \frac{v - G}{\alpha} + K(\alpha)$$

gilt. Einsetzen der Initialbedingung für α liefert die äquivalente Bedingung

$$\frac{v - G}{C_0} Call_0[S, K(\tilde{\alpha}), T] + K(\tilde{\alpha}) = \frac{v - G}{C_0} Call_0[S, K(\alpha), T] + K(\alpha)$$

Auflösen nach v zeigt zunächst, dass die Verteilungsfunktionen genau einen Schnittpunkt besitzen.

$$v = G + C_0 \frac{K(\alpha) - K(\tilde{\alpha})}{Call_0[S, K(\tilde{\alpha}), T] - Call_0[S, K(\alpha), T]}$$

Insbesondere gilt somit, dass für zwei beliebige OBPI-Strategien keine die jeweils andere stochastisch dominiert, sofern beide dieselbe Garantie besitzen. Für zwei europäische Call-Optionen mit Basispreisen $K_1 < K_2$ gilt $(K_2 - K_1)e^{-rT} \geq Call_0[S, K_1, T] - Call_0[S, K_2, T]$ und somit

$$v \geq G + C_0 e^{rT} = V_0 e^{rT}$$

Der Schnittpunkt der beiden Verteilungsfunktionen liegt also oberhalb der risikolosen Verzinsung des Anfangskapitals. Da die Wahrscheinlichkeit, nur die Garantie zu erhalten monoton wachsend im Partizipationslevel ist, muss dies auch für die relative Verlustwahrscheinlichkeit gelten.

Korollar 1.4.2 *Für zwei OBPI-Strategien $\tilde{\Phi}^O$ und Φ^O mit identischen Endgarantien G , gleichem Anfangskapital V_0 und Partizipationsleveln $K(\tilde{\alpha}) > K(\alpha)$ gilt:*

$$P[\tilde{V}_T \leq V_0 e^{rT}] \geq P[V_T \leq V_0 e^{rT}]$$

Mit den Verteilungseigenschaften ist es nun möglich, auch die Momente der Strategie anzugeben:

Proposition 1.4.5 *Das n -te Moment der verallgemeinerten OBPI ist gegeben durch*

$$E[(V_T)^n] = G^n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} \alpha^i G^{n-i} (-K(\alpha))^{i-j} e^{(\mu + \frac{j-1}{2}\sigma^2)jT} \cdot \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{1}{K(\alpha)} + (\mu + \frac{2j-1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Beweis : vgl. Appendix ■

Wiederum sei zur Verdeutlichung der Erwartungswert explizit angeben.

Korollar 1.4.3 *Der Erwartungswert der verallgemeinerten OBPI lautet*

$$E[V_T] = G + \alpha \left(e^{\mu T} \mathcal{N}\left(\underbrace{\frac{-\ln K(\alpha) + (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{=: \tilde{d}_+}\right) - K(\alpha) \mathcal{N}\left(\underbrace{\frac{-\ln K(\alpha) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{=: \tilde{d}_-}\right) \right)$$

Korollar 1.4.4 *Für $\mu > r$ ist der Erwartungswert der OBPI streng monoton wachsend in der Partizipationsrate α und im Partizipationslevel $\frac{G}{\beta}$.*

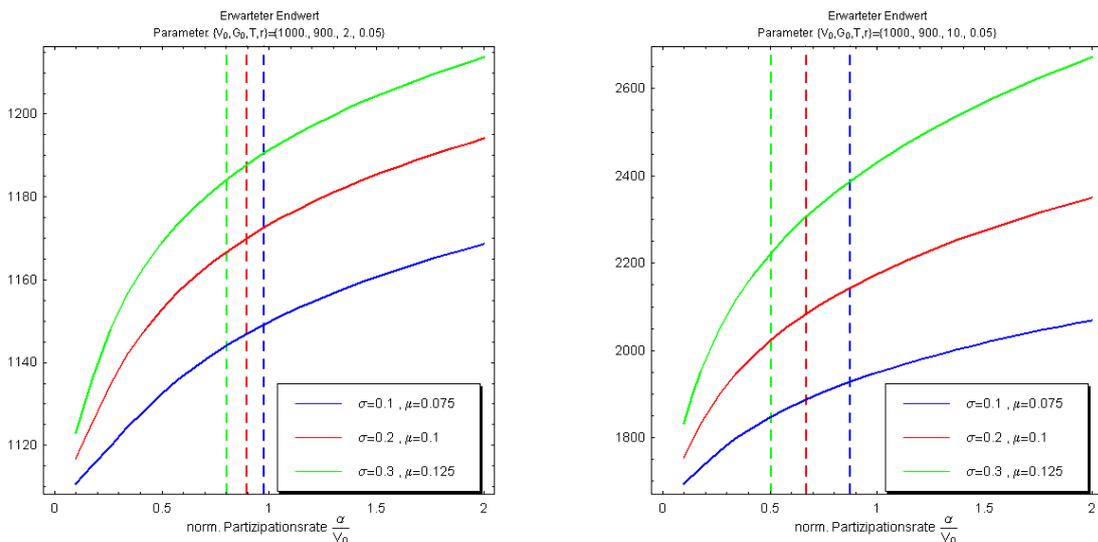


Abbildung 1.7: Erwartungswert der OBPI in Abhängigkeit der Partizipationsrate für verschiedene μ - σ -Kombinationen (Marktpreis des Risikos konstant). Die gestrichelte Linie repräsentiert die jeweilige einfache OBPI

Beweis : vgl. Appendix ■

Besteht das Investitionsziel in der Maximierung des Erwartungswertes, sollte die Partizipationsrate somit maximal gewählt werden. Unter der Nebenbedingung, dass Kreditbeschränkungen vorliegen, ergibt sich als optimale OBPI-Strategie die einfache OBPI bzw. der Protective Put. Abwägend muss dem gegenübergestellt werden, dass das Risiko ausschließlich die Garantie oder einen relativen Verlust zu erleiden ebenfalls monoton wachsend in der Partizipationsrate ist. In diesem Sinne besteht ein Zielkonflikt zwischen der Maximierung der erwarteten Rendite und dem Risiko, nur die Garantie zu erhalten oder einen relativen Verlust zu erzielen. Wohlweislich haben wir an dieser Stelle auf eine Diskussion der Varianz der Strategie verzichtet. Wie wir später noch argumentieren werden, stellt die Varianz im allgemeinen kein geeignetes Risikomaß dar, wenn Anlagen betrachtet werden, deren Renditen eine hohe (Rechts-)Schiefe besitzen. Durch die Mindestgarantie ist dies hier und bei den späteren Strategien jedoch der Fall.

Langfristiges Verhalten und Cash-Lock

Ausgehend von der Interpretation als Investition in die risikolose Anlage und dem Kauf entsprechender Call-Optionen, wird zur Bestimmung der langfristigen Rendite verlangt, dass der anfängliche Floor G_0 risikolos verzinst wird. Die Festlegung einer bestimmten Garantie am Laufzeitende entfällt somit.

In diesem Fall ist das langfristige Verhalten der Strategie dadurch gekennzeichnet, dass die

OBPI gegen die naive Strategie aus Beispiel 1.2.2 konvergiert. Dies wird deutlich, wenn man beachtet, dass der Wert einer Call-Option mit Basispreis $K(\alpha)$ gegen den Preis des zugrunde liegenden Wertpapiers konvergiert.

Lemma 1.4.5 *Die Partizipationsrate der verallgemeinerten OBPI ist für $t \rightarrow \infty$ unabhängig vom Partizipationslevel K und durch*

$$\alpha = \frac{C_0}{S_0}$$

gegeben.

Beweis : Mit $d_+ = \frac{\ln \frac{S_0}{K} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$ folgt $\mathcal{N}(d_+) \rightarrow 1$ für $t \rightarrow \infty$ und somit $\phi_t^{O,1} = \frac{C_0}{S_0}$. ■

Insbesondere ist die langfristige erwartete Rendite gemäß Beispiel 1.2.2 gerade μ und die Wahrscheinlichkeit langfristig eine höhere Verzinsung als r zu erhalten 1.

Abschließend wollen wir betrachten, inwieweit die OBPI nach Kursverlusten, die zu einer hinreichend kleinen Investitionsquote geführt haben, durch zukünftige Kursentwicklungen wieder eine ausreichend hohe Investitionquote erzielen kann bzw. umgekehrt fragen, ob eine zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachtete, niedrige Investitionsquote auch für die Zukunft niedrige Investitionsquoten impliziert. Dies ist durch die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit beschrieben. Dazu zunächst folgendes Lemma.

Lemma 1.4.6 *Die Investitionsquote einer verallgemeinerten OBPI ist monoton wachsend im Aktienkurs*

Beweis : Die Investitionsquote einer OBPI zur Zeit t ist durch $\pi_t^1 = \frac{\alpha S_t \mathcal{N}(d_+(t, S_t))}{G_t + \alpha \text{Call}[S_t, K(\alpha), T]}$ gegeben. Diese ist offensichtlich genau dann monoton wachsend in S_t , falls $\frac{G_t + \alpha \text{Call}[S_t, K(\alpha), T]}{\alpha S_t \mathcal{N}(d_+(t, S_t))}$ monoton fallend in S_t . Für diesen Ausdruck gilt

$$\begin{aligned} \frac{G_t + \alpha \text{Call}[S_t, K(\alpha), T]}{\alpha S_t \mathcal{N}(d_+(t, S_t))} &= \frac{G_t + \alpha S_t \mathcal{N}(d_+(t, S_t)) - \alpha K(\alpha) e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_-(t, S_t))}{\alpha S_t \mathcal{N}(d_+(t, S_t))} \\ &= 1 + \frac{G_t - \alpha K(\alpha) \mathcal{N}(d_-(t, S_t))}{\alpha S_t \mathcal{N}(d_+(t, S_t))} \end{aligned}$$

Für $\alpha, K(\alpha) > 0$ folgt die Aussage direkt, da sowohl $\mathcal{N}(d_+(t, S_t))$ als auch $\mathcal{N}(d_-(t, S_t))$ monoton wachsend in S_t sind. ■

Im Folgenden bezeichne nun $\mathbf{s}(t, \gamma)$ die Umkehrabbildung von $\pi_t^1(S_t = s)$, d.h. $\mathbf{s}(t, \gamma) = s \Leftrightarrow \pi_t^1(S_t = s) = \gamma$.

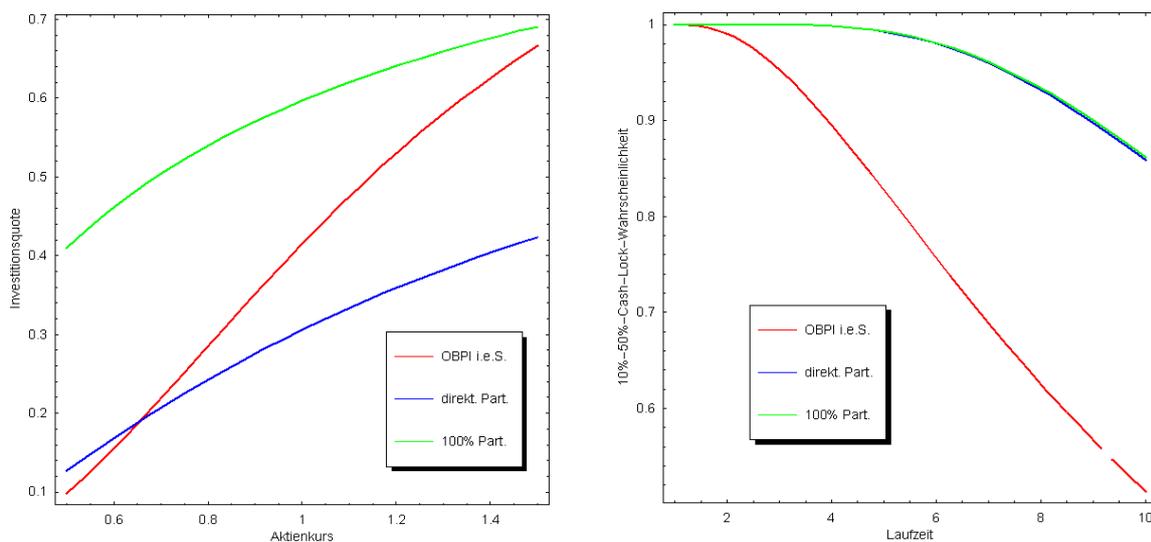


Abbildung 1.8: Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit ($V_0 = 1000, G_0 = 800, r = 0.05, \sigma = 0.2, \mu = 0.15, t_1 = 1, T = 15$)

Proposition 1.4.6 Die γ_1 - γ_2 -Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit bezüglich der Zeitpunkte t_1, t_2 einer OBPI mit Laufzeit T lautet

$$P[\pi_{t_2}^1 < \gamma_2 | \pi_{t_1}^1 = \gamma_1] = \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{s(t_1, \gamma_1)}{s(t_2, \gamma_2)} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t_2 - t_1)}{\sigma\sqrt{t_2 - t_1}}\right).$$

Beweis : Folgt direkt aus der Unabhängigkeit der Aktienkurszuwächse und

$$P[\pi_{t_2}^1 < \gamma_2 | \pi_{t_1}^1 = \gamma_1] = P[S_{t_2} < s(t_2, \gamma_2) | S_{t_1} < s(t_1, \gamma_1)]$$

■

Die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeiten der bislang betrachteten OBPI Strategien, d.h. der OBPI im engeren Sinne, OBPI mit direkter Partizipation und OBPI mit 100% Partizipation, sind in der Abbildung 1.8 rechts dargestellt. Es zeigt sich, dass einzig die OBPI im engeren Sinne ausreichende Chancen besitzt, dem Cash-Lock zu entgehen. Es sei jedoch darauf hingewiesen, dass die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit eine bedingte Wahrscheinlichkeit darstellt. Wenn die Investitionsquote nach einem Jahr 10% beträgt, illustriert die Abbildung in Abhängigkeit von der Laufzeit die Wahrscheinlichkeit, dass die Investitionsquote weniger als 50% beträgt. Die linke Abbildung zeigt dagegen die Investitionsquote in Abhängigkeit des Aktienkurses. Wir sehen, dass die OBPI mit 100%iger Partizipation in diesem konkreten Beispiel eine deutlich geringere Wahrscheinlichkeit besitzt, überhaupt eine so geringe Investitionsquote zu erzielen. Eine Investitionsquote von 10% nach einem Jahr wird erst erreicht, sofern der Aktienkurs auf 50% des anfänglichen Kurses gefallen ist. In dem Beispiel

ergeben sich diese deutlichen Effekte vor allem aus dem langen Anlagehorizont der OBPI von 15 Jahren. Konkret ergeben sich eine Partizipationsrate von 73,47% bei einem Partizipationslevel von 2,31 für die einfache OBPI bzw. eine Partizipationsrate von 34,92% für die OBPI mit direkter Partizipation und ein Partizipationslevel 2,89 für die OBPI mit 100%iger Partizipation.

Insgesamt zeigt sich, dass die Strategie bei hoher anfänglicher Garantie und langen Laufzeiten oder hohen Volatilitäten nur eine geringe Partizipation ermöglicht. Aus verschiedenen Gründen ergibt sich, dass die OBPI im engeren Sinne den anderen OBPI-Strategien vorzuziehen ist. Sie ermöglicht zum einen die maximale Partizipation, die möglich ist ohne zusätzliche Kreditaufnahmen zuzulassen. Zum anderen scheint sie am ehesten geeignet einen Cash-Lock zu vermeiden und somit nach Kurseinbrüchen am ehesten wieder hohe Investitionsquoten zu erreichen. Ein zweifelloser Vorteil der OBPI ergibt sich, wenn die Option tatsächlich gehandelt wird, da in diesem Fall die Strategie statisch wird und somit kein Modellrisiko existiert.

Sollte es nicht möglich sein, die Option explizit am Finanzmarkt zu erwerben, muss diese über ein dynamisches Portfolio wie oben beschrieben dupliziert werden. In diesem Fall können Missspezifikationen des Modells und insbesondere der Volatilität dazu führen, dass die Garantie nicht gewährleistet werden kann ¹¹.

Ein weiterer Nachteil liegt darin begründet, dass Strategie zwingend voraussetzt, dass das zugrunde liegende Wertpapier über die gesamte Laufzeit dasselbe bleibt. Es ist also nicht möglich, wie z.B. im Rahmen eines Fonds, Umschichtungen zwischen verschiedenen Wertpapieren zu vollziehen. Zusätzlich ist es notwendig einen festen Anlagehorizont zu bestimmen. Es ist zwar möglich, die Strategie vorzeitig zu beenden und gemäß der obigen Betrachtungen zumindest den Barwert der Garantie zu erhalten. Es ist jedoch nicht ohne weitere Annahmen möglich, die Strategie über den Zeitpunkt T hinaus fortzusetzen, da der Delta-Hedge ab diesem Zeitpunkt nicht mehr definiert ist. Das Festlegen eines neuen Anlagehorizonts wäre notwendig. Die Alternative den Anlagehorizont a priori beliebig groß zu wählen, widerspricht den Überlegungen zu Lemma 1.4.5. In diesem Falle entspricht die OBPI der naiven Anlagestrategie.

¹¹Für eine Übersicht des Verhaltens von Optionspreisen in unvollständigen Modellen vgl. z.B. Dudenhausen (2001).

Kapitel 2 - Proportionale Wertsicherungsstrategien ohne Beschränkungen

Als Alternative zu den optionsbasierenden Strategien bieten sich die konstant-proportionalen Wertsicherungsstrategien, Constant Proportional Portfolio Insurance (CPPI), an. Ebenso wie bei den OBPI-Strategien direkt oder durch synthetische Nachbildung in ein gehebeltes Produkt, die Option, investiert wird, so wird bei diesen Strategien der Hebel explizit durch die Wahl des Multipliers vorgegeben. Die Idee besteht darin, zu jedem Zeitpunkt das nicht zur Gewährleistung der Garantie benötigte Kapital mit diesem Hebel in eine riskante Anlage zu investieren. In der einfachen Form, wie zunächst betrachtet wird, wurde sie erstmalig von Black und Jones (1987) und Black und Perold (1992) namentlich in der Literatur erwähnt. Das Konzept einer dynamischen konstant-proportionalen Strategie lässt sich jedoch wenigstens bis Merton (1969) zurückführen, wo gezeigt wurde, dass konstant-proportionale Strategien den erwarteten Nutzen einer CRRA-Nutzenfunktion maximieren.

Im Falle einer dynamischen Portfolio-Anpassung wird durch die Investition in ein Vielfaches des Cushion gewährleistet, dass der Wert der Strategie niemals unter den Floor, der diskontierten Garantie, fallen kann. Als Alternative zu dieser Strategie betrachten wir im Anschluss eine Strategie, die nicht nur zu jedem Zeitpunkt die diskontierte Garantie sichert, sondern stattdessen die Garantie selbst. In diesem Sinne kann der Floor als konstant betrachtet werden und von einer amerikanischen Garantie gesprochen werden. Die Auswirkungen dieser Modifikation werden wir anhand eines Vergleichs beider Strategien im Abschnitt 2.2.3 betrachten.

Die für den Fall des konstanten Floors vorgenommenen Überlegungen sind überdies auch für die Beschreibung einer periodischen Prämie, die in eine einfache CPPI investiert wird, hilfreich. Eine Diskussion der Beziehungen zur CPPI mit konstantem Floor erfolgt in Abschnitt 2.2.4.

Weitere Modifikationen, die vor allem die praktische Umsetzung der Strategie betreffen, werden in den nächsten Kapiteln behandelt.

2.1 Constant Proportion Portfolio Insurance (CPPI)

Die Constant Proportion Portfolio Insurance bezüglich einer risikobehafteten und einer risikolosen Anlage ist durch zwei Eigenschaften beschrieben. Zum einen wird gefordert, dass sie selbstfinanzierend ist und zum anderen wird gefordert, dass der Betrag, der in die risikobehaftete Anlage investiert wird, das so genannte Exposure, durch mC_t gegeben ist. Dabei ist C_t der Cushion bzw. Risikopuffer zur Zeit t wie er in Definition 1.2.4 beschrieben wurde und gibt die Differenz zwischen dem Wert der Strategie und dem Barwert der Garantie an. Im Sinne der OBPI aus dem letzten Abschnitt und der naiven Anlagestrategie aus Beispiel 1.2.2 gibt er also das Kapital an, welches zur Spekulation zur Verfügung steht. Im Sinne einer dynamischen Strategie wird nun zu jedem Zeitpunkt nicht nur der Cushion selbst, sondern ein Vielfaches desselbigen investiert. Dieses Vielfache wird durch den konstanten Multiplier oder Hebel m beschrieben. Durch dynamisches Handeln wird sichergestellt, dass das Exposure im gleichen Maß gegen Null geht wie der Cushion selbst, so dass für stetige Aktienpfade und somit stetige Wertentwicklungen ausreichendes Kapital zur Leistung der Garantie immer gewährleistet ist¹.

Beachtenswert ist hierbei vor allem, dass die Anteile, die zum Zeitpunkt t in die risikolose und risikobehaftete Anlage investiert werden, ausschließlich vom derzeitigen Wert der Strategie V_t und dem Barwert der Garantie G_t abhängig sind. Dies ist ein wesentlicher Unterschied und als Vorteil gegenüber der (synthetischen) OBPI zu sehen, wo durch das Delta auch die Volatilität der Aktie Einfluss auf das Exposure besitzt². Die Strategie, beschrieben durch die investierten Anteile, ist also im Gegensatz zur OBPI Modell-unabhängig.

¹Für die Dynamik des Cushions C_t in einem Modell mit Sprüngen sei auf Cont und Tankov (2007) verwiesen. Beachtenswert ist dabei, dass die grundlegende Struktur der Dynamik aus Gleichung 2.1.4 erhalten bleibt. Der Cushion kann zwar aufgrund der Sprünge negativ werden, solange er positiv ist, lässt er sich aber ebenfalls als Funktion des Aktienkurses und der risikolosen Anlage darstellen.

²Dies gilt natürlich nur im Falle der synthetischen OBPI und der dynamischen Duplikation der entsprechenden Option. Falls die Option tatsächlich gehandelt wird, handelt es sich um eine statische Strategie und der anfängliche Cushion wird in die Option investiert.

Beispiel: CPPI

t	0	1	2	3	4	5
S_t	100	120	130	100	120	135
V_t	1000	1162	1277	846	870	897
G_t	800	808	816	824	832	841
C_t	200	354	461	22	38	56
π_t^1	80%	122%	144%	10%	18%	25%
π_t^0	20%	-22%	-44%	90%	82%	75%

CPPI
 $m = 4 \quad r = 1\%$

Ende Beispiel: CPPI

2.1.1 Dynamik und Verteilung

Um die Strategie von den in den nächsten Abschnitten folgenden Modifikationen abzugrenzen, wollen wir die Strategie als *einfache CPPI* bezeichnen.

Definition 2.1.1 Die *einfache CPPI-Strategie* Φ^{CP} mit Hebel m , Anfangskapital V_0^{CP} und Garantie $G_t = G_0 B_t$ ist zu jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ dadurch definiert, dass die Investition in die risikobehaftete Anlage durch das Produkt aus Hebel und der Differenz aus dem Portfoliowert und dem Barwert der Garantie gegeben ist und der Bedingung der Selbstfinanzierung. Es gilt

$$\phi_t^{1,CP} = \frac{mC_t^{CP}}{S_t} \quad (2.1.1)$$

$$\phi_t^{0,CP} = \frac{V_t^{CP} - mC_t^{CP}}{B_t} \quad (2.1.2)$$

mit $C_t^{CP} = V_t - G_t$.

Üblicherweise wird ein Hebel $m \geq 2$ gewählt und die Garantie ist exogen durch den Endwert G zum Anlagehorizont T , $G_0 = Ge^{-rT}$, gegeben. In diesem Sinne beschreibt G eine europäische Garantie.

Eine direkte Folge aus der Dynamik des Aktienkurses ist³

³Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir auf den Index CP , sofern klar ist, um welche Strategie es sich handelt.

Proposition 2.1.1 *Der Cushion-Prozess einer einfachen CPPI ist gegeben durch*

$$dC_t = C_t ((r + m(\mu - r))dt + \sigma m dW_t)$$

Insbesondere entspricht der Cushion-Prozess einer geometrischen Brownschen Bewegung. Die Lösung der stochastischen Differentialgleichung lautet

$$C_t = C_0 e^{rt} \left(e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right)^m \quad (2.1.3)$$

$$= C_0 e^{rt} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m . \quad (2.1.4)$$

Beweis : Mit $C_t := V_t - G_t$ folgt aus dem Gewinnprozess

$$\begin{aligned} dC_t &= d(V_t - G_t) = V_t \left(\frac{mC_t}{V_t} \frac{dS_t}{S_t} + \left(1 - \frac{mC_t}{V_t} \right) \frac{dB_t}{B_t} \right) - G_t r dt \\ &= mC_t \frac{dS_t}{S_t} + (G_t + C_t - (m-1)C_t) r dt - G_t r dt \\ &= C_t \left(m \frac{dS_t}{S_t} - (m-1)r dt \right) . \end{aligned}$$

Einsetzen der Dynamik des Aktienkurses ergibt

$$= C_t ((m\mu - (m-1)r)dt + m\sigma dW_t) .$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist das stochastische Exponential in 2.1.3. Ein Vergleich mit der Dynamik des Aktienkurses ergibt 2.1.4. ■

Für den Wert der CPPI zur Zeit t ergibt sich aus $V_t = G_t + C_t$

$$V_t = G_t + C_0 e^{rt} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m .$$

Der Wert setzt sich also aus der Garantie und einem nicht-negativen Term zusammen, der proportional zu S_t^m ist. Dies hat zwei interessante Beobachtungen zur Folge. Offensichtlich ist die Strategie pfadunabhängig, womit wir in der Lage sind die Auszahlungsprofile von CPPI und OBPI direkt miteinander zu vergleichen. Dies erfolgt in Abbildung 2.1. Man erkennt, dass die CPPI bei gleichbleibenden oder fallenden Aktienkursen einen Überschuss erzielt. Bei moderaten Zuwächsen des Aktienkurses dominiert die Auszahlung der OBPI, wohingegen bei extrem hohen Gewinnen die CPPI dominiert, was im zweiten Bild für einen großen Multiplier deutlich wird. Dass die CPPI die OBPI bei hohen Gewinnen dominiert liegt an der zweiten Beobachtung. Der Überschuss der CPPI lässt sich nach Gleichung 2.1.4 als Power-Option (mit Strike 0) bzw. Power-Kontrakt interpretieren. Der Proportionalitätsfaktor gibt dabei gerade die Anzahl der gekauften Power-Kontrakte an. In diese Sinne lässt sich die CPPI

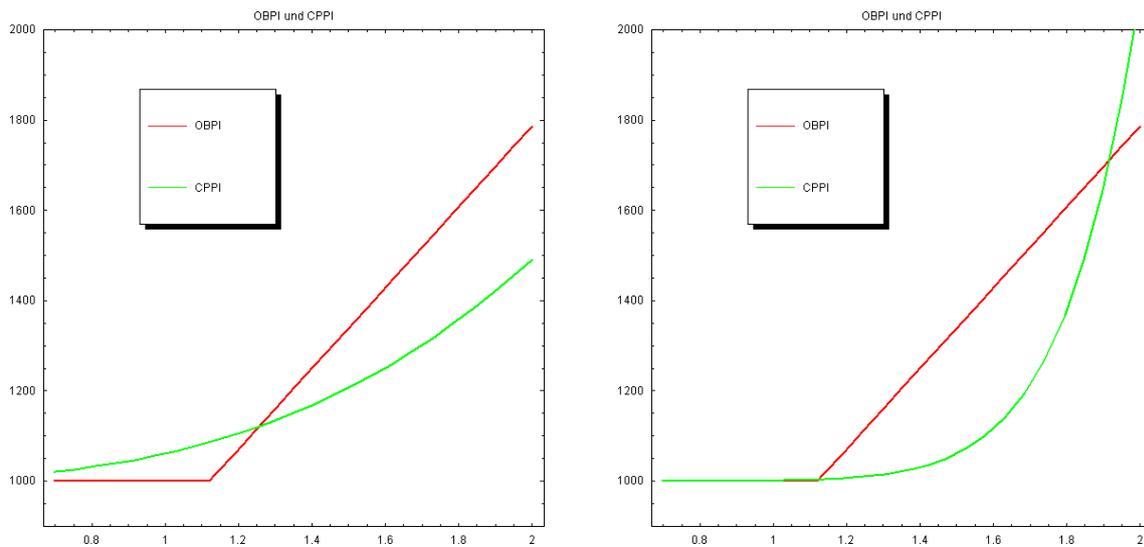


Abbildung 2.1: Auszahlungsprofil einfache CPPI und OBPI bei Kapitalerhaltung $G = V_0 = 1000$ für $m = 3$ bzw. 10 ($S_0 = 1, r = 0.05, \sigma = 0.2, T = 2$)

also auch als OBPI verstehen. Ein Teil des Anfangskapitals wird in die risikolose Anlage investiert, um die Garantie zu gewährleisten und der verbleibende Teil, das anfängliche Cushion, wird in Power-Kontrakte der Potenz m investiert⁴. Dabei stellt man fest, dass die Anzahl der Power-Kontrakte durch die Diskontierung über die Laufzeit in t fallend ist. Diese Verringerung kann als Prämie für den Power-Kontrakt aufgefasst werden. Mit zunehmender Laufzeit verringert sich die Anzahl der Power-Kontrakte um den Faktor $e^{-(m-1)(r+\frac{m}{2}\sigma^2)t}$. Die Verringerung des Bestandes entspricht somit einer impliziten Prämienzahlung. Dieses Verhalten ist, wie wir sehen werden, auch für die folgenden Modifikationen der CPPI typisch. In der Literatur erfolgt häufig ein Vergleich der einfachen CPPI mit der OBPI. Man beachte aber, dass der Anteil, der in die Aktie investiert wird, bei der einfachen CPPI beliebig groß werden und insbesondere mehr als 100% betragen kann. Dieser Effekt ist insbesondere für große Hebel deutlich, wie Abbildung 2.2 zeigt. Dies bedeutet, dass die Strategie nur durch zusätzliche Kreditaufnahmen finanziert werden kann. Im Gegensatz dazu ist der Anteil, der bei der OBPI investiert werden muss begrenzt, vgl. Abschnitt 1.4.2. Insbesondere für die OBPI im engeren Sinne gilt, dass keine zusätzlichen Kreditaufnahmen notwendig sind. Aus diesem Grund scheint es sinnvoller, stattdessen die CPPI unter Kreditbeschränkungen mit der OBPI zu vergleichen. In diesem Fall wird die Pfadunabhängigkeit der einfachen CPPI nicht erhalten bleiben, wie in Kapitel 3 gezeigt wird.

⁴Interessanterweise besteht das Absicherungsargument einer Power-Option mit Auszahlung $(S_T^\lambda - K)^+$ üblicherweise aus einem Delta-Hedge bezogen auf die fiktive Anlage S^λ , vgl. z.B. James (2003). Diese fiktive Anlage entspricht aber einer geeignet normierten, einfachen CPPI mit Garantie 0!

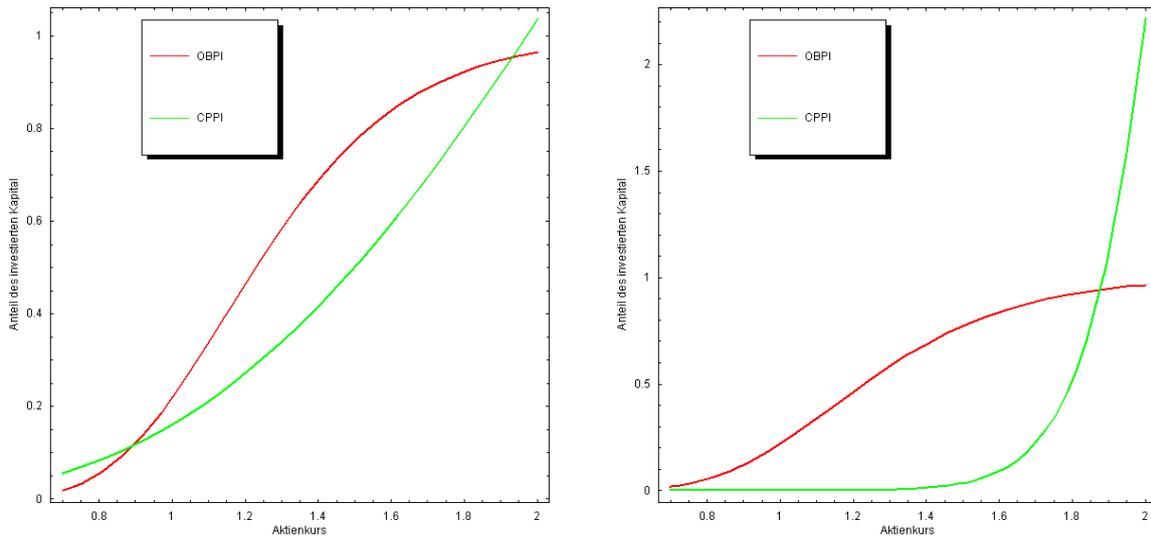


Abbildung 2.2: Anteil des nach 2 Jahren in die Aktie investiertem Kapital für $m = 3$ bzw. 10 ($G = V_0 = 1000, S_0 = 1, r = 0.05, \sigma = 0.2, T = 4$)

Lemma 2.1.1 (Momente) *Das k -te Moment des Cushion ist durch*

$$E [C_t^k] = C_0^k \exp \left\{ \left((m\mu - (m-1)r + \frac{m^2\sigma^2}{2}(k-1)) kt \right) \right\} \quad (2.1.5)$$

gegeben.

Beweis : Aus Gleichung 2.1.3 folgt

$$\begin{aligned} E [C_t^k] &= C_0^k e^{krt} e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)mkt} E [e^{\sigma mkW_t}] \\ &= C_0^k e^{krt} e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)mkt} e^{\frac{\sigma^2 m^2 k^2}{2}t} \end{aligned}$$

da für $Y \sim N(0, \sigma_Y^2)$ gilt: $E [e^Y] = e^{\frac{1}{2}\sigma_Y^2}$. Zusammenfassen der verbleibenden Terme beendet den Beweis. ■

Insbesondere ergibt sich für den Erwartungswert und die Varianz des Endwertes der CPPI

$$E [V_t] = G_t + C_0 \exp \{ (r + m(\mu - r)) t \} \quad (2.1.6)$$

$$Var [V_t] = C_0^2 \exp \{ 2(r + m(\mu - r)) t \} (\exp \{ m^2 \sigma^2 t \} - 1). \quad (2.1.7)$$

Dabei ist auffällig, dass der erwartete Endwert der einfachen CPPI unabhängig von der Volatilität der Aktie ist. Im Gegensatz dazu wächst die Standardabweichung exponentiell in der Volatilität, vgl. Abbildung 2.3. Dies erklärt bereits intuitiv, weshalb die Eigenschaften der CPPI unter Markt-Unvollkommenheiten wie Kreditbeschränkungen und Handelsbeschränkungen nicht nur vom Drift der Aktie, sondern im mindestens gleichen Maße von

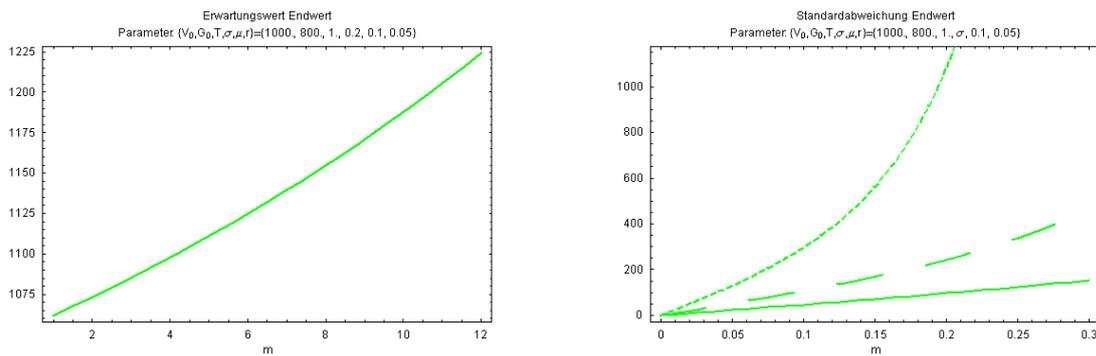


Abbildung 2.3: Erwartungswert und Standardabweichung der einfachen CPPI in Abhängigkeit von m bzw. σ (für $m = 2, 4$ bzw. 8) mit $(G = 800, V_0 = 1000, \mu = 0.1, r = 0.05, T = 1)$

der Volatilität abhängen werden. Eine zweite hervorzuhebende Eigenschaft besteht darin, dass sämtliche Momente monoton wachsend im Multiplier sind⁵. Insbesondere für die ersten beiden Momente zeigt sich somit, dass die Wahl von m die Risikobereitschaft des Investors beschreibt. Ein hoher Multiplier impliziert einen höheren erwarteten Endwert bei gleichzeitig höherer Varianz. Im Kapitel zur CPPI unter Kreditbeschränkungen werden wir sehen, dass diese Aussage im allgemeinen zumindest für den Erwartungswert nicht gilt.

Die weiteren Verteilungseigenschaften wie Dichte und Verteilungsfunktion des Endwertes lassen sich nun direkt aus der Verteilung des Aktienkurses bestimmen. Für eine Betrachtung sei auf Black und Perold (1992) bzw. Bertrand und Prigent (2002) verwiesen.

2.1.2 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten

Aus den Verteilungseigenschaften der Aktie lässt sich auch das nächste Resultat herleiten. Abbildung 2.2 zeigt, dass bei einem großen Hebel selbst bei einem 50%-igen Aktienkurszuwachs nur ein geringer Anteil in die Aktie investiert wird. Dies ändert sich erst bei noch höheren Zuwächsen. In den Beispielen erkennt man, dass ab einem Aktienkurs von ca. 180% eine höhere Investitionsquote als bei der OBPI erreicht wird. Es stellt sich somit die Frage, welche Investitionsquoten mit welcher Verteilung angenommen werden. Eine Beschreibung erfolgt in Form der Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit und der Wahrscheinlichkeit einer Cash-Dominanz.

Proposition 2.1.2 Die α - β -Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit lautet

$$P[\pi_T^1 \leq \beta \mid \pi_t^1 = \alpha] = N\left(\frac{\frac{1}{m} \ln \frac{\beta(m-\alpha)}{\alpha(m-\beta)} - (\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (2.1.8)$$

⁵Das gilt unter der Annahme $\mu > r$, was den Standardfall darstellt.

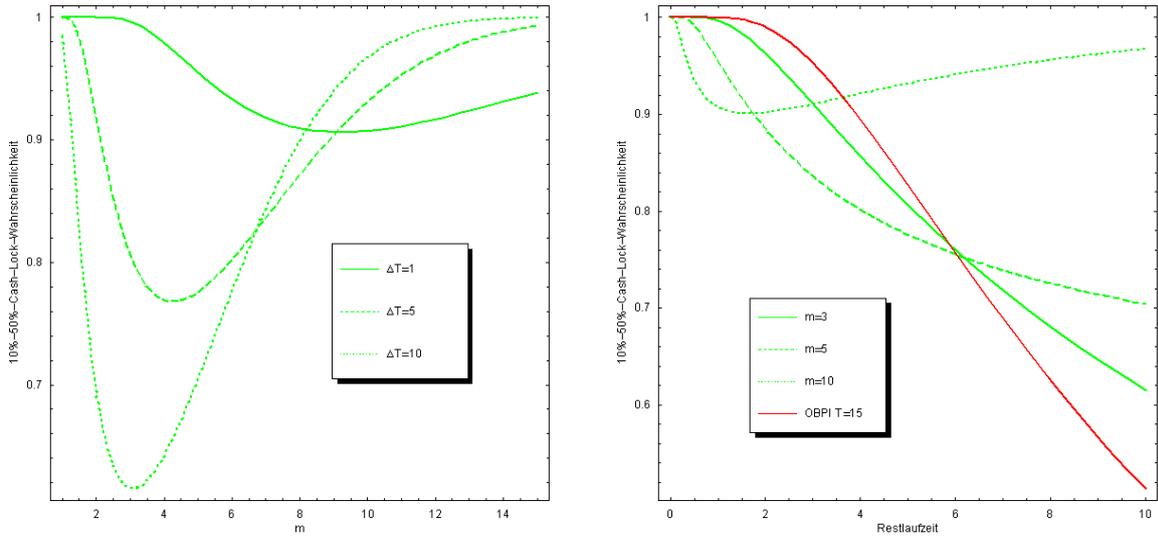


Abbildung 2.4: Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit ($r = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $\mu = 0,15$)

Beweis : Der relative Anteil der risikobehafteten Anlage am Portfolio für die CPPI lautet $\pi_t^1 = \frac{mC_t}{V_t}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 P \left[\pi_T^1 \leq \beta \mid \pi_t^1 = \alpha \right] &= P \left[(m - \beta)C_T \leq \beta G_T \mid (m - \alpha)C_t = \alpha G_t \right] \\
 &= P \left[C_t \left(e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \right)^m \leq \frac{\beta}{m - \beta} G_t \mid C_t = \frac{\alpha}{m - \alpha} G_t \right] \\
 &= P \left[\frac{\alpha}{m - \alpha} \left(e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \right)^m \leq \frac{\beta}{m - \beta} \right] \\
 &= P \left[W_T - W_t \leq \frac{1}{\sigma} \left(\frac{1}{m} \ln \frac{\beta(m - \alpha)}{\alpha(m - \beta)} - (\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)(T - t) \right) \right]
 \end{aligned}$$

durch Ausnutzen der Unabhängigkeit der Zuwächse der Brownschen Bewegung. ■

Im Gegensatz zur optionsbasierten Strategien zeigt sich, dass die Cash-Lock- Wahrscheinlichkeit einzig von der Differenz der beiden betrachteten Zeitpunkten abhängt. Falls der zweite Zeitpunkt mit dem Anlagehorizont übereinstimmt, ist die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit nur von der Restlaufzeit der Strategie abhängig, während bei der OBPI gemäß Proposition 1.4.6 auch der Zeitpunkt, zu dem die Strategie cash-dominiert wird, von Bedeutung ist. Insbesondere lässt sich aus Gleichung 2.1.8 auch die Wahrscheinlichkeit der Cash-Dominanz herleiten, indem für α die anfängliche Investitionsquote gewählt wird. Die Unabhängigkeit vom Zeitpunkt der Cash-Dominanz kann als Zeit-Invarianz der CPPI (bezüglich des Cash-Locks) angesehen werden.

Unabhängig von den konkreten Investitionsquoten α und β sehen wir anhand der Gleichung 2.1.8 sofort eine notwendige Bedingung dafür, dass sich die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit über die Restlaufzeit verringert, nämlich $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$. Die Abbildung 2.4 verdeutlicht

diesen Zusammenhang in Abhängigkeit von der Restlaufzeit und des Hebels. Insgesamt zeigt sich, dass die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit selbst bei einer vergleichsweise hohen erwarteten Rendite der Aktie von 15% auch für lange Zeiträume wie 10 Jahre Restlaufzeit mit mind. 60% sehr hoch ist. Ebenfalls auffällig ist die Tatsache, dass, sofern die Investitionsquote unter 10% gefallen ist, je nach verbleibender Restlaufzeit ein Minimum in der Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit existiert. Dies könnte eine Modifikation der CPPI mit einem zeitabhängigen Multiplier motivieren, wie er implizit in der OBPI enthalten ist. Anstelle den Multiplier als nicht-konstant zu wählen, lässt sich der in die Aktie investierte Betrag auch durch einen größeren Cushion erhöhen. Eine Möglichkeit besteht darin, den Floor zu modifizieren. Dies bildet die Motivation für den Abschnitt 2.2.

Im direkten Vergleich zur OBPI zeigt sich in der rechten Abbildung, dass die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit für die OBPI erst nach vergleichsweise langer Zeit, im Beispiel in Abhängigkeit vom Multiplier nach 4-6 Jahren, eine geringere Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit als die einfache CPPI besitzt. Die Chance, dass sich die CPPI in kurzer Zeit „erholt“, ist also größer.

Als nächstes betrachten wir das Risiko eine Rendite unterhalb der risikolosen Verzinsung zu erhalten, d.h. die relative Verlustwahrscheinlichkeit und deren Grenzwert für einen beliebig großen Anlagehorizont.

Korollar 2.1.2 *Die relative Verlustwahrscheinlichkeit ist durch*

$$P[V_t \leq V_0 e^{rt}] = \mathcal{N} \left(\frac{-(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)\sqrt{t}}{\sigma} \right)$$

gegeben. Für $t \rightarrow \infty$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[V_t \leq V_0 e^{rt}] = \begin{cases} 0 & \mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2 \\ \frac{1}{2} & \mu = r + \frac{m}{2}\sigma^2 \\ 1 & \mu < r + \frac{m}{2}\sigma^2 \end{cases} .$$

Beweis : Aus der Dynamik folgt

$$\begin{aligned} P[V_t \leq V_0 e^{rt}] &= P[C_t \leq V_0 e^{rt} - G_t] \\ &= P[C_t \leq C_0 e^{rt}] \\ &= P[m(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)t + m\sigma W_t \leq 0] \\ &= \mathcal{N} \left(-\frac{(\mu - r - \frac{m\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}} \right) \end{aligned}$$

Die langfristige Verlustwahrscheinlichkeit folgt direkt. ■

Damit die Strategie auch auf lange Sicht Erträge oberhalb der risikolosen Rendite erzielt, ist es wiederum notwendig, dass die Bedingung $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$ erfüllt ist. Abschließend sei die langfristige Rendite durch das folgenden Korollar bestimmt. Dies stellt einen weiteren Zusammenhang zwischen dem Strategie-Parameter m und den Modellparametern μ und σ dar, der zu beachten ist.

Korollar 2.1.3 *Für die langfristige Rendite einer einfachen CPPI gilt:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t/V_0]}{t} = \begin{cases} m\mu - (m-1)r & \mu > r \\ r & \mu \leq r \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Beweis : Nach Gleichung 2.1.6 gilt $E[V_t] = G_t + C_0 e^{(r+m(\mu-r))t}$. Damit

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t] - \ln E[V_0]}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{rt} (G_0 + C_0 e^{m(\mu-r)t})}{t} \\ &= r + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln (G_0 + C_0 e^{m(\mu-r)t})}{t} \end{aligned}$$

Für $\mu > r$ erhält man durch Anwenden der Regel von L'Hôpital

$$\begin{aligned} &= r + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_0 m (\mu - r) e^{m(\mu-r)t}}{G_0 + C_0 e^{m(\mu-r)t}} \\ &= r + m(\mu - r) \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C_0 e^{m(\mu-r)t}}{G_0 + C_0 e^{m(\mu-r)t}} \\ &= m\mu - (m-1)r \end{aligned}$$

und für $\mu \leq r$

$$= r$$

■

Damit die CPPI auf lange Sicht eine höhere erwartete Rendite als die risikolose Anlage erzielt, muss also $\mu > r$ gelten, d.h., aus der üblicherweise angenommenen Vorteilhaftigkeit der Aktie gegenüber der der risikolosen Anlage folgt auch die Vorteilhaftigkeit der Investition in die einfache CPPI. Ansonsten resultieren Erträge nur aus der risikolosen Verzinsung der Garantie und die Rendite entspricht r . Insgesamt ist diese Bedingung an die Rendite der Aktie schwächer als die oben erwähnte Bedingung $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$ und wird für die weiteren Überlegungen von nachrangiger Bedeutung sein.

2.2 CPPI mit konstantem Floor

Ausgangspunkt der Betrachtungen zur CPPI mit konstantem Floor sind die Feststellungen in Abschnitt 2. Dort wurde ersichtlich, dass aufgrund der Konstruktion eine sehr große Wahrscheinlichkeit besteht, dass die Strategie auf lange Sicht cash-dominiert wird, d.h. der Anteil der Investition in die risikolose Aktie gegen Null konvergiert. Ein wesentlicher Anteil an dieser Eigenschaft liegt darin begründet, dass die Garantie mit dem risikolosen Zinssatz wächst und somit der Cushion bei gleichbleibenden Portfoliowerten fällt. Die Idee einer CPPI mit konstanter Garantie bzw. einer Garantie, die mit einer geringeren Verzinsung als der risikolosen wächst, besteht darin, diese Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit zu mindern.

Das Vorhandensein einer konstanten (oder gering wachsenden) Garantie lässt sich aber auch durch die praktische Anwendung begründen. So garantieren z.B. Versicherungen Kapitalerhaltung der, um den Risikobeitrag geminderten, Prämien oder eine Verzinsung dieser mit einem Kalkulationszins, der üblicherweise unterhalb des risikolosen Anlagezins liegt.

Ein weiterer Vorteil liegt darin, dass für Anleger, die einen bestimmten Betrag zu einem unspezifizierten Zeitpunkt in der Zukunft sichern wollen, dieser Betrag zu jedem Zeitpunkt gewährleistet wird, ohne dass auf Ertragschancen der risikobehafteten Anlage verzichtet werden muss. Um dies zu verdeutlichen, sei auf die einfache CPPI und das folgende Beispiel hingewiesen. Ein Anleger, der den Betrag G zu einem festen Zeitpunkt T sichern will, muss einen anfänglichen Floor von $G_0 = Ge^{-rt}$ wählen. Damit ist jedoch nicht gewährleistet, dass der Wert der Strategie zu den Zeitpunkten $t < T$ ebenfalls größer als G ist. Um zu jedem Zeitpunkt die Garantie zu gewährleisten, müsste $G_0 = G$ als anfänglicher Floor gewählt werden. Damit erfolgt aber zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ eine Überabsicherung des Portfolios, was sich umgekehrt mindernd auf die Beteiligung an möglichen Kursgewinnen auswirkt. Brennan und Schwartz (1988) bezeichnen eine solche Strategie als zeitinvariant, wobei dort zusätzlich angenommen wird, dass die Strategie außerdem ausschließlich vom Wert der risikobehafteten Anlage zu jedem Zeitpunkt und nicht vom Zeitpunkt selbst abhängig ist. Die hier auftretende Zeit-Invarianz muss allgemeiner interpretiert werden, da die Strategie zwar nicht vom Zeitpunkt selbst, aber von allen bis zu diesem Zeitpunkt angenommenen Kursen der risikobehafteten Anlage abhängen wird.

Wir werden uns im folgenden darauf beschränken, den Fall einer konstanten Strategie zu betrachten. Dieser Fall kann in Anlehnung an die Unterscheidung zwischen amerikanischen und europäischen Optionsrechten als Amerikanische Garantie betrachtet werden. Ausgehend von den unten stehenden Argumenten lässt sich die Dynamik des Cushion-Prozesses analog für Garantien, die mit vom risikolosen Zins verschiedenen Zinsraten wachsen, bestimmen. Die weiteren Argumente bezüglich der Risikomaße und der Verteilung bleiben identisch.

Wir werden feststellen, dass sich der Wert der Strategie zur Zeit t als Funktion des arithme-

tisches Mittel bis zum Zeitpunkt t und des Wertes der Anlage zur Zeit t darstellen lässt. Zur Beschreibung der Verteilungseigenschaften werden wir insbesondere auf die Überlegungen aus Abschnitt 1.3.2 zurückgreifen.

Beispiel: CPPI mit konstanter Garantie

t	0	1	2	3	4	5
S_t	100	120	130	100	120	135
V_t	1000	1162	1280	831	862	899
G_t	800	800	800	800	800	800
C_t	200	362	480	31	62	99
π_t^1	80%	125%	150%	15%	29%	44%
π_t^0	20%	-25%	-50%	85%	71%	56%

CPPI mit konstanter Garantie

$$m = 4 \quad r = 1\%$$

Ende Beispiel: CPPI mit konstanter Garantie

2.2.1 Dynamik und Verteilung

Ausgehend von den Ergebnissen zur einfachen CPPI, lässt sich die CPPI mit konstantem Floor folgendermaßen definieren.

