

**Analytische und p -adische Aspekte von
klassischen und Mock-Modulformen**

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Karl-Heinz Fricke

aus

Belecke

Bonn, 2013

Angefertigt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: **Prof. Dr. Don B. Zagier**
2. Gutachter: **Prof. Dr. Jens Franke**

Tag der Promotion: 06. September 2013

Erscheinungsjahr: 2013

Zusammenfassung

Ausgangsthema war die Gleichverteilung von geschlossenen Geodätischen auf der Modulkurve $SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$ bei wachsender Bogenlänge. Mit der Theorie verallgemeinerter Funktionen (Distributionen) beweisen wir einen Spezialfall dieser Aussage durch Integration von charakteristischen Funktionen über Geodätische. Siegel erkannte, dass man Zyklensummen der Thetareihe zu einer indefiniten quadratischen Form über Geodätische beliebiger Bogenlänge zu einer erzeugenden Funktion zusammenfassen kann. Wir liefern viele Beispiele für Zyklensummen von Eisensteinreihen, Poincaréreihen... Das war der Ursprung der Thetakorrespondenzen, die Modulformen ganzen und halbzahligen Gewichts in Beziehung setzen. Wir konstruieren Kernfunktionen dieser Integraltransformationen und verallgemeinern diese Korrespondenzen auf harmonische schwache Maaßformen, die in jüngerer Zeit zum Gegenstand vieler Forschungen geworden sind. Diese Verallgemeinerungen beruhen auf dem Prinzip der Regularisierung von divergenten Integralen. Dazu tragen wir einige neue Gedanken und Anwendungen auf Periodenintegrale und L -Funktionen bei.

Es werden verschiedene andere L-funktionen von schwachen Maaßformen, beispielsweise von Gewicht $k \leq 0$ auf $2 - k$ untersucht, die speziell für Mock-Modulformen interessant sind.

In dieser Arbeit werden Aussagen zur Teilbarkeit bzw. Ganzzahligkeit von Mock-Modulformkoeffizienten gemacht. Es gibt anschauliche Muster, was die p -Ordnungen der Fourierkoeffizienten betrifft. Sie sind fast gesetzmäßig, aber es gibt immer wieder Ausnahmen. Hier kommen notwendigerweise p -adische Methoden ins Spiel. Entscheidend ist die Theorie schwacher Hecke-Eigenformen, die wir detailliert entwickeln. Es ergeben sich Verallgemeinerungen der bekannten Ramanujan- und Honda-Kaneko Kongruenzen. Wir zeigen, dass ungewöhnliche Primzahlen (z.B. Primzahlen $p \leq -k$) Hindernisse für die Ganzzahligkeit von Mock-Modulformkoeffizienten sind. Hiermit erklärt sich, dass alle bekannten Beispiele (Ramanujans Mock-Thetafunktionen, die Eisensteinreihe E_2) positives Gewicht haben.

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Zagier für die interessante Themenstellung bedanken. Er gab der Dissertation durch eigene Forschungen immer wieder überraschende Wendungen. So wurde es nie langweilig und ein Thema fügte sich zum anderen. Die Zusammenarbeit mit ihm hat zu erstaunlichen Einsichten geführt.

Außerdem hat Frau Prof. Bringmann sehr zum zweiten Teil der Doktorarbeit über Periodenfunktionen und p -adische Methoden beigetragen. Sie hat sich immer Zeit genommen, mir mit Tips und neuen Forschungen weiter zu helfen. Durch ihre schnelle und spontane Hilfe trug sie sehr zur abschließenden Ausarbeitung der Arbeit bei.

Bedanken möchte ich mich des weiteren bei Martin Raum, der mir wertvolle Tips zum Programmieren in SAGE gegeben hat.

Das Max-Planck-Institut für Mathematik hat mich durch seine inspirierende Atmosphäre über die Grenzen meines eigenen Verständnisses hinausgeführt. Ohne die Nutzung der Computer am Max-Planck Institut wäre das gesamte fünfte Kapitel der Arbeit undenkbar gewesen. Vielen Dank an die Mitarbeiter der EDV, der Bücherei und die vielen anregenden Vorträge am Max-Planck Institut.

Sicher gab es viele weitere Menschen, die sichtbar oder im Hintergrund zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben, und sei es, dass sie stabile Rahmenbedingungen geschaffen haben, die kreatives Forschen überhaupt erst ermöglichen.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	ii
Danksagung	iii
Teil 1. Linienintegrale auf der Modulkurve	1
Einleitung	2
Kapitel 1. Gleichverteilung	10
1.1. Geodätische und quadratische Formen	10
1.2. Ambige, spiegelsymmetrische, reziproke Geodätische	13
1.3. Definition und Fourierreihe der Bogenlängendistribution	14
1.4. Grenzwert des konstanten Fourierkoeffizienten	17
1.5. Verschiedenes	19
Kapitel 2. Zyklenintegrale	31
2.1. Eisensteinreihen	32
2.2. Holomorphe Poincaréreihen	42
2.3. Nicht-holomorphe Poincaréreihen	43
2.4. Thetareihen	51
2.5. Maaßspitzenformen	56
Kapitel 3. Thetakerne	60
3.1. Maaß-Shimura Korrespondenz	60
3.2. Zagier-Lift	77
3.3. Beispiel: Eisensteinreihen	91
Teil 2. Mock-Modulformen	93
Kapitel 4. Konvergenz durch Regularisierung	94
4.1. Notationen	94
4.2. Eichlerintegrale, Perioden- und L -Funktionen	95
4.3. Spezielle L -Werte	106
4.4. Mock-Modulformen und Eichlerintegrale	108
4.5. Konvergenz in der unteren Halbebene	109
4.6. Mock-Modulformen haben unendlich viele Schatten	111
Kapitel 5. Kongruenzen	113
5.1. Hecke-Spitzenformen	113
5.2. Galoistheorie	119
5.3. Schwache Hecke-Eigenformen	120
5.4. Ramanujan-Honda-Kaneko Kongruenzen	126
5.5. Ganzheit und Selbstähnlichkeit	131
5.6. Adele	135
5.7. Mock-Jacobiformen	137
Teil 3. Hintergrundmaterial, spezielle Funktionen und Tabellen	140
Anhang A. Allgemeines	141
A.1. Symmetrische Polynome	141

A.2. Partielle Summation	142
A.3. Chinesischer Restsatz	142
A.4. Primzahlen und Newton-Polygone	143
A.5. Rankin-Selberg Methode für gewichtete Funktionen	146
A.6. Die Poincaréreihe $\frac{y^s}{2} \sum_{b^2-4ac=d} \frac{1}{ az^2 + bz + c ^s}$	147
A.7. Spezielle Funktionen	150
Anhang B. Darstellungsanzahlen	159
B.1. Allgemeines	159
B.2. Mittelwerte	160
B.3. Voronoiformeln	164
Anhang C. Modulformen und Verallgemeinerungen	172
C.1. Schwach-holomorphe Modulformen	172
C.2. Nicht-holomorphe Eisensteinreihen (Maaßformen)	180
C.3. Harmonische schwache Maaßformen (Mock-Modulformen)	185
C.4. Overkonvergente Modulformen	228
Anhang D. Integrale und Regularisierung	250
D.1. Integralformeln	250
D.2. Regularisierung	255
Anhang E. Computer-Programme	258
E.1. Geodätische (MATHEMATICA)	258
E.2. Poincaréreihen, Eisensteinreihen (PARI)	264
E.3. p-Ordnungen (SAGE)	275
Bezeichnungen und Definitionen	282
Literaturverzeichnis	291
Index	299

Teil 1

Linienintegrale auf der Modulkurve

Einleitung

Die Horozyklen $\mathfrak{C}_y = \Gamma_\infty \setminus (\mathbb{R} + iy)$ füllen den Standardfundamentbereich \mathfrak{F} der Gruppe der unimodularen Transformationen $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in der Poincaréhalbebene \mathcal{H} gleichmäßig aus: \mathfrak{C}_y schneidet eine beliebig vorgegebene offene Menge $U \subset \mathfrak{F}$ für genügend kleines $y > 0$ und der Anteil der Bogenlänge von \mathfrak{C}_y , der in U enthalten ist, an der Gesamtlänge von \mathfrak{C}_y geht gegen den Anteil der Fläche von U an der Gesamtfläche des Standardfundamentbereichs \mathfrak{F} , falls die Horozyklenlänge gegen ∞ geht, vgl. [Zagier 10, Chapter 3B].

Folgen von Geodätischen zu quadratischen Formen unbeschränkt wachsender Diskriminante in $\mathfrak{F} = \Gamma \setminus \mathcal{H}$ zeigen ein ähnliches Verhalten. Sei $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ eine primitive irreduzible ganze binäre quadratische Form

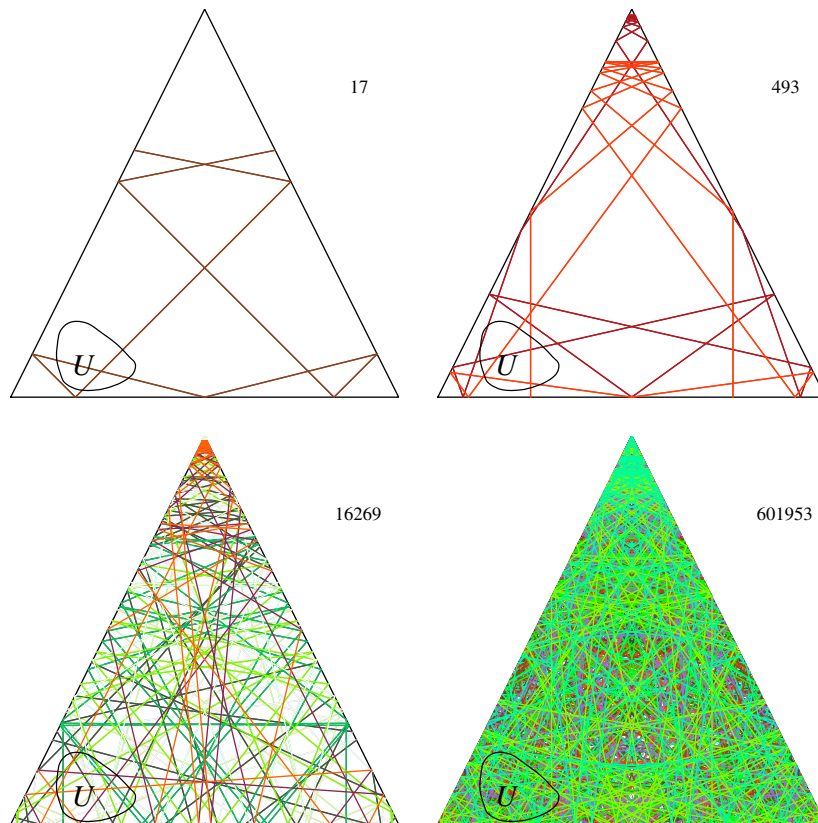


ABBILDUNG 0.1. Geodätische im Kleinschen Modell der hyperbolischen Ebene

der Diskriminante $d = b^2 - 4ac > 0$. Die Gleichung $a|z|^2 + b \operatorname{Re} z + c = 0$ beschreibt eine Geodätische \mathfrak{C}_Q in \mathcal{H} , die eindeutig eine primitive, orientierte, geschlossene Geodätische $\Gamma_Q \setminus \mathfrak{C}_Q$ in $\mathfrak{F} := \Gamma \setminus \mathcal{H}$ induziert. Sei Λ_d die Menge aller Geodätischen in \mathfrak{F} zu quadratischen Formen der Diskriminante d , $\Lambda_d \cap U$ die Teile der Geodätischen von Λ_d in U . [Duke 1] hat, ausgehend von Siegels umfangreichen Ergebnissen über ternäre quadratische Formen [Siegel 3] und mit Hilfe von [Maaß 3] und Abschätzungen der Fourierkoeffizienten von Modulformen halbganzen Gewichtes ([Iwaniec 1]) gezeigt, dass für Fundamentaldiskriminanten d gilt:

$$\frac{l(\Lambda_d \cap U)}{l(\Lambda_d)} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{vol}(U)}{\operatorname{vol}(\mathfrak{F})},$$

dabei ist $l(\Lambda_d \cap U)$ die Bogenlänge von $\Lambda_d \cap U$ und $U \subset \mathfrak{F}$ messbar.

In Abbildung 0.1 wurde statt der Poincaréhalbebene das Kleinsche Modell der hyperbolischen Geometrie gewählt. Das lässt sich grafisch leichter realisieren, da Geodätische in dem Modell gerade aussehen und der Standardfundamentbereich ein Dreieck ist.

Eine geometrische Aufgabenstellung, die Bogenlänge einer Geodätischen zu berechnen, wird in ein analytisches Problem umgewandelt. Binäre quadratischen Formen lassen sich als Geodätische in der hyperbolischen Ebene \mathcal{H} veranschaulichen. Das Integral über die Bogenlänge von Λ_d ist ein linearer stetiger Operator auf der Menge der Schwartzfunktionen χ , d.h. es gibt eine Distribution \mathfrak{D}_d , so dass sich das Zyklenintegral als Skalarprodukt (\mathfrak{D}_d, χ) über den Standardfundamentbereich \mathfrak{F} ergibt. Ihre Fourierkoeffizienten, besonders der konstante Term, werden hier untersucht. Es handelt sich um ein zweidimensionales Analogon der Diracschen δ -Distribution mit den Geodätischen zur Diskriminante d als Träger.

$$\mathfrak{D}_d := \sqrt{d} \sum_{|Q|=d} \delta\left(\frac{q(z)}{y}\right).$$

Die Bogenlängendistribution \mathfrak{D}_d hat für festes $y \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty\right)$ folgende Fourier-Stieltjes-Entwicklung in x (vgl. BEZEICHNUNGEN S.282)

$$\mathfrak{D}_d(z) = 4y\sqrt{d} \left\{ \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{N_d(a)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{S_a(r, d) \cos\left(\frac{\pi r}{a} \sqrt{d-4a^2y^2}\right)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \right) \cos(2\pi r x) \right\}.$$

Das Dilemma ist, dass die Fourierkoeffizienten Singularitäten bei $\frac{\sqrt{d}}{2a}$ haben, so dass nicht klar ist, warum die Distributionenfolge konvergieren sollte. Erstaunlicherweise gelingt es, Integralmittel des konstanten Terms asymptotisch abzuschätzen. Dazu benötigt man gewichtete Summenformeln für $\sum_{a \leq x} f(a) N_d(a)$. Diese lassen sich analog zum

Beweis des Primzahlsatzes gewinnen, allerdings braucht man dazu Dirichletreihen mit meromorpher Fortsetzung auf große Teile von \mathbb{C} . Der Pol von $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s}$ bei $s = 1$ ergibt das asymptotische Verhalten, vgl. Proposition 1.4.1:

$$\frac{l(\Lambda_d \cap \mathfrak{F}_Y)}{l(\Lambda_d)} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathfrak{F}_Y)}{\text{vol}(\mathfrak{F})}, \text{ dabei ist } \mathfrak{F}_Y = \left\{ z \mid |\text{Re } z| < \frac{1}{2}, \text{Im } z > Y \right\}.$$

Die ganze Argumentation lässt sich auf die Verteilung von Hyperzyklen verallgemeinern, Linien, die konstanten Abstand von Geodätischen haben. Man kann auch hier die Kerndistribution in eine Fourierreihe entwickeln. Wie im Fall der Geodätischen gibt es auch hier Gleichverteilung der Bogenlänge im Fundamentbereich bezüglich der y -Achse, Satz 1.5.3.1.3:

$$\frac{l(\Lambda_{d,\theta} \cap \mathfrak{F}_Y)}{l(\Lambda_{d,\theta})} \xrightarrow{d \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathfrak{F}_Y)}{\text{vol}(\mathfrak{F})}.$$

Im Anschluss an die Frage nach der Gleichverteilung der Bogenlänge werden allgemeiner Zyklenintegrale für automorph transformierende Funktionen der oberen Halbebene untersucht. Anschließend an Siegels Theorie der indefiniten quadratischen Formen lassen sich Zyklenintegrale für Eisensteinreihen untersuchen. Ergebnis ist die Zetafunktion der zugehörigen Idealklasse bzw., falls man über alle Geodätischen einer Diskriminante d summiert, die Dirichletreihe $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s}$. Ausgangspunkt sind die [Hecke]schen Integralformeln im reell-quadratischen Fall, Satz

2.1.2.3. Das lässt sich auf beliebige Stufe (Abschnitt 2.1.3) und beliebiges Gewicht (Satz 2.1.4.1) verallgemeinern:

$$\int_{\Lambda_d} \text{E}_{2k}(z, s) d_{\Lambda_d, 2k} z = \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{\Gamma(s-k) \Gamma(s+k)} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s} \text{ für } 2 \mid k.$$

Es ergeben sich viele Parallelen zu den Periodenintegralen von holomorphen Modulformen, [Kohnen Zagier 2]. Ähnlich gelingt es, nicht-holomorphe Eisensteinreihen über Hyperzyklen (Satz 2.1.5.1) in der hyperbolischen Ebene zu integrieren. Die Mellintransformierte des Konstantglieders ist nach dem Rankin-Selberg Verfahren zugleich das Hyperzyklenintegral der nicht-holomorphen Eisensteinreihe. Bis auf einen hypergeometrischen Faktor ist das wieder die Zetafunktion der zugehörigen Idealklasse. Dagegen ergibt das Integral der Eisensteinreihe über einen hyperbolischen Kreis im wesentlichen den Wert der Eisensteinreihe im (hyperbolischen) Kreismittelpunkt (Satz 2.1.6.1).

Für beliebige Funktionen ist die Berechnung von Zyklenintegralen etwas schwieriger, so dass wir uns auf einzelne Beispiele beschränken: Für Poincaréreihen hat man (Abschnitt 2.3):

$$\int_{\Lambda_d} P_n(z, s) d_{\Lambda_d} z = \frac{d^{\frac{s+1}{4}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}-1} (2|n|)^{\frac{s-1}{2}}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{a^{\frac{s+1}{2}}} J_{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{\pi|n|\sqrt{d}}{a}\right).$$

Als Anwendung betrachten wir die Dirichletreihe

$$S_{n,d}(s) := \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{a^s}, \operatorname{Re} s > 1 \text{ mit } S_a(n, d) = \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} e\left(\frac{nb}{2a}\right), d \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}$$

und ihre analytische Fortsetzung. Ihre Polstellen enthalten die Information über alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion, sowie über sämtliche Maaßformen sowie deren Spektralparameter, Satz 2.5.2.1. Außerdem werden Thetareihen (Abschnitt 2.4) und Maaßformen (Abschnitt 2.5.1)) untersucht. Es ist erstaunlich, dass sich Integrale von komplexen Funktionen über Geodätische überhaupt so gut berechnen lassen.

Viele der hier vorkommenden Ideen stehen mit dem Rankin-Selberg Verfahren in Zusammenhang. Symmetrien der oberen Halbebene werden beseitigt, indem durch die Einheitengruppe dividiert wird. Das hat einen doppelten Nutzen. Es vereinfacht sowohl den Integrationsbereich wie auch den Integranden der Periodenintegrale, eine Idee, die im wesentlichen auf Hecke zurückgeht.

Es ergibt sich ein faszinierender Einblick in die analytische Zahlentheorie, angefangen von Landaus Untersuchungen über Dirichletreihen, Voronois Reihenentwicklungen für deren Koeffizientensummen (, vorausgesetzt, dass es Funktionalgleichungen gibt), Weils Erkenntnisse über den Zusammenhang von Dirichletreihen und Modulformen, Maaß' Verallgemeinerung dieser Theorie auf den reell-quadratischen Fall bis hin zu Zagiers expliziter Konstruktion von Kernfunktionen(distributionen) für Periodenintegrale.

Ein wesentlicher Beitrag kommt auch von der [Schwartz]schen Distributionsentheorie. Schon Wilton hat in den dreißiger Jahren mit Differenzialen von (unstetigen) Funktionen beschränkter Schwankung gerechnet. Das sind dann Distributionen. Nach Schwartz' vollständiger Systematisierung der Theorie lag es nahe, sie auf die obere Halbebene \mathcal{H} anzuwenden, um Kernfunktionen für Periodenintegrale zu konstruieren. Interessant ist die Existenz von Fourier-Stieltjes Reihen, deren Koeffizienten nicht wie gewohnt bei $n \rightarrow \infty$ verschwinden. Der konstante Koeffizient lässt sich wie im Fall von $SL_2(\mathbb{Z})$ -invarianten Funktionen für die Rankin-Selberg Methode verwenden, um Periodenintegrale auszurechnen. Das ergibt neue einfache Beweise für die Heckschen Integralformeln im reell-quadratischen Fall.

Interessant ist das Auftreten der Zyklenintegrale als Fourierkoeffizienten von automorphen Formen halbganzen Gewichts. Nach [Siegel 4] sind die Integralmittel von Thetareihen über den Majorantenraum der quadratischen Formen Eigenfunktionen des Laplaceoperators. [Maaß 3] verallgemeinert das zu Integralen über Maaßformen. [Shintani] fand eine Korrespondenz von holomorphen Modulformen. Meine Motivation für das dritte Kapitel war es, die Arbeiten von [Kohnen 2] zur Shimura-Korrespondenz zu verstehen. Nach Lektüre von [Shimura 2, Maaß 3, Katok Sarnak] ergab sich die Vermutung, dass ein einheitlicher Rahmen für all diese Korrespondenzen von Modulformen existieren müsste, nahegelegt natürlich auch durch die vielen darstellungstheoretischen Arbeiten zu dem Thema. [Katok Sarnak] gaben einen Thetakern in drei Variablen an, der die Korrespondenz von automorphen Formen von Gewicht Null auf Gewicht $\frac{1}{2}$ vermittelt. Wir verallgemeinern hier diese Korrespondenz auf automorphe Formen vom Gewicht $2k$ mit dem Thetakern:

$$\Theta_{2k}(z, \tau) := y^{\frac{2k+3}{4}} \sum_{d \equiv 0,1 \pmod{4}} e(dz) \sum_{b^2-4ac=d} \frac{\left(\frac{a\tau^2+b\tau+c}{\eta}\right)^k}{e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2+b\xi+c}{\eta}\right)^2}}, \text{ vgl. Definition 3.1.2.2.}$$

Siegels Parametrisierung des Majorantenraums einer ternären quadratischen Form überträgt sich ohne weiteres auf andere Kernfunktionen. Die Fourierkoeffizienten dieses Maaßlifts werden in Satz 3.1.5.1 berechnet:

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(x+iy, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \sum_{n>0} \frac{C_n(f)}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi ny) e(nx) + \sum_{n<0} \frac{k! C_n(f)}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx).$$

Im Beweis dieses Satzes wird verständlich, warum im definiten Fall „modulare Spuren“ (Abschnitt 3.1.3) als Fourierkoeffizienten von Modulformen halbganzen Gewichts auftreten. Diese Korrespondenz ist kompatibel mit

den Heckeoperatoren (Satz 3.1.6.3):

$$\int_{\mathfrak{F}} \mathbb{T}_p f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \mathbb{T}_{p^2} \left(\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \right)$$

und daher erfüllen die Fourierkoeffizienten korrespondierender Maaßspitzenformen dieselben Relationen, die vom holomorphen Shimura-Lift bekannt sind (Satz 3.1.6.4):

$$\mathcal{L}_D(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n^2 D}}{n^{s-\frac{1}{2}}} = b_D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Dieser Lift lässt sich umkehren, vgl. Satz Satz 3.1.7.3.

Das lässt sich variieren auf entsprechende Korrespondenzen für schwach-holomorphe Modulformen negativen Gewichts, die also bei unendlich nicht verschwinden, Abschnitt 3.2. Man muss nur zusätzlich noch die Maaßableitungen ins Spiel bringen, Definition 3.2.2.1. Der entsprechende Thetakern ist:

$$\Omega_{2k}(z, \tau) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} E_{k-\frac{1}{2}}^+ \circ \cdots \circ E_{-k-\frac{1}{2}}^+ \overline{\Theta_{2k}(z, \tau)}, & k \in 2\mathbb{N}_0 \\ 2^{3k-2} \pi^{k-1} E_{2k-2}^{+\tau} \overline{\Theta_{2k-2}(z, \tau)}, & k-1 \in 2\mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Die Fourierkoeffizienten der korrespondierenden Maaßformen werden in Satz 3.2.2.3 berechnet. Außerdem kann man automorphe Formen von gleichem Spektralparameter zulassen, die zusätzlich zum holomorphen Anteil nicht-holomorphe Terme, die von der zweiten Whittakerfunktion kommen, haben (Satz 3.2.5.1). Ebenso fallen darunter sämtliche Beispiele von erzeugenden Funktionen von Spuren von singulären Moduli, vgl. [Funke, Zagier 13], Satz 3.2.1.1 und Folgerung 3.2.2.3.1. Mittels Regularisierung ([Borchers 2]), Anhang D.2, lassen sich auch die Konvergenzprobleme bei der Liftung von schwach-holomorphen Modulformen und harmonischen schwachen Maaßformen lösen, z.B. Satz 3.2.2.3 für Poincarereihen mit Hauptteil $\frac{1}{q^n}$:

$$\int_{\mathfrak{F}} F_{-2k}(n, \tau) \Omega_{2k}^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu = \begin{cases} -2(4\pi i n)^k \sum_{m|n} m^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(m^2, z), & k \text{ gerade,} \\ 2(-1)^{\frac{k+1}{2}} (4\pi n)^k \sum_{m|n} m^{-k} F_{\frac{1}{2}-k}(m^2, z), & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Das nimmt den schwach- und nicht-holomorphen Formen etwas von ihrem Schrecken und richtet den Blick auf eine entsprechende Erweiterung der Theorie im nächsten Kapitel *Mock-Modulformen*. Es gibt einfache Beziehungen von harmonischen schwachen Maaßformen zu holomorphen Modulformen im wesentlichen durch Anwenden der Maaßableitungen, [Bruinier Funke 2, Proposition 3.2 und Theorem 3.7]. Eine unmittelbare Folgerung ist die Kompatibilität der Thetakorrespondenz mit den Heckeoperatoren (Heckeäquivarianz Satz 3.2.4.1). Dadurch übertragen sich Eigenschaften wie Ganzzahligkeit und Teilbarkeit unmittelbar von der Seite ganzzahligen Gewichts auf die Seite halbzahligen Gewichts. Sämtliche behandelten Korrespondenzen werden anhand von Eisensteinreihen und Poincarereihen veranschaulicht, Tabelle auf S. 90, Abschnitt 3.3.

Kapitel 4 stellt eine Ausarbeitung und Verallgemeinerung der Ideen von Zagier und Zwegers zum Thema Mock-Modulformen dar. Zunächst werden Eichlerintegrale für vektorwertige Modulformen mit Polen definiert:

$$\tilde{f}(z) \doteq \mathbf{R} \int_z^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau, \quad \tilde{f}(-z) \doteq \mathbf{R} \int_{\bar{z}}^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau.$$

Deren Transformationsverhalten ergibt Periodenfunktionen, die in der ganzen komplexen Ebene \mathbb{C} definiert sind:

$$\Psi_{-\frac{d}{c}}(z) \doteq \mathbf{R} \int_{-\frac{d}{c}}^{iN} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau, \quad N \in \mathbb{N}.$$

Damit zusammenhängend lassen sich L -Funktionen für schwach-holomorphe Modulformen definieren:

$$L^*(s) := \mathbf{R} \int_0^{\infty} f(iy) y^{s-1} dy.$$

Zugrunde liegt die Idee der Regularisierung von divergenten Integralen. Die Regularisierung von Integralen, die schon bei den Thetakorrespondenzen (Kap. 3) zu großen begrifflichen Vereinfachungen und Verallgemeinerungen geführt hat, lässt die Definitionen nahezu zwangsläufig erscheinen. Die Verallgemeinerung auf vektorwertige

Formen schließt Modulformen beliebiger Kongruenzuntergruppen ein. Auch im allgemeinen Fall stellt die Periodenfunktion eine Verbindung von Eichlerintegralen in der oberen Halbebene und modifizierten Eichlerintegralen in der unteren Halbebene dar.

Eine berechnete Frage ist, wie kanonisch die hier gegebenen Definitionen der Regularisierung von Integralen sind. Es zeigt sich, dass der Eichler-Shimura Isomorphismus zwischen Spitzenformen und erzeugenden Funktionen kritischer L -Werte eine natürliche Erweiterung auf schwach-holomorphe Modulformen hat, Satz 4.2.3.8.

Abschnitt 4.2.4 untersucht das Wachstumsverhalten der Periodenfunktionen von (schwach-)holomorphen Modulformen am Rand der hyperbolischen Halbebene. Die beiden Eichlerintegrale $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}$ einer Spitzenform f haben am Rand der oberen Halbebene interessante Eigenschaften. Sie besitzen eine identische asymptotische Entwicklung in der Variablen $y = \text{Im } z$. Dazu wurden die Mellintransformierten der Eichlerintegrale betrachtet und auf Pole und ihre Residuen untersucht¹. Für halbzahliges Gewicht k und schwach-holomorphe Modulformen gibt es Konvergenzprobleme mit der Mellintransformation. Mit Hilfe von Reihen- bzw. asymptotischen Entwicklungen der unvollständigen Γ -Funktion gelingt es schließlich, die Periodenfunktion senkrecht durch die rationalen Punkte auf die untere Halbebene \mathcal{C}^∞ fortzusetzen, Satz 4.2.4.4:

$$\Psi_{-\frac{d}{c}}(z) \sim \frac{\text{Res}_{s=k} L_x(s)}{2\pi y} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-2\pi y)^j}{j!} L_x(k-j-1).$$

Ein weiteres Argument für die hier definierten L -Reihen sind die speziellen Werte im kritischen Streifen. Sie passen gut in das Deligne'sche Bild der Rationalität von kritischen L -Werten, Abschnitt 4.3.

Weiter lässt sich Zwegers' Beobachtung, dass die Fourierreihen einer Mock-Thetafunktionen auch außerhalb des Einheitskreises konvergieren, auf alle Poincaréreihen verallgemeinern. Bei einer nicht-holomorphen Poincaréreihe ergeben sich die nicht-holomorphen Fourierkoeffizienten aus der Konvergenz des holomorphen (Mock-) Anteils in der unteren Halbebene (Prop. 4.5.1). Weitere Anwendungen dieser Begriffe finden sich in [Bri Fri Ke]. Schwache Mock-Modulformen vom Gewicht $2-k \in \mathbb{Z}_0^-$ sind genau die Eichlerintegrale von schwach-holomorphen Modulformen. Die Eichlerintegrale der Eisensteinreihen vom Gewicht k sind die holomorphen Anteile der Eisensteinreihen vom Gewicht $2-k < 0$. Mock-Modulform und Eichlerintegral sind nur für $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ Synonyme. Im Allgemeinen sind Mock-Modulformen die holomorphen Anteile von harmonischen schwachen Maaßformen ([Zwegers 1]), Abschnitt 4.4.

Die Korrespondenz von Modulformen der komplementären Gewichte $k \geq 0$ und $2-k$ ist interessant im Hinblick auf Mock-Modulformen vom Gewicht $2-k$. Kapitel 5 untersucht die Frage nach der Ganzzahligkeit der Fourierkoeffizienten von Mock-Modulformen. Die Teilbarkeitseigenschaften von Modulformkoeffizienten folgen wie für Spitzenformen aus der Hecke-theorie, Abschnitt 5.1. Man stellt fest, dass die p -Ordnungen des $1, p, p^2, p^3, \dots$ -ten Fourierkoeffizienten (= p -Teil) jeder Modulform fast immer eine arithmetische Folge bilden. Das gilt sowohl für holomorphe, als auch schwach-holomorphe Modulformen. Die berühmten Ramanujankongruenzen

$$p(5^m n + \delta_m) \equiv 0 \pmod{5^m}, \text{ falls } 24\delta_m \equiv 1 \pmod{5^m},$$

sind nur ein Beispiel für dieses Verhalten. Nach einleitenden Definitionen (gewöhnliche/ungewöhnliche Primzahlen, Newtonsteigungen, α -arithmetisch) folgt ein Satz über die Arithmetik von Linearkombinationen verschiedener Neufurmen, Folgerung 5.1.8.1.

[Atkin] beobachtete, dass es auch für schwach-holomorphe Modulformen so etwas wie eine Kongruenzhecketheorie gibt. Im Abschnitt 5.3 werden schwache Heckeformen definiert, ein Äquivalent zu Hecke-Spitzenformen, die die gleichen Heckerelationen (5.3.2) erfüllen, bis auf eine Modulform aus $D^{k-1}M_{2-k}^1(N, \chi)$, deren m -ter Fourierkoeffizient durch $c \cdot m^{k-1}$ teilbar ist. Analog zur Hecke-Multiplikativität weisen wir schwache Multiplikativität nach, Folgerung 5.3.8.4. In Folgerung 5.3.8.5 konstruieren wir schwache Eigenformen explizit, eine Voraussetzung, um die Arithmetik von Mock-Modulformkoeffizienten zu entschlüsseln. Es gibt eine schwach-holomorphe Modulform $H_1(z) = \frac{1}{q} + O(q) \in S_k(N, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten. Dann ist

$$f'_i(z) = \prod_{j \neq i} (T_p - \tau_j(p)) H_1$$

eine schwache Hecke-Eigenform zum Eigenwert $\tau_i(p)$.

Abschnitt 5.4 über Ramanujan- und Kaneko-Kongruenzen ist eine konkrete Anwendung dieser Betrachtungen. Diese sind im Fall von CM-Modulformen besonders augenfällig (Folgerung 5.4.4.1). Das steht in engem Zusammenhang mit der Spektraltheorie von [Atkin]'s U -Operator, vgl. Anhang C.4.1. Wir berechnen die erste Spektrallinie

¹[Gangl Zagier, 7], [Zeidler, 6.7 Appendix by Don Zagier]

schwacher Hecke-Eigenformen:

$$\left\{ \tau'(1) + \frac{1}{v_i} \left(\overline{h_1(p^n) + h_p(p^n)v_i + h_{p^2}(p^n)v_i^2 + \dots} \right) \right\} \Upsilon_i, \text{ vgl. Hilfssatz 5.4.2,}$$

und zeigen, dass sich diese Spektrallinien bei Überlagerung von NeufORMen verschiedener T_p -Eigenwerte nicht auslöschen (Folgerungen 5.1.8.1, 5.4.3.2). Falls die p^m -ten Fourierkoeffizienten Null sind, ergeben sich besonders gute Kongruenzen ([**Honda Kaneko**]).

Um Mock-Modulformen f mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten zu haben, müssen die Koeffizienten der schwach-holomorphen Modulform $D^{k-1}f$ extrem gute Kongruenzeigenschaften haben; speziell müssen die Spektrallinien der Spitzenformen in $D^{k-1}f$ Null sein. Das ergibt ein einfach überprüfbares Kriterium für die Existenz von Mock-Modulformen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, Satz 5.5.1. Algorithmen und Programme dazu finden sich im Anhang E.3. Der klassische Anteil des Spektrums schwach-holomorpher Modulformen kann explizit berechnet werden, Hilfssatz 5.6.1. Fügt man die Information für alle Primzahlen zusammen, so ergibt sich der adelische Beitrag der klassischen Spitzenformen zur schwach-holomorphen Modulform. Das Beispiel $S_{12}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ auf S.137 veranschaulicht die allgemeine Situation. Um Mock-Modulformen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten zu erhalten, sollte man Räume von Spitzenformen ohne ungewöhnliche Primzahlen suchen (Folgerung 5.6.2.1).

Das hat Verallgemeinerungen auf die Existenz von Mock-Jacobiformen, die gleichzeitig p -adisch sind und Koeffizienten in \mathbb{Z}_p haben, sowie auf Kongruenzen ihrer Fourierkoeffizienten, Folgerung 5.7.2.1.

Die verschiedenen Anhänge sind eine Mischung aus bekannten Ergebnissen und neuen Beiträgen. Im Anhang A werden Grundlagen über die Diracsche δ -Distribution, Rankin-Selberg Verfahren, Abelsummation ... zusammengestellt. In Anhang A.4 geht es um Teilbarkeit für Heckeformen mit Koeffizienten in algebraischen Erweiterungen von \mathbb{Q} . Entscheidendes Hilfsmittel sind die Newton-Polygone bzw. Newtonsteigungen des charakteristischen Polynoms eines Heckeoperators T_p . Es geht um die konkrete Berechnung der Primidealzerlegung. Das geht im wesentlichen schon auf Hilbert zurück.

Wir stellen Definitionen und Eigenschaften spezieller Funktionen zusammen wie sie z.B. aus [**AS, GR, Magnus Ober**] bekannt sind. Der Abschnitt A.6 ist neu. Es geht in Satz A.6.1 um die analytische Fortsetzung der Poincaréreihe $\frac{y^s}{2} \sum_{b^2 - 4ac = d} \frac{1}{|az^2 + bz + c|^s}$, die bei Abschätzungen der Distribution \mathfrak{D}_d eine Rolle spielt. Definition, Asymptotik und sonstige Eigenschaften der Meijer G-Funktionen (verallgemeinerte Besselfunktionen) in Abschnitt A.7.5 gehen auf [**Meijer**] zurück bzw. ergaben sich durch umfangreiche MATHEMATICA-Berechnungen.

Ein eigenständiger Beitrag ist der Abschnitt B mit expliziten Formeln für die Anzahl $f_d(n)$ der Darstellungen der Zahl n durch quadratische Formen der Diskriminante d , sowie die Anzahl $N_d(n)$ der primitiven Darstellungen. Es folgt der Zusammenhang der beiden Anzahlfunktionen sowie die erzeugenden Dirichletreihen. Gute Abschätzungen über Mittelwerte dieser beiden zahlentheoretischen Funktionen und die Fehler, die dabei gemacht werden, sind aus der Literatur bekannt und werden hier mit Hilfe einer Landauschen Methode, die auch beim Beweis des Primzahlsatzes zur Anwendung kommt, wesentlich verschärft. Unter Annahme der Lindelöf-Vermutung lassen sich sehr genaue Resultate erzielen. Aber auch ohne irgendwelche Bedingungen kann man sofort auf die gleichmäßige Verteilung der Geodätischen in Bezug auf die y -Achse schließen. Satz B.2.4 war das erste substantielle Resultat des ersten Teils der Arbeit.

Der Abschnitt B.3 „Voronöformeln“ behandelt eigene Untersuchungen, die sich allerdings an bekannte Ergebnisse anlehnen. Hier wird der Fehler beim Mittelwert der Darstellungsanzahlen $f_d(n)$ in eine Reihe entwickelt, um ihn genauer einzugrenzen. [**Wilton 1**] hat das für die Teilerfunktion $d(n)$ durchgeführt, (B.3.0.1). Wenn man die Summe bei $N \approx \sqrt[3]{x}$ abbricht, erhält man eine sehr genaue Fehlerabschätzung. Die unendliche Reihe (B.3.1.1) für die Funktion $f_d(n)$ war bekannt ([**Walfisz**]). Neu ist die endliche Reihe mit explizitem Fehlerintegral, Satz B.3.2.1 und Folgerung B.3.2.1.1. Die Analyse der Fehlerterme führt tatsächlich über die besten bekannten Ergebnisse hinaus, da die Gleichmäßigkeit in d besser ist. Satz B.3.3.1 von [**Huxley Watt**] gilt z.B. erst ab $x \gg d$, während der optimale Wert für die Trankierung der Voronöformel bei $N = d^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$ liegt. Das allgemeinste Ergebnis in dieser Richtung ist die SUMMENFORMEL B.3.2, die einen Hilfssatz B.3.1.1 von [**Chandra 3**] wesentlich verschärft. Es bestand natürlich die Hoffnung, dass eine explizite Formel den Fehler sofort deutlich werden lässt.

In Abschnitt B.3.4 wird versucht, den konstanten Fourierkoeffizienten der Distribution \mathfrak{D}_d der Verteilung der Geodätischen im Standardfundamentbereich \mathfrak{F} in eine Voronöreihe zu entwickeln. Das geht, wenn man $N_d(n)$ durch $f_d(n) \approx \zeta(2)N_d(n)$ ersetzt. Man erhält eine Reihe von Meijer G-Funktionen, Folgerung B.3.4.1.1. Die Fehlerterme lassen sich allerdings gegenüber der schon bewiesenen Asymptotik des konstanten Terms in Abschnitt 1.4 nicht verbessern. Die Unstetigkeiten, d.h. Pole sind zu gravierend. Besser lassen sich Integralmittel des konstanten Terms abschätzen. Das ergibt wieder unendliche Summen von Meijer G-Funktionen PROPOSITION B.3.4.3 bzw.

die trankierte Reihe PROPOSITION B.3.4.2 mit explizitem Fehler. Der effektive Nutzen dieser Versuche besteht auf jeden Fall in dem umfangreichen MATHEMATICA-Paket, Abschnitt E.1.

