

**Landau-Zener-Stückelberg Interferometrie  
mit ultrakalten Atomen in Fourier-  
synthetisierten optischen Gitterpotentialen**

**Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

vorgelegt von

Sebastian Kling

aus

Wuppertal

Bonn 2011

Angefertigt mit der Genehmigung  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Martin Weitz
2. Gutachter: Priv. Doz. Dr. Matz Haaks

Tag der Promotion: 16.11.2011

Erscheinungsjahr: 2011

# Zusammenfassung

Interferometrie ist in der Physik ein viel genutztes Verfahren zur Vermessung von Längen und Zeiten, das den Wellencharakter der interferierenden Teilchenwellen nutzt. Begründet wurde die Interferometrie in der Optik zu Beginn des 19ten Jahrhunderts. Heutzutage ist die Konstruktion von Interferometern mit einer Vielzahl wellenartiger Teilchen möglich. Der Anwendungsbereich erstreckt sich dabei von Elektronen über Neutronen bis hin zu Molekülen. Atomare de Broglie Wellen erlauben aufgrund ihrer inneren Struktur die Verwendung von Lichtwellen als Strahlteiler, was vorteilhaft für Präzisionsmessungen ist. Die Verwendung ultrakalter atomarer Gase bietet auch eine mögliche Steigerung der Genauigkeit für beispielsweise atominterferometrische Messungen der Gravitation oder der Photonrückstoßenergie.

In dieser Arbeit werden Experimente zur Konstruktion eines neuartigen Atominterferometers mit ultrakalten Atomen in variablen optischen Gitterpotentialen beschrieben. Für die Experimente wurde ein Bose-Einstein Kondensat aus Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ) hergestellt und mit einem bichromatischen optischen Gitter überlagert, das durch eine Fourier-Synthese von variablen Lichtpotentialen generiert wurde. Das verwendete optische Gitter ist zusammengesetzt aus einer Stehwelle und einem Vierphotonen-Gitter mit den effektiven Periodizitäten von  $\lambda/2$  bzw.  $\lambda/4$ , wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Laserlichts ist. Das Vierphotonen-Gitter beruht auf dispersiven Eigenschaften von Raman-Übergängen.

Bei geeigneter Wahl der Gitterpotentialtiefen ist es möglich zwei Bloch-Bänder von den übrigen Bändern energetisch zu isolieren. Diese beiden Bänder bilden ein Miniband-System. In dieser Arbeit wurde die Dynamik von Atomen, die in ein solches Zwei-Band-System geladen werden, untersucht. Die im optischen Gitter beschleunigten Atome führen Bloch-Zener-Oszillationen aus. Hierbei überlagern sich die beiden bekannten Effekte des partiellen Landau-Zener Tunnelns und der Bloch-Oszillation kohärent zu einer kombinierten komplexen Bewegung, der sogenannten Bloch-Zener-Oszillation.

Das Auftreten von partiellem Landau-Zener Tunneln teilt das im optischen Gitter beschleunigte Bose-Einstein Kondensat kohärent in zwei Teilwellen, während die Dispersion des Zwei-Band-Systems dafür sorgt, dass die Teilwellen nicht auseinander laufen sondern kohärent wieder zusammengeführt werden. Die Kohärenz dieses dynamischen Teilens und Zusammenführens wurde experimentell nachgewiesen durch die Konstruktion des Landau-Zener-Stückelberg Interferometers - ein Zweistrahlinterferometer, das auf der Variation der Stückelberg-Phase beruht. Die Stückelberg-Phase ist eine dynamische Phase, die beim Durchlaufen der Dispersionskurven von den Atomen aufgenommen wird. Aus dem Interferenzbild der wieder zusammengeführten Kondensatwellen ließ sich der energetische Abstand des Zwei-Band-Systems über die gesamte Brillouin-Zone rekonstruieren. Das Landau-Zener-Stückelberg Interferometer könnte in Zukunft genutzt werden, um Bandstrukturen genauer zu analysieren. Auch interessant wäre, die Anwendung des Interferometers zur Messung von Kräften auf der Mikrometerskala, womit Untersuchungen der Casimir-Kräfte oder die Suche nach möglichen Abweichungen vom Newtonschen Gravitationsgesetz möglich sind.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>9</b>
2.1	Abriss der Bose-Einstein Kondensation . . . . .	9
2.2	Magneto-optische Falle . . . . .	14
2.3	Dipolfalle und optische Gitter . . . . .	16
2.3.1	Optische Dipolfalle . . . . .	16
2.3.2	Konventionelle optische Gitter . . . . .	20
2.3.3	Vierphotonen-Gitter und Fourier-Synthese	21
2.4	Bloch-Theorie und Bändermodell . . . . .	23
2.5	Getriebene Zwei-Niveau-Systeme . . . . .	27
2.5.1	Rabi-Lösung . . . . .	29
2.5.2	Landau-Zener Übergänge . . . . .	30
2.6	Bloch-Oszillation . . . . .	32
2.7	Bloch-Zener-Oszillation . . . . .	34
2.8	Landau-Zener-Stückelberg Interferometrie . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Aufbau des Experiments</b>	<b>39</b>
3.1	Aufbau der Vakuumapparatur . . . . .	39

3.2	Magneto-optischen Falle und Dipolfalle . . . . .	42
3.3	Fourier-synthetisierte optische Gitter . . . . .	47
3.4	Ablauf des Experiments . . . . .	53
3.5	Charakterisierung des optischen Gitters . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse</b>	<b>61</b>
4.1	Atomare Bloch-Oszillation im Vierphotonen-Gitter	62
4.2	Atomare Bloch-Zener-Oszillationen . . . . .	64
4.3	Atomares Landau-Zener-Stückelberg Interferometer	68
4.4	Interferometrische Bestimmung des Energieabstands	72
<b>5</b>	<b>Diskussion und Ausblick</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Ansteuerung des Funktionsgenerators</b>	<b>79</b>
A.1	Python-Skript . . . . .	79
A.2	GPIB-Befehle . . . . .	81
<b>B</b>	<b>Numerische Simulationen</b>	<b>83</b>
<b>C</b>	<b>Datensatz</b>	<b>87</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Der Entwurf der Theorie des einatomigen idealen Quantengases auf der Grundlage der Bose-Statistik [1], führte A. Einstein auf einen neuen thermodynamischen Zustand, der heute als Bose-Einstein Kondensat bezeichnet wird [2,3]. Die Realisierung eines atomaren Bose-Einstein Kondensates gelang erstmals im Jahr 1995 [4,5,6]. Einige Jahre später gelang auch die Erzeugung eines ultrakalten entarteten Fermigases [7]. Im Bereich der ultrakalten Atome und deren Manipulation mit Licht- und Magnetfeldern hat ein sich schnell entwickelndes Forschungsfeld eröffnet, auf dem viele bedeutende Experimente durchgeführt wurden [8,9,10]. Die Manipulierbarkeit der ultrakalten Gase mit äußeren elektrischen und magnetischen Feldern, wie Dipolfallen, Magnetfallen, optischen Gittern oder Feshbach-Resonanzen, und die außerordentliche Kontrollierbarkeit der Parameter dieses Systems wecken die Hoffnung auf die Simulation einer Vielzahl quantenmechanischer Systeme [11,12,13]. Die Idee Quantensysteme zu simulieren stammt von R. Feynman, der erkannte, dass das Verhalten eines komplexen Quantenmodells nur durch ein anderes Quantensystem effizient zu bestimmen ist [14]. Klassische Computer benötigen zur Simulation komplexer Quantensysteme extrem große Rechenleistungen. Die Idee des Quantencomputers war geboren.

Ein aussichtsreiches Modell, um die nötige Kontrolle über ein Quantensystem wie das Bose-Einstein Kondensat zu bekommen, ist das durch eine optische Stehwelle erzeugte optische Gitter. Die Schwingungsbüchse der elektrischen Stehwelle der Wellenlänge  $\lambda$  stellen Mikrofallen im periodischen Abstand von  $\lambda/2$  dar, in denen die Atome gefangen werden können. Ein optisches Gitter für kalte Atome wurde erstmals 1987 realisiert [15]. Optische Gitter, manchmal auch Lichtkristalle genannt, können aufgrund ihrer reinen periodischen Struktur, als Festkörpermodell dienen. Mit ultrakalten Atomen in optischen Gittern wurden unter anderem Landau-Zener Übergänge [16] und Bloch-Oszillationen [17] untersucht sowie der Phasenübergang von einem Superfluid zu einer Mott-Isolator-Phase [18]. Der Quantenphasenübergang bei letzterem wurde durch die Variation der Potentialtiefe des optischen Gitters getrieben. Wichtig für die Kontrolle der Atome in optischen Gittern, ist zudem die Möglichkeit einzelne Atome in einzelnen Gitterplätzen optisch abzubilden und zu manipulieren [19, 20]. Mittels Elektronenmikroskopie kann sogar eine räumliche Auflösung klar unterhalb der Größe eines Gitterplatzes erreicht werden [21]. Mit diesen Methoden wird die Dynamik einzelner Atome beobachtbar [22, 23].

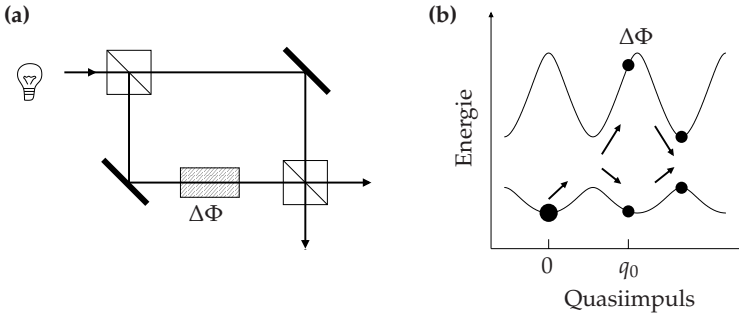
Ultrakalte Atome sind nicht die einzigen gut kontrollierbaren Quantensysteme. Zu den Systemen mit einem hohen Maß an Kohärenz zählen unter anderem supraleitende Qubits [24, 25]. Das sind Festkörperobjekte mit lithographisch zusammengesetzten Josephson-Tunnel-Verbindungen und supraleitenden Verschaltungen, die bei Temperaturen im Millikelvin Bereich quantisierte Ladungszustände aufweisen. Das zugehörige Energiespektrum kann durch elektrische und magnetische Felder verstimmt werden und ermöglicht beispielsweise die Konstruktion sensibler Magnetfeldmessgeräte. Das sogenannte SQUID (superconducting quantum interference devices) kann per Induktion im Prinzip einzelne Flussquanten eines Magnetfeldgradienten messen und konnte bereits zum Nachweis von magnetisch markierten Bakterien in einer Suspension genutzt werden [26]. Das Manipulieren des Energiespektrums umfasst Anwendungen von Mach-



Zehnder Interferometern, Mikrowellen-induziertes Kühlen und Amplituden-Spektroskopie [27, 28, 29], was zur Zustandspräparation der Qubits und deren Kontrolle genutzt werden kann [30, 31].

Ein weiteres gut kontrollierbares Quantensystem sind Systeme mit sogenannten Rydbergatomen, das sind elektronisch hoch angeregte Atome, die ebenfalls zur Simulation quantenmechanischer Systeme vorgeschlagen worden sind [32, 33]. Kohärenzeigenschaften von Rydbergatomen wurden mit der Demonstration von Stückelberg-Oszillationen nachgewiesen [34]. Neuerdings konnten Rabi-Oszillationen zwischen dem Grundzustand von einem Rubidiumatom ( $^{87}\text{Rb}$ ) und einem Rydbergzustand mit  $n \leq 43$ , wobei  $n$  die Hauptquantenzahl ist, aufgenommen werden, die eine Rabi-Frequenz im Bereich von  $\sim 0.5$  MHz aufweisen [35]. Diese hohe Frequenz resultiert von dem bei Rydbergatomen großem Dipolübergangsmoment  $d$ , der mit dem Quadrat der Hauptquantenzahl skaliert  $d \sim n^2$ . Daher kann die Dipol-Dipol-Wechselwirkung zweier Rydbergatome sehr groß werden, was in Hinblick auf die Realisierung eines Quantencomputers genutzt werden könnte, um schnelle Quantenprozessoren herzustellen [36].

Eine ganz andere Anwendung finden die kalten Atome außerdem in der Interferometrie. In der Optik ist die Interferometrie eine seit dem 19ten Jahrhundert bekannte Messmethode, die den Wellencharakter des Lichts nutzt. Ein Interferometer besteht typischerweise aus einem Strahl wellenartiger Objekte, in der Optik sind das die Photonen, und einem Strahlteiler, der einen einfallenden Strahl kohärent in zwei oder mehr Teilstrahlen aufteilt. Die Teilstrahlen werden auf einen Schirm zusammen geführt und ein Interferenzbild entsteht. In der Optik bekannte Zweistrahl-Interferometer sind beispielsweise das Michelson Interferometer (1882), das zur Vermessung des Urmeters benutzt wurde, und das Mach-Zehnder Interferometer (1891), das kleine Phasendifferenzen zwischen den beiden Teilstrahlen misst [37]. Abbildung 1.1(a) zeigt das Schema des Mach-Zehnder Interferome-



**Abb. 1.1:** (a) Schema des optischen Mach-Zehnder Interferometers. (b) Schema des Landau-Zener-Stückelberg Interferometers. Betrachtet wird die Dynamik eines Wellenpakets in den Energiebändern eines Zwei-Niveau-Systems. Die vermiedenen Kreuzungen dienen als Strahlteiler, während die Scheitelpunkte zwischen den Kreuzungen als Spiegel fungieren.

ters.

Das Prinzip der Interferometrie läßt sich auch auf Materiewellen anwenden. Diese wurden allerdings erst seit den 1950er Jahren relevant, als die ersten Elektronen- und seit den 1970er Jahren Neutroneninterferometer konstruiert wurden [38, 39, 40]. Seit etwa 1990 finden auch ultrakalte Neutronen [41] und atomare Gase Anwendung in der Interferometrie, um fundamentale physikalische Konstanten wie beispielsweise die Feinstrukturkonstante [42] und die Gravitationskonstante  $G$  zu vermessen [43, 44].

Im Allgemeinen lassen sich Atominterferometer in zwei Kategorien einordnen. Bei den einen findet eine echte räumlich Trennung der Atome statt und bei den anderen werden die Atome durch eine Zustandsänderung getrennt. Im Rahmen dieser Arbeit ist es gelungen ein neuartiges Interferometer der zweiten Kategorie mit ultrakalten Atomen zu konstruieren. Es stellt eine Analogie zu dem optischen Mach-Zehnder Interferometer dar und ist schematisch in Abb. 1.1(b) gezeigt. Dabei wird die Dispersionsrelation eines Bose-Einstein Kondensates in einem bichromatischen optischen Gitter genutzt, um die Materiewelle zu

teilen und wieder zusammenzuführen. Die Relativphase auf den Pfaden kann über die Stückelberg-Phase variiert werden.

## **Struktur der Arbeit**

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen zur Dynamik von Bose-Einstein Kondensaten in optischen Gitterpotentialen zusammengestellt und der Entwurf des Landau-Zener-Stückelberg Interferometers wird vorgestellt. Das dritte Kapitel beschäftigt sich mit dem experimentellen Aufbau und der Herstellung von ultrakalten Atomen in variablen optischen Gittern. Im Kapitel 4 werden die durchgeführten Experimente zu den Bloch-Zener- und Stückelberg-Oszillationen beschrieben und analysiert.



# Kapitel 2

## Theoretische Grundlagen

Im folgenden Kapitel werden notwendige theoretische Grundlagen für diese Arbeit zusammengestellt. Einleitend wird die Kondensation massiver Bosonen im großkanonischen Ensemble nachvollzogen, um dann den Einfluss variabler optischer Gitter auf das Bose-Einstein Kondensat zu beschreiben. Die bichromatischen optischen Gitter führen auf ein effektives Zwei-Niveau-System für die Atome im Kondensat, in dem Bloch-Zener- und Stückelberg-Oszillationen auftreten können.

### 2.1 Abriss der Bose-Einstein Kondensation

In der Quantenstatistik werden zwei fundamentale Teilchen unterschieden, zum einen die Bosonen, zum anderen die Fermionen. Ihre Beschreibung unterscheidet sich in der Wahrscheinlichkeit, mit der die quantenmechanisch erlaubten Zustände des Systems besetzt werden. Ein Gas von Bosonen in einer großkanonischen Gesamtheit genügt bei der mittleren Besetzung seiner Zustände  $n_l$  der Bose-Einstein Verteilung [1,2]

$$n_l = \frac{1}{\exp(\beta(E_l - \mu)) - 1}, \quad (2.1)$$

wobei  $E_l$  die Einteilchenenergie des  $l$ -ten Quantenzustands,  $\mu \leq E_l$  das chemische Potenzial und  $\beta = 1/k_B T$  die inverse absolute Temperatur multipliziert mit der Boltzmann Konstanten  $k_B$  ist. Wesentliche Eigenschaften der Bose-Einstein Verteilung (2.1) sind die Divergenz gegen  $+\infty$  für kleine Temperaturen  $\beta(E_l - \mu) \rightarrow 0$  und die Konvergenz gegen die Boltzmann-Verteilung für hohe Temperaturen  $\beta(E_l - \mu) \rightarrow \infty$ , d.h. für hohe Temperaturen verhält sich das Quantengas wie ein klassisches Gas. Die Divergenz dagegen bedeutet, dass letztlich alle Teilchen den Grundzustand des Systems besetzen, wenn die Temperatur beliebig klein wird. Albert Einstein interpretierte dies als einen Phasenübergang von einer quasiklassischen 'warmen' Phase zu einer quantenmechanischen 'kalten' Phase [3]. Heute wird als Bose-Einstein Kondensation die Kondensation in einen makroskopisch besetzten Grundzustand  $E_0$  eines Systems verstanden, welches aus bosonischen Teilchen, äußeren Feldern und Wechselwirkungen besteht.

Eine grobe Abschätzung, bei welchen Temperaturen die Bose-Einstein Kondensation beginnt, liefert die großkanonische Beschreibung des freien einatomigen Bosegases in drei Dimensionen. Der kritische Punkt  $\mu_c = E_0$  legt eine kritische Temperatur fest, bei der die Kondensation in den Grundzustand beginnt, und ergibt in der semiklassischen Näherung [45]

$$k_B T_c = 3.31 \frac{\hbar^2}{M} \left( \frac{\rho_c}{S} \right)^{2/3}, \quad (2.2)$$

wobei  $T_c$  die kritische Temperatur,  $\rho_c$  die kritische Dichte und  $M$  die Masse eines Bosons ist. Die Spinartung der Energien durch den Spin  $s$  der Bosonen ist durch  $S = 2s + 1$  berücksichtigt. Gleichung (2.2) legt wahlweise eine Temperatur bei gegebener Dichte fest oder gerade anders herum. Für die Dichte von Luft bei Standardbedingungen von etwa  $\rho = 10^{25} / m^3$  ergibt sich aus (2.2) eine Temperatur im Bereich von 10 mK, vorausgesetzt es gelingt diese Dichte konstant zu halten bei der Temperaturabsenkung.

In üblichen atomphysikalischen Experimenten existiert jedoch

kein freies Gas, sondern es wird in Äußeren magnetischen und elektrischen Feldern gefangen, die als Fallen bezeichnet werden. Die meisten verwendeten Fallen können in guter Näherung durch ein harmonisches Potential  $V(x) = M/2(\omega_1 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3 x_3^2)$  beschrieben werden. Die kritische Temperatur zeigt in dieser Situation eine andere Abhängigkeit von der Dichte als in Gleichung (2.2) für freie Gase angegeben (der Exponent ist hier  $1/3$  und nicht  $2/3$ ) und hängt zudem von den Fallenfrequenzen  $\omega_i$  ab [46]. In vielen Experimenten liegt die Kondensationstemperatur typischerweise bei  $\sim 100$  nK.

*Finite-Size-Korrekturen.* Die semiklassischen Vorhersagen thermodynamischer Größen der großkanonischen Gesamtheit sind erwartungsgemäß dann sehr gut, wenn das betrachtete System bzw. wenn die Teilchenzahl und das Volumen sehr groß sind. Für endlich große Systeme können Korrekturen dazu bestimmt werden [47,48]. Diese sind für die experimentell zugänglichen Systeme schon bei relativ geringen Teilchenzahlen von etwa  $N = 1000$  in der Größenordnung von einigen Prozent [49]. Dabei sind die Korrekturen derart, dass beispielsweise die kritische Temperatur (2.2) nach unten korrigiert wird, d.h. die Kondensation erschwert wird.

*Wechselwirkung.* Ob Bose-Einstein Kondensation in einem System miteinander wechselwirkender Bosonen überhaupt stattfinden kann, ist nicht selbstverständlich und hängt wesentlich von der Stärke der Wechselwirkung ab. Ziehen sich die Bosonen an, ist die Bose-Einstein Kondensation stark durch andere Phasenübergänge zu Flüssigkeiten oder Festkörpern behindert [50]. Aber sie ist nicht generell ausgeschlossen und es können interessante Bereiche von Wachstum und Kollaps eines Bose-Einstein Kondensates beobachtet werden [51]. Einerseits stoßen sich die Bosonen zu stark ab, drängen sie sich gegenseitig aus dem gemeinsamen Grundzustand, es findet also keine makroskopische Besetzung des Grundzustands oder zumindest keine vollständige Kondensation statt. Andererseits funktioniert die Verdampfungskühlung - ein wichtiger Schritt bei der Erzeugung eines Bose-Einstein

Kondensates - nur dann gut, wenn die Bosonen sich gegenseitig stoßen und Energie übertragen können [52]. Darüberhinaus ist bei einer repulsiven Wechselwirkung eine Absenkung der kritischen Temperatur zu erwarten [46]. Für viele erfolgreich kondensierte bosonische Teilchen (z.B. Rubidium, Natrium) ist die Wechselwirkung schwach repulsiv, bei manchen ist sie attraktiv (z.B. Lithium) und bei manchen Systemen lässt sich die Wechselwirkung sogar gut über sogenannte Feshbach-Resonanzen einstellen [53,54].

*Gross-Pitaevskii-Gleichung.* In dünnen Gasen, d.h. wenn der mittlere Abstand  $d = \rho^{-1/3}$  der Gasteilchen sehr viel größer ist als die Reichweite  $r_0$  der Wechselwirkung zwischen den Teilchen, ist es gerechtfertigt nur die Wechselwirkung zwischen Paaren von Teilchen zu betrachten und alle Konfigurationen mit drei oder mehr gleichzeitig miteinander wechselwirkender Teilchen zu vernachlässigen. Die Reichweite der Wechselwirkung kann in diesem Fall bei kleinen Wechselwirkungsenergien durch die s-Streuwellenlänge  $a_s$  beschrieben werden [55] und führt zu einem effektiven Wechselwirkungspotential der Stärke

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{M}. \quad (2.3)$$

Die s-Streuwellenlänge ist vergleichbar mit dem Radius einer harten Kugel, wenn die Wechselwirkung der Atome als ein Stoßprozess von harten Kugeln interpretiert wird.

Die quantenmechanische Beschreibung eines bosonischen Vielteilchensystems nutzt in der zweiten Quantisierung Feldoperatoren  $\hat{\psi}$ , die einzelne Bosonen erzeugen und vernichten können. Bezogen auf die Bose-Einstein Kondensation bedeutet die Trennung von Grundzustand und angeregten Zuständen die Zerlegung des Feldoperator  $\hat{\psi}(r, t) = \psi(r, t) + \hat{\psi}'(r, t)$  in einen Ordnungsparameter  $\psi(r, t) = \langle \hat{\psi}(r, t) \rangle$ , der als Erwartungswert des Feldoperators definiert ist, und einen Anregungsterm, der als kleine Störung behandelt wird. Im Rahmen der von N.N. Bogoliubov angestoßenen Molekularfeldtheorie der Bose-Einstein Kondensation [56] beschreibt der Ordnungsparameter  $\psi$ , der auch



als Kondensatwellenfunktion bezeichnet wird, die makroskopische Besetzung eines Zustands und erfüllt die zeitabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung [57]

$$i\hbar\partial_t\psi = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi + V(x,t)\psi + g|\psi|^2\psi, \quad (2.4)$$

wobei  $V(x,t)$  äußere Felder und  $g$  (2.3) die Wechselwirkungsstärke sind. Der Ordnungsparameter ist auf die Teilchenzahl  $N$  normiert,  $\int dx|\psi|^2 = N$ . Formal ist die Gross-Pitaevskii Gleichung (2.4) eine nichtlineare Schrödinger Gleichung, deren Nichtlinearität proportional zur Dichte  $\rho = |\psi|^2$  ist. Die zeitabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung (2.4) wird durch den Ansatz

$$\psi(x,t) = \exp(-i\mu t/\hbar)\psi(x) \quad (2.5)$$

zur zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii Gleichung

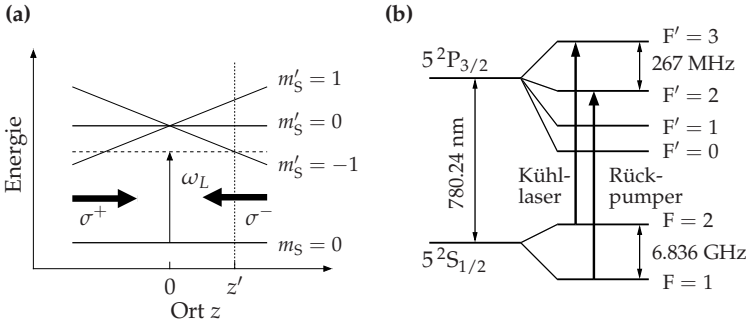
$$\mu\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi(x) + V(x,t)\psi(x) + g|\psi(x)|^2\psi(x), \quad (2.6)$$

wobei  $\mu$  das chemische Potential ist.