Definition 2.2.1 Die *CPPI-Strategie* Φ^{CCP} mit konstantem Floor $G_t \equiv G$, Anfangskapital V_0^{CCP} und Hebel m ist jedem Zeitpunkt $t \geq 0$ dadurch definiert, dass die Investition in die risikobehaftete Anlage durch das Produkt aus Hebel und der Differenz aus dem Portfoliowert und dem konstanten Floor ist und der Bedingung der Selbstfinanzierung. Es gilt

$$\phi_t^{1,CCP} = \frac{mC_t^{CCP}}{S_t} \quad (2.2.1)$$

$$\phi_t^{0,CCP} = \frac{V_t^{CCP} - mC_t^{CCP}}{B_t} \quad (2.2.2)$$

mit $C_t^{CCP} = V_t^{CCP} - G$.

Die formale Bedingung an die zu haltenden Aktienanteile bleibt also identisch, jedoch ist der Cushion nun nicht durch den Wert der Strategie abzüglich des Barwertes der Garantie, sondern durch den Wert abzüglich einer Konstanten beschrieben. Im Gegensatz zu den

vorherigen Überlegungen gilt also $dG_t = 0$. Die Dynamik des Cushion-Prozess ist dann durch die Stochastische Differentialgleichung⁶

$$\begin{aligned} dC_t &= d(V_t - G_t) \\ &= dV_t \\ &= V_t \left(\frac{mC_t}{V_t} \frac{dS_t}{S_t} + \left(1 - \frac{mC_t}{V_t} \right) \frac{dB_t}{B_t} \right) \\ &= C_t \left(m \frac{dS_t}{S_t} + \left(\frac{G}{C_t} - (m-1) \right) \frac{dB_t}{B_t} \right) \end{aligned}$$

gegeben. Einsetzen der Dynamik für die Aktie S_t und die risikolose Anlage B_t im Black-Scholes-Modell ergibt

$$dC_t = (m\mu - (m-1)r) \left(\frac{rG}{m\mu - (m-1)r} + C_t \right) dt + C_t m\sigma dW_t \quad (2.2.3)$$

$$=: A \left(\frac{B}{A} + C_t \right) dt + \varsigma C_t dW_t \quad . \quad (2.2.4)$$

Im Sinne der Klassifizierung von Kloeden und Platen (1999, Kapitel 4) handelt es sich hierbei um eine inhomogene lineare Stochastische Differentialgleichung mit multiplikativem Störterm und konstanten Koeffizienten. Multiplikation mit dem „integrierendem Faktor“ $e^{-(A-\frac{1}{2}\varsigma^2)t-\varsigma W_t}$ von Gleichung 2.2.4 ergibt

$$\begin{aligned} d \left(C_t e^{-(A-\frac{1}{2}\varsigma^2)t-\varsigma W_t} \right) &= \left(dC_t - (A - \frac{1}{2}\varsigma^2)C_t dt - \varsigma C_t dW_t + \frac{1}{2}\varsigma^2 C_t d\langle W \rangle_t - \varsigma d\langle W, C \rangle_t \right) \\ &\quad \cdot \exp \left(-(A - \frac{1}{2}\varsigma^2)t - \varsigma W_t \right) \\ &= \exp \left(-(A - \frac{1}{2}\varsigma^2)t - \varsigma W_t \right) B dt \quad . \end{aligned}$$

Man beachte, dass die rechte Seite nun nicht mehr von C_t abhängig ist. Daraus resultiert die folgenden Proposition.

Proposition 2.2.1 *Der Cushion-Prozess einer CPPI mit konstanter Garantie ist gegeben durch*

$$C_t = e^{(m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2}m^2\sigma^2)t + m\sigma W_t} \left(C_0 + rG \int_0^t e^{-(m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2}m^2\sigma^2)s - m\sigma W_s} ds \right) \quad (2.2.5)$$

$$= C_0 e^{rt} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m + rG \int_0^t e^{r(t-s)} \left(\frac{S_t}{S_s} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)(t-s)} \right)^m ds \quad (2.2.6)$$

⁶Aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichten wir wiederum auf den Index CCP , sofern klar ist, um welche Strategie es sich handelt.

Beweis : Aus der obigen Darstellung ergibt sich

$$C_t = e^{(A-\frac{1}{2}\zeta^2)t+\zeta W_t} \left(C_0 + B \int_0^t \exp \left(-(A-\frac{1}{2}\zeta^2)s - \zeta W_s \right) ds \right) \quad (2.2.7)$$

Der Rest folgt durch Einsetzen. ■

Es sei an die Dynamik des Cushion einer einfachen CPPI (vgl. Proposition 2.1.1) mit anfänglicher Garantie $G_0 = G$ erinnert. Wir bezeichnen diesen durch $\tilde{C} = (V_0 - G)e^{rt} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m$. Man erkennt, dass dieser mit dem ersten Term in Gleichung 2.2.6 übereinstimmt. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} C_t &= \tilde{C}_t + rG \int_0^t e^{(m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2}m^2\sigma^2)(t-s) + m\sigma(W_t - W_s)} ds \\ &= \tilde{C}_t + rG \int_0^t e^{r(t-s)} \left(\frac{S_t}{S_s} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)(t-s)} \right)^m ds \\ &= \tilde{C}_t + rG \int_0^t \frac{\tilde{C}_t}{\tilde{C}_s} ds \quad . \end{aligned}$$

Bevor wir uns den konkreten Eigenschaften des Cushions und damit des Wertes widmen, wollen wir kurz das obige Ergebnis diskutieren. Die Betrachtungen der einfachen CPPI haben ergeben, dass sie als statische Strategie interpretiert werden kann, wobei die Garantie risikolos angelegt wird und der anfängliche Cushion in einen Power-Kontrakt investiert wird. Davon ausgehend lässt sich die CPPI mit konstantem Floor analog interpretieren, wobei die Zinsgewinne aus der risikolosen Anlage dazu verwendet werden, regelmäßig weitere Power-Kontrakte zu kaufen. Der jeweils gültige Preis ist dabei durch den Wert des Cushions der einfachen CPPI gegeben. Mit dieser Interpretation ist es dann auch direkt möglich z.B. das Verhalten einer CPPI im Falle regelmäßig diskret erfolgender Prämienzahlungen zu bestimmen, wie wir in Abschnitt 2.2.4 sehen werden.

Der Cushion einer CPPI mit konstantem Floor ist also mindestens so groß wie der Cushion einer einfachen CPPI. Insbesondere ist somit auch das Exposure, also der in die Aktie investierte Betrag, bei einer CPPI mit konstantem Floor mindestens genauso groß wie das Exposure einer einfachen CPPI. Man beachte, dass a priori jedoch nicht klar ist, ob damit auch die Investitionsquote größer ist. Dazu muss zusätzlich der Wert der CPPI mit konstantem Floor betrachtet werden, der sich aus Cushion und Garantie zu $V_t = C_t + G = \tilde{C}_t + G_0 \left(1 + r \int_0^t \frac{\tilde{C}_t}{\tilde{C}_s} ds \right)$ ergibt.

Proposition 2.2.2 *Die Investitionsquote in die Aktie einer CPPI mit konstanter Garantie G ist zu jedem Zeitpunkt $t > 0$ größer als die Investitionsquote einer einfachen CPPI deren*

anfängliche Garantie mit $G_0 = G$ übereinstimmt.

$$\frac{mC_t}{V_t} > \frac{m\tilde{C}_t}{\tilde{V}_t}$$

Beweis : vgl. Appendix B ■

Zur Beschreibung der Verteilung werden wir nun auf die Ergebnisse aus Abschnitt 1.3.2 zurückgreifen. Dazu schreiben wir Gleichung 2.2.5 zu

$$C_t = e^{\theta t + m\sigma W_t} \left(C_0 + rG \int_0^t e^{-(\theta s + m\sigma W_s)} ds \right)$$

um, wobei $\theta := m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2}m^2\sigma^2$. Mit Korollar 1.3.9 erhalten wir die Proposition

Proposition 2.2.3 *Das n -te Moment des Cushions einer CPPI mit konstantem Floor ist durch*

$$E[C_t^n] = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!} C_0^{n-i} \left(\frac{rG}{m^2\sigma^2} \right)^i \sum_{j=0}^i c_{j,i}^{(-n - \frac{\theta}{m^2\sigma^2})} e^{(\theta + \frac{n-j}{2}m^2\sigma^2)(n-j)t}$$

gegeben. Dabei ist $c_{j,i}^{(\varsigma)} := \prod_{\substack{k \neq j \\ 0 \leq k \leq i}} \frac{2}{(\varsigma+j)^2 - (\varsigma+k)^2}$.⁷

Beweis : vgl. Appendix B ■

Aufgrund des Zusammenhangs zwischen Wert, Cushion und Garantie der CPPI mit konstantem Floor und der Eigenschaft, dass die Garantie hier konstant ist, lassen sich somit auch die Momente des Wertes einer CPPI mit konstantem Floor direkt angeben. Für $p \in \mathbb{N}$ erhält man $E[V_t^p] = \sum_{n=0}^p \binom{p}{n} G^{p-n} E[C_t^n]$. Für spätere Betrachtungen ist es hilfreich den Erwartungswert explizit darzustellen.

Korollar 2.2.1 *Der Erwartungswert des Endwertes einer CPPI mit konstantem Floor ist für $m\mu \neq (m-1)r$ durch*

$$E[V_t] = G + C_0 e^{(m\mu - (m-1)r)t} + \frac{rG}{m\mu - (m-1)r} (e^{(m\mu - (m-1)r)t} - 1) \quad (2.2.8)$$

gegeben.

Beweis : vgl. Appendix B ■

⁷Genauer müssten an dieser Stelle noch zusätzliche Bedingungen an θ gestellt werden, die sichern, dass der Term $c_{j,i}$ wohldefiniert ist. Konkret muss gelten $j - n - \frac{\theta}{m^2\sigma^2} \neq -(k - n - \frac{\theta}{m^2\sigma^2}) \forall j, k \leq n$ bzw. $\frac{\theta}{m^2\sigma^2} \neq j + k - 2n$. Eine hinreichende Bedingung ist $\theta > 0$, die wir im folgenden als erfüllt annehmen.

Im Vergleich zur einfachen CPPI ergibt sich daraus die folgende Beobachtung. Sofern die Aktienkursrendite oberhalb der risikolosen Verzinsung liegt, d.h. der Standardfall $\mu > r$, ist die erwartete Auszahlung der CPPI mit konstantem Floor größer als die der einfachen CPPI mit gleicher anfänglicher Garantie. Durch Umschreiben der Gleichung 2.2.8 erhält man

$$\begin{aligned}
E[V_t] &= C_0 e^{(m\mu - (m-1)r)t} + G \frac{m\mu - (m-1)r - r + r e^{(m\mu - (m-1)r)t}}{m\mu - (m-1)r} \\
&= E[\tilde{C}_t] + G e^{rt} \frac{m(\mu - r)e^{-rt} + r e^{m(\mu - r)t}}{m\mu - (m-1)r} \\
&\geq E[\tilde{C}_t] + \tilde{G}_t \frac{m(\mu - r)(1 - rt) + r(1 + m(\mu - r)t)}{m\mu - (m-1)r} \\
&= E[\tilde{C}_t] + \tilde{G}_t
\end{aligned}$$

Intuitiv ergibt sich diese Aussage, da die Investitionsquote größer ist und somit aus den erwarteten höheren Aktienkurszuwächsen auch ein höherer Endwert der Strategie resultiert. Abschließend sei die Verteilung des Endwertes der CPPI mit konstantem Floor durch die folgende Darstellung bestimmt.

Proposition 2.2.4 *Die Dichte des auf den Endwert des Aktienkurses bedingten Cushion ist gegeben durch*

$$\tilde{f}(c) dc := P[C_t \in dc | S_t = s] = \frac{m^2 \sigma^2}{4rG} e^{2w(s)} a_{\left(\frac{m^2 \sigma^2}{4}\right)} \left(w(s), \frac{m^2 \sigma^2}{4rG} (ce^{2w(s)} - C_0) \right) dc \quad .$$

mit $w(s) = \frac{1}{2} \left(m \ln \frac{S_0}{s} + (r + m \frac{\sigma^2}{2})(m-1)t \right)$ und $a_t(x, u)$ definiert wie in Proposition 1.3.1.

Es sei darauf hingewiesen, dass damit die unbedingte Dichte als Randverteilung der gemeinsamen Verteilung des Cushion und des Aktienkurses

$$\begin{aligned}
f(c) dc := P[C_t \in dc] &= \int_0^\infty P[C_t \in dc | S_t = s] P[S_t \in ds] dc \\
&= \int_0^\infty \tilde{f}(c) \frac{1}{\sigma \sqrt{t}} \phi \left(\frac{\ln \frac{s}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma \sqrt{t}} \right) ds dc
\end{aligned}$$

dargestellt werden kann. Dabei bezeichnet $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ die Dichte der Standardnormalverteilung. Für die Dichte des Wertes der CPPI mit konstantem Floor gilt dann für $v > G$

$$\begin{aligned}
P[V_t \in dv | S_t = s] &= \tilde{f}(v - G) dv \\
P[V_t \in dv] &= f(v - G) dv \quad .
\end{aligned}$$

Praktisch ergibt sich das Problem, dass die Dichte der CPPI mit konstantem Floor ein zweifaches, uneigentliches Integral darstellt, und somit numerisch unter Umständen nur

aufwendig berechenbar ist. Alternativ bieten sich Monte-Carlo-Simulationen an, wobei die obigen Momente als Kontrollvariate zur Varianzreduktion verwendet werden können. Wie Tabelle 2.1 zeigt, besitzt die CPPI mit konstantem Floor ebenso wie die einfache CPPI eine sehr hohe Kurtosis. Die daraus resultierenden Extremereignisse sorgen jedoch dafür, dass aus Simulationen gewonnene Ergebnisse häufig ungenau werden.⁸ Aus diesem Grund basiert der in Abschnitt 2.2.3 vorgenommene Vergleich auf den analytischen Ergebnissen.

2.2.2 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten

Da die Investitionsquote zur Zeit t analog zur einfachen CPPI eine Funktion des Wertes zur Zeit t ist, lässt sich die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit direkt aus der obigen Verteilung des Wertes bestimmen. Da die Zuwächse der CPPI mit konstantem Floor ausschließlich vom Wert des derzeitigen Cushion und ansonsten unabhängig und identisch verteilt sind, gilt für die α - β -Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
 P[\pi_T^1 \leq \beta \mid \pi_t^1 = \alpha] &= P[(m - \beta)C_T \leq \beta G \mid (m - \alpha)C_t = \alpha G] \\
 &= P\left[C_T \leq \frac{\beta}{(m - \beta)}G \mid C_t = \frac{\alpha}{(m - \alpha)}G\right] \\
 &= P\left[C_{T-t} \leq \frac{\beta}{(m - \beta)}G \mid C_0 = \frac{\alpha}{(m - \alpha)}G\right] \\
 &= P\left[V_{T-t} \leq \frac{m}{(m - \beta)}G \mid G = \frac{m - \alpha}{m}V_0\right].
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit einer Investitionsquote unterhalb von β zur Zeit T bedingt auf die Investitionsquote von α zur Zeit t lässt sich also aus der Verteilung des Cushion zur Zeit $T - t$ einer sonst identischen Strategie mit anfänglichem Cushion $C_0 = \frac{\alpha}{(m - \alpha)}G$ bestimmen. Für die langfristige Rendite des Erwartungswert gilt das folgende Korollar

Korollar 2.2.2 *Für die langfristige Rendite einer CPPI mit konstantem Floor gilt:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t/V_0]}{t} = \begin{cases} m\mu - (m - 1)r & \mu > \frac{m-1}{m}r \\ 0 & \mu < \frac{m-1}{m}r \end{cases} \quad (2.2.9)$$

⁸Dies entspricht dem aus der Statistik bekannten Problem, geeignete Schätzer für Extremereignisse zu finden. Vgl. Embrechts et al. (1999, Kapitel 6)

Beweis : Mit Korollar 2.2.1 erhält man für $m\mu - (m - 1)r > 0$

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t] - \ln E[V_0]}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(G + C_0 e^{(m\mu - (m-1)r)t} + \frac{rG}{m\mu - (m-1)r} (e^{(m\mu - (m-1)r)t} - 1) \right)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(C_0 e^{(m\mu - (m-1)r)t} + \frac{rG}{m\mu - (m-1)r} (e^{(m\mu - (m-1)r)t} - 1) \right)}{t} \\
&= (m\mu - (m - 1)r) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(C_0 + \frac{rG}{m\mu - (m-1)r} (1 - e^{-(m\mu - (m-1)r)t}) \right)}{t} \\
&= (m\mu - (m - 1)r)
\end{aligned}$$

und $(m\mu - (m - 1)r) < 0$

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t] - \ln E[V_0]}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(G - \frac{rG}{m\mu - (m-1)r} \right)}{t} \\
&= 0 \quad ,
\end{aligned}$$

was zu beweisen war. ■

Insbesondere sind die langfristige Renditen einer CPPI mit konstantem Floor und einer einfachen CPPI für $\mu > r$, d.h. im Falle eines positiven Marktpreis für das Risiko der zugrunde liegenden Aktie, identisch. Obwohl die Garantie gegenüber einer einfachen CPPI mit gleichem anfänglichem Floor geringer ist, erzielt die CPPI mit konstantem Floor keinen Überschuss. Intuitiv erklärt sich das dadurch, dass für die langfristige Rendite bei beiden Strategien ausschließlich die Rendite des Cushion maßgeblich ist und der Cushion in beiden Fällen als Investition in einen Power-Kontrakt betrachtet werden kann.

2.2.3 Vergleich mit einfacher CPPI

Um einen sinnvollen Vergleich mit der einfachen CPPI zu gewährleisten, ist es zunächst notwendig darauf hinzuweisen, dass unterschiedliche Garantieleistungen vorliegen. Aus diesem Grund erfolgt der Vergleich der CPPI mit konstantem Floor jeweils zum einen mit einer einfachen CPPI, deren anfängliche Garantie den gleichen Wert wie der konstante Floor aufweist und zum anderen mit einer einfachen CPPI, deren Endgarantie den gleichen Wert aufweist. Der hier betrachtete Anlagehorizont beträgt 5 Jahre, so dass wir, ausgehend von einem konstanten Floor von 800, Endgarantien von 800 und $800e^{rT} = 1.027$ miteinander vergleichen.

In der Analyse beschränken wir uns auf zwei unterschiedliche Szenarien für die Parameter der Strategie. Zum einen betrachten wir einen Multiplier von $m = 3$, wodurch die Bedingung zur langfristigen Sicherung einer oberhalb der risikolosen Anlage erzielten Verzinsung, $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$, bei Modellparametern von $\mu = 15\%$, $r = 5\%$ und $\sigma = 20\%$ erfüllt ist. Zum anderen einen Multiplier von $m = 6$, der diese Bedingung gerade verletzt.

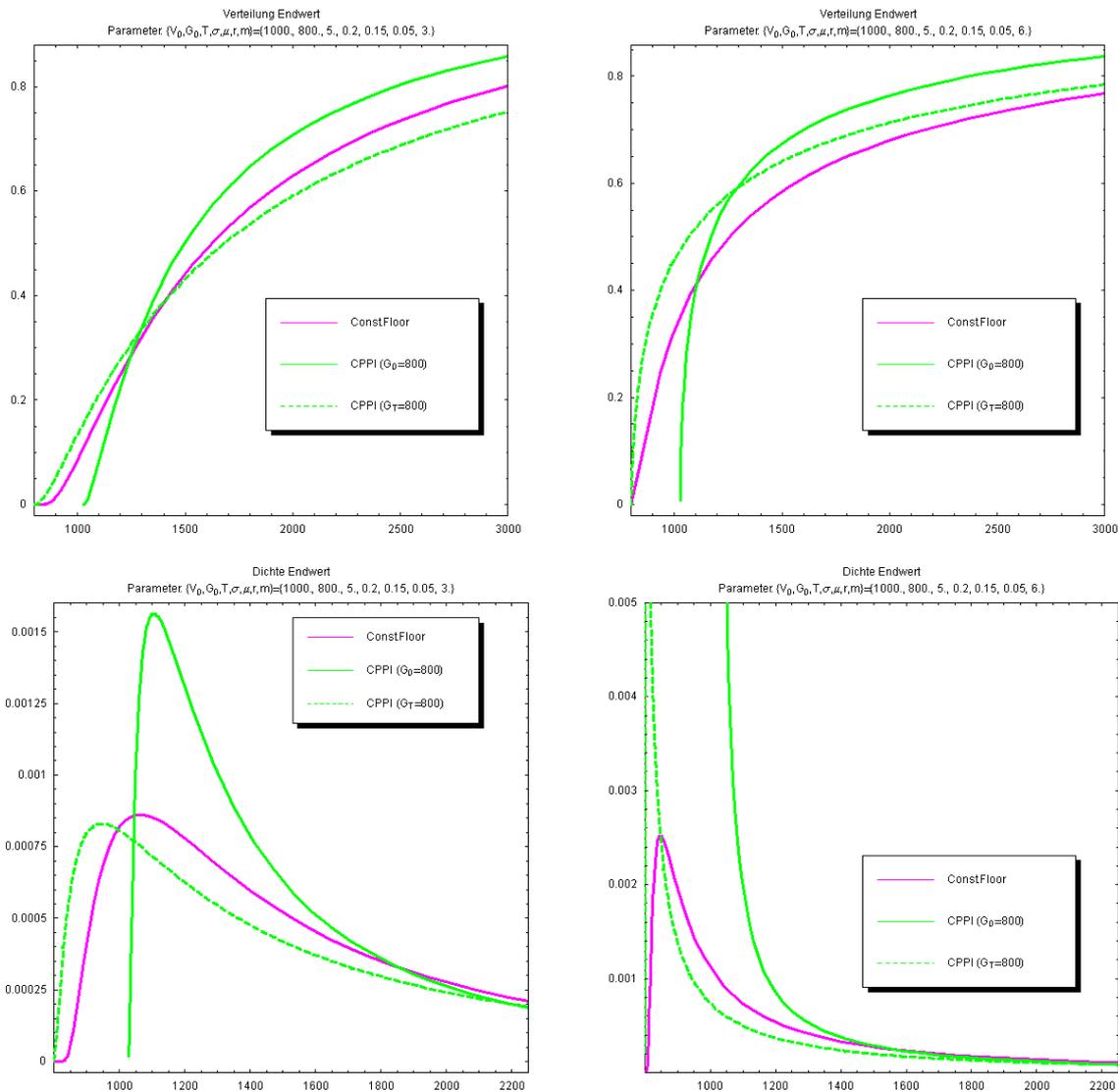


Abbildung 2.5: Verteilung und Dichte der einfachen CPPI und CPPI mit konstantem Floor ($m = 3$ bzw. $m = 6$)

Die Abbildung 2.5 stellt die Verteilung der genannten Strategien dar. Auffällig ist, dass für einen kleinen Multiplier die CPPI mit konstantem Floor sich eher mit der einfachen CPPI mit gleicher Endgarantie vergleichen lässt, wobei diese eine höhere Wahrscheinlichkeit für große Endwerte besitzt. Für einen hohen Multiplier zeigt sich anhand der Dichten, dass die Verteilungen insgesamt sehr verschieden sind. Während die einfachen CPPIs sehr

hohe Wahrscheinlichkeiten für Werte in der Nähe der Endgarantie besitzen, ist dies bei der CPPI mit konstantem Floor weniger stark ausgeprägt. Dies zeigt sich auch in Tabelle 2.1, wo man erkennt, dass die höheren Momente der CPPI mit konstantem Floor kleiner als die der einfachen CPPI sind. Dieser Effekt lässt sich als Zeit-Diversifikation der einfachen CPPI bezeichnen. Durch den ständigen Kapitalzufluss aus der risikolosen Anlage erfolgt eine Mittelung über die Einstandspreise. Wie auch bei Asiatischen Optionen führt dies zu einer Minderung der Schwankungen.

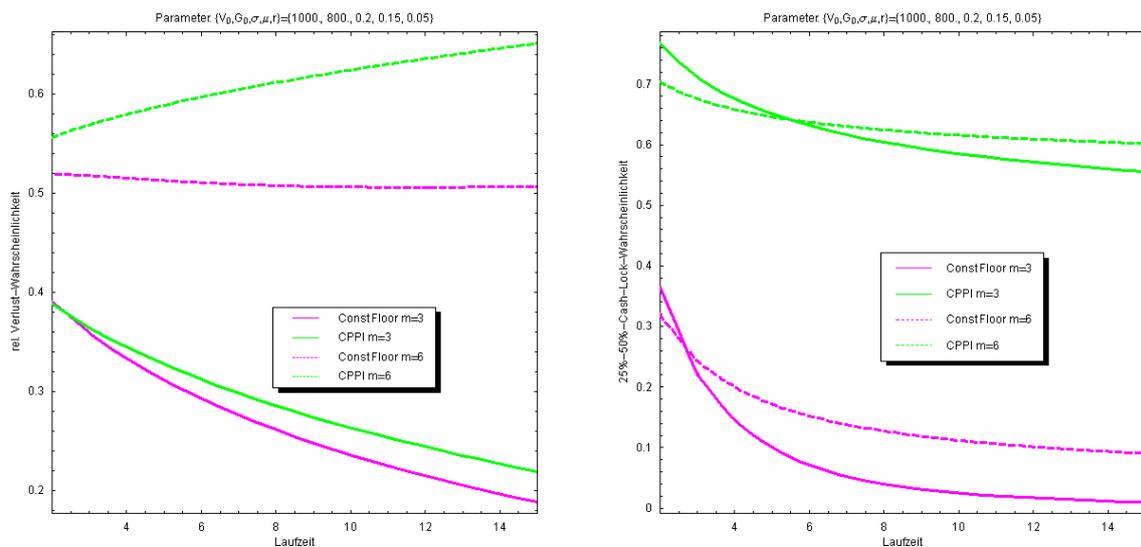


Abbildung 2.6: Cash-Lock- und relative Verlust-Wahrscheinlichkeit der einfachen CPPI und CPPI mit konstantem Floor ($m = 3$ bzw. $m = 6$)

Auf der anderen Seite haben diese Zuflüsse Einfluss auf die Cash-Lock- und die relative Verlustwahrscheinlichkeit wie sie in Abbildung 2.6 dargestellt ist. Unabhängig vom Multiplier ist die Verlustwahrscheinlichkeit der CPPI mit konstantem Floor geringer als die Verlustwahrscheinlichkeit der einfachen CPPI. Man beachte dabei, dass die Verlustwahrscheinlichkeit der einfachen CPPI nach Korollar 2.1.2 unabhängig von der Garantie ist. Die hier betrachtete 25%-50%-Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Strategie deren Investitionsquote unter 25% gesunken ist, nach t Jahren eine Investitionsquote unter 50% besitzt. Eine Strategie, die auf den Erträgen einer riskanten Anlage basiert, sollte auch zwischenzeitliche Verluste ausgleichen und genug Kapital bilden können, um in späteren Perioden von Erträgen der Aktie zu profitieren. Wie man den Abbildungen und der Tabelle entnehmen kann, ist das bei der einfachen Strategie nur bedingt möglich. Eine Investitionsquote unterhalb von 25% führt unabhängig vom Multiplier zu einer Wahrscheinlichkeit von über 70%, dass die Strategie selbst nach 15 Jahren eine Investitionsquote von unter 50% besitzt. Fällt die Investitionsquote unter 10% liegt die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit nach 4 Jahren bei ungefähr 80%. Somit gelten für die einfache CPPI die gleichen Kritikpunkte,

wie sie auch für Stop-Loss-Strategien gelten. Einmalige Verluste implizieren einen dauerhaften Cash-Lock. Im Gegensatz dazu, ist es der CPPI mit konstantem Floor möglich durch den Kapitalzufluss aus der risikolosen Anlage auch in kurzen Zeiträumen genug Kapital zu bilden und somit die Wahrscheinlichkeit eines Cash-Locks deutlich zu mindern. Im Beispiel ergibt sich eine 25%-50%-Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit nach 2 Jahren von unter 40% und nach 4 Jahren von ungefähr 20%.

Insgesamt zeigt sich, dass ein wesentlicher Kritikpunkt an der einfachen CPPI, die Tatsache, dass sie entweder sehr hohe Gewinne oder Endwerte in der Nähe der Garantie besitzt, bei der CPPI mit konstantem Floor eine deutlich geringere Bedeutung besitzt. Dies folgt vor allem daraus, dass die Wahrscheinlichkeit eines Cash-Locks um ein Vielfaches verringert wird und somit auch in kurzen Zeiträumen von Zuwächsen in der Aktie profitiert werden kann. Dies gilt unabhängig von der Wahl des Multipliers. Selbst Multiplier, die die notwendige Bedingung für eine langfristige Wertentwicklung oberhalb der risikolosen Rendite verletzen, bedeuten nicht, dass sich die Wertentwicklung auf die Garantie beschränkt. In diesem Sinne handelt es sich offensichtlich um eine sinnvolle Modifikation, sofern risikolose wachsende Garantien nicht gefordert sind.

2.2.4 Investition regelmäßiger Prämien in eine CPPI

Wie erwähnt wollen wir auch auf den Zusammenhang der obigen Resultate zu einer Strategie, die regelmäßige Prämien in eine einfache CPPI investiert, eingehen. Solch ein Fall tritt, z.B., bei einer Versicherung auf. Üblicherweise werden die Prämien nicht einmalig zu Beginn des Vertrages gezahlt, sondern in regelmäßigen, z.B. monatlichen oder jährlichen Abständen. Falls für diesen Vertrag gilt, dass bei Fälligkeit eine gewisser Mindestbetrag garantiert werden soll, bietet es sich an, die Prämien in eine einfache CPPI zu investieren. Mit jeder Prämienzahlung wächst somit zum einen der Wert des Vertrages um die Prämie und zum anderen der Floor um einen prozentualen (möglicherweise in Abhängigkeit vom Zeitpunkt der Zahlung) Anteil der Prämie.

Beispiel: kontinuierliche Prämienzahlungen

Wir nehmen an, dass jährlich insgesamt eine Prämie in Höhe von P in Form einer stetigen Zahlung erfolgt. Von dieser Prämie soll jeweils ein prozentualer Anteil γ mindestens mit dem risikolosen Zins verzinst werden. Die Anlagestrategie soll auf einer einfachen CPPI basieren, d.h. der in die risikobehaftete Anlage investierte Betrag ist durch mC_t mit $C_t = V_t - G_t$ gegeben. Durch den Zufluss von außen ist diese Strategie nicht mehr selbstfinanzierend. Falls π_t wie üblich die Investitionsquote in die

	$m = 3$			$m = 6$		
$\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2$	4%			-2%		
	CPPI $G_T = 800$	Const. Floor	CPPI $G_0 = 800$	CPPI $G_T = 800$	Const. Floor	CPPI $G_0 = 800$
$E[V]$	2.969	2.494	2.178	10.522	7.484	6.185
$\sqrt{\text{Var}[V]}$	4.875	3.212	2.586	355,672	207,147	188,706
<i>Skeu</i> [V]	18	16	18	$49 \cdot 10^3$	$43 \cdot 10^3$	$49 \cdot 10^3$
<i>Kurt</i> [V]	1.889	1.349	1.889	$3,22 \cdot 10^{12}$	$2,60 \cdot 10^{12}$	$3,22 \cdot 10^{12}$
Rendite y	21,77%	18,28%	15,57%	47,07%	40,25%	36,44%
Volatilität $\tilde{\sigma}$	51,13%	44,22%	41,94%	118,68%	115,26%	116,94%
Sharpe Ratio	32,79%	30,04%	25,20%	35,45%	30,59%	26,89%
rel. Verlust $P[V_t \leq V_0 e^{rt}]$	32,74%	31,12%	32,74%	58,85%	51,26%	58,85%
$P[\Pi_{t+2} < 50\% \Pi_t = 25\%]$	76,71%	36,36%	76,71%	70,35%	31,86%	70,35%
$P[\Pi_{t+4} < 50\% \Pi_t = 25\%]$	67,62%	14,32%	67,62%	65,81%	19,80%	65,81%
$P[\Pi_{t+4} < 50\% \Pi_t = 10\%]$	89,70%	20,96%	89,70%	78,81%	21,41%	78,81%

Parameter: $T = 5$; $\mu = 15\%$; $r = 5\%$; $\sigma = 20\%$; $V_0 = 1000$; $G_0 = 800$

Tabelle 2.1: Risikomaße unbeschränkter Strategien

risikobehaftete Anlage bezeichnet gilt somit

$$\begin{aligned} dV_t &= V_t \left(\pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \right) + Pdt \\ dG_t &= rG_t dt + \gamma Pdt \end{aligned}$$

Dabei gibt der erste Term in der Stochastischen Differentialgleichung für den Wert die aus dem Handeln erzielten Gewinne und der zweite Term den Prämienzufluss an. Basierend auf den Überlegungen zur einfachen CPPI ergibt sich für den Cushion

$$\begin{aligned} dC_t &= d(V_t - G_t) \\ &= V_t \left(\pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dB_t}{B_t} \right) + Pdt - (rG_t dt + \gamma Pdt) \\ &= mC_t \frac{dS_t}{S_t} + \underbrace{V_t}_{G_t + C_t} \frac{dB_t}{B_t} - mC_t \frac{dB_t}{B_t} + Pdt - \left(G_t \frac{dB_t}{B_t} + \gamma Pdt \right) \\ &= C_t \left(m \frac{dS_t}{S_t} - (m - 1) \frac{dB_t}{B_t} \right) + P(1 - \gamma) dt \\ &= (m(\mu - r) + r) \left(C_t + \frac{P(1 - \gamma)}{m(\mu - r) + r} \right) dt + C_t m \sigma dW_t \end{aligned}$$

Ausgehend von einem Anfangskapital $V_0 = 0$ und somit $C_0 = G_0 = 0$ ergeben analoge Betrachtungen zur CPPI mit konstanter Garantie als Lösung der Stochastischen Differentialgleichung

$$C_t = (1 - \gamma) P e^{rt} e^{(m(\mu - r) - \frac{m^2 \sigma^2}{2})t + m\sigma W_t} \int_0^t e^{-rs} e^{-(m(\mu - r) - \frac{m^2 \sigma^2}{2})s - m\sigma W_s} ds$$

Weitere Eigenschaften der Strategie lassen sich nun analog zu den Betrachtungen bei konstanter Garantie herleiten.

Ende Beispiel: kontinuierliche Prämienzahlungen

Ausgehend von der Interpretation als Investition in einen Power-Kontrakt gibt das nächste Beispiel die Dynamik bei diskreter Prämienzahlung an.

Beispiel: diskrete Prämienzahlungen

Es bezeichne

$$\begin{aligned} (\tilde{S}_t) &:= e^{rt} e^{(m(\mu - r) - \frac{m^2 \sigma^2}{2})t + m\sigma W_t} \\ &= e^{rt} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m . \end{aligned}$$

die Wertentwicklung eines Derivats der zugrunde liegenden Aktie, dass wir der Einfachheit halber als Power-Kontrakt bezüglich S_t bezeichnen. Im obigen Beispiel gilt für den Cushion bei kontinuierlichen Prämienzahlungen dann

$$C_t^{\text{cont.}} = P(1 - \gamma) \int_0^t \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_s} ds .$$

Die Wertentwicklung des Cushions kann also interpretiert werden als regelmäßigen Zukauf von Power-Kontrakten in Höhe der nicht garantierten Prämienanteile. Wir nehmen nun an, dass die Prämie P jährlich zu den Zeitpunkten t_1, t_2, \dots gezahlt wird und ebenfalls der Anteil γ in die risikolose Anlage und $(1 - \gamma)$ in den oben definierten Power-Kontrakt investiert wird. Dann gilt für $t \in [t_n, t_{n+1})$, d.h. einem Zeitpunkt zwischen der n -ten und $(n+1)$ -ten Prämienzahlung

$$G_t^{\text{disc.}} = \gamma P \sum_{i=1}^n e^{r(t-t_i)}$$

$$C_t^{\text{disc.}} = (1 - \gamma) P \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t_i}}$$

und $V_t^{\text{disc.}} = \sum_{i=1}^n (1 - \gamma) P \frac{\tilde{S}_t}{\tilde{S}_{t_i}} + \gamma P e^{r(t-t_i)}$. Somit ist dies der Wert einer einfachen CPPI bei diskreten Prämienzahlungen, sofern von jeder Prämie der gleiche Anteil γ garantiert wird. Offensichtlich lässt sich diese Methode auch auf zeitabhängige Anteile verallgemeinern, so dass beispielsweise die ersten Prämien zur Absicherung einer Gesamtgarantie verwendet werden und später erfolgende Prämienzahlungen zum Wertaufbau in einem Fonds o.ä. genutzt werden.

Das Problem der Bestimmung der Verteilung des Wertes einer einfachen CPPI mit diskreten Prämienzahlungen besteht nun in der Bestimmung des diskreten arithmetischen Mittels über die Einstandspreise in die Power-Kontrakte bzw. der Verteilung der Summe von lognormalverteilten Zufallsvariablen. Dieses Problem ist jedoch das gleiche wie bei der Bestimmung des Preises einer diskreten Asiatischen Option. Für die Bestimmung der Verteilung der Summe lognormalverteilter Zufallsvariablen in Form einer Fourier-Transformation der charakteristischen Funktion sei auf Barakat (1976) verwiesen. Häufig wird die Verteilung durch eine bekannte Verteilung approximiert. Eine Übersicht über Approximationen durch eine Lognormalverteilung findet sich in Beaulieu und Xie (2004), eine Approximation über die reziproke Gammaverteilung erfolgt in Milevsky und Posner (1998). Für eine Übersicht der verschiedener Methoden zur Bewertung von Asiatischen Optionen verweisen wir auf Nielsen und Sandmann (2003).

Ende Beispiel: diskrete Prämienzahlungen

Kapitel 3 - CPPI Strategien mit Kreditbeschränkungen

Trotz der Einfachheit in der Anwendung gibt es eine Vielzahl von Argumenten, die gegen eine Anwendung der CPPI-Strategien sprechen. Zusammengefasst sind dies:

- Notwendigkeit eines potentiell unbeschränkten Kapitalbedarfs
- Notwendigkeit stetigen Handels
- Annahme eines festen Anlagezeitraumes¹
- Bei langen Laufzeiten und/oder hohen Multiplikatoren wird die Wahrscheinlichkeit eine geringere Rendite als die risikolose zu erhalten, sehr groß.

Die Probleme, eine Rendite unterhalb der risikolosen zu erhalten und die Annahme eines festen Anlagezeitraumes, wurden bereits im letzten Kapitel erörtert, wo wir gesehen haben, dass dies durch die Einführung einer Garantie amerikanischen Typs gelöst werden kann.

Ziel dieses Kapitels ist es, das Problem des unbeschränkten Kapitalbedarfs zu betrachten. Zum einen betrachten wir die CPPI unter der zusätzlichen Bedingung, dass maximal 100% in die risikobehaftete Anlage investiert werden darf. Das Verhalten des Floors bleibt dabei identisch und somit kann der Cushion weiterhin beliebig groß werden. Diese Strategie lässt sich als Zusammensetzung aus einer einfachen CPPI und aus einer Buy-and-Hold-Strategie auffassen und wird beschränkte CPPI genannt.

Umgekehrt lässt sich eine maximale Investitionsquote auch dadurch gewährleisten, dass man die Größe des Cushion kontrolliert. Dies geschieht durch Anpassungen der Garantie. Indem die Garantie als fester Anteil des bisherigen Maximalwertes der Strategie gewählt wird, kann die Investitionsquote beschränkt werden. Dies ist das Konzept der CPPI mit Floor-Anpassung².

Wir werden die jeweiligen Eigenschaften der beiden Strategien herleiten und miteinander vergleichen. Des Weiteren bietet insbesondere die beschränkte CPPI die Möglichkeit eines sinnvollen Vergleichs mit der OBPI und den Stop-Loss-Strategien, da auch diese Kreditbeschränkungen implizieren.

¹Brennan und Schwartz (1988) weisen daraufhin, dass institutionelle Investoren typischerweise keinen festgelegten Liquidationszeitpunkt haben

²Im Sinne von Estep und Kritzman (1988) auch Time Invariant Portfolio Protection (TIPP) genannt.

3.1 Beschränkte CPPI

Wie in Kapitel 2.1 erläutert wurde, besteht ein grundsätzliches Problem der CPPI in der potentiell beliebig hohen Kreditaufnahme. Es ist nahe liegend, dieses Problem dadurch zu lösen, indem man fordert, dass die Investition in die risikobehaftete Anlage maximal auf ein Vielfaches ω des Portfoliowertes beschränkt ist. Formal ist die Strategie dadurch beschrieben, dass im Gegensatz zur einfachen CPPI nicht der Betrag mC_t sondern nur der Betrag

$$\min \{mC_t, \omega V_t\}$$

in die Aktie investiert wird. Dabei gibt V den Wertprozess der so definierten Strategie und ω , mit $0 \leq \omega \leq m$, den maximalen ‚Verschuldungsgrad‘³ bezogen auf den Wertprozess an. Da wir die Strategien als selbstfinanzierend annehmen, ergibt sich umgekehrt, dass eine maximale Kreditaufnahme (short Position in der risikolosen Anlage) in Höhe von $(\omega - 1)V_t$ erfolgen darf. Für $\omega = 1$ ergibt sich zum Beispiel, dass höchstens der gesamte Portfoliowert in die Aktie investiert wird, bzw. dass keine Kreditaufnahmen erfolgen dürfen.

Beispiel: beschränkte CPPI

t	0	1	2	3	4	5
S_t	100	120	130	100	120	135
V_t	1000	1162	1259	968	1087	1216
G_t	800	808	816	824	832	841
C_t	200	354	443	144	255	375
π_t^1	80%	100%	100%	60%	94%	100%
π_t^0	20%	0%	0%	40%	6%	0%

Gekappte CPPI
 $m = 4 \quad r = 1\%$

Bereits in der zweiten Periode würde die CPPI-Strategie eine Kreditaufnahme in Höhe von 22% des Portfoliowertes erfordern (vgl. Beispiel zur CPPI). Die Wahl eines maximalen Hebel von $\omega = 1$ führt dazu, dass anstelle des Betrages $mC_t = 1.416$ nur der gesamte Portfoliowert 1.162 in die Aktie investiert wird. Erst zum Zeitpunkt $t = 3$, wo der Cushion hinreichend klein geworden ist, erfolgt die Anlage gemäß der ursprünglichen CPPI-Regel. Insbesondere lässt sich im Vergleich zur einfachen CPPI feststellen,

³Streng genommen bezeichnet $\omega - 1$ den Verschuldungsgrad, da mit obiger Definition bei einem Anteil Eigenfinanzierung maximal $\omega - 1$ Anteile fremdfinanziert. Im Folgenden bleiben wir bei der obigen Bezeichnung.

dass die Minderung des Portfoliowertes deutlich geringer bei späteren Kursverlusten ist. Umgekehrt gilt jedoch auch, dass die Partizipation an Kursgewinnen durch den maximalen Hebel (hier 100%) beschränkt ist.

Ende Beispiel: beschränkte CPPI

Anhand des obigen Beispiel erkennt man bereits, dass die Einführung einer maximalen Investitionsquote zu einer Reduktion der Volatilität führt. Dieses Resultat findet sich in qualitativer Form bereits in Black und Perold (1992, Proposition 3). Wir wollen nun diese und weitere Eigenschaften der **beschränkten CPPI** Strategie näher betrachten. Dazu definieren wir die Strategie wie folgt

Definition 3.1.1 Die beschränkte CPPI mit Hebel m , Anfangskapital V_0^{Cap} und maximaler Investitionsquote ω ist definiert durch die zu haltenden Aktien

$$\phi_t^{1, Cap} = \frac{\min(\omega V_t^{Cap}, m C_t^{Cap})}{S_t}$$

und die Bedingung der Selbstfinanzierung⁴.

Dabei bezeichnet $C_t^{Cap} = V_t^{Cap} - G_t$ wie üblich den Cushion und $G_t = G_0 e^{rt}$ die mit dem risikolosen Zins wachsende Mindestgarantie.

3.1.1 Dynamik und Verteilung

Zunächst einmal sei darauf hingewiesen, dass es sich bei der Strategie um eine zusammengesetzte Strategie handelt. Sofern das Kreditlimit nicht erreicht ist, handelt es sich um eine einfache CPPI Strategie. Umgekehrt gilt jedoch, solange das Kreditlimit erreicht ist, wird gemäß einer Buy-and-Hold-Strategie gehandelt. Einzeln betrachtet lassen sich für beide Strategien die Dynamiken einfach bestimmen. Solange das Kreditlimit erreicht ist, gilt insbesondere, dass der Wertprozess der Strategie bedingt auf den Zeitpunkt, zu dem das Kreditlimit erreicht wurde, gemäß der Dynamik der Aktie einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Solange das Kreditlimit nicht erreicht wird, gilt jedoch mit den Ergebnissen aus Kapitel 2.1, dass der Cushion bedingt auf den Zeitpunkt, wann das Kreditlimit letztendlich bindend war, einer geometrischen Brownschen Bewegung folgt. Aufgrund der Definition des Cushions gilt für die Zeitpunkte τ , zu denen ein Wechsel zwischen den beiden Strategien erfolgt:

⁴Also gerade

$$\phi_t^{0, Cap} = \frac{\max((1 - \omega)V_t^{Cap}, V_t^{Cap} - m C_t^{Cap})}{B_t}$$

Lemma 3.1.1 *Es gilt:*

$$\omega V_t \underset{\geq}{\leq} mC_t \iff mG_t \underset{\geq}{\leq} (m-\omega)V_t \iff \omega G_t \underset{\geq}{\leq} (m-\omega)C_t$$

Beweis : Folgt direkt aus der Definition des Cushion. ■

Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns in den folgenden Überlegungen auf einen Verschuldungsgrad von $\omega = 1$, d.h. zusätzliche Kredite sind ausgeschlossen. Es ist jedoch ohne weiteres möglich die Überlegungen auf den allgemeinen Fall zu übertragen.

Die Garantie der beschränkten CPPI wächst im Gegensatz zu der Strategie in Abschnitt 3.2, wo jeweils ein prozentualer Wert des maximal erreichten Wertes garantiert wird, deterministisch und somit ist es völlig ausreichend zu wissen, ob der Wertprozess oder der Cushion eine bestimmte Schranke treffen. Darauf basierend lässt sich die Dynamik der beschränkten CPPI mittels einer Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift herleiten. Je nachdem, ob die Schranke von oben oder von unten getroffen wird, ändert sich der dabei der Driftterm. Durch geeignete Transformationen lässt sich die Schranke mit dem Nullpunkt identifizieren. Sei dazu der Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \Theta(X_t)dt + dW_t \quad (3.1.1)$$

mit

$$\Theta(x) = \begin{cases} \frac{\mu-r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma & x \geq 0 \\ \frac{\mu-r}{\sigma} - \frac{1}{2}m\sigma & x < 0 \end{cases} \quad (3.1.2)$$

und dem Anfangswert

$$X_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)V_0}{mG_0} & mC_0 \geq V_0 \\ \frac{1}{m\sigma} \ln \frac{(m-1)C_0}{G_0} & mC_0 < V_0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

definiert⁵. Gemäß Abschnitt 1.3.3 handelt es sich bei dem Prozess X_t um eine Brownsche Bewegung mit wechselndem Drift und wir können auf die dort hergeleiteten Verteilungseigenschaften zurückgreifen. Im Sinne der dort verwendeten Notation entspricht $\theta_0 := \frac{\mu-r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma$ dem standardisiertem Drift der Brownschen Bewegung während der Buy-and-Hold-Strategie und $\theta_1 := \frac{\mu-r}{\sigma} - \frac{1}{2}m\sigma$ dem standardisiertem Drift der Brownschen Bewegung während der einfachen CPPI-Strategie⁶. Im Folgenden betrachten wir den Zusammenhang zwischen dem Prozess X_t und der Dynamik der beschränkten CPPI.

⁵ $(X_t)_{t \geq 0}$ erfüllt also die folgende Integralgleichung

$$X_t = X_0 + W_t + \int_0^t \Theta(X_s)ds$$

⁶Somit kann θ_0 als der Marktpreis des Risiko der Aktie und $\theta_1 > 0$ beschreibt die Effektivität der einfachen CPPI.

Theorem 3.1.2 *Der Wert- bzw. Cushionprozess der beschränkten CPPI ist durch*

$$V_t = G_t \begin{cases} \frac{m}{m-1} e^{\sigma X_t} & X_t \geq 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{\sigma m X_t}\right) & X_t < 0 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

bzw.

$$C_t = G_t \begin{cases} \left(\frac{m}{m-1} e^{\sigma X_t} - 1\right) & X_t \geq 0 \\ \frac{1}{m-1} e^{m\sigma X_t} & X_t < 0 \end{cases}$$

bestimmt.