Anhang C gibt einen Überblick über Verallgemeinerungen klassischer Modulformen. Als Grundlage werden verschiedene Eigenschaften schwach-holomorpher Modulformen aufgelistet. Grundlegend für zahlentheoretische Eigenschaften sind Aussagen über Algebraizität, beschränkte Nenner, Ganzzahligkeit der Fourierkoeffizienten usw. Einen Überblick über Räume schwach-holomorpher Modulformen geben verschiedene „Millerbasen“, das sind Basen von $M_{k,\infty}^1(N, \chi)$ der Art:

$$\begin{aligned}
 & q^{i_s} + O(q^{i_s+1}) \\
 & q^{i_{s-1}} + O(q^{i_{s-1}+1}) \\
 & \vdots \\
 & q^{i_1} + O(q^{i_1+1}) \\
 & 1 + O(q) \\
 H_1(z) = & \frac{1}{q} + O(q) \\
 H_2(z) = & \frac{1}{q^2} + O(q) \\
 & \vdots
 \end{aligned}$$

Ihr p -Teil hat erstaunlich regelmäßige p -Ordnungen, z.B. für $M_{12,\infty}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $p = 2$:

Koeff.	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
Δ	3	6	9	12	15	18	21
E	4	4	4	4	4	4	4
H_1	5	8	11	14	17	20	23
H_2	2	10	13	16	19	22	25
H_4	7	2	10	13	16	19	22
H_8	7	7	2	10	13	16	19
H_{16}	7	7	7	2	10	13	16
H_{32}	7	7	7	7	2	10	13

Nach Einsatz des Großcomputers am MPI gelang es, umfangreiches Zahlenmaterial zu erstellen, bis sich erstmals Unregelmäßigkeiten einstellen (fettgedruckte Einträge für $M_{66}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ in Tabelle 6, Abschnitt C.4.4), so dass man den Beweis der zugrundeliegenden Muster wohl aufgeben kann. Von da ab konzentrierten sich die Bemühungen auf p -adische Lösungen, d.h. um die Frage, ob man wenigstens über die p -Ordnungen von p^m -ten Fourierkoeffizienten für beliebig großes m etwas sagen kann. Es zeigte sich, dass p -adische Grenzwerte der Basen H_{p^m} , $m \rightarrow \infty$ existieren, im obigen Beispiel

$$H_{2\infty} \doteq G_{12} - \Delta, \text{ vgl. Folgerung C.4.3.10.1.}$$

Standardbeispiele für die Untersuchungen verschiedenster Thetakorrespondenzen sind nicht-holomorphe Eisensteinreihen im Abschnitt C.2.

Besonders durch die Arbeiten von K. Bringmann, J.H. Bruinier u.a. hat sich die Spezialisierung von Maaßformen auf Spektralparameter der holomorphen Modulformen $s = \frac{k}{2}$ als fruchtbar erwiesen, Abschnitt C.3. Diese Räume stehen durch die Differenzialoperatoren D^{k-1} und ξ_{2-k} mit schwach-holomorphen Modulformen in Beziehung und erben daher deren arithmetische Eigenschaften. Diese beiden Abschnitte sind bekannt.

Die genaueste Analyse von Teilbarkeitseigenschaften ergibt sich durch overkonvergente Modulformen. Nach [Coleman 2] treten Hecke-Spitzenformen in p -adischen Familien von overkonvergenten Modulformen auf. Klassisch heißt das, dass man zu jeder Heckeform vom Gewicht k eine Heckeform von grösserem Gewicht k' finden kann, deren Koeffizienten modulo einer beliebig vorgegebenen Primzahlpotenz gleich sind. Zu jeder Hecke-Spitzenform gehört eindeutig eine schwache Heckeform und diese treten ebenfalls in p -adischen Familien auf mit dem gleichen p -adischen Grenzwert wie die entsprechende Familie von Hecke-Spitzenformen, vgl. [Guer Kent Ono]. Entscheidend in diesem Zusammenhang ist die Spektraltheorie von [Atkin]’s U_p -Operator. Dadurch lassen sich die Teilbarkeitseigenschaften eindeutig Eigenfunktionen des U_p -Operators zuordnen. Einen Schlüssel zur Erklärung

dieser Gesetzmäßigkeiten ist die Tatsache, dass die Klasse der Funktionen mit asymptotischer Spektralentwicklung in Eigenfunktionen des U_p – Operators sehr viel größer ist als bisher angenommen: Sie umfasst klassische holomorphe Modulformen, schwach-holomorphe Modulformen, wie auch Mock-Modulformen mit ganzzahligen Koeffizienten. Einfachstes Beispiel ist das **[Atkin]**-Verfahren, das an einer von Ramanujans Mock-Thetafunktionen

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) q^m = 1 + \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^4}{(1+q)^2(1+q^2)^2} + \frac{q^9}{(1+q)^2(1+q^2)^2(1+q^3)^2} + \dots$$

illustriert wird. Computerberechnungen legen nahe, dass für alle $m, m_0 \in \mathbb{N}, m \geq m_0, m \equiv m_0 \pmod{2}$:

$$(-1)^{\frac{m-m_0}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} f(5^m n + c_m) q^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(5^{m_0} n + c_{m_0}) q^n \pmod{5^{\lfloor \frac{m_0+2}{2} \rfloor}} \quad \text{mit } 0 < c_m < 5^m, 5^m \parallel 24c_m - 1.$$

Diese Vermutung C.4.1.8 ist neu.

Abschließend werden diese Techniken auf die bekannten Basen schwach-holomorpher Modulformen angewandt. Dadurch ergeben sich für nahezu alle Modulformen selbstähnliche Muster, vgl. **[Folsom Kent Ono]**. Eine Erklärung dieser Muster ermöglicht es, Fragen nach Ganzzahligkeit bzw. Algebraizität von Mock-Modulformkoeffizienten zu klären. Bei detaillierter Analyse verschwimmen diese Muster jedoch. Es gibt für große Gewichte Ausnahmen und von daher gibt es keine Alternative zu einer p –adischen Analyse mit Hilfe overkonvergenter Modulformen. Die zugrundeliegende Idee dieser Muster ergibt sich leicht aus der overkonvergenten Spektralreihe der Basisfunktionen, Sätze C.4.3.6, C.4.3.10. Die detaillierte Erklärung in Abschnitt C.4.3 erfordert endliche Approximationen der Spektralentwicklung. Auffällig ist die Diagonale in den Tabellen C.4.4. Die Werte rechts der Diagonale verhalten sich p –adisch wie

$$\frac{\sum_{j=0}^{\infty} h_{p^j} \tau(p^j)}{p'_{\Gamma}(\tau)} f, \quad f \text{ eine Hecke-Spitzenform, Satz C.4.3.10.}$$

In Anhang D.1 wurden viele der im Text benötigten Integrale zusammengestellt, wie sie sich aus MATHEMATICA-Berechnungen bzw. durch Nachschlagen in bekannten Tafelwerken (hauptsächlich **[GR]**) ergaben.

Der Gültigkeitsbereich von Shimura’s Theta-Korrespondenzen (Abschnitt 3.1) lässt sich sinnvoll auf Funktionen erweitern, bei denen das Integral gegen den Thetakern nicht mehr konvergiert. Hauptanwendungsbeispiel sind die nicht-holomorphen Eisensteinreihen in Abschnitt 3.3. Die Idee der Regularisierung der Integrale taucht bei **[Harvey Moore]** auf. Das wird in Anhang D.2 verallgemeinert. Beispielsweise kann man so Zyklenintegralen über unendlich lange Geodätische, die in die Spitze des Fundamentalbereichs $\Gamma \backslash \mathcal{H}$ laufen, sinnvolle Werte zuweisen, s. Anhang D.2.2. Ähnliche Ideen ermöglichen es, Eichlerintegrale, L –Reihen u.a. für Modulformen mit exponentiellem Wachstum in den Spitzen zu definieren. Das hat Anlass zu folgender Veröffentlichung gegeben: **[Bri Fri Ke]**.

Anhang E beinhaltet eine Auflistung der MATHEMATICA- und PARI-Programme für im Text benötigten zahlentheoretischen Funktionen, die Bilder der Geodätischen **ABB. 0.1, E.1.0.1, E.1.0.2** und insbesondere für viele Beispiele von Eisenstein- und Poincaréreihen, Anhang E.2.

Abschnitt E.3 umfasst Algorithmen und Programme zur Berechnung von HeckeDefekten und Spektrallinien schwacher Hecke-Eigenformen.

Gleichverteilung

Wir machen uns zunächst mit der Geometrie der Geodätischen in der oberen Halbebene vertraut.

1.1. Geodätische und quadratische Formen

Betrachte die Aktion der Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ auf den quadratischen Formen:

Definition 1.1.1. Mit $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} (\gamma \circ Q)(x, y) &:= a(Ax + By)^2 + b(Ax + By)(Cx + Dy) + c(Cx + Dy)^2 \\ &= (aA^2 + bAC + cC^2)x^2 + (2aAB + b(AD + BC) + 2cCD)xy + \\ &\quad + (aB^2 + bBD + cD^2)y^2 \end{aligned}$$

und entsprechend mit $q(z) := a|z|^2 + bx + c$,

$$\begin{aligned} (\gamma \circ q)(z) &:= (aA^2 + bAC + cC^2)|z|^2 + (2aAB + b(AD + BC) + 2cCD)x + \\ &\quad + (aB^2 + bBD + cD^2). \end{aligned}$$

Hilfssatz 1.1.2. *Einige offensichtliche Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} (\gamma \circ Q)(z, 1) &= (Cz + D)^2 Q(\gamma z, 1), \\ \text{sowie } (\gamma \circ q)(z) &= |Cz + D|^2 q(\gamma z), \\ dz &= (Cz + D)^2 d(\gamma z), \\ \mathrm{Im} z &= |Cz + D|^2 \mathrm{Im}(\gamma z). \end{aligned}$$

Hilfssatz 1.1.3. *Sei $Q = (a, b, c)$ eine quadratische Form der Diskriminante d und*

$$\mathfrak{C}_Q : a|z|^2 + bx + c = 0$$

die dazu gehörige Geodätische. Dann gilt für beliebige $z \in \mathcal{H}$:

$$|az^2 + bz + c| = \frac{\sqrt{d}y}{\sin \alpha},$$

dabei ist $\alpha = \sphericalangle(z, \mathfrak{C}_Q)$ der euklidische (und 2α der hyperbolische) Winkel, unter dem der Durchmesser $[w_1, w_2] \in \mathbb{R} \subset \overline{\mathcal{H}}$ der Geodätischen \mathfrak{C}_Q von $z \in \mathcal{H}$ aus erscheint bzw. für $a = 0, d = b^2$ der Winkel zwischen z , dem Anfangspunkt der Geodätischen (Geraden) $-\frac{c}{b}$ und der x -Achse.

BEWEIS. Sei zunächst $a \neq 0$, vgl. Abb. 1.1

$$w_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}, w_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a},$$

$$\text{Fläche } (\Delta(z, w_1, w_2)) = \frac{1}{2} |z - w_1| |z - w_2| \sin \alpha = \frac{1}{2a} |az^2 + bz + c| \sin \alpha = \frac{\sqrt{d}}{2a} y.$$

Für $a = 0$ ist $b = \sqrt{d}$ und $|bz + c| = \sqrt{d} \Delta$, vgl. Abb. 1.2. □

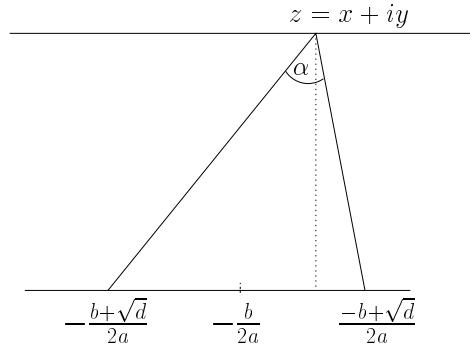


ABBILDUNG 1.1. Dreieck: Höhe y , Breite $\frac{\sqrt{d}}{a}$

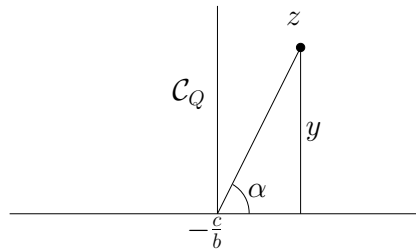


ABBILDUNG 1.2. $a = 0, d = \square$

Hilfssatz 1.1.4. Auf der Geodätischen

$$\mathfrak{C}_Q : a|z|^2 + bx + c = 0$$

wird durch das Bogenlängenelement

$$d_Q z = -\frac{\sqrt{d}}{az^2 + bz + c} dz$$

eine Orientierung gegeben, die für $a > 0$ von links nach rechts läuft.

Für $a = 0$ hat man senkrechte Geodätische, die für $b > 0$ auf die reelle x -Achse zu, für $b < 0$ von ihr weg ins Unendliche laufen.

BEWEIS. Der Betrag des Bogenlängenelements findet sich in [Zagier 6, Proposition 2]. Man überzeugt sich, dass die hier gegebene Wahl im Maximum der Geodätischen die richtige Orientierung hat. Wegen Hilfssatz 1.1.2 stimmt das auch in allen anderen Punkten der Geodätischen. \square

Hilfssatz 1.1.5. Es gibt nur endlich viele Geodätische $\mathfrak{C}_Q, |Q| = d \neq \square$ mit $\alpha = \angle(z, \mathfrak{C}_Q) \geq \frac{\pi}{2}$.

BEWEIS. Punkte $z = x + iy$ mit $\angle(z, \mathfrak{C}_Q) \geq \frac{\pi}{2}$ liegen innerhalb der Geodätischen, d.h. $y \leq \frac{\sqrt{d}}{2a}$ bzw. $a \leq \frac{\sqrt{d}}{2y}$. Alle Geodätischen mit gegebenem a lassen sich leicht aufzählen. Es gibt endlich viele $b \in \mathbb{N}$ mit $-a < b \leq a$ und unendlich viele $b' = b + 2an, n \in \mathbb{Z}$, von denen aber für fast alle $n \in \mathbb{Z}$ der Winkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$ ist, weil $\alpha \rightarrow 0$ für $|n| \rightarrow \infty$. \square

Aus ähnlichen Gründen gilt:

Hilfssatz 1.1.6. Es gibt nur endlich viele Geodätische $\mathfrak{C}_Q, |Q| = d \neq \square$ mit $\alpha = \angle(z, \mathfrak{C}_Q) \geq \frac{\pi}{4}$.

Für $\alpha < \frac{\pi}{4}$ gilt: $\tan^2 \alpha \leq 2 \sin^2 \alpha$.

Hilfssatz 1.1.7. Sei $d := b^2 - 4ac$ die Diskriminante der quadratischen Form (a, b, c) .

$$(a|z|^2 + bx + c)^2 = |az^2 + bz + c|^2 - dy^2$$

BEWEIS. Quadrate ausrechnen. \square

Hilfssatz 1.1.8. Die Reihe $\sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} \frac{y^2}{|az^2 + bz + c|^2}$ ist lokal gleichmäßig konvergent in \mathcal{H} , d.h. stetig.

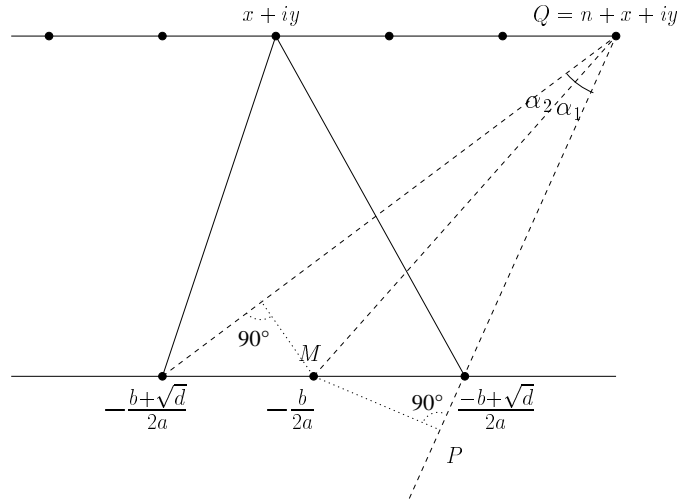


ABBILDUNG 1.3.
 O.B.d.A. $|x + \frac{b}{2a}| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{MP} < \frac{\sqrt{d}}{2a}, \overline{MQ}^2 \geq y^2 + (n - \frac{1}{2})^2,$
 $\sin \alpha_1 = \frac{\overline{MP}}{\overline{MQ}} < \frac{\sqrt{d}}{2a\sqrt{y^2 + (n - \frac{1}{2})^2}} > \sin \alpha_2, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2 < \pi$

BEWEIS. Für die lokal gleichmäßige Konvergenz reicht es, eine lokale Majorante zu finden [Grauert Fischer, 2.Kap., Satz 5.3]. Sei zunächst $d \neq \square$:

$$\sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} \frac{y^2}{|az^2 + bz + c|^2} = \frac{1}{d} \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} \sin^2 \alpha \quad \text{nach Hilfssatz 1.1.3.}$$

Nun ist, vgl. Abb. 1.3,

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} < 2 \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2,$$

da die Kosinusfunktion im Intervall $(0, \pi)$ monoton fallend ist, also

$$\sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} \frac{y^2}{|az^2 + bz + c|^2} < \frac{1}{d} \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2)^2 \leq \frac{1}{d} \sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} (2 \sin^2 \alpha_1 + 2 \sin^2 \alpha_2)$$

$$\begin{aligned} &< \frac{2}{d} \sum_{a \in \mathbb{N}} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} 4 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sqrt{d}}{2a\sqrt{y^2 + (n - \frac{1}{2})^2}} \right)^2 \\ &< \frac{2}{d} \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \left(2 \frac{d}{a^2 y^2} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d}{a^2 n^2} \right) \\ &= 4 \left(\frac{1}{y^2} + \zeta(2) \right) \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^2} = O \left(\frac{1}{y^2} + 1 \right); \end{aligned}$$

falls $d = \square$ gibt es zusätzlich noch einen Beitrag

$$\sum_{a=0, b=\pm\sqrt{d}, c \in \mathbb{Z}} \frac{y^2}{|bz + c|^2} < O \left(y^2 \left(\frac{1}{y^2} + \zeta(2) \right) \right).$$

Der Grenzwert stetiger Funktionen ist stetig [Grauert Fischer, 2.Kap., Satz 5.2].

□

Bemerkung. Weitere Details über die Poincaréreihe $\sum_{\substack{a,b,c \in \mathbb{Z} \\ b^2 - 4ac = d}} \frac{y^s}{|az^2 + bz + c|^s}$ finden sich im Anhang A.6.

Satz 1.1.9. Der Punkt $z \in \mathcal{H}$ hat den Abstand $\mathfrak{d} = \operatorname{arsinh} \left| \frac{q(z)}{y\sqrt{d}} \right|$ von der Geodätischen \mathfrak{C}_Q .

BEWEIS. Eine Bewegung $\gamma \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ bildet \mathfrak{C}_Q auf $\mathfrak{C}_{\gamma^{-1} \circ Q}$ ab. Durch eine Bewegung der hyperbolischen Ebene lässt sich die Geodätische \mathfrak{C}_Q auf $\mathfrak{C}_{(1,0,-1)} : |z|^2 - 1 = 0$ und ein beliebiger Punkt z auf iY abbilden.

$$\mathfrak{d} = \left| \int_1^Y \frac{dy}{y} \right| = \left| \log Y \right|.$$

Sei θ der euklidische Winkel, unter dem die Strecke $[-1, 1]$ von iY aus erscheint. Dann ist

$$\begin{aligned} \cot \frac{\theta}{2} &= Y, \\ \cot \theta &= \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} \left(Y - \frac{1}{Y} \right) = \frac{q(iY)}{Y\sqrt{d}}, \\ \sinh \mathfrak{d} &= \left| \frac{1}{2} \left(Y - \frac{1}{Y} \right) \right|. \end{aligned}$$

Sowohl der Abstand \mathfrak{d} als auch der Term $\left| \frac{q(z)}{y\sqrt{d}} \right|$ sind nach Hilfssatz 1.1.2 invariant unter Bewegungen. \square

1.2. Ambige, spiegelsymmetrische, reziproke Geodätische

Es gibt verschiedene augenfällige Symmetrien der quadratischen Form Q .

quadr.	Form	Bezeichnung
Q	(a, b, c)	
Q^*	$(-a, b, -c)$	spiegelsymmetrische Geodätische
Q'	$(a, -b, c)$	(ambig)
$-Q$	$(-a, -b, -c)$	reziproke Form bzw. Geodätische

In diesem Abschnitt betrachte ich nur primitive quadratische Formen (a, b, c) , d.h. $\operatorname{ggT}(a, b, c) = 1$, beliebiger Diskriminante $d = b^2 - 4ac$. Klassen und Geschlechter quadratischer Formen sind im engeren Sinne zu verstehen.

Spiegelsymmetrie lässt sich einfach feststellen:

Hat $t^2 - du^2 = -4$ ganzzahlige Lösungen, so ist jede primitive Geodätische ihr eigenes Spiegelbild: $Q \sim Q^*$.

Sonst sind Geodätische und Spiegelbild verschieden, vgl. [Sarnak 3].

Reziprok heißt eine Geodätische, die in sich selbst zurückläuft: $Q \sim -Q$, vgl. [Sarnak 3].

Reziproke Geodätische werden immer am Punkt i „reflektiert“: Sie enthalten eine Form $(A, B, -A)$.

Für Diskriminanten d mit $16 \nmid d \wedge (p \mid d \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{4})$ ist die Anzahl primitiver reziproker Geodätischer gleich der Anzahl der Geschlechter.

Schon Gauß hat **ambige** Formen $Q = (a, b, c)$ untersucht, das sind solche mit $a \mid b$. Man bezeichnet den Zykel zu Q äquivalenter reduzierter quadratischer Formen als ambigen Zykel, vgl. [Buch Voll, 2.8, 6.14].

Ambige Formenzykel gehören zu Geodätischen, die gleichzeitig ihr Spiegelbild in entgegengesetzter Orientierung durchlaufen.

Ambige Zykel sind diejenigen, in denen zu jeder Form Q auch Q' auftritt.

Ambige Zykel enthalten eine der Formen (A, A, C) bzw. $(A, 0, C)$.

Ambige (geschlossene) Geodätische sind solche, die ihr absolutes Maximum an der Stelle $x = 0 \vee \pm \frac{1}{2}$ haben.

Zu jeder Diskriminante d gibt es genau so viele ambige primitive Zykel wie Geschlechter, vgl. [Cassels, Ch. 14, Composition of Binary Quadratic Forms, Lemma 4.2, 4.3].

Wenn $t^2 - du^2 = -4$ ganzzahlige Lösungen hat, ist reziprok und ambig dasselbe. Sonst schließt sich das gegenseitig aus.

Für Diskriminanten d mit $16 \mid d \vee (\exists p \equiv 3 \pmod{4} : p \mid d)$ gibt es keine spiegelsymmetrischen und keine reziproken Geodätischen.

Hat eine Geodätische zwei der Eigenschaften *ambig*, *spiegelsymmetrisch* oder *reziprok*, so auch die dritte.

Mit der Klassifikation aus [Robertson, 37 The relation between $H_+(\Delta)$ und $H(\Delta)$] ergibt sich folgendes Bild für beliebige Diskriminanten:

Typ	$t^2 - du^2 = -4$	Zusatzbedingung	Geodätische
II	lösbar (\Rightarrow)	$(p \mid d \Rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{4})$	alle spiegelsymmetrisch, reziprok = ambig
III	(nicht lösbar \Leftarrow)	$(16 \mid d) \vee (\exists p \equiv 3 \pmod{4} : p \mid d)$	keine spiegelsymmetrisch, keine reziprok
IV	nicht lösbar \wedge	$(16 \nmid d) \wedge (p \mid d \Rightarrow p \not\equiv 3 \pmod{4})$	keine spiegelsymmetrisch, reziprok \neq ambig

Fall III tritt statistisch in 100% aller Fälle auf (Siebmethoden):

Keine Geodätische ist reziprok oder spiegelsymmetrisch.

Convenient Numbers¹ (Klassenzahl gleich Anzahl der Geschlechter \iff Alle Geodätischen sind ambig):

Falls $h(df^2) = g(df^2)$ für eine beliebige Diskriminante d , so gilt auch $h(d) = g(d)$.

(Der ursprünglich von Euler stammende Beweis, korrigiert in [Grube, §7], lässt sich auf positive Diskriminanten übertragen.)

Falls df^2 vom Typ II ist,² so auch d .

Fall IV tritt nicht auf. Im Fall II sind alle Geodätischen gleichzeitig ambig, reziprok und spiegelsymmetrisch.

Im Fall III gibt es weder reziproke noch spiegelsymmetrische Geodätische.

Hauptideale: Weitere sichtbare Eigenschaften der geschlossenen Geodätischen (a, b, c) im Standardfundamentalebereich \mathfrak{F} sind die relativen Maxima, das absolute bei $y = \frac{\sqrt{d}}{2a}$. Falls die quadratische Form Q die Primzahl $p < \frac{\sqrt{d}}{2}$ repräsentiert, ist $Q \sim (p, *, *)$ und die zugehörige Geodätische hat ein lokales Maximum bei $y = \frac{\sqrt{d}}{2p}$. Insbesondere ist eine Primzahl p Hauptideal in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, falls entweder $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$ oder die höchste Geodätische $(1, *, *)$, das Einselement in der Klassengruppe, ein lokales Maximum bei $y = \frac{\sqrt{d}}{2p}$ hat. Im Falle von *convenient numbers* sind diese Primzahlen durch Kongruenzen \pmod{d} bestimmt.

1.3. Definition und Fourierreihe der Bogenlängendistribution

Um die Bogenlänge von Geodätischen $a|z|^2 + bx + c = 0$ in der oberen Halbebene zu berechnen, schneiden wir sie mit Hilfe von Distributionen aus. Eine Einführung in die Theorie der Distributionen findet man in bekannten Standardwerken wie etwa [R.E.Edwards].

Da $\left| \frac{q(z)}{y\sqrt{d}} \right|$ bis auf Terme höherer Ordnung der Abstand von der Geodätischen $\mathfrak{C}_Q : q(z) = 0$ ist, sollte

$$(1.3.1) \quad \mathfrak{D}_d = \sum_{|Q|=d} \delta \left(\frac{q(z)}{y\sqrt{d}} \right)$$

die Distribution sein, die das Zykelintegral über die Geodätische berechnet, vgl. [Gel'fand-Shilov, Kap. 3, 1.3. Die verallgemeinerte Funktion $\delta(P)$], [Zagier 6, (39)]. Wir beweisen das im folgenden.

¹vermutlich mehr als 60% der positiven Diskriminanten, vgl. [Buell, 5.2]

²Diese Aussage lässt sich nicht für Typ III machen wie das Gegenbeispiel $d = 72$ zeigt: 72 ist vom Typ III, 8 aber vom Typ II.

Definition 1.3.1. *Testfunktionen* sind stetige Funktionen $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass $\exists \varepsilon > 0 : f(x + iy) = O(y^{-\varepsilon})$ für $y \rightarrow \infty$. *Automorphe* Testfunktionen sind zusätzlich invariant unter der Aktion der Modulgruppe $|_{2k}\gamma, \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Als Konvergenzbegriff reicht gleichmäßige Konvergenz von (Test-)Funktionsfolgen aus.

Bekanntlich gibt es Folgen von \mathcal{C}^∞ -Funktionen, die im distributionellen Sinn gegen die Distribution konvergieren.

Bemerkung. Die Distribution \mathfrak{D}_d lässt sich als distributioneller Grenzwert der Funktionenfolge

$$f(\delta, d, z) = \frac{y^2 d}{\pi} \sum_{\substack{a, b, c \\ b^2 - 4ac = d}} \frac{\delta}{(a|z|^2 + bx + c)^2 + \delta^2 |az^2 + bz + c|^2}$$

für $\delta \searrow 0$ schreiben. Das konvergiert $\forall \delta > 0, d \in \mathbb{D}^{0+}, z \in \mathcal{H}$.

Die \mathfrak{D}_d sind temperierte Distributionen, d.h. lineare, stetige Funktionale auf dem Raum der Schwartzfunktionen auf $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$, ein Teilraum unserer Testfunktionen. Sie besitzen Fourierreihen, deren Koeffizienten nicht gegen Null gehen, sondern absolut durch den konstanten Fourierkoeffizienten beschränkt sind, vgl. [R.E.Edwards, 12.7.5].

Satz 1.3.2 (Fourier-Stieltjes-Reihe). Sei $d \in \mathbb{D}^{0+}, S_a(r, d) := \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} e\left(\frac{rb}{2a}\right), F : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine automorphe

Testfunktion³. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{D}_d(z) F(z) d\mu = \int_{\Lambda_d} F(z) d_\Lambda z.$$

Die Distribution \mathfrak{D}_d hat für $y \neq \frac{\sqrt{d}}{2a}, a \in \mathbb{N}$ folgende Fourier-Stieltjes Reihe

$$\mathfrak{D}_d(z) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r(y, d) \cos 2\pi r x$$

mit

$$(1.3.2) \quad c_r(y, d) = 4y\sqrt{d} \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{S_a(r, d) \cos\left(\frac{\pi r}{a} \sqrt{d - 4a^2 y^2}\right)}{\sqrt{d - 4a^2 y^2}} + \begin{cases} 2y\sqrt{d}, & d = \square, \sqrt{d} \mid r, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad r \in \mathbb{Z}.$$

BEWEIS. Um \mathfrak{D}_d auf Funktionen $F : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ auszuwerten, kann man den Integrationsbereich durch eine (flächentreue) Bewegung $R = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$ (α und β sind die Lösungen von $ax^2 + bx + c = 0, \alpha < \beta$) auf einen Kreisring $\varepsilon_0^{-1} \leq |w| \leq \varepsilon_0$ transformieren, $w = \frac{z - \beta}{z - \alpha} = \xi + i\eta$, und gleichzeitig die quadratische Form $Q = (a, b, c)$ vereinfachen zu $R^{-1} \circ Q = (0, \mathrm{sign}(a) \sqrt{d}, 0)$; das entspricht einer Diagonalisierung des Erzeugenden der Automorphismengruppe von Q ,

$$\gamma_Q = \begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad R\gamma_Q R^{-1} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_0^{-1} \end{pmatrix}, & a < 0, \\ \begin{pmatrix} \varepsilon_0^{-1} & 0 \\ 0 & \varepsilon_0 \end{pmatrix}, & a > 0, \end{cases}$$

falls d keine Quadratzahl ist. Man hat folgende Transformation

$$(1.3.3) \quad \begin{aligned} w &= \frac{z - \beta}{z - \alpha} = r e^{i\theta}, & z &= \frac{\alpha w - \beta}{w - 1}, & \mathrm{Im} z &= \frac{\sqrt{d} \eta}{|a| |w - 1|^2} \\ Q(z, 1) &= \frac{d \cdot w}{a(w - 1)^2}, & q(z) &= \frac{d \cdot \xi}{a |w - 1|^2}, & d\mu &= \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \frac{dr d\theta}{r \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

³vgl. Definition 1.3.1

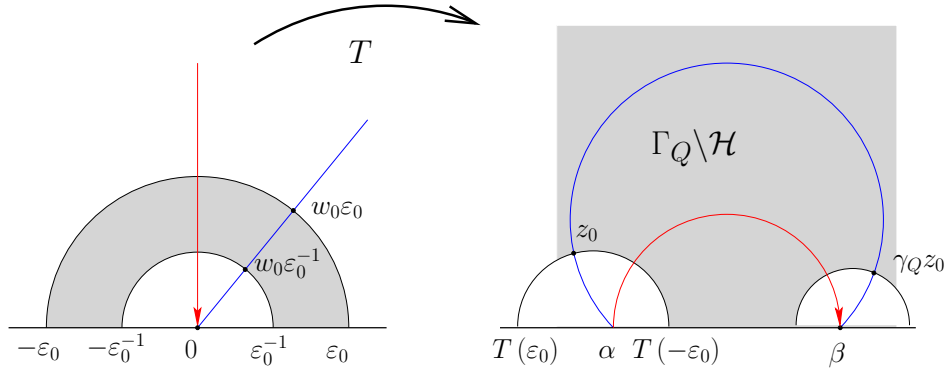


ABBILDUNG 1.3.1. für $a > 0$
 $T = R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Für $d \neq \square$ ist dann:

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_d[F] &= \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_Q \setminus \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ (a,b,c) = \gamma \circ Q}} \delta\left(\frac{a|z|^2 + bx + c}{y\sqrt{d}}\right) F(z) d\mu = \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_{\Gamma_Q \setminus \mathcal{H}} \delta\left(\frac{a|z|^2 + bx + c}{y\sqrt{d}}\right) F(z) d\mu \\ &\stackrel{(1.3.3)}{=} \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_{\varepsilon_0^{-1} \leq |w| \leq \varepsilon_0} \delta\left(\text{sign}(a) \frac{\xi}{\eta}\right) F\left(\frac{z - \beta}{z - \alpha}\right) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_0^\pi \delta(\cot \theta) \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} F(re^{i\theta}) \frac{dr d\theta}{r \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

und da das isometrische Bild der Geodätischen unter R gerade $\theta = \frac{\pi}{2}$ entspricht:

$$= \sum_{\text{Äqu.kl. } \mathcal{A}} \int_{\Gamma_Q \setminus \mathfrak{C}_Q} F(z) d_Q z = \int_{\Lambda_d} F(z) d_\Lambda z.$$

Falls d eine Quadratzahl ist, ist die Automorphismengruppe trivial $\{\pm \text{Id}\}$. Alle Geodätischen beginnen von einem rationalen Punkt auf der reellen Achse, d.h. gehen durch eine Spitze, laufen in die Spitze zurück und sind daher unendlich lang. Sie sind äquivalent zu $(0, b, c)$, $b = \pm\sqrt{d}$. Es gibt \sqrt{d} Äquivalenzklassen ([Zagier 7, §8 Aufgabe 1]).

$$\sum_{Q \sim (0, b, c)} \int_{\mathfrak{F}} \delta\left(\frac{bx + c}{y\sqrt{d}}\right) F(z) d\mu = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \delta\left(\frac{x}{y}\right) F\left(z - \frac{c}{b}\right) dx \frac{dy}{y^2} = \int_0^\infty y F\left(-\frac{c}{b} + iy\right) \frac{dy}{y^2} = \int_{\mathfrak{C}_Q} F(z) d_Q z,$$

vgl. Hilfssatz A.7.1.2 und A.7.1.4. Wenn man über alle Äquivalenzklassen summiert, hat man die Aussage des Satzes.

Man kann auch leicht die Fourierreihe für festes $y > 0$ ausrechnen mit $\frac{\partial q}{\partial x}(z) = 2ax + b$, $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} &\sum_{Q=T^m \circ (a, b, c)} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta\left(\frac{q(z)}{y}\right) e(-rx) dx = \int_{-\infty}^\infty \delta\left(\frac{a|z|^2 + bx + c}{y}\right) e(-rx) dx \\ &= \sum_{\substack{x_0, \\ q(x_0)=0}} \frac{ye(-rx_0)}{|2ax_0 + b|} = y \frac{e\left(-r\left(\frac{-b - \sqrt{d - 4a^2y^2}}{2a}\right)\right) + e\left(-r\left(\frac{-b + \sqrt{d - 4a^2y^2}}{2a}\right)\right)}{\sqrt{d - 4a^2y^2}} \\ &= \frac{2y}{\sqrt{d - 4a^2y^2}} e\left(\frac{rb}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi r \sqrt{d - 4a^2y^2}}{a}\right) \end{aligned}$$

$$\text{Also } c_r(y) = \int_{-\frac{1}{2}+iy}^{\frac{1}{2}+iy} \mathfrak{D}_d(z) \cdot e(-rx) dx = \sum_{a \neq 0} \sum_{\substack{b \equiv (2a) \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \frac{2y\sqrt{d} e\left(\frac{rb}{2a}\right) \cos \frac{\pi r \sqrt{d-4a^2y^2}}{a}}{\sqrt{d-4a^2y^2}}. \quad \square$$

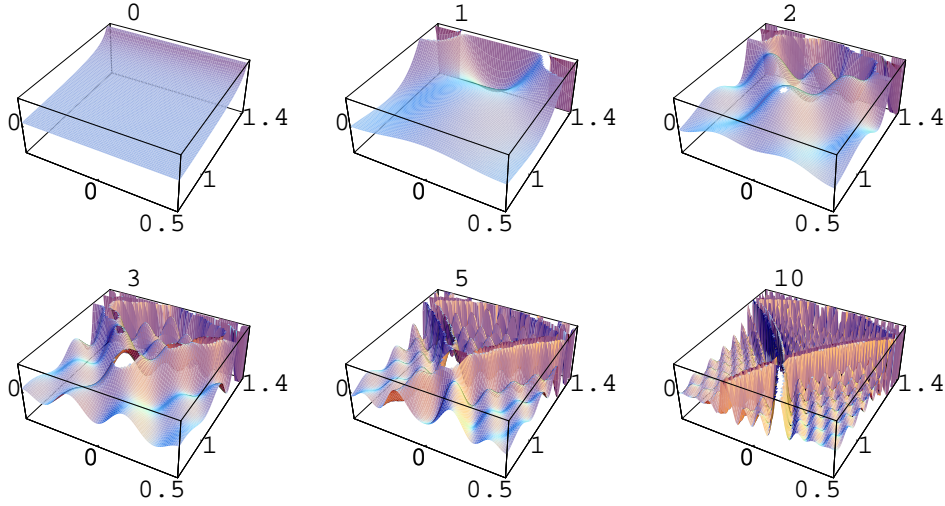


ABBILDUNG 1.3.2. Fourier-Stieltjes Reihe für \mathfrak{D}_8 , trankiert bei $r = 0, 1, 2, 3, 5, 10$.

1.4. Grenzwert des konstanten Fourierkoeffizienten

Die erste Hoffnung, dass die Fourierkoeffizienten im Grenzwert proportional zur Länge der Geodätischen in Λ_d sind, konnte ich bis jetzt weder bestätigen noch widerlegen. Man sieht schon an Abbildung 1.4.1, dass $c_k(y, d)$ eine (zunehmende) Anzahl von Polen hat. Die mittleren Abstände der a mit $N_d(a) \neq 0$ sind $c\sqrt{\log(x)}$. Falls es ähnlich wie bei den Primzahlen keine wesentlich größeren Lücken in dieser Folge gibt, so liegen die Pole (bei $\frac{\sqrt{d}}{2a}$) allmählich immer dichter. Computerberechnungen erwecken dennoch den Eindruck, dass die konstanten Terme $\sim \frac{l(\Lambda_d)}{\text{vol}\mathfrak{F}}$ sein könnten. Die Pole werden natürlich immer enger und dazwischen liegt man tatsächlich nahe bei $\frac{l(\Lambda_d)}{\text{vol}\mathfrak{F}}$. Tatsächlich existieren Grenzwerte im distributionellen Sinn. Genau genommen reicht es, die Fourierkoeffizienten über die y -Achse zu integrieren, um strenge Konvergenz zu haben, d.h. es existieren die Grenzwerte $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\int_Y^\infty c_k(y, d) \frac{dy}{y^2}}{l(\Lambda_d)}$.

Der erste Versuch, die Fourierkoeffizienten der Distributionenfolge $(\mathfrak{D}_{d,y})_{d \in \mathbb{D}}$ näher zu bestimmen, führte auf Reihenentwicklungen mit Hilfe verallgemeinerter Besselfunktionen, vgl. Anhang B.3. Sie haben jedoch gegenüber den bekannten Voronoiformeln für die Teilersummen den großen Nachteil, dass man keine effektiven Fehlerabschätzungen erhält. Erst viel später kam mir die Idee, Beweismethoden für den Primzahlsatz zu verwenden ([Karatsuba, Chapter V, §2 The Prime Number Theorem]), die für den konstanten Fourierkoeffizienten tatsächlich zum Ziel führen.

Proposition 1.4.1. Für $0 < Y_1 < Y_2$ ist die Bogenlänge von $\Lambda_D, D \in \mathbb{D}^+, D \neq \square, D \rightarrow \infty$ in Streifen $\mathfrak{F}_{Y_1, Y_2} = \{z = x + iy \mid |x| < \frac{1}{2}, Y_1 < y < Y_2\}$ der oberen Halbebene flächenmäßig gleichverteilt:

$$\int_{\mathfrak{F}_{Y_1, Y_2}} \mathfrak{D}_D(z) d\mu \stackrel{D \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\text{vol}(\mathfrak{F}_{Y_1, Y_2})}{\text{vol}(\mathfrak{F})} l(\Lambda_D).$$

BEWEIS. Sei $x = \frac{\sqrt{D}}{2Y}$. Wegen $\sum'_{n \leq t} N_D(n) \stackrel{\text{HS. B.2.1}}{=} O(D^\varepsilon t^{1+\varepsilon})$ ist

$$\begin{aligned} \int_Y^\infty c_0(y, D) \frac{dy}{y^2} &= 4\sqrt{D} \sum_{n=1}^{\frac{\sqrt{D}}{2Y}} N_D(n) \int_Y^{\frac{\sqrt{D}}{2n}} \frac{dy}{y\sqrt{D-4n^2y^2}} \stackrel{\text{(D.1.1.4)}}{=} 4 \sum'_{n \leq x} N_D(n) \operatorname{arcosh} \frac{x}{n} \stackrel{\text{(A.2.2)}}{=} 4 \int_0^x \frac{x \sum'_{n \leq t} N_D(n)}{t\sqrt{x^2-t^2}} dt \\ &\stackrel{\text{Satz B.2.4}}{=} 4x \left\{ \int_0^{D^{0,4}} \frac{\sum'_{n \leq t} N_D(n) dt}{t\sqrt{x^2-t^2}} + \int_{D^{0,4}}^x \frac{L(1, D) dt}{\zeta(2)\sqrt{x^2-t^2}} \right\} + O\left(D^{0,15} x \int_0^x \frac{dt}{t^{0,37}\sqrt{x^2-t^2}}\right) \\ &\stackrel{\text{(D.1.2.1)}}{=} \frac{4xL(1, D)}{\zeta(2)} \int_{D^{0,4}}^x \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^2}} + O\left(xD^{1,4\varepsilon} \int_0^{D^{0,4}} \frac{dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right) + O\left(\frac{1}{Y^{0,63}D^{0,035-\varepsilon}}\right) \\ &= \frac{4\pi L(1, D)}{\zeta(2)} \arcsin \frac{t}{x} \Big|_{D^{0,4}}^x + O\left(xD^{2\varepsilon} \arcsin \frac{D^{0,4}}{x}\right) + O\left(\frac{1}{Y^{0,63}D^{0,035-\varepsilon}}\right) = \frac{l(\Lambda_D)}{Y \operatorname{vol} \mathfrak{F}} + O(D^{0,4+2\varepsilon}). \end{aligned}$$

$\frac{1}{Y}$ ist der Flächeninhalt des „Rechtecks“ $-\frac{1}{2} + iY, \frac{1}{2} + iY, \frac{1}{2} + i\infty, -\frac{1}{2} + i\infty$ der oberen Halbebene \mathcal{H} , $l(\Lambda_D) = 2h(D) \log \varepsilon_0 = 2\sqrt{D}L(1, D)$ nach [Sarnak 1, Corollary 1.5]. Siegel hat gezeigt, dass es eine Konstante c mit $cD^{-\varepsilon} < L(1, D) < cD^\varepsilon$ gibt. Entsprechendes gilt für $\int_{Y_1}^{Y_2} c_0(y, D) \frac{dy}{y^2}$ und die Gleichmäßigkeit der Verteilung der Geodätischen bzgl. der y -Achse ist bewiesen. \square

Für die anderen Fourierkoeffizienten ist die Konvergenz nicht so offensichtlich. [Duke 1, Theorem 1] gilt nur für Fundamentaldiskriminanten.