*Bogoliubov-Spektrum.* Wird das chemische Potential  $\mu$  als Energieeigenwert aufgefasst, hat die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung (2.6) aufgrund der Nichtlinearität Anregungsenergien, die von der Population der Anregungszustände abhängig sind. Die Beschreibung eines Spektrums von Anregungsenergien kann daher nur sinnvoll bleiben, wenn die Anregungen als Störungen des Grundzustands aufgefasst werden. Mit dem Ansatz

$$\Psi(x) = \psi(x) + u(x)\exp(-i\omega t) + v^*(x)\exp(i\omega t), \quad (2.7)$$

wobei  $u, v$  als Störung des Grundzustands  $\psi$  aufgefasst werden, erhält man aus der zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii Gleichung (2.6) zwei gekoppelte Gleichungen, aus denen sich das Bogoliubov-Spektrum von Anregungsenergien  $E = \hbar\omega$  bestimmen lassen [58]. Im homogenen Fall  $V(x,t) = 0$  zeichnet sich das Bogoliubov-Spektrum durch eine phononartige, lineare Dispersion für kleine Wellenvektoren  $k$  der Anregung aus, das für hohe Energien quadratisch wird, wie es für freie Teilchen üblich ist [56].



**Abb. 2.1:** (a) In dem linearen Magnetfeld der magneto-optischen Falle spalten die Zeeman-Zustände gemäß ihrem magnetischen Moment auf. (b) Das Termschema der  $D_2$ -Linie von  $^{87}\text{Rb}$ . Eingezeichnet sind der Kühl- und der Rückpumpübergang, die im vorliegendem Experiment verwendet werden.

## 2.2 Magneto-optische Falle

Die magneto-optische Falle (kurz MOT) wird zum Fangen und Kühlen von Atomen verwendet. Ein vereinfachtes Modell zur Veranschaulichung der Wirkungsweise der Falle geht von einem hypothetischem Atom mit einem Spin  $S = 0$  ( $m_S = 0$ ) Grundzustand und einem angeregten Zustand mit Spin  $S = 1$  ( $m_S = 0, \pm 1$ ) aus. Ein schwaches, lineares äußeres Magnetfeld  $B(z) = bz$  spaltet die Energieniveaus mit  $\Delta E(z) = m_S \mu_B bz$  auf. Das Niveauschema eines solchen Atoms ist in Abb. 2.1(a) dargestellt. Das Atom wird nun von rechts mit kollimiertem  $\sigma^-$ -polarisiertem Licht und von links mit  $\sigma^+$ -polarisiertem Laserlicht beleuchtet. Ist die Laserfrequenz  $\omega_L$  rot-verstimmt zur Resonanzfrequenz bei  $B = 0$ , absorbiert das Atom an der Stelle  $z'$  auf der rechten Seite mehr  $\sigma^-$ - als  $\sigma^+$ -Photonen, da die Laserfrequenz in diesem Fall näher an der  $\Delta m = -1$  Übergangsfrequenz ist. Durch den aufgenommenen Photonenimpuls erfährt das Atom im zeitlichen Mittel eine Kraft in Richtung Fallenzentrum. Ein räumlicher Einfang der Atome kann durch Hinzufügen weiterer gegenläufiger Laserstrahlen aus den beiden anderen Raumrichtungen und eines sphärischen Quadrupolfeldes erreicht werden.

Der Kraftübertrag auf die Atome ist geschwindigkeitsabhängig, da die Resonanzfrequenzen eines sich in der Falle bewegenden Atoms eine Dopplerverschiebung erleiden. Für rot-verstimmte Laserfrequenzen ist der Impulsübertrag stets der Bewegungsrichtung des Atoms entgegen gerichtet. Dies hat die Abbremsung des Atoms zur Folge. Ein Gas solcher Atome mit einem Zeeman Grundzustand kann so gekühlt werden bis die Temperatur der Dopplergrenze  $T_D = \hbar\gamma/2k_B$  erreicht ist, wobei  $\gamma$  die natürliche Linienbreite bezeichnet [59]. Die Dopplertemperatur ist die Folge eines Gleichgewichts von Kühl- und Heizprozessen (z.B. Rückstöße in beliebige Richtung durch Spontanemission) und liegt für  $^{87}\text{Rb}$  bei etwa  $T_D = 141 \mu\text{K}$ .

Experimentell zeigte sich allerdings, dass sich mit der Laserkühlung auch Temperaturen deutlich unterhalb der Dopplergrenze erreichen lassen [60]. Dieses Phänomen kann mit einem zusätzlich auftretenden Kühlmechanismus erklärt werden, der unter dem Namen Sisyphus-Kühlung bekannt ist [61, 62]. Er beruht auf dem atomaren Spin und der linearen Polarisation des Lichts, die eine räumliche periodische Modulation der Zeeman-Zustände bewirkt. Dadurch muss das dynamische Atom einen Potentialwall innerhalb der Zeeman-Zustände erklimmen und verliert dabei kinetische Energie. An der Spitze des Berges angekommen wird es dann durch die Lichtfelder ins Tal gepumpt und sieht sich erneut einem Berg gegenüber. So läuft das Atom stets bergauf und verliert dabei beständig kinetische Energie, die Dopplergrenze kann so bis zum vierzig-fachen unterschritten werden [62]. Diese sogenannte Sub-Dopplerkühlung tritt auch dann auf, wenn nicht linear sondern zirkular polarisiertes Licht verwendet wird [63].

In dem hier beschriebenen Experiment wird zum Kühlen und Fangen der Rubidiumatome ( $^{87}\text{Rb}$ ) ein Kühllaser benutzt, dessen Lichtfrequenz um etwa drei Linienbreiten (rund 18 MHz) rotverstimmt ist zur Resonanzfrequenz des Übergangs  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  der  $D_2$ -Linie, vgl. Abb. 2.1(b). Durch spontanen Zerfall können die Atome allerdings auch in den Grundzustand  $F = 1$  über-

gehen, wo sie nicht mehr von dem Kühllaser angeregt werden können und so aus dem Kühlprozess ausscheiden. Diese Atome werden durch den Rückpumplaser in den Kühlkreislauf zurückgeführt, der die Atome von  $F = 1$  nach  $F' = 2$  anregt. Von diesem Zustand können die Atome wieder in den Zustand  $F = 2$  fallen und gekühlt werden.

## 2.3 Dipolfalle und optische Gitter

Eine weitere Technik, die zum Fangen und Kühlen von Atomen verwendet wird, nutzt ein weit von der atomaren Resonanz verstimmt intensives Lichtfeld aus, dessen elektrisches Feld stark genug ist, um das Atom merklich zu polarisieren. Die Ladungsverschiebung im Atom hat zur Folge, dass das anfänglich elektrisch neutrale Atom zu einem Dipol wird. Ein elektrischer Dipol erfährt, anders als ein neutrales Atom, in einem elektrischen Feld eine Kraft, die Dipolkraft. Die Dipolkraft kann so ausgenutzt werden, dass sich die Dipole an einem Ort fangen lassen. Wie das genau funktioniert und wie sich die Dipolkraft noch nutzen lässt, um optische Gitter zu erzeugen, wird im Folgenden beschrieben.

### 2.3.1 Optische Dipolfalle

Eine einfache Beschreibung der Wechselwirkung von Licht und Atom liefert das Oszillatormodell. Hierbei wird das Atom als ein harmonischer Oszillator aufgefasst. Bei der Darstellung der optischen Dipolfalle wird im Wesentlichen die Argumentation von [64] nachvollzogen.

Das elektrische Feld eines polarisierten Laser-Lichtstrahls wird beschrieben durch

$$E(r, t) = \hat{e}E(r) \exp(i\omega t) + \hat{e}E^*(r) \exp(-i\omega t), \quad (2.8)$$

wobei  $\hat{e}$  der Polarisations-Einheitsvektor ist. Das induzierte Di-

polmoment  $D = \hat{e}d(r) \cdot \exp(-i\omega t) + c.c.$  des Atoms in diesem Feld oszilliert mit derselben Frequenz  $\omega$  wie das Lichtfeld, seine Amplitude  $d(r)$  ergibt sich aus der Feldstärke des Lichts

$$d(r) = \alpha(\omega)E(r), \quad (2.9)$$

wobei  $\alpha$  die komplexe Polarisierbarkeit des Atoms ist. Das induzierte Dipolmoment  $D$  koppelt an sein erzeugendes Feld und führt so zu einem effektiven Wechselwirkungspotential von Atom und Lichtfeld, das durch

$$V_{\text{dip}}(r) = \frac{1}{2} \langle DE \rangle = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I, \quad (2.10)$$

beschrieben wird. Die Winkelklammer  $\langle \dots \rangle$  bezeichnet dabei eine zeitliche Mittelung der schnell oszillierenden Terme, die Intensität des Laserfelds ist mit  $I$  eingeführt worden und  $\epsilon_0$  ist die elektrische Feldkonstante. Die potentielle Energie des Dipols ist also proportional zum Realteil der Polarisierbarkeit  $\alpha$  und der Intensität  $I$ , welches das In-Phase-Schwingen des Dipols zum Ausdruck bringt. Der Gradient des Dipolpotentials (2.10) ergibt die Dipolkraft

$$F_{\text{dip}}(r) = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \nabla I(r). \quad (2.11)$$

Die Leistung, die der Oszillator vom Lichtfeld absorbiert, ist durch

$$P_{\text{abs}}(r) = \langle \dot{D}E \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(r) \quad (2.12)$$

gegeben. Wird das Lichtfeld als Strom von Photonen der Energie  $\hbar\omega$  aufgefasst, kann die Absorption von Leistung auch als Streuung von Photonen interpretiert werden. Die zugehörige Streurrate ist dann durch

$$\Gamma_{\text{str}}(r) = \frac{P_{\text{abs}}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(r) \quad (2.13)$$

gegeben. Die Dipolkraft (2.11), die genutzt wird, um Atome zu fangen, und die Streurrate der Photonen (2.13), die das Fangen

von Atomen beeinträchtigen kann, sind die zentralen Größen bei der Atom-Licht Wechselwirkung. Um diese besser verstehen zu können, muss die Polarisierbarkeit des Atoms berechnet werden.

Das Oszillatormodell von Lorentz beschreibt das Atom als gedämpften harmonischen Oszillator in einem äußeren Feld [65]. Dem Modell liegt die Vorstellung zugrunde, dass ein Elektron der Masse  $m_e$  und der Elementarladung  $e$  elastisch an einen positiv geladenen Atomkern gebunden ist und mit einer Eigenfrequenz  $\omega_0$  um den Atomkern oszilliert. Die Dämpfung erfolgt durch Energiedissipation. Die spezielle Lösung der Bewegungsgleichung des Elektrons im polarisierten Atom  $\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0 x = eE(t)/m_e$  führt auf die Polarisierbarkeit

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega}, \quad (2.14)$$

wobei  $\Gamma_\omega = e^2\omega^2/(6\pi\epsilon_0 m_e c^3)$  die klassische Dämpfungsrate ist. Diese ergibt sich durch Energieabstrahlung. Mit dem Ausdruck für die Polarisierbarkeit eines Atoms (2.14) lassen sich das Dipolpotential (2.10) und die Streurrate (2.13) explizit angeben

$$\begin{aligned} V_{\text{dip}}(r) &= -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(r), \\ \Gamma_{\text{str}}(r) &= \frac{3\pi c^2 \omega^3}{2\hbar\omega_0^6} \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(r), \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei hier die Resonanzdämpfungsrate  $\Gamma = \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_\omega$  eingeführt wurde. Im Experiment selbst werden mehrere Laserfrequenzen eingesetzt. Zur Erzeugung einer optischen Dipolfalle wird ein sehr fern verstimmtter Laser benutzt ( $\omega/\omega_0 \approx 1/10$ ), während für das optische Gitter die Lichtfrequenz  $\omega$  relativ nahe bei der Resonanz  $\omega_0$  liegt ( $\omega/\omega_0 \approx 1$ ), so dass der schnell rotierende Term (der zu  $\omega_0 + \omega$  antiproportionale Term) in (2.15) gegen den zur Verstimmung  $\Delta = \omega - \omega_0$  antiproportionalen Term vernachlässigt werden kann. Diese Näherung ist in der Literatur

als Drehwellennäherung bekannt [66] und vereinfacht die Gleichungen (2.15) auf eine einfache Relation zwischen dem Dipolpotential und der Streurrate

$$\hbar\Gamma_{\text{str}} \approx \frac{\Gamma}{\Delta} V_{\text{dip}}. \quad (2.16)$$

Aus dieser Beziehung (2.16) lassen sich zwei wesentliche Eigenschaften von Dipolfallen ablesen, die sich auch allgemein aus (2.15) ableiten lassen. Zum einen ist von dem Vorzeichen der Verstimmung  $\Delta = \omega - \omega_0$  abhängig, ob das Dipolpotential  $V_{\text{dip}}$  attraktiv oder repulsiv ist. Für einen zur Resonanz  $\omega_0$  rot-verstimmten Laser  $\Delta < 0$  ist das Fallenpotential attraktiv und zieht die Atome in das Potentialminimum, das am Ort der maximalen Intensität liegt. Für einen blau-verstimmtem Laser  $\Delta > 0$  ist das Potential repulsiv, die Atome werden hier an den Ort minimaler Intensität gedrückt. Die zweite wichtige Eigenschaft, die sich aus dem Verhältnis der Streurrate zur Potentialtiefe (2.16) ergibt, ist die Abhängigkeit vom Betrag der Verstimmung. Die Streurrate  $\Gamma_{\text{str}}$  nimmt ab, wenn die Verstimmung  $\Delta$  vergrößert wird. In vielen Experimenten ist eine möglichst kleine Streurrate bei gleichzeitig tiefen Fallenpotentialen erwünscht, weshalb oft zur Resonanz  $\omega_0$  fernverstimmte Laser hoher Intensität zum Einsatz kommen.

Obwohl das Oszillatormodell eine klassische Näherung ist, liefert es ein brauchbares Ergebnis, wenn die Streurrate sehr klein ist  $\Gamma_{\text{str}} \ll \Gamma$ , d.h. wenn die Sättigungseffekte bei hohen Intensitäten, die zu einer starken Population der angeregten Niveaus führt, vernachlässigt werden können. Eine genauere quantenmechanische Analyse berücksichtigt dagegen die mögliche Sättigung und die verschiedenen Fein- und Hyperfeinzustände des Atoms, was zu quantitativen Korrekturen führen kann. Im Sinne des Oszillatormodells wird die Polarisierbarkeit  $\alpha$  dann zustandsabhängig dargestellt [64].

### 2.3.2 Konventionelle optische Gitter

Eine optische Stehwelle wird aus einer Überlagerung von zwei gegenläufigen Laserstrahlen gleicher Frequenz und fester Phase erzeugt. In der Stehwelle bilden sich im periodischen Abstand Zonen hoher und geringer Intensität heraus. Bei einer Rotverstimmung des Lasers zu einem atomaren Übergang stellen die Intensitätsmaxima eine räumlich periodische Anordnung von Mikrofallen dar, in denen sich die Atome ansammeln. Eine solche Konstellation von optischer Stehwelle und Atomen wird als optisches Gitter bezeichnet.

Genauer, betrachten wir zwei Lichtwellen der Frequenz  $\omega$  und der Wellenlänge  $\lambda = 2\pi/k$ , die sich in z-Richtung ausbreiten

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{2} \hat{e}_1 \left[ e^{i(kz-\omega t)} + e^{-i(kz-\omega t)} \right], \\ E_2 &= \frac{1}{2} \hat{e}_2 \left[ e^{i(kz+\omega t)} + e^{-i(kz+\omega t)} \right], \end{aligned} \quad (2.17)$$

wobei  $\hat{e}_{1,2}$  die Polarisationsrichtung angibt. Die Stärke des optischen Gitters hängt von der Intensität des Lichtfeldes ab

$$\begin{aligned} I(z) &= c\epsilon \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2I_{12}(z), \end{aligned} \quad (2.18)$$

wobei der Interferenzterm  $I_{12}$  in (2.18) sich vereinfachen lässt zu

$$I_{12}(z) = \sqrt{I_1 I_2} \cos^2(kz) = \frac{\sqrt{I_1 I_2}}{2} [\cos(2kz) + 1]. \quad (2.19)$$

Der Interferenzterm (2.19) zeigt demnach eine räumliche Periodizität von  $\lambda/2$ , so dass sich das effektive Potential, das auf die Atome wirkt, folglich schreiben lässt als

$$V_1(z) = \frac{V_1}{2} \cos(2kz), \quad (2.20)$$

wobei  $V_1$  die effektive Potentialtiefe der optischen Stehwelle angibt.



Die Atom-Licht Wechselwirkung lässt sich auch in einem anschaulichen Quantenbild deuten [67]. Ein Zwei-Niveau Atom kann - durch Absorption eines Photons aus einem Laserstrahl und anschließender stimulierter Emission in den gegenläufigen Strahl - einen Photonenrückstoß von  $\Delta p = \pm 2\hbar k$  in Richtung des absorbierten Photons aufnehmen. Durch solche Impulsüberträge, die in beide Richtungen symmetrisch stattfinden, werden die Atome im Impulsraum periodisch angeordnet, was der Beugung an einem räumlichen Gitter mit einer Gitterkonstanten von  $\lambda/2$  entspricht. Da in diesem Quantenbild die Dispersion zweier Photonen, ein absorbiertes und ein emittiertes, die Entstehung des optischen Gitters beschreibt, wird diese Raman-Streuung auch als ein Zweiphotonen-Prozess oder ein Zweiphotonen-Gitter bezeichnet. Eine schematische Darstellung des Zwei-Niveau Atoms und des Zweiphotonen-Prozesses ist in Abb. 2.2(a) zu sehen.

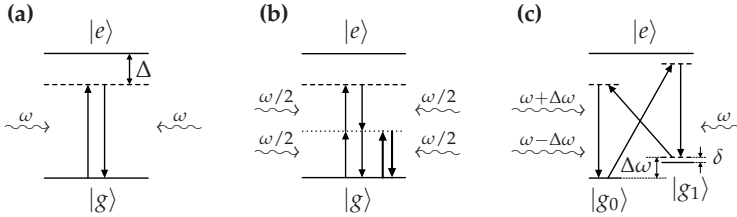
Für die Potentialtiefe  $V_1$  des optischen Stehwellengitters, die das Atom effektiv wahrnimmt, kann näherungsweise ein Zusammenhang mit der Verstimmung  $\Delta = |\omega_0 - \omega|$ , vergleiche Abb. 2.2(a),

$$V_1 \propto \frac{1}{\Delta} \quad (2.21)$$

abgeleitet werden [68]. Dazu wird die Schrödingergleichung (2.36) in der Drehwellennäherung für ein Zwei-Niveau-System, welches sich anfangs im Grundzustand befindet, gelöst. Bei der Lösung wird für große Verstimmungen  $\Delta$  als Näherung angenommen, dass die Besetzung des angeregten Zustands dem Grundzustand adiabatisch folgt (adiabatische Elimination). In dieser Näherung ist das Resultat konsistent mit dem Oszillatormodell (vgl. Abschnitt 2.3.1).

### 2.3.3 Vierphotonen-Gitter und Fourier-Synthese

Im vorangegangenen Abschnitt 2.3.2 wurde ein optisches Gitter der Periode  $\lambda/2$  durch einen Zweiphotonen-Prozess beschrieben. Im Prinzip lassen sich optische Gitter mit kleinerer räum-



**Abb. 2.2:** Raman-Prozesse im optischen Gitter. (a) Zweiphotonen-Prozess in der optischen Stehwelle. (b) Möglicher Vierphotonen-Prozess zur Erzeugung eines Vierphotonen-Gitters. Es dominieren jedoch die ebenfalls auftretenden Zweiphotonen-Übergänge. (c) Vierphotonen-Prozess zur Erzeugung des Vierphotonen-Gitters wie er im vorliegenden Experiment realisiert ist.

licher Periodizität realisieren, wenn mehr als zwei Photonen an dem Raman-Prozess teilnehmen [69]. Exemplarisch wird ein Vierphotonen-Prozess beschrieben so wie er im vorliegenden Experiment benutzt wird, um ein optisches Gitter der Periodizität  $\lambda/4$  zu erzeugen [70].

Ein Vierphotonen-Gitter lässt sich realisieren, wenn der in Abb. 2.2(a) dargestellte Zweiphotonen-Prozess durch die Absorption und Emission von je zwei Photonen der halben Frequenz ersetzt wird, siehe Abb. 2.2(b). Der Impulsübertrag auf das Atom ist dann  $\Delta p = \pm 4\hbar k$ , so dass die effektive Wellenlänge des Gitters  $\lambda_{\text{eff}}/2 = \lambda/4$  beträgt. Allerdings dominieren in diesem Modell Stehwelleneffekte, die wiederum ein konventionelles Gitter der Periode  $\lambda/2$  erzeugen.

Ein verbessertes Schema zur Erzeugung von Vierphotonen-Gitter, welches Stehwelleneffekte vermeidet, ist in Abb. 2.2(c) dargestellt. Es wird hier ein Drei-Niveau-Atom mit zwei stabilen Grundzuständen  $|g_0\rangle$  und  $|g_1\rangle$  sowie einen spontan zerfallenden angeregten Zustand  $|e\rangle$  verwendet. Wenn - wie in der Abb. 2.2(c) dargestellt - das Drei-Niveau Atom von links mit den beiden Lichtfrequenzen  $\omega \pm \Delta\omega$  und von rechts mit  $\omega$  beleuchtet wird, durchläuft das Atom einen Zyklus von je zwei Photonabsorptionen und -emissionen. Dabei erhält das Atom insgesamt einen Photonenrückstoß von  $\Delta p = \pm 4 \hbar k$ . Die Verstimmung

$\delta$  zum Grundzustand  $|g_1\rangle$  unterdrückt die Besetzung des Zustands  $|g_1\rangle$  und verhindert somit einen unvollständigen Zyklus, der zu Stehwelleneffekte führen würde. Da bei einem vollständigen Durchlauf eines Zyklus vier Photonen mit den Lichtfeldern ausgetauscht werden, wird hier von einem Vierphotonen-Prozess gesprochen. Das resultierende optische Gitter hat eine räumliche Periodizität von  $\lambda/4$ , wie theoretisch [69,71] bestimmt und experimentell [70] verifiziert wurde. Das effektive Potential des Vierphotonen-Gitters hat die Form

$$V_2(z) = \frac{V_2}{2} \cos(4kz), \quad (2.22)$$

wobei  $V_2$  die Tiefe des Gitters angibt. Auf ähnliche Weise wie bei dem Zweiphotonen-Gitter (2.21) kann auch ein Ausdruck für die Potentialtiefe der Vierphotonen-Gitters gefunden werden [72]

$$V_2 \propto \frac{1}{\Delta^2 \delta'}, \quad (2.23)$$

wobei  $\delta$  die Zweiphotonen-Verstimmung des Vierphotonen-Gitters ist, vgl. Abb. 2.2. Um tiefe optische Gitterpotentiale zu realisieren, müssen also intensive Lichtfelder (2.19) mit kleinen Verstimmungen (2.21, 2.23) zu den atomaren Resonanzen genutzt werden.

Die Kombination aus Zweiphotonen- und Vierphotonen-Gitter wird als Fourier-synthetisiertes optisches Gitter bezeichnet. Im vorliegenden Experiment ist außerdem die Phase zwischen den beiden Harmonischen frei einstellbar.