Bemerkung: Intuitiv ergibt sich der Wertprozess aus der Tatsache, dass jede Nullstelle des Prozesses X einen Wechsel der Strategie zwischen Buy-and-Hold und einer einfachen CPPI entspricht. Seien dazu τ_k bzw. $\tilde{\tau}_k$ die Zeitpunkte an denen letztmalig vor s ein Wechsel in die Buy-and-Hold- bzw. die einfache CPPI-Strategie erfolgt ist. Bis zum nächsten Wechsel folgt der Wertprozess der Dynamik einer Buy-and-Hold-Strategie bzw. der Cushion-Prozess einer einfachen CPPI-Strategie und somit

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &= \inf \{t > s \mid mC_t = V_t\} \\ &= \inf \{t > s \mid m(V_t - G_t) = V_t\} \\ &= \inf \left\{ t > s \mid (m-1)V_{\tau_k} \frac{S_t}{S_{\tau_k}} = m e^{r(t-\tau_k)} G_{\tau_k} \right\} \end{aligned}$$

Mit Lemma 3.1.1 und der Annahme das der letzte Wechsel durch $(m-1)V_{\tau_k} = mG_{\tau_k}$ gegeben war ergibt sich

$$\begin{aligned} &= \inf \left\{ t > s \mid (m-1)V_{\tau_k} \frac{S_t}{S_{\tau_k}} = e^{r(t-\tau_k)} (m-1)V_{\tau_k} \right\} \\ &= \inf \left\{ t > s \mid e^{(\mu-r-\frac{\sigma^2}{2})(t-\tau_k)+\sigma(W_t-W_{\tau_k})} = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ t > s \mid \left(\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(t-\tau_k) + \sigma(W_t - W_{\tau_k}) = 0 \right\} \\ &= \inf \{t > s \mid X_t - X_{\tau_k} = 0\} \\ &= \inf \{t > s \mid X_t = 0\} \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen ergeben für das Verhalten während der einfachen CPPI

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{k+1} &= \inf \{t > s \mid mC_t = V_t\} \\ &= \inf \{t > s \mid mC_t = G_t + C_t\} \\ &= \inf \left\{ t > s \mid (m-1)C_{\tilde{\tau}_k} e^{r(t-\tilde{\tau}_k)} \left(\frac{S_t}{S_{\tilde{\tau}_k}} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)(t-\tilde{\tau}_k)}\right)^m = e^{r(t-\tilde{\tau}_k)} G_{\tilde{\tau}_k} \right\} \\ &= \inf \left\{ t > s \mid \left(e^{(\mu-r-\frac{m}{2}\sigma^2)(t-\tilde{\tau}_k)+\sigma(W_t-W_{\tilde{\tau}_k})}\right)^m = 1 \right\} \\ &= \inf \left\{ t > s \mid m\left(\mu-r-\frac{m}{2}\sigma^2\right)(t-\tilde{\tau}_k) + m\sigma(W_t - W_{\tilde{\tau}_k}) = 0 \right\} \\ &= \inf \{t > s \mid X_t = 0\} \end{aligned}$$

Insgesamt entspricht also jede Nullstelle von (X_t) einem Wechsel der Strategie.⁷

Beweis Theorem 3.1.2: Wir betrachten den Prozess $\hat{V}_t := f(X_t, G_t)$ mit

$$f(x, g) = g \begin{cases} \frac{m}{m-1} e^{\sigma x} & x \geq 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{\sigma m x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

und zeigen, dass dieser die stochastische Differentialgleichung für den Wertprozess der Strategie löst. Zunächst einmal ist G_t im Gegensatz zu X_t offensichtlich von beschränkter Variation. Weiterhin ist f sowohl bezüglich g als auch x stetig differenzierbar mit

$$\frac{\partial f(x, g)}{\partial g} = \begin{cases} \frac{m}{m-1} e^{\sigma x} & x \geq 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{\sigma m x}\right) & x < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \frac{\partial f(x, g)}{\partial x} = g \begin{cases} \frac{m\sigma}{m-1} e^{\sigma x} & x \geq 0 \\ \frac{m^2\sigma}{m-1} e^{\sigma m x} & x < 0 \end{cases}$$

Obwohl f nicht zweimal stetig differenzierbar bezüglich x ist, lässt sich trotzdem die Itô-Formel anwende, indem $\frac{\partial^2 f(x, g)}{\partial x^2}$ im Sinne der Schwartz-Distributionen als Funktion h mit

$$\int_{x_1}^{x_2} h(z) dz = \left. \frac{\partial f(x, g)}{\partial x} \right|_{x=x_2} - \left. \frac{\partial f(x, g)}{\partial x} \right|_{x=x_1} \quad \text{und} \quad h(x) = g \begin{cases} \frac{m\sigma^2}{m-1} e^{\sigma x} & x \geq 0 \\ \frac{m^2\sigma^2}{m-1} e^{\sigma m x} & x < 0 \end{cases}$$

für alle $x_1 < x_2$ aufgefasst wird. Wie, zum Beispiel, Rogers und Williams (2000, Lemma 45.9) zeigen, gilt die Itô-Formel auch unter diesen Voraussetzungen. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} d\hat{V}_t &= \begin{cases} \frac{m}{m-1} e^{\sigma X_t} dG_t + G_t \frac{m\sigma}{m-1} e^{\sigma X_t} dX_t + \frac{1}{2} G_t \frac{m\sigma^2}{m-1} e^{\sigma X_t} d\langle X \rangle_t & X_t \geq 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{\sigma m X_t}\right) dG_t + G_t \frac{m\sigma}{m-1} e^{\sigma m X_t} dX_t + \frac{1}{2} G_t \frac{m^2\sigma^2}{m-1} e^{\sigma m X_t} d\langle X \rangle_t & X_t < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \hat{V}_t dG_t + \sigma \hat{V}_t dX_t + \frac{1}{2} \sigma^2 \hat{V}_t d\langle X \rangle_t & X_t > 0 \\ \hat{V}_t dG_t + m\sigma(\hat{V}_t - G_t) dX_t + \frac{1}{2} m^2 \sigma^2 (\hat{V}_t - G_t) d\langle X \rangle_t & X_t < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Nach Definition gilt $X_t \geq 0$ genau dann, wenn $\hat{V}_t \geq \frac{m}{m-1} G_t$. Zusammen mit der Definition für X_t und der Dynamik für die riskante bzw. risikolose Anlage ergibt sich

$$d\hat{V}_t = \begin{cases} \frac{\hat{V}_t}{S_t} dS_t + 0 dB_t & \hat{V}_t \geq \frac{m}{m-1} G_t \\ \frac{m(\hat{V}_t - G_t)}{S_t} dS_t + \frac{\hat{V}_t - m(\hat{V}_t - G_t)}{B_t} dB_t & \hat{V}_t < \frac{m}{m-1} G_t \end{cases}$$

Aus der Definition von X_0 folgt zusätzlich $\hat{V}_0 = V_0$. Somit löst \hat{V}_t die stochastische Differentialgleichung für den Wertprozess der durch die Definition 3.1.1 bestimmten gekappten CPPI für $\omega = 1$. ■

⁷ Der Beweis für Theorem 3.1.2 lässt sich leider nicht so induktiv führen, da die Anzahl der Nullstellen von X_t nicht nur nicht endlich, sondern zusätzlich auch überabzählbar ist. Genauer gesagt bilden die Anzahl der Nullstellen von X_t eine topologische Cantor-Menge, vgl. Itô und McKean (1965).

Zur Bestimmung der Verteilungseigenschaften der Strategie lassen sich nun die Ergebnisse aus Kapitel 1.3.3 anwenden. Als ein erstes Resultat lässt sich bereits festhalten, dass die Strategie im Gegensatz zur einfachen CPPI nun pfadabhängig ist. Dies folgt aus dem pfadabhängigen Drift für den Prozess X_t . Eine genauere Betrachtung des Drifts ergibt, dass dieser, solange die Strategie einer einfachen CPPI entspricht, um den Term $\frac{m-1}{2}\sigma$ kleiner gegenüber der Buy-and-Hold-Strategie in der Aktie ist. Im Vergleich zur reinen Buy-and-Hold-Strategie kann man diesen Term als Verlustrate ansehen. Der Verlust kann als Kompensation für die Garantie betrachtet werden und insbesondere als eine Prämie für die Garantie bezüglich einer Aktieninvestition angesehen werden. Im Gegensatz zur OBPI aus Kapitel 1.4.2 ist diese Prämie in diesem Fall jedoch nicht deterministisch sondern vom Kursverlauf abhängig. Wir werden später auf diesen Punkt zurückkommen und insbesondere die Unterschiede zur OBPI verdeutlichen.

Zunächst seien jedoch die Verteilungseigenschaften der beschränkten CPPI dargestellt. Es sei im folgenden

$$p(x) := P_{X_0}(X_t \in dx)$$

die Dichte der Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift wie sie in Kapitel 1.3.3 bestimmt wird. Die dort erzielten Ergebnisse lassen es prinzipiell zu, die Verteilung als Mehrfach-Integral darzustellen. Aus numerischer Sicht hat es sich aber als zweckmäßig herausgestellt, mit den Darstellungen als Laplace-Transformation von Beneš et al. (1980) zu arbeiten. Diese können in analytischer Form dargestellt werden und der numerische Aufwand beschränkt sich auf die Invertierung der Laplace-Transformation. Eine Übersicht zu diesem Thema bietet u.a. Abate und Valkó (2004). Insbesondere lassen sich hierfür Standardpakete verwenden, wie sie z.B. für *Mathematica* existieren.

Lemma 3.1.3 *Die Dichtefunktion des Wertes der beschränkten CPPI ist durch*

$$P[V_t \in dv] = \begin{cases} \frac{1}{\sigma v} p\left(\frac{\ln\left(\frac{(m-1)v}{mG_t}\right)}{\sigma}\right) dv & v \geq \frac{m}{m-1}G_t \\ \frac{1}{\sigma m(v-G_t)} p\left(\frac{\ln\left(\frac{(m-1)(v-G_t)}{mG_t}\right)}{\sigma m}\right) dv & v < \frac{m}{m-1}G_t \end{cases}$$

gegeben. Für X_0 gelte dabei die Anfangswertbedingung 3.1.3.

Beweis : Siehe Appendix. ■

Wird die Dichtefunktion von X als Laplace-Transformation ausgedrückt, lassen sich auch die Verteilungsfunktion und die Momente in geschlossener Form als Laplace-Transformation berechnen. Dies ist das Ergebnis der nächsten beiden Korollare.

Korollar 3.1.4 Für $m(V_0 - G_0) \geq V_0$ ist die Verteilungsfunktion durch

$$P[V_T \leq v] = \mathcal{L}_{\lambda, T}^{(-1)} \begin{cases} 0 & v \leq G_T \\ \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} \left(\frac{(m-1)(v-G_T)}{G_T} \right)^{\frac{K_2(\lambda)}{\sigma m}} & G_T < v \leq \frac{mG_T}{m-1} \\ \frac{K_3(\lambda)}{K_4(\lambda)} \left(\frac{(m-1)v}{mG_T} \right)^{\frac{K_4(\lambda)}{\sigma}} + \frac{K_5(\lambda)}{K_6(\lambda)} \left(\frac{(m-1)v}{mG_T} \right)^{\frac{K_6(\lambda)}{\sigma}} & \frac{mG_T}{m-1} < v \leq V_0 e^{rT} \\ \frac{1}{\lambda} + \frac{K_5(\lambda) + e^{2x_0} \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} K_3(\lambda)}{K_6(\lambda)} \left(\frac{(m-1)v}{mG_T} \right)^{\frac{K_6(\lambda)}{\sigma}} & V_0 e^{rT} < v \end{cases}$$

bestimmt. Für $m(V_0 - G_0) < V_0$ gilt:

$$P[V_T \leq v] =$$

$$\mathcal{L}_{\lambda, T}^{(-1)} \begin{cases} 0 & v \leq G_T \\ -\frac{\tilde{K}_5(\lambda) + e^{-2x_0} \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda} \tilde{K}_3(\lambda)}{\tilde{K}_6(\lambda)} \left(\frac{(m-1)(v-G_T)}{G_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_6(\lambda)}{\sigma m}} & G_T < v \leq V_0 e^{rT} \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{K}_3(\lambda)}{\tilde{K}_4(\lambda)} \left(\frac{(m-1)(v-G_T)}{G_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_4(\lambda)}{\sigma m}} - \frac{\tilde{K}_5(\lambda)}{\tilde{K}_6(\lambda)} \left(\frac{(m-1)(v-G_T)}{G_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_6(\lambda)}{\sigma m}} & V_0 e^{rT} < v \leq \frac{mG_T}{m-1} \\ \frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_2(\lambda)} \left(\frac{(m-1)v}{mG_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}} & \frac{mG_T}{m-1} < v \end{cases}$$

Die Funktionen $K_i(\lambda)$ und \tilde{K}_i sind dabei wie in Theorem 1.3.15 definiert und $\mathcal{L}_{\lambda, T}^{(-1)}$ bezeichnet die inverse Laplace-Transformation bzgl. T .

Beweis : Siehe Appendix. ■

Des Weiteren gilt für die Momente

Korollar 3.1.5 Das n -te Moment der beschränkten CPPI ist für $m(V_0 - G_0) \geq V_0$, d.h. falls mit einer Buy-and-Hold-Strategie begonnen wird, durch die inverse Laplace-Transformation

$$E[V_T^n] = (e^{rT})^n \mathcal{L}_{\lambda, T}^{(-1)} \left\{ \frac{V_0^n}{\lambda - n(\mu - r) - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2} + G_0^m \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{K_1(\lambda) \left(\frac{1}{m-1}\right)^i}{i\sigma m + K_2(\lambda)} - \left(\frac{m}{m-1}\right)^n \left(\frac{K_3(\lambda)}{n\sigma + K_4(\lambda)} + \frac{K_5(\lambda)}{n\sigma + K_6(\lambda)} \right) \right) \right\}$$

bestimmt. Für $m(V_0 - G_0) < V_0$, also falls anfänglich eine einfache CPPI Strategie verfolgt wird, gilt:

$$E[V_T^n] = (e^{rT})^n \mathcal{L}_{\lambda, T}^{(-1)} \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{G_0^{n-i} (V_0 - G_0)^i}{\lambda - im(\mu - r) - \frac{1}{2}i(i-1)(m\sigma)^2} + G_0^m \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{\tilde{K}_3(\lambda) \left(\frac{1}{m-1}\right)^i}{i\sigma m - \tilde{K}_4(\lambda)} + \frac{\tilde{K}_5(\lambda) \left(\frac{1}{m-1}\right)^i}{i\sigma m - \tilde{K}_6(\lambda)} \right) - \left(\frac{m}{m-1}\right)^n \frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{n\sigma - \tilde{K}_2} \right) \right\}$$

m	ω	Erwartungswert		Standardabw.		Schiefe		Kurtosis	
		einfach	beschränkt	einfach	beschränkt	einfach	beschränkt	einfach	beschränkt
1	1	1.121	1.121,20	68,4	68,4	0,89	0,89	4,44	4,44
3	1	1.157	1.154,20	280	241	4,16	2,05	44,82	8,71
3	2	1.157	1.155,50	280	267	4,16	2,97	44,82	16,46
3	2,99	1.157	1.156,82	280	280	4,16	4,16	44,82	44,82
5	1	1.198	1.167,81	793	305	23,73	1,59	3.949	6,01
5	2	1.198	1.137,58	793	321	23,73	2,05	3.949	7,74
5	2,5	1.198	1.145,63	793	357	23,73	2,32	3.949	8,97
5	4,99	1.198	1.197,80	793	793	23,73	22,93	3.949	2.576
10	1	1.329	1.172,20	24.298	325	$163 \cdot 10^3$	1,35	$79 \cdot 10^{12}$	5,06
10	2	1.329	1.082,65	24.298	310	$163 \cdot 10^3$	1,88	$79 \cdot 10^{12}$	6,73
10	5	1.329	1.059,49	24.298	416	$163 \cdot 10^3$	2,95	$79 \cdot 10^{12}$	11,83
10	9,99	1.329	1.307,01	24.298	7.650	$163 \cdot 10^3$	82,49	$79 \cdot 10^{12}$	9.058
20	1	1.780	1.172,18	$7,9 \cdot 10^9$	329	$7,0 \cdot 10^{20}$	1,29	$3,9 \cdot 10^{55}$	4,88
Stop-Loss		1171,54		330		1,28		4,85	

Tabelle 3.1: Momente der einfachen und der beschränkten CPPI für verschiedene maximale Verschuldungsgrade ω und Multiplier m (Parameter: $V_0 = 1000$, $G_0 = 800$, $\mu = 8,5\%$, $r = 5\%$, $\sigma = 20\%$, $T = 2$)

Beweis : Siehe Appendix. ■

Tabelle 3.1 vergleicht die Momente der beschränkten mit den denen der unbeschränkten CPPI. Eine solche Betrachtung lässt Rückschlüsse darüber zu, inwieweit es sinnvoll ist, bei anderen Modifikationen, wie der CPPI mit konstantem Floor und der diskret gehandelten CPPI davon auszugehen, dass keine Beschränkungen in der Kapitalaufnahme vorliegen, bzw. welchen Einfluss die Beschränkung auf deren Eigenschaften besitzen wird. Zunächst einmal ist zu beobachten, dass die Momente der beschränkten CPPI bei niedrigen Verschuldungsgraden und hohen Multipliern deutlich niedriger sind. Für den Fall $m = 3$, d.h. bei einem anfänglich Startkapital von 1.000 und einem Barwert der Garantie von 800 werden nur 600 in die risikobehaftete Anlage investiert, ist die Standardabweichung der beschränkten Strategie ohne Verschuldung um $\approx 15\%$ geringer als bei der einfachen CPPI. Für den Fall $m = 5$, falls das gesamte anfängliche Kapital in die Aktie investiert wird, ergibt sich beim Erwartungswert eine Abweichung von 3%, wobei die Standardabweichung weniger als die Hälfte der einfachen CPPI beträgt. Werden höhere Verschuldungsgrade zugelassen mindert dies den Unterschied zwar, insgesamt besitzt die beschränkte CPPI trotzdem deutlich

kleinere höhere Momente als die einfache CPPI. Man beachte dabei, dass z.B. ein Wert von $\omega = 9,99$ bedeutet, dass Kredite bis zum 8,99-fachen des Portfoliowertes aufgenommen werden können und das maximal das 9,99-fache des Portfoliowertes in die Aktie investiert wird. In Anbetracht der Tatsache, dass die einfache Strategie bei einem Multiplier von $m = 10$ das 10-fache des Cushion, der durch den Portfoliowert begrenzt ist, in die Aktie investiert, ist es erwähnenswert, dass sich die höheren Momente trotzdem deutlich voneinander unterscheiden. Dies ist ein weiterer Beleg für die Abhängigkeit der einfachen CPPI in den Risikomaßen von den Extremereignissen. Dies erklärt sich, wenn man bedenkt, dass die einfache CPPI als Power-Kontrakt interpretiert werden kann, wobei der Exponent gerade dem Multiplier entspricht. Der Erwartungswert der einfachen CPPI entspricht somit dem m -ten Moment des Aktienkurses!

In diesem Sinne schränkt dies die in den Abschnitten zur einfachen CPPI (2.1), CPPI mit konstantem Floor (2.2) und der diskret-gehandelten CPPI (4.1) erzielten Ergebnisse ein, da dort jeweils von der Möglichkeit unbeschränkter Kreditaufnahme ausgegangen wird, wovon aus praktischer Sicht nicht ausgegangen werden kann.

Die dort erzielten Ergebnisse können aber als obere Schranken interpretiert werden, da davon auszugehen ist, dass die Unterschiede zwischen einfacher und beschränkter CPPI dort analog auftreten. Insgesamt sollte beachtet werden, dass das Beschränken dazu führt, dass Extremereignisse sowohl im positiven als auch im negativen Sinne seltener auftreten. Dies bedeutet, dass sowohl sehr hohe Endwerte als auch Endwerte in der Nähe der Garantie bei diesen Strategien tatsächlich geringere Wahrscheinlichkeiten besitzen, als sie durch die Verteilungseigenschaften der unbeschränkten Strategien vorhergesagt werden. Beispielsweise bedeutet dies für die diskret-gehandelte CPPI, dass die tatsächliche Ausfallwahrscheinlichkeit geringer sein wird als die Ergebnisse in Abschnitt 4.1 ergeben. Eine weitergehende Diskussion erfolgt in Abschnitt 4.3.

In den Ergebnissen aus Tabelle 3.1 fällt außerdem auf, dass das Verhalten des Erwartungswertes der beschränkten Strategie bezüglich Änderungen des Verschuldungsgrads ω nicht monoton ist. Offensichtlich gilt, dass die beschränkte Strategie mit $\omega \rightarrow m$ gegen die einfache CPPI konvergiert. Anstatt dass mit höherer Verschuldung auch ein höherer erwarteter Endwert erzielt wird, zeigen die Daten, dass dies erst für sehr große Verschuldungsgrade gilt. Ansonsten fällt der Erwartungswert im Vergleich zur beschränkten CPPI ohne Möglichkeit zur Kreditaufnahme. Im Sinne der Maximierung des Erwartungswertes ist eine CPPI mit höherem aber begrenzten Verschuldungsgrad also nur von begrenztem Nutzen und wird aus diesem Grund nicht weiter betrachtet.

Als letzter Punkt soll ein Vergleich zur Stop-Loss-Strategie erfolgen. Betrachtet man die Werte der beschränkten CPPI für wachsende Multiplier mit der Stop-Loss-Strategie, welche

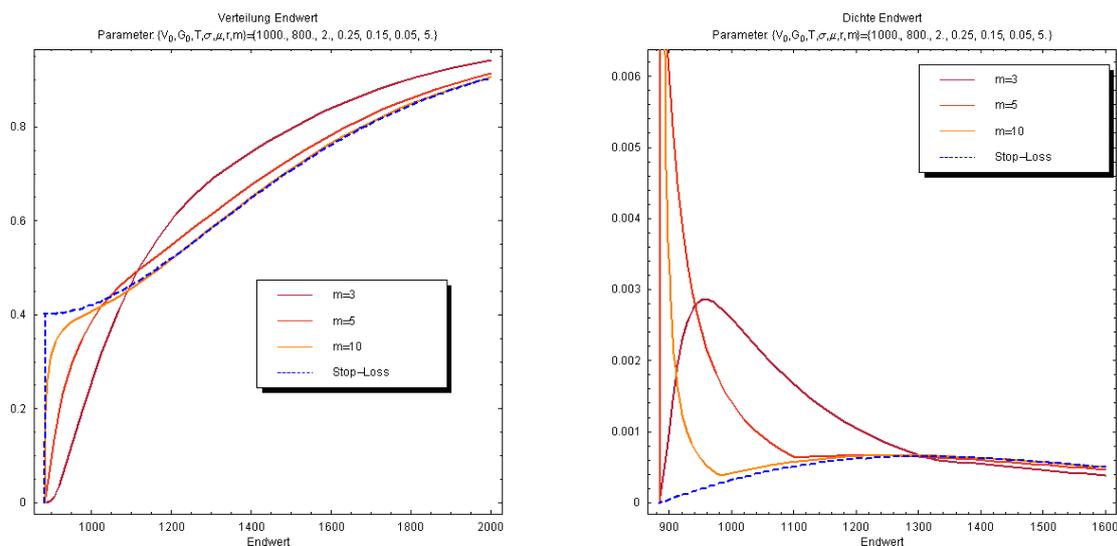


Abbildung 3.1: Verteilung und Dichte des Endwertes der Stop-Loss-Strategie und der beschränkten CPPI für verschiedene Multiplier, $\omega = 1$

gemäß der Ergebnisse aus Abschnitt 1.4.1 eine Schiefe von 1,28 und eine Kurtosis von 4,85 aufweist, ist offensichtlich, dass sich die Werte der beschränkten CPPI für wachsende m diesen Werten annähert. Dies entspricht den Ergebnissen in Black und Perold (1992), nach der sich die Stop-Loss-Strategie als Grenzwert für $m \rightarrow \infty$ der beschränkten CPPI ergibt. Eine intuitive Erklärung liegt darin, dass bei großem Multiplier über die gesamte Laufzeit hauptsächlich eine Buy-and-Hold-Strategie verfolgt wird und bei einem Wechsel in die einfache CPPI der Drift θ_1 so stark negativ ist, dass der Prozess X_t gegen $-\infty$ und somit C_t gegen 0 konvergiert. Die Konvergenz gegen die Stop-Loss-Strategie wird durch die Verteilung und die Dichte der beschränkten CPPI in Abbildung 3.1 weiter verdeutlicht. Anhand dieser erkennt man, dass bereits für einen Multiplier von $m = 10$ nahezu eine Übereinstimmung zwischen beiden Verteilungen vorliegt. Der hohe Multiplier bewirkt, dass erst bei sehr niedrigen Werten für den Cushion und somit des Aktienkurses, in die CPPI-Strategie gewechselt wird (hier: 10% des Portfoliowertes). In diesem Sinne lässt sich die beschränkte CPPI auch als Approximation der Stop-Loss-Start-Gain-Strategie betrachten. Die von Carr und Jarrow (1990) aus der Lokalzeit der Brownschen Bewegung abgeleiteten Transaktionskosten der Stop-Loss-Start-Gain-Strategie finden sich hier in Form der impliziten Prämie der einfachen CPPI wieder. Eine genauere Untersuchung der impliziten Prämie erfolgt im nächsten Abschnitt bei der Betrachtung der Pfadabhängigkeit der beschränkten CPPI. Auch für einen kleineren Multiplier wie $m = 5$ sind beide Strategien für hohe Portfoliowerte ähnlich. Dies ergibt sich ebenfalls aus der Tatsache, dass hohe Endwerte einer größtenteils auf Buy-and-Hold-basierenden Strategie entsprechen. Im Gegensatz dazu ist die Wahrscheinlichkeit einer Auszahlung, die in der Nähe der Garantie liegt, deutlich kleiner. Dies erklärt

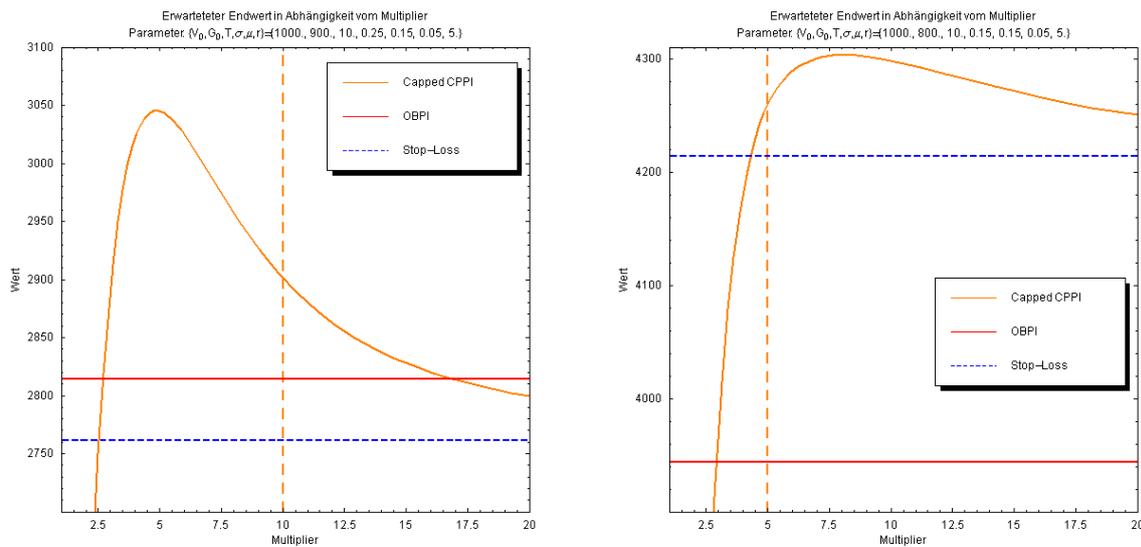


Abbildung 3.2: Erwartete Auszahlung der beschränkten CPPI in Abhängigkeit vom Multiplier, $\sigma = 25\%$ (15%); $G_0 = 900$ (800)

sich dadurch, dass die CPPI bei zwischenzeitlichen Kursverlusten nicht wie die Stop-Loss-Strategie vollständig ausschließlich in die risikolose Anlage investiert, sondern eine positive Investitionsquote in der Aktie beibehält. Darum ist der Erwartungswert der beschränkten CPPI auch nicht monoton wachsend im Multiplier. Die Differenz der Erwartungswerte der beschränkten und der Stop-Loss-Strategie für eine Laufzeit von 10 Jahren werden in Abbildung 3.2 deutlich. Die gestrichelte Linie gibt dabei denjenigen Multiplier an, bei dem gerade eine anfänglich vollständige Aktieninvestition erfolgt, d.h. $x_0 = 0$ gilt.

Eine genauere Betrachtung unter welchen Bedingungen und mit welchen Wahrscheinlichkeiten die beschränkte CPPI ihren jeweiligen Bestandteilen folgt, insbesondere in Abhängigkeit vom Kurs der zugrunde liegenden risikobehafteten Anlage, wird im folgenden Abschnitt unternommen. Bezüglich des Verhaltens der Investitionsquote sei auf den darauf folgenden Abschnitt verwiesen. Insbesondere werden die folgenden Ergebnisse nicht nur den hier erfolgten Vergleich mit der Stop-Loss-Strategie zulassen, sondern auch für einen Vergleich mit der OBPI in Abschnitt 3.3 hilfreich sein.

3.1.2 Bedingte Verteilung

Durch die Beschränkung der Zugewinne der beschränkten CPPI durch die Aktiengewinne, liegt es nahe, das Verhalten der Strategie in Abhängigkeit der Aktienkursentwicklung zu beschreiben. Die im folgenden diskutierte Frage lautet:

Falls der Aktienkurs zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben ist, welche Rückschlüsse lassen sich auf den Wert der Strategie schließen?

Diese Frage ist insbesondere für den Vergleich der beschränkten CPPI mit einer OBPI von Interesse, wenn es darum geht, die Auszahlungsprofile zu vergleichen. Umgekehrt lässt sich somit klären, wie pfadabhängig die Strategie ist. Pfadabhängige Auszahlungen lassen sich als zusätzliches Risiko interpretieren, was durch die Verteilung nur bedingt wiedergegeben wird. Betrachtet man z.B. die Stop-Loss-Strategie, so reicht bereits eine kurzfristige Kursverlust am Aktienmarkt, um ausschließlich die Garantie zu erhalten, unabhängig davon, ob sich die Kurse wieder erholen.

Mit den Überlegungen aus Abschnitt 1.3.3 lässt sich der Prozess X_t durch

$$X_t = x_0 + \theta_0 t + (\theta_1 - \theta_0) \Gamma_t^- + W_t$$

darstellen, wobei θ_0 gerade den Marktpreis des Risikos der Aktie beschreibt und Γ_t^- die Aufenthaltsdauer des Prozesses X_t in der negativen Halbachse beschreibt. Besitzt der Prozess X_t negative Werte, bedeutet dies aber gerade, dass anstelle einer Buy-and-Hold-Strategie die CPPI-Strategie verfolgt wird. Somit kann Γ_t^- auch als die Dauer, wie lange die Strategie einer einfachen CPPI-Strategie folgt, interpretiert werden. Mit $\theta_1 < \theta_0$ für $m > 1$, ergeben sich obere und untere Grenzen für den Prozess X_t in Abhängigkeit der Brownschen Bewegung durch $\Gamma_t^- = 0$ bzw. $\Gamma_t^- = t$ und somit, da W_t der Schock-Term der Aktie ist, auch obere und untere Grenzen für den Wert der beschränkten CPPI in Abhängigkeit von der Aktienkursentwicklung.

Proposition 3.1.1 *Die obere (V_t^U) und untere (V_t^L) Grenze für den Wert der beschränkten CPPI-Strategie bedingt auf den Schlusskurs der risikobehafteten Anlage $s = \frac{S_t}{S_0}$ ist für $mC_0 \geq V_0$ durch*

$$V_t^U = \begin{cases} V_0 \frac{S_t}{S_0} & S_t \geq S_0 e^{rt} \frac{m}{m-1} \frac{G_0}{V_0} \\ G_t \left(1 + \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-rt} \frac{V_0}{G_0} \right)^m \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$V_t^L = \begin{cases} V_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-\frac{m-1}{2}\sigma^2 t} & S_t \geq S_0 e^{(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \frac{m}{m-1} \frac{G_0}{V_0} \\ G_t \left(1 + \frac{(m-1)^{m-1}}{m^m} \left(\frac{S_t}{S_0} \frac{V_0}{G_0} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.6)$$

und für $mC_0 < V_0$ durch

$$V_t^U = \begin{cases} \frac{m}{m-1} G_0 \left(\frac{(m-1)C_0}{G_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{S_t}{S_0} & S_t \geq S_0 e^{rt} \left(\frac{G_0}{(m-1)C_0} \right)^{\frac{1}{m}} \\ e^{rt} \left(G_0 + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-rt} \right)^m \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.7)$$

$$V_t^L = \begin{cases} \frac{m}{m-1} G_0 \left(\frac{(m-1)C_0}{G_0} \right)^{\frac{1}{m}} \frac{S_t}{S_0} e^{-\frac{m-1}{2}\sigma^2 t} & S_t \geq S_0 e^{(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \left(\frac{G_0}{(m-1)C_0} \right)^{\frac{1}{m}} \\ e^{rt} \left(G_0 + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

gegeben.

Beweis : vgl. Appendix ■

Für den später genauer betrachteten Spezialfall, dass anfänglich gerade genau das gesamte Kapital in die Aktie investiert wird, d.h. $mC_0 = V_0$ gilt, ergibt sich

Korollar 3.1.6 *Für $mC_0 = V_0$ sind die oberen und unteren Grenzen in Abhängigkeit des Schlusskurses der Aktie durch*

$$V_t^U = \begin{cases} V_0 \frac{S_t}{S_0} & S_t \geq S_0 e^{rt} \\ e^{rt} \left(G_0 + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-rt} \right)^m \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.9)$$

$$V_t^L = \begin{cases} V_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-\frac{m-1}{2}\sigma^2 t} & S_t \geq S_0 e^{(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \\ e^{rt} \left(G_0 + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m \right) & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.10)$$

gegeben.

Beweis : Ergibt sich direkt aus dem Beweis zur Proposition 3.1.1 und der Tatsache, dass $x_0 = 0$ nach Annahme. ■

Die Darstellung in Korollar 3.1.6 liefert nun eine genauere Interpretation der Strategie. Im Prinzip lässt sich die beschränkte CPPI als Investition in die Aktie auffassen, wobei für die Gewährleistung der Garantie eine stochastische Prämie zu zahlen ist. Es sei daran erinnert, dass sich die einfache CPPI als Investition in Power-Kontrakte identifizieren lässt, wobei der Bestand an Power-Kontrakten über die Laufzeit hinweg abnimmt und somit ebenfalls eine implizite Prämie darstellt. Die Höhe der Prämie der beschränkten CPPI ist im Gegensatz dazu nicht konstant wachsend, sondern ergibt sich aus dem Verlauf des Aktienkurses. Zur Motivation betrachten wir jeweils die obere und untere Grenze der beschränkten CPPI, sofern der Aktienkurs jeweils oberhalb der in 3.1.6 geforderten Bedingung ist, d.h. $S_t \geq S_0 e^{(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t}$. Man sieht, dass sich die beiden Terme um den Faktor $e^{-\frac{m-1}{2}\sigma^2 t}$ unterscheiden. Dieser Faktor lässt sich als die maximale Prämie, die zur Absicherung gezahlt werden muss, auffassen. Sofern der Kursverlauf günstig ist, in dem Sinne, dass nie nach den Regeln der einfachen CPPI gehandelt werden musste, ergibt sich eine 100%-ige Partizipation an den Kursgewinnen der Aktie. Dies steht im Gegensatz zur einfachen OBPI, wo eine feste Prämie zu zahlen ist und somit keine 100%-ige Partizipation ohne die Möglichkeit der Verschuldung möglich ist. Umgekehrt gilt jedoch im Gegensatz zur Stop-Loss-Strategie, dass ungünstige Kursverläufe nicht automatisch jeden Überschuss unmöglich machen. In diesem Sinne kann die beschränkte CPPI als Kreuzung zwischen den optionsbasierenden und den Stop-Loss-Strategien interpretiert werden. Die maximal zu zahlenden Prämie zur Absicherung, die bei schlechten Kursverläufen anfällt, ist exponentiell proportional zur Laufzeit, zum Multiplier und zur Volatilität der Aktie. Ebenso wie bei den optionsbasierenden Strategien ist sie,

bedingt auf den Schlusskurs der Aktie, unabhängig von der Aktienrendite. Als letzter Punkt sei darauf hingewiesen, dass die Beschränktheit der Prämie auch den Unterschied zur Stop-Loss-Start-Gain-Strategie beschreibt.

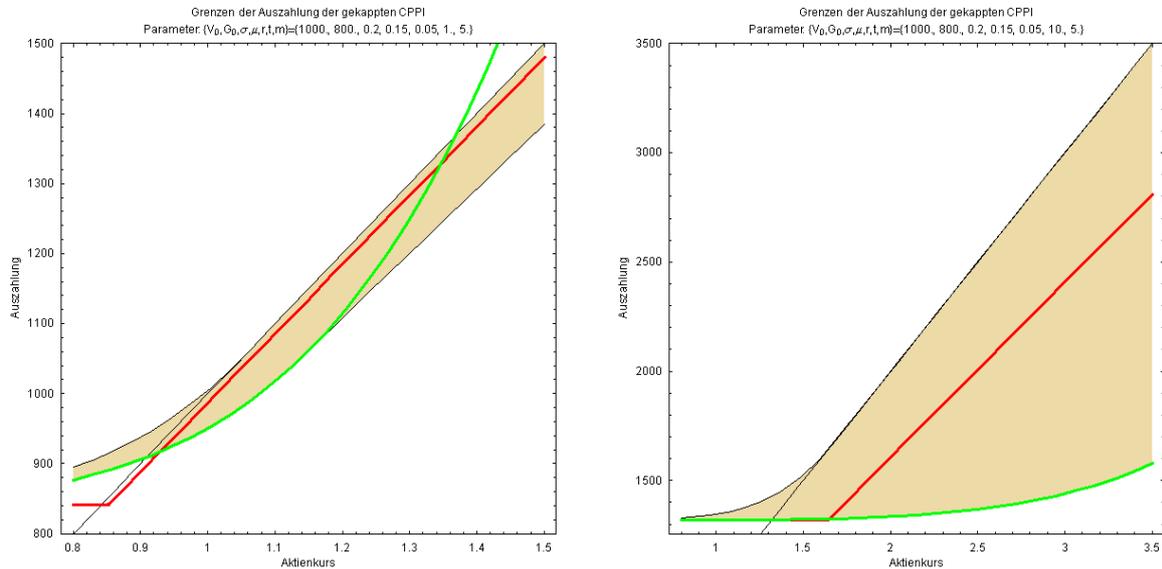


Abbildung 3.3: Grenzen der Auszahlung der beschränkten CPPI, einfachen CPPI und OBPI für verschiedene Laufzeiten

Ein erster Vergleich mit der OBPI lässt erkennen, dass im Falle fallender Aktienkurse die beschränkte CPPI im Gegensatz zur OBPI eine Auszahlung liefert, die strikt oberhalb der Garantie liegt. Die Abbildungen 3.4 und 3.3 zeigen, dass die Auszahlung der OBPI bei vollständiger anfänglicher Aktieninvestition der CPPI die Auszahlung der CPPI nie dominiert. Die orange Fläche gibt dabei die aus den Grenzen abgeleiteten möglichen Auszahlungen der beschränkten CPPI an. Das Auszahlungsprofil der einfachen OBPI ist durch den roten Graph gekennzeichnet. Die schwarze Linie gibt die Auszahlung der reinen Aktieninvestition an. Zusätzlich ist das Auszahlungsprofil der einfachen CPPI durch einen grünen Graph dargestellt, um zu verdeutlichen, dass die Auszahlung der einfachen CPPI für niedrige Aktienkurse die untere Grenze der beschränkten CPPI bildet.

In Abbildung 3.4 erkennt man, dass, falls der Multiplier zu klein gewählt wird, die OBPI die einfache CPPI bei hohen Aktienkursen dominiert. Wird der Multiplier umgekehrt zu groß gewählt, wird die Schwankungsbreite für den Endwert der beschränkten CPPI zu groß. Ein Multiplier, der dafür sorgt, dass anfänglich gerade das gesamte Kapital in die Aktie investiert wird, scheint somit aus diesen Überlegungen sinnvoll. Aus diesem Grund werden wir uns im Abschnitt 3.3, wo es um einen genaueren Vergleich zwischen OBPI, beschränkter CPPI und CPPI mit Floor-Anpassung geht, auf Kombinationen von Multiplier und anfänglicher Garantie beschränken, die gerade einer anfänglichen Aktieninvestition entsprechen.

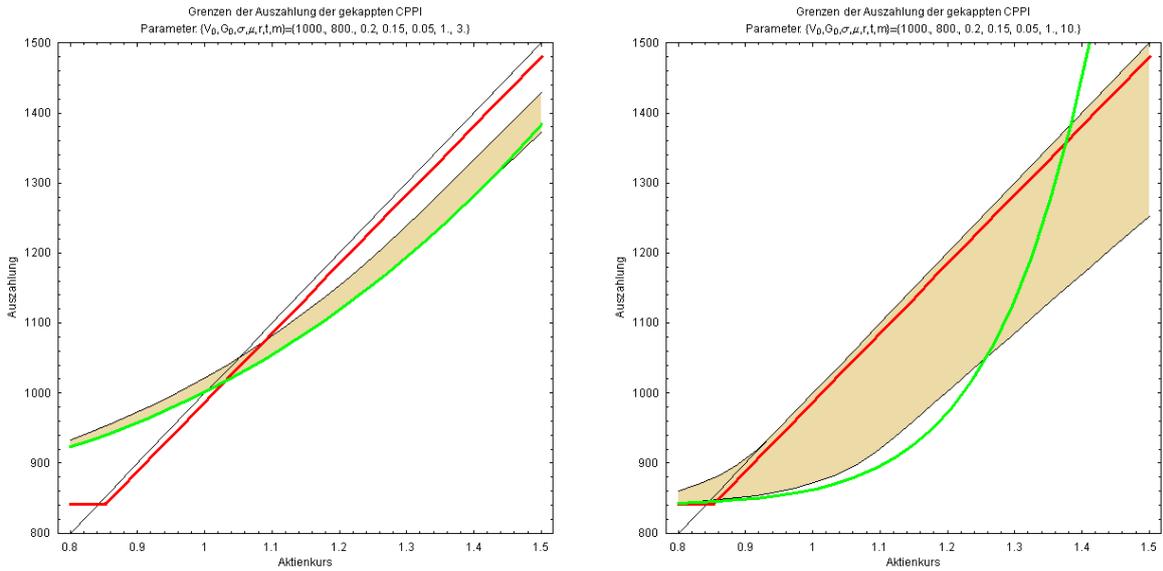


Abbildung 3.4: Grenzen der Auszahlung der beschränkten CPPI, einfachen CPPI und OBPI für verschiedene Multiplier

Bleibt man bei der Interpretation, dass Abweichungen von der oberen Schranke als Prämie aufgefasst werden können, stellt sich die Frage nach der tatsächlichen Höhe bzw. der Verteilung dieser Prämie. Es ist nicht zu erwarten, dass bei Kurszuwächsen die maximale Prämie zu zahlen ist, da die Wahrscheinlichkeit, dass die gesamte Laufzeit über gemäß einer einfachen CPPI gehandelt wird, gering ist. Dies führt uns zu der Überlegung, welche Verteilung der Endwert der beschränkten CPPI in Abhängigkeit von der Entwicklung des Aktienkurses besitzt. Mathematisch entspricht dies der auf den Endwert der Brownschen Bewegung bedingten Verteilung der Aufenthaltsdauer Γ_t^- und ist in Abschnitt 1.3.3 diskutiert worden. Während es für die unbedingten Verteilungseigenschaften aus numerischer Sicht sinnvoller war, mit den entsprechenden Laplace-Transformationen zu arbeiten, werden wir für die bedingten Eigenschaften auf die Integraldarstellungen zurückgreifen. Die resultierende bedingte Dichte ist mit den in Anhang A.1 vorgestellten Integralformeln explizit lösbar.

Wir beginnen mit einem Lemma, welches die bedingte Wahrscheinlichkeit angibt, dass eine beschränkte CPPI, die als einfache CPPI startet, über gesamte Laufzeit eine einfache CPPI bleibt und dass eine beschränkte CPPI, die als Buy-and-Hold-Strategie startet, bis zum Ende eine Buy-and-Hold-Strategie bleibt.

Lemma 3.1.7 Für $s \geq S_0 e^{rt} \frac{m}{m-1} \frac{G_0}{V_0}$ gilt:

$$P[V_t = V_t^U | S_t = s] = 1 - \left(\frac{(m-1)V_0}{mG_0} \right)^{-\frac{2}{\sigma^2 t} \left(\ln \left(\frac{(m-1)V_0 s}{mG_0 S_0} \right) - rt \right)} \quad (3.1.11)$$

Für $s \leq S_0 e^{(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \left(\frac{G_0}{(m-1)C_0}\right)^{\frac{1}{m}}$ gilt:

$$P[V_t = V_t^L | S_t = s] = 1 - \left(\frac{(m-1)C_0}{G_0}\right)^{-\frac{2}{\sigma^2 m^2 t}} \left(\ln\left(\frac{(m-1)C_0 s^m}{G_0 S_0^m}\right) - mrt\right) \quad (3.1.12)$$

Beweis : vgl. Appendix ■

Aus den gleichen Argumenten lässt sich nun die bedingte Dichte der beschränkten CPPI bestimmen. In der folgenden Proposition geben wir eine analytische Darstellung, die wiederum auf den Ergebnissen zur Brownschen Bewegung mit wechselndem Drift beruht, an.

Proposition 3.1.2 *Für die Dichte des auf den Schlusskurs der Aktie bedingten Endwertes der beschränkten CPPI gilt:*

$$P[V_t \in dv | S_t = s] = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2\pi t}}{(m-1)\sigma^3 v} e^{\frac{1}{2t}\tilde{s}^2} \left(\frac{(m-1)v}{mG_0 e^{rt}}\right)^{\frac{\theta_0}{\sigma}} e^{-X_0\Theta(X_0) - \frac{1}{2}\theta_1^2(t - \hat{\tau}(v)) - \frac{1}{2}\theta_0^2\hat{\tau}(v)} & \text{für } v \geq \frac{mG_0 e^{rt}}{m-1} \\ F^{X_0, t, -\frac{m-1}{2}\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)v}{mG_0 e^{rt}}, \hat{\tau}(v)\right) dv \\ \frac{2\sqrt{2\pi t}}{m(m-1)\sigma^3(v - G_0 e^{rt})} e^{\frac{1}{2t}\tilde{s}^2} \left(\frac{(m-1)(v - G_0 e^{rt})}{G_0 e^{rt}}\right)^{\frac{\theta_1}{\sigma m}} e^{-X_0\Theta(X_0) - \frac{1}{2}\theta_1^2(t - \hat{\tau}(v)) - \frac{1}{2}\theta_0^2\hat{\tau}(v)} & \text{für } v < \frac{mG_0 e^{rt}}{m-1} \\ F^{X_0, t, -\frac{m-1}{2}\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma m} \ln \frac{(m-1)(v - G_0 e^{rt})}{G_0 e^{rt}}, \hat{\tau}(v)\right) dv \end{cases}$$

mit X_0 wie in Gleichung 3.1.3, $\Theta(x)$ wie in Gleichung 3.1.2, $\tilde{s} = \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{s}{S_0} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right)$,

$$\hat{\tau}(v) = \begin{cases} \frac{2\left(\tilde{s} + X_0 - \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)v}{mG_0 e^{rt}} - \theta_1 t\right)}{(m-1)\sigma^2} & v \geq \frac{mG_0 e^{rt}}{m-1} \\ \frac{2\left(\tilde{s} + X_0 - \frac{1}{\sigma m} \ln \frac{(m-1)(v - G_0 e^{rt})}{G_0 e^{rt}} - \theta_1 t\right)}{(m-1)\sigma^2} & v < \frac{mG_0 e^{rt}}{m-1} \end{cases}$$

und

$$F^{x_0, t, -\frac{m-1}{2}\sigma^2}(x, \tau) = \int_0^\infty \frac{(b - x^- - x_0^-)(b + x_0^+ + x^+)}{\pi\sqrt{\tau^3(t - \tau)^3}} e^{-b\frac{m-1}{2}\sigma^2 - \frac{(b+x_0^++x^+)^2}{2\tau} - \frac{(b-x_0^- - x^-)^2}{2(t-\tau)}} db .$$

Es sei auch an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für die Funktion $F^{x_0, t, -\frac{m-1}{2}\sigma^2}(x, \hat{\tau})$ mit der Integralformel in Lemma A.1.4 eine explizite Lösung gegeben ist.

Beweis : Es ist allgemein bekannt: Falls $f(y)$ die Dichtefunktion einer Zufallsvariable Y , d.h. $P[Y \in dy] = f(y)dy$, ist und $g(y)$ eine monoton wachsende Funktion ist, so ist $(g^{-1})'(y)f(g^{-1}(y))$ die Dichtefunktion von $g(Y)$. Mit $V_t = g(X_t)$ gemäß Theorem 3.1.2 folgt

$$g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)x}{mG_0 e^{rt}} & x \geq \frac{mG_0 e^{rt}}{m-1} \\ \frac{1}{\sigma m} \ln \frac{(m-1)(x - G_0 e^{rt})}{G_0 e^{rt}} & x < \frac{mG_0 e^{rt}}{m-1} \end{cases}$$

und

$$(g^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma x} & x \geq \frac{mG_0e^{rt}}{m-1} \\ \frac{1}{\sigma m(x-G_0e^{rt})} & x < \frac{mG_0e^{rt}}{m-1} \end{cases}$$

Der Rest folgt durch Einsetzen aus Theorem 1.3.17. ■

Mit der obigen Proposition und Lemma 3.1.7 ist es nun möglich, das Auszahlungsprofil nicht nur über die obere und untere Grenze zu spezifizieren, sondern konkrete Konfidenzintervalle in Abhängigkeit des Aktienkurses anzugeben. Obwohl wir auf einen konkreten Beweis verzichten, sei angemerkt, dass die auf den Schlusskurs bedingte Verteilung ebenso wie die unteren und oberen Grenzen unabhängig von der Aktienkursrendite μ ist.⁸

3.1.3 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten

Analog zu den Betrachtungen bei der einfachen CPPI lässt sich die Cash-Lock-Wahrscheinlichkeit direkt aus der Verteilung des Wertes der beschränkten CPPI bestimmen. Sie ergibt sich aus den folgenden Überlegungen. Wie üblich bezeichne Π_t die Investitionsquote in die risikobehaftete Anlage der Strategie zum Zeitpunkt t .

$$\begin{aligned} P[\Pi_T \leq \beta | \Pi_t = \alpha] &= P\left[\frac{mC_T}{V_T} \leq \beta \mid \frac{mC_t}{V_t} = \alpha\right] \\ &= P\left[V_T \leq \frac{m}{m-\beta}G_T \mid G_t = \frac{m-\alpha}{m}V_t\right] \\ &= P\left[V_{T-t} \leq \frac{m}{m-\beta}G_0e^{r(T-t)} \mid G_0 = \frac{m-\alpha}{m}V_0\right] \quad . \quad (3.1.13) \end{aligned}$$

Dabei haben wir insbesondere das deterministische Verhalten der Garantie ausgenutzt. In Verbindung mit der Darstellung für die Dynamik des Wertprozesses der beschränkten CPPI in Theorem 3.1.2 erkennt man, dass diese Wahrscheinlichkeit außerdem auch unabhängig von der Wahl von V_0 ist.

Für die weiteren Überlegungen beschränken wir uns auf den oben genannten Spezialfall, dass m und G_0 so gewählt werden, dass der Investor zu Beginn gerade sein gesamtes Kapital in die Aktie investiert. Zwischen der anfänglichen Garantie und dem Multiplier besteht somit der Zusammenhang: $G_0 = \frac{m-1}{m}V_0$. Daraus folgt insbesondere für den Startwert der unseren Betrachtungen zugrunde liegenden Brownsche Bewegung $X_0 = 0$.