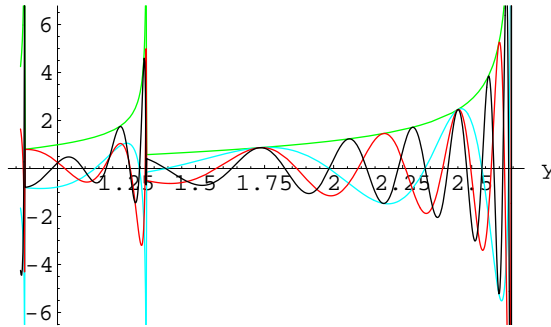


ABBILDUNG 1.4.1. $\frac{\operatorname{vol}(\mathfrak{F})}{l(\Lambda_d)} c_k(y, 28), k = 0, 1, 2, 3$

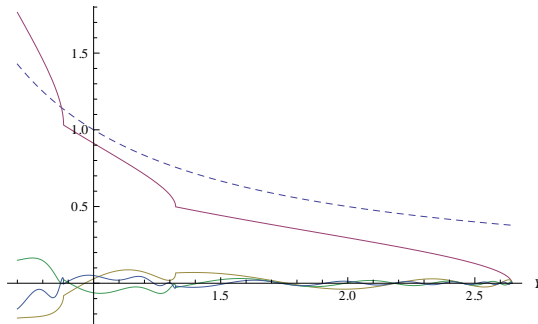


ABBILDUNG 1.4.2. $\frac{\operatorname{vol}(\mathfrak{F})}{l(\Lambda_d)} \int_Y^\infty c_k(y, 28) \frac{dy}{y^2}, k = 0, 1, 2, 3$, im Vergleich $\frac{1}{Y}$ (gestrichelt)

1.5. Verschiedenes

Die Idee, Linienintegrale mit Hilfe von Distributionen auszuschneiden, lässt sich vielfältig variieren.

1.5.1. Kerndistributionen für gewichtete automorphe Formen. Sei $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Maaßform vom Gewicht $2k$, d.h.

$$\left\{ y^2 \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) - 2k iy \frac{\partial}{\partial x} \right\} f(z) = \lambda f(z)$$

und für $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$: $f(\gamma z) = \left(\frac{Cz + D}{C\bar{z} + D} \right)^k f(z)$.

Dann ist $\frac{f(z)(az^2 + bz + c)^k}{y^k} d_Q z$ invariant unter Γ_Q , d.h. periodisch auf der Geodätischen \mathfrak{C}_Q . Daher ist folgendes Zyklenintegral

$$\frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \frac{f(z)(az^2 + bz + c)^k}{y^k} d_Q z$$

wohldefiniert. Für holomorphe Modulformen $F(z)$ ist z.B. $y^k F(z)$ eine Maaßform vom Gewicht $2k$ und man hat mit $d_Q z = -\frac{\sqrt{d}}{az^2 + bz + c} dz$ entlang der orientierten Geodätischen \mathfrak{C}_Q wieder die holomorphe Periodentheorie, [Kohnen Zagier 2, 3. Hyperbolic Periods].

Bemerkung. Man kann die Geodätische mittels Bewegungen $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ in den Standardfundamentaltbereich \mathfrak{F} verschieben und die Integrale über Geodätischenabschnitte

$$\int_{\mathfrak{C} \subset \mathfrak{C}_{Q_1}} \frac{f(z) Q_1(z, 1)^k}{y^k} d_{Q_1} z = \int_{\gamma(\mathfrak{C}) \subset \mathfrak{C}_{Q_2}} \frac{f(z) Q_2(z, 1)^k}{y^k} d_{Q_2} z, \quad Q_1 = \gamma \circ Q_2$$

dort auswerten, s. [Fricke].

Die Funktionen f können etwas allgemeiner gewählt werden. Für $k \in \mathbb{Z}$ kann man folgende Kerndistribution wählen:

Definition 1.5.1.1. Sei

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}, 2k}(z) = \sqrt{d} \sum_{Q \in \mathcal{A}} \delta \left(\frac{q(z)}{y} \right) \left(\frac{Q(z, 1)}{|Q(z, 1)|} \right)^k.$$

Satz 1.5.1.2. Für $d = \mathrm{Diskr.}(Q) \in \mathbb{D}^{0+}$ und automorph vom Gewicht $2k$ transformierende Testfunktionen f ist

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{A}, 2k}[f] := \int_{\mathfrak{F}} f(z) \mathfrak{D}_{\mathcal{A}, 2k}(z) d\mu = \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} f(z) d_{Q, 2k} z.$$

BEWEIS. Für $d \neq \square$ ist dann:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{D}_{\mathcal{A},2k}[f] &= \sqrt{d} \sum_{(a,b,c) \in \mathcal{A}} \int_{\mathfrak{F}} f(z) \frac{|az^2 + bz + c|^k}{(a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c)^k} \cdot \delta\left(\frac{a|z|^2 + bx + c}{y}\right) d\mu \\
&= \sqrt{d} \int_{\Gamma_Q \setminus \mathcal{H}} f(z) \frac{|az^2 + bz + c|^k}{(a\bar{z}^2 + b\bar{z} + c)^k} \cdot \delta\left(\frac{a|z|^2 + bx + c}{y}\right) d\mu \\
&\stackrel{(1.3.3)}{=} \sqrt{d} \int_{\varepsilon_0^{-1} \leq |w| \leq \varepsilon_0} f\left(\frac{\alpha w - \beta}{w - 1}\right) \left(\frac{\bar{w} - 1}{w - 1} \cdot \frac{|w|}{\bar{w} \operatorname{sign} a}\right)^k \cdot \delta\left(\operatorname{sign}(a) \sqrt{d} \frac{\xi}{\eta}\right) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \\
&= \frac{\sqrt{d}}{(\operatorname{sign} a)^k} \int_0^\pi \frac{\delta(\sqrt{d} \cot \theta)}{\sin^2 \theta} \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} \left(\frac{re^{-i\theta} - 1}{re^{i\theta} - 1} e^{i\theta}\right)^k f\left(\frac{\alpha re^{i\theta} - \beta}{re^{i\theta} - 1}\right) \frac{dr}{r} d\theta \\
&= i^k (\operatorname{sign} a)^k \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} \left(\frac{-ri - 1}{ri - 1}\right)^k f\left(\frac{\alpha ri - \beta}{ri - 1}\right) \frac{dr}{r} = (\operatorname{sign} a)^k \int_{i\varepsilon_0^{-1}}^{i\varepsilon_0} \left(\frac{\bar{w} - 1}{w - 1}\right)^k f\left(\frac{\alpha w - \beta}{w - 1}\right) \frac{w^k |dw|}{\eta^k \eta} \\
&\stackrel{(1.3.3)}{=} \frac{1}{d^{\frac{k-1}{2}}} \int_{\Gamma_Q \setminus \mathfrak{C}_Q} \frac{f(z) (az^2 + bz + c)^k}{y^k} d_Q z = \int_{\Lambda_d} f(z) d_{\Lambda,2k} z.
\end{aligned}$$

mit der Bewegung der oberen Halbebene wie auf S.15

$$z = T(w), T = \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, T \circ Q = (0, \sqrt{d} \operatorname{sign} a, 0).$$

Falls d eine Quadratzahl ist:

$$\begin{aligned}
\sum_{Q \sim (0,b,c)} \int_{\mathfrak{F}} f(z) \frac{|bz + c|^k}{(b\bar{z} + c)^k} \cdot \delta\left(\frac{bx + c}{y\sqrt{d}}\right) d\mu &= (\operatorname{sign} b)^k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f\left(z - \frac{c}{b}\right) \frac{|z|^k}{\bar{z}^k} \cdot \delta\left(\frac{x}{y}\right) dx \frac{dy}{y^2} \\
&= (i \operatorname{sign} b)^k \int_0^\infty f\left(-\frac{c}{b} + iy\right) \frac{dy}{y} = \int_{\mathfrak{C}_Q} f(z) d_{Q,2k} z,
\end{aligned}$$

vgl. Hilfssatz A.7.1.2 und A.7.1.4. □

Summiere über alle Formen der Diskriminante d :

$$\mathfrak{D}_{d,2k}(z) = \sqrt{d} \sum_{Q, |Q|=d} \delta\left(\frac{q(z)}{y}\right) \left(\frac{Q(z,1)}{|Q(z,1)|}\right)^k.$$

Das ist die Kernfunktion für die Summe der Integrale über alle $h(d)$ inäquivalenten Geodätischenzykel und transformiert wie eine automorphe Form vom Gewicht $2k$. Wir berechnen die Fourier-Stieltjes Reihe

Satz 1.5.1.3. Sei $k \in 2\mathbb{Z}, d \in \mathbb{D}^{0+}, f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Testfunktion, automorph vom Gewicht $2k$, d.h. $f(\gamma z) = \left(\frac{Cz + D}{C\bar{z} + D}\right)^k f(z)$ für $\gamma \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt für das Zyklenintegral

$$C_d(f) := \int_{\mathfrak{F}} f(z) \mathfrak{D}_{d,2k}(z) d\mu = \int_{\Lambda_d} f(z) d_{\Lambda,2k} z$$

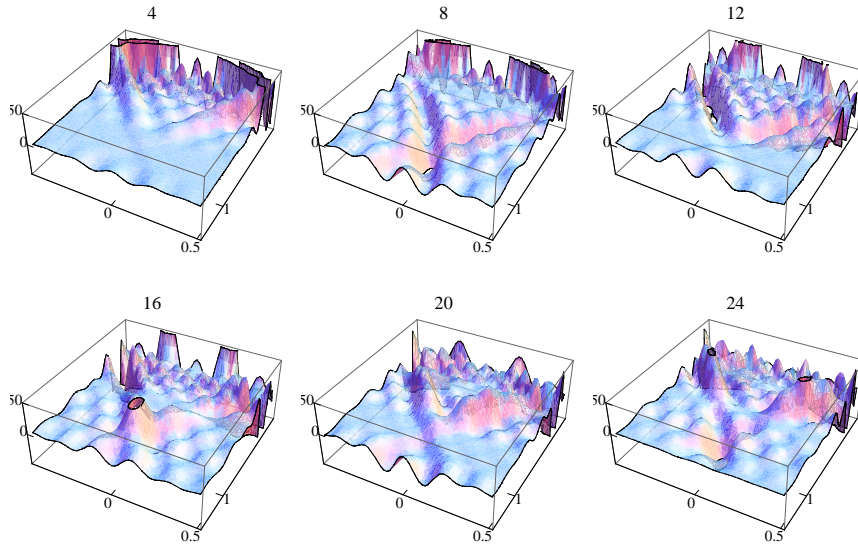


ABBILDUNG 1.5.1.1. Die ersten Terme für $|r| \leq 5$ der Fourier-Stieltjes Reihe für $\mathfrak{D}_{8,2k}$, $k = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

mit $\mathfrak{D}_{d,2k}(z) = \sqrt{d} \sum_{Q, |Q|=d} \left(\frac{Q(z, 1)}{|Q(z, 1)|} \right)^k \delta \left(\frac{q(z)}{y} \right) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{r,2k}(y, d) \cos 2\pi r x$. Für gerades k ist

$$\begin{aligned} c_{r,2k}(y, d) &= 2(-1)^{\frac{k}{2}} y \delta_{r, \sqrt{d}\mathbb{N}_0} \sqrt{d} + 4y\sqrt{d} \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{S_a(r, d)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \cos \left(\frac{\pi r \sqrt{d-4a^2y^2}}{a} - k \arccos \left(-\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \right) \\ &= 2(-1)^{\frac{k}{2}} y \delta_{r, \sqrt{d}\mathbb{N}_0} \sqrt{d} \\ &\quad + 4y\sqrt{d} \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} S_a(r, d) \left(\frac{T_k \left(\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \cos \frac{\pi r \sqrt{d-4a^2y^2}}{a}}{\sqrt{d-4a^2y^2}} - \frac{U_{k-1} \left(\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \sin \frac{\pi r \sqrt{d-4a^2y^2}}{a}}{\sqrt{d}} \right) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

dabei sind T_n und U_n Tschebyscheff-Polynome erster bzw. zweiter Art,

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1, \dots & T_{-n}(x) &= T_n(x), \\ \text{und } U_0(x) &= 1, & U_1(x) &= 2x, & U_2(x) &= 4x^2 - 1, \dots & U_{-n-1}(x) &= -U_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Für ungerades k sind die Distributionen Null.

BEWEIS. Die Fourierkoeffizienten kann man nach folgender Formel berechnen:

$$c_{r,2k}(y, d) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{D}_{d,2k}(z) e(-rx) dx.$$

Sei zunächst $d \neq \square$. Man kann die quadratischen Formen Q leicht abzählen. Für festes $a \neq 0$ ist $b \in (-|a|, |a|) \cup \{a\}$ unter der Bedingung $b^2 \equiv d \pmod{4a}$, falls die Geodätischenhalbkreise \mathfrak{C}_Q ihren Mittelpunkt in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ haben.

Für beliebigen Mittelpunkt auf der reellen Achse sind $T^n \circ Q$ mit $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ alle Formen. Ich summiere zunächst

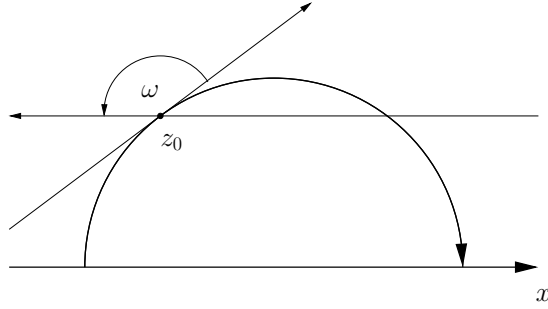


ABBILDUNG 1.5.1.2. $\omega \equiv -\arg Q(z_0, 1) \pmod{2\pi}$
 $\omega \rightarrow$ orientierte Tangente an z_0 zur neg. x -Richtung drehen

über n .

$$(1.5.1.1) \quad \sqrt{d} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta \left(\frac{T^n \circ q(z)}{y} \right) \left(\frac{T^n \circ Q(z, 1)}{|T^n \circ Q(z, 1)|} \right)^k e^{-rx} dx = \sqrt{d} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{q(z)}{y} \right) \left(\frac{Q(z, 1)}{|Q(z, 1)|} \right)^k e^{-rx} dx$$

$$= y \sqrt{d} \sum_{x_0} \frac{e^{-rx_0} Q(z_0, 1)^k}{|2ax_0 + b| |Q(z_0, 1)|^k}, \quad (\text{vgl. Hilfssatz A.7.1.4})$$

mit $x_0 = \frac{-b \mp \sqrt{d - 4a^2y^2}}{2a}$, $|a| \leq \frac{\sqrt{d}}{2y}$ (sonst kein Beitrag) und $z_0 = x_0 + iy$,

$$Q(z_0, 1) = a(x_0 + iy)^2 + b(x_0 + iy) + c = ax_0^2 + bx_0 + c - ay^2 + iy(2ax_0 + b) = y \left(-2ay \mp i\sqrt{d - 4a^2y^2} \right),$$

d.h.

$$\frac{Q(z_0, 1)}{|Q(z_0, 1)|} = \frac{-2ay \mp i\sqrt{d - 4a^2y^2}}{\sqrt{d}} = e^{\mp i\omega}$$

$$\text{mit } \omega = \omega_a = \begin{cases} \arctan \left(-\frac{\sqrt{d - 4a^2y^2}}{2ay} \right) \in (0, \frac{\pi}{2}) & \text{für } a < 0, \\ \pi + \arctan \left(-\frac{\sqrt{d - 4a^2y^2}}{2ay} \right) \in (\frac{\pi}{2}, \pi) & \text{für } a > 0, \end{cases}$$

$$(1.5.1.2) \quad \cos \omega = -\frac{2ay}{\sqrt{d}}, \quad \sin \omega = \frac{\sqrt{d - 4a^2y^2}}{\sqrt{d}},$$

Also ist (1.5.1.1) = $\frac{2y\sqrt{d} e^{\left(\frac{rb}{2a}\right)}}{\sqrt{d - 4a^2y^2}} \cos \left(\frac{\pi r \sqrt{d - 4a^2y^2}}{a} - k\omega_a \right)$. Aus

$$\cos k\omega = T_k(\cos \omega) = T_k \left(-\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) = (-1)^k T_k \left(\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right)$$

und

$$\begin{aligned} \sin k\omega &= \sin(\omega) U_{k-1}(\cos \omega) = \frac{\sqrt{d - 4a^2y^2}}{\sqrt{d}} U_{k-1} \left(-\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \\ &= (-1)^{k-1} \frac{\sqrt{d - 4a^2y^2}}{\sqrt{d}} \cdot U_{k-1} \left(\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \end{aligned}$$

folgt, wenn man über $\pm Q$, d.h. $\pm a$ summiert: (1.5.1.1)=

$$\begin{aligned}
& \frac{2y\sqrt{d} e\left(\frac{rb}{2a}\right)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \cos\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a} - k\omega_a\right) + \frac{2y\sqrt{d} e\left(-\frac{rb}{2a}\right)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \cos\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{-a} - k\omega_{-a}\right) \\
&= \frac{2y\sqrt{d} e\left(\frac{rb}{2a}\right)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a}\right) (-1)^k T_k\left(\frac{2ay}{\sqrt{d}}\right) \right. \\
&\quad \left. - \sin\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a}\right) (-1)^k \frac{\sqrt{d-4a^2y^2}}{\sqrt{d}} \cdot U_{k-1}\left(\frac{2ay}{\sqrt{d}}\right) \right\} \\
&\quad + \frac{2y\sqrt{d} e\left(-\frac{rb}{2a}\right)}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \left\{ \cos\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a}\right) T_k\left(\frac{2ay}{\sqrt{d}}\right) \right. \\
&\quad \left. + \sin\left(-\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a}\right) \frac{\sqrt{d-4a^2y^2}}{\sqrt{d}} \cdot U_{k-1}\left(\frac{2ay}{\sqrt{d}}\right) \right\} \\
&= 4y\sqrt{d} \left\{ \cos\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a}\right) T_k\left(\frac{2ay}{\sqrt{d}}\right) / \sqrt{d-4a^2y^2} \right. \\
&\quad \left. - \sin\left(\frac{\pi r\sqrt{d-4a^2y^2}}{a}\right) \cdot U_{k-1}\left(\frac{2ay}{\sqrt{d}}\right) / \sqrt{d} \right\} \cdot \begin{cases} \cos\frac{\pi rb}{a}, & 2 \mid k; \\ (-i \sin\frac{\pi rb}{a}), & \text{sonst;} \end{cases}
\end{aligned}$$

a läuft von 1 bis $\frac{\sqrt{d}}{2y}$ und b über die Restklassen $(\bmod 2a)$, $b^2 \equiv d \pmod{4a}$ und $\sum_{\substack{b(2a) \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \sin\frac{\pi rb}{a} = 0$.

Für $d = \square$ kommen zusätzlich noch die senkrechten Geodätischen $(0, b, c)$ mit $b = \pm\sqrt{d}$ dazu:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{(0, \pm\sqrt{d}, c)} \delta\left(\frac{bx+c}{y\sqrt{d}}\right) \left(\frac{bz+c}{|bz+c|}\right)^k e^{-rx} dx = y \sum_{b=\pm\sqrt{d}} \sum_{c=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(x + \frac{c}{b}\right) \left(\frac{bz+c}{|bz+c|}\right)^k e^{-rx} dx \\
&= y \sum_{b=\pm\sqrt{d}} \sum_{c=1}^{\sqrt{d}} \left(\frac{iby}{|iby|}\right)^k e\left(\frac{rc}{b}\right) = 2(-1)^{\frac{k}{2}} y \sum_{c=1}^{\sqrt{d}} e\left(\frac{rc}{\sqrt{d}}\right) = \begin{cases} 2(-1)^{\frac{k}{2}} y\sqrt{d}, & 2 \mid k, \sqrt{d} \mid r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

1.5.2. Kerndistribution für definite Formen. Später wird auch eine Kerndistribution im definiten Fall $d < 0$ benötigt:

Definition 1.5.2.1. Für $d < 0$ sei $\mathfrak{D}_d(z) := -\frac{2d}{\pi} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d} \frac{\delta\left(\left|\frac{Q(z,1)}{y}\right|^2\right)}{w_Q}$, vgl. [Zagier 6, 3, iii].

Satz 1.5.2.2. Um eine automorphe Testfunktion $f \in \mathcal{D}_0^2$ für $d < 0$ an den CM-Punkten auszuwerten, kann man gegen $\mathfrak{D}_d(z)$ integrieren.

$$C_d(f) := \sum_{\substack{z_Q \in \mathfrak{F} \\ az_Q^2 + bz_Q + c = 0 \\ (a,b,c) \in \mathcal{Q}_d}} \frac{f(z_Q)}{w_Q} = \int_{\mathfrak{F}} f(z) \mathfrak{D}_d(z) d\mu$$

BEWEIS. Durch Einführung von Normalkoordinaten $w = \xi + i\eta = \frac{z-z_Q}{z-\bar{z}_Q}$ mit der Nullstelle $z_Q = x_Q + iy_Q$ von $az^2 + bz + c$ mit positivem Imaginärteil lässt sich die obere Halbebene auf das Poincarékreismodell D abbilden und

dann Polarkoordinaten einführen. Dann ist

$$(1.5.2.1) \quad \begin{aligned} z &= \frac{w\bar{z}_Q - z_Q}{w-1}, & q(z_Q) &= -\frac{d}{2a}, & Q(z, 1) &= -\frac{2q(z_Q)w}{(w-1)^2}, \\ q(z) &= a|z|^2 + bx + c = q(z_Q) \frac{|w|^2 + 1}{|w-1|^2}, & \operatorname{Im} z &= y_Q \frac{1 - |w|^2}{|w-1|^2}, \\ d\mu &= \frac{4d\xi d\eta}{(1 - |w|^2)^2}, & w &= re^{i\theta}, & d\xi d\eta &= r dr d\theta \end{aligned}$$

vgl. [Maafß 4, Ch. I, §1], und für automorphe Testfunktionen f

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{H}} f(z) \sum_{(a,b,c) \in \mathcal{Q}_d} \delta \left(\left| \frac{az^2 + bz + c}{y} \right|^2 \right) d\mu = \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d} \int_{\mathfrak{H}} f(z) \sum_{\gamma \in \Gamma_Q \backslash \Gamma} \delta \left(\left| \frac{(\gamma \circ Q)(z, 1)}{y} \right|^2 \right) d\mu \\ &= \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{H}} f(z) \delta \left(\left| \frac{Q(z, 1)}{y} \right|^2 \right) d\mu = \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d} \int_{U(z_Q)} \delta \left(\frac{4q^2(z_Q)|w|^2}{y_Q^2(1 - |w|^2)^2} \right) \frac{4f(\cdot)}{(1 - |w|^2)^2} d\xi d\eta \\ &= \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\varepsilon \delta \left(\frac{4r^2|d|}{(1 - r^2)^2} \right) \frac{4rf(\cdot)}{(1 - r^2)^2} dr. \end{aligned}$$

Der Integrand ist rotationssymmetrisch. Träger der Distribution ist z_Q , bzw. $w = 0$, d.h. $r = 0$. Als Integrationsbereich reicht eine beliebig kleine ε -Umgebung $U(z_Q)$ des Trägers. Mit $x = 1 - r^2$ ergibt sich für das Doppelintegral:

$$4\pi \int_{1-\varepsilon}^1 \delta \left(\frac{4(1-x)|d|}{x^2} \right) f(\cdot) \frac{dx}{x^2}. \text{ Mit}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{4(1-x)|d|}{x^2}, & x_n &= 1, \\ g'(x) &= \frac{4|d|(x-2)}{x^3}, & |g'(1)| &= 4|d| \end{aligned}$$

ist nach Hilfssatz A.7.1.4: $\delta \left(\frac{4(1-x)|d|}{x^2} \right) \left[\frac{1}{x^2} \right] = \frac{1}{4|d|}$. Da $4(1-x)|d|$ punktsymmetrisch bzgl. $x = 1$ ist und $\delta(x) = \delta(-x)$, hat man für das gesuchte Integral gerade die Hälfte, also für ein $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$2\pi \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \delta \left(\frac{4(1-x)|d|}{x^2} \right) f(\cdot) \frac{dx}{x^2} = \frac{\pi}{2|d|} f(z_Q)$$

und

$$\int_{\mathfrak{H}} f(z) \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d} \frac{1}{w_Q} \delta \left(\left| \frac{az^2 + bz + c}{y} \right|^2 \right) d\mu = \frac{\pi}{2|d|} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d} \frac{f(z_Q)}{w_Q}, \text{ vgl. [Zagier 1, (38)].}$$

□

Satz 1.5.2.3. Für $d < 0$ ist

$$C_d(\mathbb{E}(\cdot, s)) = 2 \left(\frac{|d|}{4} \right)^{\frac{s}{2}} \frac{\zeta(s, d)}{\zeta(2s)}.$$

BEWEIS. Mit dem ersten Teil des Satzes und [Zagier 6, Example 1] ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{F}} \mathbf{E}(z, s) \mathfrak{D}_d(z) d\mu &= 2 \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d^+} \frac{\mathbf{E}(z_Q, s)}{w_Q} = \frac{1}{\zeta(2s)} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d^+} \frac{y_Q^s}{w_Q} \sum'_{m,n} \frac{1}{|mz_Q + n|^{2s}} \\ &= \frac{1}{\zeta(2s)} \left(\frac{|d|}{4} \right)^{\frac{s}{2}} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d^+} \frac{1}{w_Q} \sum'_{m,n} \frac{1}{Q(m,n)^s} = \frac{2}{\zeta(2s)} \left(\frac{|d|}{4} \right)^{\frac{s}{2}} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d^+} \sum'_{(m,n)/\Gamma_Q} \frac{1}{Q(m,n)^s} \\ &= 2 \left(\frac{|d|}{4} \right)^{\frac{s}{2}} \frac{\zeta(s, d)}{\zeta(2s)} \text{ in den Bezeichnungen von [Zagier 5, Prop. 3]} \end{aligned}$$

mit $\mathcal{Q}_d^+ = \{Q \text{ pos. definit} \mid |Q| = d\}$, $d < 0$. □

1.5.3. Hyperzyklen. In der hyperbolischen Geometrie haben Parallele keinen konstanten Abstand. Die Kurve, die von einer Geodätischen konstanten Abstand hat, ist keine Geodätische, sondern ein Hyperzykel.

1.5.3.1. *Kernfunktion und Eigenschaften.* Ähnliche Überlegungen wie für die Geodätische lassen sich allgemein für Hyperzyklen $\mathfrak{C}_{Q,\theta}$ mit Peripheriewinkel $0 < \theta < \pi$ anstellen.

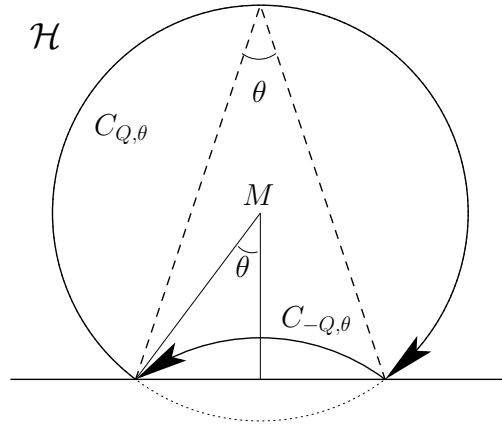


ABBILDUNG 1.5.3.1.1. Hyperzykel zu $Q = (a, b, c)$ und $-Q$ mit $a > 0$

Der Mittelpunkt M des euklidischen Kreises ist $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{\sqrt{d}}{2a} \cot \theta\right)$. Die Hyperzykelgleichung ist

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{d}}{2a} \cot \theta\right)^2 = \frac{d}{4a^2 \sin^2 \theta}$$

bzw.

$$\mathfrak{C}_{Q,\theta} : \quad a|z|^2 + bx + c = \sqrt{d}y \cot \theta$$

mit $d = b^2 - 4ac \in \mathbb{D}^{0+}$. Die Geodätische erscheint vom Hyperzykel unter dem *hyperbolischen* Winkel 2θ .

Hilfssatz 1.5.3.1.1. *Der Hyperzykel hat den konstanten Abstand $\operatorname{arsinh} |\cot \theta|$ von der Geodätischen \mathfrak{C}_Q .*

BEWEIS. Eine Bewegung $\gamma \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ bildet $\mathfrak{C}_{Q,\theta}$ auf $\mathfrak{C}_{\gamma^{-1} \circ Q, \theta}$ ab. Durch eine Bewegung der hyperbolischen Ebene lässt sich Geodätische \mathfrak{C}_Q und Hyperzykel auf $\mathfrak{C}_{(1,0,-1)} : |z|^2 - 1 = 0$ und $\mathfrak{C}_{(1,0,-1),\theta} : |z|^2 - 1 = 2y \cot \theta$ und ein beliebiger Punkt der Geodätischen \mathfrak{C}_Q auf i abbilden. Nach dem Peripheriewinkelsatz ist $i \cot \frac{\theta}{2}$ der „höchste“ Punkt des Hyperzykels $\mathfrak{C}_{(1,0,-1),\theta}$. Der hyperbolische Kreis (auch ein euklidischer Kreis) um i durch $i \cot \frac{\theta}{2}$ liegt innerhalb des Hyperzykels, daher ist der Abstand \mathfrak{d} von Kreis zu Hyperzykel gleich dem Abstand der Punkte i und $i \cot \frac{\theta}{2}$

$$\mathfrak{d} = \left| \int_1^{\cot \frac{\theta}{2}} \frac{dy}{y} \right| = \left| \log \cot \frac{\theta}{2} \right|, \quad \sinh \mathfrak{d} = \left| \frac{\cot \frac{\theta}{2} - \tan \frac{\theta}{2}}{2} \right| = \left| \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right| = \left| \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right|.$$

□

Sei zunächst $a \neq 0$. Betrachte die Hyperzyklen im Standardfundamentalebene \mathfrak{F} , vgl. Abb. 1.3.1 auf Seite 16. Immer wenn ein Hyperzykel \mathfrak{F} durch eine Seite verlässt ([Fricke]), bewirkt eine Abbildung durch die entsprechenden Seitenidentifizierenden $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf die zugrunde liegende quadratische Form $Q = (a, b, c)$, dass die Fortsetzung wieder in \mathfrak{F} liegt; bei der Spiegelung am Einheitskreis $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ wechselt das Vorzeichen von a und der Peripheriewinkel beträgt $\pi - \theta$. Dabei ist die Länge des Hyperzykelabschnitts dieselbe, ob man sie in der oberen Halbebene oder im Fundamentalebene misst (bewegungsinvariant). Nach Anwendung des Automorphismus $\gamma_Q = \begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix}$ schließt sich der Hyperzykel bezüglich $SL_2(\mathbb{Z})$. Die Hyperzyklen sind im Fundamentalebene periodisch. Die Einheitengruppe von $\mathfrak{C}_{Q,\theta}$ ist Γ_Q , unabhängig vom Winkel θ . Für $a = 0$ hat man euklidische Geraden $y = \pm \tan \theta (x + \frac{c}{b})$. Die Orientierung soll so sein, dass sie für $b > 0$ auf die reelle x -Achse zu, für $b < 0$ von ihr weg ins Unendliche laufen. Sie sind nicht periodisch, sondern laufen von Spitze zu

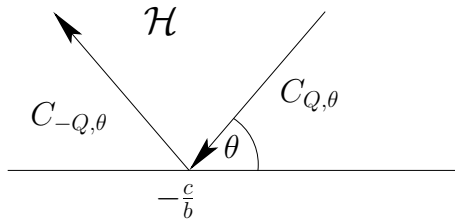


ABBILDUNG 1.5.3.1.2. Hyperzykel zu $Q = (0, b, c)$, $b > 0$

Spitze des Standardfundamentalebene \mathfrak{F} und sind unendlich lang.

Die Länge des Hyperzykels innerhalb einer offenen Menge $U \in \mathfrak{F}$ lässt sich wieder als das Skalarprodukt von χ_U mit einer geeigneten Kernfunktion $\mathfrak{D}_{d,\theta}$ darstellen. Dazu wähle

$$(1.5.3.1.1) \quad \mathfrak{D}_{d,\theta}(z) := \frac{\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{|Q|=d} \delta \left(\frac{q(z) - \sqrt{d}y \cot \theta}{y} \right)$$

Die Kerndistribution hat ähnliche Eigenschaften wie im Spezialfall $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Satz 1.5.3.1.2. Für automorphe Testfunktionen $F : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{D}_{d,\theta}(z) F(z) d\mu = \int_{\Lambda_{d,\theta}} F(z) d_{\Lambda,\theta} z.$$

Die Kerndistribution für die Hyperzyklen hat folgende Fourierentwicklung:

$$\mathfrak{D}_{d,\theta} = \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_{r,\theta}(y, d) \cos 2\pi r x$$

mit

$$c_{r,\theta}(y, d) = \frac{2y\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{a=-\frac{\sqrt{d}}{2y} \tan \frac{\theta}{2}}^{\frac{\sqrt{d}}{2y} \cot \frac{\theta}{2}} \frac{S_a(r, d) \cos \frac{\pi r}{a} \sqrt{d + 4ay\sqrt{d} \cot \theta - 4a^2 y^2}}{\sqrt{d + 4ay\sqrt{d} \cot \theta - 4a^2 y^2}} + \begin{cases} \frac{2y\sqrt{d}}{\sin \theta} \cos(2\pi r y \cot \theta), & \sqrt{d} \mid r, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. Sei zunächst $d \neq \square$. Wählt man $w = \xi + i\eta = T^{-1}z = \frac{z-\beta}{z-\alpha} = \frac{a|z|^2+bx+c+iy\sqrt{d}}{a|z-\alpha|^2}$, α und β die beiden Lösungen von $Q(x, 1) = ax^2 + bx + c = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}_{d,\theta}[F] &= \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \sum_{(a,b,c) \sim Q} \int_{\mathfrak{F}} \delta \left(\frac{a|z|^2+bx+c}{y\sqrt{d}} - \cot \theta \right) F(z) d\mu \\ &= \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_{\Gamma_Q \setminus \mathcal{H}} \delta \left(\frac{a|z|^2+bx+c}{y\sqrt{d}} - \cot \theta \right) F(z) d\mu \\ &= \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_{\varepsilon_0^{-1} \leq |w| \leq \varepsilon_0} \delta \left(\text{sign}(a) \frac{\xi}{\eta} - \cot \theta \right) F(w) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \\ &= \sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \int_0^\pi \frac{\delta(\text{sign}(a) \cot \phi - \cot \theta)}{\sin^2 \theta} d\theta \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} F(r, \theta) \frac{dr}{r} = \int_{\Lambda_{d,\theta}} F(z) d_{\Lambda,\theta} z. \end{aligned}$$

Für $d = \square$ sind die Geodätischen unendlich lang. Es gibt \sqrt{d} Äquivalenzklassen und wie auf S.16 ist

$$\sum_{Q \sim (0,b,c)} \int_{\mathfrak{F}} \delta \left(\frac{bx+c}{y\sqrt{d}} - \cot \theta \right) F(z) d\mu = \int_{\mathcal{H}} \delta \left(\frac{bx}{y\sqrt{d}} - \cot \theta \right) F \left(z - \frac{c}{b} \right) d\mu = \int_{\mathfrak{C}_{Q,\theta}} F(z) d_{Q,\theta} z.$$

Für die Fourierkoeffizienten hat man, falls $d \neq \square$:

$$\frac{\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{a \neq 0} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{q(z) - y\sqrt{d} \cot \theta}{y} \right) e(-rx) dx = 2 \sum_{a \neq 0} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \frac{\sqrt{d} y e(-rx_0)}{\sin \theta |2ax_0 + b|}$$

mit $x_0 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c - \sqrt{d}y \cot \theta + ay^2)}}{2a}$.

Lösungen x_0 existieren, falls $4a^2y^2 - 4a\sqrt{d}y \cot \theta - d < 0$ oder

$$-\frac{\sqrt{d}}{2y} \tan \frac{\theta}{2} < a < \frac{\sqrt{d}}{2y} \cot \frac{\theta}{2}.$$

also die Behauptung des Satzes, wenn man über alle $a, b \pmod{2a}, b^2 \equiv d \pmod{4a}$ summiert.

Für $d = \square, a = 0$ kommt noch etwas dazu:

$$\frac{\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{b = \pm\sqrt{d}, c} \delta \left(\frac{bx+c - y\sqrt{d} \cot \theta}{y} \right)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{b = \pm\sqrt{d}, c} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta \left(\frac{bx+c - y\sqrt{d} \cot \theta}{y} \right) e(-rx) dx \\ &= \frac{1}{\sin \theta} \sum_c \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \delta \left(x + \frac{c}{\sqrt{d}} - y \cot \theta \right) + \delta \left(x - \frac{c}{\sqrt{d}} + y \cot \theta \right) \right\} y e(-rx) dx \\ &= \frac{2y}{\sin \theta} \sum_{c=0}^{\sqrt{d}-1} \cos \left(\frac{2\pi r}{\sqrt{d}} (c - y\sqrt{d} \cot \theta) \right) \\ &= \frac{2y}{\sin \theta} \left(\cos(2\pi r y \cot \theta) \sum_c \cos \frac{2\pi r c}{\sqrt{d}} + \sin(2\pi r y \cot \theta) \sum_{c(\sqrt{d})} \sin \frac{2\pi r c}{\sqrt{d}} \right) \\ &= \begin{cases} \frac{2y\sqrt{d}}{\sin \theta} \cos(2\pi r y \cot \theta), & \text{für } \sqrt{d} \mid r, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \text{ da } \sum_c \left(\frac{rc}{\sqrt{d}} \right) = \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{für } \sqrt{d} \mid r, \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases} \end{aligned}$$

Im Falle des konstanten Terms ($r = 0$) kommt man auf das gleiche Ergebnis, wenn man die Ableitung des Linienelements nach y auf dem Hyperzykel $\mathfrak{C}_{(a,b,c),\theta}$ summiert über $a \neq 0, b \pmod{2a}, b^2 \equiv d \pmod{4a}$. Für das Bogenlängenelement auf dem Hyperzykel ergibt sich:

$$\begin{aligned} 2ax \, dx + 2ay \, dy + b \, dx &= \sqrt{d} \cot \theta \, dy \\ \frac{ds}{dy} &= \frac{1}{y} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{\sqrt{d}}{y \sin \theta \sqrt{d + 4a\sqrt{d}y \cot \theta - 4a^2y^2}}. \end{aligned}$$

Für $a = 0$ kommt noch $2\sqrt{d} \frac{ds}{dy} = 2\sqrt{d} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{d} \cot \theta}{b}\right)^2}}{y} = \frac{2\sqrt{d}}{y \sin \theta}$ dazu. \square

Satz 1.5.3.1.3. *Sei $D \in \mathbb{D}^+$ eine Diskriminante. Für $D \rightarrow \infty, D \neq \square$ gibt es Gleichverteilung der Hyperzyklen $\Lambda_{D,\theta}$ im Standardfundamentbereich \mathfrak{F} bezüglich der y -Richtung.*

BEWEIS. Für Fundamentaldiskriminanten ist die Gesamtlänge der Hyperzyklen in $\Lambda_{D,\theta}$ gleich $\frac{2\sqrt{D}L(1,D)}{\sin \theta}$ und für die Bogenlänge eines Hyperzykels in $\{z \mid z \in \mathcal{H} \wedge \text{Im } z > Y\}$:

$$2 \int_Y^\infty \frac{ds}{dy} \cdot dy = \begin{cases} \frac{2\sqrt{D}}{\sin \theta} \int_Y^{\frac{\sqrt{D}}{2a} \cot \frac{\theta}{2}} \frac{dy}{y \sqrt{D + 4a\sqrt{D} \cot \theta \cdot y - 4a^2y^2}}, & \text{für } a > 0; \\ \frac{2\sqrt{D}}{\sin(\pi-\theta)} \int_Y^{\frac{\sqrt{D}}{2|a|} \cot \frac{\pi-\theta}{2}} \frac{dy}{y \sqrt{D + 4|a|\sqrt{D} \cot(\pi-\theta) \cdot y - 4a^2y^2}}, & \text{für } a < 0. \end{cases}$$

Zu festem $-\frac{\sqrt{d}}{2y} \tan \frac{\theta}{2} < a < \frac{\sqrt{d}}{2y} \cot \frac{\theta}{2}$ gibt es genau $N_D(a)$ Hyperzyklen in $\Gamma_\infty \setminus \{z \mid z \in \mathcal{H} \wedge \text{Im } z > Y\}$. Daher ist die gesamte Bogenlänge aller Hyperzykel in $Q \in \Lambda_{D,\theta}$ mit Winkel θ in $\mathfrak{F}_Y = \left\{z \in \mathcal{H} \mid |\text{Re } z| \leq \frac{1}{2}, \text{Im } z \geq Y\right\}$ mit Hilfe der Integralformel (D.1.1.4) im Anhang:

$$(1.5.3.1.2) \quad \begin{cases} \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{D}}{2Y} \cot \frac{\theta}{2}} N_D(a) \frac{2}{\sin \theta} \text{arcosh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2aY} \sin \theta + \cos \theta \right), & a > 0, \\ \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{D}}{2Y} \cot \frac{\pi-\theta}{2}} N_D(a) \frac{2}{\sin(\pi-\theta)} \text{arcosh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2aY} \sin(\pi-\theta) + \cos(\pi-\theta) \right), & a < 0. \end{cases}$$

Diese Summen lassen sich mit Hilfe von Abelsummation (A.2.2) berechnen: $(x = \frac{\sqrt{D}}{2Y})$

$$(1.5.3.1.3) \quad \begin{aligned} \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{D}}{2Y} \cot \frac{\theta}{2}} N_D(a) \text{arcosh} \left(\frac{\sqrt{D}}{2aY} \sin \theta + \cos \theta \right) &= x \left\{ \int_0^{D^{0,4}} + \int_{D^{0,4}}^{x \cot \frac{\theta}{2}} \right\} \frac{\sum'_{n \leq t} N_D(n)}{t \sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} dt \\ \stackrel{\text{HS. B.2.1}}{=} &O \left(x D^{1,4\epsilon} \int_0^{D^{0,4}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} \right) + \frac{xL(1,d)}{\zeta(2)} \int_{D^{0,4}}^{x \cot \frac{\theta}{2}} \frac{dt}{\sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} \\ &+ O \left(x D^{0,15} \int_0^{x \cot \frac{\theta}{2}} \frac{dt}{t^{0,37} \sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} \right). \end{aligned}$$

Die Integrale lassen sich leicht abschätzen, z.B. ist

$$\int_0^{x \cot \frac{\theta}{2}} \frac{dt}{t^{0,37} \sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} = \frac{(\cot \frac{\theta}{2})^{0,63}}{x^{0,37}} \int_0^1 \frac{dt}{T^{0,37} \sqrt{(1-T)(1+T \cot^2 \frac{\theta}{2})}}$$

mit $T = \frac{t}{x} \tan \frac{\theta}{2}$ und

$$\int_0^1 \frac{dt}{T^{0,37} \sqrt{(1-T)(1+T \cot^2 \frac{\theta}{2})}} \leq \int_0^1 \frac{dt}{T^{0,37} \sqrt{1-T}} = B\left(\frac{1}{2}; 0, 63\right) = O(1).$$

Wegen

$$\arcsin\left(\frac{D^{0,4}}{x} \sin \theta - \cos \theta\right) = \arcsin(-\cos \theta) + O_\theta\left(\frac{D^{0,4}}{x}\right) = \theta - \frac{\pi}{2} + O_\theta\left(\frac{D^{0,4}}{x}\right)$$

kann man die Zeile (1.5.3.1.2) mit (1.5.3.1.3) wie folgt fortsetzen

$$\begin{aligned} &= xD^{2\varepsilon} \cdot O_\theta\left(\frac{D^{0,4}}{x}\right) + \frac{xL(1, d)}{\zeta(2)} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\theta - \frac{\pi}{2} + O_\theta\left(\frac{D^{0,4}}{x}\right) \right) \right\} + O_\theta(x^{0,63} D^{0,15}) \\ &\quad + \frac{xL(1, d)}{\zeta(2)} \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \theta - \frac{\pi}{2} + O_{\pi-\theta}\left(\frac{D^{0,4}}{x}\right) \right) \right\} = \frac{\pi xL(1, d)}{\zeta(2)} + O_\theta(D^{0,47}). \end{aligned}$$

Also ist die Bogenlänge der Hyperzyklen in $\mathfrak{F}_Y \sim \frac{\sqrt{D}L(1, d)\pi}{\zeta(2)Y \sin \theta}$. Das ist aber gerade die Fläche von \mathfrak{F}_Y im Verhältnis zur Gesamtfläche von \mathfrak{F} mal der Gesamtbogenlänge des Hyperzykels im Fundamentalebereich. \square

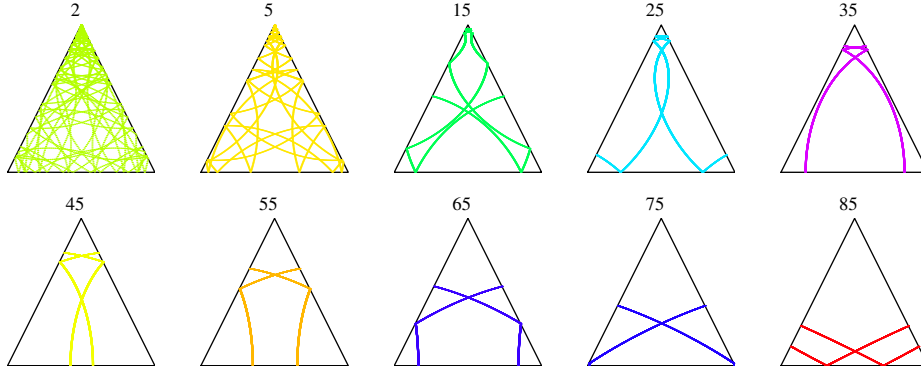


ABBILDUNG 1.5.3.1.3. Hyperzyklen zu $d = 5$, θ und $(180^\circ - \theta)$ ergeben dasselbe Bild.