## 2.4 Bloch-Theorie und Bändermodell

Die Gross-Pitaevskii Gleichung (2.4) ohne Wechselwirkung  $a_s = 0$  kann für ein zeitlich und räumlich periodisches Potential  $V(x + L, t + T) = V(x, t)$  mit dem Floquet Theorem gelöst werden [73, 74]. Zunächst wird das für diese Arbeit relevante räumlich periodisch und zeitlich konstante eindimensionale Potential betrach-

tet. Somit wird die Bloch-Theorie in einer Dimension nachvollzogen, die auf das für die Festkörperphysik wichtige Bändermodell führt [75]. Die Wechselwirkungsenergien werden als sehr klein ( $g|\psi|^2 \sim 0$ ) und Lösungen der linearen Gross-Pitaevskii Gleichung als stationär angenommen

$$E\psi = \left[ \frac{p^2}{2M} + V(x) \right] \psi, \quad (2.24)$$

wobei  $E$  die Energie des Systems und  $p = \hbar/i \cdot \partial_x$  der Impulsoperator ist. Das periodische Potential hat in dieser Arbeit stets die Form des Fourier-synthetisierten optischen Gitters

$$V(x) = -\frac{V_1}{2} \cos(2kx) - \frac{V_2}{2} \cos(4kx + \phi). \quad (2.25)$$

Für die folgenden Überlegungen ist es vorteilhaft, die lineare Gross-Pitaevskii Gleichung dimensionslos zu betrachten. Dazu dienen die folgenden Abkürzungen

$$\begin{aligned} x' &= 2kx, \\ t' &= 8\omega_r t, \\ p' &= p/2\hbar k, \end{aligned} \quad (2.26)$$

mit den Dimensionslosen Parametern

$$\begin{aligned} E' &= E/8E_r, \\ V_1' &= V_1/8E_r, \\ V_2' &= V_2/8E_r, \end{aligned} \quad (2.27)$$

wobei die Dimensionen wie folgt charakterisiert sind

$$\begin{aligned} \lambda &= 2\pi/k = 781.3\text{nm}, \\ M &= 145.6 \cdot 10^{-27}\text{kg}, \\ E_r &= \hbar\omega_r = h \cdot 3.727\text{kHz}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Die dimensionslose lineare Gross-Pitaevskii Gleichung liest sich bei Auslassung der Striche

$$E\psi = \left[ \frac{p^2}{2} - V(x) \right] \psi, \quad (2.29)$$

mit dem dimensionslosen Potential

$$V(x) = -\frac{V_1}{2} \cos(x) - \frac{V_2}{2} \cos(2x + \phi). \quad (2.30)$$

Gemäß der Bloch Theorie ist die Wellenfunktion  $\psi$ , die die lineare Gross-Pitaevskii Gleichung (2.24) löst, eine periodische Funktion mit derselben Periodizität wie das Potential  $V(x)$ , in dem es sich befindet [75]. Durch eine Fouriertransformation erhält man die Impulsraumdarstellung der Wellenfunktion

$$\psi = \sum_{m=-N}^N c_m \exp[i(q+m)x], \quad (2.31)$$

wobei  $q$  der Quasiimpuls der Atome im optischen Gitter und  $N$  beliebig groß ist. Für die numerischen Simulationen ist  $N$  in der Größenordnung von  $\sim 10$ . Die Wellenfunktion (2.31) eingesetzt in die dimensionslose lineare Gross-Pitaevskii Gleichung (2.29) ergibt eine Eigenwertgleichung für die Koeffizienten  $c_m$  der Art

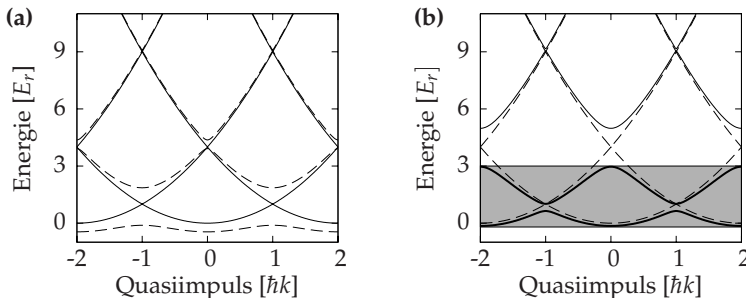
$$E(q)c_m = \frac{(m+q)^2}{2}c_m + \frac{V_1}{4}(c_{m-1} + c_{m+1}) + \frac{V_2}{4} \left( e^{-i\phi}c_{m-2} + e^{i\phi}c_{m+2} \right), \quad (2.32)$$

wobei der Index  $m$  von  $-N$  bis  $N$  geht und  $c_k = 0$  für  $|k| > N$  gilt. Die Eigenwertgleichung (2.32) lässt sich auch in der Matrixform schreiben

$$E(q)c = H(q)c, \quad (2.33)$$

wobei die so eingeführte Matrix  $H$  hermitisch ist

$$\begin{aligned} H_{n,n}(q) &= \frac{(m(n)+q)^2}{2}, \\ H_{n+1,n}(q) &= H_{n,n+1}(q) = \frac{V_1}{4}, \\ H_{n+2,n}(q) &= H_{n,n+2}^*(q) = \frac{V_2}{4}e^{-i\phi} \end{aligned} \quad (2.34)$$



**Abb. 2.3:** Energiedispersion gegen den Quasiimpuls. Dargestellt sind die kleinsten Eigenwerte  $E_i(q)$  mit  $i = 1, 2, 3$  der Gleichung (2.33) in Abhängigkeit vom Quasiimpuls  $q$  für verschiedene Potentiale der Form (2.30) mit (a)  $(V_1 = 0, V_2 = 0)$ , und  $(V_1 = 4, V_2 = 0)$  für die Kurven (—), (---) respektive und (b)  $V_1 = 1, V_2 = 4$  für (—) und (---) ist der freie Fall. Der graue Kasten markiert die Minibänder.

mit  $m(n) = n - (N + 1)$  und  $H_{k,l} = 0$  sonst. Die Eigenwerte  $E_i(q)$  mit  $i = 1, 2, \dots, 2N + 1$  der Matrix  $H(q)$  (2.34) lassen sich numerisch berechnen und ergeben die erlaubten Energiebänder, die auch Bloch-Bänder genannt werden. In Abb. 2.3 sind für verschiedene Potentialtiefen  $V_1$  und  $V_2$  die niedrigsten Energiebänder gezeigt. In Teil (a) der Abb. 2.3 ist der Einfluß des einfachen harmonischen Gitters (2.30) mit  $V_2 = 0$  dargestellt. Für ein freies Teilchen  $V_1 = 0$  ergeben sich Parabeln mit Scheiteln in  $q = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ . Bei einer Erhöhung der Potentialtiefe  $V_1$  bilden sich Energielücken an den Kreuzungspunkten der Parabeln aus. In Abb. 2.3(b) ist die Situation dargestellt, die im Mittelpunkt dieser Arbeit steht. In diesem Fall ist die Potentialtiefe der zweiten Harmonischen stärker als die der ersten Harmonischen  $V_2/V_1 > 1$ . Dies hat zur Folge, dass die beiden untersten Bänder, die in der Abb. 2.3 grau unterlegt sind, energetisch von den Höheren weiter entfernt sind als untereinander. In diesem Fall werden die beiden niedrigsten Niveaus zusammen Minibänder genannt. Die Minibänder stellen effektiv ein Zwei-Niveau-System für das Kondensat dar und können die Dynamik des Kondensates drastisch verändern.

*Brillouin-Zone.* Aufgrund der Periodizität der Energiebänder reicht es aus sich auf eine Brillouin-Zone ( $-\hbar k \leq q \leq \hbar k$ ) zu beschränken. Der Zonenrand  $q = \pm \hbar k$  wird auch als Bandkante bezeichnet.

## 2.5 Getriebene Zwei-Niveau-Systeme

Die Dynamik des Kondensates im optischen Gitter ist durch die zeitabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung (2.4) festgelegt. Im wechselwirkungsfreien Fall  $g|\psi|^2 \sim 0$ , der hier wegen der Einfachheit betrachtet wird, hat sie die folgende dimensionslose Gestalt

$$i\partial_t\psi = \left[ \frac{p^2}{2} - \frac{V_1}{2} \cos(x) - \frac{V_2}{2} \cos(2x + \phi) + xF(t) \right] \psi, \quad (2.35)$$

wobei  $F(t)$  eine zeitabhängige treibende Kraft ist. Analog zur stationären Situation (siehe Abschnitt 2.4) wird die zeitabhängige dimensionslose lineare Gross-Pitaevskii Gleichung (2.35) auch mit dem Ansatz (2.31) gelöst, wobei aber die Koeffizienten  $c_m$  zeitabhängig sind, wodurch sich eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Koeffizienten  $c_m(t)$  ergibt. In der Matrixdarstellung liest sie sich

$$i\dot{c} = H[q(t)]c, \quad (2.36)$$

wobei  $H$  die Matrix (2.34) mit einem zeitabhängigem Quasiimpuls  $q(t)$  ist. Wird eine schwache konstante Kraft  $F(t) = a$  auf die Atome im Gitter ausgeübt, ändert sich nach dem Bloch-Theorem der Quasiimpuls gemäß

$$q(t) = q_0 + a \cdot t, \quad (2.37)$$

mit dem Anfangsquasiimpuls  $q_0$ . Die Änderung des Quasiimpuls bewirkt, dass sich das Kondensat in den Energiebändern bewegt. Die Energielücken zwischen den Bändern können als Potentialbarrieren aufgefaßt werden, an denen quantenmechanisch Reflexion und Tunneln stattfindet. Die Dynamik des Wellenpakets ist wesentlich bestimmt durch die Form der Bloch-Bänder des optischen Gitters.

Sind die Potentialtiefen des optischen Gitters so gewählt ( $V_2 > V_1$ ), dass sich ein Miniband-System ausbildet (vgl. Abb. 2.3), kann die Dynamik auf das Miniband beschränkt sein. Gemäß der Floquet-Theorie ist die Dynamik in diesem Fall verwandt mit einem numerisch wesentlich einfacherem periodisch getriebenen Zwei-Niveau-System. Dabei wird die folgende Bewegungsgleichung betrachtet

$$i \frac{d}{dt} c = H(t)c, \quad (2.38)$$

wobei  $c = (c_1, c_2)$  der Zustandsvektor und  $H$  der Hamilton-Operator ist. Ein Zwei-Niveau-System wird gewöhnlich durch einen (dimensionslosen) Hamilton-Operator der Form

$$H(t) = -\frac{1}{2} [\Delta \sigma_x + \epsilon(t) \sigma_z] \quad (2.39)$$

beschrieben, wobei  $\sigma_{x,z}$  die Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

sind. Die Größe  $\Delta$  ist durch das System als die halbe Energielücke zwischen zwei Bändern vorgegeben. Die instantanen Eigenwerte des Zwei-Niveau Hamilton-Operators (2.39) sind durch  $2E_{\pm} = \pm \sqrt{\Delta^2 + \epsilon(t)^2}$  zu berechnen. Wenn das System periodisch getrieben wird durch

$$\epsilon_{LZS}(t) = \epsilon_0 + \epsilon_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \omega t\right), \quad (2.41)$$

wie in Abb. 2.4(a) mit  $\epsilon_0 = 0$  und  $\epsilon_1 = 4$  und  $\omega = 1$  dargestellt, haben sie eine ähnliche Form wie die Minibänder in Abb. 2.3(b). Im Folgenden werden einige Aspekte der Dynamik des Bose-Einstein Kondensat in verschiedenen getriebenen Zwei-Niveau-System untersucht. Es werden drei spezielle treibende Funktionen betrachtet. Für die Rabi-Lösung ist die treibende Funktion eine Konstante,  $\epsilon_R(t) = \epsilon_0$ . Für die Landau-Zener Übergänge ist die treibende Funktion linear,  $\epsilon_{LZ}(t) = a \cdot t$ . Für die Bloch-Oszillation schließlich ist die treibende Funktion die oben eingeführte periodische Funktion  $\epsilon_{LZS}(t)$  (2.41).



### 2.5.1 Rabi-Lösung

Eine wichtiger Spezialfall des Zwei-Niveau Systems (2.39) im konstant getriebenen Fall

$$\epsilon_R(t) = \epsilon_0 \quad (2.42)$$

ist die Rabi-Lösung [76]. Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung einer anfänglichen Besetzungswahrscheinlichkeit  $c_0 = (c_1(0), c_2(0))$ , die kein Eigenzustand des Hamilton-Operators (2.39) ist. Isidor I. Rabi konnte eine sinusförmige Oszillation mit der für das Zwei-Niveau-System charakteristischen Rabi-Frequenz  $\Omega_{\text{Rabi}} = E_+ - E_-$  vorhersagen [77], die die Energielücke zwischen den beiden Niveaus angibt. Isidor I. Rabi betrachtete den magnetischen Spin eines Atoms in einem rotierenden magnetischen Feld und dessen Umklappwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit der zeitlichen Einwirkung der magnetischen Störung. Diese Fragestellung geht auf W. Pauli und P. Güttinger [78] zurück, wurde von diesen aber fehlerhaft gelöst, wie J. Schwinger (damals noch Doktorand bei I.I. Rabi) nachwies [79]. Experimentell konnten Rabi-Oszillationen zwischen Bloch-Bändern beobachtet werden, indem ein kaltes atomares Natrium-Gas in ein getriebenes optisches Gitter geladen wurden [80].

Dieser Effekt kann dazu genutzt werden, um die Potentialtiefen des optischen Gitters zu vermessen, indem die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Beugungsordnungen in einen statischen Gitter beobachtet werden. In einem Stehwellengitter ist die Bandlücke zwischen Grundband und erstem angeregten Band am Brillouin-Zonenrand  $q_0 = 1$  proportional zur Gitterpotentialtiefe  $V_1$ , wodurch sich aus der Rabi-Frequenz die dimensionslose Potentialtiefe des Zweiphotonen-Gitters (2.20)

$$V_1 = 2\Omega_{\text{Rabi}} \quad (2.43)$$

ergibt. Die Potentialtiefe  $V_1$  ist gemäß (2.15) antiproportional zu der Verstimmung  $\Delta = |\omega_0 - \omega|$ ,  $V_1 \propto 1/\Delta$ .

## 2.5.2 Landau-Zener Übergänge

Im Rahmen dieser Arbeit spielt das Tunneln zwischen den Bändern eine wichtige Rolle. Deshalb wird an dieser Stelle dem Landau-Zener Tunneln im Zwei-Niveau-System besondere Beachtung geschenkt. Das Landau-Zener Problem ist die Lösung der zeitabhängigen Schrödinger Gleichung (2.38) eines Zwei-Niveau-Systems (2.39). Clarence Zener beispielsweise geht in seiner Arbeit über das Tunneln [81] von einem Zwei-Niveau-System aus, bei dem die Übergänge durch eine lineare Funktion mit Steigung  $a$  getrieben werden

$$\epsilon_{LZ}(t) = a \cdot t. \quad (2.44)$$

Die beiden instantanen Eigenwerte  $E_{\pm}$  des Hamilton-Operators (2.39) stellen dann zwei Geraden mit einer vermiedenen Kreuzung dar, welche in Abb. 2.4(a) für  $a = 2\pi$  gezeigt sind.

Die instantanen Eigenvektoren des Hamilton-Operators (2.39) zu einer festen Zeit  $t$  charakterisieren die beiden Basiszustände  $|-\rangle(t)$  und  $|+\rangle(t)$  des Systems, deren zeitliche Entwicklung gemäß der Schrödingergleichung (2.36) das Landau-Zener Problem in der adiabatischen Basis darstellen. Die Basiszustände folgen also der vermiedenen Kreuzung, vgl. Abb. 2.4. Eine andere Darstellung des Prozesses wird erhalten, wenn als Basiszustände die sich kreuzenden Energiekurven gewählt werden. Eine Basis, die den sich kreuzenden Kurven folgt, wird diabatische Basis genannt [82, 83].

Die Eigenzustände der Pauli-Matrizen  $\sigma_z|L\rangle = -|L\rangle$  und  $\sigma_z|R\rangle = |R\rangle$  bilden demnach die diabatische Basis, vgl. 2.4, und folgen der Kreuzung. Die in dieser Arbeit vorgestellten numerischen Berechnungen wurden in der diabatischen Basis ausgeführt. Die beiden Koeffizienten  $c_1, c_2$  in der Schrödingergleichung (2.36) des Zwei-Niveau-Systems (2.39) werden als die Komponenten der Quantenzustände  $|L, R\rangle$  interpretiert. In der Nähe der vermiedenen Kreuzung können nicht-diabatische (adiabatische) Übergänge zwischen den beiden Zuständen stattfinden.

Die Wahrscheinlichkeit  $P_{LZ}^a(t) = |c_2(t)|^2$  eines adiabatischen Übergangs des Zustands  $|L\rangle(-\infty) = (c_1 = 1, c_2 = 0)$  in den finalen Zustand  $|R\rangle(\infty) (|-\rangle(-\infty))$  ist durch die Landau-Zener Formel [81, 84] gegeben

$$P_{LZ}^a = 1 - P_{LZ}^d = 1 - \exp(-2\pi\gamma) \quad (2.45)$$

mit  $\gamma = \Delta^2/4|a|$ , wobei  $P_{LZ}^d$  die Wahrscheinlichkeit eines diabatischen Übergangs ist. Der Index  $d, a$  bezeichnet den diabatischen ( $|-\rangle \rightarrow |+\rangle$ , bzw.  $|L\rangle \rightarrow |L\rangle$ ) bzw. adiabatischen Übergang ( $|-\rangle \rightarrow |-\rangle$ , bzw.  $|L\rangle \rightarrow |R\rangle$ ). Die den Übergang treibende Beschleunigung  $a$  ist gegeben durch

$$a = \left. \frac{d\epsilon(t)}{dt} \right|_{t=t_k}, \quad (2.46)$$

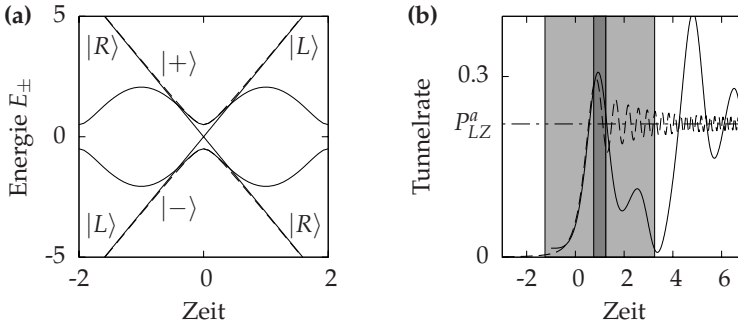
wobei  $t_k$  den Zeitpunkt markiert, an dem die vermiedene Kreuzung liegt, und  $\epsilon(t)$  die treibende Funktion ist. Die Wellenfunktion erleidet beim diabatischen Übergang einen Phasensprung und nimmt dabei die Stokes-Phase

$$\varphi_S = \frac{\pi}{4} + \gamma(\ln \gamma - 1) + \arg[\Gamma(1 - i\gamma)] \quad (2.47)$$

auf. Diese asymptotische Lösung gibt die Besetzung des Zustands  $|2\rangle$  korrekt an aber sie beschreibt nicht die instantane Dynamik des Übergangs. Die Zeitabhängigkeit wurde in theoretischen Arbeiten untersucht [85, 86] und auch experimentell bestätigt [87]. Dabei wurde gezeigt, dass die Dauer des Übergangs abgeschätzt werden kann durch [88]

$$t_{LZ} \sim \frac{2}{\Delta} \sqrt{\gamma} \max(1, \sqrt{\gamma}). \quad (2.48)$$

Eine numerische Simulation des Landau-Zener Problems im getriebenen Zwei-Niveau-System ist in der Abb. 2.4(b) dargestellt. Zum einen für einen periodisch getriebenen Übergang (durchgezogen) und zum anderen für den linear getriebenen Übergang (gestrichelt). Für diese und alle weiteren numerischen Untersuchungen dieser Arbeit wurde die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung mit einer Runge-Kutta Integration nach der Adams-Methode gelöst. Dazu wurde das Algebraprogramm *scilab* benutzt, was im Anhang B beschrieben ist.



**Abb. 2.4:** Zeitabhängigkeit des Landau-Zener Übergangs im Zwei-Niveau-System (2.39). (a) Kreuzung (durchgezogen), vermiedene Kreuzung linear (gestrichelt) und periodische Minbänder (durchgezogen). Eingezeichnet sind die diabatischen Basiszustände  $|L, R\rangle$ , die der Kreuzung folgen, und die Adiabatischen  $|\pm\rangle$ , die der vermiedenen Kreuzung folgen. (b) Instantane Tunnelrate ins obere Band für die in (a) dargestellten Systeme, dargestellt in der diabatischen Basis. Für den linear (2.44) mit  $a = 2\pi$  getriebenen Übergang (gestrichelt) ergibt sich ein Einschwingen um den asymptotischen Grenzwert  $P_{LZ}^a$ . Für den periodisch (2.41) mit  $\epsilon_1 = 4$  und  $\omega = 1$  getriebenen Übergang (durchgezogen) ergibt sich ein multipler Landau-Zener Übergang der zur Stückelberg-Oszillation führt. Der grau unterlegte Bereich gibt die Dauer des Übergangs  $t_{LZ}$  an für zwei aufeinander folgende Kreuzungen in den periodischen Bändern. Der Überlappbereich ist dunkler eingezeichnet.

## 2.6 Bloch-Oszillation

In realen optischen Gittern können Bloch-Oszillationen beobachtet werden, wenn das Bose-Einstein Kondensat mit einer nicht zu starken konstanten Kraft  $F = M \cdot a$  beschleunigt wird, d.h. also nur adiabatische Übergänge an den Bandlücken stattfinden [75, 89, 90]. Die Bewegung findet dann innerhalb eines Blochbandes statt, wobei sich bei den adiabatischen Übergängen stets die Bewegungsrichtung der Atome umkehrt. Die effektive Geschwindigkeit  $v_{\text{eff}}$  des Kondensates kann durch die Dispersion des Energiebands  $E_i(q)$ , in dem die Bewegung stattfindet, erhal-

ten werden

$$v_{\text{eff}} = \frac{\partial E_i(q)}{\partial q}. \quad (2.49)$$

Die effektive Geschwindigkeit  $v_{\text{eff}}$  oszilliert also ähnlich wie das Energieband, in dem die Bewegungen abläuft. Auch der mittlere Impuls  $\langle p(t) \rangle$  der Kondensatwellenfunktion  $\psi$  (2.31), der sich aus dem Erwartungswert des Impuls-Operators  $p$  ergibt

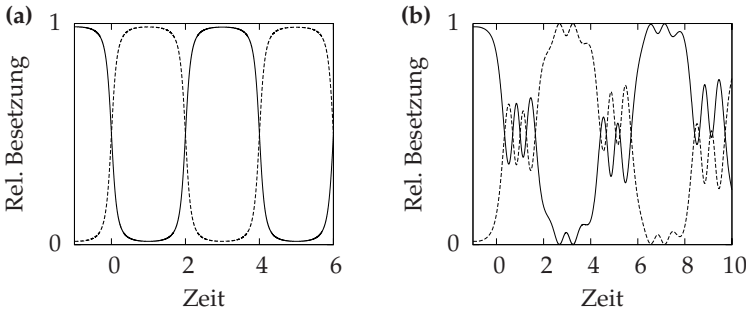
$$\langle p(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* p \psi dx = \sum_{m=-N}^N (q + m) |c_m(t)|^2 \quad (2.50)$$

entwickelt sich demnach nicht linear wie der Quasiimpuls  $q$  (2.37) sondern oszilliert um die Gerade des Quasiimpuls. Die Bloch-Periode dieser Oszillation  $T_B$  ist durch die Gitterkonstante  $d$  des optischen Gitters und der treibenden Kraft  $F = M \cdot a$  bestimmt

$$T_B = \frac{\hbar}{dF}, \quad (2.51)$$

wobei im Falle des bichromatischen Gitters der Form (2.30) die Gitterkonstante  $d = \lambda/2$  gegeben ist durch die halbe Wellenlänge  $\lambda$  des Stehwellengitters.

Im mit  $\epsilon_{\text{LZS}}(t)$  (2.41) periodisch getriebenen Zwei-Niveau-System (2.39) kann die Bloch-Oszillation wie folgt dargestellt werden. Ist die treibende Beschleunigung  $a$  (2.46) im Zwei-Niveau-System (2.39) genügend klein gegen die Energielücke  $\Delta$  zwischen den beiden Energiebändern, ist die Wahrscheinlichkeit (2.45) eines adiabatischen Übergangs  $P_{LZ}^a \approx 1$  und diabatische Landau-Zener Übergänge können vernachlässigt werden. Wird das Kondensat in dem unteren Zustand  $|L\rangle$  fern der Kreuzung präpariert, finden an den vermiedenen Kreuzungen ausschließlich adiabatische Übergänge statt der Art  $|L\rangle \rightarrow |R\rangle$  und  $|R\rangle \rightarrow |L\rangle$ . Eine Simulation der Bloch-Oszillation im periodisch getriebenen Zwei-Niveau-System ist in Abb. 2.5(a) gezeigt. Die Parameter sind bei dieser Simulation  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\epsilon_1 = 4$ ,  $\omega = 0.01$  und  $\Delta = 1$ , so dass sich für die Wahrscheinlichkeit eines diabatischen Übergangs  $P_{LZ}^d = 1.3 \cdot 10^{-11}$  ergibt.



**Abb. 2.5:** Bloch- und Bloch-Zener-Oszillationen im periodisch getriebenem Zwei-Niveaus-System (2.41). Besetzungswahrscheinlichkeit der Zustände  $|L, R\rangle$  (durchgezogen, gestrichelt) gegen den Quasiimpuls für zwei verschiedene Beschleunigungen (a)  $\omega = 0.01$  und (b)  $\omega = 0.375$ . Die Parameter des periodisch getriebenen (2.41) Zwei-Niveau-Systems (2.39) sind hier  $\epsilon_0 = 0$ ,  $\epsilon_1 = 4$  und  $\Delta = 1$ .

## 2.7 Bloch-Zener-Oszillation

In einem Miniband eines optischen Gitters können sowohl adiabatische- als auch diabatische Übergänge auftreten, wenn das Kondensat mit einer nicht zu stark und nicht zu schwach gewählten konstanten Kraft  $F(t) = M \cdot a$  beschleunigt wird, so dass die Tunnelwahrscheinlichkeit zwischen den Minibändern nicht verschwindet, aber die diabatischen Übergangswahrscheinlichkeit aus dem Miniband heraus in höhere Blochbänder vernachlässigt werden kann. Die resultierende Bewegung ist eine charakteristische Sequenz von Bloch-Oszillationen und Landau-Zener Tunneln. Die Geschwindigkeitsentwicklung ist eine doppelt periodische Funktion von zwei Bloch-Oszillationen mit unterschiedlicher Periodizität [91]. Eine theoretische Untersuchung dieser Situation hat gezeigt, dass Bloch-Zener-Oszillationen genutzt werden können, um eine Kondensatwelle kohärent zu teilen und wieder zusammenzuführen [92].