Eine erste Überlegung widmet sich dem Vergleich verschiedener Laufzeiten. Dazu betrachten wir hier nicht wie üblich die Rendite des Erwartungswert, sondern zusätzlich die Verteilung

⁸Ein Hinweis darauf liefert bereits Lemma 3.1.7, wo die Unabhängigkeit von μ offensichtlich ist.

des diskontierten Endwertes. Aus der Verteilung in Korollar 3.1.4 folgt

$$P[e^{-rT}V_T \leq v] = \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \begin{cases} 0 & v < G_0 \\ \frac{K_1(\lambda)}{K_2(\lambda)} \left(1 + m \frac{v-V_0}{V_0}\right)^{\frac{K_2(\lambda)}{\sigma m}} & G_0 \leq v \leq V_0 \\ \frac{1}{\lambda} + \frac{K_5(\lambda)+K_3(\lambda)}{K_6(\lambda)} \left(\frac{v}{V_0}\right)^{\frac{K_6(\lambda)}{\sigma}} & V_0 < v \end{cases} .$$

Man beachte, dass der mittlere Fall nun nicht mehr auftritt. Einsetzen und weitere Umformungen ergeben die Laplace-Transformierte für $G_0 \leq v \leq V_0$

$$\begin{aligned} & \frac{2 \left(1 + m \frac{v-V_0}{V_0}\right)^{\frac{K_2(\lambda)}{\sigma m}}}{(\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda})(\theta_0 - \theta_1 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})} \\ &= \frac{2 \left(1 + m \frac{v-V_0}{V_0}\right)^{\frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}{\sigma m}}}{2\lambda + (\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})(\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda})} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Analog ergibt sich für den Fall $v > V_0$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} + \frac{\frac{\theta_1 - \theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} - \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}(\theta_0 - \theta_1 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda})} + \frac{1}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}}}{\theta_0 - \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} \left(\frac{v}{V_0}\right)^{\frac{K_6(\lambda)}{\sigma}} \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{2 \left(\frac{v}{V_0}\right)^{\frac{\theta_0 - \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}}{\sigma}}}{2\lambda + (\theta_0 - \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})(\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda})} \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Wir wollen nun das langfristige Verhalten dieser Strategie betrachten. Allgemein gilt für Laplace-Transformationen der folgende Grenzwertsatz:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} f(T) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \mathcal{L}_{\lambda,T} \{f(T)\}$$

Für das langfristige Verhalten der Verteilungsfunktion muss somit nur die Laplace-Transformation an der Stelle 0 betrachtet werden. In Abhängigkeit von θ_i , $i \in \{0, 1\}$, ergeben sich 3 Fälle⁹: $\theta_0 > \theta_1 \geq 0$ (**A**); $\theta_1 < 0$, $\theta_0 > 0$ (**B**) und $\theta_1 < \theta_0 \leq 0$ (**C**). Die Grenzwerte für $\lambda \rightarrow \infty$ der Gleichungen 3.1.14 und 3.1.15 berechnen sich für die Fälle **A** bzw. **C** leicht zu 0 (für jedes $v > G_0$) bzw. 1 (für jedes $v < \infty$). Für den Fall **B** ergibt eine Anwendung der Regel von L'Hôpital in Gleichung 3.1.14

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2 \left(1 + m \frac{v-V_0}{V_0}\right)^{\frac{\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}{\sigma m}} \left(1 + \frac{\lambda \ln\left(1 + m \frac{v-V_0}{V_0}\right)}{\sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}\right)}{2 + \frac{(\theta_0 + \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + (\theta_1 + \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda})\sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}\sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}} = \frac{2}{2 + \frac{2\theta_0}{|\theta_1|}} = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_0} .$$

⁹Man beachte, dass für $m \geq 1$ gilt: $\theta_0 \geq \theta_1$

In Gleichung 3.1.15 ergibt sich analog

$$1 - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{v}{V_0} \right)^{\frac{\theta_0 - \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}}{\sigma}} \left(1 - \frac{\lambda \ln \frac{v}{V_0}}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} \right)}{2 - \frac{(\theta_0 - \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda})\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + (\theta_1 - \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda})\sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}{\sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}\sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}} = 1 - \frac{2}{2 + \frac{2|\theta_1|}{\theta_0}} = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_0}$$

Die resultierenden Wahrscheinlichkeiten sind unabhängig von v , so dass insgesamt gilt, dass entweder nur die Garantie erhalten oder jeder beliebige Wert, insbesondere V_0 , überschritten wird¹⁰.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P[e^{-rT} V_T = G_0] = \begin{cases} 0 & \mu > r + \frac{1}{2}m\sigma^2 \\ \frac{2(r-\mu)+m\sigma^2}{(m-1)\sigma^2} & r + \frac{1}{2}\sigma^2 < \mu \leq r + \frac{1}{2}m\sigma^2 \\ 1 & r + \frac{1}{2}\sigma^2 \geq \mu \end{cases}$$

und

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P[e^{-rT} V_T = \infty] = \begin{cases} 1 & \mu > r + \frac{1}{2}m\sigma^2 \\ \frac{2(\mu-r)-\sigma^2}{(m-1)\sigma^2} & r + \frac{1}{2}\sigma^2 < \mu \leq r + \frac{1}{2}m\sigma^2 \\ 0 & r + \frac{1}{2}\sigma^2 \geq \mu \end{cases}$$

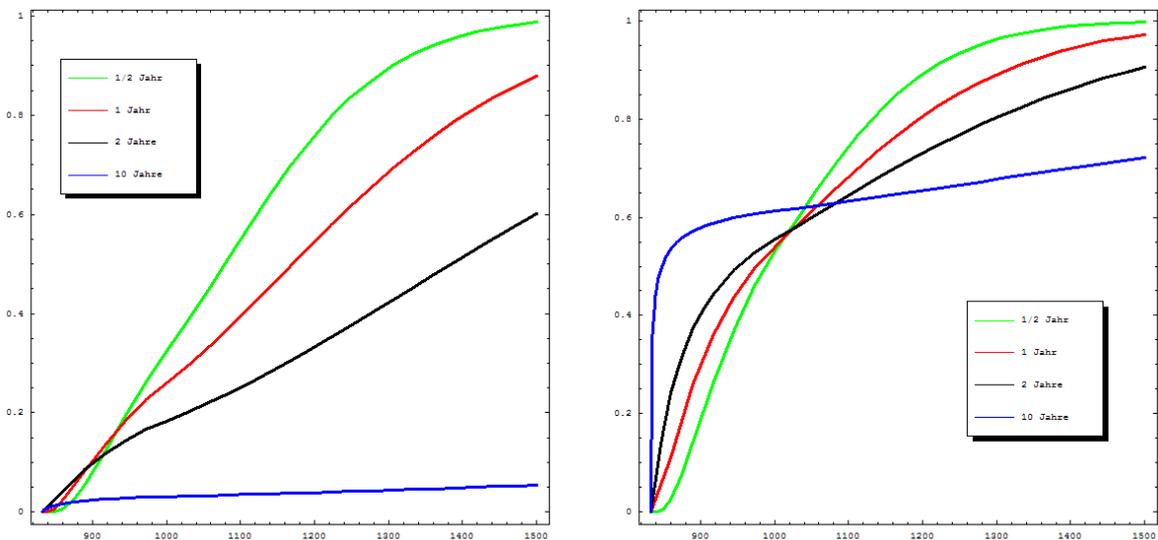


Abbildung 3.5: Verteilung des diskontierten Endwertes der CPPI bei anfänglicher Aktieninvestition für verschiedene Laufzeiten ($\theta_1 = 0,03$ bzw. $\theta_1 = -0,03$)

Wie schon bei der einfachen CPPI und insbesondere aus dieser folgend ergibt sich als notwendige Bedingung für die langfristige Effektivität der beschränkten CPPI $\theta_1 > 0$

¹⁰Mathematisch lässt sich diese Formel so interpretieren, dass eine Brownsche Bewegung, die einen negativen Drift besitzt, falls ihr Wert negativ ist und umgekehrt, mit Sicherheit gegen $-\infty$ bzw. $+\infty$ konvergiert. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus der Formel.

$\Leftrightarrow \mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$. Die Effektivität ist dabei durch die Möglichkeit von Zuwächsen der Aktie zu profitieren beschrieben.

Betrachten wir nun noch einmal den Zusammenhang zur Stop-Loss-Strategie. Wird die notwendige Bedingung eingehalten, so erzielt die beschränkte CPPI im Gegensatz zur Stop-Loss mit Sicherheit langfristig eine über der risikolosen Verzinsung liegende Rendite. Die Stop-Loss-Strategie besitzt dagegen nur eine Wahrscheinlichkeit von $1 - \left(\frac{G_0}{V_0}\right)^{2\frac{\mu-r}{\sigma^2}-1}$ auf langfristig oberhalb der Garantie liegende Erträge (vgl. Abschnitt 1.4.1). Die relative Gewinnwahrscheinlichkeit ist also größer. Für die anfängliche Aktieninvestition einer beschränkten CPPI, d.h. für die Wahl des Multipliers durch $m = \frac{V_0}{V_0 - G_0}$, ist die Gewinnwahrscheinlichkeit selbst dann größer, wenn die Bedingung verletzt ist. Aufbauend auf den Ergebnissen¹¹ zur Stop-Loss-Strategie folgt dazu für $r + \frac{1}{2}\sigma^2 \leq \mu \leq r + \frac{m}{2}\sigma^2$ durch eine Anwendung der Bernoulli-Ungleichung¹² für $\mu > r + \frac{1}{2}\sigma^2$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} P[V_T^{SL2} = G_T] &= \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{2(r-\mu)+\sigma^2}{\sigma^2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{\frac{2(r-\mu)+\sigma^2}{\sigma^2}} \\ &\geq 1 + \frac{2(r-\mu) + \sigma^2}{(m-1)\sigma^2} \\ &= \frac{2(r-\mu) + m\sigma^2}{(m-1)\sigma^2} \\ &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} P[V_T = G_T] \end{aligned}$$

Das Risiko der beschränkten CPPI, nur die eingebaute Garantie zu erhalten, ist also unabhängig von den Parametern geringer als bei der Stop-Loss-Strategie.

¹¹Der pathologische Fall $\mu < r + \frac{1}{2}\sigma^2$, wo beide nur die Garantie erzielen wird nicht betrachtet, da in diesem Fall die Rendite der Aktie selbst langfristig mit Sicherheit unterhalb der risikolosen liegt.

¹²Die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung besagt: Es gilt $(1+x)^s \geq 1+sx$ für $x > -1$ und $s \leq 0$ oder $s \geq 1$

3.2 CPPI mit Floor-Anpassung

Die Motivation für die nun vorgestellten Strategien, bei der die Garantie nicht (nur) mit dem risikolosen Zins angepasst wird, sondern zusätzlich in Abhängigkeit von der bisherigen Wertentwicklung, ergibt sich aus zwei unterschiedlichen Betrachtungsweisen. Im Speziellen, ist es somit möglich, die Strategie so zu konstruieren, dass die maximale Investitionsquote 100% beträgt. Bei Erreichen dieser, wird die Garantie heraufgesetzt, wodurch der Cushion und damit auch die Investitionsquote verringert wird. Dieses außerordentliche Wachstum der Garantie hat aber einen zweiten Effekt. Dem Investor wird somit zugesichert, dass zu jedem Zeitpunkt ein bestimmter Anteil des maximalen Portfolio-Wertes garantiert wird. Ein Wertverlust auf einen prozentualen Anteil des bislang maximal erreichten Vermögens wird in der Literatur als *Drawdown* bezeichnet. In diesem Sinne lässt sich die folgende Strategie als Strategie mit einer Drawdown-Beschränkung interpretieren. Um den Vergleich zwischen CPPI und OBPI vorwegzunehmen, sei erwähnt, dass sich auch bei der OBPI eine Drawdown-Beschränkung implementieren lässt, indem anstelle der einfachen europäischen Call- oder Put-Optionen so genannte Look-Back-Optionen gekauft werden. Durch den höheren Preis einer solchen Option folgt, dass das Partizipationslevel größer bzw. die Partizipationsrate kleiner wird. Durch die tendenziell höhere Garantie werden somit auch die Chancen auf höhere Gewinne gemindert. Diesen Effekt werden wir auch im Folgenden beobachten und unten im Vergleich zur beschränkten CPPI genauer beschreiben. Untersuchungen bezüglich Strategien mit Drawdown-Beschränkungen finden sich bei Grossman und Zhou (1993) und Cvitanić und Karatzas (1995). Die dort erfolgten Betrachtungen beziehen sich auf die Maximierung eines erwarteten Nutzens und es wird die Optimalität der CPPI-Struktur bezogen auf CRRA-Nutzenfunktionen unter der Drawdown-Beschränkung gezeigt. Zur Verdeutlichung betrachten wir zunächst wiederum ein Beispiel in diskreter Zeit.

Beispiel: CPPI mit Floor-Anpassung

t	0	1	2	3	4	5
S_t	100	120	130	100	120	135
V_t	1000	1162	1259	968	989	1011
G_t	800	872	944	954	963	973
C_t	200	290	315	14	26	38
π_t^1	80%	100%	100%	6%	11%	15%
π_t^0	20%	0%	0%	94%	89%	85%

CPPI mit variabler Garantie-Anpassung

$$m = 4 \quad r = 1\%$$

Nachdem in der ersten Periode der Kurs des zugrunde liegenden Wertpapier um 20% gestiegen ist, wird die Garantie nicht wie üblich um den risikolosen Zins erhöht, sondern beträgt in diesem Fall 75% des Portfoliowertes. Weitere Kurszuwächse lassen die Garantie sogar auf 944 in der zweiten Periode steigen. In beiden Perioden wird das gesamte Kapital in das Underlying investiert. Nach dem Kurseinbruch in der dritten Periode ist nun jedoch nicht mehr genügend Kapital vorhanden, um weiter nennenswert in der risikobehafteten Anlage investiert zu bleiben.

Ende Beispiel: CPPI mit Floor-Anpassung

3.2.1 Dynamik und Verteilung

Neben dem Multiplikator wird die CPPI mit Floor-Anpassung im allgemeinen Fall durch 3 Parameter beschrieben: Die anfängliche Investitionsquote ω_0 , die maximale Investitionsquote ω und die Zielinvestitionsquote ω_1 . Dies bedeutet, dass eine Anpassung jeweils dann erfolgt, wenn die Investitionsquote gerade ω beträgt. In diesem Fall, wird der Floor so angepasst, dass die Investitionsquote den Wert ω_1 annimmt.

Im Sinne der beschränkten CPPI sind die Anpassungszeitpunkte mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1 durch eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\tau_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} \tau_{k+1} &:= \min(t > \tau_k \mid mC_t = \omega V_t) \\ &= \min \left\{ t > \tau_k \mid C_t = \frac{\omega G_t}{m - \omega} \right\} \\ &= \min \left\{ t > \tau_k \mid V_t = \frac{m G_t}{m - \omega} \right\} \end{aligned}$$

gegeben. Nach Anpassung soll die Investitionsquote gerade ω_1 betragen, also

$$\omega_1 = \pi_{\tau_k+}^1 = \frac{m(V_{\tau_k} - G_{\tau_k+})}{V_{\tau_k}}$$

Dies entspricht einer Anpassung der Garantie durch

$$G_{\tau_k+} = \frac{m - \omega_1}{m} V_{\tau_k} = \frac{m - \omega_1}{m} \frac{m}{m - \omega} G_{\tau_k} = \frac{m - \omega_1}{m - \omega} G_{\tau_{k-1}} e^{r(\tau_k - \tau_{k-1})} \quad (3.2.1)$$

$$= \dots = G_0 \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \right)^k e^{r\tau_k} \quad (3.2.2)$$

Zwischen den Stoppzeiten wächst die Garantie um die risikolose Zinsrate, so dass sich für $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$

$$G_t = G_0 \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \right)^k e^{rt} \quad (3.2.3)$$

ergibt. Mit

$$C_{\tau_k+} = V_{\tau_k} - G_{\tau_k+} = \frac{\omega_1}{m} V_{\tau_k} = \frac{\omega_1}{\omega} C_{\tau_k}$$

und der Tatsache, dass sich der Cushion-Prozess zwischen den Stoppzeiten wie der einer einfachen CPPI-Strategie verhält, folgt nach Abschnitt 2.1

$$C_{\tau_k+} = \frac{\omega_1}{\omega} C_{\tau_{k-1}} e^{(\tau_k - \tau_{k-1})r} \left(e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)(\tau_k - \tau_{k-1}) + \sigma(W_{\tau_k} - W_{\tau_{k-1}})} \right)^m$$

Für $t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]$ gilt also:

$$C_t = \dots = C_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^k e^{rt} \left(e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \right)^m = C_0 \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^k e^{rt} \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)^m \quad (3.2.4)$$

Zur Bestimmung der Verteilung des Wertes der Strategie zur Zeit t reicht es also aus, die gemeinsame Verteilung der Anzahl der Anpassungen und des Aktienkurses bzw. der Brownschen Bewegung zur Zeit t zu kennen. Im Folgenden betrachten wir nun genauer, wann eine Anpassung erfolgt. Dabei lassen sich die Argumentationen aus Abschnitt 3.1 analog umsetzen. Eine erstmalige Anpassung der Garantie erfolgt, falls

$$\begin{aligned} \omega G_{\tau_1} &= (m - \omega) C_{\tau_1} \\ \Leftrightarrow \omega G_0 e^{r\tau_1} &= (m - \omega) \frac{\omega_0 G_0}{m - \omega_0} e^{r\tau_1} \left(e^{(\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2)\tau_1 + \sigma W_{\tau_1}} \right)^m \\ \Leftrightarrow W_{\tau_1}^\theta &= \frac{1}{\sigma m} \ln \left(\frac{m - \omega_0}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_0} \right) \end{aligned}$$

wobei

$$\theta := \frac{\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2}{\sigma} \quad (3.2.5)$$

den Drift der Brownschen Bewegung bezeichnet. Für spätere Anpassungspunkte gilt aufgrund der Unabhängigkeit der Zuwächse

$$W_{\tau_k}^\theta = \frac{1}{\sigma m} \ln \left(\frac{m - \omega_0}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_0} \right) + \frac{k-1}{\sigma m} \ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right)$$

An dieser Stelle wollen wir, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, eine erste Vereinfachung vornehmen, nämlich, dass die anfängliche Investitionsquote mit der Zielinvestitionsquote $\omega_0 = \omega_1$ übereinstimmt. Wir können nun die Anzahl der Anpassungen mit dem Maximum einer Brownschen Bewegung mit Drift θ identifizieren:

$$\begin{aligned} G_t &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \right)^k \mathbb{I}_{\left\{ \frac{k}{\sigma m} \ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \leq M_t^\theta < \frac{k+1}{\sigma m} \ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right) \right\}} G_0 e^{rt} \\ &= \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \right)^{\left\lfloor \frac{\sigma m M_t^\theta}{\ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right)} \right\rfloor} G_0 e^{rt} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

und

$$C_t = \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^{\left\lfloor \frac{\sigma m M_t^\theta}{\ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right)} \right\rfloor} C_0 e^{rt} e^{\sigma m W_t^\theta} \quad (3.2.7)$$

Ausgehend von der Tatsache, dass generell eine möglichst hohe Investitionsquote erreicht werden soll, ist es nun nahe liegend zu untersuchen, welches Verhalten sich für $\omega_1 \rightarrow \omega$ ergibt. Die Garantie wird damit so angepasst, dass Wertzuwächse eine gleichbleibende Investitionsquote implizieren, sofern die maximale Investitionsquote erreicht wurde. Dies entspricht dann der Dynamik für den Wertprozess von Grossman und Zhou (1993, Proposition 2.2), ergibt sich jedoch hier als Grenzwertbetrachtung. Die Wohldefiniertheit dieses Grenzwertes lässt sich somit rückwirkend aus den gleichen Ergebnissen schließen und wird deswegen hier nicht explizit betrachtet. Abbildung 3.6 verdeutlicht den Unterschied zwischen der Zielinvestitionsquote in Höhe der maximalen Investitionsquote (rechts) und einer Zielinvestitionsquote von 50% und zeigt die insgesamt geringere Investitionsquote im Falle der geringen Zielquote.

Proposition 3.2.1 *Die Dynamik des Wertprozesses für $\omega = \omega_1 = \omega_0$ ist durch*

$$V_t = e^{rt + \sigma \omega M_t^\theta} \left(G_0 + G_0 \frac{\omega}{m - \omega} e^{m\sigma(W_t^\theta - M_t^\theta)} \right)$$

gegeben

Beweis : Wir betrachten zunächst die Gleichung 3.2.6 für die Garantie. Diese lässt sich wie folgt darstellen

$$e^{\ln \frac{m - \omega_1}{m - \omega} \left\lfloor \frac{\sigma m M_t^\theta}{\ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right)} \right\rfloor} \xrightarrow{\omega_1 \rightarrow \omega} e^{\sigma m M_t^\theta \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\ln \frac{m - \omega_1}{m - \omega}}{\ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right)}}$$

Betrachten wir nun den Grenzwert im Exponenten ergibt eine einfache Anwendung der Regel von L'Hôpital

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\ln \frac{m - \omega_1}{m - \omega}}{\ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega}{\omega_1} \right)} = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\frac{1}{m - \omega_1}}{\frac{1}{m - \omega_1} + \frac{1}{\omega_1}} = \frac{\omega}{m}$$

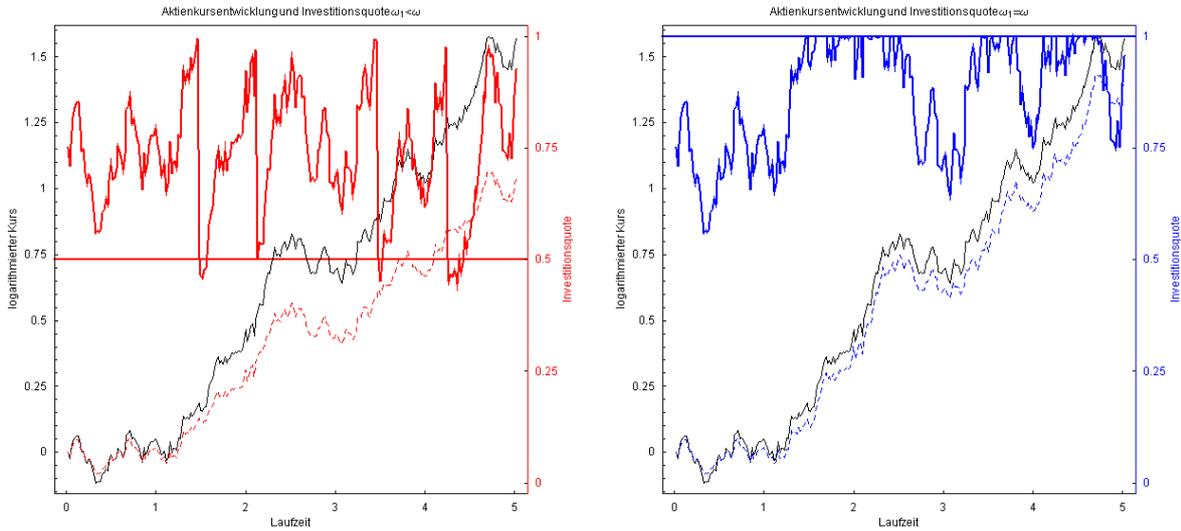


Abbildung 3.6: Aktienkursentwicklung, Wertentwicklung und Investitionsquote einer CPPI mit Floor-Anpassung. Zielinvestitionsquote 50% bzw. 100%.

und somit

$$G_t = G_0 e^{rt + \sigma \omega M_t^\theta} \quad (3.2.8)$$

Analog gilt für den relevanten Ausdruck in der Gleichung 3.2.7

$$\lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\ln \frac{\omega_1}{\omega}}{\ln \left(\frac{m - \omega_1}{m - \omega} \frac{\omega_m}{\omega_1} \right)} = \lim_{\omega_1 \rightarrow \omega} \frac{\frac{1}{\omega_1}}{\frac{1}{\omega_1 - m} - \frac{1}{\omega_1}} = -\frac{m - \omega}{m}$$

und somit

$$C_t = C_0 e^{rt - (m - \omega)\sigma M_t^\theta + m\sigma W_t^\theta} \quad (3.2.9)$$

Wegen $C_0 = G_0 \frac{\omega}{m - \omega}$ folgt die Behauptung. ■

Wie auch schon die CPPI mit konstantem Floor lässt sich das Anlageverhalten der CPPI mit Floor-Anpassung als Investition in Optionen bezüglich einer synthetischen Anlage interpretieren. Wir betrachten dazu die synthetische Anlage $\tilde{S}_t = \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \right)$, welche sich als diskontierte Aktienanlage auffassen lässt. Die Dynamik der synthetischen Anlage ist aufgrund der Dynamik der Aktie durch

$$\tilde{S}_t = e^{\sigma W_t^\theta}$$

bestimmt. Für $\omega = 1$ lässt sich die Dynamik aus Proposition 3.2.1 somit wie folgt darstellen

$$\begin{aligned} V_t &= e^{rt} e^{\sigma M_t^\theta} \left(G_0 + C_0 e^{m\sigma(W_t^\theta - M_t^\theta)} \right) \\ &= e^{rt} \left(\max_{s \leq t} \tilde{S}_s \right) \left(G_0 + C_0 \frac{\tilde{S}_t^m}{\max_{s \leq t} \tilde{S}_s^m} \right) \\ &= G_0 \left(e^{rt} \max_{s \leq t} \tilde{S}_s \right) + C_0 \left(e^{rt} \frac{(\tilde{S}_t)^m}{\max_{s \leq t} (\tilde{S}_s)^{m-1}} \right) \end{aligned}$$

Auch wenn die auftretenden Optionen in der Praxis eher selten sind, lassen sie sich in die übliche Charakterisierung, wie sie z.B. in Haug (2007) beschrieben wird, einordnen. Die anfängliche Garantie wird somit in einen aufgezinsten Lookback-Call mit Strike 0 bezüglich der synthetischen Anlage investiert, der anfängliche Cushion in eine aufgezinsten Quotienten-Option bzw. eine (relative) Outperformance-Option bezüglich eines Power-Kontraktes der synthetischen Anlage und eines zweiten Power-Kontraktes bezüglich des Maximums. In diesem Sinne lässt sich also auch die CPPI mit Floor-Anpassung als OBPI auffassen, wobei die Garantie hier nicht risikolos angelegt wird, sondern in eine Lookback-Option investiert wird, die mindestens die risikolose Verzinsung erzielt. Wie erwähnt, entspricht die synthetische Anlage dem diskontierten Aktienkurs. Dieser Diskont lässt sich in Analogie zur beschränkten CPPI als implizite, vom Kurs abhängige Prämie für die auftretenden Optionen auffassen. Basierend auf Proposition 3.2.1 und den Überlegungen in Abschnitt 1.3.1 ist es nun möglich die konkreten Verteilungseigenschaften der CPPI mit Floor-Anpassung zu beschreiben. Zunächst ergibt sich

Proposition 3.2.2 *Die Verteilung¹³ der CPPI mit Floor-Anpassung mit maximaler Investitionsquote $\omega = \omega_1 = \omega_0$ lautet*

$$P[V_t \leq v] = P \left[G_t \leq \frac{m - \omega}{m} v \right] + \int_{\frac{m-\omega}{m}v \sqrt{G_0 e^{rt}}}^v \frac{2}{\sigma \omega x} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{\phi(L(v, x))}{\sqrt{t}} - \theta \mathcal{N}(L(v, x)) \right) dx$$

$$\text{mit } \theta = \frac{\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2}{\sigma} \text{ und } L(v, x) = \frac{(m+\omega) \ln \frac{G_0 e^{rt}}{x} + \omega \ln \frac{(v-x)(m-\omega)}{\omega G_0 e^{rt}} - \theta \sigma m \omega t}{\sigma m \omega \sqrt{t}}.$$

Die Verteilung der Garantie wird in Lemma 3.2.2 angegeben.

Beweis Prop. 3.2.2: Einsetzen der Dynamik und Anwendung der Ergebnisse aus Ab-

¹³Für $\omega_0 < \omega$ müsste zusätzlich die Faltung mit der ersten Treffzeit der maximalen Investitionsquote betrachtet werden. Dies ließe sich zurückführen auf die Treffzeit einer Brownschen Bewegung und würde somit ein weiteres Integral bzgl. der Dichte der Treffzeit der Brownschen Bewegung bedingen.

schnitt 1.3.1 begründen nachstehende Umformungen

$$\begin{aligned}
P[V_t \leq v] &= P[e^{rt+\sigma\omega M_t^\theta} (G_0 + (V_0 - G_0)e^{m\sigma(W_t^\theta - M_t^\theta)}) \leq v] \\
&= \int_0^\infty \int_{-\infty}^x \mathbb{I}_{\{e^{rt+\sigma\omega x} (G_0 + (V_0 - G_0)e^{\sigma m(y-x)}) \leq v\}} P[W_t^\theta \in dy, M_t^\theta \in dx] \\
&= \int_0^{\frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{G_0 e^{rt}}} \int_{-\infty}^x \mathbb{I}_{\{y \leq x + \underbrace{\frac{1}{m\sigma} \ln \frac{ve^{-(rt+\omega\sigma x)} - G_0}{V_0 - G_0}}_{:=U(v,x)}\}} P[W_t^\theta \in dy, M_t^\theta \in dx] \\
&= \int_0^{\frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{G_0 e^{rt}}} \left(\mathbb{I}_{\{U(v,x) \geq 0\}} P[M_t^\theta \in dx] + \int_{-\infty}^{x + \frac{U(v,x)}{\sigma m}} \mathbb{I}_{\{U(v,x) < 0\}} P[W_t^\theta \in dy, M_t^\theta \in dx] \right) \\
&= P \left[M_t^\theta \leq \frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{V_0 e^{rt}} \right] + \int_{\left(\frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{V_0 e^{rt}}\right)^+}^{\frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{G_0 e^{rt}}} \int_{-\infty}^{x + \frac{U(v,x)}{\sigma m}} P[W_t^\theta \in dy, M_t^\theta \in dx]
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die letzte Gleichung durch Ausnutzen von $U(v, x) > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{V_0 e^{rt}}$. Mit $P[W_t^\theta \leq z, M_t^\theta \in dx] = 2e^{2\theta x} \left(\frac{\phi\left(\frac{z-2x-\theta t}{\sqrt{t}}\right)}{\sqrt{t}} - \theta \mathcal{N}\left(\frac{z-2x-\theta t}{\sqrt{t}}\right) \right)$ und Substitution von $\frac{1}{\omega\sigma} \ln \frac{v}{G_0 e^{rt}}$ ergibt sich die Behauptung. Für den ersten Summanden beachte man, dass nach Voraussetzung $G_0 = \frac{m-\omega}{m} V_0$ gilt. ■

Anschaulich lässt sich die Formel so interpretieren, dass zum einen jene Fälle betrachtet werden, bei denen die Garantie zu niedrig ist, damit der Endwert oberhalb v liegen kann und zum anderen die Fälle in denen der Wert des Cushion begrenzt werden muss. Wir werden darauf später zurückkommen, wenn es das Ziel ist, das langfristige Verhalten und geeignete Approximationen zu untersuchen. Zunächst sei jedoch durch Differenzieren die Dichte des Endwertes bestimmt.

Korollar 3.2.1 Die Dichte der Floor-angepassten CPPI mit maximaler Investitionsquote $\omega = \omega_1 = \omega_0$ lautet

$$P[V_t \in dv] = \int_{\frac{m-\omega}{m} v \vee G_0 e^{rt}}^v \frac{-2}{\sigma^2 m \omega (v-x) t} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega\sigma}} \left(L(v, x) + \theta \sqrt{t} \right) \phi(L(v, x)) dx dv$$

Beweis : siehe Appendix ■

Im Gegensatz zur Dichte und Verteilung lassen sich die Momente in analytischer Form darstellen.

Proposition 3.2.3 *Das n -te Moment der Floor-angepassten CPPI mit maximaler Investitionsquote $\omega = \omega_1 = \omega_0$ ist durch*

$$\begin{aligned}
E[(V_T)^n] = & 2 \left(\frac{m}{m-\omega} G_0 e^{(r+\theta\sigma\omega+\frac{1}{2}n(\sigma\omega)^2)t} \right)^n \mathcal{N}((\theta+n\sigma\omega)\sqrt{t}) \\
& + 2 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{\theta+(n-i)\sigma m}{n\sigma\omega+(n-i)\sigma m+2\theta} (G_0 e^{rt})^n \left(\frac{m-\omega}{\omega} \right)^{-(n-i)} \\
& \left(e^{(n-i)\sigma m(\theta+\frac{m\sigma}{2}(n-i))t} \mathcal{N}(-(\theta+(n-i)\sigma m)\sqrt{t}) - e^{(\theta+\frac{n\sigma\omega}{2})n\sigma\omega t} \mathcal{N}((\theta+n\sigma\omega)\sqrt{t}) \right)
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

gegeben.

Beweis : siehe Appendix ■

Betrachten wir nun die Dynamik des Endwertes in Proposition 3.2.1 genauer, wird deutlich, dass sich recht trivial eine obere und untere Grenze für den Endwert in Abhängigkeit der Garantie ergeben. Der Cushion kann nicht unter den Wert Null fallen und somit ist die augenblickliche Garantie eine untere Grenze $V_t \geq G_t$. Umgekehrt kann der Cushion nach Konstruktion höchstens den Wert $\frac{\omega}{m-\omega}G_t$ besitzen, ohne dass die Garantie angepasst wird, also $V_t \leq \frac{m}{m-\omega}G_t$. Im Vergleich zu den obigen Formeln sind die Verteilungseigenschaften von G_t verhältnismäßig einfach bestimmt, da sie nur vom Maximum abhängig sind. Des Weiteren lassen sich auf diesem Wege auch die Grenzwerteigenschaften für $t \rightarrow \infty$ bestimmen. Es ist bekannt, dass die Brownsche Bewegung mit Drift auf lange Sicht entweder unbeschränkt ist und somit ständig neue Maxima annimmt, falls der Drift positiv ist, oder ein absolutes Maximum besitzt, wenn der Drift negativ ist. Insbesondere konvergiert der Wertprozess entweder gegen die obere oder untere Grenze. Zunächst sei die Verteilung der Garantie durch folgendes Lemma charakterisiert.

Lemma 3.2.2 *Für die Floor-angepasste CPPI mit maximaler Investitionsquote $\omega = \omega_1 = \omega_0$ gilt:*

$$P[G_t \leq \frac{m-\omega}{m}v] \leq P[V_t \leq v] \leq P[G_t \leq v]$$

mit

$$P[G_t \leq g] = \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{g}{G_0 e^{rt}} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{g}{G_0 e^{rt}}\right)^{\frac{2\theta}{\sigma\omega}} \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{G_0 e^{rt}}{g} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}}\right) \tag{3.2.11}$$

für $g \geq G_0 e^{rt}$ und $P[G_t \leq g] = 0$ für $g < G_0 e^{rt}$

Beweis : Aus $G_t \leq V_t \leq \frac{m}{m-\omega}G_t$ folgt insbesondere $\{\frac{m}{m-\omega}G_t \leq v\} \subseteq \{V_t \leq v\} \subseteq \{G_t \leq v\}$ und somit der erste Teil. Die Darstellung der Garantie in 3.2.8 und die Verteilung des Maximums einer Brownschen Bewegung mit Drift (s. Abschnitt 1.3.1, Gleichung 1.3.3) ergeben die zweite Aussage. ■

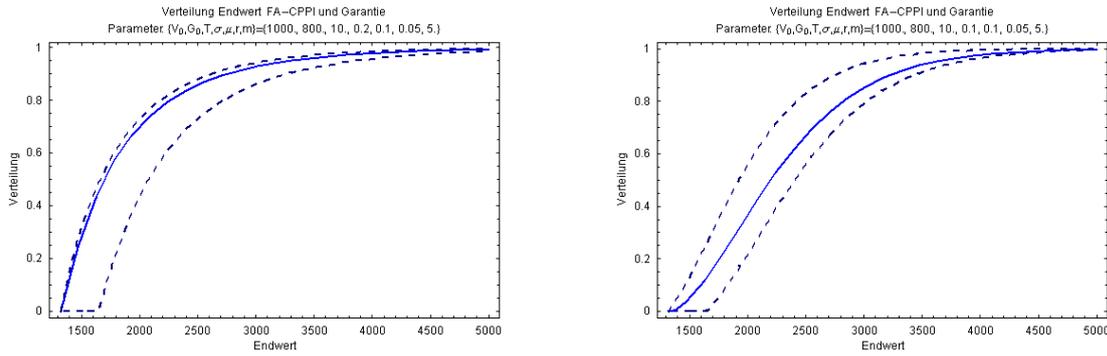


Abbildung 3.7: Verteilung der Floor-angepassten CPPI mit $\theta = -0.03$ bzw. $\theta = 0.03$

Abbildung 3.7 verdeutlicht die Unterschiede zwischen der tatsächlichen Verteilung des Endwertes und den Ober- und Untergrenzen. Man beachte, dass für negative θ die obere Grenze schon für kürzere Laufzeiten (hier: 10 Jahre) eine gute Approximation darstellt und umgekehrt für einen positiven Drift der Brownschen Bewegung die tatsächliche Verteilung eher in der Nähe der unteren Grenze liegt. Es sei daran erinnert, dass die Positivität von θ der bekannten notwendigen Bedingung an die Effektivität der einfachen CPPI $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$ entspricht.

Wiederum lassen sich auch die Momente bestimmen. Da sich die später folgenden Grenzwertresultate leichter bestimmen lassen, wenn man den Erwartungswert der Garantie betrachtet, werden wir diesen im nächsten Lemma angeben.

Lemma 3.2.3 *Für die Garantie einer Floor-angepassten CPPI mit maximaler Investitionsquote $\omega = \omega_1 = \omega_0$ gilt:*

$$E[G_t^n] = (G_0 e^{rt})^n \left(\frac{2n\sigma\omega + 2\theta}{n\sigma\omega + 2\theta} e^{\frac{n\sigma\omega}{2}(n\sigma\omega + 2\theta)t} \mathcal{N}((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}) + \frac{2\theta}{n\sigma\omega + 2\theta} \mathcal{N}(-\theta\sqrt{t}) \right) \quad (3.2.12)$$

Beweis : siehe Appendix ■

3.2.2 Bedingte Verteilung

Um die Pfadabhängigkeit der Strategie zu untersuchen, liegt es wiederum nahe, die auf den Endwert des Underlyings bedingte Verteilung zu untersuchen. Da der Wert der Strategie, wie die vorhergehenden Untersuchungen gezeigt haben, primär von Maximum des zugrunde liegenden Prozess abhängt, ist es nicht möglich eine obere Grenze für den Wert der Strategie in Abhängigkeit vom Aktienkurs zu bestimmen. Umgekehrt ergibt sich jedoch aus der trivialen Eigenschaft, dass das Maximum größer als der Endwert sein muss, eine untere Grenze. Dies ist das Resultat des folgenden Lemma.

Lemma 3.2.4 *Bedingt auf den Endwert der Aktie $\frac{S_t}{S_0} = s$ gilt*

$$V_t \geq \begin{cases} G_0 \frac{m}{m-\omega} s^\omega e^{-((\omega-1)r + \frac{m-1}{2}\omega\sigma^2)t} & s > e^{(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \\ G_0 e^{rt} \left(1 + \frac{\omega}{m-\omega} s^m e^{-m(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t}\right) & s \leq e^{(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t} \end{cases}$$

Beweis : Man beachte zunächst, dass aus der Dynamik des Underlyings und der Definition 3.2.5 von θ folgt $\frac{S_t}{S_0} = s \Leftrightarrow \sigma W_t^\theta = \ln s - (r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t$. Mit $M_t^\theta \geq \max\{W_t^\theta, 0\}$ und einsetzen in die Dynamik 3.2.1 folgt die Behauptung. ■

Für den Spezialfall $\omega = 1$ lautet die untere Grenze also $e^{rt} \left(G_0 + C_0 \left(\frac{S_t}{S_0} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t}\right)^m\right)$ falls $S_t \leq S_0 e^{(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t}$ und $V_0 \frac{S_t}{S_0} e^{-\frac{m-1}{2}\sigma^2 t}$ für $S_t > S_0 e^{(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t}$.

Ein Vergleich mit der unteren Grenze der beschränkten CPPI bei gleicher, maximaler Anfangsinvestition $\omega = 1$, vgl. Korollar 3.1.6, zeigt, dass die unteren Grenzen für beide Strategien identisch sind. Dies erklärt sich daraus, dass die untere Grenze bei der beschränkten CPPI genau dann angenommen wird, wenn über die gesamte Laufzeit gemäß der einfachen CPPI gehandelt wird. In diesem Fall wird aber auch hier der Floor niemals, bzw. erst am Ende des Anlagehorizonts, angepasst, und somit entsprechen beide Strategien bis zum Laufzeitende der einfachen CPPI.

Eine konkretere Beschreibung der Pfadabhängigkeit ergibt sich aus

Proposition 3.2.4 *Die Verteilung des Endwertes der Strategie bedingt auf den Endwert der Aktie ist durch*

$$P \left[V_t \leq v \mid \frac{S_t}{S_0} = s \right] = 1 - e^{-2\frac{g^{-1}(v)}{t}(g^{-1}(v) - \tilde{w})}$$

gegeben. Für die Dichte gilt:

$$P \left[V_t \in dv \mid \frac{S_t}{S_0} = s \right] = \frac{2}{t g'(g^{-1}(v))} e^{-2\frac{g^{-1}(v)}{t}(g^{-1}(v) - \tilde{w})} (2g^{-1}(v) - \tilde{w})$$

wobei $\tilde{w} = \frac{1}{\sigma} (\ln s - (r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t)$ und

$$g(x) := G_0 e^{rt} e^{\sigma\omega x} \left(1 + \frac{\omega}{m-\omega} e^{\sigma m(\tilde{w}-x)}\right), \quad g'(x) = G_0 e^{rt} \sigma\omega e^{\sigma\omega x} (1 - e^{\sigma m(\tilde{w}-x)})$$

Beweis : siehe Appendix ■

Man beachte, dass $g(\ln x)$ ein Polynom ist und somit die Umkehrfunktion im Allgemeinen nicht explizit bestimmt werden kann. Für die praktische Anwendung muss g^{-1} also numerisch bestimmt werden. Wie im Beweis jedoch gezeigt wird ist die inverse Funktion (im betrachteten Definitionsbereich) eindeutig und kann mit einfachen numerischen Verfahren bestimmt werden. Für eine Diskussion der resultierenden Ergebnisse sei auf das Kapitel 3.3 verwiesen.

3.2.3 Langfristiges und Cash-Lock-Verhalten

Wie erwähnt, lässt sich das langfristige Verhalten der Strategie aus dem Verhalten der Garantie bestimmen. Zum einen ergibt sich aus dem Grenzwert der erwarteten Rendite der Garantie auch die erwartete Rendite des Wertes, wie wir zunächst zeigen werden, zum anderen gilt jedoch, dass der Endwert der Strategie genau dann eine höhere Verzinsung als die risikolose erreicht, falls der Wert der Garantie jemals größer als der risikolos aufgezinste Anfangswert ist. Da die Strategie ab diesem Zeitpunkt ebenfalls mit dem risikolosen Zins wächst, muss die Strategie eine Auszahlung oberhalb der risikolosen Anlage gewähren. Umgekehrt gilt jedoch, dass, falls die Strategie nie den Wert der risikolosen Verzinsung erreicht, der Cushion gegen Null konvergiert. Diese Überlegungen führen zu den folgenden Resultaten.

Korollar 3.2.5 *Für die langfristige Rendite einer Floor-angepassten CPPI mit maximaler Investitionsquote $\omega = \omega_1 = \omega_0$ gilt:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t/V_0]}{t} = r + \omega \left(\mu - r - \frac{m - \omega}{2} \sigma^2 \right)^+ \quad (3.2.13)$$

Beweis : Da der Cushion durch $C_t \leq \frac{\omega}{m-\omega} G_t$ begrenzt ist, folgt zunächst:

$$E[G_t] \leq E[V_t] \leq \frac{m}{m-\omega} E[G_t]$$

und somit für $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[G_t/V_0]}{t} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t/V_0]}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{m}{m-\omega} E[G_t/V_0]}{t} \\ \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[G_t/V_0]}{t} &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[V_t/V_0]}{t} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[G_t/V_0]}{t} \end{aligned}$$

Es reicht aus, die Garantie zu betrachten. Nach Lemma 3.2.3 ergibt sich

$$E[G_t] = G_0 e^{rt} \left(\frac{2\sigma\omega + 2\theta}{\sigma\omega + 2\theta} e^{\frac{\sigma\omega}{2}(\sigma\omega + 2\theta)t} \mathcal{N}((\theta + \sigma\omega)\sqrt{t}) + \frac{2\theta}{\sigma\omega + 2\theta} \mathcal{N}(-\theta\sqrt{t}) \right) .$$

Da die Konvergenzrate der Exponentialfunktion größer als die der Normalverteilung ist, reicht $\sigma\omega + 2\theta > 0$, damit der Term in der Klammer nicht gegen 1 konvergiert. Es ergibt sich in diesem Fall

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln E[G_t/V_0]}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln e^{rt} e^{\frac{\sigma\omega}{2}(\sigma\omega + 2\theta)t}}{t} \\ &= r + \omega \left(\mu - r - \frac{m - \omega}{2} \sigma^2 \right) \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt. ■

Die relative Verlustwahrscheinlichkeit ergibt sich aus dem nächsten Korollar. Es beschreibt in Analogie zu den Überlegungen bei der beschränkten CPPI die Verteilung des diskontierten Endwertes.

Korollar 3.2.6 Der Grenzwert für $t \rightarrow \infty$ der Verteilung für den diskontierten Wertprozess einer Floor-angepassten CPPI ist gegeben durch:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[V_t e^{-rt} \leq v] = \begin{cases} 0 & \mu \geq r + \frac{1}{2}m\sigma^2 \\ 1 - \left(\frac{v}{G_0}\right)^{\frac{2\theta}{\sigma\omega}} & \mu < r + \frac{1}{2}m\sigma^2 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Beweis : Obige Überlegungen motivieren $\lim_{t \rightarrow \infty} P[V_t e^{-rt} \leq v] = \lim_{t \rightarrow \infty} P[G_t \leq v e^{rt}]$
Bildung des Grenzwertes in 3.2.11 ergibt die Behauptung. ■

Für $v = V_0$ ergibt sich damit die langfristige relative Verlustwahrscheinlichkeit. Für eine Diskussion der Ergebnisse und zum Vergleich mit der beschränkten CPPI sei auf den nächsten Abschnitt verwiesen.

Aus den Überlegungen zur Verteilungsfunktion lassen sich nun Rückschlüsse auf die Verteilung der Investitionsquote und die Wahrscheinlichkeit einer Cash-Dominanz ziehen.

Korollar 3.2.7 Für die Investitionsquote einer Floor-angepassten CPPI zum Zeitpunkt t gilt:

$$P[\Pi_t \leq \alpha] = \mathcal{N}\left(\frac{\frac{1}{\sigma m} \ln \frac{\alpha m - \omega}{\omega m - \alpha} - \theta t}{\sqrt{t}}\right) + \left(\frac{\omega m - \alpha}{\alpha m - \omega}\right)^{-\frac{2\theta}{\sigma m}} \mathcal{N}\left(\frac{\frac{1}{\sigma m} \ln \frac{\alpha m - \omega}{\omega m - \alpha} + \theta t}{\sqrt{t}}\right) \quad (3.2.15)$$

Beweis : Ausgehend von der Definition der Investitionsquote einer CPPI mit Floor-Anpassung erhalten wir

$$\begin{aligned} P[\Pi_t \geq \alpha] &= P\left[\frac{mC_t}{V_t} \geq \alpha\right] \\ &= P\left[V_t \geq \frac{mG_t}{m - \alpha}\right] \end{aligned}$$

und mit Proposition 3.2.1 für die Dynamik der Strategie folgt

$$\begin{aligned} &= P\left[1 + \frac{\omega}{m - \omega} e^{m\sigma(W_t^\theta - M_t^\theta)} \geq \frac{m}{m - \alpha}\right] \\ &= P\left[(W_t^\theta - M_t^\theta) \geq \frac{1}{\sigma m} \ln \frac{m - \omega \alpha}{m - \alpha \omega}\right] \\ &= P\left[M_t^\theta - W_t^\theta \leq \frac{1}{\sigma m} \ln \frac{m - \alpha \omega}{m - \omega \alpha}\right] \end{aligned}$$

und mit Korollar 1.3.5 für die Verteilung der Differenz des Maximums und des Endwertes einer Brownschen Bewegung mit Drift

$$= \mathcal{N}\left(\frac{\frac{1}{\sigma m} \ln \frac{\omega m - \alpha}{\alpha m - \omega} + \theta t}{\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{\omega m - \alpha}{\alpha m - \omega}\right)^{-\frac{2\theta}{\sigma m}} \mathcal{N}\left(\frac{\frac{1}{\sigma m} \ln \frac{\alpha m - \omega}{\omega m - \alpha} + \theta t}{\sqrt{t}}\right)$$

Aus der Bestimmung des Gegenereignisses und der Symmetrie der Normalverteilung ergibt sich die Behauptung. ■

Bemerkenswert ist dabei, dass, selbst falls die übliche Bedingung $\theta > 0 \Leftrightarrow \mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$ erfüllt ist, auf lange Sicht für jede Investitionsquote eine positive Wahrscheinlichkeit besteht, dass diese unterschritten wird. Dazu beachte man, dass für $\theta > 0$ und $t \rightarrow \infty$ der erste Normalverteilungsterm in Gleichung 3.2.15 gegen 0 und der zweite gegen 1 konvergiert. Als Grenzwert ergibt sich $\left(\frac{\omega}{\alpha} \frac{m-\alpha}{m-\omega}\right)^{-\frac{2\theta}{\sigma m}}$.¹⁴ Eine hinreichend große Investitionsquote ist also auf lange Sicht nicht gewährleistet.

Auf eine Betrachtung der Cash-Locks-Wahrscheinlichkeit sei an dieser Stelle verzichtet, da die Betrachtungen im nächsten Abschnitt ausschließlich den Unterschied zur beschränkten CPPI betreffen. Falls die beschränkte CPPI und die Floor-angepasste CPPI jedoch dieselbe Investitionsquote besitzen, worauf in der Definition des Cash-Locks bedingt wird, ist auch ihr Verhalten bis zu dem Zeitpunkt, an dem das nächste Mal die Vollinvestition erreicht wird, identisch, da sie bis zu diesem Punkt beide der gewöhnlichen CPPI-Strategie folgen. Formal lässt sich das wie folgt begründen

$$\begin{aligned}
 P[\Pi_T \leq \beta | \Pi_t = \alpha] &= \underbrace{P[\Pi_T \leq \beta | \Pi_t = \alpha, \forall s \in [t, T] : \Pi_s < \omega]}_{\text{Identisch für beide Strategien}} \\
 &+ \int_t^T P[\Pi_T \leq \beta | \Pi_s = \omega] \cdot \underbrace{P[\text{„Erstmalig in } s \text{ wieder vollinvestiert.“}]}_{\text{Identisch für beide Strategien}} ds
 \end{aligned}$$

und $P[\Pi_T \leq \beta | \Pi_s = \omega] = P[\Pi_{T-s} \leq \beta]$. Für den Vergleich der beiden Strategien reicht es also aus, die in Korollar 3.2.7 bestimmte Investitionsquote zu betrachten, sofern davon ausgegangen wird, dass beide Strategien jeweils mit der maximalen Investitionsquote starten.

¹⁴Für $\theta < 0$ ergibt sich wie bei der einfachen CPPI, dass die Investitionsquote mit Sicherheit gegen 0 konvergiert.

3.3 Vergleich Wertsicherungsstrategien unter Kreditbeschränkungen

Mit den Verteilungseigenschaften der CPPI-Strategien unter Kreditbeschränkungen aus den beiden letzten Kapiteln ist es nun möglich, die Strategien miteinander zu vergleichen.

Neben den entsprechenden Risikomaßen wird der Fokus insbesondere auf der Betrachtung der Wertentwicklung in Abhängigkeit von der Wertentwicklung des Aktienkurses liegen. Somit ist es dann möglich zu entscheiden, unter welchen Erwartungen an die zukünftige Aktienkursentwicklung welche Strategie vorzuziehen ist und welche Risiken und Sicherheiten die Strategien bieten.

Es sei daran erinnert, dass ein Vergleich zwischen beschränkter CPPI und der Stop-Loss-Strategie bereits in Abschnitt 3.1 erfolgte. Wir haben gezeigt, dass sich die beschränkte CPPI insbesondere als Approximation der so genannten Stop-Loss-Start-Gain-Strategie auffassen lässt. In diesem Abschnitt wollen wir zum einen die CPPI-Strategien mit Kreditbeschränkung untereinander, d.h. die beschränkte CPPI mit der CPPI mit Floor-Anpassung vergleichen, und zum anderen einen Vergleich mit der einfachen OBPI führen. Wie in den früheren Abschnitten erwähnt, ist ein Vergleich der einfachen CPPI mit der OBPI unzulässig. Die Begründung basierte auf der potentiell unbeschränkten Kreditaufnahme. Durch die getroffenen Annahmen ist jedoch ein Vergleich insbesondere mit der beschränkten CPPI möglich und wird im Anschluss diskutiert.

3.3.1 Vergleich CPPI-Strategien

Wir betrachten die beschränkte und die CPPI mit Floor-Anpassung jeweils unter der Annahme, dass gerade bei beiden eine anfänglich maximale Investition in die Aktie erfolgt. Es sei daran erinnert, dass niedrigere anfängliche Investitionquoten für einen Vergleich der beiden Strategien bedeutungslos sind, da in diesem Fall beide bis zum ersten Erreichen der maximalen Quote identisch sind, nämlich der einfachen CPPI entsprechen.

Abbildung 3.8 gibt zunächst einmal die Verteilung des Endwertes der beiden Strategien und der OBPI bzw. der Stop-Loss-Strategie für eine Laufzeit von 2 bzw. 10 Jahren an. Während die Verteilungen für kurze Laufzeiten ähnlich sind, ergibt sich für lange Laufzeiten, dass hohe Gewinne in der CPPI mit Floor-Anpassung deutlich seltener auftreten als in der beschränkten CPPI. Umgekehrt sind auch Erträge die in der Nähe der Garantie liegen bei der CPPI mit Floor-Anpassung seltener.