Die Kerndistribution für höheres Gewicht k ist

$$\mathfrak{D}_{d,2k,\theta}(z) := \frac{\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{Q, |Q|=d} \delta\left(\frac{q(z)}{y} - \sqrt{d} \cot \theta\right) \frac{Q(z, 1)^k}{|Q(z, 1)|^k}.$$

Ähnlich dem Beweis von Satz 1.5.1.3 lassen sich wieder die Fourierkoeffizienten berechnen. Der konstante Fourierkoeffizient von $\mathfrak{D}_{d,2k,\theta}$ ist z.B.:

$$c_{0,2k,\theta}(y, d) = \frac{2y\sqrt{d}}{\sin \theta} \left\{ \delta_{d,\square} \cos(k\theta) + \sum'_{a=-\frac{\sqrt{d}}{2y} \tan \frac{\theta}{2}}^{\frac{\sqrt{d}}{2y} \cot \frac{\theta}{2}} N_d(a) \frac{T_{|k|}\left(\cos \theta - \frac{2ay \sin \theta}{\sqrt{d}}\right)}{\sqrt{d + 4ay\sqrt{d} \cot \theta - 4a^2 y^2}} \right\}.$$

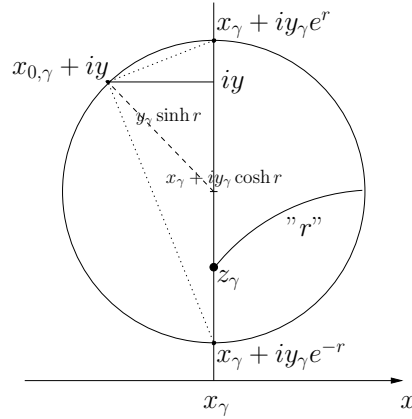
1.5.4. Hyperbolische Kreise. Der Kreis $\mathfrak{C}_{z_1, r}$ vom Radius r um den Punkt $z_1 = x_1 + iy_1$ der oberen Halbebene $\mathcal{H} = \{z = x + iy | y > 0\}$, s. Abb. 1.5.4.1, ist die Nullstellenmenge von

$$(1.5.4.1) \quad \mathfrak{Q}_{z_1, r}(z) = (x - x_1)^2 + (y - y_1 \cosh r)^2 - y_1^2 \sinh^2 r = |z|^2 - 2x_1 x - 2y_1 \cosh r \cdot y + |z_1|^2.$$

Bemerkung. Für Details über Kreise in der hyperbolischen Halbebene \mathcal{H} vgl. [Iwaniec 2, 1.1 The Upper Half-Plane].

Das totale Differenzial $d\mathfrak{Q}_{z_1, r}$ ergibt sich zu $2(x - x_1) dx + 2(y - y_1 \cosh r) dy$, d.h. die Ableitung der Bogenlänge von $\mathfrak{C}_{z_1, r}$ ist

$$\frac{d_{\mathfrak{C}} z}{dy} := \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y dy} = \frac{\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1 \cosh r)^2}}{y |x - x_1|} = \frac{y_1 \sinh r}{y |x - x_1|} \quad \text{mit (1.5.4.1).}$$

ABBILDUNG 1.5.4.1. Kreis um $z_\gamma \in \mathcal{H}$ mit Radius r

Das kann man auch mit folgender Kerndistribution erreichen:

$$\mathfrak{d}(z_1, r, z) := y_1 \sinh r \cdot \delta \left(\frac{|z|^2 - 2x_1 x - 2y_1 \cosh r \cdot y + |z_1|^2}{y} \right).$$

Definition 1.5.4.1.

$$\mathfrak{D}(z_1, r; z) := y_1 \sinh r \sum_{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \{\pm I\}} \delta \left(\frac{\gamma \circ \mathfrak{Q}_{z_1, r}}{y} \right)$$

Hilfssatz 1.5.4.2. Für automorphe Testfunktionen f ist

$$\int_{\mathfrak{F}} f(z) \mathfrak{D}(z_1, r, z)(z) d\mu = \int_{\mathfrak{C}_{z_1, r}} f(z) d\mathfrak{C}z.$$

BEWEIS. Man hat

$$\int_{\mathfrak{C}_{z_1, r}} f(z) d\mathfrak{C}z = \int_{\mathcal{H}} f(z) \mathfrak{d}(z_1, r, z) d\mu,$$

weil

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{H}} f(z) \mathfrak{d}(z_1, r, z) d\mu &= y_1 \sinh r \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \int_{-\infty}^\infty \delta \left(\frac{|z|^2 - 2x_1 x - 2y_1 \cosh r \cdot y + |z_1|^2}{y} \right) f(z) dx \\ &= y_1 \sinh r \int_{y_1 e^{-r}}^{y_1 e^r} f(z) \frac{y}{|x_0 - x_1| y^2} dy = \int_{\mathfrak{C}_{z_1, r}} f(z) d\mathfrak{C}z \end{aligned}$$

nach Abschnitt A.7.1, und $x_0 = x_1 + \sqrt{-y_1^2 + 2y_1 \cosh r y - y^2}$. Um das Rankin-Selberg Verfahren anwenden zu können, muss man die Distribution noch symmetrisieren. Sei $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Die Punkte von $\gamma(\mathfrak{C}_r)$ erfüllen folgende Gleichung

$$\begin{aligned} &|\gamma^{-1}z|^2 - 2x_1 \operatorname{Re} \gamma^{-1}z - 2y_1 \cosh r \operatorname{Im} \gamma^{-1}z + |z_1|^2 = 0 \\ \Leftrightarrow &(\gamma^{-1} \circ \mathfrak{Q}_{z_1, r})(z) := |-cz + a|^2 \left(|\gamma^{-1}z|^2 - 2x_1 \operatorname{Re} \gamma^{-1}z - 2y_1 \cosh r \operatorname{Im} \gamma^{-1}z + |z_1|^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Dann ist $\mathfrak{Q}_{z_1, r}(\gamma z) = \frac{\gamma(z) \circ \mathfrak{Q}_{z_1, r}}{|cz + d|^2}$, also $\frac{\mathfrak{Q}_{z_1, r}(\gamma z)}{\operatorname{Im} \gamma z} = \frac{\gamma(z) \circ \mathfrak{Q}_{z_1, r}}{y}$. $\gamma(\mathfrak{C}_r)$ ist ein hyperbolischer Kreis vom Radius r um γz_1 . Die Punkte dieses Kreises in \mathcal{H} sind außerdem die Nullstellenmenge von

$$\mathfrak{Q}_{z_\gamma, r}(z) = (x - x_\gamma)^2 + (y - y_\gamma \cosh r)^2 - y_\gamma^2 \sinh^2 r$$

mit $x_\gamma + iy_\gamma = \gamma(z_1)$.

□

Zyklenintegrale

Man beweist die Funktionalgleichung vieler Zetafunktionen, indem man die Mellintransformation einer entsprechenden Thetareihe bildet. Für etliche Thetareihen kennt man das Transformationsverhalten. Bewegt man den Integrationsweg der Mellintransformation in der oberen Halbebene \mathcal{H} , so erhält man Zyklenintegrale über Geodätische. Die Mellintransformation von holomorphen Modulformen hat einige bemerkenswerte Eigenschaften, s. [Koblitz, Ch.III, 3, Weil's Theorem]. In diesem Zusammenhang gibt es einige Forschungen mit Integralen von holomorphen Modulformen vom Gewicht $2k$, $k \in \mathbb{N}^{\geq 2}$, vgl. [Kohnen Zagier 2, 3. Hyperbolic Periods], [Fricke]. Ähnlich dem Stokeschen Integralsatz kann man auch hier die eindimensionalen Kurvenintegrale

$$\int_{\Lambda_d} f(z) (az^2 + bz + c)^{k-1} dz$$

durch zweidimensionale Integrale über \mathfrak{F} ausdrücken. Man bildet das Petersson-Skalarprodukt mit der Kernfunktion

$$f_{k,d}(z) := \frac{2^{2k-2} d^{k-\frac{1}{2}}}{\pi \binom{2k-2}{k-1}} \sum_{b^2-4ac=d} \frac{1}{(az^2 + bz + c)^k}, \quad k \text{ gerade, vgl. [Zagier 1]}.$$

Wie schon Shintani bemerkt hat, lassen sich diese Zyklenintegrale zu einer erzeugenden Funktion zusammenfassen

$$\sum_{\substack{d \equiv 0,1 \\ \pmod{4}}} \left(\int_{\Lambda_d} f(z) Q(z,1)^{k-1} dz \right) e(d\tau).$$

Diese Funktion ist eine Spitzenform vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ für $\Gamma_0(4)$, wenn f Spitzenform vom Gewicht $2k$ ist (Shintani-Lift, vgl. [Shintani], [Kohnen 2, (55) f.], Kap. 3). Entsprechend hat dieser Lift die Kernfunktion

$$\sum_{\substack{d > 0 \\ d \equiv 0,1 \pmod{4}}} f_{k,d}(z) e(-d\bar{\tau}).$$

Interessanterweise gibt es auch für nicht-holomorphe automorphe Funktionen vergleichbare Ergebnisse. Die Mellintransformation entspricht einem inneren Produkt gegen eine Maaßform im eindimensionalen hyperbolischen Raum (=der Geodätischen). Die Berechnung der in einer Umgebung U enthaltenen Bogenlänge ist ein Beispiel für die Berechnung von Zyklenintegralen über die nicht-holomorphe Funktion $\chi_U(z)$.

- In diesem Kapitel ist oft die Äquivalenz von quadratischen Formen bzw. Idealen in weiterem Sinne zu verstehen.
- Die Integrationswege der Zyklenintegrale liegen i.a. auf Geodätischen $\mathfrak{C}_{\mathbb{Q}}$ der oberen Halbebene, nicht unbedingt im Fundamentalbereich.

2.1. Eisensteinreihen

2.1.1. Idealklassen und ihre Zetafunktionen. In [Buell, Zagier 7] wird auf die Zusammenhänge zwischen Geodätischen $\mathfrak{C}_Q : a|z|^2 + bx + c = 0$, den quadratischen Formen (a, b, c) positiver Fundamentaldiskriminante $d = b^2 - 4ac$ und den dazugehörigen Idealen eingegangen. Entscheidend ist die Äquivalenzrelation auf Formen und Idealen, die sich gegenseitig entsprechen:

quadr.	Form	Ideal $\subset \mathcal{O}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}$
Q	(a, b, c)	\mathfrak{a}
Q'	$(a, -b, c)$	\mathfrak{a}' ...konjugiertes Ideal
Q^*	$(-a, b, -c)$	$(\sqrt{d})\mathfrak{a}$
$-Q$	$(-a, -b, -c)$	$(\sqrt{d})\mathfrak{a}'$

Die Geodätischen entsprechen den Äquivalenzklassen. Diese Äquivalenz im engeren Sinne wird durch $SL_2(\mathbb{Z})$ -Matrizen vermittelt. Es gibt eine zweite Äquivalenz im weiteren Sinne, indem man noch Matrizen der Determinante -1 hinzunimmt. Diese Äquivalenz im weiteren Sinne entspricht eher den analytischen Formeln bei den Zyklenintegralen, während die Äquivalenz im engeren Sinne eine einfachere Entsprechung auf Seiten der quadratischen Formen hat. Die Formen $Q, Q', Q^*, -Q$ können paarweise inäquivalent im engeren Sinne sein, während sie im weiteren Sinne alle äquivalent sind. Auch diese zweite Äquivalenz findet gleichzeitig auf den Geodätischen und den Idealen statt. Eine wesentliche Rolle spielt die Automorphismengruppe der quadratischen Form bzw. die Einheiten des quadratischen Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, welche mit den Lösungen der Pellschen Gleichung

$$(2.1.1.1) \quad t^2 - du^2 = 4 \quad (\text{im engeren Sinn})$$

$$(2.1.1.2) \quad t^2 - du^2 = \pm 4 \quad (\text{im weiteren Sinn})$$

zu tun haben. Sei d eine Fundamentaldiskriminante, (t_0, u_0) die kleinste Lösung der ersten Gleichung (2.1.1.1) und (t_1, u_1) die kleinste Lösung von Gleichung (2.1.1.2) in positiven Zahlen. Sei $\varepsilon_0 := \frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}, \varepsilon_{0,2} := \frac{t_1 + u_1\sqrt{d}}{2}$. Bezeichne $N = N_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}}$ die Normabbildung.

$$1) \quad N(\varepsilon_{0,2}) = -1 :$$

Das Erzeugende der Einheitengruppe von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist $\varepsilon_{0,2}$ und $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0,2}^2$ erzeugt die Einheiten positiver Norm, vgl. [Buell, Theorem 3.18]. Die Automorphismengruppe im weiteren Sinn $\Gamma_{Q,2}$ wird erzeugt von $\gamma_{Q,2}$. Die Automorphismengruppe im engeren Sinn Γ_Q wird erzeugt von $\gamma_Q = \gamma_{Q,2}^2$. Der Zykel (im engeren Sinne) äquivalenter quadratischer Formen, angefangen von einer reduzierten¹ Form $Q = (a, b, c)$, besteht aus zwei analogen Hälften. Die zweite Hälfte beginnt mit $Q^* := \gamma_{Q,2} \circ Q = (-a, b, -c)$. Die Geodätische im weiteren Sinn $\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q$ ist ein Stück von $z_0 \in \mathcal{H}$ bis $\gamma_{Q,2} z_0 \in \mathcal{H}$ und wegen $\gamma_{Q,2}^2 = \gamma_Q$ ist das genau eine Hälfte der spiegelsymmetrischen Geodätischen $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$ im engeren Sinne. Entspricht die Form Q dem Ideal \mathfrak{a} , so entspricht Q^* dem äquivalenten Ideal $(\varepsilon_{0,2}\sqrt{d})\mathfrak{a} = (\sqrt{d})\mathfrak{a}$. Die quadratische Form Q^* ist $SL_2(\mathbb{Z})$ -äquivalent (i.e.S. und i.w.S.²) zu Q und die Äquivalenzklassen (von Formen wie von Idealen) im weiteren und im engeren Sinne stimmen überein. Speziell ist für die Zetafunktion einer Idealklasse \mathcal{A}

$$(2.1.1.3) \quad \zeta(\mathcal{A}, s) = \sum'_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \\ \text{ganze Ideale} \neq 0}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{2} \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu > 0}} \frac{1}{N(\mu)^s} = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{4} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \frac{1}{|N(\mu)|^s} = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{2} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_{0,2}} \frac{1}{|N(\mu)|^s}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ teilt durch die Relation $\mu \longleftrightarrow -\mu$. Die letzte Gleichheit beruht auf der Bijektion $\mu \longleftrightarrow \varepsilon_{0,2}\mu$ zwischen Elementen positiver und negativer Norm.

$$2) \quad N(\varepsilon_{0,2}) = 1 :$$

Dann ist $\varepsilon_0 = \varepsilon_{0,2}, \gamma_Q = \gamma_{Q,2}, \Gamma_Q = \Gamma_{Q,2}$. Die quadratische Form Q entspreche dem ganzen Ideal \mathfrak{a} . Das i.w.S. äquivalente Ideal $(\sqrt{d})\mathfrak{a}$ ist i.e.S. nicht äquivalent, denn aus $(\mu)\mathfrak{a} = (\sqrt{d})\mathfrak{a}$ folgt wegen der Eindeutigkeit der

¹d.h. $\mathfrak{C}_Q \cap \mathfrak{F} \neq \emptyset$

²i.e.S. im engeren Sinne, i.w.S. im weiteren Sinne

Primidealzerlegung: $(\mu) = (\sqrt{d})$ bzw. $N\mu = \pm d$. Falls $N\mu = d$, wäre $\frac{\mu}{\sqrt{d}}$ eine Einheit der Norm -1 . Wid. Das heißt, dass auch die Formen Q und Q^* verschiedenen Idealklassen (i.e.S.) angehören, z.B. \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_1^* . Die entsprechenden Geodätischen sind spiegelbildlich zueinander, in Spur und Orientierung. Die Äquivalenzklasse von \mathfrak{a} i.w.S. ist $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_1^*$: Sei $N\xi < 0$. Aus $(\xi) \mathfrak{a} \sim (\sqrt{d}) \mathfrak{a}$ i.w.S. folgt $\eta\xi\mathfrak{a} = \sqrt{d}\mathfrak{a}$ mit $N\eta = N\frac{\sqrt{d}}{\xi} > 0$, also $\xi\mathfrak{a} \sim \sqrt{d}\mathfrak{a} \subset \mathcal{A}_1^*$ i.e.S. Die Zetafunktion i.w.S. ist

$$\zeta(\mathcal{A}, s) = \sum'_{\substack{\mathfrak{a} \in \mathcal{A} \\ \text{ganz}}} \frac{1}{N(\mathfrak{a})^s} = \zeta(\mathcal{A}_1, s) + \zeta(\mathcal{A}_1^*, s)$$

mit

$$(2.1.1.4) \quad \zeta(\mathcal{A}, s) = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{2} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_{0,2}} \frac{1}{|N\mu|^s},$$

$$\zeta(\mathcal{A}_1, s) = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{2} \sum'_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu > 0}} \frac{1}{|N\mu|^s}, \quad \zeta(\mathcal{A}_1^*, s) = \frac{N((\sqrt{d})\mathfrak{a})^s}{2} \sum'_{\substack{\mu \in (\sqrt{d})\mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu > 0}} \frac{1}{|N\mu|^s} = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{2} \sum'_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu < 0}} \frac{1}{|N\mu|^s}.$$

Bemerkung (Nichtfundamentaldiskriminanten).

Falls $d = d_0 f^2$, $d \in \mathbb{D}^0$, $d_0 \in \mathbb{D}$, $f \in \mathbb{N}$, hat man stattdessen Ideale in Ordnungen $\mathcal{O}_f = \left(1, f \frac{d+\sqrt{d}}{2}\right)$ und die Einheit $\varepsilon_f := \varepsilon_{0,2}^m \in \mathcal{O}_f$, $m \in \mathbb{N}$ minimal. Die invertierbaren Ideale $\subset \mathcal{O}_f$ entsprechen primitiven quadratischen Formen der Diskriminante d . Äquivalenz von Idealen führt zur Definition der Ringklassengruppe, zu $\zeta(\mathcal{A}, s)$, bzw. $\zeta(s, d)$, wenn man über alle (primitive und imprimitive) Formen der Diskriminante d addiert, vgl. [Zagier 7, §8 Aufgabe 8, §10 Aufgabe 5], [Zagier 5, (6)], [Cohn, ch. 13.2 Orders, ideals, and forms]

2.1.2. Heckesche Integralformeln. Blättert man in Heckes gesammelten Werken, so findet man den Term $\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v}$ bei sehr vielen seiner Zetafunktionen. Dieser Ausdruck lässt sich durch die Punkte einer Geodätischen in der oberen Halbebene parametrisieren. Sei $d \in \mathbb{D}^+$ eine Fundamentaldiskriminante, μ eine algebraische Zahl des Ideals $(1, w')$, $w \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ die größere Wurzel der primitiven quadratischen Form $Q(x, 1) = ax^2 + bx + c$ und v der Bogenlängenparameter auf \mathfrak{C}_Q ; also z.B.

$$(2.1.2.1) \quad \mu = x_1 - w'x_2, u = ie^v,$$

d.h. die hyperbolische Bewegung

$$(2.1.2.2) \quad z \mapsto u = \frac{z - w}{z - w'} \text{ mit } \operatorname{Re} z = \frac{w - u^2 w'}{1 - u^2}, \operatorname{Im} z = \frac{u(w - w')}{i(1 - u^2)}, |z|^2 = \frac{w^2 - u^2 w'^2}{1 - u^2}$$

bildet die Geodätische \mathfrak{C}_Q auf die imaginäre Achse ab. Dann ist

$$(2.1.2.3) \quad \frac{|a|}{2} \left\{ \frac{u}{i} (x_1 - w'x_2)^2 + \frac{i}{u} (x_1 - wx_2)^2 \right\} = \frac{|a|i}{2u} \left\{ (1 - u^2) x_1^2 - 2(w - u^2 w') x_1 x_2 + (w^2 - u^2 w'^2) x_2^2 \right\} \\ = \frac{\sqrt{d}}{2 \operatorname{Im} z} \left(x_1^2 - 2 \operatorname{Re}(z) x_1 x_2 + |z|^2 x_2^2 \right) = \frac{\sqrt{d}}{2 \operatorname{Im} z} |x_1 - x_2 z|^2.$$

Das ist aber genau die **Majorante** der Form Q , die dem Punkt $z \in \mathfrak{C}_Q$ entspricht (vgl. [Siegel 5, Ch. III 5, Ch. II 6 (68)], ausgewertet auf der Spalte $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$). Im Abschnitt 2.4.2 über Siegel-Thetareihen wird auf die Entsprechung von Majorantenraum und Geodätischer näher eingegangen. Für $m_1 = -x_2, m_2 = x_1$ hat man

$$(2.1.2.4) \quad \mu = m_1 w' + m_2 \text{ und } \mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v} = \frac{w - w'}{\operatorname{Im} z} |m_1 z + m_2|^2.$$

Eine seiner vielen Ideen ist die Beobachtung, dass der Term $\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v}$ invariant unter den Substitutionen $\mu \mapsto \mu\varepsilon, v \mapsto v - 2 \log \varepsilon$ ist; und für Funktionen f , die unter dieser Substitution invariant sind, gilt

$$(2.1.2.5) \quad \int_{\mathfrak{C}_Q} \sum'_{\mu \in \Pi/\varepsilon} f(\mu, v) dv = \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{C}_Q} \sum'_{\mu \in \Pi} f(\mu, v) dv,$$

falls diese Integrale existieren. Sei \mathfrak{a} das Ideal $(1, w')$, v ist der Bogenlängenparameter, \sum'_{μ} bedeutet eine Summe über eine Menge $\Pi \subset \mathfrak{a}$ von algebraischen Zahlen $\mu \neq 0$, $\Gamma' \subset \Gamma_Q$ ist die dazugehörige Einheitengruppe, Π sei

abgeschlossen bezüglich der Multiplikation mit Einheiten $\in \Gamma'$. Statt über die gesamte Geodätische in der oberen Halbebene zu integrieren, kann man die (bzgl. einer Einheit ε) assoziierten μ zusammenfassen. Man braucht dann nur noch über einen Fundamentalbereich der Einheitengruppe auf der Geodätischen zu integrieren (im Falle von $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist das die geschlossene Geodätische $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$). Ein Beispiel einer unter Multiplikation mit Einheiten invarianten Funktion auf Idealen bzw. algebraischen Zahlen ist der Größencharakter χ_n .

Definition 2.1.2.1. Für algebraische Zahlen $\mu \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $d \in \mathbb{D}^+$ und Ideale $\mathfrak{a} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit $\mathfrak{a}^{h(d)} = (\alpha)$ sei³

$$\chi_n(\mu) := \left| \frac{\mu}{\mu'} \right|^{fn} \text{ bzw. } \chi_n(\mathfrak{a}) := \left| \frac{\alpha}{\alpha'} \right|^{\frac{fn}{h(d)}} \text{ mit } n \in \mathbb{Z}, f = \frac{\pi i}{\log \varepsilon_{0,2}}, \chi_n \text{ heißt } \mathbf{Größencharakter} \text{ von } \mathbb{Q}(\sqrt{d}).$$

Etwas allgemeiner hat man Größencharaktere (mod \mathfrak{f}), ursprünglich von Hecke Größencharaktere nach ε genannt, für ein ganzes Ideal $\mathfrak{f} \neq 0$ von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, s. [Hecke 3]. Statt $\varepsilon_{0,2}$ benutzt man das Erzeugende ε der total positiven

Einheiten $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ und hat die gleiche Definition für χ_n mit $f = \frac{\pi i}{\log \varepsilon}$.

Hilfssatz 2.1.2.2. Sei $Q = (a, b, c)$ eine primitive indefinite quadratische Form der Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$ mit der kleineren Wurzel w' , $\mu = m_1 w' + m_2 \neq 0$, \mathfrak{f} ein ganzes Ideal $\neq 0$, ε Erzeugendes der total positiven Einheiten $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$ und $f = \frac{\pi i}{\log \varepsilon}$, $\chi_n(\mu)$ ein Größencharakter (mod \mathfrak{f}), $n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt für $\operatorname{Re} s > |fn|$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-fnv}}{(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})^s} dv = \frac{\Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right) \chi_n(\mu)}{2 \Gamma(s) |N(\mu)|^s}.$$

BEWEIS. Nach der bekannten Integraldarstellung für die Gamma-Funktion

$$(2.1.2.6) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0$$

ist

$$\left(|\mu|^2\right)^{-\frac{s+fn}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right)} \int_0^{\infty} \exp(-\mu^2 t) t^{\frac{s-fn}{2}-1} dt$$

und

$$\left(|\mu'|^2\right)^{-\frac{s-fn}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right)} \int_0^{\infty} \exp(-\mu'^2 t') t'^{\frac{s+fn}{2}-1} dt' \quad \text{für } \operatorname{Re} s > |fn|.$$

Also

$$(2.1.2.7) \quad \frac{\chi_n(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-(\mu^2 t + \mu'^2 t')) (tt')^{\frac{s}{2}} \left(\frac{t}{t'}\right)^{-\frac{fn}{2}} \frac{dt dt'}{tt'}.$$

Das Integral ist lokal gleichmäßig konvergent. Setze $t = ue^v$, $t' = ue^{-v} \implies \left| \frac{\partial(t, t')}{\partial(u, v)} \right| = 2u$. Dann ist das Doppelintegral

$$(2.1.2.8) \quad = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \exp(-u(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})) u^s e^{-fnv} \frac{du}{u} dv$$

und wegen (2.1.2.6)

$$\int_0^{\infty} \exp(-u(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})) u^{s-1} du = \frac{\Gamma(s)}{(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})^s}.$$

³Hauptideal bzw. Klassenzahl im engeren oder weiteren Sinne

Anwenden von (D.1.2.4) führt zur Behauptung. \square

Satz 2.1.2.3 ([Hecke]sche Integralformel). *Sei Q eine quadratische Form der Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$, $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$ die entsprechende Geodätische (i.e.S.) und $\zeta(\mathcal{A}, s)$ die Zetafunktion der zugehörigen Idealklasse im weiteren Sinne. Dann ist*

$$\int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} E(z, s) d_Q z = \begin{cases} \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s) \zeta(2s)} \zeta(\mathcal{A}, s), & N(\varepsilon_{0,2}) = -1, \\ \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{2 \Gamma(s) \zeta(2s)} \zeta(\mathcal{A}, s), & N(\varepsilon_{0,2}) = 1. \end{cases}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \zeta(2s) \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} E(z, s) d_Q z &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \sum'_{m_1, m_2} \frac{y^s}{|m_1 z + m_2|^{2s}} d_Q z = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{C}_Q} \sum'_{(m_1, m_2) / \varepsilon_0} \frac{y^s}{|m_1 z + m_2|^{2s}} d_Q z \\ &\stackrel{\text{HS. 2.1.2.2}}{=} \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}{4 \Gamma(s)} N(\mathfrak{a})^s \sum'_{\mu \in \mathfrak{a} / \varepsilon_0} \frac{1}{|N\mu|^s} = \begin{cases} \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma(s) \zeta(2s)} \zeta(\mathcal{A}, s), & N(\varepsilon_{0,2}) = -1, \\ \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)}{2 \Gamma(s) \zeta(2s)} \zeta(\mathcal{A}, s), & N(\varepsilon_{0,2}) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

\square

Zyklusintegrale sind dann sinnvoll, wenn der Integrand invariant unter einer Untergruppe $\Gamma' \subset \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist. Dann ist er auf geschlossenen Geodätischen $\Gamma' \backslash \mathfrak{C}_Q$ zyklisch mit der Periode der Länge der Geodätischen. Daher kann man die Integrandenfunktion nach dem Bogenlängenparameter v in eine Fourierreihe entwickeln. Natürlich lassen sich nicht nur die konstanten Fourierkoeffizienten berechnen. Statt den Integranden mit e^{-fnv} zu multiplizieren, kann man das auch als ein inneres Produkt mit einer Maaßform über den eindimensionalen hyperbolischen Raum der Geodätischen interpretieren. Maaßformen $u(v)$ sind Lösungen der (Cauchyschen) Differenzialgleichung $v \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial}{\partial v} (u) \right) + \lambda u = 0$. Die Substitution $v = e^z$ führt auf die lineare Differenzialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda u = 0$ mit der Lösung $u(v) = c_1 v^{fn} + c_2 v^{-fn}$ mit $\lambda = -(fn)^2 \neq 0$. Γ -invariante Maaßformen erhält man für $f = \frac{\pi i}{\log \varepsilon}$, $n \in \mathbb{N}$.

Satz 2.1.2.4. *Sei Q eine primitive quadratische Form der Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$ mit Nullstellen $w' < w$, $\mathfrak{a} = (1, w')$ und \mathcal{A}_1^{-1} die Idealklasse (im engeren Sinne) von \mathfrak{a} in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Dann ist für $\text{Re } s > \max(|fn|, 1)$, $n \in \mathbb{Z}$:*

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} E(z, s) \left| \frac{z-w}{z-w'} \right|^{-fn} d_Q z + \int_{\Gamma_{Q^*} \backslash \mathfrak{C}_{Q^*}} E(z, s) \left| \frac{z-w}{z-w'} \right|^{-fn} d_{Q^*} z \\ &= \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right)}{\Gamma(s) \zeta(2s)} \chi_n(\mathfrak{a}) \{ \zeta(\mathcal{A}_1, s, \chi_n) + \zeta(\mathcal{A}_1^*, s, \chi_n) \}, \end{aligned}$$

dabei ist χ_n der Größencharakter aus Definition 2.1.2.1 und $\zeta(\mathcal{A}, s, \chi_n) = \sum_{\mathfrak{a} \in \mathcal{A}} \frac{\chi_n(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s}$.

Bemerkung. Falls $N(\varepsilon_{0,2}) = -1$, ist $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1^*$.

BEWEIS.

$$\zeta(2s) E(z, s) = \frac{1}{2} \sum'_{m_1, m_2} \frac{y^s}{(m_1 z + m_2)^{2s}}, \quad \zeta(\mathcal{A}_1, s, \chi_n) = \frac{N(\mathfrak{a})^s}{2 \chi_n(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{a} / \varepsilon_0 \\ N\mu > 0}} \frac{\bar{\chi}_n(\mu)}{N(\mu)^s} \text{ für ein } \mathfrak{a} \in \mathcal{A}_1^{-1},$$

$$\chi_n(\sqrt{d}) = 1, \text{ Hilfssatz 2.1.2.2, [Siegel 7, Chapter II, 3].}$$

\square

2.1.3. Eisensteinreihen der Stufe d . Für $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, $(a_1, a_2, d) = 1$ betrachte die Eisensteinreihen

$$(2.1.3.1) \quad G(z, s; (a_1, a_2), d) := \sum'_{\substack{m_1 \equiv a_1 \\ m_2 \equiv a_2}} \frac{y^s}{|m_1 z + m_2|^{2s}}, \operatorname{Re} s > 1$$

aus [Maafß 1, §3]. Sie sind invariant unter $\Gamma(d) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{d} \right\}$. Sei $Q = (a, b, c)$ eine primitive quadratische Form mit $w = \frac{-b + \sqrt{d} \operatorname{sign} a}{2a}$. Betrachte folgende Menge algebraischer Zahlen

$$\Pi := \left\{ \mu \mid \mu = x_1 - x_2 w' \in (1, w'), x_1 \equiv a_2 \pmod{d}, x_2 \equiv -a_1 \pmod{d} \right\}.$$

Sei $\langle 1, v \rangle$ eine Ganzheitsbasis des Ringes der ganzen Zahlen $\mathfrak{D} \subset \mathbb{Z}(\sqrt{d})$, z.B. $v = aw'$. Multiplikation mit $\bar{n}_1 + \bar{n}_2 v$, wobei \bar{n}_1, \bar{n}_2 Restklassen \pmod{d} sind, ist definiert auf den Restklassen \bar{x}_1, \bar{x}_2 von μ :

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2 w')(n_1 + an_2 w') &= n_1 x_1 - an_2 x_2 w'^2 - w'(n_1 x_2 - an_2 x_1) \\ &= n_1 x_1 + n_2 x_2 (bw' + c) - w'(n_1 x_2 - an_2 x_1) \\ &= (n_1 x_1 + cn_2 x_2) - w'(n_1 x_2 - an_2 x_1 - bn_2 x_2) \end{aligned}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, so dass $\varepsilon_0^n \mu \equiv a_1 - a_2 w' \pmod{d}$ wieder in der Menge Π liegt. Nach dem Dirichletschen Schubfachprinzip gibt es so ein n , z.B. das Erzeugende der Einheitengruppe von $\Gamma(d)$ in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Also $\Gamma_\varepsilon = \{\gamma_Q^{nm} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Man kann wieder das Zyklenintegral ausrechnen:

Satz 2.1.3.1. Sei Q eine primitive quadratische Form der Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$, χ_n ein Größencharakter nach ε , s . Definition 2.1.2.1, Π und ε wie oben. Dann ist für $\operatorname{Re} s > \max(|fn|, 1)$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \setminus \mathfrak{C}_Q} G(\tau, s; (a_1, a_2), d) \left| \frac{\tau - w'}{\tau - w} \right|^{fn} d_Q \tau = \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right)}{2 \Gamma(s)} \sum'_{\mu \in \Pi/\varepsilon} \frac{\chi_n(\mu)}{|Q(x_1, x_2)|^s}.$$

BEWEIS. Nach Hilfssatz 2.1.2.2 ist

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\varepsilon \setminus \mathfrak{C}_Q} \sum'_{\substack{m_1 \equiv a_1 \\ m_2 \equiv a_2}} \frac{y^s}{|mz + n|^{2s}} \left| \frac{z - w'}{z - w} \right|^{fn} d_Q z &= (w - w')^s \sum'_{\mu \in \Pi/\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{e^v \mu^2 + e^{-v} \mu'^2} \right)^s e^{-fnv} dv \\ &= \sqrt{d}^s \sum'_{\mu \in \Pi/\varepsilon} \frac{\Gamma\left(\frac{s+fu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-fu}{2}\right) \chi_n(\mu)}{2 \Gamma(s) |aN(\mu)|^s}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung. Falls ε das Erzeugende der Einheitengruppe von $\Gamma(d)$ ist, hat man für $n = 0$ ein Integral über die geschlossene Geodätische im Fundamentalbereich von $\Gamma(d)$.

Etwas allgemeiner gilt

Satz 2.1.3.2. Sei $Q = (a, b, c)$ eine primitive quadratische Form der Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$ mit der kleineren Wurzel w' , $N \in \mathbb{N}$, \mathfrak{a} das Ideal $(1, w')$, $\varrho \in \mathfrak{a}$, $N(\mathfrak{a}) = \frac{1}{|a|}$, χ_n ein Größencharakter, $\Pi = \left\{ \mu \in \mathfrak{a} \mid \mu \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}} \right\}$, $\Gamma_\varepsilon = \{\varepsilon^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ die Einheitengruppe von Π , erzeugt von der total positiven Einheit $\varepsilon \equiv 1 \pmod{N\sqrt{d}}$, $f = \frac{\pi i}{\log \varepsilon}$, χ_n der entsprechende Größencharakter, $\operatorname{Re} s > 1$,

$$\zeta_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi, N\sqrt{d}) := \frac{N(\mathfrak{a})^s}{\chi(\mathfrak{a})} \sum'_{\mu \in \Pi/\varepsilon} \frac{\chi(\mu)}{|N(\mu)|^s}$$

eine Zetafunktion des reell-quadratischen Körpers $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$,

$$f(z, s, \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) := \sum'_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 w' + m_2 \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}}} } \frac{y^s}{|m_1 z + m_2|^{2s}}$$

eine Linearkombination von Eisensteinreihen $G(\tau, s; *, N)$, s. (2.1.3.1). Dann ist für $\operatorname{Re} s > \max(|fn|, 1)$

$$\int_{\Gamma_\varepsilon \backslash \mathfrak{C}_Q} f(z, s, \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) \left| \frac{z-w'}{z-w} \right|^{fn} d_Q z = \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right) \chi_n(\mathfrak{a})}{2 \Gamma(s)} \zeta_0\left(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}\right).$$

mit dem Größencharakter χ_n .