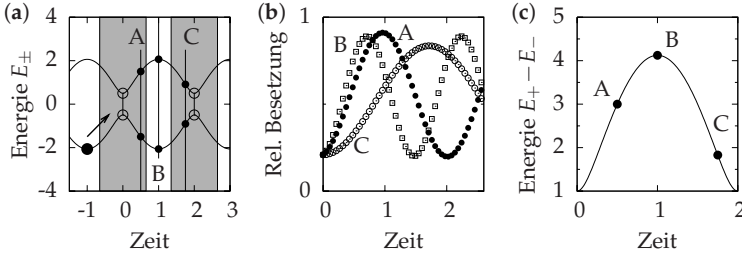
In Abb. 2.5 ist eine numerische Simulation der Bloch- und der Bloch-Zener-Oszillation im Zwei-Niveau-System für eine anfänglich im unteren Zustand befindliche Kondensatwelle aufgezeigt.

Das Zwei-Niveau-System (2.39) wird periodisch mit  $\epsilon_{\text{LZS}}(t)$  (2.41) getrieben und ist durch eine Bandlücke  $\Delta = 1$  und die Parameter  $\epsilon_0 = 0$  und  $\epsilon_1 = 4$  charakterisiert. Für eine sehr kleine Beschleunigung  $\omega = 0.01$  (gestrichelte Linie) ist die Landau-Zener Tunnelwahrscheinlichkeit  $P_{\text{LZ}}^d = 1.3 \cdot 10^{-11}$  verschwindend klein, so dass die Dynamik auf das untere Band beschränkt bleibt. Bei stärkerer Beschleunigung  $\omega = 0.375$  ist die Tunnelwahrscheinlichkeit  $P_{\text{LZ}}^d = 0.51$  recht hoch und es treten sowohl diabatische als auch adiabatische Übergänge auf. Die Dynamik des Systems involviert dann beide Niveaus. Die resultierende Bewegung ist die kohärente Überlagerung von einer Bloch-Oszillation, die nur im unteren Band mit einer Bloch-Periode  $T_B$  (2.51) stattfindet, und einer weiteren Bloch-Oszillation, die sich über beide Bänder erstreckt und durch die doppelte Periode  $2T_B$  gekennzeichnet ist. In diesem Fall wird von einer Bloch-Zener-Oszillation gesprochen.

## 2.8 Landau-Zener-Stückelberg Interferometrie

Das hier vorgestellte Atominterferometer mit ultrakalten Rubidiumatomen beruht auf die zwei zuvor beschriebenen dynamischen Effekte im Miniband-System des optischen Gitters, den diabatischen und den adiabatischen Landau-Zener Übergang. Mit Hilfe der Dispersionsrelation des Minibands wird ein Mach-Zehnder Interferometer (vgl. Abb.1.1) konstruiert. Der diabatische Übergang übernimmt hier die Rolle eines optischen Strahlteilers, der das Kondensat in zwei kohärente Teilwellen aufteilt. Der adiabatische Übergang wirkt auf die Kondensatwelle wie ein Spiegel auf Licht. Die Phasenverschiebung zwischen den beiden Teilwellen wird durch eine variable Wartezeit zwischen den beiden vermiedenen Kreuzungen der beiden Zustände dynamisch geregelt.

Die entsprechende Dynamik im mit  $\epsilon_{\text{LZS}}(t)$  (2.41) periodisch getriebenen Zwei-Niveau-System (2.39) ist schematisch in Abb. 2.6(a) gezeigt. Das Schema liest sich von links nach rechts. Ge-



**Abb. 2.6:** Simulation des Landau-Zener-Stückelberg Interferometers. (a) Energiebänder im periodisch getriebenen Zwei-Niveau-System mit den Zeitpunkten  $t_0 = A, B, C$ , an denen die Phase der beiden Teilwellen durch eine variable Wartezeit verändert wird. (b) Simulierte relative Besetzung des diabatischen Zustands  $|L\rangle$  gegen die Wartezeit am Haltepunkt. (c) Energielücke zwischen oberem und unterem Band  $E_+ - E_-$  (durchgezogene Linie) und die aus der in (b) simulierte Stückelberg-Oszillation bestimmte Energielücke.

startet wird mit dem Zustandsvektor  $c = (1, 0)$  - symbolisiert durch den großen Ball im unteren Band -, das auf die erste Kreuzung der beiden Energiebänder mit einer treibenden Funktion  $\epsilon_{LZS}(t)$  getrieben wird (2.41). An der Kreuzung (Übergangsbereich ist grau unterlegt) finden partielle Landau-Zener Übergänge statt und trennen den Zustand kohärent in zwei Impulszustände - symbolisiert durch die beiden kleineren Bälle im oberen und unteren Band an der Stelle  $t_0 = A$ . Die Phasenverschiebung  $\Delta\Phi$  zum Zeitpunkt  $t_0 = A$  wird durch eine variable Wartezeit  $t_w$  erreicht. Das heißt, wenn der Zeitpunkt  $t_0 = A$  erreicht wurde, wird die treibende Funktion  $\epsilon_{LZS}(t)$  durch die konstante Funktion  $\epsilon_{LZS}(t_0)$  für den Zeitraum  $t_w$  ersetzt. Beide Zustände nehmen beim Durchlaufen der Energiebänder und insbesondere während der Wartezeit  $t_w$  die dynamische Phase

$$\Phi_{St}^{\pm} = \int_0^{t_{end}} dt E_{\pm}(t) \quad (2.52)$$

auf [93]. Anschließend an die Wartezeit  $t_w$  werden die beiden Impulszustände wieder mit der treibenden Funktionen  $\epsilon_{LZS}(t)$  (2.41) beschleunigt und an der nächsten Kreuzung zur Interferenz gebracht. Das Integral (2.52) kann in drei Teile vom Start bis



zum Haltepunkt  $[0, t_0]$ , vom Haltepunkt bis zum Ende der Wartezeit  $[t_0, t_0 + t_w]$  und von da bis zum Ende des Interferometers  $[t_0 + t_w, t_{\text{end}}]$  zerlegt werden, so dass sich ein konstanter Anteil der dynamischen Phase und eine von der Wartezeit  $t_w$  abhängige Phase ergibt

$$\Phi_{\text{St}}^{\pm} = \Phi_0^{\pm} + \Phi_{\pm}(t_w), \quad (2.53)$$

mit  $\Phi_{\pm}(t_w) = \int_{t_0}^{t_0+t_w} dt E_{\pm}(t_0)$ . Die konstante Phase  $\Phi_0^{\pm}$  ergibt sich aus (2.52) mit  $t_w = 0$  und unter Berücksichtigung der Stokes-Phase  $\varphi_S$  (2.47). Das Interferenzbild gibt die Besetzungswahrscheinlichkeit  $P_i = |c_i|^2$  mit  $i = 1, 2$  der beiden Zustände  $|L, R\rangle$  an. Die Besetzungswahrscheinlichkeit  $P_i(t_w) \sim \sin(\Phi_r \cdot t_w)$  der beiden Zustände oszilliert mit der akkumulierten relativen Phase  $\Phi_r(t_w) = \Phi_+(t_w) - \Phi_-(t_w) = (E_+ - E_-)t_w$ , die in der Wartezeit  $t_w$  aufgenommen wird [94]. Der konstante Phasenunterschied  $\Phi_0^+ - \Phi_0^-$  zwischen den beiden Zuständen verschiebt lediglich die Phase des Interferenzbildes und ist für die Interferenz unbedeutend. Die Frequenz der Oszillation ist die sogenannte Stückelberg-Frequenz und hängt direkt mit der Bandlücke an dem Haltepunkt  $t_0 = A$  zusammen.

Eine Simulation im Zwei-Niveau-System eines solchen Interferometers ist in Abb. 2.6 dargestellt. Die Parameter der Simulation der Landau-Zener-Stückelberg Oszillation sind die selben wie die zuvor für die Simulation der Bloch-Zener-Oszillation benutzten, die in der Abb. 2.5(b) gezeigt wurde. Im Teil (a) der Abb. 2.6 ist das getriebene Zwei-Niveau-System gezeigt, in dem die Haltepunkte A,B,C eingezeichnet sind, an denen die Stückelberg-Oszillationen simuliert wurden. In Abb. 2.6(b) sind die Landau-Zener-Stückelberg-Oszillationen für die drei Haltepunkte A,B,C dargestellt und in Teil (c) wird der aus den Energiebändern berechnete Abstand  $E_+ - E_-$  mit den aus den Simulationen gewonnenen Frequenzen der Stückelberg-Oszillation verglichen.



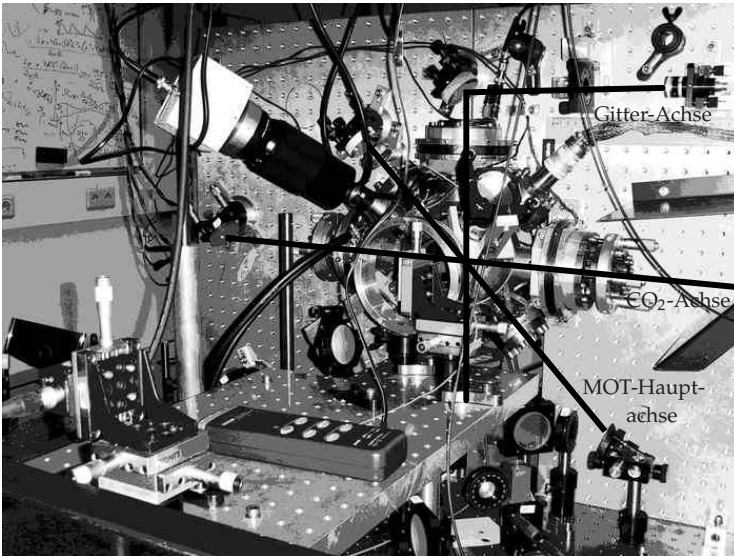
# Kapitel 3

## Aufbau des Experiments

In diesem Kapitel wird der Aufbau zu den in dieser Arbeit durchgeführten Experimente beschrieben. Im ersten Teil wird zunächst die Vakuumkammer vorgestellt, in der das Bose-Einstein Kondensat realisiert wurde. In den darauf folgenden Abschnitten werden die verschiedenen Lasersysteme dargestellt, die Anwendung finden in der magneto-optischen Falle, der Dipolfalle und bei der Erzeugung der Fourier-synthetisierten optischen Gitter. Hiernach werden in Vorversuchen Charakteristika des im Experiment verwendeten optischen Gitters bestimmt.

### 3.1 Aufbau der Vakuumapparatur

Die Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensates erfordert ein Ultrahochvakuum, um ausreichend lange Lebenszeiten der Atome zu ermöglichen. Die Vakuumkammer besteht aus zwei Teilen, einer Vorkammer, an der die Vakuumpumpen angeschlossen sind, und einer Hauptkammer, in der die Experimente mit ultrakalten Gasen durchgeführt werden. Die Hauptkammer besitzt diverse optische Zugänge, die es ermöglichen Licht unterschiedlicher Wellenlänge in die Kammer zu führen. In der Vorkammer wird ein Gasdruck von etwa  $4 \cdot 10^{-10}$  mbar mit einem Druckmes-



**Abb. 3.1:** Foto der Vakuumkammer. Zu sehen ist die Hauptkammer in der Mitte des Bildes mit den optischen Zugängen für die CO<sub>2</sub>-Laser-Dipolfalle (horizontale Achse) und das optische Gitter (vertikale Achse). Im vorderen linken Bildbereich befindet sich die CCD-Kamera für die Absorptionsabbildung.

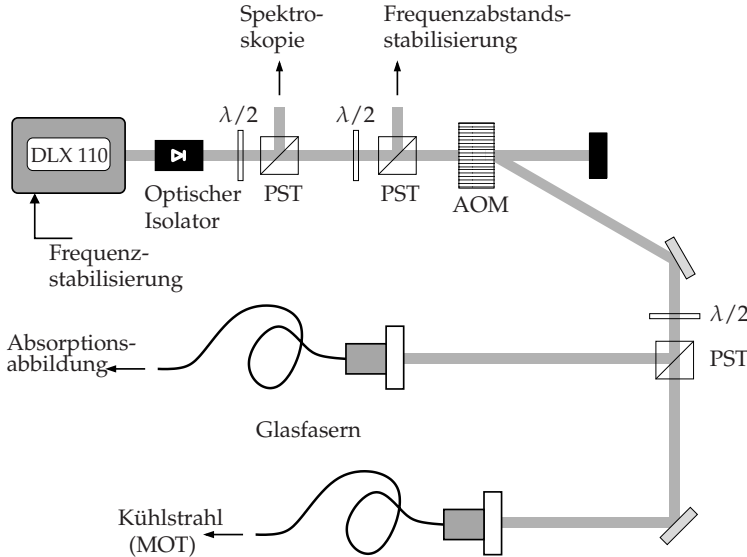
ser (Modell: Ionivac, Firma: Leybold) gemessen. Dieses Ultrahochvakuum wird erhalten durch an der Vorkammer angebrachte, permanent laufende Vakuumpumpen, eine Ionengetterpumpe (Modell: VTS, 25l/s, Firma: Riber) und eine Titansublimationspumpe (Modell: TSP2, Firma: Arun Microelectronics Limited (AML)). Die Filamente der Titansublimationspumpe werden regelmäßig geheizt (Titan sublimiert), um die optimale Pumpleistung aufrecht zu erhalten.

Das CO<sub>2</sub>-Laserlicht zur Erzeugung der optischen Dipolfalle, in der das Rubidiumgas kondensiert, wird horizontal durch die Hauptkammer geführt, während das Laserlicht, das das optische Gitterpotential erzeugt, vertikal in die Kammer eingebracht wird. Das Licht zur Realisierung der magneto-optischen Falle wird aus drei senkrecht zu einander stehenden Richtungen durch

die Hauptkammer geführt, wobei die Hauptachse um etwa  $45^\circ$  aus der vertikalen gekippt ist. Auf den Flanschen der Hauptachse der magneto-optischen Falle sind die wassergekühlten Spulen mit jeweils 340 Windungen gewickelt, die in Antihelmholtz-Konfiguration betrieben das magnetische Feld der Falle erzeugen. Nahresonantes Licht kann durch Vor- und Hauptkammer geführt wird, um eine Absorptionsabbildung der Atome aufzunehmen. In Abb. 3.1 ist ein Foto der Hauptkammer zu sehen (die Vorkammer ist von der Lochwand im Bildhintergrund verdeckt). Im linken Bildvordergrund ist die CCD-Kamera zur Aufnahme der Absorptionsbilder montiert.

Die Hauptkammer hat insgesamt sechzehn optische Zugänge, die sternförmig an der kugelförmigen Hauptkammer angebracht sind. Der durchschnittliche Radius der Hauptkammer beträgt etwa 162 mm. Im vorliegenden Experiment wird Laserlicht unterschiedlicher Wellenlänge benutzt, die besondere Fenster und Antireflexbeschichtungen erfordern. Für das Licht des  $\text{CO}_2$ -Lasers, der eine Wellenlänge von  $10.6 \mu\text{m}$  besitzt, werden Zink-Selenid Fenster verwendet, während für das Licht der anderen Laser, die bei etwa 800 nm laufen, antireflexbeschichtete Quarzgläser verwendet werden. Weitere Details zum Aufbau der Vakuumkammer finden sich in der Doktorarbeit von G. Cenini [95]

Die im Experiment verwendeten Rubidiumatome ( $^{87}\text{Rb}$ ) sind anfänglich in metallischer Form ( $\text{Rb}_2\text{CrO}_4$ ) auf einem Dispenser (Modell: RB/NF/3.4/ 12FT+10, Firma: SAES Getters) in der Vakuumkammer eingebracht. Durch Anlegen eines konstanten Stroms von etwa 5.0 A werden die Atome in die Vakuumkammer verdampft und können dort gefangen und gekühlt werden. Der Dispenser ist in dem aus der vertikalen um  $45^\circ$  nach rechts verkippten Flansch angebracht, also im rechten Winkel zur Hauptachse der magneto-optischen Falle.



**Abb. 3.2:** Schematischer Aufbau der Optik des Kühllasers. Die Abkürzungen bezeichnen polarisierender Strahlteiler (PST), Verzögerungs-platte ( $\lambda/2$ ), akusto-optischer Modulator (AOM), magneto-optische Falle (MOT) und Diodenlaser der Firma Toptica (DLX 110).

## 3.2 Magneto-optischen Falle und Dipolfalle

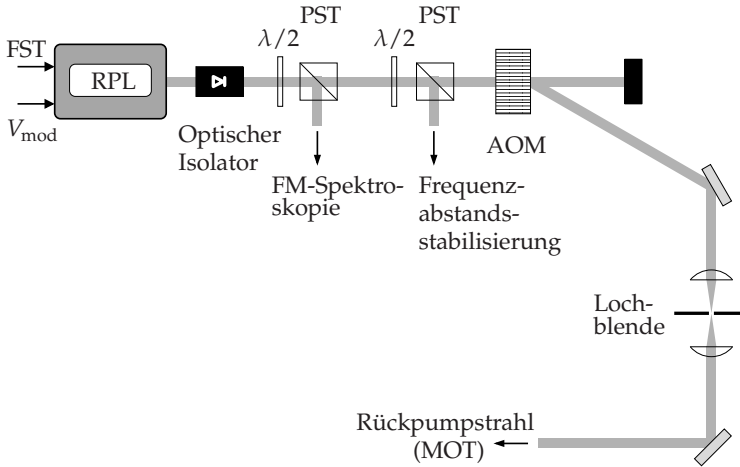
Zum Fangen und Kühlen der Atome werden drei Lasersysteme benutzt, die im Folgenden beschrieben werden. Das optische System der magneto-optischen Falle besteht aus zwei frequenzstabilisierten Lasersystemen, dem Kühllaser und dem Rückpump laser, um im Termschema des Rubidiumatoms einen geschlossenen Kühlkreislauf zu erhalten (vgl. Abschnitt 2.2). Der  $\text{CO}_2$ -Laser (Dipolfallenlaser) als drittes Lasersystem liefert das Licht für die optische Dipolfalle, in der mittels evaporativer Kühlung das Bose-Einstein Kondensat realisiert wird.

*Kühllaser.* Als Kühllaser ist ein kommerzieller Trapez-Diodenlaser (Modell: DLX 110, Firma: Toptica) eingesetzt, der bei einer Wellenlänge von  $\lambda = 780 \text{ nm}$  eine maximale Lichtleistung von

rund 450 mW liefert. Der schematische Aufbau der Optik des Kühllasers ist in Abb. 3.2 gezeigt. Nachdem der Laserstrahl zum Schutz der Diode vor rückreflektierter Strahlung zunächst einen optischen Isolator passiert, wird aus dem Hauptstrahl Licht für eine Sättigungsspektroskopie und eine Frequenzabstandsstabilisierung ausgekoppelt. Die Spektroskopie dient lediglich zur Grobeinstellung der Frequenz. Die Frequenz des Kühllasers wird über eine Frequenzabstandsstabilisierung auf eine konstante Differenz zum Rückpumplaser eingestellt. Die Differenz der Frequenzen des Rückpumplasers und des Kühllasers liegt in der Größenordnung der Hyperfeinaufspaltung des Grundzustands von Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ), d.h. bei rund 6.8 GHz und ist so gewählt, dass der Kühllaser um 21 MHz rotverstimmt ist zum Kühlübergang  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  (vgl. Abb. 2.1). Der Rückpumplaser ist unabhängig vom Kühllaser stabilisiert. Die Frequenzstabilisierung der beiden Laser und die erreichte Frequenzstabilität ist detailliert beschrieben und untersucht worden in der Doktorarbeit von G. Ritt [72].

Hiernach durchläuft der Strahl einen akusto-optischen Modulator, der sowohl zur Frequenz- als auch zur Leistungsregulierung genutzt wird. Aus der weiter verwendeten ersten Beugungsordnung wird noch einmal Licht für die Absorptionsabbildung ausgekoppelt und durch eine Glasfaser zur Vakuumkammer geführt. Der Hauptstrahl wird in eine Einmoden-Glasfaser eingekoppelt, bevor er mittels eines Teleskops auf einen Durchmesser von 2 cm aufgeweitet und als Kühlstrahl durch die Vakuumkammer gelenkt wird. Die Leistung direkt hinter der Faser des zur Kühlung bereitstehenden Lichts beträgt etwa 100 mW. Die Glasfaser dient hier hauptsächlich als Filter, die aus dem Laserstrahl eine beinahe perfekte Gaußmode herausfiltert, was für eine effiziente Kühlung notwendig ist.

*Rückpumplaser.* Als Rückpumplaser wird ein selbst gebautes Diodenlasersystem verwendet. Die Temperatur der Diode wird mit Peltierelementen stabilisiert, während ein Reflexionsgitter als externer Resonator für eine schmalbandige Wellenlängenselekti-

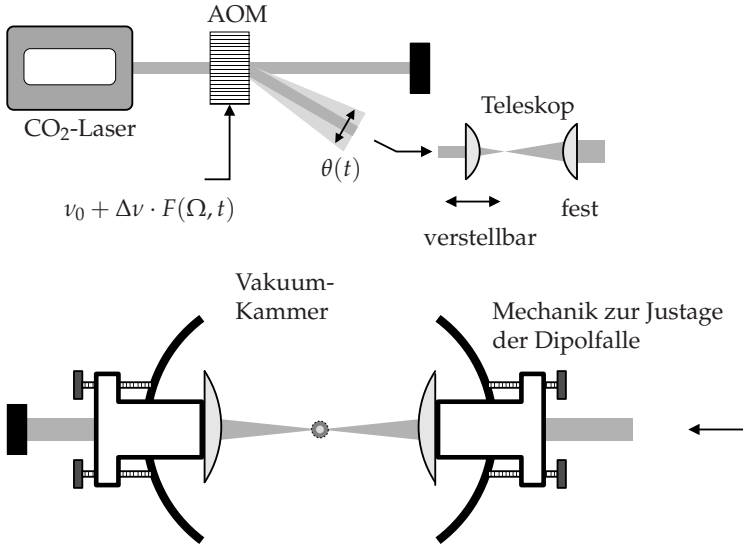


**Abb. 3.3:** Schematischer Aufbau der Optik des Rückpumplasers. Die Abkürzungen bezeichnen polarisierender Strahlteiler (PST), Verzögerungsplatte ( $\lambda/2$ ), akusto-optischer Modulator (AOM), magneto-optische Falle (MOT), Rückpumplaser (RPL), Frequenzstabilisierung (FST) und Frequenz-Modulations-Spektroskopie (FM-Spektroskopie). Zur FM-Spektroskopie wird eine Spannung  $V_{\text{mod}}$  zugeführt.

on dient. Details zum Aufbau eines gitterstabilisierten Diodenlasers finden sich in Ref. [96]. Die Frequenz des Lasers wird mit Hilfe einer dopplerfreien Frequenzmodulationsspektroskopie [97] resonant auf dem Übergang  $F = 1 \rightarrow F' = 2$  von Rubidium, siehe Abb. 2.1, eingestellt. Der Strahlengang des Rückpumplasers ist in Abb. 3.3 dargestellt und ähnelt dem des Kühllasers. Wieder ist ein akusto-optischer Modulator eingebaut, um die Intensität zu regulieren. Die Lochblende von 50  $\mu\text{m}$  Durchmesser filtert den Strahl räumlich. Die optische Leistung des Lasers hinter der Lochblende beträgt etwa 18 mW und wird dann auf einen Durchmesser von 2 cm aufgeweitet.

Anschließend wird der Strahl des Rückpumplasers mit dem des Kühllasers räumlich überlagert und in drei Teilstrahlen aufgeteilt. Jeder Teilstrahl durchläuft eine  $\lambda/4$ -Verzögerungsplatte, bevor er durch die Vakuumkammer geführt wird. Nach dem





**Abb. 3.4:** Schematischer Aufbau der Optik des Dipolfallenlasers. Die Abkürzungen bezeichnen akusto-optischer Modulator (AOM) und Laser der Firma Coherent (CO<sub>2</sub>-Laser). Auf den AOM wird eine Trägerfrequenz  $\nu_0$  gegeben, welche die zentrale Ablenkung der ersten Beugungsordnung bewirkt. Die Modulation  $\Delta\nu \cdot F(\Omega, t)$  macht den Beugungswinkel  $\theta(t)$  zeitabhängig und vergrößert so effektiv den Empfangsbereich der Atome. Mit Hilfe des verstellbaren Teleskops läßt sich zudem die Strahlweite anpassen, um die Dipolfalle zu optimieren. Eine genaue Ausrichtung der Dipolfallenstrahls wird über eine feinmechanische Verstellung an der Vakuumapparatur erreicht.

Durchlauf einer weiteren  $\lambda/4$ -Verzögerungsplatte außerhalb der Kammer, werden die Teilstrahlen jeweils in sich retroreflektiert, so daß die beiden Polarisierungen, die für eine magneto-optische Falle benötigt werden, zur Verfügung stehen.