Um das Verhalten genauer zu beschreiben, betrachten wir die bedingten Verteilungen in Abbildung 3.11. Es ist bereits erkennbar, dass die CPPI mit Floor-Anpassung auch bei niedrigen Schlusskursen die Chance auf deutlich über der Garantie liegenden Kurse ermög-

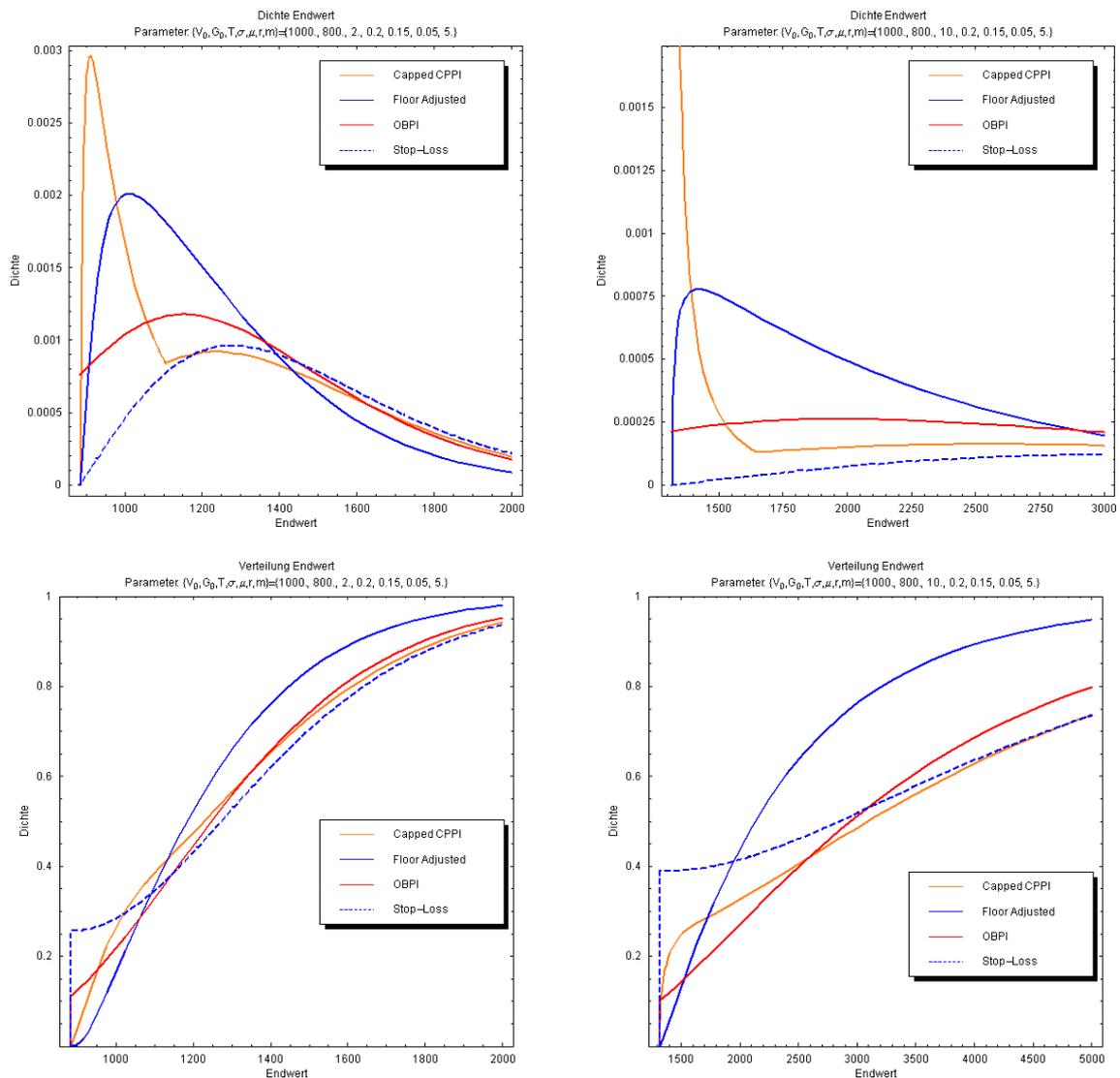


Abbildung 3.8: Verteilung und Dichte der beschränkten CPPI, CPPI mit Floor-Anpassung, OBPI und Stop-Loss $T = 2$ bzw. $T = 10$

licht. Umgekehrt gilt bei hohen Schlusskursen, dass die Auszahlung der beschränkten CPPI mit hoher Wahrscheinlichkeit deutlich höher als bei der CPPI mit Floor-Anpassung ist. Dieser Effekt wird zusätzlich in Abbildung 3.9 verdeutlicht.

Die Abbildungen 3.9 und 3.10 beschreiben die Auszahlungen der beschränkten und der CPPI mit Floor-Anpassungen. Zu gegebenem Endwert des zugrunde liegenden Wertpapiers (abgetragen auf der x-Achse) gibt der orange Bereich das 80%-(bzw. 50%)-Konfidenzintervall der möglichen Auszahlungen der beschränkten CPPI an. Dabei gilt, dass jeweils 10% bzw. 25% der auf den Aktienkurs bedingten Auszahlungen ober- oder unterhalb des orangen Bereichs liegen. Analog gibt der blaue Bereich das entsprechende Konfidenzintervall der möglichen Auszahlungen der CPPI mit Floor-Anpassung an. Zum zusätzlichen Vergleich

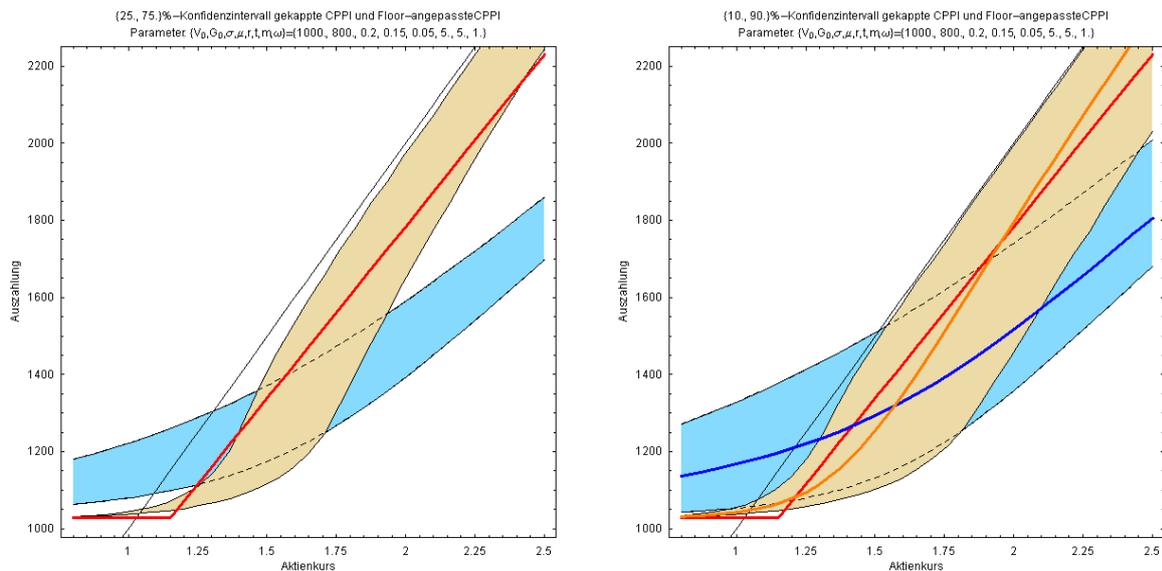


Abbildung 3.9: 50%- bzw. 80% Konfidenzintervalle der Auszahlung der beschränkten und der Floor-angepassten CPPI für $\sigma = 20\%$ und $T = 5$ Jahre

sind außerdem die Auszahlungen der einfachen OBPI (rote Linie) und der Direktinvestition in die Aktie (schwarze Linie) angegeben. Die Pfadabhängigkeit, gemessen an der Größe der Konfidenzintervalls, nimmt dabei, wie zu erwarten, mit längerer Laufzeit zu. Dabei sind die Intervalle bei beiden Strategien für hohe Endwerte der Aktie ungefähr gleich groß, wobei die auf den Aktienkurs bedingte erwartete Auszahlung, jeweils durch die orange bzw. blaue Linie dargestellt, bei der beschränkten CPPI deutlich höher ist. Umgekehrt ergibt sich bei niedrigen Schlusskursen der Aktie ein sehr enges Konfidenzintervall für die beschränkte CPPI in der Nähe der unteren Schranke. Das Intervall für die CPPI mit Floor-Anpassung bleibt deutlich größer und insbesondere ist die Auszahlung auch deutlich größer. Dabei ist zu beachten, dass eine hohe Volatilität der Aktie bei fallenden Kursen für die CPPI mit Floor-Anpassung von Vorteil sein kann, da somit die Chance besteht, dass der Wert zwischenzeitlich hoch genug war, um Erträge durch Anpassung der Garantie festzuschreiben. Es bleibt festzuhalten, dass die Floor-angepasste CPPI insbesondere bei fallenden bzw. gleichbleibenden Kursen bessere Ergebnisse erzielt, jedoch bei wachsenden Kursen nur mit geringer Wahrscheinlichkeit eine hohe Partizipation ermöglicht.

Aus der Abbildung 3.11 erkennt man zusätzlich, dass bei niedrigen Schlusskursen die Floor-angepasste Strategie die beschränkte CPPI auch tatsächlich stochastisch dominiert, während bei hohen Schlusskursen die beschränkte CPPI zumindest in einem großen Bereich dominiert. Bei hohen Schlusskursen ist zu beachten, dass die Auszahlung der beschränkten CPPI nach oben beschränkt ist, während die Floor-angepasste CPPI im Prinzip unbeschränkte Auszahlungen erzielen kann, sofern zwischenzeitlich der Kurs der Aktie hoch genug war. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind hier aber vernachlässigbar. Die

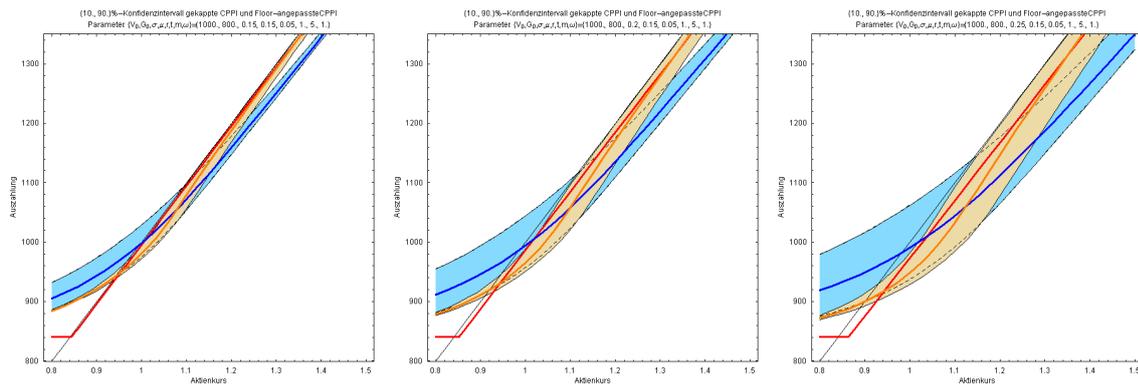


Abbildung 3.10: 80%-Konfidenzintervalle der Auszahlung der beschränkten und der Floor-angepassten CPPI für $\sigma = 15\%$ (20%, 25%) und $T = 1$ Jahr

Floor-angepasste Strategie profitiert somit im Vergleich zur beschränkten CPPI von zwischenzeitlich hohen und am Laufzeitende niedrigeren Aktienkursen. Das charakteristische Verhalten der einfachen CPPI, nämlich von hohen Schlusskursen zu profitieren, findet sich auch in der beschränkten CPPI wieder. Neben den Darstellungen der Verteilungsfunktion zeigt auch Tabelle 3.2, dass das Risiko der CPPI mit Floor-Anpassung sowohl bezüglich der Standardabweichung/Volatilität als auch bezüglich der relativen Verlustwahrscheinlichkeit geringer ist. Insgesamt ist die Floor-angepasste CPPI also eher für einen risikoaversen Investor von Interesse, der für die Möglichkeit des Festsetzen zwischenzeitlicher Gewinne bereit ist, auf einen Teil der Partizipation zu verzichten. Da dieses Look-Back-Verhalten bei der einfachen OBPI nicht vorliegt, beschränken wir uns im folgenden Abschnitt auf einen Vergleich der beschränkten CPPI mit der einfachen OBPI.

3.3.2 Vergleich Beschränkte CPPI und OBPI

Aus den bisherigen Überlegungen erscheint es nun sinnvoll die beschränkte CPPI mit der OBPI zu vergleichen. Anhand der Verteilungen in Abbildung 3.8 und der Auszahlungsprofile in den Abbildungen 3.9 und 3.10 kann man drei unterschiedliche Bereiche identifizieren. Zunächst einmal stellt man fest, dass die beschränkte CPPI im Gegensatz zur OBPI immer eine Auszahlung oberhalb der Garantie erzielt. In den Auszahlungsprofilen erkennt man dies anhand der höheren Auszahlung der beschränkten CPPI für niedrige Schlusskurse der Aktie. Für Werte, die nur leicht oberhalb der Garantie liegen, dominiert die beschränkte CPPI somit die OBPI, d.h. die Wahrscheinlichkeit mehr als die Garantie zu erhalten ist bei der beschränkten CPPI größer.

Für geringe Aktienkurszuwächse ist die Auszahlung der OBPI größer als der bedingte Erwartungswert der beschränkten CPPI. Dies führt dazu, dass die OBPI für Endwerte die in der Nähe der risikolosen Verzinsung liegen, die beschränkte CPPI dominiert. Die rela-

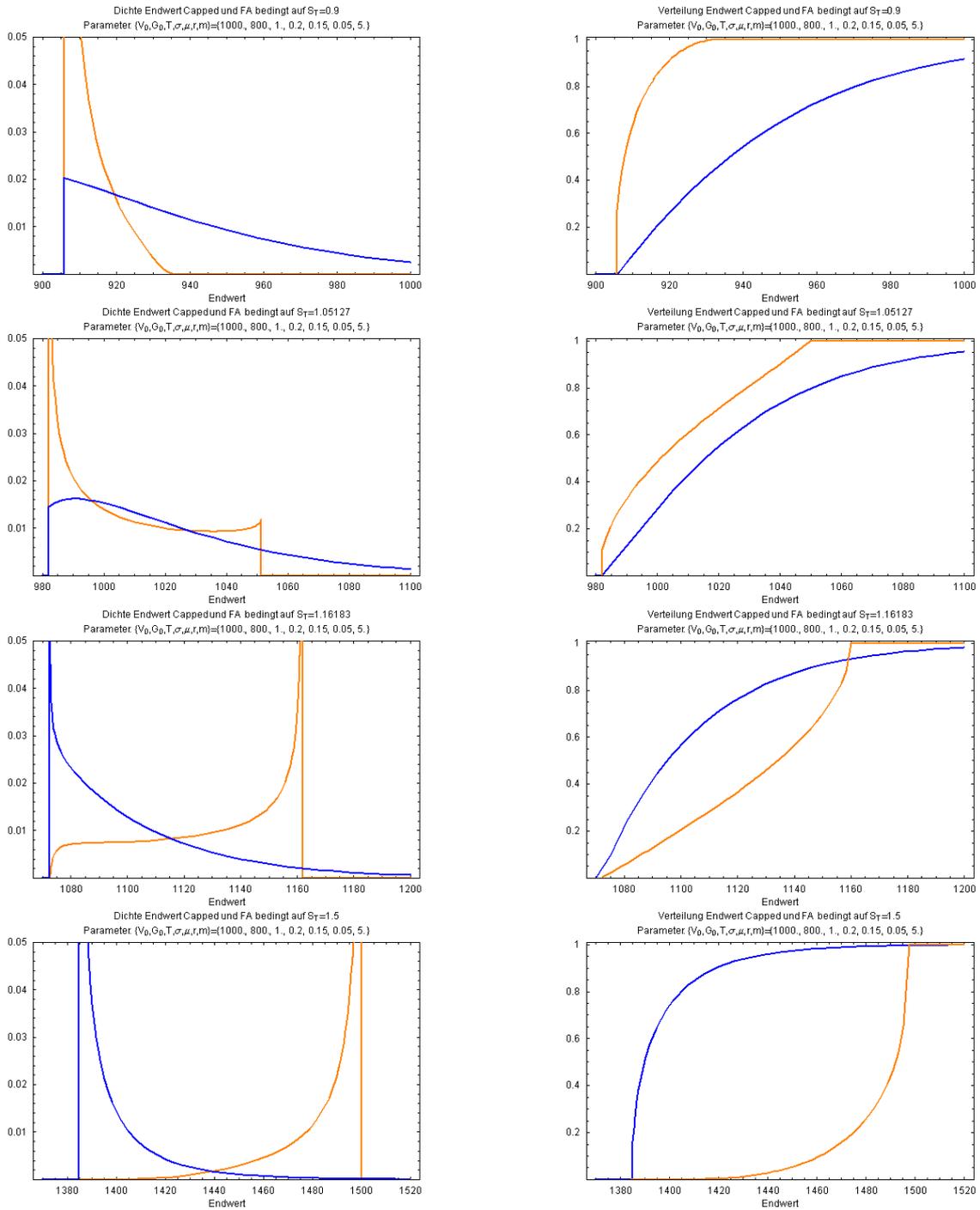


Abbildung 3.11: Auf den Schlusskurs bedingte Dichten (links) und Verteilungen (rechts) nach einem Jahr der beschränkten und Floor-angepassten CPPI, $S_1 = 0,9$; $(e^{rt}; e^{\mu t}; 1,50)$

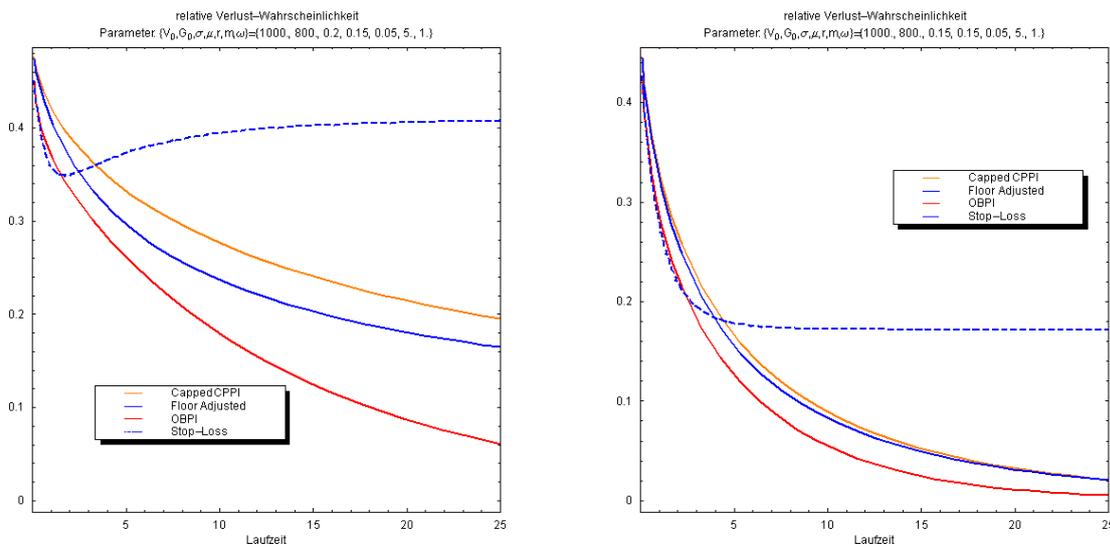


Abbildung 3.12: Relative Verlustwahrscheinlichkeit von Strategien mit Kreditbeschränkung in Abhängigkeit der Laufzeit, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)

tive Verlustwahrscheinlichkeit ist also bei der OBPI kleiner. Man vergleiche dazu auch die Tabelle 3.2, anhand derer man erkennt, dass dies unabhängig von den Modellparametern gilt.

Der dritte Bereich ist durch hohe Endwerte der Strategie bzw. der Aktie gekennzeichnet. Anhand der Verteilungsfunktionen sieht man, dass es einen zweiten Schnittpunkt der Verteilungen von OBPI und beschränkter CPPI gibt. Dies resultiert aus der Tatsache, dass die beschränkte CPPI im Gegensatz zur OBPI die Möglichkeit besitzt eine 100%ige Partizipation zu erzielen.

Trotz dieser drei Bereiche zeigt sich insgesamt ein sehr ähnliches Auszahlungs- und Verteilungsprofil beider Strategien. Wohingegen die OBPI in Abhängigkeit des Aktienkurses für Kurse oberhalb des Strikes eine sichere Auszahlung reduziert um die anfängliche Prämie erzielt, ergibt sich die Auszahlung der beschränkten CPPI als Investition in die Aktie reduziert um eine pfadabhängige Prämie. Diese Prämie wird vor allem für Kurse, die nur leicht oberhalb des Strikes der OBPI liegen, höher als die Prämie der OBPI sein. Für starke Zuwächse wird diese implizite Prämie unterhalb der Prämie der OBPI liegen. In diesem Sinne ist die beschränkte CPPI also riskanter als die OBPI, weswegen sie jedoch auch einen Erwartungswert und eine Rendite (des Erwartungswertes) besitzt, der größer ist als derjenige der OBPI. Eine Darstellung der Abhängigkeit der Verlustwahrscheinlichkeit und der Rendite von der Laufzeit findet sich in den Abbildungen 3.12 und 3.13, wobei die notwendige Bedingung für die Effektivität der CPPI $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$ zum einen nicht erfüllt (links) ist und zum anderen erfüllt (rechts) ist. Falls die notwendige Bedingung erfüllt ist, ist die Verlustwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI unabhängig von der Laufzeit nur gering-

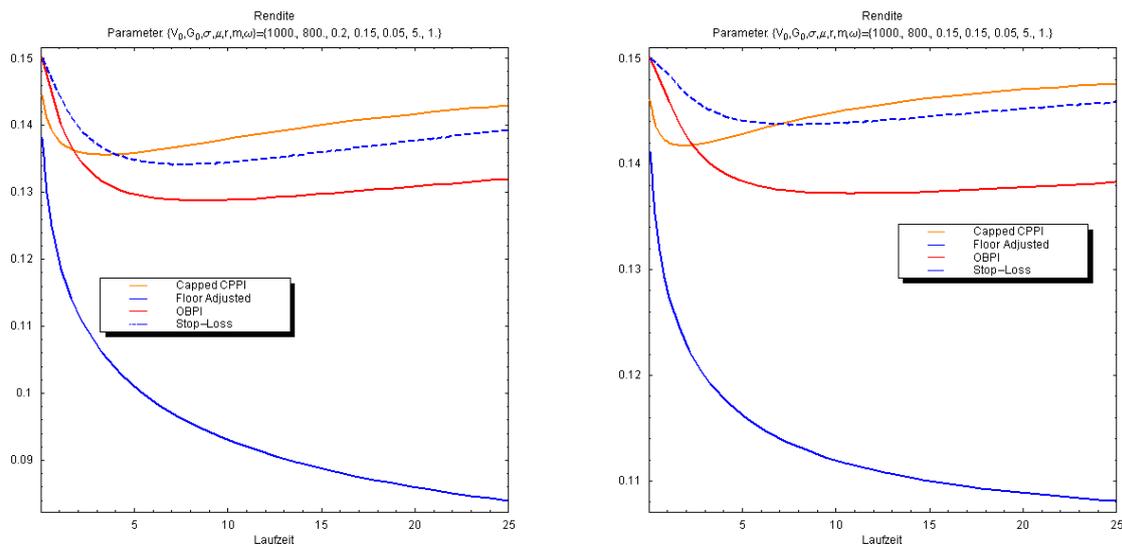


Abbildung 3.13: Rendite des Erwartungswertes von Strategien mit Kreditbeschränkung in Abhängigkeit der Laufzeit, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)

für größer als die der OBPI. Ist die Bedingung nicht erfüllt, ist dieser Effekt deutlicher zu beobachten. Für die Rendite des Erwartungswertes (und damit auch für diesen selbst) gilt, dass die beschränkte CPPI für längere Laufzeiten einen deutlich größeren Wert besitzt, was als Kompensation für das zusätzliche Risiko aufgefasst werden kann.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass das anfängliche Verhalten der Verteilungsfunktion in der Nähe der Garantie eine Erklärung für die sich teilweise widersprechenden Ergebnisse in der Literatur bezüglich der eines Investors, der seinen Nutzen optimiert, liefert. Während El Karoui et al. (2005) zeigen, dass ein Investor mit einer CRRA-¹⁵Nutzenfunktion eine OBPI-Strategie wählt um seinen erwarteten Nutzen zu maximieren, folgt aus Merton (1990) die Optimalität der einfachen CPPI bezüglich der gleichen Nutzenfunktion. Bezüglich des Drawdowns zeigen Grossman und Zhou (1993) ebenfalls die Optimalität der CPPI mit Floor-Anpassung bezüglich CRRA-Nutzens. Diese unterschiedlichen Ergebnisse lassen sich darauf zurückführen, dass der Nutzen zum einen bezüglich des Wertprozesses und zum anderen bezüglich des Cushions betrachtet werden. Wie in Basak (2002) argumentiert wird, impliziert dies für einen auf dem Wert basierenden Nutzen, dass der Investor an der Garantie einen indirekten Grenznutzen besitzt, der auf Unendlich springt, da die Garantie nicht unterschritten werden kann und rechts von der Garantie nur geringen zusätzlichen Grenznutzen besitzt. Eine auf dem Cushion basierende Argumentation lässt den marginalen Nutzen dagegen stetig gegen Unendlich konvergieren, wodurch der Grenznutzen rechts von der Garantie deutlich größer ist. Aus diesem Grund folgt für die OBPI, dass aus Werten

¹⁵Constant Relative Risk Aversion

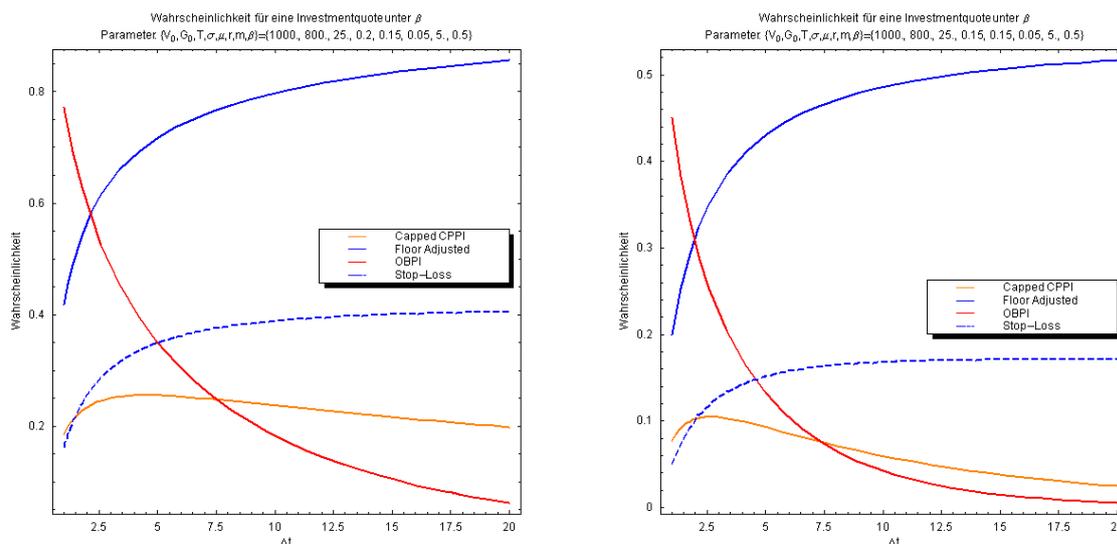


Abbildung 3.14: Cash-Dominanz-Wahrscheinlichkeit von Strategien mit Kreditbeschränkung, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)

die leicht oberhalb der Garantie liegen kein relevanter zusätzlicher Nutzen erzielt wird und somit die OBPI optimal bezüglich des auf dem Wert basierenden Nutzens ist, die CPPI hingegen optimal bezüglich des auf dem Cushion basierenden Nutzens ist.

Die obigen Ergebnisse suggerieren, dass beschränkte CPPI und OBPI im Grunde ähnliches Verhalten aufweisen. Betrachten wir hingegen die Investitionsquote, werden die Unterschiede in beiden Strategien deutlich. Die Abbildung 3.14 zeigt die Wahrscheinlichkeit für eine Investitionsquote unterhalb von 50% während der Laufzeit verschiedener Wertsicherungsstrategien mit einem Anlagehorizont von 25 Jahren¹⁶. Es zeigt sich, dass die OBPI zu Beginn der Laufzeit eine deutlich größere Wahrscheinlichkeit auf geringe Investitionsquoten besitzt als die beschränkte CPPI. Aus empirischer Sicht widerspricht dies dem Anlageverhalten von Investoren. Üblicherweise wird argumentiert, dass Investoren, die in eine langfristige Strategie investieren zu Beginn der Laufzeit deutlich risikobereiter als am Ende der Laufzeit sind. Ein Beispiel hierfür ist der Vermögensaufbau zur Altersvorsorge, bei dem häufig zum Ende der Laufzeit in risikolosere Anlagen umgeschichtet wird. Im Gegensatz dazu besitzt die beschränkte CPPI per Konstruktion bereits am Anfang eine hohe Investitionsquote. Die Auswirkungen dieses Verhaltens wird zusätzlich in Abbildung 3.15 deutlich. Dort ist die Wertentwicklung der Strategien in Form der bis zur Zeit Δt erzielten Rendite dargestellt. Während die beschränkte CPPI über die gesamte Laufzeit eine ähnliche Rendite aufweist, besitzt die OBPI in den ersten Jahren nur eine geringe jährliche Rendite. Erst zum Laufzeit-

¹⁶Man beachte, dass ein fester Anlagehorizont nur bei der OBPI beachtet werden muss. Die Wahrscheinlichkeit der Cash-Dominanz ist für CPPI-Strategien bezüglich des Anlagehorizont invariant.

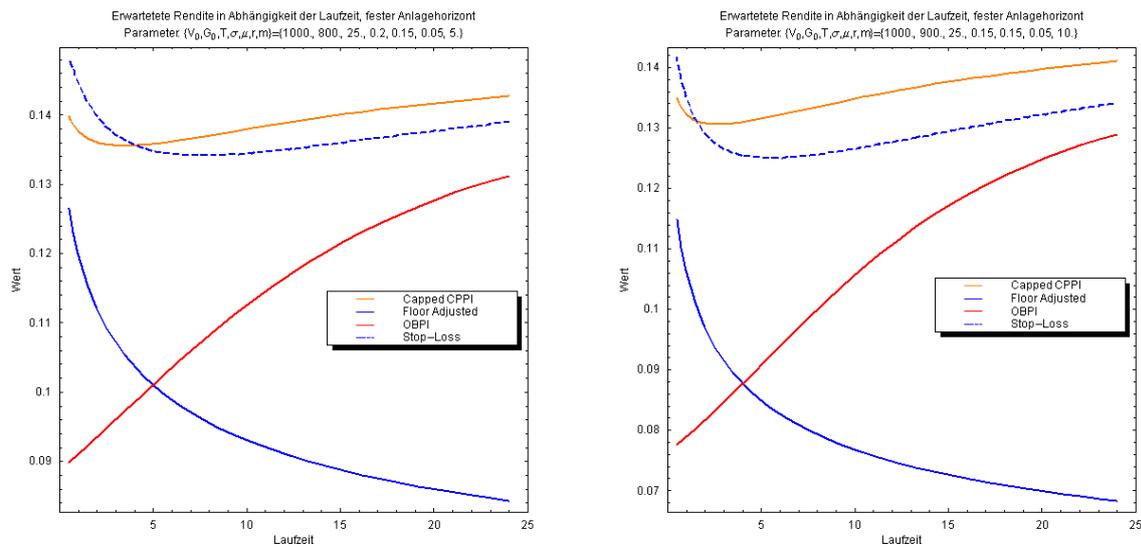


Abbildung 3.15: Erwarteten Rendite von Strategien mit Kreditbeschränkung bei festem Anlagehorizont, $\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2 = 0$ (4,375%)

tende ergibt sich eine vergleichbare Rendite für die OBPI. Für den Investor bedeutet dies, dass in den ersten Jahren nur ein sehr geringer Kapitalaufbau stattfindet. Insbesondere im Bereich der Versicherungswirtschaft bedeutet dies, dass die Rückkaufwerte von Versicherungen die auf einer OBPI basieren nur sehr gering sind. Die beschränkte CPPI generiert im Gegensatz dazu gleichmäßige Erträge.

3.3.3 Sharpe Ratio als Risikomaß für Wertsicherungsstrategien

Die obigen Überlegungen beziehen sich ausschließlich auf Risikomaße, die sich direkt (relative Ausfallwahrscheinlichkeit) oder indirekt (Cash-Lock bzw. Cash-Dominanz) auf die Lower Partial Moments zurückführen lassen. Im Gegensatz dazu findet sich in der Literatur häufig das Sharpe Ratio oder der Marktpreis des Risikos als Zielgröße einer optimalen Strategie. Dabei ist das Risiko durch die Standardabweichung bestimmt. Anhand der beschränkten CPPI und der einfachen CPPI bzw. der CPPI mit konstantem Floor wollen wir kurz auf möglicherweise auftretende Probleme hinweisen.

Während die Abbildung 3.16 für die beschränkten Strategien durchaus mit den obigen Argumenten übereinstimmt und insbesondere das Sharpe Ratio für diejenigen Multiplier m maximiert, die gerade einer anfänglichen Aktieninvestition entsprechen¹⁷, ergibt sich für den gleichen Multiplier bei den unbeschränkten Strategien nahezu das absolute Minimum

¹⁷Man beachte, dass das Sharpe Ratio der beschränkten CPPI in diesem Fall einen ähnlichen Wert wie das Sharpe-Ratio der OBPI annimmt.

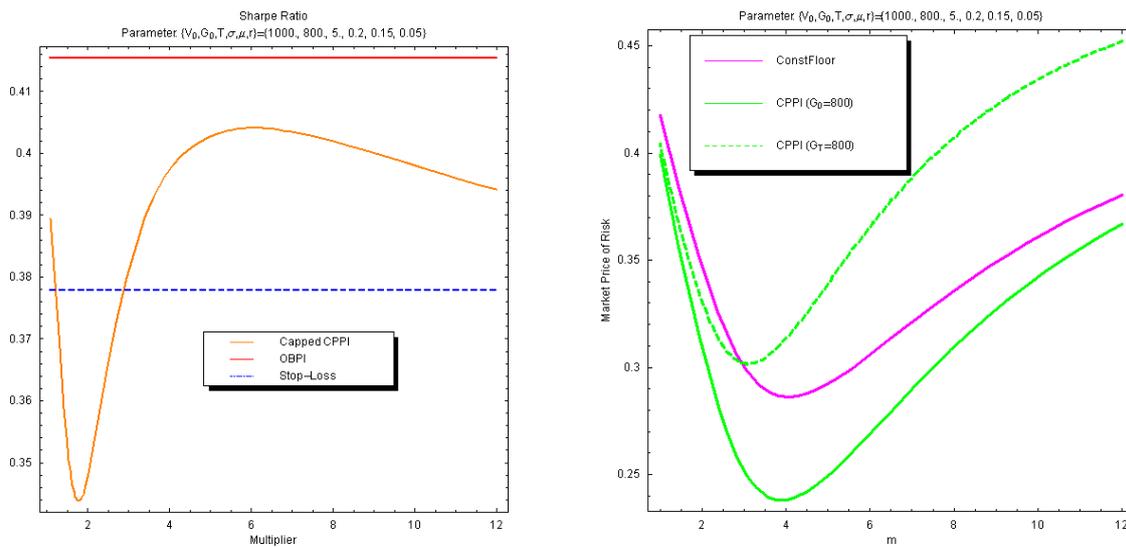


Abbildung 3.16: Sharpe Ratio für Strategien mit und ohne Kreditbeschränkung

des Sharpe Ratios.

Dabei ist jedoch zu beachten, dass das im Sharpe Ratio betrachtete Risiko, die Volatilität, Schwankungen in beide Richtungen betrifft. Am Beispiel der unbeschränkten Strategien wird jedoch deutlich, dass dieses Maß hier nur bedingt Beachtung finden kann, da die Schwankungen nach unten per Konstruktion beschränkt sind und hohe Schwankungen auch hohe Gewinne implizieren. Es ist also durchaus vorstellbar, dass ein Investor ein geringes Sharpe Ratio bevorzugt. Um dies genauer zu motivieren, sei daran erinnert, dass die Verwendung des Sharpe Ratio in der Portfolio-Theorie und das Ziel der Maximierung desselbigen aus zwei verschiedenen Annahmen abgeleitet werden kann. Zum einen ergibt es sich aus der Portfolio-Theorie, vgl. Markowitz (1952), Sharpe (1964) und Merton (1990), unter der Annahme, dass die Anlagen normalverteilte Renditen besitzen. Eine zweite Motivation ergibt sich aus der Annahme von Investoren mit quadratischen Nutzenfunktionen, die aber im Allgemeinen als unzulässig abgelehnt werden (vgl. Ingersoll jr. (1987, Kapitel 4)). Beide Annahmen sind in diesem Rahmen also nicht erfüllt und somit besteht im allgemeinen keine Nowendigkeit zur Maximierung des Sharpe Ratios. Die Tatsache, dass das Sharpe Ratio im Falle der beschränkten Strategie dennoch zu einem sinnvollen Ergebnis führt, liegt darin begründet, dass die Verteilung der beschränkten Strategie deutlich kleinere höhere Momente als die unbeschränkte besitzt, und somit auch eher durch eine Lognormalverteilung approximiert werden kann.

Für eine genauere Betrachtung des Sharpe Ratios in dynamischen Strategien vgl. z.B. Cvitanic et al. (2007). Andere in der Literatur vorgeschlagene Alternativen zum Sharpe Ratio, wie das auf dem Lower Partial Moment basierende Capital at Risk, vgl. Emmer et al. (2001), werden, wie erwähnt, indirekt in den obigen Betrachtungen verwendet.

	$\sigma = 15,0\%$			$\sigma = 20,0\%$			$\sigma = 25,0\%$		
	Beschränkt	FA	OBPI	Beschränkt	FA	OBPI	Beschränkt	FA	OBPI
$\frac{\mu-r}{\sigma}$		66,7%			50%			40%	
$\mu - r - \frac{m}{2}\sigma^2$		4,375%			0%			-6,625%	
$E[V]$	2.042,94	1.788,12	1.997,54	1.972,51	1.656,95	1.912,72	1.901,12	1.554,85	1.838,37
$\sqrt{\text{Var}[V]}$	749,46	536,51	681,10	996,38	580,87	859,95	1.230,90	580,69	1.015,17
$Skew[V]$	1,08	1,36	1,14	1,68	2,04	1,71	2,44	2,77	2,40
$Kurt[V]$	4,90	5,96	5,21	7,57	9,99	7,98	13,02	16,84	13,23
Rendite y	14,29%	11,62%	13,84%	13,59%	10,10%	12,97%	12,85%	8,83%	12,18%
Volatilität $\tilde{\sigma}$	15,89%	13,13%	14,83%	21,32%	15,23%	19,19%	26,46%	16,16%	23,07%
Sharpe Ratio	58,45%	50,44%	59,59%	40,27%	33,49%	41,54%	29,66%	23,69%	31,11%
rel. Verlust $P[V_t \leq V_0 e^{rt}]$	16,62%	15,57%	12,64%	33,26%	29,61%	26,15%	47,88%	40,53%	38,24%
langfr. Rendite y_∞	15,00%	10,50%	15,00%	15,00%	7,00%	15,00%	15,00%	5,00%	15,00%
langfr. Verlust $\lim_{t \rightarrow \infty} P[V_t \leq V_0 e^{rt}]$	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	45%	33%	0,00
$E[V_t S_t = 1]$	1.056,50	1.144,28	1.027,22	1.042,86	1.168,01	1.027,22	1.034,95	1.192,51	1.027,22
$E[V_t S_t = 1,28403]$	1.158,10	1.230,27	1.208,97	1.107,28	1.228,85	1.145,31	1.074,13	1.239,07	1.076,22
$E[V_t S_t = 2,117]$	2.044,83	1.753,81	1.993,25	1.925,51	1.580,55	1.888,29	1.726,12	1.456,00	1.774,39
$E[V_t S_t = 3,1755]$	3.127,96	2.573,63	2.989,87	3.038,86	2.232,05	2.832,44	2.868,08	1.915,88	2.661,51
$P[\Pi_1 < 50\%]$	7,76%	19,93%	4,67%	18,53%	41,74%	17,26%	29,15%	59,18%	32,23%
$P[\Pi_4 < 50\%]$	9,96%	40,57%	4,21%	25,47%	68,51%	14,19%	40,77%	84,37%	26,01%

Parameter: $T = 5$; $\mu = 15\%$; $r = 5\%$; $V_0 = 1000$; $G_0 = 800$; $m = 5$; $\omega = 1$

Tabelle 3.2: Risikomaße für Strategien mit Kreditbeschränkung

Kapitel 4 - CPPI Strategien mit Handelsbeschränkungen

Nachdem in den Abschnitten 3.1 und 3.2 Unvollkommenheiten der Kapitalmärkte in Form von Beschränkungen der Kreditaufnahme betrachtet wurden, soll im folgenden untersucht werden, welche Auswirkungen sich durch nicht-stetiges Handeln ergeben. Dazu ist es zunächst notwendig festzulegen, wie die Handelszeitpunkte definiert sind und in welcher Form die Strategie diskretisiert wird. Wir beschränken uns hier auf deterministische Handelszeitpunkte, wie z.B. tägliches oder wöchentliches Handeln¹.

Ausgehend von der Überlegungen zur einfachen CPPI im vollkommenen Kapitalmarkt in Abschnitt 2.1, ergeben sich zwei unterschiedliche Möglichkeiten der Diskretisierung. Wie wir gesehen haben, lässt sich die einfache CPPI auch als OBPI bezüglich eines Power-Kontraktes betrachten, da die Wertentwicklung des Cushion pfadunabhängig und ausschließlich vom Schlusskurs der zugrunde liegenden Aktie abhängig ist. In diesem Sinne werden wir in Abschnitt 4.2 analog zur Absicherung von Optionen einen zeitdiskreten Delta-Hedge des Power-Kontraktes betrachten. Es ist jedoch nahe liegender die CPPI gemäß ihrer eigentlichen Definition als Strategie bezüglich des Wertes zu betrachten, d.h. zu jedem Handelszeitpunkt wird ein Vielfaches des derzeitigen Cushion in die riskante Anlage investiert. Das Hauptaugenmerk wird auf dieser Diskretisierung liegen. Die Betrachtung erfolgt in Abschnitt 4.1.

Die wesentliche Frage bei der Diskretisierung ist, welche Auswirkung die Beschränkung auf feste Handelszeitpunkte auf die geforderte Garantie besitzt. Wir werden sehen, dass die Garantie nicht mehr mit Sicherheit überschritten wird und werden die entsprechenden Maße bezüglich des so genannten Gap-Risikos herleiten.

Wir zeigen, dass beide angesprochenen Diskretisierungen für eine wachsende Anzahl von Handelstagen gegen die einfache CPPI konvergieren. Für die auf dem Delta-Hedge basierende Strategie folgt dies direkt aus den Eigenschaften des stochastischen Integrals. Für die auf dem Wertprozess basierende Strategie benötigen wir eine Variation des Satz von Donsker. Außerdem betrachten wir in diesem Kapitel eine weitere Unvollkommenheit von Kapitalmärkten, das Vorhandensein von Transaktionskosten, in Abschnitt 4.1.3. Dieser Punkt wird

¹Für eine Betrachtung stochastischer Handelszeitpunkte, die sich aus bestimmten relativen Kursgewinnen oder -verlusten ergeben, sei auf Brandl (2007) verwiesen. Eine solche Strategie kann im Sinne der Unterscheidung zwischen den Handelsstrategien aus der Einleitung als Mixtur aus CPPI und Stop-Loss-Strategie betrachtet werden. Es erfolgt eine rollierende Anlage in Stop-Loss-Geschäften, wobei das Stop-Loss-Limit relativ zum Cushion festgelegt wird, z.B. wird immer dann umgeschichtet, sofern der Cushion 10% Gewinn oder Verlust erzielt hat. Die Anpassung zu den Handelszeitpunkten erfolgt dann gemäß der einfachen CPPI, also als proportionales Investment.

im Rahmen der Diskretisierung bezüglich des Wertprozesses betrachtet. Wir nehmen dazu proportionale Transaktionskosten an und stellen dar, inwieweit sich die betrachteten Risiko-
maße ändern. Insbesondere zeigen wir anhand einer Heuristik, dass unter Transaktionskosten
der Cushionprozess mit wachsender Anzahl von Handelszeitpunkten fast sicher gegen Null
konvergiert. Aus praktischer Sicht ergibt sich ein Zielkonflikt zwischen der Absicherung der
Garantie (bzw. den Kosten für die Absicherung mit Optionen) und den anfallenden Trans-
aktionskosten.

Als letzten Punkt betrachten wir in Abschnitt 4.3 die Auswirkungen der Beschränkungen
bezüglich der Kreditaufnahme in einem diskreten Handelsrahmen. Hierzu werden wir die
Ausfallwahrscheinlichkeit durch eine geeignete Approximation herleiten. Abschließend er-
folgt ein Vergleich des Gap-Risikos der einfachen und der beschränkten CPPI bei diskreten
Handelszeitpunkten.

4.1 Handel gemäß des Wertprozesses

4.1.1 Definition der Strategie

In diesem Abschnitt definieren wir eine zeitdiskrete Version der einfachen CPPI, welche die folgenden vier Bedingungen erfüllen soll. Zum einen soll der Wertprozess der diskreten Version in Verteilung gegen den Wertprozess der stetigen Version konvergieren. Zweitens soll die diskrete Version selbstfinanzierend sein. Drittens soll die Strategie keine negativen Bestände der zugrunde liegenden Aktie zulassen und viertens soll die Investition in die Aktie konstant proportional zum Cushion gewählt werden. Die erste Bedingung impliziert die Konvergenz des Cushions gegen eine geometrische Brownsche Bewegung und somit ist dieser im Grenzwert sicher positiv. Bezüglich einer endlichen Anzahl von Handelstagen kann der Cushion jedoch negativ werden, was im Sinne einer konstant proportionalen Investition zu negativen Investitionen führen könnte. In Verbindung mit der dritten Bedingung soll dies bei der Definition beachtet werden.

Sei τ^n eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[0, T]$ in $n + 1$ Handelszeitpunkte, d.h. $\tau^n = \{t_0^n = 0 < t_1^n < \dots < t_{n-1}^n < t_n^n = T\}$, wobei $t_{k+1}^n - t_k^n = \frac{T}{n}$ für $k = 0, \dots, n - 1$. Zur Vereinfachung der Notation werden wir auf den oberen Index n verzichten, sofern sich die Anzahl der Handelszeitpunkte aus dem Zusammenhang ergibt, d.h. die Menge der Handelszeitpunkte sei durch τ gekennzeichnet.

Die Handelsbeschränkungen auf die Zeitpunkte $t_k \in \tau$ impliziert, dass die gehaltene Anzahl von Aktien im Intervall $]t_i, t_{i+1}]$ für $i = 0, \dots, n - 1$ konstant sein muss. Dies bedeutet umgekehrt natürlich nicht, dass der relative Anteil bezüglich des Wertes konstant bleibt. Anstelle der relativen Beschreibung der einfachen CPPI („Investiere den Anteil $\frac{mC_t}{V_t}$ “), benötigen wir zur Definition eine absolute Beschreibung in Form der Anzahl der Aktien η und der Anzahl der risikolosen Anleihen β , d.h. ein Tupel $\phi = (\eta, \beta)$, die gehalten werden sollen.

Für die einfache CPPI in stetiger Form gilt

$$\eta_t = \frac{\Pi_t V_t}{S_t} = \frac{mC_t}{S_t} \quad \text{and} \quad \beta_t = \frac{(1 - \Pi_t)V_t}{B_t} = \frac{V_t - mC_t}{B_t}.$$

Die folgenden Argumente zeigen, dass eine zeitdiskrete Strategie ϕ^τ definiert durch $\phi_t^\tau := \phi_{t_k}$ für $t \in]t_k, t_{k+1}]$ ($k = 0, \dots, n - 1$) im allgemeinen nicht selbstfinanzierend ist. Der Wertprozess $V^\tau := V(\phi; \tau)$, der sich aus der zeitdiskreten Version ϕ^τ ergibt, ist definiert durch $V_0^\tau := V_0$ und

$$V_t(\phi; \tau) := \eta_{t_k} S_t + \beta_{t_k} B_t = V_t(\phi) - (\eta_t - \eta_{t_k}) S_t - (\beta_t - \beta_{t_k}) B_t \quad \text{for } t \in]t_k, t_{k+1}]$$

mit

$$V_t(\phi) := \eta_t S_t + \beta_t B_t.$$

Auch wenn ϕ selbstfinanzierend ist, gilt dies nicht notwendigerweise auch für ϕ^τ . Insbesondere gilt, falls ϕ^τ selbstfinanzierend ist,

$$\begin{aligned}\eta_{t_k} S_{t_{k+1}} + \beta_{t_k} B_{t_{k+1}} &= \eta_{t_{k+1}} S_{t_{k+1}} + \beta_{t_{k+1}} B_{t_{k+1}} \quad \text{für alle } k = 0, \dots, n-1 \\ \iff V_{t_{k+1}}(\phi; \tau) &= V_{t_{k+1}}(\phi) \quad \text{für alle } k = 0, \dots, n-1.\end{aligned}$$

was jedoch offensichtlich ausschließlich im Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ gültig sein kann².

Um eine sinnvolle Definition der zeitdiskreten Strategie zu erhalten ist es somit notwendig, ausschließlich selbstfinanzierende Strategien zu betrachten. Dies impliziert die folgende Bedingung an die Anzahl der zuhaltenden Bonds

$$\beta_t^\tau = \frac{1}{B_{t_k}} (V_{t_k}^\tau - \eta_t^\tau S_{t_k}) \quad \text{für } t \in]t_k, t_{k+1}]. \quad (4.1.1)$$

Ausgehend von der Definition der einfachen CPPI über den in die risikobehaftete Anlage investierten Anteil, ergibt sich folgende Definition für die zeitdiskrete Strategie.

Definition 4.1.1 (zeitdiskrete einfache CPPI) Die Strategie $\phi^\tau = (\eta^\tau, \beta^\tau)$ heißt **zeitdiskrete einfache CPPI** falls für alle $t \in]t_k, t_{k+1}]$ und $k = 0, \dots, n-1$

$$\eta_t^\tau := \max \left\{ \frac{m C_{t_k}^\tau}{S_{t_k}}, 0 \right\}, \quad \beta_t^\tau := \frac{1}{B_{t_k}} (V_{t_k}^\tau - \eta_t^\tau S_{t_k})$$

gilt.

Dabei bezeichnet C^τ die zeitdiskrete Version des Cushion C , also $C_t^\tau := V_t^\tau - G_t$.

Man beachte, dass mit obiger Definition Leerverkäufe der zugrunde liegenden Aktie ausgeschlossen sind, d.h. der in die Aktie investierte Betrag ist durch Null nach unten beschränkt. Im Gegensatz zu den Überlegungen aus dem Abschnitt 3.1 stellen wir jedoch keine Beschränkungen an Leerverkäufe bezüglich des risikolosen Bonds, d.h. unbeschränkte Kreditaufnahmen sollen weiterhin zulässig sein. Wie wir gesehen haben, führen Kreditbeschränkungen zu pfadabhängigen Wertentwicklungen, was die Herleitung geschlossener Lösungen an dieser Stelle unmöglich macht. Trotzdem können die hier auftretenden Effekte als Grundlage für eine realistischere Betrachtung angesehen werden³.

Aus obiger Definition ergibt sich folgendes Resultat:

Proposition 4.1.1 (zeitdiskreter Cushionprozess) Sei $t_s := \min \{t_k \in \tau \mid C_{t_k}^\tau \leq 0\}$ und $t_s = \infty$ falls das Minimum nicht erreicht wird. Dann gilt

$$C_{t_{k+1}}^\tau = e^{\tau(t_{k+1} - \min\{t_s, t_{k+1}\})} C_0 \prod_{i=1}^{\min\{s, k+1\}} \left(m \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - (m-1) e^{\tau \frac{T}{n}} \right).$$

²Man beachte, dass es zunächst noch nicht einmal klar ist, ob die so definierte Strategie bezüglich des sogenannten Real-World-Maß im Durchschnitt selbstfinanzierend ist, vgl. z.B: Mahayni (2003).