BEWEIS. Hilfssatz 2.1.2.2, 2.1.2.5 mit $\Pi = \left\{ \mu \in \mathfrak{a} \mid \mu \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}} \right\}$ und total positivem ε . Der Größencharakter χ_n ist zugleich Charakter $\pmod{\mathfrak{a}N\sqrt{d}}$. \square

2.1.4. Eisensteinreihen vom Gewicht $2k$. In Räumen geradzahigen Gewichts $2k, k \in \mathbb{Z}$ gibt es jeweils eine Eisensteinreihe $E_{2k}(z, s)$ zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, vgl. [Maaf 4] bzw. Anhang C.3.2. Sie transformiert folgendermaßen:

$$\text{Für } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \text{ ist } E_{2k}(\gamma(z), s) = \left(\frac{cz+d}{c\bar{z}+d} \right)^k E_{2k}(z, s).$$

Satz 2.1.4.1. Die Zyklenintegrale für die nicht-holomorphen Eisensteinreihen

$$E_{2k}(z, s) := \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{ggT}(c,d)=1} \frac{y^s}{(cz+d)^{s+k} (c\bar{z}+d)^{s-k}}$$

vom Gewicht $2k$ über die geschlossene Geodätische $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$ zur primitiven quadratischen Form $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ mit Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$, $\mathfrak{a} = \left(1, \frac{b+\mathrm{sign}(a)\sqrt{d}}{2a}\right)$, $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ (Äquivalenzklasse im weiteren Sinn) sind

$$\int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} E_{2k}(z, s) d_{Q,2k} z = \begin{cases} \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{2 \Gamma(s-k) \Gamma(s+k) \zeta(2s)} \begin{cases} \zeta(\mathcal{A}, s), & N(\varepsilon_{0,2}) = +1 \\ 2 \zeta(\mathcal{A}, s), & N(\varepsilon_{0,2}) = -1 \end{cases}, & 2 \mid k \\ \frac{-\mathrm{sign}(a) d^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{2 \Gamma(s-k) \Gamma(s+k) \zeta(2s)} (\zeta(\mathcal{A}_1, s) - \zeta(\mathcal{A}_1^*, s)), & \text{sonst} \end{cases}$$

für $\operatorname{Re} s > 1$. Dabei ist $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}_1, (\sqrt{d})\mathfrak{a} \in \mathcal{A}_1^*$ (Äquivalenzklassen i.e.S.) und $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$ die Geodätische i.e.S.

BEWEIS. [Siegel 7] verwendet folgende Parametrisierung⁴, um über Geodätische zu integrieren ($w' < w$):

$$(2.1.4.1) \quad \begin{aligned} ip &= \frac{z-w}{z-w'}, & \operatorname{Im} z &= \frac{(w-w')}{(1+p^2)} p, & \mu &= mw' + n, \\ z &= \frac{ipw' - w}{ip - 1}, & mz + n &= \frac{ip\mu - \mu'}{ip - 1}, & |mz + n|^2 &= \frac{p^2\mu^2 + \mu'^2}{p^2 + 1}, \\ d_Q z &= -\mathrm{sign} a \frac{dp}{p} = -\frac{\sqrt{d}}{Q(z, 1)} dz, & Q(z, 1) &= i \frac{d \cdot p}{a(ip - 1)^2}, & \mathfrak{a} &= (1, w'). \end{aligned}$$

⁴Der Parameter p reflektiert nicht unbedingt die Orientierung

Im folgenden wenden wir (2.1.2.5) mit der total positiven Grundeinheit ε_0 an, da jeder Summand invariant unter der Substitution $\mu \mapsto \mu\varepsilon_0, \mu' \mapsto \mu'\varepsilon_0^{-1}, p \mapsto \frac{p}{\varepsilon_0}$ ist;

$$\begin{aligned} \zeta(2s) \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \frac{E_{2k}(z, s) Q(z, 1)^k}{y^k} d_Q z &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \sum'_{m, n} \frac{y^{s-k} Q(z, 1)^k}{|mz + n|^{2s-2k} (mz + n)^{2k}} d_Q z \\ &= i^k \frac{(w - w')^{s-k} d^k}{2a^k} \int_0^\infty \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \left(\frac{p}{1+p^2} \right)^{s-k} \frac{p^k}{(ip-1)^{2k}} \left(\frac{p^2+1}{p^2\mu^2 + \mu'^2} \right)^{s-k} \left(\frac{ip-1}{ip\mu - \mu'} \right)^{2k} \frac{dp}{p} \\ &= \frac{i^k d^{\frac{s+k}{2}} (\text{sign } a)^k}{2|a|^s} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{p^{s-1} (ip\mu + \mu')^{2k}}{(p^2\mu^2 + \mu'^2)^{s+k}} dp = \frac{i^k d^{\frac{s+k}{2}} (\text{sign } a)^k}{2|a|^s} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \frac{1}{|N\mu|^s} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} (it + \tau)^{2k}}{(t^2 + 1)^{s+k}} dt \end{aligned}$$

mit $p = \left| \frac{\mu'}{\mu} \right| t, \tau = \frac{N\mu}{|N\mu|} = \pm 1$, und mit Hilfssatz D.1.3.1 hat man

$$\int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \frac{E_{2k}(z, s) Q(z, 1)^k}{|Q(z, 1)|^k} d_Q z = \frac{(-1)^k d^{\frac{s}{2}} (\text{sign } a)^k \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right)}{4|a|^s \Gamma(s-k) \Gamma(s+k) \zeta(2s)} \left(\sum'_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu > 0}} \frac{1}{|N\mu|^s} + (-1)^k \sum'_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu < 0}} \frac{1}{|N\mu|^s} \right).$$

Mit der Diskussion von $N(\varepsilon_{0,2}) = \pm 1$ auf S. 32 folgt der Satz. \square

Folgerung 2.1.4.1.1. Sei \mathcal{A}_1 die Äquivalenzklasse (i.e.S.) der indefiniten quadratischen Form Q . Für $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ist

$$\int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} G_{2k}(z) Q(z)^{k-1} dz = \frac{1}{2} (-1)^k \zeta(\mathcal{A}_1, 1-k).$$

BEWEIS. $s \rightarrow k$ und die Funktionalgleichung von $\zeta(\mathcal{A}, s)$, vgl. [Kohnen Zagier 2, Ende Abschnitt 4.1.]. \square

Addiert über alle Geodätische ergibt sich

Folgerung 2.1.4.1.2. Für $k = 0, s \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\rho}{2}, 1 \right\}$ oder $k \in 2\mathbb{Z}, k \neq 0, s \in \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\rho}{2}, -1, -2, \dots, 1 - |k| \right\}$ mit $\zeta(\rho) = 0, d = |Q| \in \mathbb{D}^+$ ist

$$C_d(E_{2k}(\cdot, s)) = \mathbf{R} \cdot \int_{\Lambda_d} E_{2k}(z, s) d_{Q,2k} z = \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \Gamma\left(\frac{s-k}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right) \zeta(s, d)}{\Gamma(s-k) \Gamma(s+k) \zeta(2s)}.$$

Für ungerades k ist das Integral Null.

Für $d < 0, k \in \mathbb{Z}$ ist unter den o.a. Voraussetzungen

$$C_d(E_{2k}(\cdot, s)) = \frac{|d|^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \zeta(s, d)}{2^{s-1} |k|! \Gamma(s - |k|) \zeta(2s)}.$$

BEWEIS. Für ungerades k vgl. Satz 1.5.1.3.

Die letzte Behauptung des Satzes wurde für $k = 0$ in Satz 1.5.2.3 bewiesen, für allgemeines k ergibt es sich später als Hilfssatz 3.1.4.1.

Für die Pole der Eisensteinreihe s. Anhang C.2. Für alle anderen $s \in \mathbb{C}$ ist das Integral eine holomorphe Funktion von s . Die analytische Fortsetzung in die ganze s -Ebene ist klar. \square

Das lässt sich leicht auf die anderen Fourierkoeffizienten verallgemeinern.

Satz 2.1.4.2. Sei Q eine (primitive) quadratische Form der Diskriminante $d \in \mathbb{D}^+$ mit Nullstellen $w' < w$, $\mathfrak{a} = (1, w')$ und \mathcal{A}_1 die Idealklasse (i.e.S.) von \mathfrak{a} in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $f = \frac{\pi i}{\log \varepsilon_0}$, χ_n ein Größencharakter wie in Def. 2.1.2.1. Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \mathrm{E}_{2k}(z, s) \left| \frac{z-w}{z-w'} \right|^{-fn} d_{Q,2k} z + \int_{\Gamma_{Q^*} \backslash \mathfrak{C}_{Q^*}} \mathrm{E}_{2k}(z, s) \left| \frac{z-w}{z-w'} \right|^{-fn} d_{Q^*,2k} z \\ &= \frac{i^{s+fn-k} d^{\frac{s+k}{2}} (\mathrm{sign} a)^k \Gamma(s+fn) \Gamma(s-fn)}{\Gamma(2s) \zeta(2s)} \chi_n(\mathfrak{a}) \left(\zeta(\mathcal{A}_1, s, \chi_n) + (-1)^k \zeta(\mathcal{A}_1^*, s, \chi_n) \right) \\ & \quad \cdot \left({}_2F_1(s+k, s+fn; 2s; 2-0i) + (-1)^k {}_2F_1(s-k, s+fn; 2s; 2-0i) \right) \end{aligned}$$

für $\mathrm{Re} s > \max(1, |fn|)$.

BEWEIS. Sei

$$\begin{aligned} f &= \frac{\pi i}{\log \varepsilon_0}; \\ w, w' &\text{ die Nullstellen der quadratischen Gleichung } Q(z, 1) = az^2 + bz + c, \\ \mathfrak{a} &= (1, w'), \\ \mathcal{A}_1 &\text{ die zu } \mathfrak{a} \text{ gehörige Äquivalenzklasse (i.e.S.) von Idealen,} \end{aligned}$$

dann ist \mathcal{A}_1^* die zu $(\sqrt{d})\mathfrak{a}$ gehörige Äquivalenzklasse (i.e.S.) von Idealen,

$$\begin{aligned} & \zeta(2s) \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \frac{\mathrm{E}_{2k}(z, s) Q(z, 1)^k}{y^k} \left| \frac{z-w}{z-w'} \right|^{-fn} d_Q z \\ &= \frac{i^k (w-w')^{s-k} d^k}{2a^k} \int_0^\infty \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \left(\frac{p}{1+p^2} \right)^{s-k} \frac{p^{k-fn}}{(ip-1)^{2k}} \left(\frac{p^2+1}{p^2\mu^2+\mu'^2} \right)^{s-k} \left(\frac{ip-1}{ipp-\mu'} \right)^{2k} \frac{dp}{p} \\ &= \frac{i^k d^{\frac{s+k}{2}} (\mathrm{sign} a)^k}{2|a|^s} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{p^{s-fn-1} (ipp+\mu')^{2k}}{(p^2\mu^2+\mu'^2)^{s+k}} dp. \end{aligned}$$

Mit $p = \left| \frac{\mu}{\mu'} \right| t$ und $\tau = \left| \frac{\mu}{\mu'} \right| = \mathrm{sign} N(\mu)$ hat man für das letzte Integral⁵ mit [GR, 3.259, 3.]

$$\frac{1}{|\mu|^{s-fn} |\mu'|^{s+fn}} \int_0^\infty \frac{t^{s-fn-1} (it+\tau)^{2k}}{(t^2+1)^{s+k}} dt = i^{s+fn-2k} \frac{\chi_n(\mu)}{|N\mu|} \mathrm{B}(s+fn, s-fn) \mathrm{F}(s+\tau k, s+fn; 2s; 2).$$

Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q} \frac{\mathrm{E}_{2k}(z, s) Q(z, 1)^k}{y^k} \left| \frac{z-w}{z-w'} \right|^{-fn} d_Q z \\ &= \frac{i^{s+fn-k} d^{\frac{s+k}{2}} (\mathrm{sign} a)^k \Gamma(s+fn) \Gamma(s-fn)}{2|a|^s \Gamma(2s)} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \frac{\chi_n(\mu)}{|N\mu|^s} \mathrm{F}(s+\mathrm{sign}(N\mu)k, s+fn; 2s; 2) \\ &= \frac{i^{s+fn-k} d^{\frac{s+k}{2}} (\mathrm{sign} a)^k \Gamma(s+fn) \Gamma(s-fn)}{|a|^s \Gamma(2s)} \\ & \quad \cdot \chi_n(\mathfrak{a}) \left({}_2F_1(s+k, s+fn; 2s; 2) \zeta(\mathcal{A}_1, s, \chi_n) + {}_2F_1(s-k, s+fn; 2s; 2) \zeta(\mathcal{A}_1^*, s, \chi_n) \right) \end{aligned}$$

Nimmt man noch die spiegelsymmetrische Geodätische dazu, so ergibt sich die Beh. □

⁵Gauß' hypergeometrische Funktion hat für $\{z|1 < z \in \mathbb{R}\}$ einen Sprung. MATHEMATIKA rechnet mit dem Funktionswert bei Annäherung an 2 von der unteren Halbebene, den ich hier auch verwenden werde.

Bemerkung. Die Argumentation mit Hilfe von Idealklassen wurde hier nur für Fundamentaldiskriminanten formuliert, lässt sich jedoch mit der Bemerkung auf S. 33 auf beliebige Diskriminanten verallgemeinern. Das gilt auch für den nächsten Abschnitt.

2.1.5. Hyperzyklenintegral. (Fortsetzung von Abschnitt 1.5.3)

Satz 2.1.5.1. Für $d \in \mathbb{D}^+$, $0 < \theta < \pi$, $s \in \mathbb{C} \setminus \left\{1, 0, -1, -2, \dots, \frac{\rho}{2}, \dots\right\}$ mit $\zeta(\rho) = 0$ ist

$$\mathbf{R.} \int_{\Lambda_{d,\theta}} E(z, s) d_{\Lambda} z = \frac{d^{\frac{s}{2}} \Gamma^2(s)}{\sin(\theta) \Gamma(2s) \zeta(2s)} \left\{ \sin^s(\theta) {}_2F_1\left(s, s; 2s; \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \cos^s(\theta) {}_2F_1\left(s, s; 2s; \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \right\} \zeta(s, d)$$

BEWEIS. Das Integral ergibt sich als (regularisierte) Rankin-Selberg Transformierte des konstanten Terms der Kerndistribution. Sei zunächst $\operatorname{Re} s > 1$:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_{d,\theta}} E(z, s) d_{\Lambda} z &= \frac{2\sqrt{d}}{\sin \theta} \int_0^{\infty} \sum_{a=-\frac{\sqrt{d}}{2y} \tan \frac{\theta}{2}}^{\frac{\sqrt{d}}{2y} \cot \frac{\theta}{2}} \frac{N_d(a) y^{s-1}}{\sqrt{d + 4ay\sqrt{d} \cot \theta - 4a^2 y^2}} dy \text{ und mit } x = \frac{\sqrt{d}}{2|a|} \\ &= \frac{2\sqrt{d}}{\sin \theta} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{2a} \left(\int_0^{x \cot \frac{\theta}{2}} \frac{y^{s-1}}{\sqrt{x^2 + 2yx \cot \theta - y^2}} dy + \int_0^{x \cot \frac{\pi-\theta}{2}} \frac{y^{s-1}}{\sqrt{x^2 + 2yx \cot(\pi-\theta) - y^2}} dy \right) \\ &\stackrel{\text{HS. D.1.3.1}}{=} \frac{\sqrt{d}}{\sin \theta} \left(\sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s} \right) 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s)}{\Gamma(2s)} \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \right)^{s-1} \\ &\quad \cdot \left\{ \left(\cot \frac{\theta}{2} \right)^s {}_2F_1\left(s, \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; -\cot^2 \frac{\theta}{2}\right) + \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)^s {}_2F_1\left(s, \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; -\tan^2 \frac{\theta}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

wegen $B\left(\frac{1}{2}, s\right) = 2^{2s-1} \frac{\Gamma^2(s)}{\Gamma(2s)}$. Für $\sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s}$ vgl. [Zagier 5, Proposition 3]. Eulers Transformation ([AS, 15.3.4]) und analytische Fortsetzung in s auf den Definitionsbereich der rechten Seite ergibt die Beh. \square

Im Spezialfall $\theta = 90^\circ$ hat man wegen ${}_2F_1\left(s, \frac{1}{2}; s + \frac{1}{2}; -1\right) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)}{2^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}$ die Hecke'sche Integralformel, vgl. Satz 2.1.4.1.

Man kann ohne weiteres auch die Hyperzyklenintegrale für Eisensteinreihen höheren Gewichts ausrechnen:

Satz 2.1.5.2. Für $k \in 2\mathbb{N}_0$, $d \in \mathbb{D}^+$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ist $\mathbf{R.} \int_{\Lambda_{d,\theta}} E_{2k}(z, s) d_{\Lambda,2k} z = \mathbf{R.} \int_{\Lambda_{d,\pi-\theta}} E_{2k}(z, s) d_{\Lambda,2k} z =$

$$\frac{e^{i\theta(s+k)} (\sin \theta)^{s-1} d^{\frac{s}{2}}}{\zeta(2s)} \left\{ \left(1 + e^{i\pi(k-s)}\right) \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1\left(s+k, s; 2s; 1 - e^{2i\theta}\right) + 2\pi i \binom{s-1}{k} e^{-i\pi s} {}_2F_1\left(s+k, s; k+1; e^{2i\theta}\right) \right\} \zeta(s, d).$$

Für andere $k \in \mathbb{Z}$ hat man etwas Ähnliches.

BEWEIS. Analog zum Beweis von Satz 2.1.4.1 verwenden wir [Siegel 7]'s Parametrisierung, diesmal auf den Hyperzyklen. Sei w' die kleinere Wurzel der quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} p &= \frac{z-w}{z-w'}, \text{ d.h. } p \in \mathbb{R} & \operatorname{Im} z &= \frac{(w-w') \sin \theta}{(1-2p \cos \theta + p^2)} p, & \mu &= mw' + n, \\ z &= \frac{e^{i\theta} p w' - w}{e^{i\theta} p - 1}, & mz + n &= \frac{e^{i\theta} p \mu - \mu'}{e^{i\theta} p - 1}, & |mz + n|^2 &= \frac{p^2 \mu^2 - 2p\mu\mu' \cos \theta + \mu'^2}{p^2 - 2p \cos \theta + 1}, \\ d_{Q,\theta} z &= -\frac{\operatorname{sign}(a)}{p \sin \theta} dp = -\frac{\sqrt{d}}{Q(z, 1) \sin \theta} dz, & Q(z, 1) &= \frac{de^{i\theta} p}{a(e^{i\theta} p - 1)^2}, & \mathfrak{a} &= (1, w') \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

und wie bei Satz 2.1.4.1:

$$\begin{aligned}
\zeta(2s) \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_{Q,\theta}} \frac{E_{2k}(z,s) Q(z,1)^k}{y^k} d_{Q,\theta} z &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_{Q,\theta}} \sum'_{m,n} \frac{y^{s-k} Q(z,1)^k}{|mz+n|^{2s-2k} (mz+n)^{2k}} d_{Q,\theta} z \\
&= e^{i\theta k} \frac{(\sqrt{d} \sin \theta)^{s-k} d^k}{2|a|^{s-k} a^k \sin \theta} \int_0^\infty \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \frac{p^k}{(e^{i\theta} p - 1)^{2k}} \left(\frac{p}{p^2 \mu^2 - 2p\mu\mu' \cos \theta + \mu'^2} \right)^{s-k} \left(\frac{e^{i\theta} p - 1}{e^{i\theta} p\mu - \mu'} \right)^{2k} \frac{dp}{p} \\
&= \frac{e^{i\theta k} d^{\frac{s+k}{2}} (\text{sign } a)^k (\sin \theta)^{s-k-1}}{2|a|^s} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{p^{s-1} (e^{-i\theta} p\mu - \mu')^{2k}}{(p^2 \mu^2 - 2p\mu\mu' \cos \theta + \mu'^2)^{s+k}} dp \\
&= \frac{e^{i\theta k} d^{\frac{s+k}{2}} (\text{sign } a)^k (\sin \theta)^{s-k-1}}{2|a|^s} \sum'_{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0} \frac{1}{|N\mu|^s} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} (e^{-i\theta} t - \tau)^{2k}}{(t^2 - 2\tau t \cos \theta + 1)^{s+k}} dt
\end{aligned}$$

dabei ist $p = \left| \frac{\mu'}{\mu} \right| t$, $\tau = \frac{N\mu}{|N\mu|} = \pm 1$. Mit Hilfssatz D.1.3.1 hat man:

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1} (e^{-i\theta} t - \tau)^{2k}}{(t^2 - 2\tau t \cos \theta + 1)^{s+k}} dt = \begin{cases} e^{i(\theta-\pi)s} \left(\frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1 - e^{2i\theta}) \right. \\ \quad \left. + 2\pi i (-1)^k \binom{s-1}{|k|} e^{-2i\theta \min(0,k)} {}_2F_1(s+|k|, s; |k|+1; e^{2i\theta}) \right), & \tau = 1, \\ e^{i\theta s} \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1 - e^{2i\theta}), & \tau = -1. \end{cases}$$

Auf dem Hyperzykel ist $|Q(z,1)| = \frac{y\sqrt{d}}{\sin \theta}$ und wegen $\zeta(\mathcal{A}, s) = \frac{1}{2|a|^s} \sum'_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu > 0}} \frac{1}{|N\mu|^s}$, $\zeta(\mathcal{A}^*, s) = \frac{1}{2|a|^s} \sum'_{\substack{\mu \in \mathfrak{a}/\varepsilon_0 \\ N\mu < 0}} \frac{1}{|N\mu|^s}$, d.h.

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_{Q,\theta}} E_{2k}(z,s) d_{Q,2k,\theta} z + \int_{\Gamma_{Q^*} \backslash \mathfrak{C}_{Q^*,\theta}} E_{2k}(z,s) d_{Q^*,2k,\theta} z \\
&= \frac{e^{i\theta(s+k)} (-\text{sign } a)^k (\sin \theta)^{s-1} d^{\frac{s}{2}}}{\zeta(2s)} \left(\zeta(\mathcal{A}, s) + (-1)^k \zeta(\mathcal{A}^*, s) \right) \\
&\quad \cdot \left\{ \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1 - e^{2i\theta}) \left(1 + e^{i\pi(k-s)} \right) + 2\pi i \binom{s-1}{|k|} e^{-2i\theta \min(0,k) - i\pi s} {}_2F_1(s+|k|, s; |k|+1; e^{2i\theta}) \right\}.
\end{aligned}$$

Der Beitrag von (Q, θ) ist $(-1)^k$ mal dem von $(-Q, \pi - \theta)$. \square

2.1.6. Hyperbolische Kreise. (Fortsetzung von Abschnitt 1.5.4)

Satz 2.1.6.1. *Das Integral der Eisensteinreihe über den Kreis vom Radius $r > 0$ um $z_1 \in \mathcal{H}$ ist*

$$\boxed{\int_{\mathfrak{C}_{z_1,r}} E(z,s) d_{\mathfrak{C}} z = \pi e^{rs} \sinh(r) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, s; 1; 1 - e^{2r}\right) E(z_1, s).}$$

BEWEIS. Nach dem Rankin-Selberg Verfahren ist

$$\int_{\mathfrak{C}_{z_1,r}} E(z,s) d_{\mathfrak{C}} z = \int_{\mathfrak{F}} E(z,s) \mathfrak{D}(z_1, r; z) d\mu = \int_0^\infty y^{s-2} c_0(r, y) dy$$

mit dem konstanten Term der Distribution $\mathfrak{D}(z_1, r; z)$:

$$\begin{aligned} c_0(r, y) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \mathfrak{D}(z_1, r; z) dx = y_1 \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta \left(\frac{(T^{-n} \cdot \gamma)^{-1} \circ \Omega_{z_1, r}(z)}{y} \right) \\ &= y_1 \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta \left(\frac{\gamma^{-1}(z+n) \circ \Omega_{z_1, r}}{y} \right) = y_\gamma \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{\Omega_{z_\gamma, r}(z)}{y} \right) dx \\ &= y_\gamma \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \left(\frac{|z|^2 - 2x_\gamma x - 2y_\gamma \cosh r \cdot y + |z_\gamma|^2}{y} \right) dx = y_\gamma \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \frac{y}{|x_{0, \gamma} - x_\gamma|} \end{aligned}$$

mit $|x_{0, \gamma} - x_\gamma| = \sqrt{(y_\gamma e^r - y)(y - y_\gamma e^{-r})}$, Höhensatz in dem euklidischen Dreieck $x_\gamma + iy_\gamma e^{-r}$, $x_\gamma + iy_\gamma e^r$, $x_{0, \gamma} + iy$, s. Abb. 1.5.4.1.

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}_r} \mathbf{E}(z, s) d_{\mathfrak{C}} z &= \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y_\gamma \int_{y_\gamma e^{-r}}^{y_\gamma e^r} \frac{y^{s-1}}{\sqrt{(y_\gamma e^r - y)(y - y_\gamma e^{-r})}} dy \\ &= \sinh r \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y_\gamma^s \int_{e^{-r}}^{e^r} \frac{t^{s-1}}{\sqrt{(e^r - t)(t - e^{-r})}} dt \\ &= \pi \sinh(r) e^{rs} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, s; 1; 1 - e^{2r} \right) \mathbf{E}(z_1, s) \end{aligned}$$

mit Hilfssatz D.1.3.1. □

2.2. Holomorphe Poincaréreihen

Alle Spitzenformen aus $S_{2k}(\Gamma)$, k gerade, lassen sich als (holomorphe) Poincaréreihen $y^{-k} \tilde{\mathbf{P}}_{n, 2k}(z, k) = P_{2k}(n, z)$ darstellen (Bezeichnung von Anhang C.3.3; vgl. [Lehner]). Die Zyklenintegrale lassen sich mit Satz 1.5.1.3 berechnen.

Hilfssatz 2.2.1. Sei $d \in \mathbb{D}^{0+}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in 2\mathbb{N}$, $k \geq 6$. Das Zyklenintegral ist

$$\sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \mathbf{R} \cdot \int_{\mathfrak{C}_Q} P_{2k}(n, z) Q(z, 1)^{k-1} dz = -\frac{2d^{\frac{k}{2}} \Gamma(k)}{(2\pi i n)^k} \left\{ \varepsilon(\sqrt{d} | n) + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{2n} \pi}{\sqrt[4]{d}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{\sqrt{a}} J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi n \sqrt{d}}{a} \right) \right\},$$

dabei ist $\varepsilon(\sqrt{d} | n) = \begin{cases} 1, & d = \square, \sqrt{d} | n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

BEWEIS. Sei $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} C_d \left(\tilde{\mathbf{P}}_{n, 2k}(\cdot, k) \right) &= \left(\tilde{\mathbf{P}}_{n, 2k}(\cdot, k), \mathfrak{D}_{d, 2k} \right) = \int_0^\infty y^{k-2} e^{-2\pi n y} \overline{c_{n, 2k}(y, d)} dy \\ &= 4\sqrt{d} \sum_{a=1}^{\infty} S_a(n, d) \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} \frac{y^{k-1} e^{-2\pi n y}}{\sqrt{d - 4a^2 y^2}} \cos \left(\frac{\pi n \sqrt{d - 4a^2 y^2}}{a} + k \arccos \left(-\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \right) dy \\ &\quad + 2(-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{d} \varepsilon(\sqrt{d} | n) \int_0^\infty y^{k-1} e^{-2\pi n y} dy \\ &= 4 \left(\frac{\sqrt{d}}{2} \right)^k \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{a^k} \int_0^1 e^{-\frac{\pi n \sqrt{d}}{a} \sqrt{1-t^2}} (1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} \cos \left(\frac{\pi n \sqrt{d}}{a} t - k \arccos(\sqrt{1-t^2}) \right) dt \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\sqrt{d}\Gamma(k)}{(2\pi in)^k} \varepsilon(\sqrt{d} | n) \stackrel{\text{(D.1.4.3)}}{=} \frac{2\sqrt{d}\Gamma(k)}{(2\pi in)^k} \varepsilon(\sqrt{d} | n) + \frac{\Gamma(k) \sqrt[4]{d}}{2^{k-\frac{3}{2}} \pi^{k-1} n^{k-\frac{1}{2}}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{\sqrt{a}} J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi n \sqrt{d}}{a} \right).$$

Für $n = 0$ hat man als Grenzwert wieder das Zyklenintegral der Eisensteinreihe $E_{2k}(z)$, vgl. Folgerung 2.1.4.1.2:

$$\sum_{\substack{\text{inäqu. } Q, \\ |Q|=d}} \mathbf{R} \int_{\mathfrak{C}_Q} E_{2k}(z) Q(z, 1)^{k-1} dz = -\frac{\sqrt{\pi} d^{k-\frac{1}{2}} \Gamma(k)}{2^{2k-2} \Gamma(k+\frac{1}{2})} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^k}.$$

□

Bemerkung. Für $n = 1$ ist das der d -te Fourierkoeffizient von $-\frac{2d^{\frac{k}{2}}\Gamma(k)}{(2\pi i)^k} P_{k+\frac{1}{2}}(1, z) \in S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$:

Hilfssatz 2.2.2. Die Poincaréreihe $P_{k+\frac{1}{2}}(1, z) := \frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma_0(4)} q|_{k+\frac{1}{2}} \gamma(z) \right) \Big|_{\text{pr}} \in S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$ hat für $2 \mid k$ die Fourierentwicklung

$$q + (-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{2} \pi \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} d^{\frac{2k-1}{4}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(1, d)}{\sqrt{a}} J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi \sqrt{d}}{a} \right) q^d.$$

BEWEIS. Nach Satz C.3.3.6.3 ist

$$P_{k+\frac{1}{2}}(1, z) = \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \left\{ \delta_{d,1} + \frac{\pi}{2i^{k+\frac{1}{2}}} d^{\frac{2k-1}{4}} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade}, c}) \frac{S_{k+\frac{1}{2}, \infty, \infty}(1, d; 4c)}{c} J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi \sqrt{d}}{c} \right) \right\} q^d.$$

Nach Hilfssatz C.3.3.4.2 ist

$$\frac{1-i}{4\sqrt{c}} (1 + \delta_{\text{ungerade}, c}) S_{k+\frac{1}{2}, \infty, \infty}(1, d; 4c) = S_c(1, d).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

2.3. Nicht-holomorphe Poincaréreihen

Wir berechnen jetzt die Mellintransformierten der anderen Fourierkoeffizienten von $\mathfrak{D}_d, d \in \mathbb{D}^{0+}$. Im ganzen Abschnitt sei $n \neq 0$.

Definition 2.3.0.1 (Poincaréreihen). Für $\text{Re } s > 1$ sei⁶

$$\tilde{\mathbf{P}}(z, \infty, s, n) := \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \text{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i (\text{in Re } \gamma z - |n| \text{Im } \gamma z)} \text{Im}^s \gamma z$$

und

$$\mathbf{P}_n(z, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \text{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i n \text{Re}(\gamma z)} \text{Im}^s(\gamma z).$$

Diese Poincaréreihe isoliert die einzelnen Fourierkoeffizienten, s. [Bruggeman 1, (7.6)].

Hilfssatz 2.3.0.2 (Selberg). Die Poincaréreihe $\tilde{\mathbf{P}}(z, \infty, s, n)$ lässt sich analytisch in die ganze Ebene $s \in \mathbb{C}$ fortsetzen mit Polen in der Menge

$$\left\{ t_j - m, \frac{\rho}{2} - m, -\frac{1}{2} - m \mid t_j = \frac{1}{2} + \nu_j, m \in \mathbb{N}_0, \zeta(\rho) = 0 \right\}.$$

⁶vgl. [Neunhöffer, Definition 6.2], dort mit Faktor $\frac{(\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}}}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}$

Satz 2.3.0.3. Die $P_n(z, s)$, $n \neq 0$ lassen sich auf $s \in \mathbb{C}$ analytisch fortsetzen. Die Funktionen sind holomorph in s bis auf Pole bei $t_j - n = \frac{1}{2} - n + \nu_j, \bar{t}_j - n$ entsprechend den Maaßformen

$$f_{j,l}(z) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \gamma_{m,j,l} \sqrt{y} K_{\nu_j}(2\pi|m|y) e(mx)$$

zum Spektralparameter ν_j und bei $-\frac{1}{2} - n, \frac{\rho}{2} - n$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Die Residuen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ sind

$$\operatorname{Res}_{s=t_j} P_n(z, s) = \frac{\Gamma(\nu_j)}{2(\pi|n|)^{\nu_j}} \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} f_{j,l}(z)$$

Für $d \in \mathbb{D}^{0+}$, $\operatorname{Re} s > 1$ ist

$$C_d(P_n(z, s)) = \frac{d^{\frac{s+1}{4}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s}{2}-1} (2|n|)^{\frac{s-1}{2}}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{a^{\frac{s+1}{2}}} J_{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{\pi|n|\sqrt{d}}{a}\right).$$

Für $d \in \mathbb{D}^{0-}$, $\operatorname{Re} s > 1$ ist

$$C_d(P_n(z, s)) = 2 \left(\frac{|d|}{4}\right)^{\frac{s}{2}} S_{n,d}(s)$$

in Verallgemeinerung von [Zagier 6, Example 1 u. 2].

BEWEIS. $P_n(z, s)$ konvergiert für $\operatorname{Re}(s) > 1$ gleichmäßig auf Kompakta und ist eine in z stetige und reell-analytische Funktion, die allerdings in \mathfrak{F} nicht beschränkt ist und somit nicht quadratintegrierbar ist: $P_n(z, s) - y^s e^{2\pi i n x}$ ist beschränkt. Für $\operatorname{Re} s \leq 1$ kann man die Poincaréreihe $P_n(z, s)$ mit der analytischen Fortsetzung von $\tilde{P}(z, \infty, s, n)$ vergleichen. Diese neue Poincaréreihe ist in \mathcal{D}_0^2 und hat nach [Neunhöffer, Satz 6.5] folgende Spektralzerlegung in $\operatorname{Re} s > 1$:

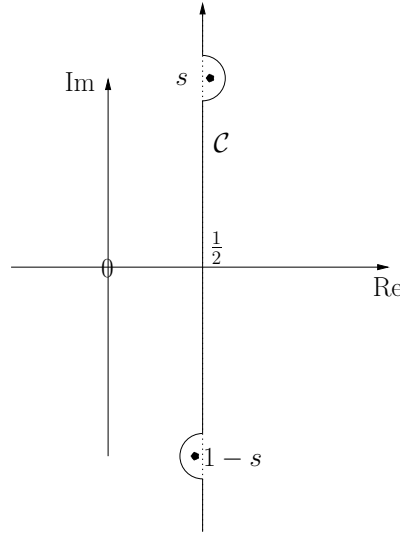
$$(2.3.0.1) \quad \begin{aligned} \tilde{P}(z, \infty, s, n) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1} (\pi|n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \sum_j \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1) f_{j,l}(z) + \\ &+ \frac{1}{4^s (\pi|n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s-\frac{1}{2}+ir) \Gamma(s-\frac{1}{2}-ir) E(z, \frac{1}{2}+ir)}{(\pi|n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2}-ir) \zeta(1-2ir)} dr \end{aligned}$$

mit den Maaßformen $f_j(z) = \sqrt{y} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \gamma_{m,j} K_{t_j-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y) e(mx)$ zum Eigenwert $t_j(1-t_j) > 0$ und der nicht-holomorphen Eisensteinreihe, s. Anhang C.2.1.1

$$E(z, t) = y^t + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(t-\frac{1}{2}) \zeta(2t-1)}{\Gamma(t) \zeta(2t)} y^{1-t} + \frac{4\sqrt{y} \pi^t}{\Gamma(t) \zeta(2t)} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{t-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2t}(n) K_{t-\frac{1}{2}}(2\pi n y) \cos 2\pi n x.$$

Wegen $|\Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1)| \leq |\Gamma(s+1-t_j) \Gamma(s+t_j)|$ für große t_j ist die Summe absolut und lokal gleichmäßig in ganz $s \in \mathbb{C}$ konvergent außer für $s = t_j - n, s = 1 - t_j - n, n \in \mathbb{N}_0$. Dort gibt es Pole. Der kontinuierliche Anteil konvergiert für $0 < \operatorname{Re} s < 1, \operatorname{Re} s \neq \frac{1}{2}$ lokal gleichmäßig, vgl. [Neunhöffer, Satz 6.3], d.h. die Darstellung (2.3.0.1) gilt sogar für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Für $s = \frac{1}{2} \pm ir_0$ haben die Gammafaktoren Singularitäten auf dem Integrationsweg, um die man einen kleinen Bogen machen kann, vgl. Abb. 2.3.0.1. Wenn $\operatorname{Re}(s)$ ein klein wenig größer als $\frac{1}{2}$ ist, ändert sich der Wert des Integrals um die Residuen an den Punkten s und $1-s$. Bewegt man jetzt s allmählich nach links, so ändert sich der Wert des Integrals über \mathcal{C} dadurch holomorph in Abhängigkeit von s . Es kommt also bei $\operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$ auf der rechten Seite noch folgender Beitrag zum überall außer für $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} - n, n \in \mathbb{N}$ konvergenten⁷

⁷ $E(z, \frac{1}{2} + ir)$ ist holomorph in z .

ABBILDUNG 2.3.0.1. Integrationsweg für $t := \frac{1}{2} + ir \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \text{Integral } & \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \text{ hinzu:} \\ & \frac{2\pi i}{i 4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \left(\text{Res}_{t=s} - \text{Res}_{t=1-s} \right) \frac{\sigma_{2t-1}(n) \Gamma(s+t-1) \Gamma(s-t) E(z, t)}{(\pi |n|)^{t-\frac{1}{2}} \Gamma(1-t) \zeta(2-2t)} \\ & = - \frac{\pi \sigma_{1-2s}(n) \Gamma(2s-1) E(z, 1-s)}{4^{s-1} \Gamma^2(s) \zeta(2s)}; \quad t := \frac{1}{2} + ir. \end{aligned}$$

Die beiden Residuen unterscheidet sich wegen der Funktionalgleichung der nicht-holomorphen Eisensteinreihe $E(z, s)$, s. Abschnitt A.7.6, und der Invarianz von $\frac{\sigma_{2s-1}(n)}{|n|^{s-\frac{1}{2}}}$ unter $s \rightarrow 1-s$ nur um das Vorzeichen. Also ist für $\frac{1}{2} < \text{Re } s < \frac{1}{2} + \delta, 0 < \delta$ klein

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \\ & = \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_C \frac{\sigma_{2t-1}(n) \Gamma(s+t-1) \Gamma(s-t) E(z, t)}{(\pi |n|)^{t-\frac{1}{2}} \Gamma(1-t) \zeta(2-2t)} dt \\ & \quad + \frac{\pi \sigma_{1-2s}(n) \Gamma(2s-1) E(z, 1-s)}{4^{s-1} \Gamma^2(s) \zeta(2s)} \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist meromorph in $-\frac{1}{2} < \text{Re } s < \frac{1}{2} + \delta$. Für $-\frac{1}{2} < \text{Re } s < \frac{1}{2}$ ist $\int_{-\infty}^{\infty} \dots = \int_C \dots$. Folgende Funktion liefert daher die analytische Fortsetzung von $\tilde{P}(z, \infty, s, n)$ nach $-\frac{1}{2} < \text{Re } s < \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z, \infty, s, n) & = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1} (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \sum_j \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1) f_{j,l}(z) \\ & \quad + \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \\ & \quad + \frac{\sigma_{1-2s}(n) \sin(\pi s) \Gamma(2s-1) E(z, s)}{4^{s-1} \pi^{2s-1} \zeta(2-2s)} \end{aligned}$$

Für $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z, \infty, s, n) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1} (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \sum_j \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1) f_{j,l}(z) \\ &+ \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s-\frac{1}{2}+ir) \Gamma(s-\frac{1}{2}-ir) E(z, \frac{1}{2}+ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2}-ir) \zeta(1-2ir)} dr \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\sigma_{1-2s}(n) \sin(\pi s) \Gamma(2s-1) E(z, s)}{4^{s-1} \pi^{2s-1} \zeta(2-2s)}, \end{aligned}$$

wenn man den Cauchyschen Hauptwert des Integrals nimmt, da die beiden Halbkreise von \mathcal{C} unter Berücksichtigung der Funktionalgleichung genau einem ganzen Kreis entsprechen. Es gibt zusätzliche Pole bei $s = \frac{\rho}{2}$, $\zeta(\rho) = 0$, die von der Eisensteinreihe kommen.