*Dipolfallenlaser.* Für die Dipolfalle wird das Licht eines CO<sub>2</sub>-Lasers (Modell: GEM-50S, Firma: Coherent) verwendet. Die Wellenlänge des CO<sub>2</sub>-Lasers ist über ein bewegliches Gitter als Resonatorende durchstimmbare zwischen 9.2  $\mu\text{m}$  und 10.9  $\mu\text{m}$ . Der Laser liefert eine maximale Ausgangsleistung von etwa 55 W bei einer Wellenlänge von 10.6  $\mu\text{m}$ , die von der Rotationslinie 10P20 des CO<sub>2</sub>-Gases stammt. Der Strahlengang ist in Abb. 3.4 darge-

stellt. Der Strahl passiert zunächst einen akusto-optischen Modulator, der die Intensität der weiter verwendeten ersten Beugungsordnung regelt. Anschließend wird der Strahl durch ein Teleskop bestehend aus zwei Linsen der Brennweiten von 63.5 mm und 127 mm aufgeweitet. Die erste Linse ist dabei auf einer Schiene verschiebbar, so dass die Form des Dipolfallenpotentials in der Vakuumkammer variierbar ist. Der Dipolfallenlaser wird im weiteren Verlauf horizontal durch das Zentrum der Vakuumkammer gelenkt und mit einer Linse der Brennweite von 38.1 mm im Zentrum fokussiert. Die Linse in der Vakuumkammer ist mit einer Justiermechanik verstellbar, so dass der CO<sub>2</sub>-Laserstrahl kontrolliert ausgerichtet werden kann. Die Größe des Strahlradius im Fokus kann mit Hilfe des Teleskops von etwa 25  $\mu\text{m}$  bis 50  $\mu\text{m}$  variiert werden und ist in dieser Arbeit auf etwa 27  $\mu\text{m}$  eingestellt. Der Strahl wird von einer zweiten Linse kollimiert bevor er aus der Kammer austritt und von einem Strahlblocker absorbiert wird.

Auf den akusto-optischen Modulator wird eine zentrale Trägerfrequenz  $\nu_0 = 40$  MHz gegeben, auf die eine im Vergleich zur Fallenfrequenz ( $\sim 0.1 - 1$  kHz) schnelle Modulation der Form  $\Delta\nu \cdot \sin(\Omega t)$  aufgeprägt wird, dabei ist  $\Delta\nu = 3$  MHz die Amplitude und  $\Omega = 50$  kHz die Frequenz der Modulation. Diese Modulation bewirkt eine kleine räumliche Ablenkung des Strahls und ändert so die Position der Dipolfalle mit einer Frequenz, die oberhalb der Vibrationsfrequenz der in der Dipolfalle eingeschlossenen Atome liegt. So wird effektiv der Empfangsbereich der Atome vergrößert. Im Vergleich zur unmodulierten Falle können so etwa 30% mehr Atome in der Dipolfalle gefangen werden. Die räumliche Modulation der Dipolfalle ist in der Diplomarbeit von J. Plumhof [98] und in der Doktorarbeit von T. Salger ausführlich beschrieben [99].

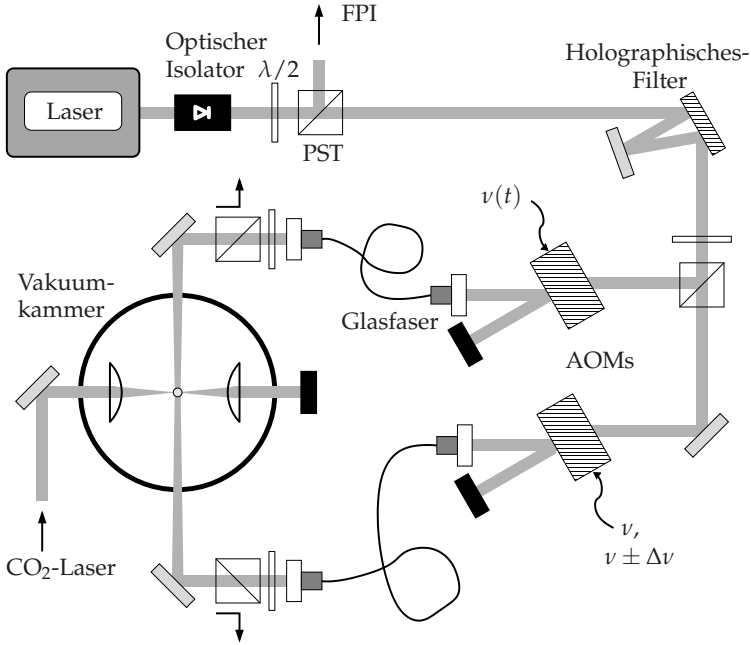
### 3.3 Fourier-synthetisierte optische Gitter

Zur Realisierung der variablen Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentiale wird ein weiteres Lasersystem verwendet, das als Gitterlaser bezeichnet und im Folgenden beschrieben wird. Die Frequenz des Gitterlasers wird mit Hilfe von akusto-optischen Modulatoren so angepasst, dass die in Abb. 2.2(c) gezeigten Ramanübergänge resonant sind. Um die Entartung des Grundzustands aufzuheben, wird ein homogenes Magnetfeld angelegt.

*Gitterlaser.* Das Licht für die variablen optischen Gitterpotentiale liefert ein Trapez-Diodenlasersystem (Modell: DLX 110, Firma: Toptica ). Der Laser hat eine maximale Ausgangsleistung von etwa 500 mW Leistung, von denen letztlich aber nur rund 40 mW auf die Atome treffen. Der schematische Aufbau zur Erzeugung der optischen Gitterpotentiale ist in Abb. 3.5 dargestellt. Zunächst passiert der Strahl einen optischen Isolator zum Schutz der Laserdiode vor reflektierter Strahlung. Aus dem Hauptstrahl wird ein Teilstrahl zur Analyse ausgekoppelt, um die Wellenlänge des Laserlichts zu messen und mit Hilfe eines Fabry-Perot Interferometers die Frequenzstabilität zu überprüfen [100].

Der Hauptstrahl trifft dann auf ein holographisches Reflexionsgitter (Modell: PLR808-92.5-13-17.5-1.5, Firma: Ondax Inc). Die wellenlängenselektive Bragg-Reflexion am Gitter erlaubt es, einen spektralbreiten Untergrund des Diodenlasers zu unterdrücken. Dies ist wichtig, um resonante Frequenzanteile zu reduzieren. Der Hersteller gibt an, dass der spektrale Untergrund bei einmaliger Reflexion um etwa 25 dB abgeschwächt wird. Im vorliegenden Experiment ist der Strahlengang des Lasers so arrangiert, dass das Reflexionsgitter zweimal genutzt wird, um eine möglichst hohe Abschwächung des Untergrunds zu erreichen.

Der spektral gefilterte Hauptstrahl wird im Anschluss mit Hilfe von einer  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte und polarisierendem Strahlteilerwürfel in zwei Teilstrahlen gleicher Intensität aufgeteilt. Die beiden Teilstrahlen durchlaufen jeweils einen akusto-optischen Modulator. Das Licht der ersten Beugungsordnung wird mit Hil-



**Abb. 3.5:** Schematischer Aufbau der Optik zur Erzeugung der optischen Gitterpotentiale. Als Lichtquelle dient ein kommerzieller Trapez-Diodenlaser. Die Abkürzungen bezeichnen hierbei Verzögerungsplatte ( $\lambda/2$ ), polarisierender Strahlteilerwürfel (PST), Fabry-Perot Interferometer (FPI), akusto-optischer Modulator (AOM), Treiberfrequenzen der akusto-optischen Modulatoren ( $\nu(t)$ ,  $\nu$ ,  $\nu \pm \Delta\nu$ ) und polarisationserhaltende Einmoden-Glasfaser (Glasfaser).

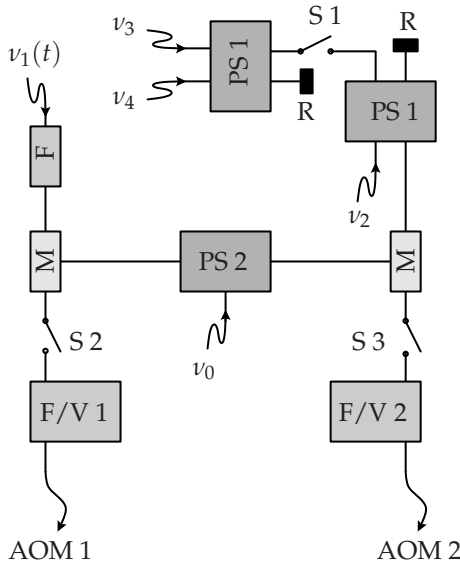
fe von polarisationserhaltenden Einmoden-Glasfasern zur Vakuumkammer geführt und gegenläufig in vertikaler Richtung in die Kammer eingestrahlt. Die akusto-optischen Modulatoren steuern die Intensität einerseits und prägen den Teilstrahlen andererseits die für die optischen Gitterpotentiale notwendigen Frequenzen auf.

Die beiden Teilstrahlen werden mit einer Faserauskoppeloptik (Modell: 60FC-4-M8-10, Firma: Schäfter+Kirchhoff) an den Ort der Dipolfalle fokussiert mit einem Rayleigh-Bereich von 180 mm und einem Spotdurchmesser von  $\varnothing = 300 \mu\text{m}$ . Um un-

gewollte Stehwellengitter durch Reflexionen an den Faseroptiken zu vermeiden, werden die Laserstrahlen gekreuzt zueinander linear polarisiert, um nach dem Durchgang durch die Vakuumkammer mit Hilfe eines polarisierenden Strahlteilerwürfels ausgekoppelt zu werden. Zudem werden die beiden Laserstrahlen unter einem Winkel von  $4^\circ$  zur Gravitationsachse eingestrahlt, da sich zeigte, dass bei kleineren Winkeln Rückreflexe an den Vakuumfenstern zu störenden Stehwellen führen. Experimentell erwies sich der angegebene Winkel als optimal. Die resultierenden Gitterpotentiale sind im Falle des Stehwellengitters zwar durch die zueinander senkrechte Polarisierung sehr viel schwächer als die durch parallel polarisierte Laserstrahlen erzeugte Stehwellengitterpotentiale. Jedoch sind die erzielten effektiven Potentialtiefen dieser ohnehin mit kleinerer Lichtleistung realisierbaren räumlichen Fourierkomponente ausreichend, um die geplanten Experimente durchzuführen.

*Zeeman-Niveaus.* Wie in Abschnitt 2.3.3 erläutert wird ein Drei-Niveau-System benötigt, um Multiphotonen-Gitter zu erzeugen. Genutzt werden hier die Zeeman-Niveaus  $m_F = -1$  und  $m_F = 0$  der  $F = 1$  Komponente des elektronischen Grundzustands  $5^2S_{1/2}$  von Rubidium, wobei die Entartung des Grundzustands durch Anlegen eines homogenen Magnetfeldes aufgehoben wird. Das Magnetfeld wird von zwei in Helmholtzkonfiguration betriebenen Spulen erzeugt, die im Abstand von etwa 30 cm zueinander in der horizontalen Achse außen an der Vakuumkammer angebracht sind. Im Mittelpunkt der Verbindungsachse befindet sich die  $\text{CO}_2$ -Laser-Dipolfalle, in der das atomare Kondensat hergestellt wird. Die beiden Spulen haben einen Durchmesser von 15 cm und 60 Windungen und können mit bis zu 3 A angesteuert werden. Im vorliegenden Experiment wird ein Magnetfeld von etwa 2 Gauß angelegt, was zu einer Aufspaltung der Zeeman-Niveaus von  $\delta\nu = 1010$  kHz führt [99].

*Frequenzerzeugung.* Die benötigten Frequenzen in den Lichtstrahlen zur Erzeugung der Multiphotonen-Gitter werden realisiert mit Hilfe der beiden akusto-optischen Modulatoren AOM 1



**Abb. 3.6:** Schematische Darstellung der Radiofrequenzschaltung zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren für die Erzeugung der optischen Gitterpotentiale. Die Abkürzungen bezeichnen hier Leistungsteiler (PS 1 und PS 2), eine Kombination aus Hochpass und Tiefpass (F), Verstärker (V), elektronische Schalter (S 1-3), 50 Ohm-Abschlusswiderstand (R), Mischer (M) und akusto-optische Modulatoren (AOM 1 und AOM 2). Die Radiofrequenzen  $\nu_1 - \nu_4$  sind hierbei in der Größenordnung von 57 MHz und werden mit  $\nu_0 = 143$  MHz hochgemischt auf eine Frequenz nahe 200 MHz.

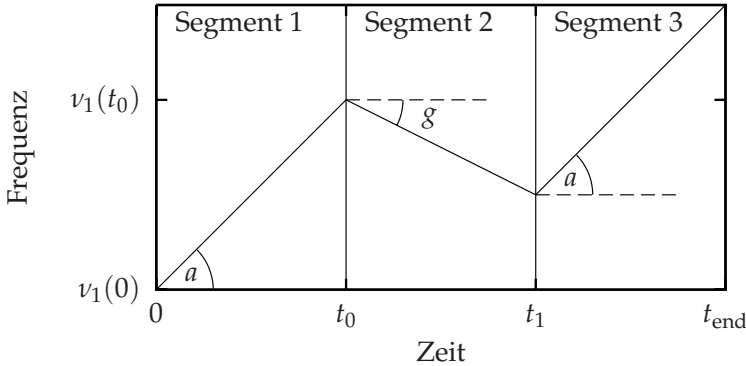
und AOM 2, wie in Abb. 3.5 dargestellt. Dabei wird für ein statisches Gitter der AOM 1 mit einer Frequenz  $\nu(t) = \nu_1$  betrieben. Für die bewegten Gitterpotentiale wird diese Frequenz mit einer später beschriebenen Funktion frequenzmoduliert. Dazu wird ein Funktionsgenerator (Modell: WW 2571A, Firma: Tabor) verwendet der einen besonders großen internen Speicher hat und Frequenzmodulationen mit beliebig wählbaren Funktionen erlaubt. Dies war für die in dieser Arbeit vorgestellten Experimente besonders wichtig. Auf den zweiten akusto-optischen Modulator (AOM 2) werden drei konstante Frequenzen  $\nu_2$ ,  $\nu_3$  und  $\nu_4$  gegeben, die von einem anderen Funktionsgenerator (Modell: AFG 3102, Firma: Tektronix) erzeugt werden. Die Funktionsge-

neratoren, die zur Erzeugung aller Frequenzen genutzt werden, sind gegeneinander mit einer 10 MHz Referenz phasenstabilisiert. Die Radiofrequenzschaltung zur Ansteuerung der akustooptischen Modulatoren ist schematisch in Abb. 3.6 dargestellt. Die vier Radiofrequenzen  $\nu_1 - \nu_4$  liegen im Bereich von 57 MHz und werden dann mit der Frequenz  $\nu_0 = 143$  MHz auf etwa 200 MHz gemischt.

*Multiphotonen-Gitter.* Das reine Stehwellenpotential wird mit den beiden Frequenzen  $\nu_1$  und  $\nu_2$  erzeugt, während das reine Vierphotonen-Gitter mit den drei Frequenzen  $\nu_1, \nu_3$  und  $\nu_4$  generiert wird. Der elektronische Schalter  $S1$  kann zwischen reinen Stehwellengitter und Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen wählen, die elektronischen Schalter  $S2$  und  $S3$  steuern die optische Gitter als ganzes an.

*Beschleunigte Gitter.* Da die in Kapitel 4 beschriebenen Experimente im freien Fall der Atome stattfinden, muss das optische Gitter mit den Atomen mitbewegt werden, um im Ruhesystem der Atome statische Gitterpotentiale beobachten zu können. Ein laufendes Zweiphotonen-Gitter, das sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegt, kann hergestellt werden, in dem eine Frequenz verstimmt wird gegenüber der anderen  $\nu_1 = \nu_2 + \Delta\nu$ . Der Quasiimpuls  $q$  eines ruhenden Atoms im laufenden Gitter entspricht dann einer Geschwindigkeit  $v = (\lambda/2)\Delta\nu$ , wobei  $\lambda$  die Wellenlänge des Gitterlasers ist. Um die beschleunigte Bewegung der Atome im Schwerfeld der Erde zu kompensieren, muss die Geschwindigkeit des laufenden Gitters entsprechend erhöht werden. Dazu wird die Verstimmung linear gemäß  $\Delta\nu = 2g/\lambda \cdot t$  verändert. Experimentell kann die Kompensation der Erdbeschleunigung z.B. über die Beobachtung von Bloch-Oszillationen bestimmt werden, die im Falle einer perfekten Kompensation verschwinden.

Im Ruhesystem der Atome bewirkt eine Bewegung des optischen Gitters eine Änderung des Quasiimpuls  $q(t) = q(0) + F \cdot t$  der Atome. Dies entspricht der Wirkung einer Kraft  $F$  auf die Atome gemäß dem Newtonschem Gesetz (vgl. Abschnitt 2.5).



**Abb. 3.7:** Schema der Frequenzrampen zur Realisierung beschleunigter optischer Gitter. Die Steigungen  $a$  und  $g$  geben effektive Beschleunigungen der Atome im optischen Gitter an, wobei  $g$  die Erdbeschleunigung ist.

Mit einer entsprechenden Frequenzverstimmung  $\Delta\nu(t)$  und somit einer Änderung des Quasiimpulses kann eine beliebige effektive Kraft  $F$  auf die Atome simuliert werden. In der vorliegenden Arbeit werden sowohl einfache als auch mehrere lineare Frequenzrampen unterschiedlicher Steigung hintereinander durchlaufen, so wie in Abb. 3.7, was der Simulation konstanter Kräfte unterschiedlicher Stärke entspricht. Die dazu nötigen Frequenzmodulationen werden mit Hilfe des Funktionsgenerators der Firma Tabor bewerkstelligt. Im Anhang A ist geschildert, wie der Funktionsgenerator via GPIB programmiert wurde.

Für die Realisierung des Stückelberg-Interferometers ist eine aus drei Segmenten bestehende Frequenzrampe notwendig, wie sie in Abb. 3.7 dargestellt ist. Im ersten und im letzten Segment entspricht die Steigung der Frequenzrampe einer Beschleunigung  $a$  der Atome, während im mittleren Segment die Beschleunigung  $g$  die Gravitation kompensiert, damit die Atome in dieser Zeit ein statisches Gitter wahrnehmen. Über die Zeitpunkte  $t_0$ ,  $t_1$  und  $t_{\text{end}}$  kann die Dauer der einzelnen Segmente gesteuert werden.



## 3.4 Ablauf des Experiments

Das Experiment läuft computergesteuert. Das Programm hierfür wurde von C. Geckeler in der Programmiersprache *Python* entwickelt und ist im Entwurf seiner Doktorarbeit dokumentiert. Die Routine zur Erzeugung des Bose-Einstein Kondensates ist bereits ausführlich in früheren Doktorarbeiten der Arbeitsgruppe beschrieben [95,72,99] und wird im Folgenden zusammengefasst.

*Laden der MOT.* Der Zyklus zur Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensates beginnt mit dem Laden der magneto-optischen Falle. Die magneto-optische Falle wird für 29 s geladen. Dazu wird der in der Vakuumkammer integrierte Dispenser mit einem konstanten Strom von etwa 5 A geheizt, so dass Rubidiumatome verdampft werden. Während dieser Zeit wird das Kühllicht und das Rückpumplicht mit voller Leistung eingestrahlt. Das magnetische Quadrupolfeld mit Gradienten von etwa 12 G/cm, das durch einen konstanten Strom von 5.6 A durch die MOT-Spulen erzeugt wird, ist ebenfalls angeschaltet. Die im Zentrum der Vakuumkammer gefangene Atomwolke fluoresziert im Licht der magneto-optischen Falle und ist mit bloßem Auge sichtbar (der Durchmesser der Atomwolke beträgt etwa 3cm, wenn die Falle geladenen ist). Über die Fluoreszenz, die mit einer Photodiode aufgenommen wird, kann eine Teilchenzahl von etwa  $2 \cdot 10^8$  in der magneto-optischen Falle ermittelt werden [99]. Es wird eine Temperatur in der Größenordnung von etwa 40  $\mu$ K gemessen, die klar unterhalb der Dopplertemperatur liegt. Für solche Messungen wurde mittels Flugzeitbilder die Expansion der Atomwolke aufgezeichnet, aus der sich eine Temperatur ermitteln lässt [95]. Bedingt durch Reabsorption von bereits gestreuten Photonen und durch Stöße der Atome ist sowohl die erreichbare Teilchenzahl als auch die Temperatur in der magneto-optischen Falle begrenzt.

*Dunkle MOT.* Anschließend folgt eine sogenannte dunkle Phase der magneto-optischen Falle von 120 ms Dauer. Um die durch

die Fluoreszenz verursachten Stöße zu reduzieren, wird die Frequenz des Kühllasers bis zu 230 MHz rotverstimmt und die Intensität des Rückpumpasers auf 1 % verringert. Dadurch werden die Atome in den  $|F = 1\rangle$  Zustand gepumpt, wo kaum noch Photonen gestreut werden. Die anfangs hell leuchtende magneto-optische Falle ist nun dunkel. Durch die Reduktion der Photonestöße erhöht sich die Dichte der gefangenen Atome. Die Erhöhung der Dichte ist wichtig für ein effizientes Laden der Dipolfalle.

*Laden in die Dipolfalle.* Das Licht zur Erzeugung der optischen Dipolfalle wird von dem CO<sub>2</sub>-Laser geliefert, in dessen Fokus die Rubidiumatome gefangen werden. Er ist von Beginn des Ladens der magneto-optischen Falle mit voller Leistung von etwa 50 W angeschaltet. Nach der dunklen Phase der magneto-optischen Falle folgt eine Wartezeit von 200 ms Dauer, in der das Licht des Rückpump- und des Kühllasers ausgeschaltet ist. In dieser Zeit werden die nicht in der Dipolfalle gefangenen Atome durch die Gravitation entfernt. Die in Abschnitt 3.2 beschriebene räumliche Modulation der Dipolfalle setzt etwa 1 s vor Beginn der dunklen magneto-optischen Phase ein.

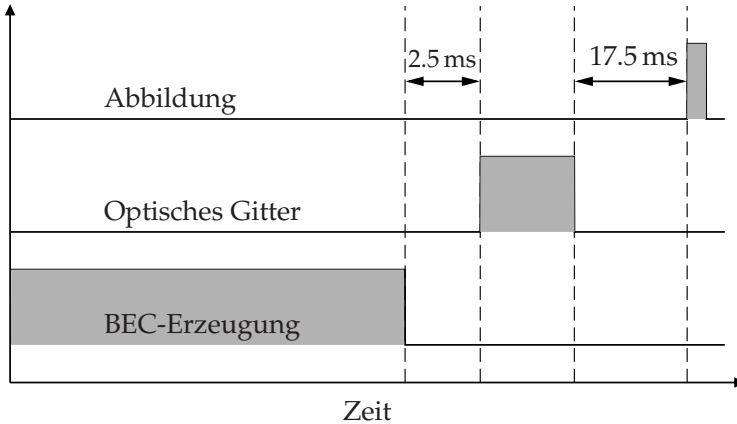
*Evaporatives Kühlen.* Die in die Dipolfalle geladenen Rubidiumatome werden evaporativ bis in den quantenentarteten Zustand des Bose-Einstein Kondensates gekühlt. Die Verdampfungskühlung von Atomen ist vergleichbar mit dem Kühlen von heißem Kaffee durch Verdampfen von Wasser. Die energiereichsten Teilchen werden entfernt, während der Rest zu einer niedrigeren Gleichgewichtstemperatur rethermalisiert. Dieses Verfahren wurde zuerst in einer Magnetfalle [52, 101] und etwa 10 Jahre später auch erfolgreich in einer gekreuzten optischen Dipolfalle angewendet [102]. Im vorliegenden Experiment wird die Verdampfung erzwungen durch Verringern der Lichtleistung des Dipolfallenlasers innerhalb von 17 s. Die Absenkung der Fallentiefe wird über den in den Strahlengang des CO<sub>2</sub>-Lasers integrierten akusto-optischen Modulator vermittelt und folgt dabei

der Form

$$V(t) = \frac{V_0}{(1 + t/\tau)^\beta}, \quad (3.1)$$

wobei  $\tau = 0.6$  s und  $\beta = 1.2$  sich experimentell als optimal erwiesen haben. Die Potentialtiefe zu Beginn der Verdampfungskühlung ist mit  $V_0$  bezeichnet. Die Form der Evaporationsrampe (3.1) ergibt sich aus dem Bemühen, das Verhältnis  $\eta = V(t)/k_B T$  aus Fallentiefe und thermischer Energie während der Verdampfung konstant zu halten [103, 104]. Die Leistung des CO<sub>2</sub>-Lasers wird in zwei Schritten unterschiedlicher Länge reduziert. In einem ersten schnellen Schritt wird die Leistung auf 68 % innerhalb von 50 ms Dauer abgesenkt. In dem zweiten langen Schritt wird in 17 s die Leistung des CO<sub>2</sub>-Lasers schließlich auf etwa 40 mW reduziert. Die räumliche Modulation des Fallenpotentials wird bereits nach 15 s ausgeschaltet. Während der Evaporation wird ein variabel einstellbarer Magnetfeldgradient eingestrahlt, der es ermöglicht, verschiedene Spinzustände zu selektieren. Im vorliegenden Experiment wird ein Bose-Einstein Kondensat mit typischerweise  $4 \cdot 10^4$  Rubidiumatomen im  $|m_F = -1\rangle$  Zustand hergestellt.

*Gitterexperimente.* Die optische Dipolfalle wird danach mittels des akusto-optischen Modulators im Strahlengang des CO<sub>2</sub>-Lasers ausgeschaltet. Die Atome expandieren dann für eine Dauer von 2.5 ms frei im Schwerfeld der Erde, damit sich ein Großteil der Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie umwandeln kann [105]. Dadurch vergrößert sich zwar die Impulsbreite des Kondensates, aber danach können die Wechselwirkungseffekte zwischen den Atomen vernachlässigt werden. Nach dieser Zeit der freien Expansion von 2.5ms Dauer, wird das optische Gitter angeschaltet und es können die in Kapitel 4 beschriebenen Experimente durchgeführt werden. Die Wechselwirkungsdauer von den optischen Gittern und den Atomen ist im Bereich von einigen Mikrosekunden bis zu einer Millisekunde. Durch die Beugung am Fourier-synthetisierten optischen Gitter nehmen die Atome auf charakteristische Weise kohärent Impulse in Portionen des Photonenrückstoßes von  $\Delta p = 2 \hbar k$  auf.