³Zum Beispiel kann die hier betrachtete Ausfallwahrscheinlichkeit als obere Grenze der Ausfallwahrscheinlichkeit einer beschränkten CPPI aufgefasst werden, vgl. Abschnitt 4.3

Beweis Prop. 4.1.1: Mit

$$V_{t_{k+1}}^\tau = \max \left\{ \frac{mC_{t_k}^\tau}{S_{t_k}}, 0 \right\} S_{t_{k+1}} + \left(V_{t_k}^\tau - \max \left\{ \frac{mC_{t_k}^\tau}{S_{t_k}}, 0 \right\} S_{t_k} \right) \frac{B_{t_{k+1}}}{B_{t_k}}$$

und $G_{t_k} \frac{B_{t_{k+1}}}{B_{t_k}} = G_{t_{k+1}}$ folgt

$$C_{t_{k+1}}^\tau = V_{t_{k+1}}^\tau - G_{t_{k+1}} = \begin{cases} C_{t_k}^\tau \left(m \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - (m-1)e^{r\frac{T}{n}} \right) & \text{falls } C_{t_k}^\tau > 0 \\ C_{t_k}^\tau e^{r\frac{T}{n}} & \text{falls } C_{t_k}^\tau \leq 0, \end{cases}$$

für alle $k = 0, \dots, n-1$. Die Definition von t_s ergibt die Behauptung. ■

Man beachte, dass der Cushion C^τ in Verteilung gegen C für $n \rightarrow \infty$ konvergiert. Der Beweis basiert auf der Konvergenz der Ausfallwahrscheinlichkeit und dem Satz von Donsker, vgl. Proposition 4.1.5.

4.1.2 Risikomaße der zeitdiskreten CPPI

Es sei daran erinnert, dass die Grundidee der CPPI in der Gewährleistung der Garantie liegt. Mit Ausnahme der naiven Portfolio-Absicherung, d.h. $m = 1$, werden jedoch mit positiver Wahrscheinlichkeit Portfolio-Werte unterhalb der Garantie, d.h. $C^\tau < 0$, angenommen. Der folgende Abschnitt widmet sich diesem Ausfallrisiko im Sinne der Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ausfall auftritt, und der erwarteten Höhe des Ausfalls.⁴ Zusätzlich werden wir Erwartungswert und Varianz der zeitdiskreten CPPI bestimmen.

Definition 4.1.2 (Risikomaße) *Wir betrachten die folgenden Risikomaße*

- Die **Ausfallwahrscheinlichkeit (shortfall probability)** P^{SF} beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass der Endwert der zeitdiskreten CPPI unterhalb der Garantie G liegt.

$$P^{SF} := P(V_T^\tau < G) = P(C_T^\tau < 0)$$

- Die **lokale Ausfallwahrscheinlichkeit** P^{LSF} ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Cushion beim nächsten Handelszeitpunkt negativ wird, unter der Bedingung, dass er bislang nicht-negativ ist.

$$P^{LSF} := P(V_{t_1}^\tau < G_{t_1} | C_{t_0} \geq 0)$$

⁴Man beachte, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit kein kohärentes Risikomaß darstellt, da sie nicht subadditiv ist. Im Gegensatz ist der erwartete Ausfall bedingt auf das Auftreten eines Ausfall ein kohärentes Risikomaß. Für weitere Details bezüglich kohärenter Risikomaße sei auf Artzner et al. (1999) verwiesen.

- **Der erwartete Verlust** (bedingt es erfolgt ein Ausfall) ESF beschreibt die Höhe des Ausfalls.

$$ESF := E[G - V_T^\tau | V_T^\tau < G]$$

Im Gegensatz zum Delta-Hedge von optionsbasierten Strategien ist die Berechnung der Ausfallwahrscheinlichkeit einer einfachen CPPI sehr leicht. Dies folgt daraus, dass das Ausfallereignis äquivalent zur Stoppzeit aus Proposition 4.1.1 ist.

Lemma 4.1.1 (Ausfallereignisse) Sei $A_k := \left\{ \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \geq \frac{m-1}{m} e^{r \frac{T}{n}} \right\}$ für $k = 1, \dots, n$ und $t_s := \min \{t_k \in \tau | C_{t_k}^\tau \leq 0\}$. Dann gilt

$$\{t_s > t_i\} = \bigcap_{j=1}^i A_j \text{ und } \{t_s = t_i\} = A_i^C \cap \left(\bigcap_{j=1}^{i-1} A_j \right) \text{ für } i = 1, \dots, n.$$

Beweis Lemma 4.1.1: Nach Beweis von Proposition 4.1.1 gilt

$$V_{t_{k+1}}^\tau - G_{t_{k+1}} = \begin{cases} (V_{t_k}^\tau - G_{t_k}) \left(m \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} \right) & \text{falls } C_{t_k}^\tau \geq 0 \\ (V_{t_k}^\tau - C_{t_k}) e^{r \frac{T}{n}} & \text{falls } C_{t_k}^\tau < 0. \end{cases}$$

Der Rest folgt aus der Definition der Stoppzeit t_s und

$$m \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} > 0 \iff \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} > \frac{m-1}{m} e^{r \frac{T}{n}}.$$

■

Lemma 4.1.2 (lokale Ausfallwahrscheinlichkeit)

$$P^{LSF} = \mathcal{N}(-d_2) \quad \text{mit} \quad d_2 := \frac{\ln \frac{m}{m-1} + (\mu - r) \frac{T}{n} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{T}{n}}{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}. \quad (4.1.2)$$

Beweis Lemma 4.1.2: Mit Lemma 4.1.1 folgt

$$\begin{aligned} P^{LSF} &= P(t_s = t_1 | t_s > t_0) \\ &= P\left(\frac{S_{t_1}}{S_{t_0}} \leq \frac{m-1}{m} e^{r \frac{T}{n}}\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{m-1}{m} - (\mu - r) \frac{T}{n} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{T}{n}}{\sigma \sqrt{\frac{T}{n}}}\right) \end{aligned}$$

aufgrund der Verteilungseigenschaften des Aktienkurses. ■

Proposition 4.1.2 (Ausfallwahrscheinlichkeit) Es gilt $P^{SF} = 1 - (1 - P^{LSF})^n$.

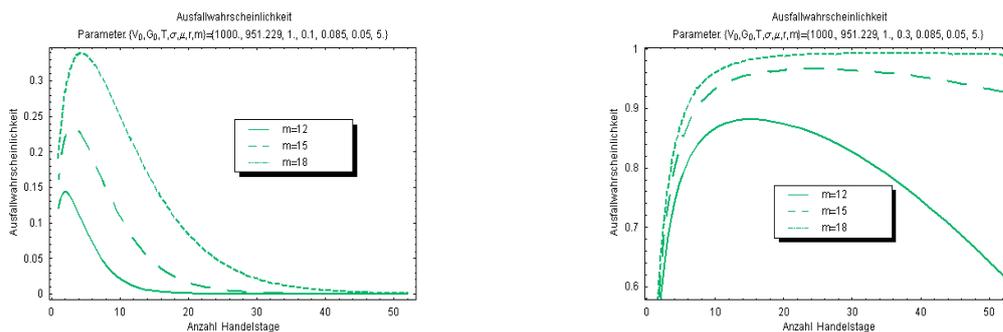


Abbildung 4.1: Ausfallwahrscheinlichkeiten ($T = 1$, $\mu = 0.085$, $r = 0.05$ und $\sigma = 0.1$ bzw. $\sigma = 0.3$.)

]

Beweis Proposition 4.1.2: Folgt direkt aus der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der Aktienkurszuwächse mit $P^{\text{SF}} = 1 - P(t_s = \infty)$ und $P(t_s = \infty) = (1 - P^{\text{LSF}})^n$. ■

Es kann gezeigt werden, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert, falls die Anzahl der Handelszeitpunkte gegen unendlich geht, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} P^{\text{SF}} = 0$ (vgl. Lemma A.6.5 aus dem Appendix).

Es wäre nahe liegend, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit monoton fallend in der Anzahl der Handelszeitpunkte ist. Dies ist im allgemeinen nicht der Fall. Stattdessen gibt es eine kritische Anzahl von Handelszeitpunkten, ab der die Ausfallwahrscheinlichkeit fällt. Dieser Effekt wird besonders bei hohen Volatilitäten und Multipliern deutlich und ist in den Abbildung 4.1 dargestellt⁵. Sei n^* diese kritische Menge von Rehedges, die erforderlich sind, damit die Ausfallwahrscheinlichkeit für $n \geq n^*$ sinkt. Diese kritische Menge n^* kann als Mindestanzahl von Rehedges interpretiert werden, die notwendig sind, damit die CPPI Strategie in diskreter Zeit effektiv ist.⁶

Wir werden später auf diese kritische Anzahl von Mindesthandelszeitpunkten zurückkommen.

Zunächst soll betrachtet werden, wie groß der Ausfall werden kann. Eine Möglichkeit besteht in der Betrachtung des erwarteten Ausfalls wie in Definition 4.1.2. Es stellt sich heraus, dass sich die erwartete Auszahlung der Strategie in zwei Teile zerlegen lässt, den erwarteten Ausfall und die erwarteten Überschüsse. Deswegen betrachten wir zunächst direkt die erwartete Auszahlung

⁵Die Monotonie der Ausfallwahrscheinlichkeit in m und σ kann leicht gezeigt werden.

⁶Betrachte z.B. eine Garantie G gegeben durch $G = e^{rT} \frac{m-1}{m} V_0$ so dass $\alpha_0 = 1$, d.h. vollständiges Investment in die risikobehaftete Anlage bei Beginn. Falls $n = 1$ gewählt wird, d.h. kein weiterer Handel vor T , entspricht die zeitdiskrete CPPI einem reinem Aktieninvestment. Offensichtlich kann die CPPI nicht effektiv sein, da ein vollständiges, dauerhaftes Aktieninvestment nicht der Idee der CPPI entspricht.

Proposition 4.1.3 (erwarteter Endwert)

$$E[C_T^\tau] = C_0 \left[E_1^n + E_2 \frac{e^{rT} - E_1^n}{e^{r\frac{T}{n}} - E_1} \right]$$

$$\text{mit } E_1 := me^{\mu\frac{T}{n}} \mathcal{N}(d_1) - e^{r\frac{T}{n}}(m-1) \mathcal{N}(d_2)$$

$$E_2 := me^{\mu\frac{T}{n}} \mathcal{N}(-d_1) - e^{r\frac{T}{n}}(m-1) \mathcal{N}(-d_2) .$$

und d_2 wie in Lemma 4.1.2 und $d_1 := d_2 + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}}$.

Beweis Proposition 4.1.3: Wie erwähnt lässt sich der Erwartungswert folgendermaßen zerlegen

$$E[C_T^\tau] = E[C_T^\tau 1_{\{t_s=\infty\}}] + E[C_T^\tau 1_{\{t_s \leq t_n\}}] .$$

Mit Lemma 4.1.1 und Lemma A.6.1 des Appendix A.6 folgt

$$\begin{aligned} E[C_T^\tau 1_{\{t_s=\infty\}}] &= E \left[(V_T^\tau - F_T) \prod_{i=1}^n 1_{A_i} \right] \\ &= C_0 E_1^n \end{aligned}$$

Für den zweiten Erwartungswert gilt $E[C_T^\tau 1_{\{t_s \leq t_n\}}] = \sum_{i=1}^n E[C_T^\tau 1_{\{t_s=t_i\}}]$. Der verbleibende Teil folgt aus Lemma A.6.2 des Appendix A.6 und der Auflösung der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n e^{r(T-t_i)} C_0 E_2 E_1^{i-1} \\ &= C_0 E_2 \frac{e^{rT} - E_1^n}{e^{r\frac{T}{n}} - E_1} . \end{aligned}$$

■

Die Berechnung des bedingten erwarteten Verlusts ESF ergibt sich direkt aus den obigen Überlegungen.⁷

Korollar 4.1.3 (Erwarteter Verlust)

$$ESF = \frac{-C_0 E_2 \frac{e^{rT} - E_1^n}{e^{r\frac{T}{n}} - E_1}}{PSF} .$$

⁷Gleiches gilt für den Preis des Ausfallrisikos, d.h. der Preis einer Option deren Auszahlung in T durch $(G - V_T^\tau)^+$ gegeben ist. Man beachte, dass der t_0 -Preis unter Arbitragefreiheit durch den Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem Martingalmaß gegeben ist. Die hier betrachteten Erwartungswerte sind jedoch unter dem *Real-World-Maß* bestimmt. Wir kommen in den folgenden Abschnitten darauf noch einmal zurück.

Beweis 4.1.3 : Der Beweis folgt mit $ESF = E[-C_T^\tau | t_s < \infty] = -\frac{E[C_T^\tau 1_{\{t_s \leq t_n\}}]}{PSF}$, und den Argumenten aus dem Beweis zu Proposition 4.1.3. ■

Proposition 4.1.4 (Varianz des Cushion)

$$\begin{aligned} \text{Var}[C_T^\tau] &= C_0^2 \left[\tilde{E}_1^n + \tilde{E}_2 \frac{e^{2rT} - \tilde{E}_1^n}{e^{2r\frac{T}{n}} - \tilde{E}_1} \right] - E[C_T^\tau]^2, \text{ mit} \\ \tilde{E}_1 &:= m^2 e^{(2\mu+\sigma^2)\frac{T}{n}} \mathcal{N}(d_3) - 2m(m-1)e^{(\mu+r)\frac{T}{n}} \mathcal{N}(d_1) + (m-1)^2 e^{2r\frac{T}{n}} \mathcal{N}(d_2), \\ \tilde{E}_2 &:= m^2 e^{(2\mu+\sigma^2)\frac{T}{n}} - 2m(m-1)e^{(\mu+r)\frac{T}{n}} + (m-1)^2 e^{2r\frac{T}{n}} - \tilde{E}_1. \end{aligned}$$

und d_1, d_2 definiert wie oben, $d_3 := \frac{\ln \frac{m}{m-1} + (\mu-r)\frac{T}{n} + \frac{3}{2}\sigma^2\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$.

Beweis Proposition 4.1.4:

$$\begin{aligned} \text{Var}[C_T^\tau] &= E[(C_T^\tau)^2] - (E[C_T^\tau])^2 \\ \text{und } E[(C_T^\tau)^2] &= E[(V_T^\tau)^2 1_{\{t_s = \infty\}}] + \sum_{i=1}^n E[(C_T^\tau)^2 1_{\{t_s = t_i\}}]. \end{aligned}$$

Analoge Überlegungen zum Beweis von Proposition 4.1.3 führen mit Lemma A.6.3 und Lemma A.6.4 des Appendix zu

$$E[(C_T^\tau)^2] = C_0^2 \tilde{E}_1^n + \sum_{i=1}^n C_0^2 e^{2r(T-t_i)} \tilde{E}_2 \tilde{E}_1^{i-1}.$$

Der Rest ist wiederum eine Anwendung der geometrischen Reihe. ■

Aus den Überlegungen zum Erwartungswert und der Varianz kann nun die Konvergenz bewiesen werden

Proposition 4.1.5 (Konvergenz) *Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert der Wertprozess V^τ gegen den Wertprozess V in Verteilung⁸, d.h. $V^\tau \xrightarrow{\mathcal{L}} V$.*

Beweis Proposition 4.1.5: vgl. Appendix A.6. ■

Wir beenden den Abschnitt mit einer Untersuchung der Auswirkungen der verschiedenen Parameter auf die Risikomaße. Die wichtigsten Eigenschaften sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Die Beweise sind in der Regel recht einfach. So sieht man direkt aus Proposition 4.1.2, dass die Höhe der Garantie keinen Einfluss auf die Ausfallwahrscheinlichkeit besitzt.

⁸Nach Revuz und Yor (1998), c.f. Chapter XIII, Definition 1.3 gilt: Eine Folge (X^n) von \mathbb{R} -wertigen Prozessen definiert auf Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, P^n)$ konvergiert in Verteilung gegen einen Prozess X , falls die Folge (P^n) ihrer Verteilungen schwach auf dem Wiener-Raum gegen die Verteilung von X konvergieren. Für Konvergenz stochastischer Prozesse siehe außerdem Jacod und Shiryaev (1980).

Sensitivität der Risikomaße				
Risikomaß	Parameter der Strategie		Parameter der Aktie	
	G	m	μ	σ
$E[V_T^r]$	↓	↑	↑	↑
$\text{Var}[V_T^r]$	↓	↑	↑	↑
P^{SF}	–	↑	↓	↑
ESF	↓	↑	↑	↑

Tabelle 4.1: Sensitivität der Risikomaße. ↑ bezeichnet monotonen Wachstum und ↓ monotonen Fallen im entsprechenden Parameter.

Partielle Ableitungen der Ausfallwahrscheinlichkeit nach σ und m führen zur Feststellung, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit monoton wachsend in σ und m , aber monoton fallend in μ ist.

Auch für die Eigenschaften der Momente sind die Rechnungen direkt durchführbar, jedoch etwas umfangreicher. Im Appendix wird exemplarisch die Monotonie des Erwartungswertes in der Volatilität hergeleitet, vgl. Abschnitt A.6. Ähnliche Argumente werden für die Monotonie in μ and m benötigt.

Beachtenswert ist, dass sowohl die Ausfallwahrscheinlichkeit, als auch der erwartete Verlust wachsend in m und σ sind. Auch bei der zeitdiskreten Version der CPPI ist es also notwendig, diese Parameter hinreichend klein zu wählen, damit die Strategie effektiv bleibt. Diese Eigenschaften ergeben sich analog zur Betrachtung der stetigen Strategie, wo wir gesehen haben, dass eine notwendige Bedingung, damit die Strategie langfristig erfolgreich ist, $\mu - r > \frac{1}{2}m\sigma^2$ lautet. Diesen Eigenschaften werden wir uns später genauer widmen. Zunächst sei jedoch der Einfluss von Transaktionskosten auf die Dynamik der CPPI vorgestellt.

4.1.3 Einfache zeitdiskrete CPPI unter Transaktionskosten

Neben der praktischen Unmöglichkeit, stetig zu handeln besteht ein wesentliches Argument in der Betrachtung zeitdiskreter Strategien im Vorhandensein von Transaktionskosten. In diesem Abschnitt werden die Auswirkungen von Transaktionskosten auf die Risikomaße der zeitdiskreten CPPI untersucht.

Wir betrachten dazu Transaktionskosten, die proportional zur absoluten Höhe der Umschichtung in der risikobehafteten Anlage sind. Der Proportionalitätsfaktor sei durch θ bezeichnet. Transaktionskosten in der risikolosen Anlage werden nicht beachtet. Um die Eigenschaft der Selbstfinanzierung zu erhalten, gehen wir davon aus, dass der in die Aktie investierte Betrag um die Transaktionskosten gemindert wird. Dies entspricht einer Minderung des Cushion

um die Transaktionskosten und erhält somit die grundlegenden Eigenschaften der CPPI.⁹ Eine Anpassung des Cushion um die Transaktionskosten ergibt für $k = 0, \dots, n-1$

$$C_{t_{k+1}+} = C_{t_{k+1}} - \theta \left| mC_{t_{k+1}+} - mC_{t_k+} \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \right| \quad (4.1.3)$$

wobei $mC_{t_{k+1}+}$ den um die Transaktionskosten geminderten Cushion zur Zeit t_{k+1} bezeichnet, welcher sich aus Anpassung des investierten Kapitals $mC_{t_{k+1}}$ ohne Transaktionskosten ergibt, d.h. $mC_{t_{k+1}+}$ ist das ab dem Zeitpunkt t_{k+1} in die riskante Anlage investierte Kapital. Wir nehmen weiter an, dass auch bei Beginn in t_0 der Strategie Transaktionskosten anfallen, womit der anfängliche Cushion, der zur Bestimmung des investierten Kapitals herangezogen wird, durch $C_{t_0+} := \frac{1}{1+\theta m} C_{t_0}$ gegeben ist. Gleichung (4.1.3) in Verbindung mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis zur Proposition 4.1.1 ergibt für $C_{t_k+} > 0$ und $\theta < \frac{1}{m}$.

$$C_{t_{k+1}+} = \begin{cases} C_{t_k+} \left(\frac{1+\theta}{1+\theta m} m \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - \frac{m-1}{1+\theta m} e^{r\frac{T}{n}} \right) & \text{for } \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \geq e^{r\frac{T}{n}} \\ C_{t_k+} \left(\frac{1-\theta}{1-\theta m} m \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - \frac{m-1}{1-\theta m} e^{r\frac{T}{n}} \right) & \text{for } \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} < e^{r\frac{T}{n}}. \end{cases}$$

oder anders dargestellt als

$$C_{t_{k+1}+} = C_{t_k+} \left(m \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - (m-1) e^{r\frac{T}{n}} - (m-1) \left(\frac{\theta m}{1+\theta m} \left[\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - e^{r\frac{T}{n}} \right]^+ + \frac{\theta m}{1-\theta m} \left[e^{r\frac{T}{n}} - \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \right]^+ \right) \right).$$

Die Anpassung des Ausfall-Ereignis A_k an die Transaktionskosten ergibt $A_k := \left\{ \frac{S_{t_k}}{S_{t_{k-1}}} \geq \frac{m-1}{m(1-\theta)} e^{r\frac{T}{n}} \right\}$. Ausgehend von obiger Dynamik für den Cushion und der Charakterisierung des Ausfalls lassen sich nun analog zur bisherigen Betrachtung die Risikomaße bestimmen.

Proposition 4.1.6 (Risikomaße unter Transaktionskosten) Sei $P^{LSF,TA}$ die lokale Ausfallwahrscheinlichkeit, $P^{SF,TA}$ die Ausfallwahrscheinlichkeit und ESF^{TA} der bedingte Verlust unter proportionalen Transaktionskosten θ . Dann gilt

$$\begin{aligned} (i) \quad & P^{LSF,TA} = \mathcal{N}(-d_2^{TA}(\theta)) \\ (ii) \quad & P^{SF,TA} = 1 - (1 - P^{LSF,TA})^n \\ (iii) \quad & E[C_T^{\tau,TA}] = \frac{C_0}{1+\theta m} \left((E_1^{TA})^n + E_2^{TA} \frac{e^{rT} - (E_1^{TA})^n}{e^{r\frac{T}{n}} - E_1^{TA}} \right) \\ (iv) \quad & ESF^{TA} = \frac{\frac{C_0}{1+\theta m} E_2^{TA} \frac{e^{rT} - (E_1^{TA})^n}{e^{r\frac{T}{n}} - E_1^{TA}}}{P^{SF,TA}} \end{aligned}$$

⁹Dies entspricht auch dem von Black und Perold (1992) vorgeschlagenen Ansatz.

¹⁰ Die Bedingung $\theta < \frac{1}{m}$ ist technischer Natur und besagt, dass die Transaktionskosten nicht beliebig hoch sein dürfen, da die Strategie sonst trivialerweise keine Investitionen in die Aktie tätigt.

mit $d_2^{TA}(\theta) := \frac{\ln \frac{(1-\theta)m}{m-1} + (\mu-r)\frac{T}{n} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}$ und E_1^{TA} bzw. E_1^{TA} gegeben durch

$$\begin{aligned} E_1^{TA} &= \frac{1-\theta}{1-\theta m} m e^{\mu\frac{T}{n}} \mathcal{N}(d_1^{TA}(\theta)) - \frac{m-1}{1-\theta m} e^{r\frac{T}{n}} \mathcal{N}(d_2^{TA}(\theta)) \\ &\quad + m e^{\mu\frac{T}{n}} \left(\frac{1+\theta}{1+\theta m} - \frac{1-\theta}{1-\theta m} \right) \mathcal{N}(e_1) - (m-1) e^{r\frac{T}{n}} \left(\frac{1}{1+\theta m} - \frac{1}{1-\theta m} \right) \mathcal{N}(e_2) \\ E_2^{TA} &= \left[\frac{1-\theta}{1-\theta m} m e^{\mu\frac{T}{n}} \mathcal{N}(-d_1^{TA}(\theta)) - \frac{m-1}{1-\theta m} e^{r\frac{T}{n}} \mathcal{N}(-d_2^{TA}(\theta)) \right] \\ \text{wobei } e_1 &:= \frac{(\mu-r)\frac{T}{n} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}, \quad e_2 := e_1 - \sigma\sqrt{\frac{T}{n}} \quad \text{und } d_1^{TA}(\theta) := d_2^{TA}(\theta) + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die oben erfolgte Betrachtung der Sensitivitäten der Risikomaße gleich bleibt. Die Transaktionskosten haben keinen Einfluss auf das Verhalten der Risikomaße bezüglich der Strategie- und Modellparameter.

Wir wollen die Betrachtung der Transaktionskosten mit einer kurzen Untersuchung der Konvergenz des Cushion bei positiven Transaktionskosten abschliessen. Intuitiv erwartet man, dass die Transaktionskosten beim Übergang zur stetigen Strategie jegliche Gewinne verzehren. Dies basiert auf Gleichung (4.1.4), aus welcher man sieht, dass der Cushion unter Transaktionskosten aus dem Cushion ohne Transaktionskosten abzüglich einer Kombination von Call- und Put-Optionen besteht.¹¹ In stetiger Zeit entspricht dies also einer unendlich häufig zu leistenden Auszahlung dieser Optionen, wobei die Laufzeit der einzelnen Optionen jeweils gegen Null geht. Der konkrete Beweis beruht auf zwei Überlegungen. Zum einen konvergiert die Ausfallwahrscheinlichkeit auch unter Transaktionskosten gegen 0. Zum anderen zeigen wir im Anhang in Lemma A.6.7, dass der erwartete Cushion einen Wert kleiner oder gleich Null besitzen muss. Insgesamt ergibt sich das der Cushion unter Transaktionskosten im Grenzwert den Wert Null besitzt.

Wir beschäftigen uns nun mit der Güte der zeitdiskreten CPPI. Es sollen notwendige Bedingungen aufgezeigt werden, aus denen sich eine effiziente Portfolio-Absicherung ergibt. Wir nehmen an, der Markt sei durch die Parameter $\mu = 0.085$, $\sigma = 0.1$ (bzw. 0.2 oder 0.3) und $r = 0.05$ beschrieben. Die Strategie sei durch die Garantie der Kapitalerhaltung von 1.000 nach einem Jahr beschrieben, d.h. $T = 1$ und $V_0 = G = 1000$. Als Multiplier wählen wir die Werte 8 und 10. Insbesondere ist damit die in den früheren Kapitel hergeleitete notwendige Bedingung $\mu > r + \frac{m}{2}\sigma^2$ jeweils verletzt. Dies soll deutlich machen, dass sich die aus der Diskretisierung ergebenden Risiken trotzdem überschaubar bleiben.

Zunächst stellen wir die Frage, inwieweit die zeitdiskrete einfache CPPI eine gute Approximation der stetigen einfachen CPPI (und umgekehrt) darstellt. Sollte dies der Fall sein, rechtfertigt es im nachhinein auch unsere bisherigen Überlegungen zu den Modifikationen der CPPI in dem Sinne, dass eine Betrachtung der Eigenschaften der stetigen Strategie

¹¹Konkret handelt es sich hier um einen so genannten Straddle

Momente und Risiko-Maße der zeitdiskreten CPPI

n	m	Erw.	Stdabw.	SFP	ESF
12	10	1072.43 (1073.22)	88.56 (368.16)	0.0011 (0.3265)	3.72 (14.87)
36	10	1072.65 (1072.67)	92.95 (463.935)	0.0000 (0.0268)	1.37 (5.00)
60	10	1072.69 (1072.69)	93.90 (489.08)	0.0000 (0.0013)	0.00 (3.13)
∞	10	1072.76 (1072.76)	95.37 (532.66)	0.0000 (0.0000)	0.00 (0.00)

Tabelle 4.2: Momente und Risiko-Maße für $\sigma = 0.1$ (bzw. $\sigma = 0.2$) und $\theta = 0$ **Risiko der zeitdiskreten CPPI mit 1%-iger Ausfallwahrscheinlichkeit**

	$\theta = 0.00$		$\theta = 0.01$	
n	m	ESF	m	ESF
12	11.843 (6.065)	5.313 (4.478)	10.684 (5.772)	4.116 (3.925)
36	18.146 (9.234)	5.149 (4.190)	15.490 (8.531)	2.500 (2.824)
60	22.336 (11.335)	5.243 (4.121)	18.409 (10.274)	1.603 (2.088)

Tabelle 4.3: Maximale Multiplier für implizite Ausfallwahrscheinlichkeiten von 1% und $\sigma = 0.1$ ($\sigma = 0.2$).

auch Rückschlüsse auf die Eigenschaften der zeitdiskreten Versionen zulässt. Es sei daran erinnert, dass die Verteilung des Cushions der zeitdiskreten einfachen CPPI gegen eine Lognormalverteilung konvergiert, vgl. Proposition 4.1.5. Die Strategie ist also (im Grenzwert) eindeutig durch ihre ersten beiden Momente charakterisiert. Diese finden sich in Tabelle 4.2 wieder, die diese und die Risiko-Maße für verschieden häufige Handelszeitpunkte n aufführt. Es sei an die Überlegungen zur kritischen Menge von Handelszeitpunkten erinnert, ab der die Ausfallwahrscheinlichkeit fallend ist. Im Allgemeinen wird diese kritische Menge deutlich zu klein sein, um eine effektive Absicherung zu erzielen. Eine Möglichkeit, die Effizienz der zeitdiskreten CPPI zu definieren, besteht darin, Mindestanforderungen an die Risiko-Maße zu stellen. Basierend auf den Monotonie-Eigenschaften lassen sich somit obere und untere Grenzen für die Strategie-Parameter bestimmen.

Zur Illustration betrachten wir eine obere Grenze für das Ausfallrisiko in Tabelle 4.3. Insbesondere bestimmen wir Kombinationen von (n, m) , so dass die Ausfallwahrscheinlichkeit den Wert von 1% nicht übersteigt. Zusätzlich unterscheiden wir zwischen keinen Transaktionskosten ($\theta = 0$) und proportionalen Transaktionskosten von 1%, d.h. $\theta = 0.01$. Die angegebenen Multiplier bezeichnen eine obere Grenze, die Anzahl der Handelszeitpunkte eine untere Grenze für CPPI-Strategien mit dem gewünschten Risikoprofil¹². Beachtenswert

¹²Man beachte, dass natürlich zusätzlich die Bedingung $n \geq n^*$ überprüft werden muss, damit die Aus-

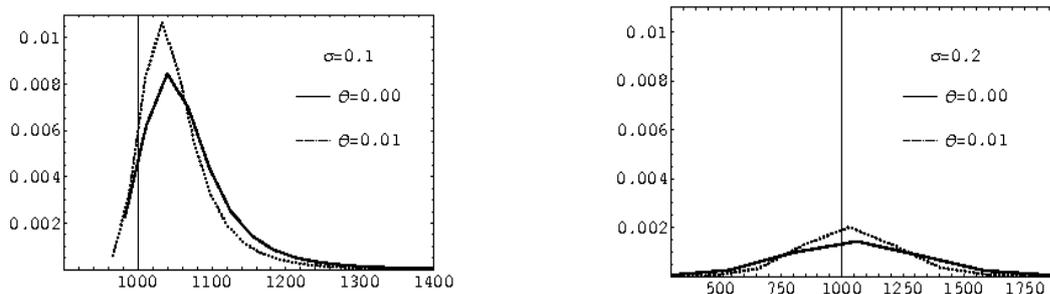


Abbildung 4.2: Verteilung des Endwertes der zeitdiskreten CPPI für $\sigma = 0.1$ bzw. $\sigma = 0.2$ und $m = 8$.

ist, dass bei niedriger Volatilität ($\sigma = 0.1$), die CPPI bereits bei monatlichem Rehedging und einem Multiplier¹³ kleiner als 11.84 die Kapitalgarantie zu 99% sichert¹⁴.

Für hinreichend kleine Volatilitäten ist monatliches Hedging also ausreichend. Das Bild ändert sich jedoch, falls eine Volatilität von $\sigma = 0.2$ angenommen wird und/oder bei zusätzlichen Transaktionskosten. In diesem Fall muss entweder der Multiplier konservativer gewählt werden oder eine höhere Rendite in der Aktie vorliegen. Natürlich könnte auch die Anzahl der Handelstage erhöht werden.

Zum Abschluss sei eine simulierte Verteilung des Schlusskurses der einfachen CPPI gegeben. Abbildung 4.2 zeigt die Dichte einer zeitdiskreten CPPI mit einem Multiplier von $m = 8$ bei einer Volatilität von $\sigma = 0,1$ bzw. $\sigma = 0,2$. Offensichtlich ist die Strategie bei niedriger Volatilität (links) effektiv im obigen Sinne. Betrachtet man stattdessen eine Volatilität von 0,2, erkennt man, dass die Effektivität nicht gegeben ist. Diese Szenarien lassen sich durch vorherige Überprüfung der Risikomaße vermeiden, ohne den rechenintensiven Vorgang der Simulation und den damit verbundenen Ungenauigkeiten durchzuführen.

fallwahrscheinlichkeit auch wirklich sinkt für zusätzliche Handelstage.

¹³Auch wenn der Multiplier von knapp 12 sehr hoch erscheint, muss jedoch die Garantie beachtet werden. Es ergibt sich folgendes anfänglich investiertes Kapital

$$\alpha V_0 = m(V_0 - F_0) = 11.843(1000 - e^{-0.05}1000) = 577.59.$$

¹⁴Für $n = 12$ and $m = 11.84$, sind Erwartungswert und Varianz außerdem dem einer Direktinvestition in die Aktie sehr ähnlich. Für diese gilt für $\sigma = 0.1$ ($\sigma = 0.2$) $E\left[V_0 \frac{S_T}{S_0}\right] = 1088.72$ (1088.72), $\sqrt{\text{Var}\left[V_0 \frac{S_T}{S_0}\right]} = 109.144$ (219.939) and $P\left(V_0 \frac{S_T}{S_0} \leq G\right) = 0.212$ (0.373).

4.2 Handel gemäß Delta-Hedge

Ausgehend von der Tatsache, dass sich die einfache CPPI als Power-Kontrakt darstellen lässt, stellt sich die Frage, ob es sinnvoll ist, anstelle der vorherigen Diskretisierung eine auf dem Delta-Hedge des Power-Kontraktes basierende Diskretisierung vorzunehmen. Eine Begründung, weshalb dies sinnvoll sein kann, besteht im Auftreten des Cash-Locks. Während die vorherige Diskretisierung, ähnlich einer Stop-Loss-Strategie, im Falle eines Wertes, der unterhalb des gegenwärtigen Barwertes der Garantie liegt, zukünftige positive Investitionsquoten in der Aktie ausschließt, wird beim Delta-Hedge immer eine positive Investitionsquote vorhanden sein. Der Vergleich mit der Stop-Loss-Strategie nimmt die unten folgenden Ergebnisse insofern bereits vorweg, als dass offensichtlich ist, dass die potentiellen Verluste nunmehr weitaus größer werden können.

Da der Wertprozess der stetigen einfachen CPPI pfadunabhängig ist, lässt sich die Anzahl der zuhaltenden Aktien als Funktion des Aktienkurses darstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\eta_t &= m \frac{C_t}{S_t} \\ &= m(V_0 - G_0) \frac{S_t^{m-1}}{S_0^m} e^{-(m-1)(r + \frac{m}{2}\sigma^2)t}\end{aligned}$$

Somit lässt sich eine Diskretisierung der Strategie im Sinne eines Delta-Hedges unter Beachtung der Selbstfinanzierung wie folgt darstellen:

Definition 4.2.1 (Δ -Approximation einfache CPPI) Die Strategie $\phi^\tau = (\eta^\tau, \beta^\tau)$ heißt Δ -Approximation einer einfachen CPPI falls für alle $t \in]t_k, t_{k+1}]$ und $k = 0, \dots, n-1$

$$\tilde{\eta}_t^\tau := m(V_0 - G_0) \frac{S_{t_k}^{m-1}}{S_0^m} e^{-(m-1)(r + \frac{m}{2}\sigma^2)t_k}$$

und

$$\tilde{\beta}_t^\tau := \frac{\tilde{V}_{t_k}^\tau - \tilde{\eta}_{t_k}^\tau S_{t_k}}{B_{t_k}}$$

gilt.

Wie erwähnt, ist hier im Gegensatz zur vorherigen Diskretisierung keine zusätzliche Bedingung an die Positivität der zu haltenden Aktien gestellt, da per Definition $\tilde{\eta}_t^\tau > 0$ gilt. Somit gilt auch, dass unabhängig von der tatsächlichen Wertentwicklung immer ein positiver Bestand an Aktien gehalten wird. Auch wenn die Garantie unterschritten wird, bleibt der Investor in der risikobehafteten Anlage investiert. Zum einen geht er damit das Risiko auf weitere Verluste ein, andererseits bietet sich ihm die Chance, Verluste zu kompensieren. Ausgehend von einer äquidistanten Zerlegung ergibt sich für den Wertprozess der Strategie.

Proposition 4.2.1 (Δ -Approximation des Wertprozess) Für den Wertprozess eines zeitdiskreten Δ -Hedges der einfachen CPPI gilt:

$$\tilde{V}_{t_{k+1}}^\tau = e^{rt_{k+1}} \left(V_0 + m(V_0 - G_0) \sum_{i=0}^k \left(\frac{S_{t_i}}{S_0} e^{-(r+\frac{m-1}{2}\sigma^2)t_i} \right)^m \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} e^{-r\Delta t} - 1 \right) \right)$$

Beweis : Ausgehend von der Anzahl der zuhaltenden Aktien ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{t_{k+1}}^\tau &= \tilde{\eta}_{t_{k+1}}^\tau S_{t_{k+1}} + \left(\tilde{V}_{t_k}^\tau - \tilde{\eta}_{t_{k+1}}^\tau S_{t_k} \right) e^{r\Delta t} \\ &= e^{rt_{k+1}} \left(V_0 + \sum_{i=0}^k e^{-(i\Delta t)r} \tilde{\eta}_{t_{i+1}}^\tau (S_{t_{i+1}} e^{-r\Delta t} - S_{t_i}) \right) \\ &= e^{rt_{k+1}} \left(V_0 + m(V_0 - G_0) \sum_{i=0}^k e^{-(i\Delta t)r} \frac{S_{t_i}^{m-1}}{S_0^m} e^{-(m-1)(r+\frac{m}{2}\sigma^2)i\Delta t} (S_{t_{i+1}} e^{-r\Delta t} - S_{t_i}) \right) \\ &= e^{rt_{k+1}} \left(V_0 + m(V_0 - G_0) \sum_{i=0}^k \left(\frac{S_{t_i}}{S_0} e^{-(r+\frac{(m-1)}{2}\sigma^2)t_i} \right)^m \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} e^{-r\Delta t} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

■

Entsprechend ergibt sich der Cushion

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{t_{k+1}}^\tau &= \tilde{C}_{t_k}^\tau e^{r\Delta t} + m(V_0 - G_0)m \left(\frac{S_{t_k}}{S_0} e^{-(r+\frac{(m-1)}{2}\sigma^2)t_k} \right)^m \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - e^{r\Delta t} \right) \quad (4.2.1) \\ &= (V_0 - G_0)e^{rt_{k+1}} \left(1 + m \sum_{i=0}^k \left(\frac{S_{t_i}}{S_0} e^{-(r+\frac{(m-1)}{2}\sigma^2)t_i} \right)^m \left(\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} e^{-r\Delta t} - 1 \right) \right) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zur auf dem Wert basierenden Diskretisierung ergibt sich die Konvergenz des Wertprozesses direkt aus der Konvergenz der Strategie. Der Wertprozess lässt sich als stochastisches Integral bezüglich der Strategie darstellen. Wie bekannt ist, folgt für stochastische Integrale aus der Konvergenz des Integranden auch die Konvergenz des Integrals. Für eine Darstellung dieser Ergebnisse im Bereich der Finanzmathematik sei auf Duffie und Protter (1992) verwiesen.

Im Gegensatz zur vorherigen Diskretisierung sind die Zuwächse des Wertprozesses nicht mehr unabhängig. In diesem Sinne liegt im Vergleich eine stärkere Pfadabhängigkeit vor. Zur Verdeutlichung betrachten wir die lokale Ausfallwahrscheinlichkeit. Aus Gleichung 4.2.1 ergibt sich

$$P \left[\tilde{C}_{t_{k+1}}^\tau \leq 0 \mid \tilde{C}_{t_k}^\tau = c \right] = P \left[\left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} - e^{r\Delta t} \right) \leq - \frac{ce^{r\Delta t}}{m(V_0 - G_0)m \left(\frac{S_{t_k}}{S_0} e^{-(r+\frac{(m-1)}{2}\sigma^2)t_k} \right)^m} \mid \tilde{C}_{t_k}^\tau = c \right]$$

Im Gegensatz zur ursprünglichen Diskretisierung ist die lokale Ausfallwahrscheinlichkeit weder konstant, noch von der vorherigen Wertentwicklung unabhängig. Insbesondere führt dies dazu, dass es nicht möglich ist, die Ausfallwahrscheinlichkeit und den erwarteten Ausfall explizit zu bestimmen.

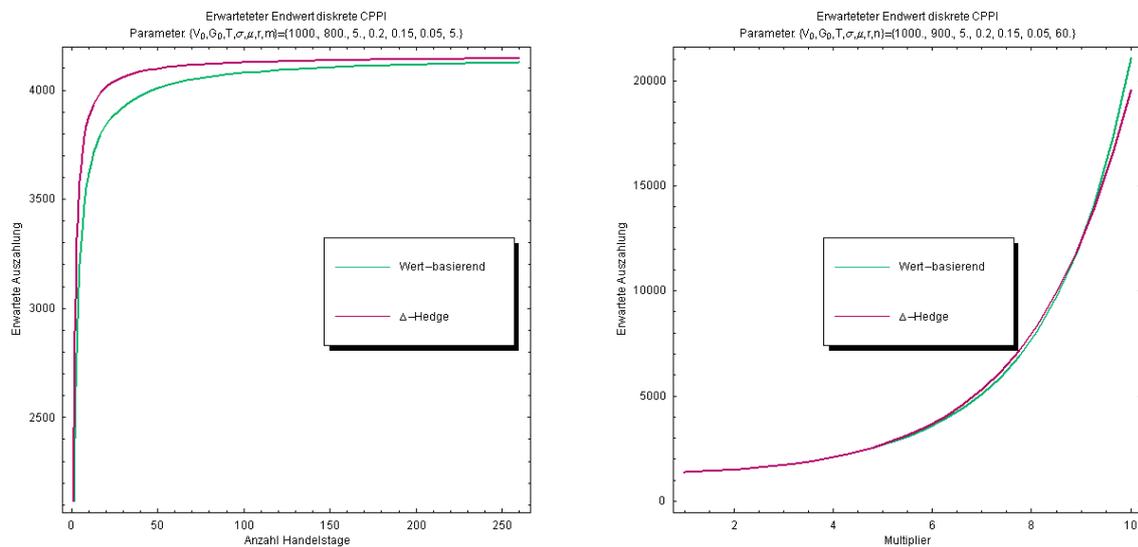


Abbildung 4.3: Erwartungswert der Δ -Approximation und der Wert-basierenden Approximation in Abhängigkeit der Handelstage und des Multiplier

Es ist jedoch möglich die Momente der Strategie zu bestimmen. Wir beschränken uns hier auf den Erwartungswert.

Korollar 4.2.1 *Der Erwartungswert des zeitdiskreten Δ -Hedges einer einfachen CPPI ist durch*

$$E[\tilde{V}_T^r] = e^{rT}V_0 + e^{rT}m(V_0 - G_0) \left(e^{m(\mu-r)T} - 1 \right) \frac{e^{(\mu-r)\Delta t} - 1}{e^{m(\mu-r)\Delta t} - 1}$$

gegeben.

Man beachte, dass im Gegensatz zur auf dem Wert basierenden Approximation der Erwartungswert der Δ -Approximation unabhängig von der Volatilität der Aktie σ ist. Im Gegensatz dazu ist jedoch die Allokation von der Volatilität abhängig. Dies lässt sich ähnlich interpretieren wie der Unterschied zwischen (beschränkter) CPPI und OBPI. Während bei der einen (OBPI) die Investition von der angenommenen Volatilität abhängig ist und dafür der Endwert eine Funktion des Aktienkurses, ist bei der anderen die Handlungsanweisung unabhängig von der Volatilität, jedoch ist die Auszahlung von der Volatilität abhängig.

Beweis Korollar 4.2.1:

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{V}_T^T] &= e^{rT}V_0 + e^{rT}m(V_0 - G_0) \sum_{i=0}^{n-1} e^{-m(r+\frac{(m-1)}{2}\sigma^2)i\Delta t} E\left[\left(\frac{S_{t_i}}{S_0}\right)^m\right] \left(E\left[\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}\right] e^{-r\Delta t} - 1\right) \\
 &= e^{rT}V_0 + e^{rT}m(V_0 - G_0) \sum_{i=0}^{n-1} \left(e^{-m(r+\frac{(m-1)}{2}\sigma^2)\Delta t}\right)^i \left(e^{(m\mu+\frac{m(m-1)}{2}\sigma^2)\Delta t}\right)^i \left(e^{(\mu-r)\Delta t} - 1\right) \\
 &= e^{rT}V_0 + e^{rT}m(V_0 - G_0) \left(e^{m(\mu-r)T} - 1\right) \frac{e^{(\mu-r)\Delta t} - 1}{e^{m(\mu-r)\Delta t} - 1}
 \end{aligned}$$

■

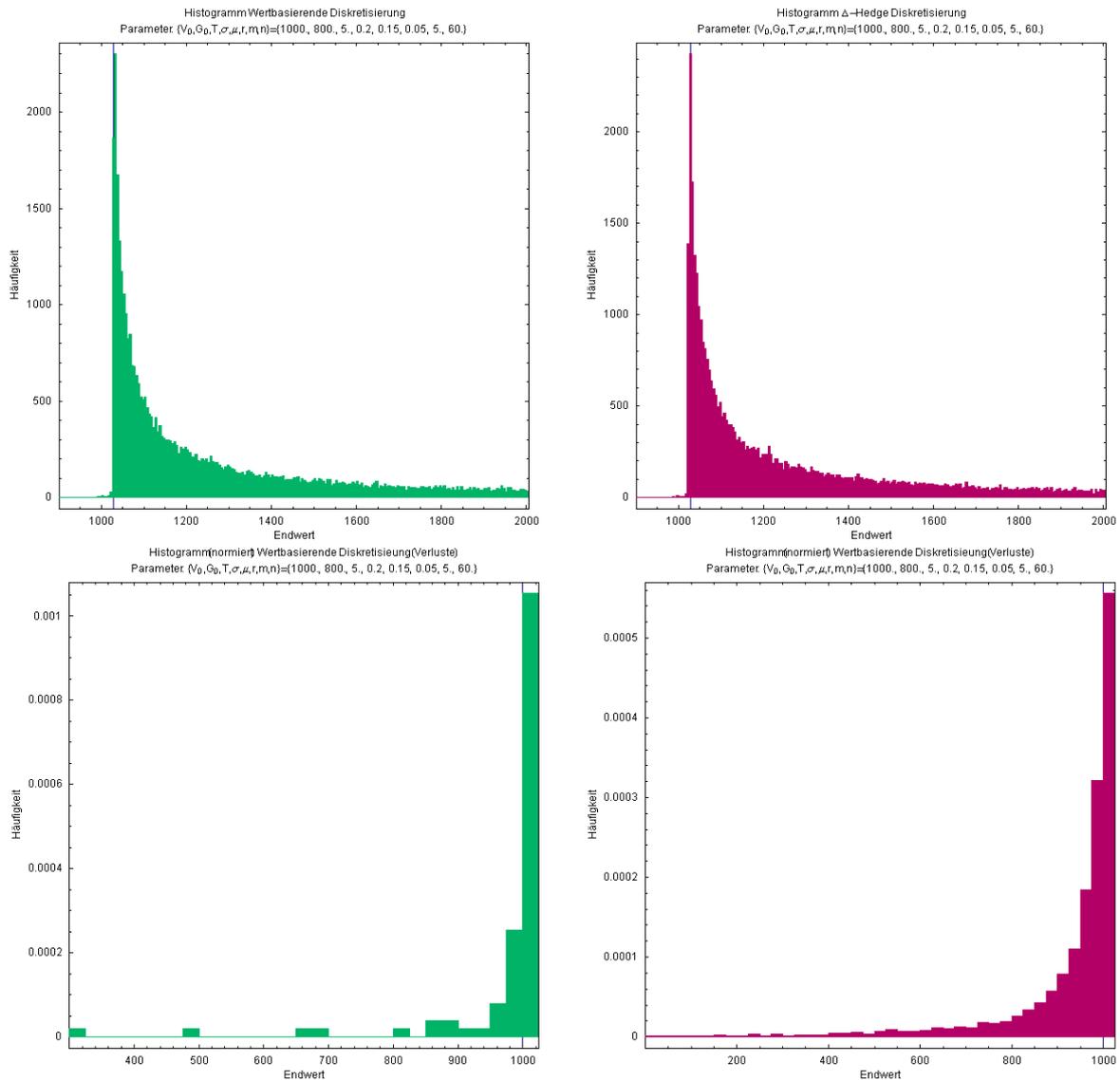


Abbildung 4.4: Histogramm für die Verteilung (gesamt und auf Verlust beschränkt) des Endwertes der Δ -Approximation und der Wert-basierenden Approximation (50.000 Pfade)

Eine Möglichkeit um beide Diskretisierungen bezüglich der auf dem Ausfall basierende Risikomaße zu vergleichen, besteht in der Simulation der Δ -Approximation. Es sei nochmals

darauf hingewiesen, dass die unbeschränkte, einfache CPPI eine sehr hohe Kurtosis besitzt, was eine Simulation üblicherweise ungenau werden lässt, da seltene Extremereignisse die Schätzung stark beeinträchtigen. Dies war einer der Gründe, warum bislang auf Simulationen verzichtet wurde. Die Abbildung 4.4 und Tabelle 4.4 gibt die simulierten Ergebnisse beider Approximationen für einen Anlagehorizont von fünf Jahren und monatlichen Anpassungen an. Zur Einschätzung der Güte der Simulation sind zusätzlich, soweit möglich, die exakten Werte angegeben.¹⁵ Es zeigt sich, dass die Δ -Approximation ein weit größeres Verlustrisiko besitzt. Während der höhere erwartete Ausfall durchaus zu erwarten war, da die Strategie durch die dauerhaft positive Investitionsquote eine deutlich größere Schwankungsbreite besitzt, fällt auf, dass auch die Ausfallwahrscheinlichkeit deutlich größer ist. Die oben genannte Motivation, durch das Vermeiden des Cash-Locks von zukünftigen Gewinnen zu profitieren und somit möglicherweise einen Wert oberhalb der Garantie zu erzielen, ist offensichtlich irreführend. Die Abbildungen 4.3 zeigen zwar, dass die Δ -Approximation teilweise einen höheren Erwartungswert besitzt. Unter der Annahme, dass die Priorität bezüglich der Einhaltung der Garantie liegt, ist die Approximation insgesamt als ineffektiv abzulehnen.

Risikomaß	Wertbasierend		Δ -Approximation	
	simuliert	analytisch	simuliert	analytisch
P^{SF}	0,21%	0,21%	11,74%	
ESF (unbedingt)	0,09	0,12	19,73	
ESF (bedingt)	40,93	56,59	372,4	
Erwartungswert	4017	4031	3916	4108

Parameter: $V_0 = 1000$, $G_0 = 800$, $T = 5$, $\sigma = 20\%$, $\mu = 15\%$, $r = 5\%$, $n = 60$

Tabelle 4.4: Simulierte Risikomaße der Δ -Approximation und der Wert-basierenden Diskretisierung (50.000 Pfade)

¹⁵Prinzipiell bieten sich diese Werte als Kontrollvariate im Rahmen der Varianz-Reduktion einer Monte-Carlo-Simulation (vgl. Glasserman (2004)). Da die Ergebnisse eindeutig sind, haben wir darauf verzichtet.

4.3 Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI

An dieser Stelle wollen wir eine Approximation für die Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI in diskreter Zeit angeben. Wir nehmen wiederum an, dass die Handelszeitpunkte äquidistant verteilt sind, d.h. Handel erfolgt zu den Zeitpunkten $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ mit $t_i = i \cdot \frac{T}{n}$.

Die Approximation beruht auf zwei Überlegungen. Zum einen, falls die obere Grenze für die Investitionsquote erreicht wurde, handelt es sich bei der stetigen Strategie um eine Buy-and-Hold-Strategie. Unter der Annahme, dass der im Abschnitt 3.1 definierte Prozess X_t zwischen zwei Zeitpunkten t_k und t_{k+1} größer als Null ist, entspricht die stetige Strategie also direkt einer diskreten Version.