Sei $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s + j < \frac{3}{2}$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Bewegt man jetzt s nach links, bis $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s + j < \frac{1}{2} + \delta$ und ändert den Integrationsweg entsprechend der Zeichnung zu \mathcal{C} ab, so kommen wieder die Residuen dazu,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s-\frac{1}{2}+ir) \Gamma(s-\frac{1}{2}-ir) E(z, \frac{1}{2}+ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2}-ir) \zeta(1-2ir)} dr \\ &= \frac{-i}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma_{2t-1}(n) \Gamma(s+t-1) \Gamma(s-t) E(z, t)}{(\pi |n|)^{t-\frac{1}{2}} \Gamma(1-t) \zeta(2-2t)} dt + \\ &+ \frac{2\pi i}{i 4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \left(\operatorname{Res}_{t=1-j-s} - \operatorname{Res}_{t=s+j} \right) \frac{\sigma_{2t-1}(n) \Gamma(s+t-1) \Gamma(s-t) E(z, t)}{(\pi |n|)^{t-\frac{1}{2}} \Gamma(1-t) \zeta(2-2t)} \\ &= \frac{-i}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma_{2t-1}(n) \Gamma(s+t-1) \Gamma(s-t) E(z, t)}{(\pi |n|)^{t-\frac{1}{2}} \Gamma(1-t) \zeta(2-2t)} dt + \\ &+ \frac{(-|n|)^j \sigma_{1-2j-2s}(n) (s)_j \sin(\pi s) \Gamma(2s+j-1) E(z, s+j)}{4^{s-1} j! \pi^{2s+j-1} \zeta(2-2j-2s)} \end{aligned}$$

Bewegt man s in den Bereich $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s + j < \frac{1}{2}$, so ist das Integral über \mathcal{C} das gleiche wie über $(\frac{1}{2} - i\infty, \frac{1}{2} + i\infty)$

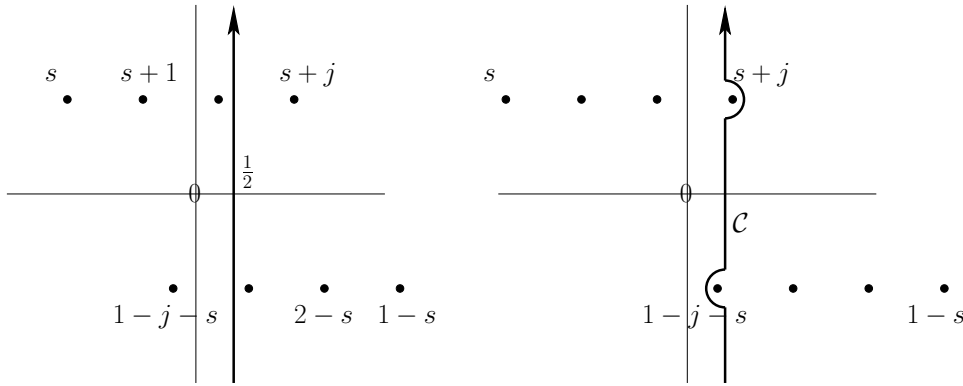


ABBILDUNG 2.3.0.2. verschiebe s stetig nach links

und induktiv ergibt sich in diesem Bereich die analytische Fortsetzung zu

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} +2\pi i \left(\operatorname{Res}_{t=1-s} + \operatorname{Res}_{t=-s} + \dots + \operatorname{Res}_{t=1-j-s} - \operatorname{Res}_{t=s} - \operatorname{Res}_{t=s+1} - \dots - \operatorname{Res}_{t=s+j} \right)$$

und für $\operatorname{Re} s + j = \frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} +2\pi i \left(\operatorname{Res}_{t=1-s} + \operatorname{Res}_{t=-s} + \dots + \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{t=1-j-s} - \operatorname{Res}_{t=s} - \operatorname{Res}_{t=s+1} - \dots - \frac{1}{2} \operatorname{Res}_{t=s+j} \right).$$

Für $-\frac{1}{2} - j < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2} - j$ liefert

$$\begin{aligned} \tilde{P}(z, \infty, s, n) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2s-1} (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \sum_j \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1) f_{j,l}(z) \\ &+ \frac{1}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s-\frac{1}{2}+ir) \Gamma(s-\frac{1}{2}-ir) E(z, \frac{1}{2}+ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2}-ir) \zeta(1-2ir)} dr \\ &+ \sum_{m=0}^j \frac{(-|n|)^m \sigma_{1-2m-2s}(n) (s)_m \sin(\pi s) \Gamma(2s+m-1) E(z, s+m)}{4^{s-1} m! \pi^{2s+m-1} \zeta(2-2m-2s)} \end{aligned}$$

die analytische Fortsetzung und für $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} - j$ nur die Hälfte des Summanden mit $m = j$ in der letzten Summe. Es kommen Pole bei $s = \frac{\ell}{2} - j, -\frac{1}{2} - j$ hinzu. Das beweist den Hilfssatz.

Für $y \searrow 0$ ist $y^s - e^{-2\pi|n|y} y^s = O(y^{\operatorname{Re} s+1})$. Also ist die Summe der Differenzen

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} \left\{ e^{2\pi i n \operatorname{Re} \gamma z} \operatorname{Im}^s \gamma z - e^{2\pi i n \operatorname{Re} \gamma z - 2\pi |n| \operatorname{Im} \gamma z} \operatorname{Im}^s \gamma z \right\}$$

und damit auch $\tilde{P}_n(z, s) - \tilde{P}(z, \infty, s, n)$ in $\operatorname{Re} s > 0$ holomorph und $P_n(z, s)$ nach $\operatorname{Re} s > 0$ analytisch fortsetzbar mit den gleichen Polen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ und für $s = \frac{\ell}{2}$ wie $\tilde{P}(z, \infty, s, n)$. Nimmt man noch einen Term der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion hinzu,

$$y^s - 2\pi |n| y^{s+1} - e^{-2\pi|n|y} y^s = O(y^{\operatorname{Re} s+2}),$$

so ist $P_n(z, s) - 2\pi |n| P_n(z, s+1) - \tilde{P}(z, \infty, s, n)$ holomorph in $\operatorname{Re} s > -1$ und man hat weitere Pole bei $s = t_j - 1, \frac{\ell}{2} - 1, -\frac{1}{2}$; wegen der Holomorphie von

$$P_n(z, s) - 2\pi |n| P_n(z, s+1) + \frac{4\pi^2 |n|^2}{2!} P_n(z, s+2) - \tilde{P}(z, \infty, s, n)$$

in $\operatorname{Re} s > -2$ usw. ergeben sich schließlich alle Pole von $P_n(z, s)$ in der Menge $\{t_j - n, \frac{\ell}{2} - n, -\frac{1}{2} - n\}, n \in \mathbb{N}_0$. Für die Residuen auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ hat man, vgl. [Neunhöffer, Satz 6.8] und (2.3.0.1)

$$\operatorname{Res}_{s=t_j} P_n(z, s) = \operatorname{Res}_{s=t_j} \tilde{P}(z, \infty, s, n) = \frac{\Gamma(\nu_j)}{2(\pi |n|)^{\nu_j}} \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} f_{j,l}(z).$$

Es ist nicht ganz geklärt, ob sich eventuell einzelne Pole bei $P_n(z, s)$ wieder aufheben, d.h. ob sich für ihr Residuum 0 ergeben kann.

Die zweite Aussage folgt aus⁸

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda_d} P_n(z, s) d_Q z &= \int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{D}_d(z) \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} e(n \operatorname{Re}(\gamma z)) \operatorname{Im}^s(\gamma z) d\mu \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2}} y^{s-2} c_n(y, d) dy = \frac{d^{\frac{s+1}{4}} \Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s-1}{2}} (2|n|)^{\frac{s-1}{2}}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{a^{\frac{s+1}{2}}} J_{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\pi |n| \sqrt{d}}{a} \right). \end{aligned}$$

Für $d < 0$ hat man

$$\sum_{Q \in \Gamma \setminus \mathcal{Q}_d} \frac{P_n(z_Q, s)}{w_Q} = \sum_{Q \in \Gamma \setminus \mathcal{Q}_d} \frac{1}{w_Q} (P_n(\cdot, s) \mathfrak{D}_d) = \sum_{Q \in \Gamma \setminus \mathcal{Q}_d} \frac{2|d|}{\pi w_Q} \int_{\mathfrak{F}} \delta \left(\left| \frac{Q(z, 1)}{y} \right|^2 \right) P_n(z, s) d\mu$$

mit dem bekannten 'Unfolding' ist das

$$= \frac{2|d|}{\pi} \sum_{Q \in \Gamma_{\infty} \setminus \mathcal{Q}_d} \int_0^{\infty} y^s \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta \left(\left| \frac{Q(z, 1)}{y} \right|^2 \right) e(nx) d\mu = \sum_{Q \in \Gamma_{\infty} \setminus \mathcal{Q}_d} y_Q^s e(nx_Q)$$

⁸Für $d = \square, \sqrt{d} |n$ muss man regularisieren.

mit $z_Q = x_Q + iy_Q = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{-d}}{2|a|}i$

$$= \sum_{Q \in \Gamma_\infty \setminus \mathcal{Q}_d} \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2|a|} \right)^s e_{2a}(-nb) = \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2} \right)^s \sum_{a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\sum_{\substack{b(2a) \\ b^2 \equiv d(4a)}} e^{-\frac{\pi i n b}{a}}}{a^s} = 2 \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2} \right)^s S_{n,d}(s).$$

□

2.3.1. Gewichtete Poincaréreihen. Entsprechend den gewichteten Eisensteinreihen kann man auch die Poincaréreihen noch etwas allgemeiner definieren und mit einem Drehfaktor versehen.

Definition 2.3.1.1. Für $n, k \in \mathbb{Z}, n \neq 0, z \in \mathcal{H}, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei

$$P_{n,2k}(z, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i n \operatorname{Re}(\gamma z)} \operatorname{Im}^s \gamma z \cdot e^{-2ik \arg(cz+d)}$$

Diese Poincaréreihen entsprechen den ${}^\infty P_{2k}^n(\operatorname{Im}^s z)$ aus [Bruggeman 1, (7.5)], sie transformieren wie automorphe Formen vom Gewicht $2k$:

$$P_{n,2k}(\gamma z, s) = \left(\frac{cz+d}{c\bar{z}+d} \right)^k P_{n,2k}(z, s);$$

sie haben ähnliche Eigenschaften wie für $k = 0$, die Summen sind absolut konvergent gegen eine in $\operatorname{Re}(s) > 1$ holomorphe und in $z \in \mathcal{H}$ reell-analytische Funktion. Leider sind die Funktionen nicht quadratintegrierbar; der Term für $\gamma = Id$ wächst zu schnell. Man kann wieder $P_{n,2k}(z)$ mit der folgenden Poincaréreihe vergleichen ($U_m(z, s; k, \chi, \Gamma')$ in [Selberg 2]):

Definition 2.3.1.2. Für $n, k \in \mathbb{Z}, n \neq 0, z \in \mathcal{H}, s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} s > 1, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sei

$$\tilde{P}_{n,2k}(z, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i n \operatorname{Re} \gamma z - 2\pi |n| \operatorname{Im} \gamma z} (\operatorname{Im} \gamma z)^s e^{-2ik \arg(cz+d)}$$

Satz 2.3.1.3. Die $\tilde{P}_{n,2k}(z, s)$ sowie die $P_{n,2k}(z, s)$ transformieren in z vom Gewicht $2k$, sind in \mathcal{D}_{2k}^2 , vgl. BEZEICHNUNGEN S. 282 und lassen sich analytisch in die ganze s -Ebene fortsetzen mit Polen

$$\in \left\{ \frac{\rho}{2} - n, t_j - n, -\frac{1}{2} - n, -1, -2, \dots, 1 - |k| \right\}.$$

BEWEIS.

Diese Poincaréreihen lassen sich auch so schreiben:

$$\tilde{P}_{n,2k}(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} f_s|_{2k}\gamma(z) \text{ mit } f_s(z) = e^{2\pi i n x - 2\pi |n| y} y^s.$$

Dann ist

$$\Delta_{2k} f_s(z) = s(1-s) f_s(z) + 4\pi n (s \operatorname{sign} n - k) f_{s+1}(z).$$

Da der Laplaceoperator Δ_{2k} mit $|_{2k}$ vertauschbar ist, gilt

$$(2.3.1.1) \quad \Delta_{2k} \tilde{P}_{n,2k}(z, s) = s(1-s) \tilde{P}_{n,2k}(z, s) + 4\pi n (s \operatorname{sign} n - k) \tilde{P}_{n,2k}(z, s+1),$$

d.h. für $s = k \operatorname{sign} n$ sind das Maaßformen. Falls $k \geq 6, n \in \mathbb{N}$ entsprechen sie den bekannten Poincaréreihen $P_{2k}(n, z) \in S_{2k}(\Gamma)$ aus Definition C.3.3.2.1.

Für $\operatorname{Re} s > 1$ ist die Reihe für $\tilde{P}_{n,2k}(z, s)$ lokal gleichmäßig konvergent, da sie durch die Eisensteinreihe $E(z, s)$ majorisiert wird. Man kann gliedweise unendlich oft differenzieren. Für $n \neq 0$ ist $\tilde{P}_{n,2k}(z, s)$ quadratintegrierbar

wegen dem exponentiellen Abfall von $f_s(z)$ für $y \rightarrow \infty$. Wegen (2.3.1.1) ist auch $\Delta_{2k} \tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(z, s) \in L^2(\mathfrak{F})$, also ist $\tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(z, s) \in \mathcal{D}_{2k}^2$ und ermöglicht eine Spektralentwicklung :

$$(2.3.1.2) \quad \left(\tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(z, s), f_{j,l} \right) = \int_0^\infty \int_0^1 y^s e^{-2\pi|n|y} e^{2\pi i n x} \overline{f_{j,l}(z)} d\mu = \overline{\gamma_{n,j,l}} \int_0^\infty y^{s-2} e^{-2\pi|n|y} \overline{W_{k \operatorname{sign} n, t_j - \frac{1}{2}}(4\pi|n|y)} dy$$

mit den Maaßformen $f_{j,l}(z) = \gamma_{0,j,l} y^{1-t_j} + \sum_{m \neq 0} \gamma_{m,j,l} W_{k \operatorname{sign} m, t_j - \frac{1}{2}}(4\pi|m|y) e(mx)$ vom Gewicht $2k$ zum Eigenwert $\lambda_j = t_j(1-t_j) \neq 0$.⁹ Es handelt sich dabei um dieselben Eigenwerte mit $\operatorname{Re} = \frac{1}{2}$ wie für Gewicht 0, außerdem zusätzlich endlich viele der Form $h(1-h)$, $h = 2, 3, \dots, |k|$, die von den holomorphen Spitzenformen vom Gewicht $2h$ herkommen bzw. deren Konjugierten und durch Anwendung der Maaßoperatoren auf Gewicht $2k$ gebracht werden [Roelcke 1, Satz 6.3]. Die Integrale (2.3.1.2) wurden in [Selberg 2, (3.19)] ausgewertet: Sei $\varepsilon = \operatorname{sign} n$:

$$(2.3.1.3) \quad \begin{aligned} & \int_0^\infty y^{s-2} e^{-2\pi|n|y} \overline{W_{k\varepsilon, t_j - \frac{1}{2}}(4\pi|n|y)} dy \\ & \stackrel{(A.7.4.2)}{=} \frac{(4\pi|n|)^{\overline{t_j}}}{2^{\overline{t_j}-1} \Gamma(\overline{t_j} - k\varepsilon)} \int_0^\infty y^{s+\overline{t_j}-2} \int_1^\infty e^{-2\pi|n|y(u+1)} (u+1)^{\overline{t_j}+k\varepsilon-1} (u-1)^{\overline{t_j}-k\varepsilon-1} du dy \\ & = \frac{2(\pi|n|)^{\overline{t_j}}}{\Gamma(\overline{t_j} - k\varepsilon)} \int_1^\infty (u+1)^{\overline{t_j}+k\varepsilon-1} (u-1)^{\overline{t_j}-k\varepsilon-1} \int_0^\infty y^{s+\overline{t_j}-2} e^{-2\pi|n|y(u+1)} dy du \\ & = \frac{4\Gamma(s+\overline{t_j}-1)}{2^{2s}(\pi|n|)^{s-1} \Gamma(\overline{t_j} - k\varepsilon)} \int_1^\infty (u+1)^{-s+k\varepsilon} (u-1)^{\overline{t_j}-k\varepsilon-1} du = \frac{\Gamma(s+\overline{t_j}-1) \Gamma(s-\overline{t_j})}{(4\pi|n|)^{s-1} \Gamma(s-k\varepsilon)} \end{aligned}$$

zunächst für $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(t_j) > k\varepsilon$, vgl. [Selberg 2, (3.19)]. Die $\tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(z, s)$ sind im Bereich $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$ regulär in s . Die endlich vielen negativen Eigenwerte $\lambda_j = h(1-h)$ liefern Pole auf der negativen reellen Achse, die positiven Eigenwerte mit $\operatorname{Re}(t_j) = \frac{1}{2}$ Pole bei $s = t_j$ und $1 - t_j = \overline{t_j}$. Selberg hat das kontinuierliche Spektrum nicht untersucht. Man hat hier, vgl. [Roelcke 2, Satz 7.2 und 12.3]

$$\int_{\mathfrak{F}} \tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(z, s) \overline{E_{2k}(z, \frac{1}{2} + ir)} d\mu \stackrel{\text{Satz A.5.1}}{=} \frac{(-1)^k \pi^{\frac{1}{2}-ir} |n|^{-\frac{1}{2}-ir} \sigma_{2ir}(n)}{\Gamma(\frac{1}{2} + k\varepsilon - ir) \zeta(1-2ir)} \int_0^\infty y^{s-2} e^{-2\pi|n|y} \overline{W_{k\varepsilon, ir}(4\pi|n|y)} dy$$

also,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^\infty \left(\tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(\cdot, s), E_{2k}(\cdot, \frac{1}{2} + ir) \right) E_{2k}(z, \frac{1}{2} + ir) dr \\ & = \frac{(-1)^k}{4^s (\pi|n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s-k\varepsilon)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s-\frac{1}{2}+ir) \Gamma(s-\frac{1}{2}-ir) E_{2k}(z, \frac{1}{2}+ir)}{(\pi|n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2}+k\varepsilon-ir) \zeta(1-2ir)} dr. \end{aligned}$$

⁹Ein Eigenwert 0 hätte $f_{j,l} \equiv \text{konst.}$ zur Folge, aber $(\tilde{\mathbb{P}}_{n,2k}(\cdot, s), \text{konst.}) = 0$

Für $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ ist das holomorph. Im Gebiet $\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2} + \delta$, Re ist ähnlich der Argumentation im vorigen Abschnitt für Gewicht 0:

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E_{2k}(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} + k\varepsilon - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \\
&= \int_{\mathcal{C}} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E_{2k}(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} + k\varepsilon - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \\
&\quad - 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{t=s} - \operatorname{Res}_{t=1-s} \right) \frac{\sigma_{2t-1}(n) \Gamma(s+t-1) \Gamma(s-t) E_{2k}(z, t)}{i (\pi |n|)^{t-\frac{1}{2}} \Gamma(1+k\varepsilon-t) \zeta(2-2t)}; \\
(2.3.1.4) \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \dots = \int_{\mathcal{C}} \dots + \frac{4\pi (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \sigma_{1-2s}(n) \Gamma(2s-1) E_{2k}(z, 1-s)}{\Gamma(s+k\varepsilon) \zeta(2s)}; \quad t := \frac{1}{2} + ir
\end{aligned}$$

mit dem Integrationsweg \mathcal{C} von Abb. 2.3.0.1. Die Beiträge der beiden Residuen sind aus denselben Gründen wie für Gewicht 0 gleich, vgl. auch die Funktionalgleichung der Eisensteinreihen $E_{2k}(z, s)$ in Abschnitt A.7.6 und $\frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(1+k-s)} = \frac{\Gamma(s-k)}{\Gamma(1-k-s)}$. $\int_{\mathcal{C}} \dots$ ist in $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2} + \delta$ holomorph. Daher lässt sich $\tilde{P}_{n,2k}(z, s)$ mit (2.3.1.4) auf diesen Bereich analytisch fortsetzen:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{n,2k}(z, s) &= \frac{1}{(4\pi |n|)^{s-1} \Gamma(s-k\varepsilon)} \left(\sum_j \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1) f_{j,l} + \sum_{h=2}^{|k|} \sum_l \overline{\gamma_{n,h,l}} \Gamma(s-h) \Gamma(s+h-1) f_{h,l} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^k}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s-k\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E_{2k}(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} + k\varepsilon - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \\
&\quad + \frac{(-1)^k \pi \sigma_{1-2s}(n) \Gamma(2s-1) E_{2k}(z, 1-s)}{4^{s-1} \Gamma(s+k) \Gamma(s-k) \zeta(2s)} \quad \text{für } -\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ähnlich wie auf S. 47 liefert

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{n,2k}(z, s) &= \frac{1}{(4\pi |n|)^{s-1} \Gamma(s-k\varepsilon)} \left(\sum_j \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma(s-t_j) \Gamma(s+t_j-1) f_{j,l} + \sum_{h=2}^{|k|} \sum_l \overline{\gamma_{n,h,l}} \Gamma(s-h) \Gamma(s+h-1) f_{h,l} \right) \\
&\quad + \frac{(-1)^k}{4^s (\pi |n|)^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s-k\varepsilon)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_{2ir}(n) \Gamma(s - \frac{1}{2} + ir) \Gamma(s - \frac{1}{2} - ir) E_{2k}(z, \frac{1}{2} + ir)}{(\pi |n|)^{ir} \Gamma(\frac{1}{2} + k\varepsilon - ir) \zeta(1 - 2ir)} dr \\
&\quad + \sum_{m=0}^j \frac{|n|^m \sigma_{1-2m-2s}(n) (s-k\varepsilon)_m \sin(\pi s) \Gamma(2s+m-1) E_{2k}(z, s+m)}{4^{s-1} m! \pi^{2s+m-1} \zeta(2-2m-2s)}
\end{aligned}$$

die analytische Fortsetzung auf $-\frac{1}{2} - j < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2} - j$ und für $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2} - j$ nur die Hälfte des Summanden mit $m = j$ in der letzten Summe. Es kommen Pole bei $s = \frac{\ell}{2} - j, -\frac{1}{2} - j, -1, -2, \dots, 1 - |k|$ hinzu. Mit derselben Argumentation wie für Gewicht 0 auf S. 47 hat $P_{n,2k}(z, \cdot)$ ebenfalls eine analytische Fortsetzung in die ganze s -Ebene mit Polen an den gleichen Stellen. \square

Mit dem regularisierten¹⁰ Rankin-Selberg-Unfolding kann man auch hier die Zyklenintegrale berechnen:

Satz 2.3.1.4. Für $d \in \mathbb{D}^{0+}$, $s \in \mathbb{C} \setminus \{t_j - n, -\frac{1}{2} - n, -1, -2, \dots, 1 - |k|\}$, $k \in 2\mathbb{Z}$ ist (nach analytischer Fortsetzung)

$$\begin{aligned}
C_d(P_{n,2k}(\cdot, s)) &= \mathbf{R} \int_{\Lambda_d} P_{n,2k}(z, s) d_{Q,2k} z \\
&= \sum_{m=0}^{|k|} \frac{d^{\frac{s-m+1}{4}} \Gamma(\frac{s+m}{2})}{2^{\frac{s-m-1}{2}} \pi^{\frac{s+m}{2}-1} |n|^{\frac{s+m-1}{2}}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{a^{\frac{s-m+1}{2}}} \begin{cases} c_m J_{\frac{s+m-1}{2}} \left(\frac{\pi |n| \sqrt{d}}{a} \right), & 2 \mid m \\ \operatorname{sign}(kn) d_m J_{\frac{s+m+1}{2}} \left(\frac{\pi |n| \sqrt{d}}{a} \right), & 2 \nmid m \end{cases}
\end{aligned}$$

¹⁰falls $d = \square, \sqrt{d} \mid n$

mit den Koeffizienten der Tschebyscheff-Polynome $T_{|k|}, U_{|k|-1}$

$$c_m \stackrel{[\text{AS}, 22.3.6]}{=} \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}, & m = 0 \\ (-1)^{\frac{k+m}{2}} \frac{|k|2^{m-1}}{m} \binom{\frac{|k|+m}{2}-1}{m-1}, & m > 0 \text{ gerade} \end{cases}$$

und

$$d_m \stackrel{[\text{AS}, 22.3.7]}{=} (-1)^{\frac{k+m+1}{2}} 2^m \binom{\frac{|k|+m-1}{2}}{m}, \quad m \text{ ungerade.}$$

Für ungerades k ist $\int_{\Lambda_d} \frac{P_{n,2k}(z,s)Q(z,1)^{k-1}}{y^k} ds = 0$.

BEWEIS. vgl. Satz 2.3.0.3; für $n = 0$ handelt es sich wieder um Eisensteinreihen. Annahme $n \neq 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda_d} P_{n,2k}(z,s) d_{Q,2k}z = \int_{\mathfrak{F}} P_{n,2k}(z,s) \mathfrak{D}_{d,2k}(z) d\mu \\ &= \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \text{SL}_2(\mathbb{Z})} e^{2\pi i n \text{Re}(\gamma z)} \left(\frac{c\bar{z}+d}{cz+d} \right)^k \text{Im}^s(\gamma z) \left(\frac{cz+d}{c\bar{z}+d} \right)^k \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(\gamma z)} d\mu = \int_0^\infty y^{s-2} \overline{c_{n,2k}(y,d)} dy \end{aligned}$$

(mit den Fourierkoeffizienten aus Satz 1.5.1.3:)

$$\begin{aligned} &= 4 \sum_{a=1}^\infty S_a(n,d) \cdot \left\{ \sqrt{d} \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} \frac{y^{s-1} T_{|k|} \left(\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \cos \frac{\pi n \sqrt{d-4a^2y^2}}{a}}{\sqrt{d-4a^2y^2}} dy + \text{sign}(k) \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} y^{s-1} U_{|k|-1} \left(\frac{2ay}{\sqrt{d}} \right) \sin \frac{\pi n \sqrt{d-4a^2y^2}}{a} dy \right\} \\ &= 4 \sum_{a=1}^\infty S_a(n,d) \left\{ \sqrt{d} \sum_{m=0}^{|k|} c_m \left(\frac{2a}{\sqrt{d}} \right)^m \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} \frac{y^{s+m-1} \cos \frac{\pi n \sqrt{d-4a^2y^2}}{a}}{\sqrt{d-4a^2y^2}} dy + \right. \\ & \quad \left. + \text{sign}(k) \sum_{m=0}^{|k|-1} d_m \left(\frac{2a}{\sqrt{d}} \right)^m \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} \frac{y^{s+m-1} \sin \frac{\pi n \sqrt{d-4a^2y^2}}{a}}{\sqrt{d-4a^2y^2}} dy \right\} \end{aligned}$$

mit den Tschebyscheff-Polynomen $T_{|k|}(z) = \sum_{m=0}^{|k|} c_m z^m, U_{|k|-1}(z) = \sum_{m=0}^{|k|-1} d_m z^m$

$$\begin{aligned} & \int_{\Lambda_d} P_{n,2k}(z,s) d_{Q,2k}z \stackrel{(\text{D.1.4.1})}{=} \stackrel{(\text{D.1.4.2})}{=} \\ & \sum_{m=0}^{|k|} \frac{d^{\frac{s-m+1}{4}} \Gamma\left(\frac{s+m}{2}\right)}{2^{\frac{s-m-1}{2}} \pi^{\frac{s+m}{2}-1} |n|^{\frac{s+m-1}{2}}} \sum_{a=1}^\infty \frac{S_a(n,d)}{a^{\frac{s-m+1}{2}}} \left\{ c_m J_{\frac{s+m-1}{2}} \left(\frac{\pi |n| \sqrt{d}}{a} \right) + \text{sign}(kn) d_m J_{\frac{s+m+1}{2}} \left(\frac{\pi |n| \sqrt{d}}{a} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Der zusätzliche Beitrag der regularisierten Integrale für $d = \square$ ist $2(-1)^{\frac{k}{2}} \delta_{r, \sqrt{d}\mathbb{N}_0} \sqrt{d} \mathbf{R} \int_0^\infty y^{s-1} dy = 0$. \square

2.4. Thetareihen

In diesem Abschnitt über Thetareihen sei d stets eine Fundamentaldiskriminante.

2.4.1. Hecke-Thetareihen. Es gibt einen einfachen Zusammenhang zwischen Thetareihen und Maaßformen. Während die Mellintransformation vieler eindimensionaler Thetareihen auf Zetafunktionen führt und so zum Beweis der Funktionalgleichungen vieler Zetafunktionen verwendet wird, hat man bei Zyklenintegralen von zweidimensionalen Thetareihen in vielen Fällen Maaßformen. Die Analogie bei Körpern n -ten Grades zum eindimensionalen Fall ist folgendermaßen: Man kommt wieder auf Zetafunktionen, indem man $(n-1)$ Zyklenintegrale und dann die Mellintransformation (Integrale entlang der Geodätischen $(0, i\infty)$) bildet, vgl. [Hecke 2, §4 (18)]. Für reell-quadratische Körper lauten die Thetareihen wie folgt:

Definition 2.4.1.1. Seien $t, t' \in \mathbb{R}^+$, $d \in \mathbb{D}^+$, \mathfrak{a} ein Ideal in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, $\varrho \in \mathfrak{a}$, N eine natürliche Zahl, $N(\mathfrak{a}) = A$

$$\begin{aligned}\vartheta_0(t, t', \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) &:= \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\bmod \mathfrak{a}N\sqrt{d})}} e^{-\frac{\pi}{ANd}(\mu^2 t + \mu'^2 t')} \\ \vartheta_1(t, t', \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) &:= \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\bmod \mathfrak{a}N\sqrt{d})}} \mu \mu' e^{-\frac{\pi}{ANd}(\mu^2 t + \mu'^2 t')}\end{aligned}$$

Als Zyklenintegrale ergeben sich die Funktionen

$$g(z, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) := \delta_n \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{a}N\sqrt{d}} \right) \log \varepsilon \cdot \sqrt{y} + \frac{\sqrt{y}}{\chi_n(\mathfrak{a})} \sum'_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\bmod \mathfrak{a}N\sqrt{d}) \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} \chi_n(\mu) K_{fn} \left(\frac{2\pi |N(\mu)|}{ANd} y \right) e^{\frac{2\pi i N(\mu)}{ANd} x}.$$

Das sind $\Gamma(Nd)$ -Maaßformen vom Gewicht Null, vgl. [Maaß 1, (29)]; dabei wird über ein volles System von nicht verschwindenden, $(\bmod N\sqrt{d})$ nicht assoziierten Zahlen μ der Restklasse $\varrho \pmod{\mathfrak{a}N\sqrt{d}}$ mit $\text{sign } \mu = \text{sign } \varrho$, $\text{sign } \mu' = \text{sign } \varrho'$ summiert.

$$\delta_n(\mathfrak{c}) := \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \text{ und ein ganzes Ideal } \mathfrak{c} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ε erzeugt die Gruppe der total positiven Einheiten aus $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, die $(\bmod N\sqrt{d})$ der 1 kongruent sind, χ_n ist ein Größencharakter nach ε . Sie gehören zu dem Paar von Dirichletreihen

$$\begin{aligned}\zeta_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) &:= \frac{A^s}{\chi_n(\mathfrak{a})} \sum'_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\bmod \mathfrak{a}N\sqrt{d}) \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} \frac{\chi_n(\mu)}{|N(\mu)|^s} \\ \zeta_1(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) &:= \frac{A^s}{\chi_n(\mathfrak{a})} \sum'_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\bmod \mathfrak{a}N\sqrt{d}) \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} \text{sign } N(\mu) \frac{\chi_n(\mu)}{|N(\mu)|^s}\end{aligned}$$

vgl. ([Maaß 1, (23)], [Lewis Zagier]), mit den zugehörigen Γ -Faktoren

$$\begin{aligned}\xi_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) &:= \left(\frac{Nd}{\pi} \right)^s \Gamma \left(\frac{s - fn}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s + fn}{2} \right) \zeta_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) \\ \xi_1(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) &:= \left(\frac{Nd}{\pi} \right)^{s+1} \Gamma \left(\frac{s + 1 - fn}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s + 1 + fn}{2} \right) \zeta_1(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}).\end{aligned}$$

Die Wurzeln $w, w' \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ von quadratischen Gleichungen der Diskriminante $d > 0$ bestimmen die Endpunkte einer Geodätischen in der abgeschlossenen oberen Halbebene $\overline{\mathcal{H}}$, und die Zyklenintegrale über diese Majorantenräume führen auf Maaßformen des reell-quadratischen Körpers bzw. per Mellintransformation auf die zugehörigen Zetafunktionen.

Satz 2.4.1.2. *Mit den Bezeichnungen von oben und $\sigma > \max(1, |fn|)$ ist*

$$(1) \quad \frac{\sqrt{y}}{2\chi_n(\mathfrak{a})} \int_{-\log \varepsilon}^{\log \varepsilon} \vartheta_0(ye^v, ye^{-v}, \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) e^{fnv} dv = g(iy, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}),$$

$$(2) \quad \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi_0(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) y^{\frac{1}{2}-s} ds = g(iy, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) - \text{konst.},$$

$$(3) \quad \frac{\sqrt{y}}{2\chi_n(\mathfrak{a})} \int_{-\log \varepsilon}^{\log \varepsilon} \vartheta_1(ye^v, ye^{-v}, \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) e^{fnv} dv = \frac{ANd}{2\pi i} \frac{\partial g}{\partial x}(iy, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}),$$

$$(4) \quad \frac{1}{8\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \xi_1(s, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) y^{\frac{1}{2}-s} ds = y \frac{ANd}{2\pi i} \frac{\partial g}{\partial x}(iy, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}).$$

Zunächst ein

Hilfssatz 2.4.1.3. *Sei χ_n der Größencharakter von Definition 2.1.2.1. Für $u > 0$ ist*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-u(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})\} e^{-fnv} dv = 2\chi_n(\mu) K_{fn}(2u|N\mu|)$$

BEWEIS. Die Mellintransformierte des Integrals ist nach (2.1.2.7) und (2.1.2.8): $\frac{\Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right)\chi_n(\mu)}{2|N(\mu)|^s}$. Also ist nach Mellins Inversionsformel [Apostol 2, 3.5 f.], [Maaß 1, (52)] für $\sigma > \max(1, |fn|)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-u(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})\} e^{-fnv} dv = \frac{\chi_n(\mu)}{4\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s+fn}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-fn}{2}\right)}{(u|N(\mu)|)^s} ds = 2\chi_n(\mu) K_{fn}(2u|N(\mu)|).$$

□

BEWEIS DES SATZES.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{y}}{2\chi_n(\mathfrak{a})} \int_{-\log \varepsilon}^{\log \varepsilon} \vartheta_1(ye^v, ye^{-v}, \varrho, \mathfrak{a}, N\sqrt{d}) e^{-fnv} dv &= \frac{\sqrt{y}}{2\chi_n(\mathfrak{a})} \sum'_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} \int_{-\infty}^{\infty} \mu \mu' e^{-\frac{\pi y}{ANd}(\mu^2 e^v + \mu'^2 e^{-v})} e^{-fnv} dv \\ &= \frac{\sqrt{y}}{\chi_n(\mathfrak{a})} \sum'_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} N(\mu) \chi_n(\mu) K_{fn}\left(\frac{2\pi|N(\mu)|}{ANd}y\right) \end{aligned}$$

wegen Hilfssatz 2.4.1.3 und mit

$$(2.4.1.1) \quad \frac{\partial g}{\partial x}(iy, \varrho, \mathfrak{a}, \chi_n, N\sqrt{d}) = \frac{2\pi i}{ANd\chi_n(\mathfrak{a})} \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} \chi_n(\mu) N(\mu) \sqrt{y} K_{fn}\left(\frac{2\pi|N(\mu)|}{ANd}y\right) e^{\frac{2\pi i N(\mu)}{ANd}x}$$

und [Maaß 1, (55),(59)] folgt die 3. und 4. Beh., vgl. auch Hilfssatz 2.1.2.2. □

Auf den Spezialfall

$$\int_{-\log \varepsilon_{0,2}}^{\log \varepsilon_{0,2}} \sum_{\varrho \pmod{(\sqrt{d}\mathfrak{a})}} \vartheta_0(yde^v, yde^{-v}, \varrho, (1, w'), \sqrt{d}) dv = \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{F}_Q} \theta_Q(iy, P) dv_{\mathfrak{F}},$$

summiert über alle Restklassen $\pmod{(\sqrt{d})}$ in \mathfrak{a} , wird im nächsten Abschnitt 2.4.2 ausführlicher eingegangen.

Das folgende Beispiel wird im nächsten Kapitel von Bedeutung sein:

2.4.2. Siegel-Thetareihen zu indefiniten binären quadratischen Formen.

Ähnlich wie beim Rankin-Selberg Verfahren bzw. bei Heckes Beweis der Heckeschen Integralformel kann man auch die Thetareihen zu reell-quadratischen Körpern über Geodätische der Poincaréhalbebene integrieren, wenn man die Punkte τ der oberen Halbebene mit der definiten quadratischen Form P (Majorante) mit $P(\tau, 1) = 0$ identifiziert.

Sei $Q = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}$ die Matrix einer indefiniten quadratischen Form der Grundzahl d . Sei L eine feste reguläre reelle Matrix mit $(L^{-1})^T Q (L^{-1}) = Q_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Der zugehörige Majorantenraum ist nach [Siegel 5, Ch.III §5; Ch.II §6 (68)]

$$\mathfrak{P}_Q = \left\{ L^T \begin{pmatrix} \frac{1+X^2}{1-X^2} & \frac{2X}{1-X^2} \\ \frac{2X}{1-X^2} & \frac{1+X^2}{1-X^2} \end{pmatrix} L \mid -1 < X < 1 \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{d}}{2 \operatorname{Im} \tau} \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{Re} \tau \\ -\operatorname{Re} \tau & |\tau|^2 \end{pmatrix} \mid \tau \in \mathfrak{C}_Q \right\}.$$

Für $a = 0$ ist \mathfrak{C}_Q die senkrechte Gerade auf $-\frac{c}{b}$. Dann ist die Thetareihe ($z = x + iy \in \mathcal{H}$)

$$\begin{aligned} \theta_Q(z, P) &:= \theta_Q(z, \tau) := \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i(xQ(x_1, x_2) + iyP(x_1, x_2))} \\ &= \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} e \left(x(ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2) + i \frac{y\sqrt{d}}{2 \operatorname{Im} \tau} (x_1^2 - 2 \operatorname{Re}(\tau) x_1x_2 + |\tau|^2 x_2^2) \right) \end{aligned}$$

in $\tau \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ -invariant, auf der Geodätischen $\tau \in \mathfrak{C}_Q$ periodisch und lässt sich bezüglich des Bogenlängenparameters in eine Fourierreihe entwickeln. Ist $\gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(d)$, so transformiert sich die Thetareihe nach [Duke 1] wie folgt:

$$\theta_Q(\gamma z, \tau) = \chi_d(D) |Cz + D| \theta_Q(z, \tau).$$

Satz 2.4.2.1. Sei $Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2$ eine quadratische Form mit Fundamentaldiskriminante $d > 0$ und $R(t, \mathcal{A})$ die Anzahl der inäquivalenten Darstellungen von t durch eine quadratische Form Q der Klasse \mathcal{A} im weiteren Sinne, dann ist

$$\sqrt{y} \int_{\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q} \theta_Q(z, \tau) d_Q \tau = 2\sqrt{y} \left(\log \varepsilon_0 + \sum_{t \neq 0} R(t, \mathcal{A}) K_0(2\pi |t|y) e(tx) \right),$$

eine Maßform vom Gewicht Null der Diskriminante d für $\Gamma_0(d)$.

Bemerkung. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Heckeschen Funktion $\vartheta_0(ye^v, ye^{-v}, 0, b, \sqrt{d})$, vgl. [Maß 1, (91)].

BEWEIS. Sei $\Gamma_{(Q,2)} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix} \mid t^2 - du^2 = \pm 4 \right\}$ die Einheitengruppe der quadratischen Form Q . Die zu (g_1, g_2) assoziierten Lösungen $(x_1, x_2) \sim (g_1, g_2)$ sind solche, für die $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$ mit einer Einheit $U \in \Gamma$. Mit dem bekannten 'Unfolding' ist dann für $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \neq \mathfrak{o}$, d.h. $U \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{(x_1, x_2) \sim (g_1, g_2)} \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{P}_Q} e^{2\pi(-yP(x_1, x_2) + ixQ(x_1, x_2))} dv_{\mathfrak{P}} \\ &= \sum_{U \in \Gamma} \int_{\Gamma \backslash \mathfrak{P}_Q} e^{2\pi(-yP[U](g_1, g_2) + ixQ[U](g_1, g_2))} dv_{\mathfrak{P}} = e^{2\pi itz} \int_{\mathfrak{P}_Q} e^{-4\pi yw} dv_{\mathfrak{P}} \end{aligned}$$

mit $t = Q(g_1, g_2) \neq 0$ und $w = \frac{Q+P}{2} \left[\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \right]$, also

$$\int_{\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q} \theta_Q(z, \tau) |d_Q \tau| = \int_{\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q} |d_Q \tau| + 2 \sum_{t \neq 0} R(t, Q) e^{2\pi i t z} \int_{\mathfrak{P}_Q} e^{-4\pi y w} dv_{\mathfrak{P}}.$$

Der Beitrag für $t = 0$ kommt nur von $x_1 = x_2 = 0$, da Q keine Nullform ist und ist $2 \log \varepsilon_0$. Für $t \neq 0$ lässt sich das Integral auf einen eindimensionalen hyperbolischen Raum transformieren wie in [Maaß 3, 1]. Sei

$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$. Dann ist $w = \frac{(q_1 + X q_2)^2}{1 - X^2} = \frac{1}{4\xi^2} ((q_1 + q_2)\xi^2 + q_1 - q_2)^2$ mit dem Parameter X des Majorantenraums \mathfrak{P}_Q aus [Siegel 5, Ch.III, §5] und $X = \frac{\xi^2 - 1}{\xi^2 + 1}$. Für das Linienelement hat man $dv_{\mathfrak{P}} = \frac{dX}{1 - X^2} =$

$\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2} d_Q \tau$. Jetzt wendet man die Isometrie $\hat{\xi} = \sqrt{\left| \frac{q_1 + q_2}{q_1 - q_2} \right|} \xi$ an, ($\hat{\xi}$ ist eine Koordinate der hyperbolischen Gerade \mathfrak{P}_Q) und hat $w = \frac{|t|}{4} \left(\hat{\xi} + \frac{\text{sign} t}{\hat{\xi}} \right)^2$, d.h.

$$\int_{\mathfrak{P}_Q} e^{-4\pi y w} dv_{\mathfrak{P}} = \int_0^\infty e^{-\pi y |t| \left(\hat{\xi} + \frac{\text{sign} t}{\hat{\xi}} \right)^2} \frac{d\hat{\xi}}{\hat{\xi}} \stackrel{(D.1.4.6)}{=} e^{-2\pi t y} K_0(2\pi |t| y).$$

□

Ein anderer Beweis ergibt sich aus Hilfssatz 2.4.1.3, $\mathfrak{b} = (1, w')$, $N(\mathfrak{b}) = \frac{1}{a}$ und der Parametrisierung

$$\begin{aligned} \mu &= x_1 - x_2 w', & i e^v &= \frac{\tau - w}{\tau - w'}, & \tau &= \frac{i e^v w' - w}{i e^v - 1}, \\ \text{Im } \tau &= \frac{w - w'}{e^v + e^{-v}}, & |x_1 - x_2 \tau|^2 &= \frac{e^v \mu^2 + e^{-v} \mu'^2}{e^v + e^{-v}}, & d_Q \tau &= dv. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{y} \int_{\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q} \theta_Q(z, \tau) d_Q \tau &\stackrel{(2.1.2.3)}{=} \sqrt{y} \sum_{x_1, x_2 \in \mathbb{Z}} e(xQ(x_1, x_2)) \int_{\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q} \exp \left\{ -\frac{\pi y \sqrt{d}}{\text{Im } \tau} (x_1^2 - 2 \text{Re}(\tau) x_1 x_2 + |\tau|^2 x_2^2) \right\} d_Q \tau \\ &= 2\sqrt{y} \log \varepsilon_{0,2} + \sqrt{y} \sum_{\substack{\mu \neq 0 \\ \mu \in \mathfrak{b}/\varepsilon_{0,2}}} e(xaN\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -\pi y |a| (e^v \mu^2 + e^{-v} \mu'^2) \} dv \\ &= 2\sqrt{y} \left\{ \log \varepsilon_{0,2} + \sum_{\substack{\mathfrak{b} | (\mu) \\ \mu \neq 0}} K_0(2\pi y |aN\mu|) e(xaN\mu) \right\} \quad \text{mit Hilfssatz 2.4.1.3.} \end{aligned}$$

Dabei wird über Hauptideale im weiteren Sinn summiert. Der Faktor 2 erscheint, weil μ und $-\mu$ im gleichen Hauptideal liegen. Diese Maaßform gehört unter der bekannten Korrespondenz via Mellintransformation zur Zetafunktion $\zeta(\mathcal{A}, s)$ der Äquivalenzklasse \mathcal{A} (im weiteren Sinn) der quadratischen Form Q .