**Abb. 3.8:** Zeitdiagramm des experimentellen Ablaufs. Nach Erzeugung des Kondensates, wird die Dipolfalle abgeschaltet und die Atome expandieren frei im Schwerfeld der Erde für 2.5 ms. Anschließend werden die Experimente mit den variablen optischen Gittern durchgeführt. Nach einer weiteren Phase der Expansion wird eine Absorptionaufnahme von der Atomverteilung gemacht.

*Expansion.* Anschließend wird das Gitterlicht ausgeschaltet und es folgt eine weitere Phase der freien Expansion der Atome im Schwerfeld der Erde von etwa 17.5 ms Dauer. Während dieser Expansion trennen sich die verschiedenen Beugungsordnungen räumlich (entlang der Gravitationsachse) voneinander, aufgrund ihrer unterschiedlichen Impulse. Die Atome können während der Gitterexperimente auch die Spinzustände  $|m_F = 0, 1\rangle$  besetzen, wenn die Verstimmungen zu den Ramanübergängen sehr klein sind. In diesem Fall sind die Atome für das optische Gitter in einem Dunkelzustand und werden nicht mehr von diesem gebeugt. In dieser letzten Phase wird deshalb zudem ein starkes magnetisches Quadrupolfeld in der Stern-Gerlach-Konfiguration eingestrahlt, das eine räumliche Trennung der Spinzustände ermöglicht.

*Absorptionaufnahme.* Am Ende der Expansion wird mit Hilfe einer Absorptionaufnahme die Atomverteilung bestimmt und anhand der Intensitätsverteilung die Anzahl der Atome in den

einzelnen Atomwolken ermittelt. Dazu werden die Atome mit resonantem Licht des Kühllasers, das von hinten durch die Vor- und Hauptkammer der Vakuum Apparatur geführt wird, beleuchtet. Der Schattenwurf der Atomwolke wird mit einer CCD-Kamera aufgenommen und daraus die Intensitätsverteilung ermittelt. Details zum Abbildungsverfahren und der Bestimmung der Atomzahlen aus der Intensitätsverteilung finden sich in [95, 72]. Der zeitliche Ablauf des Experiments ist in Abbildung 3.8 dargestellt. Ein Zyklus des Experiments von Erzeugen des Kondensates bis zur Absorptionaufnahme dauert etwa 50 s und wird für eine Messreihe viele male durchlaufen.

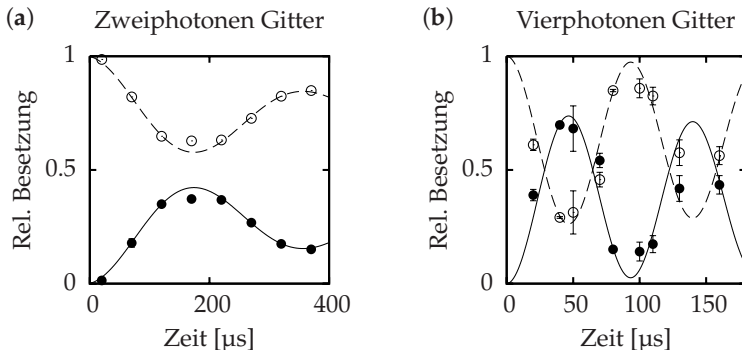
*Auswertung.* Die Abstände der Beugungsordnungen spiegeln das reziproke Gitter wieder und werden in Einheiten von  $2 \hbar k$  abgezählt. Diese Einteilung wird stets beibehalten, so dass beim reinen Vierphotonen-Gitter ausschließlich die geradzahigen Beugungsordnungen besetzt werden können. Die relativen Besetzungszahlen der Beugungsordnungen ergeben sich aus dem Verhältnis  $N_i/N$  der bestimmten Atomzahlen der  $i$ -ten Beugungsordnung  $N_i$  und der Summer aller in den Beugungsordnungen bestimmten Atomzahlen  $\sum_i N_i$ . Das heißt für jeden Messpunkt ist die relative Besetzung der Beugungsordnungen auf eins normiert. Die Anzahl der Atome, die die anderen Spinzustände  $|m_F = 0, 1\rangle$  besetzen, wird nicht bestimmt.

### 3.5 Charakterisierung des optischen Gitters

Um experimentell die Gittertiefen des optischen Gitters zu vermessen, werden Rabi-Oszillationen genutzt [76]. Die Frequenz der Oszillation hängt direkt mit der Potentialtiefe zusammen

$$V_1/E_r = \frac{2}{\nu_r T_{\text{Rabi}}}, \quad (3.2)$$

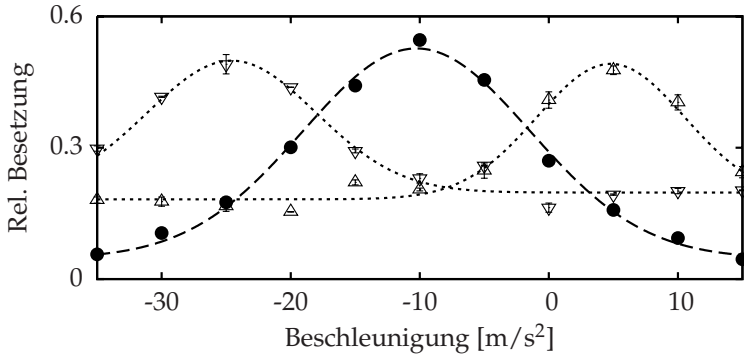
wobei  $T_{\text{Rabi}}$  die Periode der Rabi-Oszillation,  $\nu_r = 3.71$  kHz die Rückstoßfrequenz und  $E_r$  die Rückstoßenergie ist. Rabi-Oszillationen bezeichnen spezielle Lösungen der zeitabhängigen Schrö-



**Abb. 3.9:** Beispiel einer Rabi-Oszillation, relative Besetzung der Beugungsordnungen gegen Einstrahldauer des Gitters. Die Linien sind angepasste gedämpfte Sinusfunktionen. (a) Die 0. Ordnung ist durch offene Kreise, die 1. Ordnung durch gefüllte Kreise dargestellt. Die Fehler sind kleiner als die Größe der Punkte. (b) Die 0.- bzw. 2. Beugungsordnung ist durch offene bzw. gefüllte Kreise dargestellt.

dinger-Gleichung für ein Zwei-Niveau-System, bei dem ein Wellenpaket zwischen dem unteren und dem oberen Zustand hin und her oszilliert.

Die beiden untersten Bänder des optischen Gitters stellen ein solches Zwei-Niveau-System dar. An der Bandkante  $q = 1 \hbar k$  ist die Energielücke ungefähr proportional zur Potentialtiefe des Gitters. Die Rabi-Oszillationen werden daher an der Bandkante aufgenommen. Hierzu wird die Verstimmung  $\Delta v$  gerade so gewählt, dass die Atome einen Quasiimpuls von  $q = 1 \hbar k$  haben im Falle des Zweiphotonen-Gitters und  $q = 2 \hbar k$  im Falle des Vierphotonen-Gitters. Es wird dann für verschieden lange Wechselwirkungszeiten von dem Kondensat mit dem optischen Gitter die Besetzung der nullten und der ersten Beugungsordnung aufgenommen. Aus der hieraus ermittelten Rabi-Frequenz wird dann die Potentialtiefe des optische Gitters gemäß (3.2) berechnet. Eine beispielhafte Messung ist in Abb. 3.9 für das reine Zweiphotonen- und das reine Vierphotonen-Gitter dargestellt. Daraus ergibt sich für das Zweiphotonen-Gitter eine Potentialtiefe von  $V_1 = 1.5 E_r$  und für das Vierphotonen-Gitter ergibt sich



**Abb. 3.10:** Relative Besetzung der Beugungsordnungen gegen Beschleunigung des Gitters für eine konstante Dauer von  $800 \mu\text{s}$ . Die 0. Beugungsordnung ist durch gefüllte Kreise dargestellt während die  $\pm 1$ . Ordnung durch Dreiecke dargestellt sind. Die gestrichelten Linien sind angepasste Gaußkurven.

$$V_2 = 5.8 E_r.$$

Die im Experiment verwendete Frequenzrampe  $\nu(t)$ , mit der alle hier gezeigten Messungen aufgenommen wurden, besteht aus drei linearen Segmenten. In der ersten Phase der Modulation wird die Grundfrequenz  $\nu_0$  linear erhöht, was einer Simulation einer äusseren Kraft entspricht. In der zweiten Phase wird die Erdbeschleunigung kompensiert durch eine Verminderung der Verstimmung. In der letzten Phase wird die Frequenz  $\nu(t)$  wie in der ersten Phase erhöht. Dies ist schematisch in Abb. 3.7 visualisiert. Für die Messung der Rabi-Oszillationen zur Bestimmung der Potentialtiefen des optischen Gitters wird nur die zweite Phase genutzt. Während für die Messung der Bloch-Zener-Oszillationen (vgl. Abschnitt 2.7 nur die erste Phase der Rampe benötigt wird. Für die Realisierung des Landau-Zener-Stückelberg Interferometers werden alle drei Segmente der in Abb. 3.7 gezeigten Frequenzrampe durchlaufen werden.

Die Segmente der Rampe wurden einzeln getestet, um sicherzustellen, dass die effektiven Beschleunigungen des Kondensates wie gewünscht umgesetzt werden. Als Beispiel sei hier das

zweite Segment angeführt, in der für eine variable Zeit die Erdbeschleunigung kompensiert werden soll. Hierzu wurde bei einem starken Zweiphotonen-Gitter die Steigung der Rampe variiert, während die Dauer  $T$  der Wechselwirkung von  $800 \mu\text{s}$  konstant blieb. Die Messreihe ist in Abb. 3.10 dargestellt, wobei jeder Punkt zweimal vermessen wurde, woraus sich der statistische Fehler ergibt. Es ergibt sich ein symmetrisches Bild um die 0. Beugungsordnung, die ihre Resonanz gerade dort hat, wo die Gravitation kompensiert ist. Die an die 0. Ordnung angepasste Gaußkurve ist in der Abb. 3.10 als lang gestrichelte Linie dargestellt und ergibt einen Wert für die Erdbeschleunigung von etwa  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , was zu dem bekannten Wert passt. Die beiden anderen Resonanzen treten dann auf, wenn die Atome auf eine Geschwindigkeit von  $\pm 2 \hbar k$  beschleunigt wurden.



# Kapitel 4

## Experimentelle Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die im Kapitel 2 beschriebenen Bloch-Zener-Oszillationen und das Landau-Zener-Stückelberg Interferometer mit einem Bose-Einstein Kondensat im Fourier-synthetisierten optischen Multiphotonen-Gitter untersucht. Die Bloch-Zener-Oszillationen erweisen sich wegen der dabei auftretenden Interferenzen von zwei Teilwellen im Bloch-Zustandsraum als sehr empfindlich auf kleine Störungen, z.B. Änderungen der adiabatischen Übergangswahrscheinlichkeiten  $P_{LZ}^a$  (2.45). Die Bloch-Zener-Oszillationen sind nur bei konstanter Phase zwischen den beiden Teilwellen beobachtbar. Dagegen sind die Stückelberg-Oszillationen recht robust gegen Variationen in den Parametern des optischen Gitters und auch dann noch beobachtbar, wenn die Bloch-Zener-Oszillationen ihre klare Signatur bereits verloren haben.

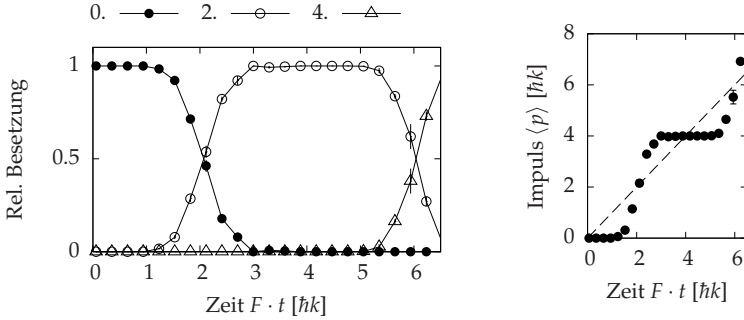
Ein wesentlicher Unterschied zu dem idealisierten Zwei-Band-System aus Kapitel 2 und einem realen optischen Gitter ist das Landau-Zener Tunneln aus dem Miniband-System heraus in höhere Bloch-Bänder. Der Verlust der Atome im Miniband-System bewirkt eine Verkleinerung der Amplituden der beiden Bloch- bzw. Stückelberg-Oszillationen. Ein weiterer wichtiger Unterschied ist das Auftreten von Dekohärenzeffekten. Die Kohärenzzeit ist

über die Intensitäten der Lichtfelder des optischen Gitters und die Zweiphotonen-Verstimmung  $\delta$  im Vierphotonen-Prozess (vgl. Abb. 2.2) beeinflussbar. Jedoch erfordert die Realisierung eines Miniband-Systems im optischen Gitter einen sehr starken Vierphotonen-Prozess, der das Zweiphotonen-Gitter dominiert. Diese Anforderungen bedingen sich gegenseitig und erschweren die Umsetzung eines adäquaten optischen Gitters, was insbesondere auf die Beobachtung von Bloch-Zener-Oszillationen zutrifft, da hierfür längere Kohärenzzeiten notwendig sind, um zwei Bloch-Perioden aufzulösen.

## 4.1 Atomare Bloch-Oszillation im Vierphotonen-Gitter

Zur Realisierung von Bloch-Oszillationen wird ein starkes Vierphotonen-Gitter durch eine relativ kleine Zweiphotonen-Verstimmung  $\delta = 15$  kHz (vgl. Abb. 2.2) erzeugt, so dass keine extrem hohen Intensitäten der Lichtfelder erforderlich sind (vgl. Gleichungen (2.19) und (2.23)). Die effektive Potentialtiefe des Vierphotonen-Gitters wird mit einer Rabi-Oszillation bestimmt und beträgt  $V_2 = 4.9 E_r$ . Der Quasiimpuls  $q$  des Kondensates wird linear erhöht durch Anlegen einer äußeren Kraft  $F = M \cdot a$  gemäß  $q = F \cdot t$ , wobei  $M$  die Masse der Rubidiumatome ( $^{87}\text{Rb}$ ) und  $a = 30$  m/s die Beschleunigung des Kondensates im optischen Gitter bezeichnet. Die Beschleunigung der Atome im optischen Gitter wird durch eine Verstimmung der Lichtfrequenzen erreicht, wie es in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde. Die Beschleunigung der Atome im Gitter entspricht dem Durchlaufen der Bänder im getriebenen Zwei-Niveau-System mit einer Geschwindigkeit  $\omega$  (vgl. Abschnitt 2.6).

Zur Aufnahme der Bloch-Oszillation wird, wie in Kapitel 3.4 beschrieben, das Kondensat erzeugt und nach einer ballistischen Expansion von 2.5 ms in das unterste Band des optischen Gitters geladen. Anschließend wird das atomare Kondensat für varia-



**Abb. 4.1:** Experimentell aufgenommene Bloch-Oszillationen im optischen Vierphotonen-Gitter. Die durchgezogenen Linien verbinden die zusammengehörenden Messpunkte. (a) Die relative Besetzung der Beugungsordnungen ist aufgetragen gegen die skalierte Zeit  $F \cdot t$ . Dabei ist der gefüllte Kreis die nullte Beugungsordnung, der offene Kreis die zweite, das aufrechte Dreieck die vierte. (b) Der mittlere Impuls der Atome  $\langle p \rangle$  (2.50) gegen die skalierte Zeit  $F \cdot t$ . Die gestrichelte Linie ist Entwicklung des Impulses  $q(t) = F \cdot t$  eines freien Teilchens.

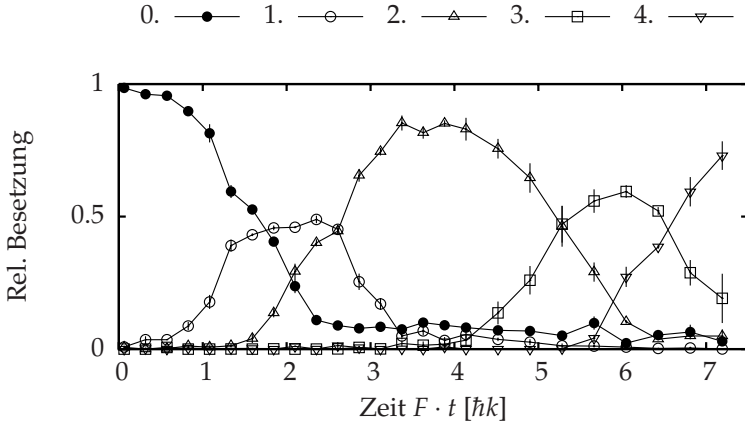
ble Zeiten mit der Kraft  $F$  beschleunigt. Nach Abschalten des optischen Gitters folgt eine weitere ballistische Expansion von 17.5 ms, bevor eine Absorptionaufnahme aufgenommen wird. Aus der Intensitätsverteilung werden die relativen Besetzung der Beugungsordnungen ermittelt. In Abb. 4.1 ist die Messung einer Bloch-Oszillation im Vierphotonen-Gitter dargestellt. In Teil (a) der Abb. 4.1 ist die relative Besetzung der Beugungsordnungen gegen die skalierte Wechselwirkungsdauer  $F \cdot t$  der Atome mit dem optischen Gitter aufgetragen. Jeder Zeitpunkt wurde dreimal aufgenommen und so ein statistischer Fehler bestimmt. Die Besetzung der Beugungsordnungen ist zu jedem Zeitpunkt auf eins normiert.

Jeweils im Bereich der Bandkanten des Vierphotonen-Gitters bei  $q = 2 \hbar k$ ,  $q = 6 \hbar k$ ,  $q = 10 \hbar k$ , und so weiter finden adiabatische Landau-Zener Übergänge statt mit einer Wahrscheinlichkeit von  $P_{LZ}^a = 0.9994$  gemäß (2.45). Es werden nach und nach die höheren Beugungsordnungen besetzt, wie es aus der Theorie des Zwei-Band-Systems (vgl. Abschnitt 2.6) zu erwarten

ten ist. Der aufgenommene mittlere Impuls der Atome  $\langle p \rangle$  (2.50) kann aus den relativen Besetzungszahlen der Beugungsordnungen bestimmt werden und ist in Abb. 4.1(b) dargestellt. Der mittlere Impuls der Atome folgt dabei nicht der Beschleunigung  $q = F \cdot t$  eines freien Teilchens sondern zeigt die für die Bloch-Oszillationen im Gitter typische Treppenform.

## 4.2 Atomare Bloch-Zener-Oszillationen in bichromatischen optischen Gitterpotentialen

Zur experimentellen Aufnahme von Bloch-Zener-Oszillationen wird analog vorgegangen wie bei der Aufnahme von Bloch-Oszillationen (vgl. Abschnitt 4.1). Es wird ein starkes Vierphotonen-Gitter durch eine relativ kleine Zweiphotonen-Verstimmung  $\delta = 90$  kHz (vgl. Abb. 2.2) erzeugt, so dass keine extrem hohen Intensitäten der Lichtfelder erforderlich sind (vgl. Gleichungen (2.19) und (2.23)). Die effektive Potentialtiefe des Vierphotonen-Gitters wird mit einer Rabi-Oszillation bestimmt und beträgt  $V_2 = 4.5 E_r$ . Anders als zuvor bei den Bloch-Oszillationen wird zudem die Potentialtiefe des Zweiphotonen-Gitters erhöht und ebenfalls mit Hilfe von Rabi-Oszillationen zu  $V_1 = 2.7 E_r$  bestimmt. Die eingestellte Relativphase zwischen den beiden Gitterpotentialen ist  $\phi = 0^\circ$ . Der Quasiimpuls  $q$  des Kondensates wird linear erhöht durch Anlegen einer äußeren Kraft  $F = M \cdot a$  gemäß  $q = F \cdot t$ , wobei  $M$  die Masse der Rubidiumatome ( $^{87}\text{Rb}$ ) und  $a = 38$  m/s die Beschleunigung des Kondensates im optischen Gitter bezeichnet. Die Beschleunigung der Atome im optischen Gitter wird durch eine Verstimmung der Lichtfrequenzen erreicht, wie es in Abschnitt 3.3 beschrieben wurde. Die Beschleunigung der Atome im Gitter entspricht dem Durchlaufen der Bänder im getriebenen Zwei-Niveau-System mit einer Geschwindigkeit  $\omega$  (vgl. Abschnitt 2.7). Der komplette Parametersatz dieser Messung ist im Anhang C zusammengefasst. Der Ablauf des Experiments ist derselbe wie oben bei den Bloch-Oszillationen (vgl. Abschnitt 4.1). Nach Erzeugen des Kondensates, folgt eine freie Expansion von



**Abb. 4.2:** Bloch-Zener-Oszillation im bichromatischen optischen Gitter. Die relative Besetzung der Beugungsordnungen ist aufgetragen gegen die skalierte Zeit. Dabei ist der gefüllte Kreis die nullte Beugungsordnung, der offene Kreis die erste, das aufrechte Dreieck die zweite, das Quadrat die dritte und das kopfstehende Dreieck die vierte Beugungsordnung. Die durchgezogenen Linien verbinden die zusammengehörenden Beugungsordnungen linear miteinander.

2.5 ms, bevor das bichromatische Gitter eingestrahlt wird. Anschließend folgt eine weitere Expansion von 17.5 ms Dauer, bevor mit Hilfe einer Absorptionsabbildung die Atomwolken aufgenommen werden. Das Ergebnis dieser Messung ist in Abb. 4.2 dargestellt.

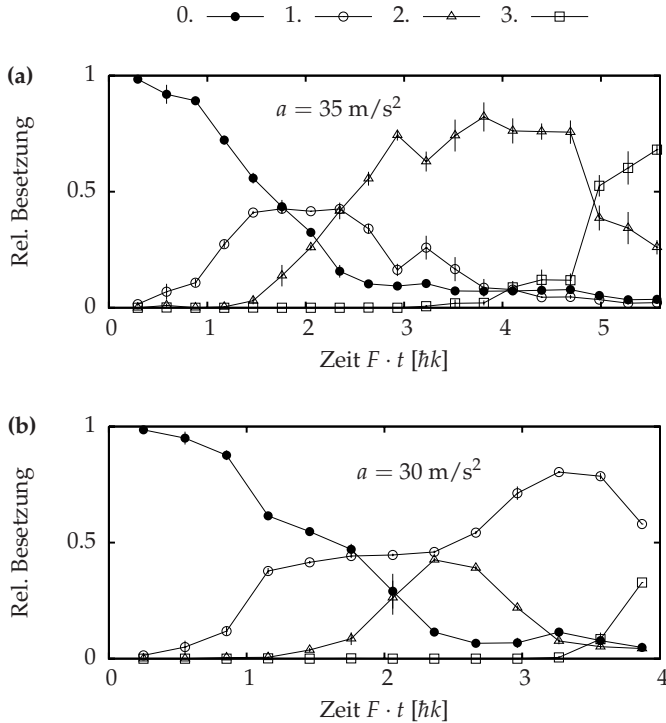
Als charakteristisches Merkmal einer Bloch-Zener-Oszillation kann die Reihenfolge genommen werden, mit der die Beugungsordnungen besetzt werden. Im Gegensatz zur Bloch-Oszillation, wo die Beugungsordnungen alle nacheinander besetzt werden, kommt es hier zur gleichzeitigen Besetzung von erster und zweiter Beugungsordnung, zweiter und dritter Beugungsordnung usw. Im Experiment befinden sich zunächst alle Atome in der 0. Beugungsordnung, haben also keinen Quasiimpuls ( $q_0 = 0$ ) und befinden sich im untersten Band des Bändermodells. Mit der Beschleunigung erhöht sich der Quasiimpuls und die Atome werden auf die erste Kreuzung bei  $F \cdot t = 1 \hbar k$  getrieben. Es fin-

det ein partieller diabatischer und adiabatischer Landau-Zener Übergang statt mit einer Wahrscheinlichkeit  $P_{LZ}^a \approx 0.5$  (2.45).

Die Atome, die einen adiabatischen Übergang vollziehen, werden in die 1. Beugungsordnung transferiert. Die getunnelten Atome, die einen diabatischen Übergang erleiden, verbleiben in der 0. Beugungsordnung und befinden sich nun im oberen Band des Miniband-Systems. Sobald die Atome die nächste Übergangszone um  $F \cdot t = 2 \hbar k$  herum erreichen, findet erneut ein partieller Landau-Zener Übergang statt mit einer Wahrscheinlichkeit  $P_{LZ}^a \approx 0.9$  (2.45). Die "adiabatischen" Atome bevölkern nun die 2. Beugungsordnung, während die "diabatischen" Atome weiterhin in der 0. Ordnung verbleiben. Sie befinden sich nun außerhalb des Miniband-Systems und sind quasi frei im Gitter. Sie verbleiben in der 0. Beugungsordnung für die gesamte Dauer des Experiments. Die restlichen Atome erleiden dann an den weiteren vermiedenen Kreuzungen bei  $F \cdot t = 3 \hbar k$ ,  $F \cdot t = 5 \hbar k$ ,  $F \cdot t = 6 \hbar k$ ,  $F \cdot t = 7 \hbar k$  erneut partielle Landau-Zener Übergänge, so dass an diesen Kreuzungen die Impulszustände interferieren.