Zum anderen gilt, sofern die maximale Investitionsquote zum Zeitpunkt t_k nicht erreicht ist, dass die Strategie der einfachen CPPI entspricht. In diesem Fall finden die Überlegungen aus dem Abschnitt 4.1 Anwendung. Wie wir gesehen haben, konvergiert die diskrete Strategie gegen die stetige Strategie. Insbesondere unter der Bedingung, dass der Cushion zum Zeitpunkt t_k positiv ist, lässt sich somit die diskrete einfache Strategie durch die stetige einfache Strategie approximieren. Es sei daran erinnert, dass für den zeitdiskreten Cushion \tilde{C}^τ unter der Bedingung $\tilde{C}_{t_k}^\tau > 0$ gilt

$$\tilde{C}_{t_{k+1}}^\tau = \tilde{C}_{t_k}^\tau e^{r\frac{T}{n}} \left(1 + m \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} e^{-r\frac{T}{n}} - 1 \right) \right) .$$

Eine Anwendung der Bernoullischen Ungleichung ergibt

$$\leq \tilde{C}_{t_k}^\tau e^{r\frac{T}{n}} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \right)^m .$$

Auf der anderen Seite gilt für die einfache Strategie nach den Überlegungen in Abschnitt 2.1

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{t_{k+1}} &= \tilde{C}_{t_k} e^{r\frac{T}{n}} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} e^{-(r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}} \right)^m \\ &\leq \tilde{C}_{t_k} e^{r\frac{T}{n}} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \right)^m . \end{aligned}$$

Somit lässt sich die Differenz zwischen stetiger und diskreter Strategie für $\tilde{C}_{t_k} = \tilde{C}_{t_k}^\tau$ durch

$$\tilde{C}_{t_{k+1}}^\tau - \tilde{C}_{t_k}^\tau e^{r\frac{T}{n}} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \right)^m \leq \tilde{C}_{t_{k+1}}^\tau - \tilde{C}_{t_{k+1}} \leq \tilde{C}_{t_k}^\tau e^{r\frac{T}{n}} \left(\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \right)^m - \tilde{C}_{t_{k+1}}$$

abschätzen.

Insgesamt erscheint es nahe liegend, den diskreten Prozess durch den zeitstetigen im Zeitpunkt t_k zu approximieren, unter der Annahme, dass bis einschließlich t_k kein Ausfall erfolgt ist. Es bezeichnen C_t^τ bzw. V_t^τ den Cushion- bzw. Wertprozess der diskreten beschränkten CPPI und C_t bzw. V_t den Cushion- bzw. Wertprozess der stetigen beschränkten CPPI. Dies führt uns zu

Lemma 4.3.1 *Unter den obigen Annahmen gilt für die Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI in diskreter Zeit*

$$P_{k+1}^{LSF} := P(V_{t_{k+1}}^\tau \leq G_{t_{k+1}} | V_{t_k}^\tau > G_{t_k}) \approx \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \frac{P(V_{t_k} \leq x)}{x\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \phi\left(\frac{\ln\frac{G_{t_k}}{x} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}}\right) dx$$

Dabei bezeichnet $\phi(x)$ die Dichte der Standardnormalverteilung.

Beweis : vgl. Appendix ■

Mit diesem Lemma und den Darstellungen der Verteilung der beschränkten CPPI als Laplace-Transformationen lässt sich die Ausfallwahrscheinlichkeit nun ebenfalls explizit als Laplace-Transformation darstellen. Sei dazu die lokale Shortfall-Wahrscheinlichkeit der einfachen CPPI durch $\tilde{P}^{LSF} = \mathcal{N}(d_2)$ mit $d_2 = \frac{\ln\frac{m-1}{m} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ wie in Lemma 4.1.2 bestimmt und $\Delta t = \frac{T}{n}$. Des Weiteren sei die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Portfolio, das vollständig in die risikobehaftete Anlage investiert ist, durch $Q^{LSF} = \mathcal{N}(d_0)$ mit $d_0 = \frac{\ln\frac{G_0}{V_0} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ gegeben. Die Ausfallwahrscheinlichkeit Q^{LSF} folgt direkt aus der Verteilung des Aktienkurses. Mit Korollar 3.1.4 für die Verteilung der beschränkten CPPI in stetiger Zeit ergibt sich

Theorem 4.3.2 *Die Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI in diskreter Zeit ist für $k > 1$ näherungsweise durch*

$$P_{k+1}^{LSF} = \tilde{P}^{LSF} - \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_2(\lambda)} \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}} e^{\frac{\tilde{K}_2(\lambda)^2}{2}\Delta t - \frac{\tilde{K}_2(\lambda)(\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}\Delta t} \mathcal{N}(d_2(\tilde{K}_2)) \right\}$$

falls $m(V_0 - G_0) \leq V_0$ und

$$\begin{aligned} P_{k+1}^{LSF} = & Q^{LSF} \\ & + \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{K_3(\lambda)}{K_4(\lambda)} \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{K_4(\lambda)}{\sigma}} e^{\frac{K_4(\lambda)^2}{2}\Delta t - \frac{K_4(\lambda)(\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}\Delta t} (\mathcal{N}(d_2(K_4)) - \mathcal{N}(d_0(K_4))) \right. \\ & + \left(\frac{m}{m-1}\right)^{\frac{K_6(\lambda)}{\sigma}} e^{\frac{K_6(\lambda)^2}{2}\Delta t - \frac{K_6(\lambda)(\mu-r-\frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma}\Delta t} \\ & \left. \left(\frac{K_5(\lambda)}{K_6(\lambda)} \mathcal{N}(d_2(K_6)) + \frac{K_3(\lambda)e^{2x_0\sqrt{\theta_0^2+2\lambda}}}{K_6(\lambda)} \mathcal{N}(d_0(K_6)) \right) \right\} \end{aligned}$$

falls $m(V_0 - G_0) > V_0$ gegeben. Dabei seien $d_2(x) := \frac{\ln \frac{m-1}{m} - (\mu - r - x\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d_0(x) = \frac{\ln \frac{G_0}{V_0} - (\mu - r - x\sigma - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Beweis : vgl. Appendix ■

In Analogie zum Abschnitt 4.1 ergibt sich die (gesamte) Ausfallwahrscheinlichkeit aus den lokalen Ausfallwahrscheinlichkeiten.

Korollar 4.3.3 Die Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten, zeitdiskreten CPPI ist durch

$$P^{SF} = \sum_{i=1}^n P_i^{LSF} \prod_{j=1}^{i-1} (1 - P_j^{LSF})$$

mit $P_1^{LSF} = P^{LSF}$, falls $m(V_0 - G_0) \leq V_0$ bzw. $P_1^{LSF} = Q^{LSF}$ falls $m(V_0 - G_0) > V_0$, gegeben.

Beweis : Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit für keinen Ausfall durch

$$1 - P^{SF} = \prod_{i=1}^n (1 - P_i^{LSF})$$

gegeben ist. Ausmultiplizieren ergibt

$$\begin{aligned} &= \prod_{i=1}^{n-1} (1 - P_i^{LSF}) - P_n^{LSF} \prod_{i=1}^{n-1} (1 - P_i^{LSF}) \\ &= \dots = 1 - \sum_{i=1}^n P_i^{LSF} \prod_{j=1}^{i-1} (1 - P_j^{LSF}) \end{aligned}$$

Die anfänglichen lokalen Ausfallwahrscheinlichkeiten bestimmen sich aus der Startbedingung der Strategie, d.h. ob anfänglich einer einfachen CPPI oder einer Buy-and-Hold-Strategie gefolgt wird. ■

Abbildung 4.5 vergleicht die Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten mit der Ausfallwahrscheinlichkeit der einfachen CPPI. Im Falle einer gerade 100%igen anfänglichen Investition in die Aktie (rechts) sieht man, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit der beschränkten CPPI in diskreter Zeit unabhängig von der Anzahl der Handelstage deutlich geringer ist als bei der einfachen CPPI. Die linke Abbildung zeigt, dass dieser Effekt unabhängig vom Multiplier zu beobachten ist und der Effekt für große Multiplier deutlicher wird. Im Gegensatz zur einfachen CPPI bedeutet ein großer Multiplier, dass die Strategie weitestgehend einer Buy-and-Hold-Strategie entspricht. Für diese ist die Ausfallwahrscheinlichkeit aber deutlich geringer als die Ausfallwahrscheinlichkeit der einfachen CPPI.

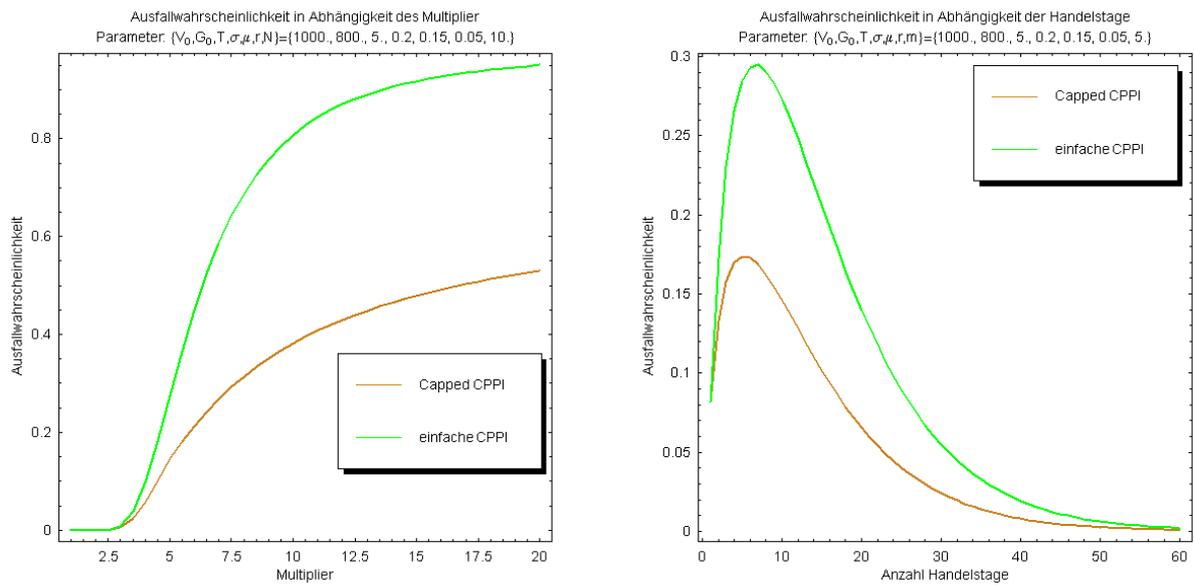


Abbildung 4.5: Ausfallwahrscheinlichkeit beschränkte CPPI in Abhängigkeit vom Multiplier (10 Handelstage) und den Handelstagen ($m = 5$)

Analog ließen sich nun auch die weiteren Risikomaße des Abschnitts 4.1 approximativ für die beschränkte CPPI herleiten. An der hier erfolgten Argumentation wird aber bereits ersichtlich, dass die dort hergeleiteten Maße bezüglich des Ausfallrisikos eine obere Schranke für die beschränkte CPPI in diskreter Zeit darstellen.

Kapitel 5 - Fazit

Im Rahmen dieser Arbeit wurde versucht eine möglichst analytische Beschreibung verschiedener Modifikationen der Constant Proportion Portfolio Insurance im Rahmen des Black-Scholes-Modells vorzunehmen. Im Zuge dessen wurden ökonomisch sinnvolle Risikomaße vorgestellt und mathematische Eigenschaften der geometrischen Brownschen Bewegung hergeleitet.

Die Modifikationen leiteten sich aus drei unterschiedlichen Ansätzen und Kritikpunkten an der einfachen CPPI hervor. Zum einen wurden Wachstumsraten der Garantie betrachtet, die sich von der risikolosen Rendite unterscheiden. Diese Modifikation führte zum einen zur CPPI mit konstantem Floor und zum anderen zur CPPI mit Floor-Anpassung. Im ersten Fall ist das Wachstum weiterhin deterministisch. Im zweiten Fall passt sich die Garantie an den maximal erreichten Wert an. Eine zweite Modifikation bestand in der Betrachtung der CPPI unter Kreditbeschränkungen, was zum einen ebenfalls eine Motivation für die CPPI mit Floor-Anpassung lieferte und zum anderen zur beschränkten CPPI führte, die sich als Kreuzung einer Buy-and-Hold-Strategie und einer einfachen CPPI auffassen lässt. Ein letzter Punkt bestand in der Betrachtung der CPPI unter Annahme diskreter Handelszeitpunkte und einer geeigneten Definition der CPPI in diesem zeitdiskreten Rahmen.

Es zeigte sich, dass man, ähnlich wie bei Optionen, nicht allgemein von der CPPI Strategie sprechen kann, sondern je nach Modifikation verschiedenste Merkmale auftreten, die sich häufig mit den Merkmalen entsprechender Optionen identifizieren lassen. Ein erstes Beispiel stellte die einfache CPPI dar, welche sich als Power-Kontrakt darstellen ließ.

Für die CPPI mit konstantem Floor ergab sich, dass sie Analogien zu Asiatischen Optionen besitzt, was sich in der Bildung eines durchschnittlichen Einstandskurses widerspiegelt. Ein wesentliches Ergebnis bestand darin, dass durch die konstante Garantie ein besseres Investitionsverhalten der Strategie erreicht wurde. Auf den Ergebnissen aufbauend haben wir zusätzlich gezeigt, wie sich die Einzahlung einer periodischen Prämie in die einfache CPPI behandeln lässt. Weiterhin konnten wir für die CPPI mit Floor-Anpassung zeigen, dass das Verhalten der Garantie demjenigen einer Lookback-Option entspricht. Ein Vergleich mit einer europäischen Option erschien somit ausschließlich für die beschränkte CPPI sinnvoll. Im Zuge der Interpretation der Auszahlungen als Optionen wurde deutlich, dass im Gegensatz zu den optionsbasierten Strategien bei der CPPI und ihren Modifikationen keine anfängliche Prämie zu zahlen ist, sondern dass diese kontinuierlich über die Laufzeit hinweg anfällt. Dadurch ist es für die CPPI im Gegensatz zur OBPI auch nicht notwendig einen festen Anlagehorizont festzulegen. Die CPPI ist in diesem Sinne Zeit-invariant. Während bei der einfachen CPPI, der CPPI mit konstantem Floor und der CPPI mit Floor-Anpassung die

Prämie dauerhaft zu zahlen ist, was zu einem Diskont der Aktie und damit auch der Option führt, ist das Prämienverhalten der beschränkten CPPI stochastisch. Die Prämie bestimmte sich aus der Dauer, während der gemäß den Vorschriften der einfachen CPPI gehandelt wurde. Falls der Hebel bzw. Multiplier hinreichend groß gewählt wird, lässt sich somit im Gegensatz zur einfachen OBPI auch eine 100%-ige Partizipation an den Kurszuwächsen der Aktie erzielen. Da die beschränkte CPPI mit wachsendem Multiplier als Approximation der Stop-Loss-Strategie aufgefasst werden kann, ergab sich eine Interpretation der beschränkten CPPI als Kreuzung zwischen der einfachen OBPI und der Stop-Loss-Strategie. Im Vergleich zur Stop-Loss-Strategie ergab sich dabei sowohl eine höhere erwartete Auszahlung als auch ein geringeres Cash-Lock-Risiko. Ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal zwischen beschränkter CPPI und OBPI ergab sich bei langen Anlagehorizonten. Während die OBPI anfänglich nur geringe Investitionsquoten besitzt und bei Kursgewinnen der Aktie nur langsam Kapital aufbaut, erfolgt dies bei der CPPI bezüglich der vorgeschlagenen Wahl des Hebels bereits zu Laufzeitbeginn. Es zeigte sich, dass es für die Effektivität der CPPI wesentlich ist, dabei die Beziehung zwischen Multiplier und Garantie auf Seiten der Strategieparameter und Rendite und Volatilität auf Seiten der Modellparameter zu beachten. Zur Sicherung einer langfristig hohen Investitionsquote und damit auch zur Sicherung einer über der risikolosen Anlage liegenden Rendite ist es notwendig, dass die Beziehung $m < \frac{2(\mu-r)}{\sigma^2}$ gilt. Um andererseits eine 100%-ige Partizipation zu erzielen, ergab sich als Bedingung an den Multiplier $m > \frac{V_0}{V_0-G_0}$. Sofern beide Bedingungen erfüllt sind, konnte die Effektivität der beschränkten CPPI unter Betrachtung der Risikomaße gezeigt werden.

Andererseits zeigten die Überlegungen zur CPPI mit konstantem Floor, dass durch den Verzicht der risikolosen Verzinsung der Garantie auch bei zwischenzeitlichen Verlusten bereits in kurzen Zeiträumen wieder ausreichend hohe Investitionsquoten erzielt werden können. In Verbindung mit einer CPPI mit Floor-Anpassung sollte auch hier ein entsprechendes Wohlergehen der Strategie beobachtbar sein. Eine Untersuchung müsste jedoch im Rahmen einer Simulationsstudie vorgenommen werden, da die Pfadabhängigkeit für eine analytische Beschreibung zu groß ist, und bietet die Möglichkeit für weitere Untersuchungen. Im Gegensatz zur einfachen CPPI sollte die Simulation einer beschränkten CPPI hinreichend genaue Ergebnisse liefern, da wir gezeigt haben, dass die höheren Momente der beschränkten CPPI deutlich kleiner als die der unbeschränkten sind.

Während die betrachteten Modifikationen im Rahmen einer zeitstetigen Strategie zu jedem Zeitpunkt den gewünschten Floor garantieren, ergibt sich durch die Beschränkung auf diskrete, deterministische Handelszeitpunkte das Risiko eines Ausfalls, d.h. eines Wertes unterhalb des Floors. Die Bedeutung dieses Ausfallrisikos ergibt sich aus praktischer Sicht vor

allem aus dem folgenden Grund. Investmentfonds, die explizit gemäß einer CPPI-Strategie handeln und zusätzlich den Investoren eine entsprechende Kapitalgarantie geben, gewähren den Investoren damit implizit eine Option. Eine Bewertung dieser Option kann mit den vorliegenden Ergebnissen direkt vorgenommen werden, indem man den erwarteten Ausfall unter dem Martingalmaß bestimmt. Der Vorteil der CPPI in ihrer ursprünglichen Definition in diesem zeitdiskreten Rahmen gegenüber optionsbasierten Strategien basiert auf verschiedenen Gründen. Die Anwendung erfordert ausschließlich den Wert der Strategie am Handelstag und benötigt keine Kenntnis der Volatilität der Aktie. Insbesondere ist die Anwendung der Strategie im Gegensatz zum Delta-Hedge einer optionsbasierten Strategie unabhängig von den Modellparametern. Des Weiteren ließen sich die entsprechenden Risikomaße leicht aus der Unabhängigkeit der Zuwächse bestimmen. Um diese Vorteile zu verdeutlichen haben wir zusätzlich einen Delta-Hedge der CPPI basierend auf ihren Optionseigenschaften hergeleitet. Es zeigte sich, dass die ursprüngliche Definition neben der erwähnten Einfachheit auch ein geringeres Ausfallrisiko besitzt. Insgesamt ergab sich aus den Betrachtungen die Notwendigkeit einer weiteren Bedingung an die Strategie- und Modellparameter, die in der Spezifizierung eines maximalen Ausfallrisikos lag. Anhand von Beispielen haben wir jedoch gesehen, dass bereits eine vergleichsweise geringe Handelsfrequenz ausreicht, um das Ausfallrisiko hinreichend klein zu halten. Abschließend konnten wir anhand einer Approximation der beschränkten CPPI zeigen, dass das Ausfallrisiko einer beschränkten CPPI deutlich kleiner ist, und somit die bezüglich der einfachen CPPI erzielten Ergebnisse als obere Grenzen für das Ausfallrisiko betrachten.

Insgesamt zeigte sich, dass mit CPPI-Strategien eine ähnliche Vielzahl von Eigenschaften wie bei optionsbasierten Strategien erzielbar sind. Aufgrund ihrer vergleichsweise einfachen Allokation bilden sie dabei eine sinnvolle Alternative, vor allem unter dem Hintergrund des Modellrisikos, ausgedrückt durch die Missspezifikation der Parameter und möglichen Handelsbeschränkungen, und einer möglichen Unsicherheit über den Anlagehorizont.

Anhang A - Beweise

A.1 Einige Integralformeln

Lemma A.1.1 Für alle $c, k \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $x \geq 0$ gilt:

$$\int x^{n-1} \phi(c + k \ln x) dx = \frac{1}{k} e^{\frac{n(n-2ck)}{2k^2}} \mathcal{N}\left(c + k \ln x - \frac{n}{k}\right) \quad (\text{A.1.1})$$

Beweis : Differenzieren der rechten Seite in A.1.1 ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{k} e^{\frac{n(n-2ck)}{2k^2}} \mathcal{N}\left(c + k \ln x - \frac{n}{k}\right) \right) &= \frac{1}{x} e^{\frac{n(n-2ck)}{2k^2}} \phi\left(c + k \ln x - \frac{n}{k}\right) \\ &= \frac{1}{x} e^{\frac{n(n-2ck)}{2k^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{k^2} - 2\frac{n}{k}(c+k \ln x)\right)} \phi(c + k \ln x) \\ &= x^{n-1} \phi(c + k \ln x) \end{aligned}$$

■

Lemma A.1.2 Für alle $c, k \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$ und $x \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int n x^{n-1} \mathcal{N}(c + k \ln x) dx \\ &= x^n \mathcal{N}(c + k \ln x) - e^{\frac{n(n-2ck)}{2k^2}} \mathcal{N}\left(c + k \ln x - \frac{n}{k}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.2})$$

Beweis : Folgt direkt aus partieller Integration und Lemma A.1.1. ■

Lemma A.1.3 Für alle $c, d, k \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$ und $v \geq x$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int \frac{v^n (c + d + k \ln(v-x))}{v-x} \phi(c + k \ln(v-x)) dv \\ &= -\frac{v^n}{k} \phi(c + k \ln(v-x)) \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{x^i}{k} \left(d + \frac{n-i}{k}\right) e^{\frac{(n-i)((n-i)-2ck)}{2k^2}} \mathcal{N}\left(c + k \ln(v-x) - \frac{n-i}{k}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.3})$$

Beweis : Folgt nach einfachen, aber umfangreichen Umformungen aus der Differenzierung der rechten Seite. ■

Lemma A.1.4 Für alle $b, c, x, y \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ und $0 \leq \tau \leq t$ gilt:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{cb} \frac{(b+x)(b+y)}{2\pi \sqrt{\tau^3(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(b+x)^2}{2(t-\tau)} - \frac{(b+y)^2}{2\tau}} db \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2t}((x-y)^2 + c(2x\tau + 2y(t-\tau) - c\tau(t-\tau)))} \\ &\quad \left(\frac{t - (x-y)^2 + c(x-y)(t-2\tau) + c^2\tau(t-\tau)}{\sqrt{t^5}} \mathcal{N}(-g) + \frac{x(t-\tau) + y\tau + c\tau(t-\tau)}{t^2 \sqrt{\tau(t-\tau)}} \phi(g) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1.4})$$

mit

$$g = \frac{x\tau + y(t-\tau) - c\tau(t-\tau)}{\sqrt{\tau t(t-\tau)}}$$

Beweis : Sei $g(b) := \frac{bt+x\tau+y(t-\tau)-c(t-\tau)\tau}{\sqrt{(t-\tau)\tau t}}$. Umformen von A.1.4 ergibt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{c \cdot b} \frac{(b+x)(b+y)}{2\pi\sqrt{\tau^3(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(b+x)^2}{2(t-\tau)} - \frac{(b+y)^2}{2\tau}} db \\ &= \int_0^\infty \frac{(b+x)(b+y)}{2\pi\sqrt{\tau^3(t-\tau)^3}} e^{-\frac{(x-y)^2+c(2x\tau+2y(t-\tau)-c(t-\tau)\tau)}{2t}} e^{-\frac{1}{2}g^2(b)} db \text{quad.} \end{aligned}$$

Durch Substitution ergibt sich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x-y)^2+c(2x\tau+2y(t-\tau)-c(t-\tau)\tau)}{2t}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^3}} \int_{g(0)}^\infty \alpha^2 e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} d\alpha \right. \\ & \quad + \frac{(x-y)(t-2\tau) + 2c(t-\tau)\tau}{t^2\sqrt{\tau(t-\tau)}} \int_{g(0)}^\infty \alpha e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} d\alpha \\ & \quad \left. + \frac{-(x-y)^2 + (x-y)c(t-2\tau) + c^2(t-\tau)\tau}{\sqrt{t^5}} \int_{g(0)}^\infty e^{-\frac{1}{2}\alpha^2} d\alpha \right) \end{aligned}$$

mit $g = g(0)$, $\int \phi(x)dx = \mathcal{N}(x)$, $\int x\phi(x)dx = -\phi(x)$ und $\int x^2\phi(x)dx = \mathcal{N}(x) + x\phi(x)$ folgt

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2+c(2x\tau+2y(t-\tau)-c(t-\tau)\tau)}{2t}} \left(\frac{1}{\sqrt{t^3}} (1 - \mathcal{N}(g) + g\phi(g)) \right. \\ & \quad + \frac{(x-y)(t-2\tau) + 2c(t-\tau)\tau}{t^2\sqrt{\tau(t-\tau)}} \phi(g) \\ & \quad \left. + \frac{-(x-y)^2 + (x-y)c(t-2\tau) + c^2(t-\tau)\tau}{\sqrt{t^5}} (1 - \mathcal{N}(g)) \right) . \end{aligned}$$

Weitere Umformungen ergeben die Behauptung. ■

A.2 Beweise zur OBPI

Beweis Proposition 1.4.5 : Umformen, Einsetzen der Verteilung für den Aktienkurs und Anwendung von Lemma A.1.1 ergibt

$$\begin{aligned}
E[(V_T)^n] &= E[(G + \alpha(S_T - K(\alpha))^+)^n] \\
&= E\left[\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} G^{n-i} (\alpha(S_T - K(\alpha))^+)^i\right] \\
&= G^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} G^{n-i} \alpha^i \int_{K(\alpha)}^{\infty} (s - K(\alpha))^i P[S_T \in ds] \\
&= G^n + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} G^{n-i} \alpha^i \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} (-K(\alpha))^{i-j} \\
&\quad \int_{K(\alpha)}^{\infty} \frac{s^{i-1}}{\sigma\sqrt{T}} \phi\left(\frac{\ln s - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\
&= G^n + \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i \binom{n}{i} \binom{i}{j} G^{n-i} \alpha^i (-K(\alpha))^{i-j} e^{(\mu + \frac{i-1}{2}\sigma^2)jT} \\
&\quad \mathcal{N}\left(\frac{-\ln K(\alpha) + (\mu + \frac{2j-1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

was der Behauptung entspricht. ■

Beweis Korollar 1.4.4 : Aufgrund der Monotonie zwischen Partizipationsrate und -level reicht es aus, die Monotonie im Partizipationslevel zu beweisen. Durch Einsetzen der Anfangsbedingung für α lässt sich der Erwartungswert für die OBPI wie folgt darstellen:

$$E[V_T] = G + C_0 e^{rT} \frac{e^{\mu T} \mathcal{N}(d_+(\mu)) - K(\alpha) \mathcal{N}(d_-(\mu))}{e^{rT} \mathcal{N}(d_+(r)) - K(\alpha) \mathcal{N}(d_-(r))}$$

mit $d_{\pm}(x) = \frac{-\ln K(\alpha) + (x \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}$. Als hinreichende Bedingung für die Monotonie folgt

$$\frac{\partial E[V_T]}{\partial K(\alpha)} \geq 0$$

Mit $\frac{\partial e^{xT} \mathcal{N}(d_+(x)) - K(\alpha) \mathcal{N}(d_-(x))}{\partial K(\alpha)} = -\mathcal{N}(d_-(x))$ ergeben elementare Umformungen als äquivalente Bedingung

$$e^{rT} \frac{\mathcal{N}(d_+(r))}{\mathcal{N}(d_-(r))} \leq e^{\mu T} \frac{\mathcal{N}(d_+(\mu))}{\mathcal{N}(d_-(\mu))}$$

für $\mu > r$. Mit $f(x) := e^{xT} \frac{\mathcal{N}(d_+(x))}{\mathcal{N}(d_-(x))}$ ergibt sich hierfür als hinreichende Bedingung

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \geq 0 \quad .$$

Die Ableitung lässt sich wie folgt darstellen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x)}{\partial x} &= Tf(x) + e^{xT} \frac{\sqrt{T}}{\sigma} \frac{\phi(d_+(x))\mathcal{N}(d_-(x)) - \phi(d_-(x))\mathcal{N}(d_+(x))}{(\mathcal{N}(d_-(x)))^2} \\ &= \frac{\mathcal{N}(d_+(x))}{\mathcal{N}(d_-(x))} \frac{\sqrt{T}}{\sigma} e^{xT} \left(\sigma\sqrt{T} + \frac{\phi(d_+(x))}{\mathcal{N}(d_+(x))} - \frac{\phi(d_-(x))}{\mathcal{N}(d_-(x))} \right)\end{aligned}$$

Der Term außerhalb der Klammer ist sicherlich positiv, so dass es zu zeigen ausreicht, dass auch der Term innerhalb der Klammer positiv ist, also

$$\begin{aligned}\sigma\sqrt{T} + \frac{\phi(d_-(x) + \sigma\sqrt{T})}{\mathcal{N}(d_-(x) + \sigma\sqrt{T})} - \frac{\phi(d_-(x))}{\mathcal{N}(d_-(x))} &\stackrel{!}{\geq} 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{\phi(d_-(x) + \sigma\sqrt{T})}{\mathcal{N}(d_-(x) + \sigma\sqrt{T})} - \frac{\phi(d_-(x))}{\mathcal{N}(d_-(x))}}{\sigma\sqrt{T}} &\geq -1\end{aligned}$$

Mit $H(z) := \frac{\phi(z)}{\mathcal{N}(z)}$ ist dies insbesondere dann erfüllt, falls gilt

$$H'(z) = -H(z)(z + H(z)) \geq -1 \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

Mit geeigneten Ungleichungen für die Mill's Ratio¹ folgt

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} -H(z)(z + H(z)) &= -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\phi(z)}{\mathcal{N}(z)} \underbrace{\left(z + \frac{\phi(z)}{\mathcal{N}(z)} \right)}_{\geq 0} \\ &\geq -\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2 + 1}{|z|} \left(z + \frac{z^2 + 1}{|z|} \right) = -1\end{aligned}$$

Mit $H''(z) = H(z)((z + H(z))(z + 2H(z)) - 1) > 0$ für alle $z \in \mathbb{R}$ folgt die Behauptung.² ■

¹Für $x > 0$ gilt:

$$\frac{x}{x^2 + 1} \phi(x) \leq 1 - \mathcal{N}(x) \leq \frac{1}{x} \phi(x)$$

vgl. z.B. Gordon (1941). Für $x < 0$ folgt aus der Symmetrie

$$\frac{|x|}{x^2 + 1} \phi(x) \leq \mathcal{N}(x) \leq \frac{1}{|x|} \phi(x)$$

²Mit $H(z) > 0$ gilt offensichtlich $H''(z) > 0$ für alle $|z| > 1$. Für $|z| \leq 1$ ergeben die Abschätzungen $\mathcal{N}(z) \leq \mathcal{N}(0) + z\phi(z)$ für $-1 \leq z \leq 0$ und $\mathcal{N}(z) < \mathcal{N}(0) + z\phi(0)$ für $0 < z \leq q$ die Abschätzung

A.3 Beweise zur CPPI mit konstantem Floor

Beweis Proposition 2.2.2: Es bezeichne V_t den Wert der CPPI mit konstanter Garantie und \tilde{V}_t den Wert der einfachen CPPI mit gleicher anfänglicher Garantie. Äquivalenzumformungen ergeben

$$\begin{aligned}
& \frac{mC_t}{V_t} > \frac{m\tilde{C}_t}{\tilde{V}_t} \\
\Leftrightarrow & mC_t \tilde{V}_t > m\tilde{C}_t V_t \\
\Leftrightarrow & mC_t (\tilde{G}_t + \tilde{C}_t) > m\tilde{C}_t (G + C_t) \\
\Leftrightarrow & m \left(\tilde{C}_t + \tilde{C}_t r G \int_0^t \frac{1}{\tilde{C}_s} ds \right) (\tilde{G}_t + \tilde{C}_t) > m\tilde{C}_t \left(G + \tilde{C}_t + \tilde{C}_t r G \int_0^t \frac{1}{\tilde{C}_s} ds \right) \\
\Leftrightarrow & m \left(1 + r G \int_0^t \frac{1}{\tilde{C}_s} ds \right) (Ge^{rt} + \tilde{C}_t) > m \left(G + \tilde{C}_t + \tilde{C}_t r G \int_0^t \frac{1}{\tilde{C}_s} ds \right) \\
\Leftrightarrow & m \left(1 + r G \int_0^t \frac{1}{\tilde{C}_s} ds \right) Ge^{rt} > mG \\
\Leftrightarrow & \left(1 + r G \int_0^t \frac{1}{\tilde{C}_s} ds \right) e^{rt} > 1
\end{aligned}$$

Für $r > 0$ gilt letzte Gleichung und somit auch die Behauptung. ■

Beweis Proposition 2.2.3: Mit $\theta := m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2}m^2\sigma^2$ und

$$C_t = e^{\theta t + m\sigma W_t} \left(C_0 + rG \int_0^t e^{-(\theta s + m\sigma W_s)} ds \right)$$

gilt zunächst einmal

$$C_t^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} C_0^{n-i} (rG)^i e^{n(\theta t + m\sigma W_t)} \left(\int_0^t e^{-(\theta s + m\sigma W_s)} ds \right)^i.$$

Aufgrund der Symmetrie der Brownschen Bewegung besitzt der obige Term die gleiche Verteilung wie

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} C_0^{n-i} (rG)^i e^{(-n)(-\theta t + m\sigma W_t)} \left(\int_0^t e^{(-\theta s + m\sigma W_s)} ds \right)^i.$$

Die Anwendung von Korollar 1.3.9 mit $\varsigma \triangleq -n$, $\theta \triangleq -\theta$ und $\sigma \triangleq \sigma m$ ergibt

$$\begin{aligned}
E[C_t^n] &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} C_0^{n-i} (rG)^i E \left[e^{(-n)(-\theta t + m\sigma W_t)} \left(\int_0^t e^{(-\theta s + m\sigma W_s)} ds \right)^i \right] \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} C_0^{n-i} (rG)^i \frac{i!}{m^{2i}\sigma^{2i}} \sum_{j=0}^i c_{j,i}^{(-n - \frac{\theta}{m^2\sigma^2})} e^{(-\theta + \frac{m^2\sigma^2}{2}(-n+j))(-n+j)t} \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!} C_0^{n-i} \left(\frac{rG}{m^2\sigma^2} \right)^i \sum_{j=0}^i c_{j,i}^{(-n - \frac{\theta}{m^2\sigma^2})} e^{(\theta + \frac{m^2\sigma^2}{2}(n-j))(n-j)t}.
\end{aligned}$$
■

Beweis Korollar 2.2.1: Mit Proposition 2.2.3 folgt

$$\begin{aligned} E[C_t] &= \sum_{i=0}^1 \frac{1!}{(1-i)!} C_0^{1-i} \left(\frac{rG}{m^2\sigma^2} \right)^i \sum_{j=0}^i c_{j,i}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} e^{(\theta+\frac{m^2\sigma^2}{2}(1-j))(1-j)t} \\ &= C_0 c_{0,0}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} e^{(\theta+\frac{m^2\sigma^2}{2})t} + \left(\frac{rG}{m^2\sigma^2} \right) \left(c_{0,1}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} e^{(\theta+\frac{m^2\sigma^2}{2})t} + c_{1,1}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} \right). \end{aligned}$$

Mit $c_{0,0}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} = 1$,

$$\begin{aligned} c_{0,1}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} &= \frac{2}{\left(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2}\right)^2 - \left(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2}+1\right)^2} \\ &= \frac{\sigma^2 m^2}{m\mu - (m-1)r} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} c_{1,1}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} &= \frac{2}{\left(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2}+1\right)^2 - \left(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2}\right)^2} \\ &= \frac{-\sigma^2 m^2}{m\mu - (m-1)r} = -c_{0,1}^{(-1-\frac{\theta}{m^2\sigma^2})} \end{aligned}$$

ergibt sich die Behauptung. ■

Für den Beweis von 2.2.4 benötigen wir zunächst ein Lemma, welches die Verteilung des Cushion der CPPI mit konstantem Floor in Beziehung zu einem Term setzt, auf welchen wir die Proposition 1.3.1 bzw. das Korollar 1.3.2 direkt anwenden können.

Lemma A.3.1 Sei $T = \frac{m^2\sigma^2}{4}t$, $\tilde{W}_t = -W_t$ und $\tilde{\theta} := -2\frac{m\mu-(m-1)r-\frac{1}{2}m^2\sigma^2}{m^2\sigma^2}$. Dann gilt

$$C_t \sim e^{-2(\tilde{\theta}T+\tilde{W}_T)} \left(C_0 + \frac{4rG}{m^2\sigma^2} \int_0^T e^{2(\tilde{\theta}s+\tilde{W}_s)} ds \right).$$

Beweis : Nach 2.2.1 ist die Dynamik des Cushion durch

$$\begin{aligned} C_t &= e^{(m\mu-(m-1)r-\frac{1}{2}m^2\sigma^2)t+m\sigma W_t} \left(C_0 + rG \int_0^t e^{-(m\mu-(m-1)r-\frac{1}{2}m^2\sigma^2)s-m\sigma W_s} ds \right) \\ &= e^{-2\left(\frac{\tilde{\theta}m^2\sigma^2}{4}t-\frac{m\sigma}{2}W_t\right)} \left(C_0 rG \int_0^t e^{2\left(\frac{\tilde{\theta}m^2\sigma^2}{4}s-\frac{m\sigma}{2}W_s\right)} ds \right) \end{aligned}$$

gegeben. Aufgrund der Symmetrie bzw. der Skalierungseigenschaft der Brownschen Bewegung und der Substitutionsregel folgt

$$C_t \sim e^{-2(\tilde{\theta}T+\tilde{W}_T)} \left(C_0 + \frac{4}{m^2\sigma^2} rG \int_0^T e^{2(\tilde{\theta}s+\tilde{W}_s)} ds \right)$$

■

Beweis Proposition 2.2.4: Wir betrachten zunächst die Variable auf die bedingt wird. Mit den Definitionen aus dem vorherigen Lemma gilt

$$\begin{aligned}
S_t &= S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \\
&\sim S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t - \frac{2}{m}\tilde{W}_T + \frac{2}{m}\tilde{\theta}T - \frac{2}{m}\tilde{\theta}T} \\
&= S_0 e^{-\frac{2}{m}(\tilde{\theta}T + \tilde{W}_T)} e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 - \frac{1}{m}(m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2}m^2\sigma^2))t} \\
&= S_0 e^{-\frac{2}{m}(\tilde{\theta}T + \tilde{W}_T)} e^{(\frac{m-1}{m}r + \frac{m-1}{2}\sigma^2)t}
\end{aligned}$$

Die Bedingung $S_t = s$ ist also äquivalent zur Bedingung

$$\tilde{\theta}T + \tilde{W}_T = \frac{m}{2} \ln \frac{S_0}{s} + \frac{m-1}{2} \left(r + m \frac{\sigma^2}{2} \right) t =: w(s)$$

und somit nach obigem Lemma

$$P[C_t \in dc | S_t = s] = P \left[g \left(\int_0^T e^{2(\tilde{\theta}s + \tilde{W}_s)} ds \right) \in dc \mid \tilde{\theta}T + \tilde{W}_T = w(s) \right]$$

mit $g(x) := e^{-2w(s)} (C_0 + \frac{4rG}{m^2\sigma^2}x)$. Nach Korollar 1.3.2 ist

$$a_T(w(s), u) du = P \left[\int_0^T e^{2(\tilde{\theta}s + \tilde{W}_s)} ds \in du \mid \tilde{\theta}T + \tilde{W}_T = w(s) \right]$$

die Dichte des Integrals und somit durch Substitution

$$P[C_t \in dc | S_t = s] = (g^{-1}(c))' \cdot a_T(w(s), g^{-1}(c))$$

Einsetzen von $g^{-1}(x) = \frac{m^2\sigma^2}{4rG}(e^{2w(s)}x - C_0)$ und $T = \frac{\sigma^2 m^2}{4}t$ ergibt

$$= \frac{m^2\sigma^2}{4rG} e^{2w(s)} a_{\left(\frac{\sigma^2 m^2}{4}t\right)} \left(w(s), \frac{m^2\sigma^2}{4rG} (e^{2w(s)}c - C_0) \right) .$$

■

A.4 Beweise zur beschränkten CPPI

Beweis Lemma 3.1.3: Sei $f(z)$ die Dichtefunktion einer Zufallsvariablen Z . Wie allgemein bekannt gilt

$$P[h(Z) \in dz] = (h^{-1})'(z) f(h^{-1}(z))$$

für jede monoton wachsende Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Umkehrfunktion h^{-1} .

Angewandt auf den Wertprozess in 3.1.4 und die Zufallsvariable X_t folgt

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{mG_t}{m-1} e^{\sigma x} \\ h^{-1}(x) &= \frac{\ln \frac{(m-1)x}{mG_t}}{\sigma} \\ (h^{-1})'(x) &= \frac{1}{\sigma x} \end{aligned}$$

falls $X_t > 0$ und

$$\begin{aligned} h(x) &= G_t \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{m\sigma x} \right) \\ h^{-1}(x) &= \frac{\ln \frac{(m-1)(x-G_t)}{G_t}}{m\sigma} \\ (h^{-1})'(x) &= \frac{1}{m\sigma(x-G_t)} \end{aligned}$$

für $X_t \leq 0$. Die Behauptung folgt durch Einsetzen. ■

Die beiden nächsten Beweise bestehen im wesentlichen aus dem Integrieren der Dichtefunktion für den Prozess X_t und geeigneten Fallunterscheidungen. Dabei ist zu beachten, dass die Invertierung der Laplace-Transformation dem Lösen des Bromwich-Integrals

$$\mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \{F(\lambda)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\gamma t} F(\lambda) d\lambda$$

für $\gamma > \max_k \Re(z_k)$, mit z_k Singularität von F , entspricht und somit die Integrationsreihenfolge für geeignetes λ vertauscht werden kann. Dies ist insbesondere deswegen zulässig, weil $K_2(\lambda)$ und $K_4(\lambda)$ unbeschränkt monoton wachsend und $K_6(\lambda)$ und $K_8(\lambda)$ unbeschränkt monoton fallend in λ sind und das Bromwich-Integral somit wohldefiniert ist. Im Folgenden verzichten wir auf die Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen den Funktionen K_i und λ und schreiben statt $K_i(\lambda)$ kürzer K_i .

Beweis Korollar 3.1.4: Wir betrachten zunächst den Fall $mC_0 > V_0 \Leftrightarrow X_0 > 0$. Mit

Theorem 1.3.15 und 3.1.2 gilt für $v \leq \frac{mG_t}{m-1}$

$$\begin{aligned}
 P[V_t \leq v] &= P \left[G_t \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{\sigma m X_t} \right) \leq v \right] \\
 &= P \left[X_t \leq \frac{1}{\sigma m} \ln \frac{(v)(v-G_t)}{G_t} \right] \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \int_{-\infty}^{\frac{1}{\sigma m} \ln \frac{(m-1)(v-G_t)}{G_t}} K_1 e^{xK_2} dx \right\} \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{(m-1)(v-G_t)}{G_t} \right)^{\frac{K_2}{\sigma m}} \right\}
 \end{aligned}$$

Für $\frac{m}{m-1}G_t < v \leq V_0 e^{rt} \Leftrightarrow 0 < x \leq x_0$ ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
 &P \left[\frac{m}{m-1}G_t < V_t \leq v \right] \\
 &= P \left[0 < X_t \leq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)v}{mG_t} \right] \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \int_0^{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)v}{mG_t}} K_3 e^{xK_4} + K_5 e^{xK_6} dx \right\} \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{K_3}{K_4} \left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{\frac{K_4}{\sigma}} + \frac{K_5}{K_6} \left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{\frac{K_6}{\sigma}} - \frac{K_3}{K_4} - \frac{K_5}{K_6} \right\}
 \end{aligned}$$

und wegen $\frac{K_1}{K_2} - \frac{K_3}{K_4} - \frac{K_5}{K_6} = 0$ gilt somit für $\frac{m}{m-1}G_t < v \leq V_0 e^{rt}$

$$P[V_t \leq v] = \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{K_3}{K_4} \left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{\frac{K_4}{\sigma}} + \frac{K_5}{K_6} \left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{\frac{K_6}{\sigma}} \right\}$$

Es verbleibt der letzte Fall $v > V_0 e^{rt} \Leftrightarrow x > x_0$. Wiederum betrachten wir zunächst die Wahrscheinlichkeit für das Intervall

$$\begin{aligned}
 &P[V_0 e^{rt} < V_t \leq v] \\
 &= P \left[x_0 < X_t \leq \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)v}{mG_t} \right] \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \int_{x_0}^{\frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)v}{mG_t}} \left(K_5 + e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} K_3 \right) e^{xK_6} dx \right\} \\
 &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{K_5 + e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} K_3}{K_6} \left(\left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{\frac{K_6}{\sigma}} - e^{x_0 K_6} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Mit $\frac{K_3}{K_4} e^{x_0 K_4} - \frac{K_3}{K_6} e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda} + x_0 K_6} = \frac{1}{\lambda}$ ergibt sich

$$P[V_t \leq v] = \frac{1}{\lambda} + \frac{K_5 + e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} K_3}{K_6} \left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{\frac{K_6}{\sigma}}$$

und der Beweis ist für $mC_0 > V_0$ abgeschlossen. Weitestgehend analoge Rechnungen liefern für $mC_0 < V_0$:

$$\begin{aligned}
v < V_0 e^{rt} : \quad P[V_t \leq v] &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{-\tilde{K}_5 + e^{-2x_0 \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}} \tilde{K}_3}{\tilde{K}_6} \left(\frac{(m-1)(v-G_t)}{G_t} \right)^{-\frac{\tilde{K}_6}{\sigma m}} \right\} \\
v \in [V_0 e^{rt}, \frac{m}{m-1} G_t] : \quad P[V_0 e^{rt} < V_t \leq v] &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{\tilde{K}_3}{\tilde{K}_4} \left(e^{-x_0 \tilde{K}_4} - \left(\frac{(m-1)(v-G_t)}{G_t} \right)^{-\frac{\tilde{K}_4}{\sigma m}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tilde{K}_5}{\tilde{K}_6} \left(e^{-x_0 \tilde{K}_6} - \left(\frac{(m-1)(v-G_t)}{G_t} \right)^{-\frac{\tilde{K}_6}{\sigma m}} \right) \right\} \\
v > \frac{m}{m-1} G_t : \quad P[\frac{m}{m-1} G_t < V_t \leq v] &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{\tilde{K}_1}{\tilde{K}_2} \left(1 - \left(\frac{(m-1)v}{mG_t} \right)^{-\frac{\tilde{K}_2}{\sigma}} \right) \right\}
\end{aligned}$$

Summieren ergibt die Behauptung. ■

Beweis Korollar 3.1.5: Sei $mC_0 \geq V_0$. Nach Lemma 3.1.3 und Theorem 1.3.15 ergeben sich drei unterschiedliche Bereiche für die Dichtefunktion und die Momente lauten

$$E[V_T^n] = \underbrace{\int_{G_T}^{\frac{m}{m-1} G_T} v^n P[V_t \in dv]}_{=: \mathbf{A}} + \underbrace{\int_{\frac{m}{m-1} G_T}^{V_0 e^{rT}} v^n P[V_t \in dv]}_{=: \mathbf{B}} + \underbrace{\int_{V_0 e^{rT}}^{\infty} v^n P[V_t \in dv]}_{=: \mathbf{C}}$$

A, **B** und **C** lassen sich als Inverse der Laplace-Transformation durch Einsetzen der Dichtefunktion, Vertauschen der Integrationsreihenfolge und geeigneten Substitution bestimmen

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \int_0^{\frac{G_T}{m-1}} (v + G_T)^n \frac{K_1}{\sigma m v} \left(\frac{m-1}{G_T} v \right)^{\frac{K_2}{\sigma m}} dv \right\} \\
&= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} G_T^{m-i} \frac{K_1}{\sigma m} \left(\frac{m-1}{G_T} \right)^{\frac{K_2}{\sigma m}} \int_0^{\frac{G_T}{m-1}} v^{\frac{K_2+i\sigma m}{\sigma m}-1} dv \right\} \\
&= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} G_T^{m-i} \frac{K_1}{\sigma m} \left(\frac{m-1}{G_T} \right)^{\frac{K_2}{\sigma m}} \frac{\sigma m}{K_2 + i\sigma m} \left(\frac{G_T}{m-1} \right)^{i + \frac{K_2}{\sigma m}} \right\} \\
&= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} G_T^m \frac{K_1}{K_2 + i\sigma m} \left(\frac{1}{m-1} \right)^i \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \int_{\frac{m}{m-1} G_T}^{V_0 e^{rT}} v^n \left(\frac{K_3}{\sigma v} \left(\frac{m-1}{mG_T} v \right)^{\frac{K_4}{\sigma}} + \frac{K_5}{\sigma v} \left(\frac{m-1}{mG_T} v \right)^{\frac{K_4}{\sigma}} \right) dv \right\} \\
&= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \frac{K_3}{K_4 + \sigma n} \left(\frac{m-1}{mG_T} \right)^{\frac{K_4}{\sigma}} v^{n + \frac{K_4}{\sigma}} \Big|_{v=\frac{m}{m-1} G_T}^{V_0 e^{rT}} + \frac{K_5}{K_6 + \sigma n} \left(\frac{m-1}{mG_T} \right)^{\frac{K_6}{\sigma}} v^{n + \frac{K_6}{\sigma}} \Big|_{v=\frac{m}{m-1} G_T}^{V_0 e^{rT}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \int_{V_0 e^{rT}}^{\infty} v^n \frac{K_5 + K_3 e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}}}{\sigma v} \left(\frac{m-1}{mG_T} v \right)^{\frac{K_6}{\sigma}} dv \right\} \\ &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ -\frac{K_5 + K_3 e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}}}{K_6 + \sigma n} \left(\frac{m-1}{mG_T} v \right)^{\frac{K_6}{\sigma}} (V_0 e^{rT})^{n + \frac{K_6}{\sigma}} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass im \mathbf{C} -Term der Wert der Stammfunktion an der oberen Integrationsgrenze für hinreichend großes λ mit $K_6(\lambda) < 0$ gerade 0 beträgt. Analog zum Beweis von Korollar 3.1.4 lassen sich die Terme durch Ausnutzen der Beziehungen zwischen den K_i zusammenfassen

$$\begin{aligned} \mathbf{B} + \mathbf{C} &= -\left(\frac{m}{m-1} G_T \right)^n \left(\frac{K_3}{K_4 + \sigma n} + \frac{K_5}{K_6 + \sigma n} \right) \\ &\quad + K_3 (V_0 e^{rT})^n \left(\frac{\left(\frac{m-1}{mG_0} V_0 \right)^{\frac{K_4}{\sigma}}}{K_4 + \sigma n} - \frac{e^{2x_0 \sqrt{\theta_0^2 + 2\lambda}} \left(\frac{m-1}{mG_0} V_0 \right)^{\frac{K_6}{\sigma}}}{K_6 + \sigma n} \right) \\ &= -\left(\frac{m}{m-1} G_T \right)^n \left(\frac{K_3}{K_4 + \sigma n} + \frac{K_5}{K_6 + \sigma n} \right) - \frac{2(V_0 e^{rT})^n}{(K_4 + \sigma n)(K_6 + \sigma n)} \\ &= -\left(\frac{m}{m-1} G_T \right)^n \left(\frac{K_3}{K_4 + \sigma n} + \frac{K_5}{K_6 + \sigma n} \right) + \frac{(V_0 e^{rT})^n}{\lambda - (\mu - r)n - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma^2} \end{aligned}$$

und es ergibt sich die Behauptung für $mC_0 \geq V_0$.