Bemerkung. Dieses Zyklenintegral lässt sich wieder im Fundamentalbereich \mathfrak{F} auswerten. Falls $N(\varepsilon_{0,2}) = -1$ läuft die geschlossene Geodätische $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$ in sich selbst zurück, $-Q = \gamma_{Q,2} \circ Q$. Es handelt sich bei $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$ nur um die eine Hälfte der Geodätischen $\Gamma_Q \backslash \mathfrak{C}_Q$.

Etwas allgemeiner gibt es folgenden Lift

Satz 2.4.2.2. *Ist $n \neq 0$, f und χ_n zur Einheit $\varepsilon_{0,2}$ wie in Definition 2.1.2.1 und Q eine quadratische Form der Grundzahl d , so ist*

$$\sqrt{y} \int_{\Gamma_{Q,2} \backslash \mathfrak{C}_Q} \left| \frac{\tau - w'}{\tau - w} \right|^{fn} \theta_Q(z, \tau) d_Q \tau = 2\sqrt{y} \sum_{\substack{\mathfrak{a} | (\mu) \\ \mu \neq 0}} \chi_n(\mu) K_{fn}(2\pi y |aN\mu|) e(xaN\mu)$$

eine Maaß-Spitzenform vom Gewicht Null der Diskriminante d für $\Gamma_0(d)$ mit Eigenwert $\lambda = \frac{1}{4} - f^2 n^2$.

BEWEIS. Der Beweis von Satz 2.4.2.1 lässt sich mit Hilfssatz 2.4.1.3 problemlos übertragen. \square

Die letzten beiden Abschnitte geben Anlass zu folgender Aussage über Zyklenintegrale von Thetareihen über geschlossene Geodätische im Fundamentalbereich von Kongruenzuntergruppen in Verallgemeinerung von Satz 2.4.1.2

Satz 2.4.2.3. Sei $N \in \mathbb{N}$, $Q = (a, b, c)$, $P = \frac{\sqrt{d}}{2 \operatorname{Im} \tau} (1, -2 \operatorname{Re} \tau, |\tau|^2)$, $\mathbf{a} = (1, w')$, $N(\mathbf{a}) = A = \frac{1}{|a|}$, $\varrho \in \mathbf{a}$; ε erzeuge die Gruppe der total positiven Einheiten Γ_ε aus $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, die $\equiv 1 \pmod{N\sqrt{d}}$ sind und χ_n ein Größencharakter nach ε , $n \neq 0$; dann ist

$$\begin{aligned} & \sqrt{y} \int_{\Gamma_\varepsilon \backslash \mathfrak{C}_Q} \left\{ \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_1 - x_2 w' \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}}} } e_{Nd}(xQ(x_1, x_2) + iyP(x_1, x_2)) \right\} \left| \frac{\tau - w'}{\tau - w} \right|^{fn} d_Q \tau = 2\chi_n(\mathbf{a}) g(z, \varrho, \mathbf{a}, \chi_n, N\sqrt{d}), \\ & \sqrt{y} \int_{\Gamma_\varepsilon \backslash \mathfrak{C}_Q} \left\{ \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_1 - x_2 w' \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}}} } Q(x_1, x_2) e_{Nd}(xQ(x_1, x_2) + iyP(x_1, x_2)) \right\} \left| \frac{\tau - w'}{\tau - w} \right|^{fn} d_Q \tau \\ & = \chi_n(\mathbf{a}) \frac{Nd}{\pi i} \frac{\partial}{\partial x} g(z, \varrho, \mathbf{a}, \chi_n, N\sqrt{d}). \end{aligned}$$

BEWEIS FÜR DIE ZWEITE AUSSAGE.

$$\begin{aligned} & \sqrt{y} \int_{\Gamma_\varepsilon \backslash \Gamma_Q} \sum_{\substack{x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \\ x_1 - x_2 w' \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}}} } Q(x_1, x_2) e^{\frac{2\pi i x Q(x_1, x_2)}{Nd} - \frac{\pi y \sqrt{d}}{\operatorname{Im} \tau Nd} |x_1 - x_2 \tau|^2} \left| \frac{\tau - w'}{\tau - w} \right|^{fn} d_Q \tau \\ & = \sqrt{y} \sum_{\substack{\mu = x_1 - x_2 w' \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}}} } |a| \mu \mu' e^{\frac{2\pi i x Q(x_1, x_2)}{Nd}} \int_{-\log \varepsilon}^{\log \varepsilon} e^{-\frac{\pi |a| y}{Nd} (e^v \mu^2 + e^{-v} \mu'^2)} e^{fnv} dv \\ & = \sqrt{y} \sum_{\substack{\mu = x_1 - x_2 w' \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}} \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} |a| \mu \mu' e^{\frac{2\pi i x Q(x_1, x_2)}{Nd}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi |a| y}{Nd} (e^v \mu^2 + e^{-v} \mu'^2)} e^{fnv} dv \\ & = \frac{2\sqrt{y}}{A} \sum_{\substack{\mu \equiv \varrho \pmod{N\sqrt{d}} \\ (\mu)_{N\sqrt{d}p_\infty}}} \chi_n(\mu) N(\mu) K_{fn} \left(\frac{2\pi |N\mu|}{ANd} y \right) e^{\frac{2\pi i x |a| \mu \mu'}{Nd}} \end{aligned}$$

mit Hilfssatz 2.4.1.3, (2.4.1.1) und Definition 2.4.1.1. \square

Ähnliche Gedanken finden sich in [Niwa 1, Example 2].

2.5. Maaßspitzenformen

Zyklenintegrale von Eisensteinreihen kamen schon im Abschnitt 2.1 vor. Hier sind einige Beispiele für Spitzenformen:

2.5.1. Maaß-Thetalift für indefinite ternäre quadratische Formen.

Duke hat in seiner Arbeit [Duke 1, Theorem 4] auf einen Lift von Maaßformen des Gewichtes Null auf Maaßformen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ hingewiesen, der durch ein inneres Produkt im Majorantenraum der Form $Q(a, b, c) = 4ac - b^2$ mit der folgenden Siegelschen Thetafunktion vermittelt wird.

Definition 2.5.1.1. Sei $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ eine ternäre quadratische Form und P eine Majorante¹¹ von Q .

Definiere

$$\Theta_Q(z, P) := y^{\frac{3}{4}} \sum_{a, b, c \in \mathbb{Z}} e \left((a \ b \ c) R \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) \text{ mit } R = xQ + iyP.$$

$\Theta_Q(z, P)$ transformiert wie eine automorphe Form in z vom Gewicht $-\frac{1}{2}$ für $\Gamma_0(4)$ mit Multiplikator $j(\gamma, z)^{-1}$, $j(\gamma, z) := \frac{\theta(\gamma z)}{\theta(z)}$, $\theta(z) = \sqrt[4]{y} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z)$, d.h.

$$\Theta_Q(\gamma z, P) = j(\gamma, z)^{-1} \Theta_Q(z, P) \text{ für } \gamma \in \Gamma_0(4).$$

Durch Hauptachsentransformation $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ wird die quadratische Form Q diagonalisiert: $Q_0(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$. Als Majorante von Q_0 bezeichnet man die Form $P_0(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Q hat die Signatur $(1, 2)$ und $Q = C^T Q_0 C$ mit der Majorante $P = C^T P_0 C$. Die Matrix C ist nicht eindeutig festgelegt. Es gibt viele Majoranten der quadratischen Form Q , die sich mit Hilfe der oberen Halbebene parametrisieren lassen, vgl. [Maaß 3, 1], [Siegel 4, (5.16)]:

$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathfrak{P}_Q$$

$$\tau = \xi + i\eta \longmapsto P = \frac{1}{\eta^2} C^T \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (|\tau|^2 - 1)^2 + \eta^2 & \xi (|\tau|^2 - 1) & \frac{1}{2} (|\tau|^4 - 1) \\ \xi (|\tau|^2 - 1) & \xi^2 + |\tau|^2 & \xi (1 + |\tau|^2) \\ \frac{1}{2} (|\tau|^4 - 1) & \xi (|\tau|^2 + 1) & \frac{1}{2} (|\tau|^2 + 1)^2 - \eta^2 \end{pmatrix} C,$$

Sei $\Gamma = \mathfrak{P}_Q \cap \text{Sl}_3(\mathbb{Z}) \cong \text{SL}_2(\mathbb{Z})$; man erhält eine in $\tau = \xi + i\eta$ Γ -invariante Funktion $\Theta_Q(z, \tau)$. Die Thetafunktionen sind keine Eigenfunktionen des Laplaceoperators. Doch durch Mittelbildung von Produkten der Thetafunktion mit Maaßformen über den Majorantenbereich der quadratischen Form Q kommt man auf Eigenfunktionen.

Hält man $(a \ b \ c)^T Q \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = d$ fest, so transformiert der Integrationsbereich $\mathfrak{F} = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ in $\Gamma_{(a, b, c)} \backslash \mathcal{H}$ und bei

Anwendung von Normalkoordinaten ergibt sich für $d > 0$ eine Integration über den Kreisring $\frac{1}{\varepsilon_0} \leq |w| \leq \varepsilon_0$, vgl.

Abb. 1.3.1. In Polarkoordinaten $w = re^{i\theta}$ tritt eine Trennung der Variablen auf, so dass man ein Produkt mit dem Integral über $\left[\frac{i}{\varepsilon_0}, i\varepsilon_0 \right]$ erhält; das ist wieder ein Zyklenintegral über Λ_d .

Satz 2.5.1.2. [Maaß 3] Sei $\Theta_Q(z, \tau) = \Theta_Q(z, P)$ die Thetareihe aus Definition 2.5.1.1; $f(\tau) \neq \text{konst.}$ eine Maaß-Spitzenform vom Gewicht 0 zum Spektralparameter ν . Dann hat das Integral von $f(\tau) \overline{\Theta_Q(z, \tau)}$ über den Standardfundamentalebenebereich \mathfrak{F} folgende Fourierentwicklung

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \overline{\Theta_Q(z, \tau)} \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sum_{d \in \mathbb{D}^0} \frac{C_d(f)}{\pi \frac{\text{sign } d}{4} |d|^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{\text{sign } d}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |d| y) e(dx).$$

Das ist eine Maaß-Spitzenform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ und Diskriminante -4 für $\Gamma_0(4)$ zum Spektralparameter $\frac{\nu}{2}$.

BEWEIS. vgl. [Maaß 3, (15)-(18)], [Duke 1, Theorem 6 und 4], s. auch Abschnitt 3.1.5. □

Aus der Tatsache der Konvergenz dieser Fourierkoeffizienten gegen Null für $d \rightarrow \infty$ folgert [Duke 1] die Gleichmäßigkeit der Geodätischenverteilung .

¹¹s. Kap. 3

Bemerkung. Ähnlich dem holomorphen Fall lassen sich die Zyklenintegrale als Fourierkoeffizienten einer automorphen Form deuten ([Duke 1, Theorem 4]). Satz 2.5.1.2 ist die nicht-holomorphe Version des Shintani-Lifts. Genaueres folgt in Kapitel 3.

2.5.2. Residuen der Dirichletreihe $S_{n,d}(s)$ bei $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Keine einzige Maaßform vom Gewicht Null bzw. $\frac{1}{2}$ ist explizit bekannt. Betrachte jedoch die Dirichletreihen

$$S_{n,d}(s) := \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n,d)}{a^s}, \operatorname{Re} s > 1 \text{ mit } S_a(n,d) = \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} e\left(\frac{nb}{2a}\right), d \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}.$$

Ihre analytische Fortsetzung bzw. die Lage der Pole auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ und ihre Residuen enthalten alle Informationen über die Eigenwerte und Fourierkoeffizienten dieser Maaßformen.

Satz 2.5.2.1. Die Dirichletreihe $S_{n,d}(s)$ lässt sich in die ganze Ebene analytisch fortsetzen mit Polen in

$$\left\{ t_j - m, \frac{\rho}{2} - m, -\frac{1}{2} - m, -2m - 1 \right\}_{m \in \mathbb{N}_0}.$$

Dabei sind $f_{j,l}(z) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \gamma_{m,j,l} \sqrt{y} K_{\nu_j}(2\pi|m|y) e(mx)$ die normierten Maaß-Spitzenformen zum Spektralparameter $\nu_j = t_j - \frac{1}{2} \in i\mathbb{R}$ und ρ Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion.

Für $n \neq 0, d \in \mathbb{D}^0, \operatorname{Re} s > 0$ sind die einzigen Pole auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ mit den Residuen

$$\operatorname{Res}_{s=t_j=\frac{1}{2}+\nu_j} S_{n,d}(s) = \begin{cases} \frac{2^{t_j-2} \Gamma\left(\frac{t_j+1}{2}\right) \Gamma(\nu_j)}{|n|^{\nu_j} \pi^{t_j} d^{\frac{t_j}{2}} \Gamma\left(\frac{t_j}{2}\right)} \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} C_d(f_{j,l}), & d > 0 \\ \frac{2^{t_j-1} \Gamma(\nu_j)}{(|n| \pi)^{\nu_j} |d|^{\frac{t_j}{2}}} \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} C_d(f_{j,l}), & d < 0 \end{cases}$$

falls die Summen $\neq 0$ sind.

Für $d = 0$ ist $S_{n,0}(s) = \sigma_{1-2s}(n) \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ und es gibt Pole entsprechend den Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion.

Bemerkung. Vermutlich gibt es nur eine Form $f_{j,l}$ zum Parameter ν_j .

BEWEIS. Die Residuen von $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n,d)}{a^{\frac{s+1}{2}}} J_{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{\pi|n|\sqrt{d}}{a}\right)$ sind nach Satz 2.3.0.3 dieselben¹² wie die von $\int_{\Lambda_d} P_n(z,s) d\Lambda_d z$. Nun ist

$$J_{\frac{s-1}{2}}(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{s-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{s+3}{2}}}{1! \Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{s+7}{2}}}{2! \Gamma\left(\frac{s+5}{2}\right)} + O\left(\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{s+11}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s+7}{2}\right)}\right)$$

und daher die Differenzenreihe

$$(2.5.2.1) \quad \sum_{a=1}^{\infty} \left\{ \frac{S_a(n,d)}{a^{\frac{s+1}{2}}} J_{\frac{s-1}{2}}\left(\frac{\pi|n|\sqrt{d}}{a}\right) - \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)} \left(\frac{\pi|n|\sqrt{d}}{2}\right)^{\frac{s-1}{2}} \frac{S_a(n,d)}{a^s} \right\}$$

in $\operatorname{Re} s > -1$ holomorph. Nimmt man noch weitere Terme der unendlichen Reihe für die Besselfunktion hinzu, so erhält man wieder die analytische Fortsetzung auf alle $s \in \mathbb{C}$, vgl. die Argumentation S. 47 f.

¹²bis auf Faktoren

Satz 2.3.0.3 zusammen mit (2.5.2.1) ergibt für $d > 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=t_j} S_{n,d}(s) &= \frac{\pi^{\frac{s}{2}-1} (2|n|)^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) 2^{\frac{s-1}{2}}}{d^{\frac{s+1}{4}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{\frac{s-1}{2}} |n|^{\frac{s-1}{2}} d^{\frac{s-1}{4}}} \Bigg|_{s=t_j} \operatorname{Res}_{\Lambda_d} \int_{\Lambda_d} P_n(z, s) d_{\Lambda_d} z \\ &= \frac{2^{s-1} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) d^{\frac{s}{2}}} \Bigg|_{s=t_j} \sum_l \frac{\overline{\gamma_{n,j,l}} \Gamma\left(t_j - \frac{1}{2}\right)}{2(\pi|n|)^{t_j - \frac{1}{2}}} \int_{\Lambda_d} f_{j,l}(\tau) d_{\Lambda_d} \tau = \sum_l \frac{2^{t_j-2} \Gamma\left(\frac{t_j+1}{2}\right) \Gamma\left(t_j - \frac{1}{2}\right) \overline{\gamma_{n,j,l}}}{\pi^{t_j} d^{\frac{t_j}{2}} |n|^{t_j - \frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{t_j}{2}\right)} C_d(f_{j,l}) \end{aligned}$$

Für $d < 0$ ist die Behauptung ebenfalls eine leichte Folgerung aus Satz 2.3.0.3.

Der Fall $d = 0$ wurde auf der letzten Seite von [Zagier 1] behandelt. □

Thetakerne

Ein überraschendes Ergebnis ist, dass sich die Zyklenintegrale über alle Geodätischen zu einer erzeugenden Funktion zusammenfassen lassen, die oft eine Maaßform ist. Dadurch wird die Theorie der Maaßformen, die außer den Eisensteinreihen ohne ein einziges konkretes Beispiel ist, anwendbar. Beispielsweise fügt sich auch der Zagier-Lift von schwach-holomorphen Modulformen mit Gewichten $-2k \rightarrow k + \frac{3}{2}$ in diesen allgemeineren Rahmen ein, [Zagier 12].

3.1. Maaß-Shimura Korrespondenz

Beispiel für eine Modulform ist die Thetafunktion zu einer definiten quadratischen Form $\sum_{a_1, \dots, a_n} e(zQ(a_1, \dots, a_n))$. Für indefinite Formen Q konvergiert das nicht mehr. Man kann die Summanden aber mit Hilfe der positiv definiten Majoranten P von Q dämpfen, $\sum e(Qx + iP_y)$. Das ist eine Funktion von zwei Variablen, z und P . Das Integralmittel über den Majorantenraum ergibt eine Maaßform, vgl. Abschnitt 2.5.1.

3.1.1. Der Majorantenraum. Die Form $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ lässt sich durch eine Koordinatentransformation in Diagonalgestalt bringen

$$Q = S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} S \text{ mit } S \text{ reell und regulär.}$$

Als Majorante bezeichnet [Siegel 3] die Form $P = S^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S = S^T S$. Das ist nicht eindeutig. Falls $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ist $P_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Die Automorphismengruppe von Q ist

$$\text{SO}(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\},$$

d.h. $g^T Q g = Q$ für $g \in \text{SO}(Q)$. Entsprechend bilden die Majoranten einen ganzen Majorantenraum $\mathfrak{P}_Q = \{g^T P_0 g \mid g \in \text{SO}(Q)\}$. Die Multiplikation von Matrizen aus $\text{SO}(Q)$ mit den Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ entspricht der Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ auf den Geodätischen $a|\tau|^2 + b\xi + c = 0$, allerdings mit den Transponierten der Matrizen aus Def. 1.1.1. Die Abbildung

$$(3.1.1.1) \quad \psi : \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \text{PSL}_2(\mathbb{R}) \mapsto \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\beta\delta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} \in \text{SO}(Q)$$

ist ein Isomorphismus, der die Matrixmultiplikation respektiert. Die Iwasawazerlegung von $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ lautet

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\eta}} \end{pmatrix} k_\theta \quad \text{mit} \quad k_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Da $\psi(k_\theta)^T P_0 \psi(k_\theta) = P_0$, lässt sich der Majorantenraum \mathfrak{P}_Q durch die obere Halbebene $\mathcal{H} \cong \text{SL}_2(\mathbb{R})/\text{K}$, $\text{K} = \{k_\theta \mid \theta \in [0, 2\pi)\}$ parametrisieren:

$$\tau = \xi + i\eta \in \mathcal{H} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \xi \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\eta}} \end{pmatrix} \xrightarrow{\psi} \text{SO}(Q).$$

Der Fundamentalbereich der Einheitengruppe $\Gamma_Q = \text{SO}(Q) \cap M_3(\mathbb{Z}) = \psi(\text{PSL}_2(\mathbb{Z}))$ im Majorantenraum ist isomorph zu $\mathfrak{F} = \text{PSL}_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathcal{H}$.

3.1.2. Kernfunktion des Thetalifts. Siegels Thetafunktionen

$$y^{\frac{3}{4}} \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} e \left((a \ b \ c) R \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

mit $R = xQ + iyP$ lassen sich durch Hinzufügen von homogenen, in Bezug auf Q sphärischen Polynomen etwas verallgemeinern, vgl. [Shintani, Remark 2.1]. Für Gewicht $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$ und gerade, wählen wir folgende Kernfunktion

$$(3.1.2.1) \quad \Theta_{2k}(z, g) := y^{\frac{3}{4}} \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} e(x(b^2 - 4ac)) f_3 \left(\sqrt{y} g^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)$$

mit

$$(3.1.2.2) \quad f_3 \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right) := (a - ib - c)^k e^{-2\pi(2a^2 + b^2 + 2c^2)}.$$

und $z \in \mathcal{H}$. Für $k=0$ ist das konjugiert komplex zur Kernfunktion aus Definition 2.5.1.1. Die Parametrisierung dort ist ein wenig anders. Im folgenden identifiziere ich einfach Matrizen aus $SO(Q)$ und $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ über die Abb. ψ und wähle $g \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

Hilfssatz 3.1.2.1. *Die Thetafunktion $\Theta_{2k}(z, g)$, $k \in 2\mathbb{N}_0$ hat folgendes Transformationsverhalten*

$$(3.1.2.3) \quad \Theta_{2k}(\gamma_1 z, g) = j(\gamma_1, z)^{2k+1} \Theta_{2k}(z, g) \quad \text{für } \gamma_1 \in \Gamma_0(4)$$

$$(3.1.2.4) \quad \Theta_{2k}(z, \gamma_2 g k_\theta) = e^{-2ik\theta} \Theta_{2k}(z, g) \quad \text{für } \gamma_2 \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}), k_\theta \in K$$

mit dem Thetamultiplikator $j(\gamma, z) = \frac{\theta(\gamma z)}{\theta(z)}$ für $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\theta(z) = y^{\frac{1}{4}} \theta_1(z) = y^{\frac{1}{4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e(n^2 z)$. Die Thetafunktion ist weder in z noch in g Eigenfunktion des jeweiligen Laplaceoperators; vielmehr gilt folgende Differenzialgleichung

$$(3.1.2.5) \quad D_g \Theta_{2k}(z, g) = 4 \Delta_{k+\frac{1}{2}} \Theta_{2k}(z, g) - \frac{3}{4} \Theta_{2k}(z, g),$$

dabei ist $D_g = -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta}$ der Laplaceoperator für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ in den Iwasawakoordinaten, vgl. [Bump, Ch. 2 (1.29)].

BEWEIS. vgl. [Sarnak 2, Theorem 3.6 ff.], [Cipra, Theorem 2.3], [Katok Sarnak, Prop. 2.2, (2.10)].

zu (3.1.2.3) : Poisson-Summation, s. [Shintani, Niwa 1];

zu (3.1.2.4) : γ_2 ändert nur die Summationsreihenfolge und für k_θ :

$$\text{Sei } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = g^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = k_\theta^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta^2 - x_2 \cos \theta \sin \theta + x_3 \sin \theta^2 \\ 2x_1 \sin \theta \cos \theta + x_2 (\cos \theta^2 - \sin \theta^2) - 2x_3 \cos \theta \sin \theta \\ x_1 \sin \theta^2 + x_2 \sin \theta \cos \theta + x_3 \cos \theta^2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $y_1 - iy_2 - y_3 = e^{-2i\theta} (x_1 - ix_2 - x_3)$ und

$$P[g] := (g^{-1})^T P_0 (g^{-1}) = P[gk_\theta].$$

zu (3.1.2.5) : Basierend auf [Shintani, (1.23)] zeigt [Niwa 1, §2] folgende Differenzialgleichung

$$-D_g \theta(z, g) = \left\{ 4y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - 2i(2k+1)y \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{(2k+1)(2k-3)}{4} + \frac{3}{4} \right\} \theta(z, g)$$

für die Funktion $\theta(z, g) = y^{-\frac{2k+1}{4}} \Theta_{2k}(z, g)$. Das ist äquivalent zu (3.1.2.5). \square

Wegen $\mathfrak{P}_Q \cong \mathcal{H}$ lässt sich die Thetafunktion auch als Funktion in zwei Argumenten aus \mathcal{H} schreiben. Wegen Hilfssatz 3.1.2.1 hat man das richtige automorphe Transformationsverhalten in beiden komplexen Variablen, vgl. [Gelbart 1, (2.4)]:

Beachte $a - bi - c = (a, b, c) (1, -i)$ im Sinne von Definition 1.1.1. Sei $g = \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\eta}} \end{pmatrix}$. Dann entspricht $\psi(g^{-1}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ einer quadratischen Form und wenn man sie auf die beiden Argumente $1, -i$ anwendet, erhält man

$$\begin{aligned} & \left((g^{-1})^T \circ (a, b, c) \right) (1, -i) = (a, b, c) \left((1 \ -i) \cdot g^{-1} \right) = (a, b, c) \left((1 \ -i) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\eta}} & -\frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix} \right) \\ & = (a, b, c) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\eta}} & -\frac{\tau}{\sqrt{\eta}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\eta} (a - b\tau + c\tau^2) \end{aligned}$$

und die Majoranten sind

$$P[g] := (g^{-1})^T P_0 (g^{-1}) = \frac{2}{\eta^2} \begin{pmatrix} 1 & -\xi & \xi^2 \\ -\xi & \xi^2 + \frac{\eta^2}{2} & -\xi|\tau|^2 \\ \xi^2 & -\xi|\tau|^2 & |\tau|^4 \end{pmatrix} = \frac{2}{\eta^2} \begin{pmatrix} 1 & & \\ -\xi & & \\ & & |\tau|^2 \end{pmatrix} (1 \ -\xi \ |\tau|^2) + Q;$$

also

$$f_3(\sqrt{y}g^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \frac{y^{\frac{k}{2}} \left(\frac{a - b\tau + c\tau^2}{\eta} \right)^k}{\exp \left(2\pi y \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} P[g] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)} = y^{\frac{k}{2}} \frac{\left(\frac{a - b\tau + c\tau^2}{\eta} \right)^k}{\exp \left(2\pi y \left(2 \left(\frac{a - b\xi + c|\tau|^2}{\eta} \right)^2 + b^2 - 4ac \right) \right)}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vermittelt eine Bijektion $(a, b, c) \rightarrow (c, -b, a)$ von Geodätischen.

Definition 3.1.2.2. Sei $k \in 2\mathbb{N}_0$, $z = x + iy \in \mathcal{H}$ und $\tau = \xi + i\eta \in \mathcal{H}$,

$$\Theta_{2k}(z, \tau) := y^{\frac{2k+3}{4}} \sum_{d \equiv 0, 1 \pmod{4}} e(dz) \sum_{b^2 - 4ac = d} \frac{\left(\frac{a\tau^2 + b\tau + c}{\eta} \right)^k}{e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)^2}}$$

Bemerkung. Aufgrund dieser Definition ist es klar, dass die Fourierkoeffizienten für $d > 0$ etwas mit den Zyklintegralen bzw. für $d < 0$ mit Funktionswerten an den komplexen Lösungen der Gleichung $a\xi^2 + b\xi + c = 0$ zu tun haben: Für große y verhält sich die Kernfunktion wie ein Filter, der nur Werte am Minimum von $\left| \frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right|$ durchlässt, das sind die Geodätischen bzw. die CM-Punkte und für holomorphe Funktionen f ist

$$\int_{\mathfrak{F}} \eta^k f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \doteq y^{\frac{2k+1}{4}} \sum_{b^2 - 4ac = d} e(dz) \int_{\Lambda_d} f(\tau) (a\tau^2 + b\tau + c)^{k-1} d\tau.$$

Entsprechend Hilfssatz 3.1.2.1 gilt

Hilfssatz 3.1.2.3. Die Thetafunktion $\Theta_{2k}(z, \tau)$ transformiert in z wie eine automorphe Form vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$, in τ wie eine automorphe Form vom Gewicht $-2k$:

$$\begin{aligned} \Theta_{2k}(\gamma_1 z, \tau) &= j(\gamma_1, z)^{2k+1} \Theta_{2k}(z, \tau) && \text{für } \gamma_1 \in \Gamma_0(4), \\ \Theta_{2k}(z, \gamma_2 \tau) &= \left(\frac{c\tau + d}{|c\tau + d|} \right)^{-2k} \Theta_{2k}(z, \tau) && \text{für } \gamma_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \\ \Delta_{-2k}^\tau \Theta_{2k}(z, \tau) &= 4\Delta_{k+\frac{1}{2}}^z \Theta_{2k}(z, \tau) - \frac{3}{4} \Theta_{2k}(z, \tau), && \Delta^z \text{ bezieht sich auf } z, \Delta^\tau \text{ auf } \tau; \\ \Theta_{2k}(z, \tau) &= O \left(y^{\frac{2k+3}{4}} \left(1 + \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\eta + \frac{1}{\eta} \right) \right) && \text{für } z, \tau \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung gilt auch für die Summe der Absolutbeträge in Definition 3.1.2.2.

BEWEIS. Der letzte Punkt stammt aus [Niwa 1, §2] und sorgt dafür, dass das Integral mit Maaß-Spitzenformen konvergiert. \square

Dieser Kern liftet holomorphe Spitzenformen vom Gewicht $2k$, vgl. [Shimura 2, Shintani, Niwa 1]. [Kohnen 2] konstruiert einen expliziten Isomorphismus zwischen $S_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ und $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$.

Derselbe Kern liftet auch nicht-holomorphe Maaß-Spitzenformen. Eine ausführliche Untersuchung für Gewicht Null findet sich in [Katok Sarnak]. Das lässt sich auf Maaßformen von allgemeinem Gewicht $2k$ mit o.a. Kernfunktion verallgemeinern. Ähnlich wie in [Katok Sarnak, Prop. 2.3] hat man

Proposition 3.1.2.4. *Sei f eine Maaß-Spitzenform vom Gewicht $2k \in 4\mathbb{N}_0$ mit Spektralparameter ν und $F(z) = \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$. Dann gilt*

- F ist eine $\Gamma_0(4)$ -Spitzenform vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ zum Spektralparameter $\frac{\nu}{2}$.
- Die n -ten Fourierkoeffizienten von F sind Null für $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$.

3.1.3. Maaßableitungen und modulare Spur. Es gibt eine ganze Reihe von Arbeiten zum Thema *traces of singular moduli, modular traces, ...*:

[Zagier 13, Bri O 1, Jenkins 1, Boylan 2, Kim, Bruinier 2, Br Jen On, Bruinier Funke 1, Jenkins 2, Guerzhoy 3, Ono 1, Duke Jen 2, Choi 2, DIT 2, Bruinier Ono 2], ...

Für harmonische schwache Maaßformen vom Gewicht Null (Modulfunktionen wie z.B. die j -Invariante) ist das die Summe der Funktionswerte an den Punkten komplexer Multiplikation. Für Gewicht $2k \neq 0$ nimmt man stattdessen die Summe der $(-k)$ -ten Koeffizienten der Fourierentwicklung um die CM -Punkte, vgl. Satz 3.1.5.1.

Achtung: Unsere Bezeichnung dafür ist $C_d^+(f)$ im Unterschied zu $C_d(f) = 2C_d^+(f)$, da positiv und negativ definite Formen sich über $Q \longleftrightarrow -Q$ bijektiv (und inäquivalent) entsprechen.

Hilfssatz 3.1.3.1. *Für $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{H}, w = re^{i\theta} = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, k \in \mathbb{Z}, h_m = k \cdot \mathrm{sign}(m + \frac{1}{2}), f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{H})$ eine Eigenfunktion des Laplaceoperators Δ_{2k} ist*

$$f(z) = \left(\frac{1-w}{1-\bar{w}} \right)^k \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m r^{|m|} (1-r^2)^s {}_2F_1(s+|m|+h_m, s-h_m; 1+|m|; r^2) e^{im\theta}$$

Für automorphe Formen $y^k F$ mit F holomorph sind die Fourierkoeffizienten mit negativem Index Null bzw. für Formen $y^{-k} F$ mit antiholomorphem F sind die mit positivem Index Null und

$$(1-w)^{-2k} F\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1-w}\right) = \frac{1}{y_0^k} \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m$$

bzw.

$$(1-w)^{2k} F\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1-w}\right) = y_0^k \sum_{m=0}^{\infty} c_m \bar{w}^m.$$

ist die **kanonische** Fourierreihe von F um den Punkt z_0 .

BEWEIS. Sei z_0 ein Punkt der oberen Halbebene \mathcal{H} . Für alle Eigenfunktionen $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{H})$ von Δ_{2k} gibt es nach [Hejhal 1, S. 342, Prop. 4.2] folgende Fourierreihe um den Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$:

$$(3.1.3.1) \quad f(z) = \left(\frac{1-w}{1-\bar{w}} \right)^k \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m r^{|m|} (1-r^2)^s {}_2F_1(s+|m|+h_m, s-h_m; 1+|m|; r^2) e^{im\theta}$$

mit $w = \frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0} = re^{i\theta}, h_m = k \mathrm{sign}(m + \frac{1}{2})$, vgl. auch [Hejhal 2, (3.4)], [Fay, Theorem 1.1], [Neunhöffer, Lemma 2.1].

Für holomorphe Modulformen $F(z)$ vom Gewicht $2k$ ist $s = k$ und $(1-w)^{-2k} F\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1-w}\right)$ holomorph in $|w| < 1$, d.h.

$$(3.1.3.2) \quad (1-w)^{-2k} F(z) = (1-w)^{-2k} F\left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1-w}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m w^m$$

die kanonische Taylorreihe von f um z_0 . Multipliziert man mit $y^k = \left(y_0 \frac{1-|w|^2}{|1-w|^2}\right)^k$, so ist das äquivalent zu

$$y^k F(z) = (1-w)^{2k} \left(y_0 \frac{1-r^2}{(1-w)(1-\bar{w})} \right)^k \sum_{m=0}^{\infty} d_m w^m$$

oder

$$\left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k y^k F(z) = y_0^k \sum_m d_m (1-r^2)^k r^{|m|} {}_2F_1(k+|m|+h_m, k-h_m; 1+|m|; r^2) e^{im\theta},$$

dabei sind die Koeffizienten d_m mit negativem Index Null. Daher haben auch automorphe Formen $y^k F(z)$, die von holomorphen Modulformen F kommen, eine Fourierreihe (3.1.3.1) mit $c_m = y_0^k d_m$ für $m \in \mathbb{N}_0$, ebenso alle automorphen Formen mit dem gleichen Eigenwert wie holomorphe Modulformen (vgl. harmonische schwache Maaßformen).

Für automorphe Formen $f = y^{-k} F$, die von antiholomorphen Modulformen F vom Gewicht $2k$ kommen, ist $s = -k$, \bar{F} holomorph vom Gewicht $-2k$, d.h.

$$(1-w)^{2k} \bar{F} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1-w} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m w^m$$

und

$$y^{-k} F \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0 w}{1-w} \right) = y_0^{-k} \frac{(1-w)^k (1-\bar{w})^k}{(1-\bar{w})^{2k}} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{d}_m (1-r^2)^s \bar{w}^m$$

eine Reihenentwicklung der Art (3.1.3.1) mit $c_m = 0$ für $m \in \mathbb{N}$. □

Die Fourierkoeffizienten $c_m, m < 0$ bzw. $m > 0$ sind Linearkombinationen der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^n}{\partial z^n} f(z_0)$ bzw. $\frac{\partial^n}{\partial \bar{z}^n} f(z_0)$ für $n = 0, 1, \dots, |k|$.

Definition 3.1.3.2. Bezeichne E_k^+, E_k^- die beiden Maaßoperatoren:

$$\begin{aligned} E_k^+ &:= 4iy\partial_z + k* = 2iy\partial_x + 2y\partial_y + k*, \\ E_k^- &:= -4iy\partial_{\bar{z}} - k* = -2iy\partial_x + 2y\partial_y - k*, \end{aligned}$$

Hilfssatz 3.1.3.3. Für $n \geq 0, f \in C^n(\mathcal{H})$ Eigenfunktion von Δ_{2k} mit der Fourierreihe aus Hilfssatz 3.1.3.1 ist

- (1) $\frac{\partial^n}{\partial w^n} \left\{ \left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k f(z) \right\} \Big|_{w=0} = n! c_n;$
- (2) $\frac{\partial^n}{\partial w^n} \left\{ \left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k f(z) \right\} = \frac{(1-\bar{w})^k}{(1-w)^{k+n}} \sum_{j=0}^n c_{n,j} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^j \frac{\partial^j}{\partial z^j} f(z)$
mit $c_{n+1,j} = (k+n+j)c_{n,j} + c_{n,j-1}; c_{n,j} = \binom{n}{j} (k+j)_{n-j};$
- (3) $\frac{1}{2^n} E_{2(k+n-1)}^+ \circ \dots \circ E_{2k+2}^+ \circ E_{2k}^+ f = \sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j},$ also
- (4) $\boxed{\frac{1}{2^n} E_{2(k+n-1)}^+ \circ \dots \circ E_{2k+2}^+ \circ E_{2k}^+ f(z_0) = n! c_n.}$
- (5) $\frac{\partial^n}{\partial \bar{w}^n} \left\{ \left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k f(z) \right\} \Big|_{w=0} = n! c_{-n};$
- (6) $\frac{\partial^n}{\partial \bar{w}^n} \left\{ \left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k f(z) \right\} = \frac{(1-\bar{w})^{k-n}}{(1-w)^k} \sum_{j=0}^n c_{-n,j} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-\bar{w}} \right)^j \frac{\partial^j}{\partial \bar{z}^j} f(z)$ mit ganzzahligen $c_{-n,j}$, die noch von k abhängen;
- (7) $\frac{1}{2^n} E_{2(k-n+1)}^- \circ \dots \circ E_{2k-2}^- \circ E_{2k}^- f = \sum_{j=0}^n c_{-n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial \bar{z}^j},$ also

$$(8) \quad \boxed{\frac{1}{2^n} E_{2(k-n+1)}^- \circ \cdots \circ E_{2k-2}^- \circ E_{2k}^- f(z_0) = n! c_{-n}.}$$

mit den Maaßoperatoren $E_n^+ f = 4iy \partial_z f + n f$ und $E_n^- f = -4iy \partial_{\bar{z}} f - n f$.