Bevor die Gitterexperimente durchgeführt werden, wird das in der optischen Dipolfalle erzeugte Bose-Einstein Kondensat für 2.5 ms dem freien Fall im Schwerfeld der Erde überlassen, wie in Kapitel 3 beschrieben. In dieser Zeit wird gespeicherte Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie umgesetzt. In Folge dessen erhöht sich die anfänglich sehr schmale Impulsbreite auf etwa  $0.8 \hbar k$ , wie sich aus dem Dichteprofil der Beugungsordnungen ergibt. Das heißt, aus dem Einteilchen-Prozess der Bloch-Zener-Oszillation wird eine Mittelung vieler Einzelprozesse mit verschiedenen Anfangsbedingungen. Dies hat zur Folge, dass sich der Übergangsbereich vergrößert und schnelle Oszillationen kleiner Amplituden, wie sie theoretisch bei den Bloch-Zener-Oszillationen erwartet werden (vgl. Abschnitt 2.7), unterdrückt werden.

Die in Abb. 4.2 gezeigte Bloch-Zener-Oszillation ist ein Spezialfall, der nur auftritt, wenn der Phasenunterschied der auf-



**Abb. 4.3:** Einfluss der Beschleunigung  $a$  auf die Bloch-Zener-Oszillation. Die relative Besetzung der Beugungsordnungen ist aufgetragen gegen die skalierte Zeit. In (a) und (b) ist der gefüllte Kreis die 0. Beugungsordnung, der offene Kreis die 1., das aufrechte Dreieck die 2. und das Quadrat die 3. Beugungsordnung. Die Linien verbinden die Datenpunkte.

genommenen Stückelberg-Phasen (vgl. Abschnitt 2.8) zwischen den Teilwellen im unteren und oberen Band gerade zu einer konstruktiven Interferenz führen. Führt der Phasenunterschied zu einer destruktiven Interferenz kann das Tunneln ins obere Band auch vollständig unterdrückt sein. In einem periodisch getriebenen Zwei-Niveau-System ist die Besetzungswahrscheinlichkeit  $P_+(t)$  des oberen Bandes eine Funktion der Parameter des periodisch getriebenen Zwei-Niveau-Systems, die für spezielle Parameter Nullstellen haben kann [106]. Dies ist verwandt mit einem Phänomen, das unter dem Namen 'Coherent Destruction of Tun-

neling' bekannt ist [107].

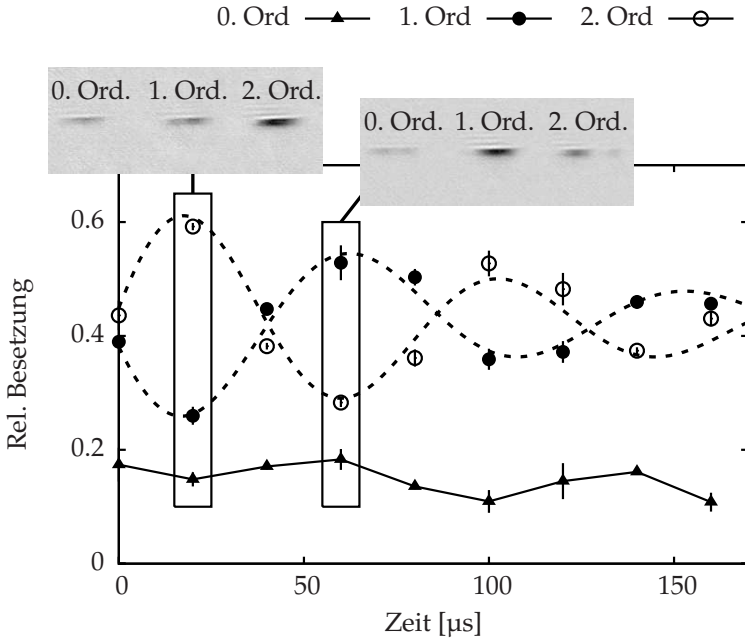
Wie die Bloch-Zener-Oszillation auf Änderungen der Parameter reagiert sei exemplarisch für eine Variation der Kraft, mit der das Bose-Einstein Kondensat in dem optischen Gitter beschleunigt wird, gezeigt, siehe Abb. 4.3. Die Potentialtiefen und alle übrigen Parameter des optischen Gitters sind gegenüber der in Abb. 4.2 wiedergegebenen Messung unverändert geblieben und haben die Werte, die im Anhang C dokumentiert sind. Die Bandstruktur des optischen Gitters bleibt also unverändert so wie bei der Messung zuvor (vgl. Abb. 4.2), doch die Tunnelwahrscheinlichkeiten, der Überlappbereich der Übergangszonen und die aufgenommenen Stückelberg-Phasen verändern sich.

In Abb. 4.3 ist für zwei verschiedene Beschleunigungen  $a$  die Besetzung der Beugungsordnungen dargestellt. Die Übergangszonen  $t_{LZ}$  (2.48) der beiden Kreuzungen bei  $F \cdot t = 1 \hbar k$  und  $F \cdot t = 2 \hbar k$  sind in der in Abb. 4.2 gezeigten Situation getrennt voneinander, während diese Zonen in Teil (a) der Abb. 4.3 sich gerade berühren und in Teil (b) sich bereits überlappen. Die Änderung der adiabatischen Übergangswahrscheinlichkeit  $P_{LZ}^a$  erhöht sich auf etwa 0.6 bei einer Beschleunigung von  $a = 30 \text{ m/s}$ . Die Stückelberg-Phasen ändern sich gerade so, dass von der konstruktiven Interferenz zur destruktiven Interferenz gewechselt wird. In Abb.4.3(b) wird der diabatische Übergang vom oberen ins untere Band an der Kreuzung bei  $q = 3 \hbar k$  nahezu vollständig unterdrückt, was daran zu erkennen ist, dass an der Kreuzung bei  $q = 3 \hbar k$  die Besetzung der 2. Beugungsordnung nicht ansteigt, sondern auf Null absinkt. Es wird also der diabatische Übergang vom oberen ins untere Band kohärent unterdrückt.

### 4.3 Atomares Landau-Zener-Stückelberg Interferometer

Im Folgenden wird dargelegt wie das in Abschnitt 2.8 theoretisch entworfene Interferometer experimentell realisiert wurde.





**Abb. 4.4:** Stückelberg-Oszillation beim Haltepunkt  $q_0 = 1.9 \hbar k$ . Aufgetragen ist die relative Besetzung der Beugungsordnungen gegen die Zeit. Für zwei Zeitpunkte ist die Absorptionaufnahme gezeigt, bei der die Umverteilung der Atome der 1.- und 2. Beugungsordnung am deutlichsten auftreten. Die gestrichelten Linien sind angepasste exponentiell gedämpfte Sinuskurven. Die durchgezogene Linie verbindet 0. Beugungsordnung linear miteinander.

Für die Konstruktion eines Landau-Zener-Stückelberg Interferometers ist es notwendig, die Relativphase der Wellenfunktionen in den verschiedenen Bloch-Bändern kontrolliert variieren zu können. Dies wurde erreicht durch ein besonderes Beschleunigungsschema des optischen Gitters. Anders als bei den Bloch-Zener-Oszillationen (vgl. Abschnitt 4.2), wo Aufgrund der konstanten Beschleunigung die Stückelberg-Phase nur schwer zu kontrollieren ist, erlaubt das zwischenzeitliche Warten zwischen den beiden Kreuzungen eine sehr genaue Kontrolle der Relativphase der beiden Teilwellen.

Der Ablauf des Experiments ist derselbe wie bei den Bloch-

und den Bloch-Zener-Oszillationen. Das Kondensat wird zunächst einer freien Expansion für 2.5 ms ausgesetzt, bevor das bichromatische Gitter eingestrahlt und die Atomverteilung im Fernfeld aufgenommen wird. Das eingestrahelte bichromatische Gitter (2.25) ist durch die Gittertiefen  $V_1 = 2.7 E_r$  und  $V_2 = 3.2 E_r$  charakterisiert, während die Phase zwischen den beiden Gitterpotentialen  $\phi = 0^\circ$  gewählt wurde.

Die Beschleunigung des Kondensates ist bei dem Landau-Zener-Stückelberg Interferometers jedoch nicht konstant wie bei den zuvor beschriebenen Experimenten sondern es wird eine Frequenzrampe benutzt, wie sie in Abb. 3.7 gezeigt ist. Die Rampe besteht aus drei Segmenten. Im ersten Segment  $0 \leq t \leq t_0$  wird der Quasiimpuls der Atome durch die Verstimmung der Frequenzen linear erhöht, was äquivalent ist zum Anlegen einer äußeren Kraft  $F = M \cdot a$ . Der Quasiimpuls entwickelt sich dann gemäß  $q(t) = q_0 + F \cdot t$ . Im zweiten Segment  $t_0 \leq t \leq t_0 + t_w$  wird das Gitter mit den Atomen, die sich in Schwerfeld der Erde bewegen, mitbewegt, sodass der Quasiimpuls  $q(t) = q_0 + F \cdot t_0$  der Atome im Gitter in diesem Zeitraum konstant gehalten wird. Im dritten Segment werden die Atome erneut mit der Kraft  $F$  beschleunigt.

Der Quasiimpuls des Kondensates im Gitter ist zu Beginn  $q_0 = 0$ . Der Zeitpunkt  $t_0$ , an dem die Beschleunigung stoppt, ist so gewählt, dass der Quasiimpuls  $q(t_0) = 1.9 \hbar k$  ist. Die Beschleunigung endet zum Zeitpunkt  $t = t_{\text{end}}$ , wenn die Atome im Gitter einen Quasiimpuls von  $q(t_{\text{end}}) = 3 \hbar k$  erreicht haben. In Abb. 4.4 ist die relative Besetzung der Beugungsordnungen gegen die Wartezeit  $t_w$  dargestellt. Zur besseren Übersicht ist der komplette Datensatz zur Aufnahme der Stückelberg-Oszillation im Anhang C zusammengefasst.

Die ins unterste Band des optischen Gitters mit einem Quasiimpuls  $q_0 = 0$  geladenen Atome werden zunächst konstant beschleunigt. Sobald die erste Bandlücke bei  $q = 1 \hbar k$  erreicht wird, finden partielle Landau-Zener Übergänge statt, d.h. ein Teil des Wellenpakets tunnelt durch die Bandlücke in das erste angereg-

te Band, während der Rest im untersten Band verbleibt. Nach der kohärenten Trennung des Kondensates in zwei Teilwellen kann ein Haltepunkt  $q_0$  zwischen der ersten und zweiten Bandlücke  $1 \hbar k \leq q_0 \leq 3 \hbar k$  gewählt werden, an der die Stückelberg-Oszillation gemessen werden soll. Am Haltepunkt  $q_0$  wird die Relativphase zwischen den beiden Zuständen im oberen und im unteren Band durch die variable Wartezeit  $t_w$  verändert. Die beiden Teilwellenpakete entwickeln sich in dieser Wartezeit gemäß

$$\psi_j(t_w) = \psi_j \exp[-iE_j(q_0)t_w/\hbar], \quad (4.1)$$

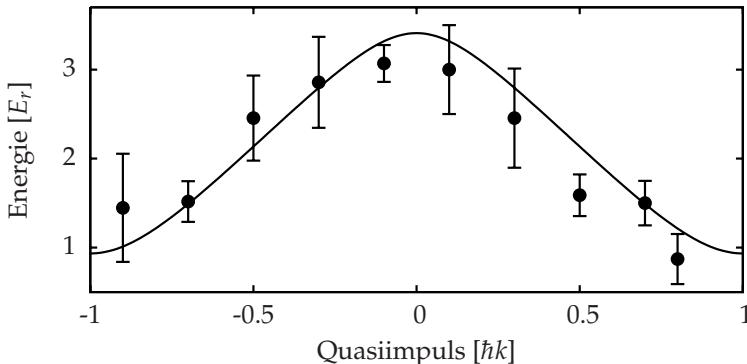
mit  $j = 1$  für das unterste Band und  $j = 2$  für das erste angeregte Band,  $\psi_j$  ist das Teilwellenpaket im  $j$ -ten Band an der Wartestelle  $q_0 = q(t_0)$ , die nach der Beschleunigungszeit  $t_0$  erreicht wird. Die Relativphase  $\Delta\varphi$ , die in der Wartezeit  $t_w$  akkumuliert wird, beträgt nach 4.1

$$\Delta\varphi = \frac{E_2(q_0) - E_1(q_0)}{\hbar} t_w. \quad (4.2)$$

Somit ist durch die Variation der Wartezeit  $t_w$  eine gut kontrollierbare Änderung der Relativphase zwischen den beiden Interferometerpfaden möglich. Die relative Besetzung der Beugungsordnungen oszilliert mit der aufgenommenen Relativphase, wie es zu erwarten war (vgl. Abschnitt 2.8).

Das Interferenzsignal des Stückelberg Interferometers hat sich anders als die Bloch-Zener-Oszillationen als recht robust erwiesen, weil hier nur zwei Kreuzungen involviert sind und die Relativphase zwischen den beiden Teilwellen sehr genau über die Wartezeit  $t_w$  eingestellt werden kann. Limitierend für die Auflösung ist einerseits der Kontrast des Interferenzsignals, der von der Teilung des Wellenpakets abhängt, und andererseits die Kohärenzzeit, die von der Intensität und der Wellenlänge des optischen Gitters beeinflusst wird.

Bei der Aufnahme von Stückelberg-Oszillationen treten die Schwierigkeiten auf, die schon bei den Bloch-Zener-Oszillationen eine wichtige Rolle spielten. Die Impulsbreite des Kondensates,



**Abb. 4.5:** Bandabstand des Miniband-System. Mit Hilfe der Stückelberg-Oszillationen bestimmte Energiedifferenz der beiden untersten Energibänder des optischen Gitters für mehrere Stellen innerhalb einer Brillouin-Zone.

die durch die anfängliche freie Fallzeit auf etwa  $\pm 0.8 \hbar k$  vergrößert wird, führt zu der Überlagerung mehrerer Stückelberg-Oszillationen. Das heißt, durch die verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten der Atome zu Beginn der Gitterexperimente ist der Haltepunkt  $q_0$  eher ein Haltebereich. Die Frequenz, mit der die Besetzung der Bloch-Bänder am Haltepunkt oszilliert, wird also moduliert mit den Frequenzen, die sich aus den Haltepunkten im Bereich um den Haltepunkt  $q_0$  ergeben. Da die Frequenzen nahe beieinander liegen führt das zu einer Schwebung die auf der kurzen Zeitskala wie eine Dämpfung der Stückelberg-Oszillation erscheint, die in Abb. 4.4 zu erkennen ist.

## 4.4 Interferometrische Bestimmung des Energieabstands

Das Interferenzmuster der oben beschriebenen Stückelberg-Oszillationen schwingt nach (4.2) mit der Frequenz  $\omega = [E_2(q_0) - E_1(q_0)]/\hbar$ , so dass hieraus der Energieabstand der beiden untersten Bänder an der Stelle  $q_0$  bestimmt werden kann. Der Haltepunkt  $q_0$ , an dem die Stückelberg-Oszillation aufgenommen

wird, kann beliebig zwischen den beiden vermiedenen Kreuzungen bei  $F \cdot t = 1 \hbar k$  und  $F \cdot t = 3 \hbar k$  gewählt werden. In Abb 4.5 ist der ermittelte Energieabstand der beiden untersten Bänder für einige Haltepunkte  $q_0$  zwischen den beiden Bandlücken bei  $q = 1 \hbar k$  und  $q = 3 \hbar k$  aufgetragen. Die Messpunkte ergeben sich jeweils aus den Frequenzen der aufgenommenen Stückelberg-Oszillation. Um die Frequenzen der Stückelberg-Oszillationen zu bestimmen, wurden exponentiell gedämpfte Sinuskurven an die relative Besetzung der 1. und 2. Beugungsordnung angepasst. Aus dem Mittelwert dieser beiden Frequenzen wurde mittels (4.2) der energetische Abstand der Minibänder bestimmt. Die durchgezogene Linie in Abb. 4.5 ist der aus den Gitterparametern berechnete Energieabstand der beiden untersten Bänder. Es lässt sich mit dieser Methode die komplette Brillouin-Zone abbilden.



# Kapitel 5

## Diskussion und Ausblick

Mit Hilfe eines speziellen bichromatischen Gitters konnte ein Miniband-System für ultrakalte Atome hergestellt werden. Die Dynamik der Atome konnte auf das Miniband-System beschränkt werden, so dass Phänomene des getriebenen Zwei-Niveau-Systems wie die Bloch-Zener-Oszillationen untersucht werden konnten. Die Bloch-Zener-Oszillationen können als kohärente Superposition von wiederholten partiellen Landau-Zener Übergängen und Bloch-Oszillationen verstanden werden, die beim Durchlaufen der Bänder auftreten. Die genaue Form ist sehr empfindlich auf die dabei aufgenommenen konstanten Phasen, die zu konstruktiven wie destruktiven Interferenzen führen können. Bei der destruktiven Interferenz wird die Besetzung des oberen Bandes unterdrückt, wenn im unteren Band gestartet wird. Bei der konstruktiven Interferenz überlagern sich zwei Bloch-Oszillationen unterschiedlicher Periodizität. Für beides konnten experimentelle Evidenzen beobachtet werden.

Das Miniband-System dieses speziellen bichromatischen Gitters konnte genutzt werden, um ein atomares Landau-Zener-Stückelberg Interferometer zu realisieren. Es konnte ein Ensemble von ultrakalten Atomen kohärent an einer vermiedenen Kreuzung getrennt und an einer weiteren wieder überlagert werden.

Die relative Phase der beiden Teilwellen wurde über eine variable Wartezeit zwischen den Kreuzungen beliebig einstellbar. Aus dem Interferenzsignal konnte die Bandstruktur des zugrundeliegenden optischen Gitters bestimmt werden [108]. Prinzipiell ist es auch möglich, das Interferometerschema mit einer einfachen Stehwelle zu realisieren, indem beispielsweise eine einzige vermiedene Kreuzung mehrmals passiert wird [109]. Mit diesem einfacheren Schema könnten Dekohärenzeffekte untersucht werden.

Eine interessante Anwendung des Zwei-Band-Interferometers wäre die Vermessung der Erdbeschleunigung auf kurzem Abstand. Da bei dem in dieser Arbeit vorgestellten atomaren Landau-Zener-Stückelberg Interferometer nur eine kleine räumliche Trennung der interferierenden Atome stattfindet, eignet sich das Interferometer besonders zur Messung von Effekten, die bei kleinen Abständen dominieren. Neben der Gravitationskonstanten könnte so das  $1/r$ -Gesetz überprüft werden [44, 110, 111]. Beispielsweise wirken auf die Atome in der Nähe von Oberflächen van der Waals ( $C/r^3$ ) und Casimir-Polder (retarded van der Waals) Kräfte [112, 113]. Mit der in dieser Arbeit vorgestellten Technik könnten diese Kräfte in einem ähnlichem Arrangement wie es von S. Dimopoulos und A.A. Geraci vorgeschlagen wurde untersucht werden [114].

Die in dieser Arbeit dargestellte Realisierung eines effektiven Zwei-Band-Systems ermöglicht die Überprüfung einer Vielzahl von theoretisch vorhergesagten Quanteneffekte der klassischen wie relativistischen Physik. Zum Beispiel wird die Untersuchung der Zitterbewegung [115, 116, 117] - ein relativistischer Effekt, der durch die Interferenz von gegenläufigen Teilchen und Antiteilchen hervorgerufen wird - in einem experimentell gut kontrollierbaren Miniband-System durchführbar. Ausreichend zur Beobachtung der Zitterbewegung ist eine periodische Modulation der Gitterpotentialtiefen [118]. Bei geeigneter Wahl der Gitterpotentialtiefen und der relativen Phase zwischen den beiden Potentialen, ist es möglich, dass die Bandlücke zwischen



ersten und zweitem angeregten Band verschwindet und sich die Bänder berühren [119, 120]. Ein Miniband-System ist also nicht nur mit den untersten beiden Bändern sondern auch mit den Darüberliegenden möglich.

Die Entartung des Energiespektrums an diesem Punkt entspricht einem Dirac-Punkt, d.h. die Dispersionsrelation kann in diesem Punkt durch sich kreuzende lineare Funktionen beschrieben werden, wie es sonst nur bei relativistischen Teilchen üblich ist. Solche Dispersionsrelationen wurden auch in dem neuen Material Graphen entdeckt und sind verantwortlich für die völlig neuartigen Halbleitereigenschaften dieses Materials [121, 122, 123, 124]. Die Analogie der Dispersionsrelationen von relativistischen Teilchen und Graphen ist auch mit den Bändern des optischen Gitters herzustellen und ermöglicht Simulationen effektiver Quantensysteme im nicht-relativistischen sowie im ultrarelativistischen Bereich. Eine mögliche Anwendung wäre hier das Klein-Tunneln zu untersuchen [125, 126], bei dem ein relativistisches Teilchen eine hohe und breite Potentialstufe überwinden kann während ein nicht-relativistisches Teilchen reflektiert werden würde.

Ein weiterer interessanter Anwendungsbereich der bichromatischen optischen Gitter wäre im Bereich starker Korrelationen. In der Nähe des Mott-Isolator-Übergangs beeinflussen Zwei-Körper-Wechselwirkungen die Kopplung der Minibänder und führen zu einem Zusammenbruch und Revival der Stückelberg-Oszillationen, die auf einer von der Wechselwirkungsstärke  $g$  (2.3) abhängigen Zeitskala stattfinden [127]. So könnte der Einfluss der interatomaren Wechselwirkung auf die Dynamik der Atome studiert werden.



# Anhang A

## Ansteuerung des Funktionsgenerators

Die Programmierung des Funktionsgenerators der Firma Tabor via GPIB ist etwas gewöhnungsbedürftig. Die Hauptschwierigkeit besteht in der Konvertierung der Datenstrings in 5-Byte-Worte. Da die Dokumentation des Herstellers recht umständlich und lückenhaft ist, sei hier kurz beschrieben, wie die Programmierung gelöst wurde.

### A.1 Python-Skript

Das Beschreiben des Speichers wird mit Hilfe eines GPIB-Interfaces bewerkstelligt. Das Interface wurde bereits von C. Geckeler in *Python* programmiert, so dass hier die Programmierung ebenfalls mit *Python* geschrieben wurde. In der Nachfolgenden Notation des relevanten Programmcodes ist der Text hinter einem Gatter # ein Kommentar und gehört nicht zum Code. Die Zahlen am linken Rand markieren die Zeilen und gehören ebenfalls nicht zum Code. Die Skriptsprache *Python* ist sensitiv auf die Einrückung.

```

01 fm_const = 14.31655765
02 data = " " # Deklariert leeren String
03 num_points=10000 # Maximale Anzahl an
04                   #Datenpunkten
05 #Deklaration des Datenheaders
06 header = "#"
07 header += str(len(str(4*num_points))
08 header += str(4*num_points)

```

Dem Funktionsgenerator wird ein String übergeben, der mit der Information beginnt, wie lang der zu speichernde Datenstring ist. Diese Information setzt sich wie folgt zusammen, sie beginnt mit einem Gatterzeichen '#' (Zeile 06) gefolgt von einer Zahl, die die Anzahl der Stellen der zu speichernden Datenpunkte als 4-Byte-Worte angibt (Zeile 07). Ein Beispiel, will man zwei Datenpunkte im Speicher Ablegen ist der Datenstring  $2 \cdot 4 = 8$  Byte lang, die Anzahl der Stellen der zu speichernden Bytes ist also 1, so dass der zu sendende String mit '#18' beginnt. In dem hier wiedergegebenen Programmbeispiel wird der Speicher komplett beschrieben mit 10000 Punkten, so dass der String mit '#540000' beginnt. In Zeile 07 wird die Anzahl der Stellen der zu speichernden Bytes berechnet, indem die Zahl zunächst in einen String umgewandelt (`str()`) wird, dessen Länge gerade der Anzahl der Ziffern der Zahl entspricht. Die Länge wird ausgelesen mit `len()` und wieder in einen String verwandelt.

```

09 for ii in range(1,num_points+1):
10     dev = 2000 # Frequenz in [Hz]
11     gravi = (ii-1.)/(num_points-1.)*20000
12     data += struct.pack("<I", ((57.e6+dev+gravi)
    *fm_const))

```

Der *Python*-Befehl `struct.pack("<I", Zahl)` in Zeile 12 übersetzt die Zahl `Zahl` in eine binäre Zahl, die das Format '<I' hat [128]. Das Format besteht aus zwei Teilen. Der erste Charakter '<' steht für die Byte Order 'Little-Endian' und gibt an, wo

vorne und hinten von dem Byte-Wort ist. Der zweite Charakter 'I' deklariert die Byte-Länge (4 Bytes) des Wortes. Das Format I entspricht einem 'unsigned integer' in der Programmiersprache C. Man beachte, dass die Zahl, die übergeben werden soll, noch mit der Konstanten `fm_const = 14.31655765` multipliziert werden muss, um aus dem 4-Byte-Wort ein 5-Byte-Wort zu machen.