Für $mC_0 < V_0$ gilt

$$E[V_T^n] = \underbrace{\int_{G_T}^{V_0 e^{rT}} v^n P[V_t \in dv]}_{=: \tilde{\mathbf{A}}} + \underbrace{\int_{V_0 e^{rT}}^{\frac{m}{m-1} G_T} v^n P[V_t \in dv]}_{=: \tilde{\mathbf{B}}} + \underbrace{\int_{\frac{m}{m-1} G_T}^{\infty} v^n P[V_t \in dv]}_{=: \tilde{\mathbf{C}}}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} G_T^{m-i} \frac{\tilde{K}_5 + \tilde{K}_3 e^{-2x_0 \sqrt{\theta_1^2 + 2\lambda}}}{i\sigma m - \tilde{K}_6} \left(\frac{m-1}{G_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_6}{\sigma m}} (V_0 e^{rT} - G_T)^{i - \frac{\tilde{K}_6}{\sigma m}} \right\} \\ \tilde{\mathbf{B}} &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} G_T^{m-i} \left(\frac{\tilde{K}_3 \left(\frac{m-1}{G_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_4}{\sigma m}}}{i\sigma m - \tilde{K}_4} v^{i - \frac{\tilde{K}_4}{\sigma m}} + \frac{\tilde{K}_5 \left(\frac{m-1}{G_T} \right)^{-\frac{\tilde{K}_6}{\sigma m}}}{i\sigma m - \tilde{K}_6} v^{i - \frac{\tilde{K}_6}{\sigma m}} \right) \Bigg|_{v=e^{rt}(V_0 - G_0)}^{\frac{1}{m-1} G_T} \right\} \\ \tilde{\mathbf{C}} &= \mathcal{L}_{\lambda,t}^{(-1)} \left\{ -\frac{\tilde{K}_1}{n\sigma - \tilde{K}_2} G_T^n \left(\frac{m}{m-1} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

Zusammenfassen vollendet den Beweis. ■

Beweis Proposition 3.1.1: Die obere Grenze für den Prozess X_t ist durch

$$X_t \leq X_t^U = X_0 + \theta_0 t + W_t$$

gegeben. Umformen ergibt

$$e^{\sigma X_t} \leq e^{\sigma X_t^U} = e^{\sigma X_0} \frac{S_t}{S_0} e^{-rt} \quad .$$

Insbesondere ist die Bedingung $X_t^U \geq 0$ äquivalent zur Bedingung $S_t \geq S_0 e^{rt} e^{-\sigma X_0}$. Gleichung 3.1.4 aus Theorem 3.1.2 liefert

$$V_t \leq G_t \begin{cases} \frac{m}{m-1} e^{\sigma X_t^U} & X_t^U \geq 0 \\ \left(1 + \frac{1}{m-1} e^{\sigma m X_t^U}\right) & X_t^U < 0 \end{cases}$$

und somit durch Einsetzen

$$V_t \leq G_t \begin{cases} \frac{m}{m-1} e^{\sigma x_0} \frac{S_t}{S_0} e^{-rt} & S_t \geq S_0 e^{rt} e^{-\sigma x_0} \\ \left(1 + \frac{1}{m-1} \left(e^{\sigma X_0} \frac{S_t}{S_0} e^{-rt}\right)^m\right) & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der Definition von X_0 in Gleichung 3.1.3

$$X_0 = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} \ln \frac{(m-1)V_0}{mG_0} & mC_0 \geq V_0 \\ \frac{1}{m\sigma} \ln \frac{(m-1)C_0}{G_0} & mC_0 < V_0 \end{cases}$$

folgt jeweils die Behauptung für obere Grenze. Die Herleitung für die untere Grenze ergibt sich analog aus

$$X_t \geq X_t^L = x_0 + \theta_1 t + W_t \quad .$$

■

Beweis Lemma 3.1.7: Zunächst einmal gilt:

$$S_t = s \Leftrightarrow W_t = \frac{1}{\sigma} \left(\ln \frac{s}{S_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \right) =: \tilde{s}$$

Des Weiteren ergeben die Überlegungen aus dem Beweis zu Proposition 3.1.1 unter den jeweiligen Bedingungen an $S_t = s$

$$V_t = V_t^U \Leftrightarrow X_t = X_0 + \theta_0 t + \tilde{s}$$

und

$$V_t = V_t^L \Leftrightarrow X_t = X_0 + \theta_1 t + \tilde{s} \quad .$$

Einsetzen in Lemma 1.3.16 unter Verwendung der Definition von X_0 ergibt die Behauptung. Für den ersten Fall ergibt sich exemplarisch

$$\begin{aligned}
 P [V_t = V_t^U | S_t = s] &= 1 - e^{-\frac{2X_0(X_0 + \theta_0 t + \bar{s})}{t}} \\
 &= 1 - \left(e^{\sigma X_0} \right)^{-\frac{2(X_0 + \theta_0 t + \bar{s})}{\sigma t}} \\
 &= 1 - \left(\frac{(m-1)V_0}{mG_0} \right)^{-\frac{2}{\sigma^2 t} \left(\ln \frac{(m-1)V_0}{mG_0} + (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \ln \frac{s}{s_0} - (m - \frac{1}{2}\sigma^2)t \right)}.
 \end{aligned}$$

Zusammenfassen ergibt die Behauptung. Der zweite Fall folgt analog. ■

A.5 Beweise zur CPPI mit Floor-Anpassung

Beweis Korollar 3.2.1: Wir betrachten zunächst den Fall $v < V_0 e^{rt}$. In diesem Fall gilt $P[G_t \leq \frac{m-\omega}{m}v] \equiv 0$ und die Ableitung beschränkt sich auf das Integral in der Verteilungsfunktion. Mit $L(v, v) = -\infty$ folgt $\mathcal{N}(L(v, v)) = 0$ und $\phi(L(v, v)) = 0$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} \left(\int_{G_0 e^{rt}}^v \frac{2}{\sigma \omega x} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{\phi(L(v, x))}{\sqrt{t}} - \theta \mathcal{N}(L(v, x)) \right) dx \right) \\ &= \frac{2}{\sigma \omega v} \left(\frac{v}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{\phi(L(v, v))}{\sqrt{t}} - \theta \mathcal{N}(L(v, v)) \right) \\ & \quad + \int_{G_0 e^{rt}}^v \frac{2}{\sigma \omega x} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(-L^v(v, x) L(v, x) \frac{\phi(L(v, x))}{\sqrt{t}} - \theta L^v(v, x) \phi(L(v, x)) \right) dx \\ &= \int_{G_0 e^{rt}}^v \frac{-2L^v(v, x) \phi(L(v, x))}{\sigma \omega x} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{L(v, x)}{\sqrt{t}} - \theta \right) dx \end{aligned}$$

Mit $L^v(v, x) = \frac{1}{(v-x)\sigma\sqrt{t}}$ folgt die Behauptung. Für $v > V_0 e^{rt}$ muss neben der Wahrscheinlichkeit für die Garantie auch die untere Integralgrenze beachtet. Analoge Rechnungen wie oben ergeben

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v} P[G_t \leq \frac{m-\omega}{m}v] + \left(\int_{\frac{m-\omega}{m}v}^v \frac{2}{\sigma \omega x} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{\phi(L(v, x))}{\sqrt{t}} - \theta \mathcal{N}(L(v, x)) \right) dx \right) \\ &= \int_{\frac{m-\omega}{m}v}^v \frac{-2L^v(v, x) \phi(L(v, x))}{\sigma \omega x} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{L(v, x)}{\sqrt{t}} - \theta \right) dx \\ & \quad - \frac{2m}{\sigma \omega (m-\omega)v} \left(\frac{(m-\omega)v}{m G_0 e^{rt}} \right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \left(\frac{\phi(L(v, \frac{m-\omega}{m}v))}{\sqrt{t}} - \theta \mathcal{N}\left(L\left(v, \frac{m-\omega}{m}v\right)\right) \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{v}{V_0 e^{rt}}}{\omega \sigma \sqrt{t}} - \theta \sqrt{t}\right) - \left(\frac{v}{V_0 e^{rt}}\right)^{\frac{2\theta}{\omega \sigma}} \mathcal{N}\left(\frac{\ln \frac{V_0 e^{rt}}{v}}{\omega \sigma \sqrt{t}} - \theta \sqrt{t}\right) \right) \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $L(v, \frac{m-\omega}{m}v) = \frac{\ln \frac{V_0 e^{rt}}{v}}{\omega \sigma \sqrt{t}} - \theta \sqrt{t}$ folgt nach einfachen, aber länglichen Kalkulationen, dass die beiden letzten Terme vom Betrag identisch sind und sich somit aufheben. Damit folgt die Behauptung. \blacksquare

Beweis Proposition 3.2.3: Die Bestimmung der Momente impliziert die Einführung eines weiteren Integrals. Die Abbildung A.1 illustriert, wie in diesem Falle die Integrale vertauscht werden können. Seien dazu $g(x)$ und $h(x)$ monoton wachsende Funktionen. In diesem Fall gilt: $\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_{g(a)}^{h(b)} \int_{a \vee h^{-1}(y)}^{b \wedge g^{-1}(y)} f(x, y) dx dy$. Somit gilt für das

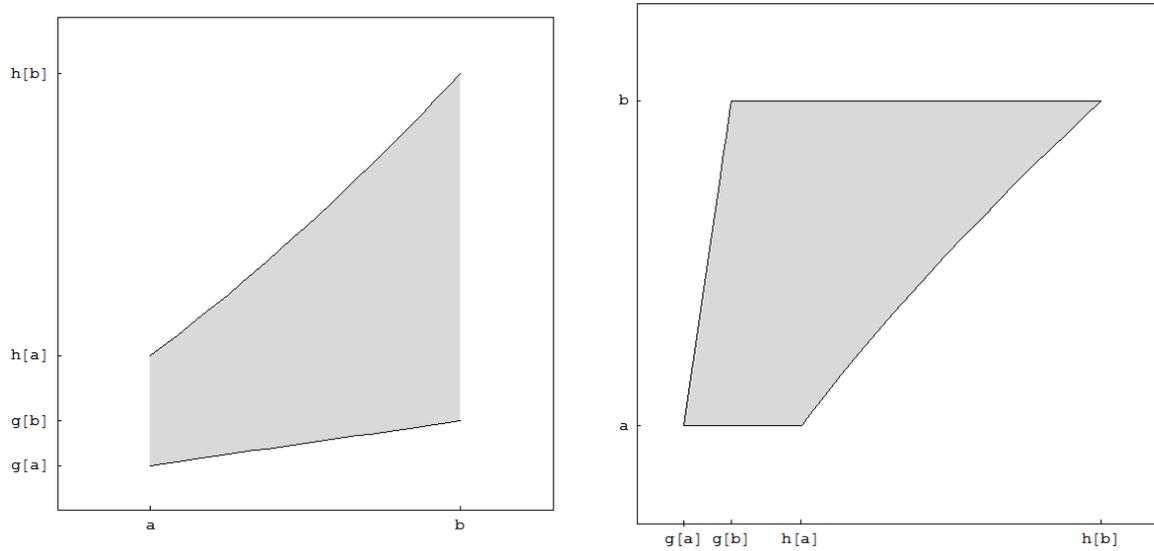


Abbildung A.1: Geometrische Intuition zur Vertauschung der Integralgrenzen

n-te Moment

$$\begin{aligned}
 E[V_t^n] &= \int_{G_0 e^{rt}}^{\infty} v^n P(V_t \in dv) \\
 &= \int_{G_0 e^{rt}}^{\infty} \int_{\frac{m-\omega}{m}v}^v \frac{-2v^n \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}}\right)^{\frac{2\theta}{\omega\sigma}}}{\sigma^2 m \omega (v-x) x t} \left(L(v, x) + \theta\sqrt{t}\right) \phi(L(v, x)) dx dv \\
 &= \int_{G_0 e^{rt}}^{\infty} \frac{-2 \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}}\right)^{\frac{2\theta}{\omega\sigma}}}{\sigma^2 m \omega x t} \int_x^{\frac{m-\omega}{m}x} \frac{v^n}{v-x} \left(L(v, x) + \theta\sqrt{t}\right) \phi(L(v, x)) dv dx
 \end{aligned}$$

Mit Lemma A.1.1 folgt für das innere Integral

$$\begin{aligned}
 &\int_x^{\frac{m-\omega}{m}x} \frac{v^n}{v-x} \left(L(v, x) + \theta\sqrt{t}\right) \phi(L(v, x)) dv dx \\
 &= \sigma m \sqrt{t} \left[-v^n \phi(L(v, x)) + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (\theta + (n-i)\sigma m) \sqrt{t} \mathcal{N}\left(L(v, x) - (n-i)\sigma m \sqrt{t}\right) \right. \\
 &\quad \left. e^{(n-i)\sigma m (\theta + \frac{m\sigma}{2}(n-i))t} \left(\frac{x}{G_0 e^{rt}}\right)^{(n-i)\frac{m+\omega}{\omega}} \left(\frac{\omega G_0 e^{rt}}{m-\omega}\right)^{n-i} \right]_{v=x}^{\frac{m-\omega}{m}x}
 \end{aligned}$$

mit $L(x, x) = -\infty$ und $L\left(\frac{m}{m-\omega}x, x\right) = \frac{1}{\sigma\omega\sqrt{t}}(-\ln x + \ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t)$ folgt

$$\begin{aligned} &= \sigma m \sqrt{t} \left(- \left(\frac{m}{m-\omega} \right)^n x^n \phi \left(\frac{-\ln x + \ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n+(n-i)\frac{m}{\omega}} (G_0e^{rt})^{-(n-i)\frac{m}{\omega}} \left(\frac{m-\omega}{\omega} \right)^{-(n-i)} (\theta + (n-i)\sigma m) \sqrt{t} \right) \\ &\quad e^{(n-i)\sigma m(\theta + \frac{m\sigma}{2}(n-i))t} \mathcal{N} \left(\frac{-\ln x + \ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}} - (n-i)\sigma m \sqrt{t} \right) \end{aligned}$$

Somit gilt für die Momente

$$\begin{aligned} E[V_t^n] &= \frac{2(G_0e^{rt})^{-\frac{2\theta}{\omega\sigma}}}{\sigma\omega\sqrt{t}} \left(\frac{m}{m-\omega} \right)^n \int_{G_0e^{rt}}^{\infty} x^{n-1+\frac{2\theta}{\omega\sigma}} \phi \left(\frac{-\ln x + \ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}} \right) dx \\ &\quad - \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{2(\theta + (n-i)\sigma m) (G_0e^{rt})^{-\frac{2\theta}{\omega\sigma} - (n-i)\frac{m}{\omega}}}{\sigma\omega} \left(\frac{m-\omega}{\omega} \right)^{-(n-i)} e^{(n-i)\sigma m(\theta + \frac{m\sigma}{2}(n-i))t} \\ &\quad \int_{G_0e^{rt}}^{\infty} x^{\frac{2\theta}{\omega\sigma} + n - 1 + (n-i)\frac{m}{\omega}} \mathcal{N} \left(\frac{-\ln x + \ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}} - (n-i)\sigma m \sqrt{t} \right) dx \end{aligned} \tag{A.5.1}$$

Das erste Integral in A.5.1 lässt sich mit Lemma A.1.3 wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned} &\int_{G_0e^{rt}}^{\infty} x^{n-1+\frac{2\theta}{\omega\sigma}} \phi \left(\frac{-\ln x + \ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}} \right) dx \\ &= -\sigma\omega\sqrt{t} e^{\frac{1}{2}(\sigma\omega)^2 t(n+\frac{2\theta}{\sigma\omega})(n+\frac{2\theta}{\sigma\omega} + \frac{2}{(\sigma\omega)^2 t}(\ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t))} \\ &\quad \mathcal{N} \left(-\frac{1}{\sigma\omega\sqrt{t}} \ln x + \frac{\ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t + (n+\frac{2\theta}{\sigma\omega})(\sigma\omega)^2 t}{\sigma\omega\sqrt{t}} \right) \Bigg|_{x=G_0e^{rt}}^{\infty} \\ &= \sigma\omega\sqrt{t} e^{\frac{1}{2}(\sigma\omega)^2 t(n+\frac{2\theta}{\sigma\omega})(n+\frac{2\theta}{\sigma\omega} + \frac{2}{(\sigma\omega)^2 t}(\ln G_0e^{rt} - \theta\sigma\omega t))} \mathcal{N} \left(\frac{-\theta t + (n+\frac{2\theta}{\sigma\omega})(\sigma\omega)^2 t}{\sqrt{t}} \right) \\ &= \sigma\omega\sqrt{t} (G_0e^{rt})^{n+\frac{2\theta}{\sigma\omega}} e^{(\theta\sigma\omega + \frac{1}{2}(\sigma\omega)^2 n)nt} \mathcal{N} \left((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t} \right) \end{aligned}$$

Und somit insgesamt für den ersten Teil der Momente

$$2 \left(\frac{m}{m-\omega} G_0 e^{(r+\theta\sigma\omega + \frac{1}{2}(\sigma\omega)^2 n)t} \right)^n \mathcal{N} \left((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t} \right)$$

Mit Hilfe von Lemma A.1.2 lässt sich auch das zweite Integral in A.5.1 bestimmen.

Analoge Rechnungen zum ersten Integral liefern

$$\begin{aligned} & \int_{G_0 e^{rt}}^{\infty} x^{\frac{2\theta}{\omega\sigma} + n - 1 + (n-i)\frac{m}{\omega}} \mathcal{N}\left(\frac{-\ln x + \ln G_0 e^{rt} - \theta\sigma\omega t}{\sigma\omega\sqrt{t}} - (n-i)\sigma m\sqrt{t}\right) dx \\ &= \frac{-\sigma\omega (G_0 e^{rt})^{n + (n-i)\frac{m}{\omega} + \frac{2\theta}{\sigma\omega}}}{n\sigma\omega + (n-i)m\sigma + 2\theta} \left(\mathcal{N}\left(-(\theta + (n-i)\sigma m)\sqrt{t}\right) \right. \\ & \quad \left. - e^{\frac{1}{2}(n\sigma\omega + (n-i)\sigma m + 2\theta)(n\sigma\omega - (n-i)\sigma m)t} \mathcal{N}\left((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}\right) \right) \end{aligned}$$

Einsetzen in A.5.1 ergibt für den zweiten Teil

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \frac{2(\theta + (n-i)\sigma m)(G_0 e^{rt})^n}{n\sigma\omega + (n-i)m\sigma + 2\theta} \left(\frac{m-\omega}{\omega}\right)^{-(n-i)} \\ & \quad \left(e^{\frac{1}{2}(n-i)\sigma m((n-i)\sigma m + 2\theta)t} \mathcal{N}\left(-(\theta + (n-i)\sigma m)\sqrt{t}\right) - e^{\frac{1}{2}n\sigma\omega(n\sigma\omega + 2\theta)t} \mathcal{N}\left((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}\right) \right) \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die Behauptung. ■

Beweis Lemma 3.2.3: Der Beweis benötigt im Prinzip die gleichen Schritte, wie bei der Beweisführung für die Momente des Wertprozess. Zunächst wird durch Ableiten die Dichte der Garantie durch

$$P[G_t \in dg] = \frac{1}{g\sigma\omega\sqrt{t}} \left(\phi(d_1) + \left(\frac{g}{G_0 e^{rt}}\right)^{\frac{2\theta}{\sigma\omega}} \phi(d_2) \right) - \frac{2\theta}{\sigma\omega g} \left(\frac{g}{G_0 e^{rt}}\right)^{\frac{2\theta}{\sigma\omega}} \mathcal{N}(d_2)$$

bestimmt. Dadurch wird ersichtlich, dass das Integral zur Bestimmung der Momente in drei Teile zerlegt werden kann,

$$E[G_t^n] = \int_{G_0 e^{rt}}^{\infty} g^n P[G_t \in dg]$$

welche wiederum mit den Integralformeln aus Appendix A.1 bestimmt werden können

$$\begin{aligned} &= (G_0 e^{rt})^n e^{\frac{n\sigma\omega t}{2}(n\sigma\omega + 2\theta)} \mathcal{N}((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}) \\ & \quad + (G_0 e^{rt})^n e^{\frac{n\sigma\omega t}{2}(n\sigma\omega + 2\theta)} \mathcal{N}((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}) \\ & \quad + (G_0 e^{rt})^n \frac{2\theta}{n\sigma\omega + 2\theta} \left(\mathcal{N}(-\sigma\sqrt{t}) - e^{\frac{n\sigma\omega t}{2}(n\sigma\omega + 2\theta)} \mathcal{N}((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}) \right) \end{aligned}$$

insgesamt ergibt sich

$$= (G_0 e^{rt})^n \left(\frac{2n\sigma\omega + 2\theta}{n\sigma\omega + 2\theta} e^{\frac{n\sigma\omega}{2}(n\sigma\omega + 2\theta)t} \mathcal{N}((\theta + n\sigma\omega)\sqrt{t}) + \frac{2\theta}{n\sigma\omega + 2\theta} \mathcal{N}(-\theta\sqrt{t}) \right). \quad \blacksquare$$

Beweis Proposition 3.2.4: Mit den Definitionen aus der Proposition gilt zunächst $\frac{S_t}{S_0} = s \Leftrightarrow W_t^\theta = \tilde{w}$ und $V_t|_{W_t^\theta = \tilde{w}} = v \Leftrightarrow g(M_t^\theta) = v$. Mit $g'(x) = G_0 e^{rt} \sigma \omega e^{\sigma \omega x} (1 - e^{\sigma m(\tilde{w} - x)})$ folgt $g'(M_t^\theta) \geq 0$ für $M_t^\theta > W_t^\theta$, womit die Umkehrfunktion wohldefiniert ist. Es folgt

$$P \left[V_t \leq v \mid \frac{S_t}{S_0} = s \right] = P [M_t^\theta \leq g^{-1}(v) | W_t^\theta = \tilde{w}]$$

Mit Korollar 1.3.4 folgt die Behauptung für die Verteilung.

Die Formel für die Dichte ergibt sich durch Ableiten und Ausnutzen von $(g^{-1})'(v) = \frac{1}{g'(g^{-1}(v))}$. ■

A.6 Beweise zur CPPI in diskreter Zeit

Beweis Proposition 4.1.3

Lemma A.6.1 Sei A_k ($k = 1, \dots, n$) definiert wie in Lemma 4.1.1, d_1 , d_2 und E_1 wie in Proposition 4.1.3. Dann gilt

$$E \left[C_{t_i}^\tau \prod_{j=1}^i 1_{A_j} \right] = C_0 (E_1)^i \quad \text{for all } i = 1, \dots, n.$$

Beweis : Die folgenden Rechnungen basieren auf Proposition 4.1.1, Lemma 4.1.1 und der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der Aktienkurszuwächse.

$$E \left[C_{t_i}^\tau \prod_{j=1}^i 1_{A_j} \right] = C_0 \left(E \left[\left(m \frac{S_{t_1}}{S_0} - (m-1)e^{r \frac{T}{n}} \right)^+ \right] \right)^i.$$

■

Lemma A.6.2 Seien E_1 und E_2 definiert wie in Proposition 4.1.3. Es gilt

$$E [C_T^\tau 1_{\{t_s=t_i\}}] = C_0 e^{r(T-t_i)} E_2 E_1^{i-1}.$$

Beweis : Aus Proposition 4.1.1 und Lemma 4.1.1 folgt

$$E [C_T^\tau 1_{\{t_s=t_i\}}] = e^{r(T-t_i)} E \left[C_{t_i}^\tau 1_{A_i^c} \prod_{j=1}^{i-1} 1_{A_j} \right].$$

Aus der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der Zuwächse und Lemma A.6.1 folgt

$$E [V_T^\tau 1_{\{t_s=t_i\}}] = C_0 e^{r(T-t_i)} E_1^{i-1} E \left[- \left((m-1)e^{r \frac{T}{n}} - m \frac{S_{t_1}}{S_0} \right)^+ \right].$$

Einfache Berechnungen ergeben, dass der obige Erwartungswert der Definition von E_2 entspricht. ■

Varianz CPPI in diskreter Zeit

Lemma A.6.3 Sei A_k ($k = 1, \dots, n$) definiert wie in Lemma 4.1.1 und \tilde{E}_1 wie in Proposition 4.1.4. Es gilt

$$E \left[(C_{t_i}^\tau)^2 \prod_{j=1}^i 1_{A_j} \right] = C_0^2 (\tilde{E}_1)^i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Beweis : Analog zum Beweis von Lemma A.6.1 kann gezeigt werden, dass

$$E \left[(C_{t_i}^\tau)^2 \prod_{j=1}^i 1_{A_j} \right] = C_0^2 \left(E \left[\left(m \frac{S_{t_1}}{S_0} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} \right)^2 1_{A_1} \right] \right)^i$$

■

Lemma A.6.4 Seien \tilde{E}_1 und \tilde{E}_2 definiert wie in Proposition 4.1.4. Es gilt

$$E [(C_T^\tau)^2 1_{\{t_s=t_i\}}] = e^{2r(T-t_i)} C_0^2 \tilde{E}_2 \tilde{E}_1^{i-1}.$$

Beweis : Zunächst einmal gilt wieder

$$E[(C_T^\tau)^2 1_{\{t_s=t_i\}}] = e^{2r(T-t_i)} E [(C_{t_i}^\tau)^2 1_{\{t_s=t_i\}}].$$

Mit Lemma A.6.3 erhält man

$$\begin{aligned} E [(C_{t_i}^\tau)^2 1_{\{t_s=t_i\}}] &= E \left[(C_{t_i}^\tau)^2 1_{A_i^C} \prod_{j=1}^{i-1} 1_{A_j} \right] \\ &= C_0^2 \tilde{E}_1^{i-1} E \left[\left(m \frac{S_{t_1}}{S_0} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} \right)^2 1_{A_1^C} \right]. \end{aligned}$$

■

Konvergenz

Wir betrachten zunächst die Ausfallwahrscheinlichkeit

Lemma A.6.5 Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{SF} = 0, \quad ,$$

d.h. die Ausfallwahrscheinlichkeit konvergiert gegen Null, falls die Handelsbeschränkungen verschwinden.

Beweis : Sei $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ eine beliebige Funktion mit $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Aus

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x(f(x) - 1)}{x} \right)^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x(f(x) - 1)}$$

und der Anwendung der Regel von L'Hôpital, d.h.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 1}{x^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x),$$

folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x))^x = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x)}$ falls $\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ existiert. Angewandt auf die Ausfallwahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P^{SF} &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - P^{LSF})^n = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(d_2)^n \\ &= 1 - e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \frac{\partial \mathcal{N}(d_2)}{\partial n}} = 1 - e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 \mathcal{N}'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial n}}. \end{aligned}$$

Der Beweis wird abgeschlossen mit der Definition von d_2 , vgl. Proposition 4.1.3, und $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} n^k = 0 \forall k \in \mathbb{N}$. ■

Betrachten wir nun die Konvergenz des Cushion. Nach Lemma A.6.5 können wir uns auf den Fall $C_t^\tau > 0$ beschränken. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \ln \frac{C_{t_k}^\tau}{C_0} \Big|_{C_{t_k}^\tau > 0} &\stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{i=1}^k \ln \xi_i^{(n)} \\ \text{mit } \xi_i^{(n)} &= m e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n} + \sigma\sqrt{\frac{T}{n}}Z_i} - (m-1)e^{r\frac{T}{n}} \Big|_{C_{t_k}^\tau > 0} \end{aligned}$$

Bei den Z_i 's handelt es sich um unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Die Bedingung garantiert, dass $\ln \xi^{(n)}$ wohldefiniert ist. Des Weiteren lässt sich zeigen, dass alle Momente von $\ln \xi^{(n)}$ existieren, d.h. die Existenz $E[|\ln \xi_i^{(n)}|^j]$ kann direkt gezeigt werden mittels $\frac{x}{x+1} \leq \ln x + 1 \leq x$ und die Aufteilung in die Bereiche in denen $\ln \xi_i^{(n)}$ positiv bzw. negativ ist. Insbesondere können wir $\ln \xi_i^{(n)}$ normalisieren, d.h.

$$\Xi_i^{(n)} := \frac{\ln \xi_i^{(n)} - E[\ln \xi_i^{(n)}]}{\sqrt{n \text{Var}[\ln \xi_i^{(n)}]}}$$

so dass $\sum_{i=1}^n \text{Var}[\Xi_i^{(n)}] = 1$ und $E[\Xi_i^{(n)}] = 0$.

Mit $t_k = k\frac{T}{n}$ und einer Variante des Satz von Donsker für Triangular Arrays, vgl. z.B. Billingsley (1986), p.143, folgt $X_{\frac{k}{n}} := \sum_{i=1}^k \Xi_i^{(n)}$ konvergiert in Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung auf $[0, 1]$. Aus der Unabhängigkeit der Z_i 's und dem Invarianz-Prinzip folgt somit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{C_t^\tau}{C_0} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{nt}{T} \right] E[\ln \xi_1^{(n)}] + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n \text{Var}[\ln \xi_1^{(n)}]}}{\sqrt{T}} \cdot W_t.$$

Da die Folge $\left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} \ln \xi_1^{(n)}$ gleichmäßig integrierbar ist, können wir Grenzwert und Erwartungswert vertauschen. Aus der Anwendung der Regel von L'Hôpital ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} \ln \xi_1^{(n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} \ln \left(m e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z_1} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} r \frac{T}{n} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} \ln \left(1 + m \left(e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z_1} - 1 \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} r \frac{T}{n} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} + \lim_{n \rightarrow \infty} j n \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} \frac{m e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z_1} \left(\frac{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) T}{n^2} + \frac{\sigma \sqrt{T}}{2 \sqrt{n^3}} Z_1 \right)}{1 + m \left(e^{(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}) \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z_1} - 1 \right)} \\
&= \begin{cases} m \sigma \sqrt{t} Z_1 & \text{if } j = 2 \\ 0 & \text{if } j > 2. \end{cases} \tag{A.6.1}
\end{aligned}$$

Aus der Reihendarstellung der Exponentialfunktion ergibt sich

$$\begin{aligned}
e^{\ln \xi_1^{(n)}} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\ln \xi_1^{(n)})^j}{j!} = 1 + \ln \xi_1^{(n)} + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\ln \xi_1^{(n)})^j}{j!}, \text{ i.e.} \\
\ln \xi_1^{(n)} &= \xi_1^{(n)} - 1 - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\ln \xi_1^{(n)})^j}{j!}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \ln \xi_1^{(n)} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \left(\xi_1^{(n)} - 1 - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(\ln \xi_1^{(n)})^j}{j!} \right) \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \left(E \left[\xi_1^{(n)} \right] - 1 \right) - \sum_{j=2}^{\infty} E \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor^{\frac{1}{j}} \ln \xi_1^{(n)} \right)^j}{j!} \right]
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
E \left[\xi_1^{(n)} \right] &= E \left[m e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z_1} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} \mid C_t^T > 0 \right] \\
&= E \left[\left(m e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{T}{n} + \sigma \sqrt{\frac{T}{n}} Z_1} - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} \right)^+ \right] P[C_t^T > 0] \\
&= E_1(1 - P^{\text{SF}}).
\end{aligned}$$

und Lemma A.6.5, $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{1,2} = \infty$ und $\mathcal{N}'(d_2) = \frac{m}{m-1} e^{(\mu-r) \frac{T}{n}} \mathcal{N}'(d_1)$ folgt

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \left(E \left[\xi_1^{(n)} \right] - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor (E_1 - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{t}{T} n^2 \frac{\partial E_1}{\partial n} \\
&= \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} m \mu t e^{\mu \frac{T}{n}} N(d_1)}_{=m\mu t} - \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} (m-1) r t e^{r \frac{T}{n}} N(d_2)}_{=(m-1)rt} + \underbrace{e^{\mu \frac{T}{n}} m \mathcal{N}'(d_1) \frac{\partial(d_1 - d_2)}{\partial n}}_{=0}.
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left\lfloor \frac{nt}{T} \right\rfloor \ln \xi_1^{(n)} \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(m\mu e^{\mu \frac{T}{n}} - (m-1)r e^{r \frac{T}{n}} \right) t - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2 t \\ &= (m\mu - (m-1)r - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2) t. \end{aligned}$$

Gleichung (A.6.1) für $j = 2$, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n \text{Var}[\ln \xi_1^{(n)}]}{T}} = m\sigma$ und

$$\ln \frac{C_t}{C_0} = (r + m(\mu - r) - \frac{1}{2} m^2 \sigma^2) t + \sigma m W_t.$$

schließt den Beweis ab.

Lemma A.6.6 Sei E_1^{TA} definiert wie in Proposition 4.1.6. Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{t}{T} n^2 \frac{\partial E_1^{TA}}{\partial n} = -\infty.$$

Beweis : Mit $\mathcal{N}'(e_2) = e^{(\mu-r)\frac{T}{n}} \mathcal{N}'(e_1)$ und

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(d_2^{TA}(\theta)) &= (1-\theta) \frac{m}{m-1} e^{(\mu-r)\frac{T}{n}} \mathcal{N}'(d_1^{TA}(\theta)) \\ \text{and } \frac{\partial(e_2 - e_1)}{\partial n} &= \frac{\partial(d_2^{TA}(\theta) - d_1^{TA}(\theta))}{\partial n} = \frac{\sigma}{2\sqrt{\frac{T}{n}}} \frac{T}{n^2} \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} &-\frac{n^2 t}{T} \frac{\partial E_1^{TA}}{\partial n} \\ &= \frac{1-\theta}{1-\theta m} m e^{\mu \frac{T}{n}} \mu t \mathcal{N}(d_1^{TA}(\theta)) - \frac{m-1}{1-\theta m} e^{r \frac{T}{n}} r t \mathcal{N}(d_2^{TA}(\theta)) \\ &\quad + m e^{\mu \frac{T}{n}} \mu t \left(\frac{1+\theta}{1+\theta m} - \frac{1-\theta}{1-\theta m} \right) \mathcal{N}(e_1) - (m-1) e^{r \frac{T}{n}} r t \left(\frac{1}{1+\theta m} - \frac{1}{1-\theta m} \right) \mathcal{N}(e_2) \\ &\quad - \frac{1-\theta}{1-\theta m} m e^{\mu \frac{T}{n}} \mathcal{N}'(d_1^{TA}(\theta)) \frac{\sigma t}{2\sqrt{\frac{T}{n}}} - (m-1) \frac{2\theta m}{(1+\theta m)(1-\theta m)} e^{\mu \frac{T}{n}} \mathcal{N}'(e_1) \frac{\sigma t}{2\sqrt{\frac{T}{n}}}. \end{aligned}$$

Des Weiteren gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{1,2}^{TA}(\theta) = \infty$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} e_{1,2} = 0$.

Insgesamt ergeben sich für die ersten vier Terme in der beiden oberen Zeilen die Grenzwerte $\frac{1-\theta}{1-\theta m} m \mu t$, $-\frac{m-1}{1-\theta m} r t$, $m \frac{\mu t}{2} \left(\frac{1+\theta}{1+\theta m} - \frac{1-\theta}{1-\theta m} \right)$, und $-(m-1) \frac{r t}{2} \left(\frac{1}{1+\theta m} - \frac{1}{1-\theta m} \right)$. Für den ersten Term der letzten Zeile ergibt sich Konvergenz gegen 0, der hintere Term konvergiert jedoch gegen $-\infty$ und somit der gesamte Term. ■

Lemma A.6.7 Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[C_t^{\tau, TA} \right] \leq 0.$$

Insbesondere folgt mit $P^{SF, TA} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$, dass der Cushion einer zeitstetigen CPPI unter Transaktionskosten gegen Null konvergiert.

Beweis : Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[C_t^{\tau, \text{TA}} \right] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[C_t^{\tau, \text{TA}} 1_{\{C_t^{\tau, \text{TA}} \geq 0\}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} C_0 (E_1^{\text{TA}})^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} \end{aligned}$$

wobei E_1^{TA} definiert ist wie Proposition 4.1.6. Es zeigt sich leicht, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} E_1^{\text{TA}} = 1$ und somit dank der Argumente aus dem Beweis zum Lemma A.6.5

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_0 (E_1^{\text{TA}})^{\lfloor \frac{nt}{T} \rfloor} = C_0 e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \frac{nt}{T} \rfloor (E_1^{\text{TA}} - 1)} = C_0 e^{-\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 t}{T} \frac{\partial E_1^{\text{TA}}}{\partial n}}.$$

Anwendung von Lemma A.6.6 beendet den Beweis. ■

Monotonie des Erwartungswertes

Mit Proposition 4.1.3 und der Definition von E_2 folgt

$$E[V_T^r] = V_0 e^{rT} + C_0 m \left(e^{(\mu-r)\frac{T}{n}} - 1 \right) \frac{e^{rT} - E_1^n}{1 - E_1 e^{-r\frac{T}{n}}}.$$

Man kann leicht zeigen, dass $E_1 > e^{r\frac{T}{n}}$. Intuitiv bedeutet dies, dass, falls $\mu > r$, der erwartete Endwert der CPPI immer größer als die Investition in die risikolose Anlage

Betrachten wir nun die partielle Ableitung nach σ , d.h.

$$\frac{\partial E[V_T^r]}{\partial \sigma} = m C_0 \left(e^{(\mu-r)\frac{T}{n}} - 1 \right) \frac{-n E_1^{n-1} \frac{\partial E_1}{\partial \sigma} \left(1 - E_1 e^{-r\frac{T}{n}} \right) - (E_1^n - e^{rT}) \frac{\partial E_1}{\partial \sigma} e^{-r\frac{T}{n}}}{\left(1 - E_1 e^{-r\frac{T}{n}} \right)^2}.$$

Für $\mu > r$ sind die Faktoren vor dem Bruch alle positiv. Weiterhin lässt sich leicht zeigen, dass

$$\frac{\partial E_1}{\partial \sigma} > 0.$$

Der Beweis erfordert analoge Argumente zur Bestimmung des Vega einer Call-Option im Black-Scholes-Modell und sei an dieser Stelle vernachlässigt.

Es bleibt also zu zeigen

$$-n E_1^{n-1} \left(1 - E_1 e^{-r\frac{T}{n}} \right) - (E_1^n - e^{rT}) e^{-r\frac{T}{n}} \geq 0.$$

Eine Anwendung der Bernoulli-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned} &n E_1^{n-1} \left(E_1 e^{-r\frac{T}{n}} - 1 \right) - e^{-r\frac{T}{n}} (E_1^n - e^{rT}) \\ &= e^{-r\frac{T}{n}} \left(n E_1^{n-1} \left(E_1 - e^{r\frac{T}{n}} \right) - E_1^n + E_1^n \left(1 + \frac{e^{r\frac{T}{n}} - E_1}{E_1} \right)^n \right) \\ &\geq e^{-r\frac{T}{n}} \left(n E_1^{n-1} \left(E_1 - e^{r\frac{T}{n}} \right) - E_1^n + E_1^n \left(1 + n \frac{e^{r\frac{T}{n}} - E_1}{E_1} \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Mit $E_1 > e^{r\frac{T}{n}}$ ist die obige Ungleichung sogar strikt.

Beweise zur beschränkten CPPI in diskreter Zeit

Beweis Lemma 4.3.1: Unter der Verwendung der Approximation $V_{t_k}^\tau \approx V_{t_k}$ gilt

$$\begin{aligned} & P \left[V_{t_{k+1}}^\tau \leq G_{t_{k+1}} \mid V_{t_k}^\tau > G_{t_k} \right] \\ & \approx \int_{G_{t_k}}^{\infty} P \left[V_{t_{k+1}}^\tau \leq G_{t_{k+1}} \mid V_{t_k} = x \right] P[V_{t_k} \in dx] \end{aligned}$$

Unterscheidung zwischen den beiden unterschiedlichen Zuständen der Strategie liefert

$$\begin{aligned} & = \int_{G_{t_k}}^{\frac{m}{m-1}G_{t_k}} P \left[V_{t_{k+1}}^\tau - G_{t_{k+1}} \leq 0 \mid V_{t_k} = x \right] P[V_{t_k} \in dx] \\ & \quad + \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} P \left[\frac{V_{t_{k+1}}^\tau}{V_{t_k}} \leq \frac{G_{t_{k+1}}}{x} \mid V_{t_k} = x \right] P[V_{t_k} \in dx] \end{aligned}$$

Für das erste Integral beobachtet man, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit gerade der Ausfallwahrscheinlichkeit der einfachen zeitdiskreten CPPI entspricht. Diese war jedoch unabhängig vom Wert der Strategie zum Zeitpunkt t_k . Das zweite Integral ergibt sich aus der Bedingung, dass das gesamte Kapital in die Aktie investiert wurde, als $V_{t_{k+1}}^\tau = V_{t_{k+1}} \frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}}$. Damit aufgrund der Unabhängigkeit der Aktienkurszuwächse

$$= \int_{G_{t_k}}^{\frac{m}{m-1}G_{t_k}} \tilde{P}^{\text{LSF}} \cdot P[V_{t_k} \in dx] + \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} P \left[\frac{S_{t_{k+1}}}{S_{t_k}} \leq \frac{G_{t_{k+1}}}{x} \right] P[V_{t_k} \in dx]$$

Aus der Verteilung der Aktienkurse und partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} & = \tilde{P}^{\text{LSF}} \cdot P \left[V_{t_k} \leq \frac{m}{m-1}G_{t_k} \right] + \mathcal{N} \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \right) P[V_{t_k} \leq x] \Bigg|_{x=\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \\ & \quad + \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \phi \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \right) P[V_{t_k} \leq x] dx \end{aligned}$$

wobei ϕ und \mathcal{N} wie üblich die Dichte bzw. Verteilung der Standardnormalverteilung bezeichnen. Einsetzen und Vergleich mit der lokalen Shortfall-Wahrscheinlichkeit der einfachen CPPI aus Lemma 4.1.2 impliziert, dass sich die beiden vorderen Terme aufheben. Es verbleibt

$$= \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \phi \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{T}{n}}{\sigma\sqrt{\frac{T}{n}}} \right) P[V_{t_k} \leq x] dx \quad .$$

■

Beweis Theorem 4.3.2: Wir beschränken uns auf den Fall $mC_0 \leq V_0$. Analoge Überlegungen rechtfertigen auch den zweiten Fall. Mit Lemma 4.3.1 und Korollar 3.1.4 ergibt sich

$$P_{k+1}^{\text{LSF}} = \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \frac{\mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{1}{\lambda} - \frac{\tilde{K}_1(\lambda)}{\tilde{K}_2(\lambda)} \left(\frac{(m-1)x}{mG_{t_k}} \right)^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}} \right\}}{x\sigma\sqrt{\Delta t}} \phi \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) dx \quad .$$

Vertauschen der Integrationsreihenfolge, d.h. Vertauschen des Integrals mit der inversen Laplace-Transformation ergibt

$$\begin{aligned} &= \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \frac{1}{x\sigma\sqrt{\Delta t}} \phi \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) dx \cdot \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{1}{\lambda} \right\} \\ &- \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{\tilde{K}_1(\lambda) \left(\frac{m-1}{mG_{t_k}} \right)^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}}}{\tilde{K}_2(\lambda)\sigma\sqrt{\Delta t}} \int_{\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} x^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}-1} \phi \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) dx \right\} \end{aligned}$$

Die inverse Laplace-Transformation von $\frac{1}{\lambda}$ ist gerade 1. Der erste Term lässt sich damit direkt als Normalverteilung angeben. Für den zweiten Term lässt sich die Integralformel des Lemmas A.1.3 aus Appendix A.1 anwenden.

$$\begin{aligned} &= -\mathcal{N} \left(\frac{\ln \frac{G_{t_{k+1}}}{x} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) \Bigg|_{x=\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \\ &- \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{\tilde{K}_1(\lambda) \left(\frac{m-1}{mG_{t_k}} \right)^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}}}{\tilde{K}_2(\lambda)\sigma\sqrt{\Delta t}} (-\sigma\sqrt{\Delta t}) e^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma} \left(-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma} - 2 \frac{\ln G_{t_k} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathcal{N} \left(\frac{\ln \frac{G_{t_k}}{x} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}\sigma\sqrt{\Delta t} \right) \Bigg|_{x=\frac{m}{m-1}G_{t_k}}^{\infty} \right\} \\ &= \mathcal{N} \left(\frac{\ln \frac{m-1}{m} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) \\ &- \mathcal{L}_{\lambda,T}^{(-1)} \left\{ \frac{\tilde{K}_1(\lambda) \left(\frac{m-1}{m} \right)^{-\frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}}}{\tilde{K}_2(\lambda)} e^{\frac{\tilde{K}_2(\lambda)^2\Delta t}{2} - \frac{\tilde{K}_2(\lambda)}{\sigma}(\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t} \right. \\ &\quad \left. \cdot \mathcal{N} \left(\frac{\ln \frac{m-1}{m} - (\mu - r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \tilde{K}_2(\lambda)\sigma)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Einsetzen der Definitionen und der Ausfallwahrscheinlichkeit der einfachen CPPI ergeben die Behauptung. ■

Literaturverzeichnis

- Abate, J. und Valkó, P. P.: Multi-Precision Laplace Transform Inversion. In: *International Journal of Numerical Methods for Engineering*, Band 60(5):S. 979–993, 2004.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. und Heath, D.: Coherent Measures of Risk. In: *Mathematical Finance*, Band 9:S. 203–228, 1999.
- Barakat, Richard: Sums of independent lognormally distributed random variables. In: *Journal of the Optical Society of America A*, Band 66(3):S. 211–216, 1976.
- Basak, Suleyman: A comparative study of portfolio insurance. In: *Journal of Economic, Dynamics and Control*, Band 26:S. 1217–1241, 2002.
- Beaulieu, Norman C. und Xie, Qiong: An Optimal Lognormal Approximation to Lognormal Sum Distributions. In: *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, Band 53(2):S. 479–489, 2004.
- Beneš, V.E., Shepp, L.A. und Witsenhausen, H.S.: Some Solvable Stochastic Control Problems. In: *Stochastics*, Band 4:S. 39–83, 1980.
- Bertrand, P. und Prigent, J-L.: Portfolio Insurance Strategies: OBPI versus CPPI. Technischer Bericht, GREQAM and Université Montpellier1, 2002.
- Billingsley, P.: *Probability and Measure*. New York: Wiley, 1986.
- Black, F. und Jones, R.: Simplifying Portfolio Insurance. In: *The Journal of Portfolio Management*, Band 14:S. 48–51, 1987.
- Black, F. und Perold, A.R.: Dynamic Strategies for Asset Allocation. In: *Financial Analysts Journal*, (January/February):S. 16–27, 1988.
- Black, F. und Perold, A.R.: Theory of Constant Proportion Portfolio Insurance. In: *The Journal of Economic Dynamics and Control*, Band 16(3-4):S. 403–426, 1992.
- Black, Fischer und Scholes, Myron: The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In: *Journal of Political Economy*, Band 81(3):S. 637–659, 1973.
- Brandl, Michael: *CPPI Strategies in Discrete-Time*. Dissertation, Bonn Graduate School of Economics, 2007.
- Brennan, Michael J. und Schwartz, Eduardo S.: The Pricing of Equity-linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee. In: *Journal of Financial Economics*, Band 3:S. 195–213, 1976.

- Brennan, Michael J. und Schwartz, Eduardo S.: Time-Invariant Portfolio Insurance Strategies. In: *Journal of Finance*, Band 43(2):S. 283–299, 1988.
- Carr, Peter P. und Jarrow, Robert A.: The Stop-Loss Start-Gain Paradox and Option Valuation: A New Decomposition into Intrinsic and Time Value. In: *The Review of Financial Studies*, Band 3(3):S. 469–492, 1990.
- Cont, Rama und Tankov, Peter: Constant Proportion Portfolio Insurance in presence of Jumps in Asset Prices, 2007. Working Paper.
- Cvitanić, J., Lazrak, A. und Wang, T.: Sharpe Ratio as a performance measure in a multi-period model. In: *Journal of Economics, Dynamics and Control*, 2007. To Appear.
- Cvitanić, Jaksa und Karatzas, Ioannis: On Portfolio Optimization under "Drawdown" Constraints. In: Davis, M., Duffie, D., Fleming, W. und Shreve, S. (Hg.) *Mathematical Finance*, Springer Verlag, New York, S. 35–46. 1995.
- Dudenhausen, Antje: *Analyse der Effektivität von Absicherungsstrategien in unvollständigen Finanzmarktmodellen*. Dissertation, Universität Bonn, 2001.
- Duffie, Darrell und Protter, Philip: From Discrete-to Continuous-Time Finance: Weak Convergence of the Financial Gain Process. In: *Mathematical Finance*, Band 2(1):S. 1–15, 1992.
- El Karoui, Nicole, Jeanblanc, Monique und Lacoste, Vincent: Optimal portfolio management with American capital guarantee. In: *Journal of Economics, Dynamics and Control*, Band 29:S. 449–468, 2005.
- Embrechts, Paul, Klüppelberg, Claudia und Mikosch, Thomas: *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- Emmer, Susanne, Klüppelberg, Claudia und Korn, Ralf: Optimal Portfolios with bounded Capital at Risk. In: *Mathematical Finance*, Band 11(4):S. 365–384, 2001.
- Estep, T. und Kritzman, M.: TIPP: Insurance without complexity. In: *Journal of Portfolio Management*, Band 14:S. 38–42, 1988.
- Glasserman, Paul: *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- Gordon, R.D.: Values of Mill's ratio of area to bounding ordinate of the normal probability integral for large values of the argument. In: *Annals of Mathematical Statistics*, Band 12:S. 364–366, 1941.

- Grossman, Sanford J. und Zhou, Zhongquan: Optimal Investment Strategies for Controlling Drawdowns. In: *Mathematical Finance*, Band 3(3):S. 241–276, 1993.
- Haug, Espen Gaarder: *Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill, zweite Auflage, 2007.
- Ingersoll jr., Jonathan E.: *Theory of Financial Decision Making*. Rowman & Littlefield Publishers, 1987.
- Itô, Kiyosi und McKean, Henry P.: *Diffusion Processes and their Sample Paths*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- Jacod, J. und Shiryaev, A.N.: *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer-Verlag, 1980.
- James, Peter: *Option Theory*. New York: Wiley, 2003.
- Karatzas, Ioannis und Shreve, Steven E.: Trivariate Density of Brownian Motion, Its Local and Occupation Times, with Application to Stochastic Control. In: *The Annals of Probability*, Band 12(3):S. 819–828, 1984.
- Karatzas, Ioannis und Shreve, Steven E.: *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1991.
- Kloeden, Peter E. und Platen, Eckhard: *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag, Berlin, 1999.
- Leland, Hayne E.: Who Should Buy Portfolio Insurance. In: *Journal of Finance*, Band 35(2):S. 581–594, 1980.
- Leland, Hayne E. und Rubinstein, Mark: The Evolution of Portfolio Insurance. In: Luski, Don (Hg.) *Dynamic Hedging: A Guide to Portfolio Insurance*, John Wiley and Sons. 1988.
- Mahayni, A.: Effectiveness of Hedging Strategies under Model Misspecification and Trading Restrictions. In: *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, Band 6(5):S. 521–552, 2003.
- Mahayni, Antje und Suchaneki, Michael: Produktdesign und Semi-Statistische Absicherung von Turbe-Zertifikaten. In: *Zeitschrift für Betriebswirtschaftslehre*, Band 4:S. 347–372, 2006.
- Markowitz, Harry: Portfolio Selection. In: *Journal of Finance*, Band 7:S. 77–91, 1952.
- Merton, Robert C.: Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case. In: *Review of Economics and Statistics*, Band 51(August):S. 247–257, 1969.

- Merton, Robert C.: *Continuous-Time Finance*. Blackwell, 1990.
- Milevsky, Moshe Arye und Posner, Steven E.: Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution. In: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Band 33(3):S. 409–422, 1998.
- Nielsen, J.Aase und Sandmann, Klaus: Pricing Bounds on Asian Options. In: *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Band 38(2):S. 449–473, 2003.
- Revuz, Daniel und Yor, Marc: *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- Rogers, L.C.G. und Williams, David: *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*. Cambridge University Press, zweite Auflage, 2000.
- Sharpe, William F.: Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk. In: *Journal of Finance*, Band 19:S. 425–442, 1964.
- Yor, Marc: On Some Exponential Functionals of Brownian Motion. In: *Advances in Applied Probability*, Band 24(3):S. 509–531, 1992.