## A.2 GPIB-Befehle

Mit Hilfe des GPIB-Interfaces werden dann die Daten an den Funktionsgenerator gesendet. Der Programm-Code hat die folgende Gestalt

```
13 fg.set_fm_data_header(header)
15 time.sleep(.2)
16 fg.set_fm_data_binary(data)
```

Das Modul 'fg' adressiert den Funktionsgenerator via GPIB und übergibt den dahinterstehenden Befehl, in Zeile 13 heißt der Befehl

```
set_fm_data_header(header),
```

der als Argument den oben in den Zeilen 06-08 deklarierten String `header` hat. Danach folgt in Zeile 15 eine Wartezeit von 0.2 Sekunden, bevor der nächste Befehl an den Funktionsgenerator gesendet wird. Es hat sich gezeigt, dass für ein reibungsfreies Programmieren des Funktionsgenerators diese Wartezeit zwischen dem Senden der Befehle nötig ist.

Die Befehle, die letztlich an den Funktionsgenerator gesendet werden, sind in dem Modul 'tabor\_fg.py' deklariert, das wiederum Teil des GPIB-Interfaces ist. Das hier beschriebene Modul übersetzt die Befehle des Funktionsgenerators in einen *Python*-Befehl. Als Beispiele seien hier die beiden oben verwendeten Be-

fehle aufgeführt.

```
17 def set_fm_data_header(self, header):
18     self.cache("header=", ":sour:fm:data
19     %s" % header)
20 def set_fm_data_binary(self,data):
21     self.cache("data=", "%s" % data)
```

Der Befehl `def` definiert einen neuen *Python*-Befehl. In Zeile 17 heisst er

```
set_fm_data_header()
```

und hat zwei Argumente, den Gerätebefehl (`:sour:fm:data`) und einen Parameter der als String (`header`) übergeben wird. Der Gerätebefehl bedeutet, dass der Speicher, der für die Arbiträr-Frequenz-Modulation benutzt wird, beschrieben wird.

# Anhang B

## Numerische Simulationen

Numerische Simulationen wurden mit dem zu *matlab* äquivalenten Open Source Algebraprogramm *scilab* ausgeführt. Die beiden Algebraprogramme sind ausgelegt für die numerische Berechnung mathematischer Matrixgleichungen und ähneln sich in der Syntax. Für die in Kapitel 2 beschriebenen Simulationen der Landau-Zener-Übergänge wurde die Bewegungsgleichung (2.36) für das getriebene Zwei-Niveau-System (2.39) numerisch integriert. Dazu wurde auf die *ode*-Routine (ordinary differential equation) von *scilab* zurückgegriffen, die eine Runge-Kutta Integration nach der Adams-Methode ausführt.

Im Folgenden wird der Programmablauf dargestellt. Die Zahlen am linken Rand markieren die Zeilen und gehören nicht zum Programm-Code. Die Einrückungen sind nicht erforderlich, sondern dienen der besseren Übersicht. Zunächst werden einige Funktionen definiert, bevor die Bewegungsgleichung letztlich integriert wird. Die treibende Funktion des Landau-Zener Übergangs (2.41) wird in einer Zeile definiert durch

```
01 function out=Sin(dt,PG);  
02 out=PG(2) + PG(3)*sin(PG(4)*dt);  
03 endfunction;
```

In Zeile 01 wird die Funktionsdefinition begonnen mit `function`,

wobei `out` der Rückgabewert und `Sin(dt,PG)` der Name der Funktion ist. Die Argumente der Funktion sind in diesem Fall die Zeit `dt` und ein Parametervektor `PG`. Der Rückgabewert wird gesetzt durch die nachfolgende Gleichung, wobei `sin` die in *scilab* integrierte Sinusfunktion ist. Die Funktionsdefinition endet mit `endfunction`. Die Pauli-Matrizen werden definiert durch

```
04 sigmax=[0,1;1,0];
05 sigmaz=[-1,0;0,1];
```

Die Hamiltonische Matrix des Zwei-Niveau-Systems (2.39) wird ebenfalls als Funktion definiert durch

```
06 function Mat = H(dt,PG);
07 Mat=.5*SIN(dt,PG)*sigmaz + .5*PG(1)*sigmax
    +%i*zeros(2,2);
08 endfunction;
```

Um die Matrix als komplexe Variable zu deklarieren, wird noch ein verschwindender Imaginärteil `%i*zeros(2,2)` addiert. Die Eigenwerte dieser Matrix ergeben die erlaubten Energiebänder und werden mit der *scilab*-Funktion

```
09 [ev,ew]=spec(H(dx,PG));
```

berechnet, die sowohl die Eigenwerte (`ew`) als auch die Eigenvektoren (`ev`) ausgibt. Die Schrödinger-Gleichung wird mittels Matrixmultiplikation definiert

```
10 function dc=Rh(t,c);
11   dc=-%i*H(dx*t,PG)*c;
12 endfunction;
```

wobei `%i` die Imaginäre Einheit ist, `t` die Zeit und `c` ein zweikomponentiger Vektor. Die Differentialgleichung wird mit der Adams-Methode numerisch integriert durch die *scilab*-Routine `ode`

```
13 [c0,c1]=spec(H(0,PG));
14 IC=c0(:,1);
15 T=0.:.1:6./PG(5);
16 out=ode("adams",IC,T(1),T,Rh);
```



wobei  $\mathbf{IC}$  (Zeile 14) den Anfangswert als Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert (Zeile 13) und  $\mathbf{T}$  einen Vektor von Zeitpunkten, zu denen die Lösung der Differentialgleichung bestimmt wird, angibt. Die Funktion  $\mathbf{Rh}$  ist die rechte Seite der Schrödinger-Gleichung.



# Anhang C

## Datensatz

Es wurden verschiedenen Parametersätze für die Messungen benutzt. Der besseren Übersicht sind diese hier nochmal als Tabelle zusammen gefasst.

Bezeichnung	Symbol	BZO	SO
Wellenlänge	$\lambda$	781.34 nm	781.34 nm
Zweiphotonen-Verstimmung	$\delta$	90 kHz	30 kHz
Zweiphotonen-Gittertiefe	$V_1$	$2.7 E_r$	$2.7 E_r$
Vierphotonen-Gittertiefe	$V_2$	$4.5 E_r$	$3.2 E_r$
Beschleunigung	$a$	$38 \text{ m/s}^2$	$25 \text{ m/s}^2$

Tabelle C.1: Tabelle der im Experiment realisierten Parameter zur Vermessung der Bloch-Zener-Oszillationen (BZO) und der Stückelberg-Oszillationen (SO).



# Literaturverzeichnis

- [1] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Zeit. f. Physik **26**, 178 (1924)
- [2] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss **22**, 261 (1924)
- [3] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, 2. Abhandlung, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss **1**, 3 (1925)
- [4] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor*, Science **269**, 198 (1995)
- [5] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, *Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995)
- [6] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, *Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995)
- [7] B. DeMarco and D. S. Jin, *Onset of fermi degeneracy in a trapped atomic gas*, Science **285**, 1703 (1999)
- [8] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, *A Well-Collimated Quasi-Continuous Atom Laser*, Science **283**, 1706 (1999)

- [9] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, *Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates*, *Science* **292**, 476 (2001)
- [10] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, *Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms*, *Nature* **440**, 315 (2006)
- [11] I. Bloch, *Ultracold quantum gases in optical lattices*, *Nature Phys.* **1**, 23 (2005)
- [12] R. Gerritsma, G. Kirchmair, F. Zähringer, E. Solano, R. Blatt, and C. F. Roos, *Quantum simulation of the Dirac equation*, *Nature* **463**, 68 (2010)
- [13] J. Simon, W. S. Bakr, R. Ma, M. E. Tai, P. M. Preiss, and M. Greiner, *Quantum simulation of antiferromagnetic spin chains in an optical lattice*, *Nature* **472**, 307 (2011)
- [14] R. P. Feynman, *Simulating Physics with Computers*, *International Journal of Theoretical Physics* **21**, 467 (1982)
- [15] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf, and C. Cohen-Tannoudji, *Channeling atoms in a laser standing wave*, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1659 (1987)
- [16] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, *Atomic Landau-Zener Tunneling and Wannier-Stark Ladders in Optical Potentials*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4504 (1996)
- [17] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential*, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996)
- [18] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, *Nature* **415**, 39 (2002)

- [19] R. Scheunemann, F. S. Cataliotti, T. W. Hänsch, and M. Weitz, *Resolving and addressing atoms in individual sites of a CO<sub>2</sub>-laser optical lattice*, Phys. Rev. A **62**, 051801 (2000)
- [20] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, and M. Greiner, *A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice*, Nature **462**, 74 (2009)
- [21] T. Gericke, P. Würtz, D. Reitz, T. Langen, and H. Ott, *High-resolution scanning electron microscopy of an ultracold quantum gas*, Nature Phys. **4**, 949 (2008)
- [22] M. Karski, L. Förster, J.-M. Choi, A. Steffen, W. Alt, D. Meschede, and A. Widera, *Quantum Walk in Position Space with Single Optically Trapped Atoms*, Science **325**, 174 (2009)
- [23] J. F. Sherson, C. Weitenberg, M. Endres, M. Cheneau, I. Bloch, and S. Kuhr, *Single-atom-resolved fluorescence imaging of an atomic Mott insulator*, Nature **467**, 68 (2010)
- [24] J. Clarke, A. N. Cleland, M. H. Devoret, D. Esteve, and J. Martinis, *Quantum mechanics of a macroscopic variable - The phase difference of a Josephson junction*, Science **239**, 992 (1988)
- [25] J. Clarke and F. K. Wilhelm, *Superconducting quantum bits*, Nature **453**, 1031 (2008)
- [26] H. L. Grossman, W. R. Myers, V. J. Vreeland, R. Bruehl, M. D. Alper, C. R. Bertozzi, and J. Clarke, *Detection of bacteria in suspension by using a superconducting quantum interference device*, Proceedings of the National Academy of Science **101**, 129 (2004)
- [27] W. D. Oliver, Y. Yu, J. C. Lee, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, *Mach-Zehnder Interferometry in a Strongly Driven Superconducting Qubit*, Science **310**, 1653 (2005)

- [28] S. O. Valenzuela, W. D. Oliver, D. M. Berns, K. K. Berggren, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, *Microwave-Induced Cooling of a Superconducting Qubit*, *Science* **314**, 1589 (2006)
- [29] D. M. Berns, M. S. Rudner, S. O. Valenzuela, K. K. Berggren, W. D. Oliver, L. S. Levitov, and T. P. Orlando, *Amplitude spectroscopy of a solid-state artificial atom*, *Nature* **455**, 51 (2008)
- [30] W. Oliver and S. Valenzuela, *Large-amplitude driving of a superconducting artificial atom*, *Quantum Information Processing* **8**, 261 (2009)
- [31] J. R. Petta, H. Lu, and A. C. Gossard, *A Coherent Beam Splitter for Electronic Spin States*, *Science* **327**, 669 (2010)
- [32] M. Saffman, T. G. Walker, and K. Mølmer, *Quantum information with Rydberg atoms*, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2313 (2010)
- [33] H. Weimer, M. Müller, I. Lesanovsky, P. Zoller, and H. P. Büchler, *A Rydberg quantum simulator*, *Nature Phys.* **6**, 382 (2010)
- [34] S. Yoakum, L. Sirko, and P. M. Koch, *Stueckelberg oscillations in the multiphoton excitation of helium Rydberg atoms: Observation with a pulse of coherent field and suppression by additive noise*, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1919 (1992)
- [35] T. A. Johnson, E. Urban, T. Henage, L. Isenhower, D. D. Yavuz, T. G. Walker, and M. Saffman, *Rabi Oscillations between Ground and Rydberg States with Dipole-Dipole Atomic Interactions*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 113003 (2008)
- [36] D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Côté, and M. D. Lukin, *Fast Quantum Gates for Neutral Atoms*, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2208 (2000)
- [37] L. Bergmann and C. Schäfer, *Lehrbuch der Experimentalphysik, Optik*, 9th ed. (De Gruyter, Berlin, 1993)



- [38] L. Marton, *Electron Interferometer*, Phys. Rev. **85**, 1057 (1952)
- [39] L. Marton, J. A. Simpson, and J. A. Suddeth, *Electron Beam Interferometer*, Phys. Rev. **90**, 490 (1953)
- [40] H. Rauch, W. Treimer, and U. Bonse, *Test of a single crystal neutron interferometer*, Physics Letters A **47**, 369 (1974)
- [41] A. I. Ioffe, V. S. Zabiyaikin, and G. M. Drabkin, *Test of a diffraction grating neutron interferometer*, Physics Letters A **111**, 373 (1985)
- [42] A. Wicht, J. M. Hensley, E. Sarajlic, and S. Chu, *A Preliminary Measurement of the Fine Structure Constant Based on Atom Interferometry*, Phys. Scripta. **T102**, 82 (2002)
- [43] A. Bertoldi, G. Lamporesi, L. Cacciapuoti, M. de Angelis, M. Fattori, T. Petelski, A. Peters, M. Prevedelli, J. Stuhler, and G. M. Tino, *Atom interferometry gravity-gradiometer for the determination of the Newtonian gravitational constant  $G$* , Eur. Phys. J. D **40**, 271 (2006)
- [44] G. Lamporesi, A. Bertoldi, L. Cacciapuoti, M. Prevedelli, and G. M. Tino, *Determination of the Newtonian Gravitational Constant Using Atom Interferometry*, Phys. Rev. Lett. **100**, 050801 (2008)
- [45] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band V, Statistische Physik, Teil 1* (Akademie-Verlag, Berlin, 1979)
- [46] V. Bagnato, D. E. Pritchard, and D. Kleppner, *Bose-Einstein condensation in an external potential*, Phys. Rev. A **35**, 4354 (1987)
- [47] S. Grossmann and M. Holthaus, *On Bose-Einstein condensation in harmonic traps*, Physics Letters A **208**, 188 (1995)
- [48] H. Haugerud, T. Haugset, and F. Ravndal, *A more accurate analysis of Bose-Einstein condensation in harmonic traps*, Physics Letters A **225**, 18 (1997)

- [49] W. Ketterle and N. J. van Druten, *Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions*, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996)
- [50] H. T. C. Stoof, *Atomic Bose gas with a negative scattering length*, Phys. Rev. A **49**, 3824 (1994)
- [51] J. M. Gerton, D. Strekalov, I. Prodan, and R. G. Hulet, *Direct observation of growth and collapse of a Bose-Einstein condensate with attractive interactions*, Nature **408**, 692 (2000)
- [52] H. F. Hess, *Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen*, Phys. Rev. B **34**, 3476 (1986)
- [53] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, *Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate*, Nature **392**, 151 (1998)
- [54] P. Courteille, R. S. Freeland, D. J. Heinzen, F. A. van Abeelen, and B. J. Verhaar, *Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering*, Phys. Rev. Lett. **81**, 69 (1998)
- [55] E. Fermi, *Notes on Quantum Mechanics* (The University of Chicago Press, 2nd Edition, Chicago & London, 1995)
- [56] N. N. Bogoliubov, *On the theory of superfluidity*, J. Phys. (Moscow) **11**, 23 (1947)
- [57] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003)
- [58] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999)
- [59] D. J. Wineland and W. M. Itano, *Laser cooling of atoms*, Phys. Rev. A **20**, 1521 (1979)

- [60] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. L. Gould, and H. J. Metcalf, *Observation of atoms laser cooled below the doppler limit*, Phys. Rev. Lett. **61**, 169 (1988)
- [61] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: Simple theoretical models*, J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023 (1989)
- [62] H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser cooling and trapping of atoms*, J. Opt. Soc. Am. B **20**, 887 (2003)
- [63] S. Chaudhuri, S. Roy, and C. S. Unnikrishnan, *Evaporative Cooling of Atoms to Quantum Degeneracy in an Optical Dipole Trap*, Journal of Physics Conference Series **80**, 012036 (2007)
- [64] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics **42**, 95 (2000)
- [65] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (John Wiley and Sons, New York, 1956)
- [66] L. Allen and J. H. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (Dover Publications, INC., New York, 1987)
- [67] H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping* (Springer, 1st edition, Berlin, 1999)
- [68] P. Meystre, *Atom Optics*, 2nd ed. (AIP Press-Springer, New York, USA, 2001)
- [69] M. Weitz, G. Cennini, G. Ritt, and C. Geckeler, *Optical multiphoton lattices*, Phys. Rev. A **70**, 043414 (2004)
- [70] G. Ritt, C. Geckeler, T. Salger, G. Cennini, and M. Weitz, *Fourier synthesis of optical potentials for atomic quantum gases*, Phys. Rev. A **74**, 063622 (2006)

- [71] P. R. Berman, B. Dubetsky, and J. L. Cohen, *High-resolution amplitude and phase gratings in atom optics*, Phys. Rev. A **58**, 4801 (1998)
- [72] G. Ritt, *Fourier-Synthese von asymmetrischen optischen Potentialen für Atome*, Dissertation, Eberhard Karls Universität Tübingen (2007)
- [73] G. Floquet, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques*, Ann. École Norm. Sup. **12**, 47 (1883)
- [74] S. Chu and D. A. Telnov, *Beyond the Floquet theorem: generalized Floquet formalisms and quasienergy methods for atomic and molecular multiphoton processes in intense laser fields*, Phys. Rep. **390**, 1 (2004)
- [75] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Zeit. f. Phys. **52**, 555 (1929)
- [76] R. W. Boyd, *Nonlinear Optics*, 2nd ed. (Academic Press, San Diego, USA, 2003)
- [77] I. I. Rabi, *Space Quantization in a Gyration Magnetic Field*, Phys. Rev. **51**, 652 (1937)
- [78] P. Güttinger, *Das Verhalten von Atomen im magnetischen Drehfeld*, Zeitschrift f. Physik **73**, 169 (1932)
- [79] J. Schwinger, *On Nonadiabatic Processes in Inhomogeneous Fields*, Phys. Rev. **51**, 648 (1937)
- [80] M. C. Fischer, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen, *Observation of Rabi oscillations between Bloch bands in an optical potential*, Phys. Rev. A **58**, R2648 (1998)
- [81] C. Zener, *Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **137**, 696 (1932)
- [82] W. Lichten, *Resonant Charge Exchange in Atomic Collisions*, Phys. Rev. **131**, 229 (1963)

- [83] F. T. Smith, *Diabatic and Adiabatic Representations for Atomic Collision Problems*, Phys. Rev. **179**, 111 (1969)
- [84] L. D. Landau, *Zur Theorie der Energieübertragung*, Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932)
- [85] K. Mullen, E. Ben-Jacob, Y. Gefen, and Z. Schuss, *Time of Zener tunneling*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2543 (1989)
- [86] N. V. Vitanov, *Transition times in the Landau-Zener model*, Phys. Rev. A **59**, 988 (1999)
- [87] A. Zenesini, H. Lignier, G. Tayebirad, J. Radogostowicz, D. Ciampini, R. Mannella, S. Wimberger, O. Morsch, and E. Arimondo, *Time-Resolved Measurement of Landau-Zener Tunneling in Periodic Potentials*, Phys. Rev. Lett. **103**, 090403 (2009)
- [88] S. N. Shevchenko, S. Ashhab, and F. Nori, *Landau-Zener-Stückelberg interferometry*, Phys. Rep. **492**, 1 (2010)
- [89] H. Jones and C. Zener, *A General Proof of Certain Fundamental Equations in the Theory of Metallic Conduction*, Royal Society of London Proceedings Series A **144**, 101 (1934)
- [90] J. C. Slater, *The Electronic Structure of Metals*, Rev. Mod. Phys. **6**, 209 (1934)
- [91] B. M. Breid, D. Witthaut, and H. J. Korsch, *Bloch-Zener oscillations*, New J. Phys. **8**, 110 (2006)
- [92] B. M. Breid, D. Witthaut, and H. J. Korsch, *Manipulation of matter waves using Bloch and Bloch-Zener oscillations*, New J. Phys. **9**, 62 (2007)
- [93] E. C. G. Stückelberg, *Theorie der unelastischen Stöße zwischen Atomen*, Helv. Phys. Acta **5**, 369 (1932)
- [94] U. Divakaran, A. Dutta, and D. Sen, *Landau-Zener problem with waiting at the minimum gap and related quench dynamics of a many-body system*, Phys. Rev. B **81**, 054306 (2010)

- [95] G. Cennini, *Field-insensitive Bose-Einstein condensates and an all-optical atom laser*, Dissertation, Eberhard Karls Universität Tübingen (2004)
- [96] L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, W. König, and T. W. Hänsch, *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*, *Optics Communications* **117**, 541 (1995)
- [97] J. M. Supplee, E. A. Whittaker, and W. Lenth, *Theoretical description of frequency modulation and wavelength modulation spectroscopy*, *Applied Optics* **33**, 6294 (1994)
- [98] J. Plumhof, *Bose-Einstein-Kondensation von Rubidiumatomen in variablen optischen Gittern*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (2008)
- [99] T. Salger, *Quantentransport ultrakalter Atome in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (2010)
- [100] D. Meschede, *Optik, Licht und Laser*, 3rd ed. (Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2008)
- [101] N. Masuhara, J. M. Doyle, J. C. Sandberg, D. Kleppner, T. J. Greytak, H. F. Hess, and G. P. Kochanski, *Evaporative Cooling of Spin-Polarized Atomic Hydrogen*, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 935 (1988)
- [102] C. S. Adams, H. J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, and S. Chu, *Evaporative Cooling in a Crossed Dipole Trap*, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3577 (1995)
- [103] K. B. Davis, M.-O. Mewes, and W. Ketterle, *An analytical model for evaporative cooling of atoms*, *Applied Physics B: Lasers and Optics* **60**, 155 (1995)
- [104] K. M. O'Hara, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, *Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps*, *Phys. Rev. A* **64**, 051403 (2001)

- [105] Y. Castin and R. Dum, *Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps*, Phys. Rev. Lett. **77**, 5315 (1996)
- [106] Y. Kayanuma, *Role of phase coherence in the transition dynamics of a periodically driven two-level system*, Phys. Rev. A **50**, 843 (1994)
- [107] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung, and P. Hänggi, *Coherent destruction of tunneling*, Phys. Rev. Lett. **67**, 516 (1991)
- [108] S. Kling, T. Salger, C. Grossert, and M. Weitz, *Atomic Bloch-Zener Oscillations and Stückelberg Interferometry in Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **105**, 215301 (2010)
- [109] A. V. Shytov, D. A. Ivanov, and M. V. Feigel'Man, *Landau-Zener interferometry for qubits*, Eur. Phys. J. B **36**, 263 (2003)
- [110] F. Sorrentino, A. Alberti, G. Ferrari, V. V. Ivanov, N. Poli, M. Schioppo, and G. M. Tino, *Quantum sensor for atom-surface interactions below  $10\mu\text{m}$* , Phys. Rev. A **79**, 013409 (2009)
- [111] A. D. Cronin, J. Schmiedmayer, and D. E. Pritchard, *Optics and interferometry with atoms and molecules*, Rev. Mod. Phys. **81**, 1051 (2009)
- [112] H. B. Casimir and D. Polder, *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*, Phys. Rev. **73**, 360 (1948)
- [113] J. D. Perreault and A. D. Cronin, *Observation of Atom Wave Phase Shifts Induced by Van Der Waals Atom-Surface Interactions*, Phys. Rev. Lett. **95**, 133201 (2005)
- [114] S. Dimopoulos and A. A. Geraci, *Probing submicron forces by interferometry of Bose-Einstein condensed atoms*, Phys. Rev. D **68**, 124021 (2003)
- [115] E. Schrödinger, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. **24**, 418 (1930)

- [116] K. Huang, *On the Zitterbewegung of the Dirac Electron*, A. J. Phys. **20**, 479 (1952)
- [117] J. Cserti and G. Dávid, *Unified description of Zitterbewegung for spintronic, graphene, and superconducting systems*, Phys. Rev. B **74**, 172305 (2006)
- [118] D. Witthaut, F. Trimborn, V. Kegel, and H. J. Korsch, *Quantum dynamics of Bose-Einstein condensates in tilted and driven bichromatic optical lattices*, Phys. Rev. A **83**, 013609 (2011)
- [119] T. Salger, C. Geckeler, S. Kling, and M. Weitz, *Atomic Landau-Zener Tunneling in Fourier-Synthesized Optical Lattices*, Phys. Rev. Lett. **99**, 190405 (2007)
- [120] T. Salger, S. Kling, T. Hecking, C. Geckeler, L. Morales-Molina, and M. Weitz, *Directed Transport of Atoms in a Hamiltonian Quantum Ratchet*, Science **326**, 1241 (2009)
- [121] M. I. Katsnelson, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene*, Nature Phys. **2**, 620 (2006)
- [122] N. Stander, B. Huard, and D. Goldhaber-Gordon, *Evidence for Klein Tunneling in Graphene  $p - n$  Junctions*, Phys. Rev. Lett. **102**, 026807 (2009)
- [123] A. K. Geim, *Graphene: Status and Prospects*, Science **324**, 1530 (2009)
- [124] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *The electronic properties of graphene*, Rev. Mod. Phys. **81**, 109 (2009)
- [125] O. Klein, *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*, Zeit. f. Physik **53**, 157 (1929)
- [126] C. W. J. Beenakker, *Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene*, Rev. Mod. Phys. **80**, 1337 (2008)



- 
- [127] P. Plötz, J. Madroñero, and S. Wimberger, *FAST TRACK COMMUNICATION: Collapse and revival in inter-band oscillations of a two-band Bose-Hubbard model*, J. Phys. B: At. Mol. Phys. **43**, 081001 (2010)
- [128] D. M. Beazley, *Python Essential Reference, 3rd Edition* (Sams Publishing, 800 East 96th Street, Indianapolis, Indiana 46240 USA, 2006)