BEWEIS.

zu (1): zu berechnen ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^n}{\partial w^n} \sum_{m \in \mathbb{N}_0} c_m w^m (1 - \bar{w}w)^s {}_2F_1(s + m + k, s - k; 1 + m; \bar{w}w) \\ & + \frac{\partial^n}{\partial w^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^-} c_m \bar{w}^m (1 - \bar{w}w)^s {}_2F_1(s - m - k, s + k; 1 - m; \bar{w}w) \end{aligned}$$

an der Stelle $w = 0$. Wegen

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^n}{\partial w^n} w^m \right|_{w=0} &= \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ m!, & n = m; \end{cases} \\ \left. \frac{\partial^n}{\partial w^n} \bar{w}^m \right|_{w=0} &= 0; \\ \left. \frac{\partial^n}{\partial w^n} (1 - \bar{w}w)^s \right|_{w=0} &= \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases} \\ \left. \frac{\partial^n}{\partial w^n} {}_2F_1(\bar{w}w) \right|_{w=0} &= \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases} \end{aligned}$$

folgt die Beh.

zu (2): vollständige Induktion: Für $n = 0$ ist nichts zu beweisen. Mit $\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(1-w)^2}$ ist

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial w} \left\{ \frac{1}{(1-w)^{k+n}} \sum_{j=0}^n c_{n,j} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \right\} = \frac{k+n}{(1-w)^{k+n+j}} \sum_{j=0}^n c_{n,j} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \\ & + \frac{1}{(1-w)^{k+n+1}} \sum_{j=0}^n j c_{n,j} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} + \frac{1}{(1-w)^{k+n}} \sum_{j=0}^n c_{n,j} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^j \frac{\partial z}{\partial w} \frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}} \\ & = \frac{1}{(1-w)^{k+n+1}} \left\{ (k+n) c_{n,0} f(z) + \sum_{j=1}^n ((k+n+j) c_{n,j} + c_{n,j-1}) \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \right. \\ & \quad \left. + c_{n,n} \left(\frac{z_0 - \bar{z}_0}{1-w} \right)^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^{n+1}} \right\}, \quad \text{dabei ist } c_{n,n} = 1 \text{ rekursiv für } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die explizite Darstellung der Koeffizienten $c_{n,j}$ erfüllt dieselbe Rekursion:

$$\begin{aligned} \binom{n+1}{j} (k+j)_{n-j+1} &= (k+n+j) \binom{n}{j} (k+j)_{n-j} + \binom{n}{j-1} (k+j-1)_{n-j+1} \\ \Leftrightarrow \frac{(n+1)! (k+n)!}{j! (n-j+1)! (k+j-1)!} &= \frac{(k+n+j) n! (k+n-1)!}{j! (n-j)! (k+j-1)!} + \frac{n! (k+j)! (k+n-1)!}{(j-1)! (n-j+1)! (k+j-2)!} \\ \Leftrightarrow (n+1)(k+n) &= (k+n+j)(n-j+1) + j(k+j-1) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Setze $c_{n,-1} := 0, c_{0,0} = 1$; dann ergeben sich alle übrigen $c_{n,j}$.

zu (3) vollständige Induktion:

$$n = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} E_{2(k+n)} \left\{ \sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \right\} = \{2iy \partial_z + k + n\} \left(\sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \right) \\ &= 2iy c_{n,0} \frac{\partial f}{\partial z} + (k+n) c_{n,0} f + \\ & \quad + \sum_{j=1}^n 2iy \left\{ j c_{n,j} (z - \bar{z})^{j-1} \frac{\partial^j f}{\partial z^j} + c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^{j+1} f}{\partial z^{j+1}} \right\} + (k+n) c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \\ &= c_{n,0} (z - \bar{z}) \frac{\partial f}{\partial z} + (k+n) c_{n,0} f + \left\{ \sum_{j=1}^n ((j+k+n) c_{n,j} + c_{n,j-1}) (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \right\} + c_{n,n} (z - \bar{z})^{n+1} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial z^{n+1}} \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} c_{n+1,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j f}{\partial z^j} \text{ mit derselben Rekursion wie in (2).} \end{aligned}$$

zu (4): [Fay, Theorem 1.2] oder setze $z = z_0, w = 0$ und verwende (3), (2) und (1).

zu (5), (6): für f Eigenfunktion von Δ_{2k} mit (kanonischen) Fourierkoeffizienten c_n ist \bar{f} Eigenfunktion von Δ_{-2k} und Fourierkoeffizienten \bar{c}_{-n} um denselben inneren Punkt z_0 . Verwende (1) und $\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial w}$, s. auch den folgenden Hilfssatz.

zu (7): $E_{2(k-n+1)}^- \circ \dots \circ E_{2k-2}^- \circ E_{2k}^- f = \overline{E_{2(n-k-1)}^+ \circ \dots \circ E_{2-2k}^+ \circ E_{-2k}^+ \bar{f}}$ und (3);

zu (8): (5) und (7). \square

Definition 3.1.3.4 (Modulare Spur). Sei $d < 0$ und $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{H})$ eine modular vom Gewicht $2k$ transformierende Eigenfunktion des Laplaceoperators Δ_{2k} . Als *modulare Spur* von f bezeichnen wir folgende Ausdrücke:

$$C_d(f) = \sum_{\substack{z_Q \\ |Q|=d}} \frac{c_{-k}}{w_Q},$$

dabei ist c_{-k} ein Fourierkoeffizient¹ zum CM-Punkt $z_Q \in \mathfrak{F}$,

Hier kommen noch einige Tatsachen über partielle Ableitungen:

Hilfssatz 3.1.3.5. f transformiere automorph vom Gewicht k zur Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $E_k^+ = 2iy\partial_x + 2y\partial_y + k$, $E_k^- = -2iy\partial_x + 2y\partial_y - k$ sind die üblichen Maaßoperatoren;

- (1) \bar{f} transformiert automorph für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $-k$.
- (2) $\overline{f_x} = \bar{f}_x, \overline{f_y} = \bar{f}_y, \overline{\partial_z f} = \partial_z \bar{f}$
- (3) $\overline{\Delta_k f} = \Delta_{-k} \bar{f}$
- (4) $\overline{E_k^- f} = E_{-k}^+ \bar{f}, \overline{E_k^+ f} = E_{-k}^- \bar{f}$
- (5) $\overline{(E_k^+ f, g)} = -(f, \overline{E_{k+2}^- g})$
- (6) $\overline{C_n(f)} = C_n(\bar{f})$

BEWEIS. Ich beschränke mich auf den letzten Punkt: Für Zyklenintegrale $n > 0$ ist

$$\overline{C_n(\bar{f})} = \int_{\Lambda_n} \frac{\overline{f(\tau)} (a\tau^2 + b\tau + c)^{-k}}{(\sqrt{n}\eta)^{-k}} d_{\Lambda} \tau \stackrel{\text{HS.1.1.7}}{=} \int_{\Lambda_n} f(\tau) \left(\frac{a\tau^2 + b\tau + c}{|a\tau^2 + b\tau + c|} \right)^k d_{\Lambda} \tau = C_n(f).$$

¹entsprechend Hilfssatz 3.1.3.1

Für $n < 0$ hat man Fourierentwicklungen um die CM-Punkte τ_Q mit $w = re^{i\theta} = \frac{\tau - \tau_Q}{\tau - \bar{\tau}_Q}$, $h_m = k \operatorname{sign}(m + \frac{1}{2})$:

$$f(\tau) = \left(\frac{1-w}{1-\bar{w}} \right)^k \sum_m c_m r^{|m|} (1-r^2)^s F(s+|m|+h_m, s-h_m; 1+|m|; r^2) e^{im\theta}$$

$$\text{d.h. } \overline{f(\tau)} = \left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k \sum_m \overline{c_m} r^{|m|} (1-r^2)^{\bar{s}} F(\bar{s}+|m|+h_m, \bar{s}-h_m; 1+|m|; r^2) e^{-im\theta}.$$

Als automorphe Form vom Gewicht $-k$ hat \bar{f} aber auch folgende Fourierentwicklung

$$\overline{f(\tau)} = \left(\frac{1-w}{1-\bar{w}} \right)^{-k} \sum_m d_m r^{|m|} (1-r^2)^{\bar{s}} F(\bar{s}+|m|-h_m, \bar{s}+h_m; 1+|m|; r^2) e^{im\theta};$$

daraus folgt $d_m = \overline{c_{-m}}$. □

3.1.4. Beispiel: CM-Punkte für Eisensteinreihen. Hier wird der Beweis für Folgerung 2.1.4.1.2 Teil 2 nachgeholt:

Hilfssatz 3.1.4.1. Für $k \in \mathbb{Z}$, $d < 0$, $\operatorname{Re} s > 0$ ist

$$C_d(E_{2k}(\cdot, s)) = \frac{|d|^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \zeta(s, d)}{2^{s-1} |k|! \Gamma(s-|k|) \zeta(2s)}.$$

BEWEIS. $k = 0$ ist klar, s. [Zagier 6, Example 1]².

Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist nach [Bruggeman 1, (4.6)]

$$2^k (s-k)_k E_0(\tau, s) = E_2^- \circ \cdots \circ E_{2k}^- E_{2k}(\tau, s)$$

und nach Hilfssatz 3.1.3.3 (8)

$$2^k (s-k)_k C_d(E_0(\cdot, s)) = 2^k k! C_d(E_{2k}(\cdot, s))$$

bzw. nach Satz 1.5.2.3

$$C_d(E_{2k}(\cdot, s)) = \frac{|d|^{\frac{s}{2}} \Gamma(s) \zeta(s, d)}{2^{s-1} k! \Gamma(s-k) \zeta(2s)},$$

und entsprechend

$$2^k (s-k)_k E_0(\tau, s) = E_{-2}^+ \circ \cdots \circ E_{-2k}^+ E_{-2k}(\tau, s)$$

und nach Hilfssatz 3.1.3.3 (4)

$$2^k (s-k)_k C_d(E_0(\cdot, s)) = 2^k k! C_d(E_{-2k}(\cdot, s))$$

mit dem gleichen Ergebnis für $C_d(E_{-2k}(\cdot, s))$. □

3.1.5. Fourierkoeffizienten des Thetalifts. Die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$F(z) = \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(x+iy, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$$

bzgl. x lassen sich für Spitzenformen f leicht berechnen, vgl. auch [Katok Sarnak, 3. Geometric calculation]:

Satz 3.1.5.1. Für eine Maaß-Spitzenform f vom Gewicht $2k$, $k \in 2\mathbb{N}_0$, zur vollen Modulgruppe mit Spektralparameter ν hat der Maaßlift folgende Fourierreihe:

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(x+iy, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \sum_{n>0} \frac{C_n(f)}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) e(nx) + \sum_{n<0} \frac{k! C_n(f)}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx)$$

Bemerkung. Für ungerade k ist die Kernfunktion $\equiv 0$.

²dort wird nur über positiv-definite Formen summiert

Für holomorphe Spitzenformen F vom Gewicht $2k$ sind die c_{-k} aus Hilfssatz 3.1.3.1 Null, also lautet die [Shintani]-Korrespondenz in diesem Fall:

$$(3.1.5.1) \quad \int_{\mathfrak{F}} \eta^k F(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \stackrel{(A.7.4.11)}{=} \sum_{n>0} \frac{(4\pi n y)^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} e(nz)}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} \int_{\Lambda_n} \eta^k F(\tau) \left(\frac{a\tau^2 + b\tau + c}{\sqrt{n}\eta} \right)^k d_\Lambda \tau$$

$$= -\frac{y^{\frac{2k+1}{4}}}{2} \sum_{n \in \mathbb{D}^{0+}} \int_{\Lambda_n} F(\tau) (a\tau^2 + b\tau + c)^{k-1} d\tau \cdot e(nz)$$

wegen $d_\Lambda \tau = -\frac{\sqrt{n}}{a\tau^2 + b\tau + c} d\tau$, vgl. Hilfssatz 1.1.4.

Wichtig ist folgendes Hilfsmittel für Funktionen, die sich fast wie Distributionen (Hilfssatz A.7.1.3 f.) verhalten.³

Hilfssatz 3.1.5.2. Seien $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$, $g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{C}$ stetige Funktionen mit

- $\forall x \neq x_0$, wobei $x, x_0 \geq 0$: $f(x, y) = o(f(x_0, y))$ für $y \rightarrow \infty$,
- $|g|$ integrierbar auf $[0, \infty]$.

Dann ist für $y \rightarrow \infty$:

$$\int_0^\infty f(x, y) g(x) dx \sim g(x_0) \int_0^\infty f(x, y) dx.$$

BEWEIS DES SATZES. Sei $\Gamma = \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$;

$$\begin{aligned} M_n(f, y) &= \int_0^1 \left(\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(x + iy, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \right) e(-nx) dx \\ &= y^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi n y} \sum_{|Q|=n} \int_{\mathfrak{F}} \frac{f(\tau) Q(\tau, 1)^k d\xi d\eta}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta}\right)^2} \eta^2} \\ &= y^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi n y} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_Q \backslash \Gamma \\ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}} \frac{(C\bar{\tau} + D)^k f(\gamma\tau) ((\gamma \circ Q)(\tau, 1))^k d\xi d\eta}{(C\tau + D)^k \eta^k e^{4\pi y \left(\frac{\tau \circ q(\tau)}{\eta}\right)^2} \eta^2} \\ &= y^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi n y} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} \sum_{\gamma \in \Gamma_Q \backslash \Gamma} \int_{\mathfrak{F}} \frac{f(\tau) Q^k(\tau, 1) d\xi d\eta}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta}\right)^2} \eta^2} \\ &= y^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi n y} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathcal{H}} \frac{f(\tau) Q^k(\tau, 1) d\xi d\eta}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta}\right)^2} \eta^2} \end{aligned}$$

Für positives n ist der Ausdruck $\left| \frac{q(\tau)}{\eta} \right|$ im wesentlichen der Abstand des Punktes $\tau \in \mathcal{H}$ von der Geodätischen \mathfrak{C}_Q , vgl. Satz 1.1.9. Daher kommt der Beitrag des Integrals für $y \rightarrow \infty$ ausschließlich von der Geodätischen. Führt man Normalkoordinaten $w = \frac{\tau - \beta}{\tau - \alpha} = u + iv = re^{i\theta}$ (vgl. S. 15, $\alpha < \beta$) ein, so hat man für $\mathbf{n} > \mathbf{0}$, $\neq \square$:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_Q \backslash \mathcal{H}} \frac{f(\tau) Q^k(\tau, 1) d\xi d\eta}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta}\right)^2} \eta^2} &= (\text{sign } a)^k n^{\frac{k}{2}} \int_{\varepsilon_0^{-1} \leq w \leq \varepsilon_0} \left(\frac{\bar{w} - 1}{w - 1} \right)^k f(\tau) \frac{w^k}{v^k e^{4\pi n y \frac{u^2}{v^2}}} \frac{du dv}{v^2} \\ &= (\text{sign } a)^k n^{\frac{k}{2}} \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} \int_0^\pi \left(\frac{re^{-i\theta} - 1}{re^{i\theta} - 1} \right)^k f(\tau) \frac{\left(\frac{e^{i\theta}}{\sin \theta} \right)^k}{e^{4\pi n y \cot^2 \theta}} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \frac{dr}{r} \end{aligned}$$

³Der Beweis ist ein einfaches ε, δ -Argument.

und mit $\lambda = -\cot \theta$:

$$\sim (\text{sign } a)^k n^{\frac{k}{2}} \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} \left(\frac{-ri-1}{ri-1} \right)^k \frac{dr}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)(i-\lambda)^k}{e^{4\pi n y \lambda^2}} d\lambda.$$

Der Beitrag des letzten Integrals kommt für großes y von $\lambda \approx 0$, d.h. $\theta \approx \frac{\pi}{2}$, also von der Geodätischen $\tau \in \Gamma_Q \backslash \mathcal{C}_Q$. Falls f beschränkt ist, hat man also:

$$M_n(f, y) \sim \frac{y^{\frac{2k+3}{4}}}{e^{2\pi n y}} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} \int_{\varepsilon_0^{-1}}^{\varepsilon_0} (\text{sign } a \cdot i\sqrt{n})^k \left(\frac{-ri-1}{ri-1} \right)^k f \left(\frac{\alpha ri - \beta}{ri-1} \right) \frac{dr}{r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+i\lambda)^k}{e^{4\pi n y \lambda^2}} d\lambda$$

wegen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{e^{4\pi n y \lambda^2}} = \frac{1}{2\sqrt{ny}}$ ist das

$$\begin{aligned} &\sim \frac{y^{\frac{2k+3}{4}}}{2\sqrt{ny}e^{2\pi n y}} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} (\text{sign } a \cdot i\sqrt{n})^k \int_{i\varepsilon_0^{-1}}^{i\varepsilon_0} \left(\frac{\bar{w}-1}{w-1} \right)^k f \left(\frac{\alpha w - \beta}{w-1} \right) \frac{d|w|}{\eta} \\ &= \frac{y^{\frac{2k+1}{4}}}{2\sqrt{n}e^{2\pi n y}} \int_{\Lambda_n} \frac{f(\tau)(a\tau^2 + b\tau + c)^k}{\eta^k} d_{\Lambda} \tau \quad \text{für } y \rightarrow \infty, \quad \text{vgl. Beweis von Satz 1.5.1.2.} \end{aligned}$$

Andererseits ist $M_n(f, y)$ wegen Proposition 3.1.2.4 von der Form $\rho_n W_{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}, s - \frac{1}{2}}(4\pi n y) \sim \frac{(4\pi n y)^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}}}{e^{2\pi n y}} \rho_n$, wobei ρ_n unabhängig von y ist.

$$\Rightarrow \rho_n = \frac{1}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} n^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}} \int_{\Lambda_n} \frac{f(\tau)(a\tau^2 + b\tau + c)^k}{\eta^k} d_{\Lambda} \tau, \quad \text{vgl. Satz 2.5.1.2.}$$

Für $\mathbf{n} = \square$ lassen sich alle quadratischen Formen mit Diskriminante $d = n$ vgl. S. 16: $\gamma \circ (0, b, c)$ mit $b = \sqrt{d}$, $c \pmod{\sqrt{d}}$, $\gamma \in \text{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Das sind \sqrt{d} Äquivalenzklassen⁵; die Automorphismengruppe $= \{\pm \text{Id}\}$ ist trivial, d.h.

$$M_n(f, y) = y^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi n y} \sum_{|Q|=n} \int_{\mathfrak{F}} \frac{f(\tau) Q(\tau, 1)^k}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{n}\right)^2}} d\mu = y^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi n y} \sum_{c=1}^{\sqrt{d}} \int_{\mathcal{H}} \frac{f(\tau)(b\tau + c)^k}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{b\xi + c}{\eta}\right)^2}} d\mu$$

und

$$\int_{\mathcal{H}} \frac{f(\tau)(b\tau + c)^k}{\eta^k e^{4\pi y \left(\frac{b\xi + c}{\eta}\right)^2}} d\mu = \int_{\mathcal{H}} \frac{f\left(\tau - \frac{c}{b}\right) b^k \tau^k}{\eta^k e^{4\pi y b^2 \xi^2 / \eta^2}} d\mu = b^k \int_0^{\infty} \frac{d\eta}{\eta^{k+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\left(\xi - \frac{c}{b} + i\eta\right) (\xi + i\eta)^k}{e^{4\pi y b^2 \xi^2 / \eta^2}} d\xi,$$

dabei ist für $y \rightarrow \infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\left(\xi - \frac{c}{b} + i\eta\right) (\xi + i\eta)^k}{e^{4\pi y b^2 \xi^2 / \eta^2}} d\xi \sim (i\eta)^k f\left(-\frac{c}{b} + i\eta\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{e^{4\pi y b^2 \xi^2 / \eta^2}} = \frac{(-1)^{\frac{k}{2}} \eta^{k+1}}{2\sqrt{yb}} f\left(-\frac{c}{b} + i\eta\right)$$

und

$$\frac{(-1)^{\frac{k}{2}} b^k}{2\sqrt{yb}} \int_0^{\infty} f\left(-\frac{c}{b} + i\eta\right) \frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{2b\sqrt{y}} \int_{\mathcal{C}_{(0,b,c)}} f(\tau) \frac{(b\tau + c)^k}{\eta^k} d_Q \tau;$$

d.h.

$$M_n(f, y) \sim \frac{y^{\frac{2k+1}{4}}}{2\sqrt{ne}^{2\pi n y}} \int_{\Lambda_n} \frac{f(\tau) Q(\tau, 1)^k}{\eta^k} |d_{\Lambda} \tau| \quad \text{für } y \rightarrow \infty$$

⁴es gibt einen 'peak' wie bei einer δ -Distribution

⁵[Zagier 7, §8 Aufgabe 1]

und für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$(3.1.5.2) \quad \rho_n = \frac{1}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2} + \frac{1}{4}} n^{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}}} \int_{\Lambda_n} \frac{f(\tau) (a\tau^2 + b\tau + c)^k}{\eta^k} d_{\Lambda} \tau.$$

Für $\mathbf{n} = \mathbf{0}$ hat man keinen Beitrag, da es sich um eine Spitzenform handelt.

Für $\mathbf{n} < \mathbf{0}$ lassen sich die Fourierkoeffizienten auch schnell bestimmen. In Normalkoordinaten $w = u + iv = \frac{\tau - \tau_Q}{\tau - \bar{\tau}_Q}$, vgl. (1.5.2.1), ist

$$(3.1.5.3) \quad \begin{aligned} & \int_{\Gamma_Q \backslash \mathcal{H}} \frac{f(\tau)}{e^{4\pi y \left(\frac{a(\tau)}{n}\right)^2}} \left(\frac{a\tau^2 + b\tau + c}{\eta} \right)^k \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \frac{1}{w_Q} \int_{\mathbb{D}} \frac{f(\tau)}{e^{4\pi |n|y \left(\frac{|w|^2+1}{|w|^2-1}\right)^2}} \left(\frac{\frac{2|n|w}{2a(w-1)^2}}{\frac{\sqrt{|n|(1-|w|^2)}}{2|a||w-1|^2}} \right)^k \frac{4 du dv}{(1-|w|^2)^2} \\ & = \frac{2^{k+2} |n|^{\frac{k}{2}} (\text{sign } a)^k}{w_Q} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-\bar{w}}{1-w} \right)^k w^k f(\tau) \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^{k+2} e^{4\pi |n|y \left(\frac{r^2+1}{r^2-1}\right)^2}} dr d\theta \end{aligned}$$

Die Formen Q und $-Q$ sind positiv bzw. negativ definit und daher inäquivalent. Für gerades k geben sie zweimal den gleichen Beitrag, für ungerades k löschen sie sich aus. Für definite Formen Q kommt der Beitrag zu den Fourierkoeffizienten des Thetalifts nicht von Zyklenintegralen, sondern von den CM-Punkten. Für $y \rightarrow \infty$ verhält sich der Integrand wie eine Distribution und der ganze Beitrag kommt von $r \sim 0$ bzw. $\tau \sim \tau_Q$. Dann ist

$$(1-r^2)^{s-k-2} {}_2F_1(s+|m|+h_m, s-h_m; 1+|m|; r^2) \sim 1$$

und Gleichung (3.1.5.3) lässt sich mit der Fourierentwicklung aus Hilfssatz 3.1.3.1 so abschätzen:

$$\begin{aligned} & = \frac{2^{k+2} |n|^{\frac{k}{2}}}{w_Q} 2\pi c_{-k} \int_0^1 \frac{r^{2k+1} (1-r^2)^{s-k-2} {}_2F_1(s+k+h_{-k}, s-h_{-k}; 1+k; r^2)}{e^{4\pi |n|y \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2}} dr \\ & \sim 2^{k+3} \pi |n|^{\frac{k}{2}} \frac{c_{-k}}{w_Q} \int_0^1 \frac{r^{2k+1}}{e^{4\pi |n|y \left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2}} dr; \end{aligned}$$

mit $\lambda = \frac{1+r^2}{1-r^2}$, $d\lambda = \frac{4r}{(1-r^2)^2} dr$ ist der Hauptbeitrag bei $\lambda \sim 1$

$$\begin{aligned} & = 2^{k+1} \pi |n|^{\frac{k}{2}} \frac{c_{-k}}{w_Q} \int_1^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)^k}{e^{4\pi |n|y \lambda^2}} d\lambda \sim 2\pi |n|^{\frac{k}{2}} \frac{c_{-k}}{w_Q} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k}{e^{4\pi |n|y (\lambda+1)^2}} d\lambda \\ & \sim \frac{2\pi |n|^{\frac{k}{2}} c_{-k}}{e^{4\pi |n|y} w_Q} \int_0^{\infty} \frac{\lambda^k}{e^{8\pi |n|y \lambda}} d\lambda = \frac{2k! \pi |n|^{\frac{k}{2}} c_{-k}}{(8\pi |n|y)^{k+1} e^{4\pi |n|y} w_Q} \end{aligned}$$

also

$$M_n(f, y) \sim y^{\frac{2k+3}{4}} e^{2\pi |n|y} \frac{2k! \pi |n|^{\frac{k}{2}}}{(8\pi |n|y)^{k+1} e^{4\pi |n|y}} \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} \frac{c_{-k}}{w_Q} = \frac{k! C_n(f)}{2^{3k+2} \pi^k |n|^{\frac{k}{2}+1} y^{\frac{2k+1}{4}} e^{2\pi |n|y}}$$

mit $C_n(f) := \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_n} \frac{c_{-k}}{w_Q}$, dabei hängt der Fourierkoeffizient c_{-k} noch von τ_Q ab.

Andererseits ist $M_n(f, y)$ von der Form $\rho_n W_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, s-\frac{1}{2}}(4\pi |n|y) \sim \frac{\rho_n}{(4\pi |n|y)^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} e^{2\pi |n|y}}$.

$$\Rightarrow \rho_n = \frac{k! C_n(f)}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} \text{ für } k \geq 0$$

□

Als Konsequenz hat man folgende reell-analytische Kernfunktion für Zyklenintegrale, die allerdings noch vom Eigenwert abhängt und dadurch eventuell nur auf eine Funktion zutrifft:

Folgerung 3.1.5.2.1. Für $d \in \mathbb{D}^{0+}$, f eine Maaß-Spitzenform vom Gewicht $2k \in 4\mathbb{Z}$ und Eigenwert λ ist

$$C_d(f) = \frac{1}{d^{\frac{k}{2}}} \int_{\Lambda_n} \frac{f(\tau) (a\tau^2 + b\tau + c)^k}{\eta^k} d_{\Lambda} \tau = \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{d,2k,s}(\tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$$

mit

$$\Theta_{d,2k,s}(\tau) := \frac{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} d^{\frac{3}{4}} y^{\frac{2k+3}{4}}}{\eta^k e^{2\pi y d} W_{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, s-\frac{1}{2}}(4\pi y d)} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_d} \frac{Q^k(\tau, 1)}{e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta}\right)^2}}$$

und $s(1-s) = \lambda' = \frac{\lambda + \frac{3}{4}}{4}$, $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$.

Für holomorphe Modulformen F vom Gewicht $2k$, k gerade, d.h. $s = \frac{2k+1}{4}$ ist

$$\int_{\Lambda_d} F(\tau) (a\tau^2 + b\tau + c)^{k-1} d\tau = \int_{\mathfrak{F}} F(\tau) \Theta_{d,2k}^{hol}(\tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$$

mit

$$\Theta_{d,2k}^{hol}(\tau) := -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{b^2-4ac=d} \frac{(a\tau^2 + b\tau + c)^k}{e^{\left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta}\right)^2}}$$

eine nicht-holomorphe Kernfunktion für das Periodenintegral.

BEWEIS. Für die Whittakerfunktionen im holomorphen Fall vgl. Anhang (A.7.4.11) und (A.7.4.12). \square

3.1.6. Hecke Theorie.

Definition 3.1.6.1. Sei $f(\tau) = \sum_{m \neq 0} a(m) W_{k \operatorname{sign} m, \nu}(4\pi |m| y) e(mx)$ eine Maaßspitzenform vom Gewicht $2k$ zu $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Die Heckeoperatoren lassen sich folgendermaßen definieren, vgl. [Maaß 4, Ch. V], [Katok Sarnak, 1.], [Balslev Venkov, 4.]:

$$T_n f(\tau) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ad=nb \\ d>0}} \sum_{\operatorname{mod} d} f\left(\frac{a\tau + b}{d}\right), \text{ d.h.}$$

$$T_n f(\tau) = \sum_{m \neq 0} a^*(m) W_{k \operatorname{sign} m, \nu}(4\pi |m| y) e(mx)$$

$$(3.1.6.1) \quad \text{mit} \quad a^*(m) = \sqrt{n} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} \frac{a\left(\frac{mn}{d^2}\right)}{d}.$$

Für holomorphe Funktionen F vom Gewicht $2k$ sei T_n^{hol} der übliche Heckeoperator im holomorphen Fall. Dann ist

$$(3.1.6.2) \quad n^\nu T_n(y^k F(z)) = y^k T_n^{\operatorname{hol}}(F(z)) \quad \text{mit} \quad \nu = k - \frac{1}{2}.$$

Auf der linken Seite stehen die Heckeoperatoren aus [Maaß 4]. Maaß liftet die Heckeoperatoren allerdings nicht auf die metaplektische Überlagerung von $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$. Folgende Definition entspricht (3.1.6.2) für halbganzes Gewicht, vgl. [Shimura 2]: Für $k \in \mathbb{N}_0$, $p \neq 2$ und eine automorphe Form

$$F(z) = b(0) y^{\frac{1+\nu}{2}} + b'(0) y^{\frac{1-\nu}{2}} + \sum_{n \neq 0} b(n) W_{\frac{2k+1}{4} \operatorname{sign}(n), \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx)$$

vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ sei

$$(3.1.6.3) \quad T_{p^2} F(z) := (p^\nu + p^{-\nu}) \left(b(0) y^{\frac{1+\nu}{2}} + b'(0) y^{\frac{1-\nu}{2}} \right) + \sum_{n \neq 0} \left\{ p b(np^2) + p^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n(-1)^k}{p} \right) b(n) + p^{-1} b\left(\frac{n}{p^2}\right) \right\} W_{\frac{2k+1}{4} \operatorname{sign}(n), \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx),$$

dabei ist $b(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{Z}$. Dann ist

$$(3.1.6.4) \quad p^{k-\frac{1}{2}} T_{p^2} \left(y^{\frac{2k+1}{4}} F(z) \right) = y^{\frac{2k+1}{4}} T_{p^2}^{\text{hol}} (F(z)).$$

Der Heckeoperator ist in der üblichen Weise für Divisoren auf $\mathfrak{F} = \Gamma \backslash \mathcal{H}$ erklärt, vgl. [Diamond Shur, 5 Hecke Operators (5.8)]. Etwas allgemeiner:

Hilfssatz 3.1.6.2. [Zagier 6, (36)] Für eine Menge $M \subset \mathfrak{F}$ sei

$$M|T_p := \{px|x \in M\} \cup \left\{ \frac{x+j}{p} | x \in M, j = 0, 1, \dots, p-1 \right\} \pmod{\Gamma},$$

d.h. $\in \mathfrak{F}$ und $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$. Dann ist

$$\Lambda_n|T_p = \Lambda_{np^2} + \left(\frac{n}{p} \right) \Lambda_n + p \Lambda_{\frac{n}{p^2}}.$$

Die Korrespondenz aus Proposition (3.1.2.4) ist kompatibel mit den Heckeoperatoren.

Satz 3.1.6.3. Für Spitzenformen f zu $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht $2k$, k gerade, ist

$$\boxed{\int_{\mathfrak{F}} T_p f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = T_{p^2} \left(\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \right)}$$

BEWEIS. Sei $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Maaßform für $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$, d.h. $a_n = a_{-n}$:

$$f(\tau) = \sum_{n \neq 0} a(n) W_{k \text{ sign } n, \nu} (4\pi |n| y) e(nx).$$

$$\begin{aligned} \text{Wegen } \int_{\mathfrak{C}_{(a,b,c)}} T_p f(\tau) \left(\frac{a\tau^2 + b\tau + c}{\sqrt{d}\eta} \right)^k d_Q \tau &= \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \int_{\mathfrak{C}_{\left(\frac{a}{p}, b, cp\right)}} f(\tau) \left(\frac{\frac{a}{p}\tau^2 + b\tau + cp}{\sqrt{d}\eta} \right)^k ds \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{p-1} \int_{\mathfrak{C}_{\left(ap, -2aj+b, \frac{aj^2-bj+c}{p}\right)}} f(\tau) \left(\frac{ap\tau^2 + (-2aj+b)\tau + \frac{aj^2-bj+c}{p}}{\sqrt{d}\eta} \right)^k ds \right\} \end{aligned}$$

und

$$\int_{\mathfrak{C}_{(a,b,c)}} f(\tau) \left(\frac{a\tau^2 + b\tau + c}{\sqrt{d}\eta} \right)^k ds = \int_{\mathfrak{C}_{(pa, pb, pc)}} f(\tau) \left(\frac{pa\tau^2 + pb\tau + pc}{\sqrt{p^2 d}\eta} \right)^k ds$$

ist

$$C_d(T_p f) = \sum_{\substack{Q \\ \mathfrak{C}_Q \in \Lambda_d}} \int_{\mathfrak{C}_Q} T_p f(\tau) \left(\frac{Q(\tau, 1)}{\sqrt{|Q|}\eta} \right)^k d_Q \tau = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\substack{Q \\ \mathfrak{C}_Q \in \Lambda_d|T_p}} \int_{\mathfrak{C}_Q} f(\tau) \left(\frac{Q(\tau, 1)}{\sqrt{|Q|}\eta} \right)^k d_Q \tau$$

für positive Diskriminanten d , ($d < 0$ ist klar,) also mit Hilfssatz 3.1.6.2.

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathfrak{F}} \mathbb{T}_p f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \\
&= \sum_{n>0} \frac{C_n(\mathbb{T}_p f)}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) + \sum_{n<0} \frac{k! C_n(\mathbb{T}_p f)}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \sum_{n>0} \frac{C_{np^2}(f) + \left(\frac{n}{p}\right) C_n(f) + p C_{\frac{n}{p^2}}(f)}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n<0} \frac{k! \left(C_{np^2}(f) + \left(\frac{n}{p}\right) C_n(f) + p C_{\frac{n}{p^2}}(f) \right)}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) \right\} \\
&= \mathbb{T}_{p^2} \left(\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \right).
\end{aligned}$$

Also korrespondieren Hecke-Maaß Eigenformen mit Hecke-Maaß Eigenformen zu den gleichen Hecke-Eigenwerten. \square

Wie für die holomorphen Modulformen gibt es auch hier eine umgekehrte Korrespondenz:

Satz 3.1.6.4 (Shimura-Lift). *Zwischen den Fourierkoeffizienten der korrespondierenden Hecke-Maaß Spitzenformen $f(\tau) = \sum_{n \neq 0} a_n W_{k \operatorname{sign} n, \nu}(4\pi |n| y) e(nx)$ mit $a_1 = 1$, $k \in 2\mathbb{N}_0$ und $F(\tau) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+1}{4} \operatorname{sign} n, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx)$ besteht für alle Fundamentaldiskriminanten D folgender Zusammenhang:*

$$\mathcal{L}_D(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{n^2 D}}{n^{s-\frac{1}{2}}} = b_D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

BEWEIS. Die Heckeoperatoren sind hermitesch. Sie sind mit dem Laplaceoperator vertauschbar. Daher gibt es eine orthogonale Basis von Hecke-Maaß Eigenformen

$$f_j(\tau) = \sum_{m \neq 0} \frac{a_j(m)}{\sqrt{|m|}} W_{k \operatorname{sign} m, \nu}(4\pi |m| y) e(mx)$$

mit $\mathbb{T}_n f_j(\tau) = \rho_j(n) f_j(\tau)$ bzw. wegen (3.1.6.1)

$$\rho_j(n) \frac{a_j(m)}{\sqrt{|m|}} = \sqrt{n} \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} \frac{a_j\left(\frac{mn}{d^2}\right)}{d} \sqrt{\frac{d^2}{|m|n}} \quad \text{oder} \quad \rho_j(n) a_j(m) = \sum_{\substack{d|\operatorname{ggT}(m,n) \\ d>0}} a_j\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

Wählt man $m = 1$, so ist $\rho_j(n) a_j(1) = a_j(n)$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass also $a_j(1) \neq 0$ für alle Hecke-Maaß Spitzenformen. Wir können annehmen, dass die f_j Hecke-normalisiert sind, dass also $a_j(1) = 1$ ist. Dann sind die $a_j(n)$ Hecke-Eigenwerte ([DFI, 6. Hecke operators]). Die Relationen zwischen den Fourierkoeffizienten spiegeln sich in der L-Reihe

$$(3.1.6.5) \quad L(f_j, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j(n)}{n^s} = \prod_p (1 - a_j(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1}$$

für Maaßformen wieder [Balslev Venkov, Theorem 5.1]. Sei $F_j(z) = \int_{\mathfrak{F}} f_j(\tau) \Theta_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$ mit den Fourier-

koeffizienten $b_j(n)$. Das sind nach Proposition 3.1.2.4 und Satz 3.1.5.1 ebenfalls Hecke-Maaß Eigenformen zu den gleichen Hecke-Eigenwerten $\rho_j(n) = a_j(n)$, also gilt nach (3.1.6.3) für die Fourierkoeffizienten von $\mathbb{T}_{p^2} F_j$:

$$a_j(p) b_j(n) = p b_j(np^2) + p^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{p}\right) b_j(n) + p^{-1} b_j\left(\frac{n}{p^2}\right)$$

bzw. für $\text{ggT}(m, p) = 1, p^2 \nmid t$:

$$(3.1.6.6) \quad a_j(p) b_j(tm^2) = p b_j(tm^2 p^2) + \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{t}{p}\right) b_j(tm^2)$$

$$(3.1.6.7) \quad a_j(p) b_j(tm^2 p^{2n}) = p b_j(tm^2 p^{2(n+1)}) + p^{-1} b_j(tm^2 p^{2(n-1)}) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Entsprechend der Argumentation in [Shimura 2, Corollary 1.8.] setze $H_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_j(tm^2 p^{2n}) x^n$. Addiert man das x -fache von Gleichung (3.1.6.6) und das x^{n+1} -fache von Gleichung (3.1.6.7) für alle $n \in \mathbb{N}$, so erhält man

$$a_j(p) x H_m(x) = p H_m(x) - p b_j(tm^2) + \frac{1}{\sqrt{p}} \left(\frac{t}{p}\right) b_j(tm^2) x + p^{-1} x^2 H_m(x),$$

also

$$(3.1.6.8) \quad H_m(x) = b_j(tm^2) \frac{1 - p^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{t}{p}\right) x}{1 - p^{-1} a_j(p) x + p^{-2} x^2}.$$

Die Identität von Dirichletreihen

$$(3.1.6.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_j(tn^2)}{n^s} = b_j(t) \prod_p \frac{1 - \left(\frac{t}{p}\right) p^{-\frac{3}{2}-s}}{1 - a_j(p) p^{-1-s} + p^{-2-2s}}$$

lässt sich reduzieren auf die Identität, die entsteht, wenn man für n nur Potenzen von p zulässt. Das ist dann

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_j(tp^{2m})}{p^{ms}} = b_j(t) \frac{1 - p^{-\frac{3}{2}-s} \left(\frac{t}{p}\right)}{1 - p^{-1-s} a_j(p) + p^{-2-2s}}.$$

Ersetze t durch tn^2 . Dann ist

$$(3.1.6.10) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_j(tn^2 p^{2m})}{p^{ms}} = b_j(tn^2) \frac{1 - p^{-\frac{3}{2}-s} \left(\frac{t}{p}\right)}{1 - p^{-1-s} a_j(p) + p^{-2-2s}}.$$

Gleichung (3.1.6.10) ist äquivalent zu (3.1.6.8), falls $x = p^{-s}$ und $m \leftrightarrow n$. Gleichung (3.1.6.9) ist äquivalent zu (3.1.6.10) für alle Primzahlen p . Mit $s' = s + \frac{1}{2}$, $D = t$ und (3.1.6.5) folgt der Satz aus (3.1.6.9). \square

Folgerung 3.1.6.4.1. Sei $k \in 2\mathbb{N}_0$. Die Fourierkoeffizienten der korrespondierenden Hecke-Maaß Spitzenformen $f(\tau) = \sum_{n \neq 0} a_n W_{k \text{ sign } n, \nu} (4\pi |n| y) e(nx)$ mit $a_1 = 1$ und $g(\tau) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+1}{4} \text{ sign } n, \frac{\nu}{2}} (4\pi |n| y) e(nx)$ erfüllen für Fundamentaldiskriminanten D folgende Relationen ($n > 0$):

$$\boxed{\sqrt{n} \sum_{d|n} \frac{\chi_D(d) b_{n^2 D/d^2}}{d^{\frac{3}{2}}} = b_D \cdot a_n \quad \text{bzw.} \quad b_D \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \chi_D(d) a_{n/d}}{d} = \sqrt{n} b_{n^2 D}.}$$

BEWEIS. Satz 3.1.6.4 und [Apostol 1, Theorem 11.5 und Example 3]. \square

Das ist kompatibel mit [Shimura 2] in der holomorphen Situation, denn die Fourierkoeffizienten A_n bzw. B_n von holomorphen Modulformen $F(\tau)$ bzw. $G(\tau)$ vom Gewicht $2k$ bzw. $k + \frac{1}{2}$ stehen zu den Koeffizienten a_n, b_n der entsprechenden automorphen Formen $\eta^k F$ und $\eta^{\frac{2k+1}{4}} G$ in der Beziehung

$$A_n = (4\pi n)^k a_n \quad B_n = (4\pi n)^{\frac{2k+1}{4}} b_n.$$

Dividiert man F und G durch $(4\pi)^k$, so ist F Hecke-normalisiert und man erhält:

Folgerung 3.1.6.4.2 (Shimura). Die Fourierkoeffizienten von korrespondierenden holomorphen Hecke-Eigenformen $F(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} A_n q^n$ mit $A_1 = 1$ vom Gewicht $2k, k \in 2\mathbb{N}$ und $G(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{N}} B_n q^n$ vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ erfüllen für Fundamentaldiskriminanten $D > 0$ folgende Relationen:

$$\sum_{d|n} \chi_D(d) d^{k-1} B_{n^2 D/d^2} = B_D \cdot A_n \quad \text{bzw.} \quad B_D \cdot \sum_{d|n} \mu(d) \chi_D(d) d^{k-1} A_{n/d} = B_{n^2 D}.$$

Definition 3.1.6.5. Sei $F(\tau) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+1}{4} \operatorname{sign} n, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx)$ eine Maaßform vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ für $\Gamma_0(4)$ und für Fundamentaldiskriminanten D :

$$\mathcal{L}_D(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{(-1)^k n^2 D}}{n^{s-\frac{1}{2}}} = b_{(-1)^k D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

Die Fourierkoeffizienten a_{-n} mit negativem Index werden durch (3.1.7.1) bestimmt. Dann ist der Shimura-Lift definiert als

$$\operatorname{Shim}_D(F) = \sum_{n \neq 0} a_n W_{k \operatorname{sign} n, \nu}(4\pi |n| y) e(nx).$$

Bemerkung. Falls F Hecke-Maaßform ist, hängt der Shimura-Lift nicht von D ab.

3.1.7. Niwa's Lemma. Da die umgekehrte Abbildung

$$g(z) \mapsto \int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}} g(z) \overline{\Theta_0(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2}$$

nach [Katok Sarnak, 4.] auch mit den Heckeoperatoren verträglich ist und wegen der starken Multiplizität-1 für $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Maaßformen hat man für $k = 0$ eine bijektive Korrespondenz zwischen Maaß-Spitzenformen vom Gewicht Null und ihrem Bild unter der hier gegebenen Thetatransformation. Dieses Bild liegt wieder im Kohnen-Plus-Raum, der sich durch das Verschwinden der Hälfte aller Fourierkoeffizienten beschreiben lässt. Das lässt sich auf beliebiges Gewicht $2k$ verallgemeinern:

Definition 3.1.7.1. Für holomorphe Modulformen F vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$, $k \in 2\mathbb{N}_0$ ist $U_4\tau_0$ nach [Niwa 2] und [Kohnen 1] ein selbstadjungierter Operator, dabei ist

$$\begin{aligned} (F|U_4)(z) &:= \frac{1}{4} \sum_{\nu \pmod{4}} F\left(\frac{z+\nu}{4}\right) \\ (F|\tau_0)(z) &:= (-2iz)^{-k-\frac{1}{2}} F\left(-\frac{1}{4z}\right) \end{aligned}$$

Dem entsprechen folgende Operatoren für automorphe Formen f vom gleichen Gewicht

$$\begin{aligned} \sigma(f(z)) &:= 2^{k-\frac{3}{2}} \sum_{\nu \pmod{4}} f\left(\frac{z+\nu}{4}\right) \\ \tau_0(f(z)) &:= \left(\frac{z}{|z|}\right)^{-k-\frac{1}{2}} f\left(-\frac{1}{4z}\right). \end{aligned}$$

Es ist $i^{k+\frac{1}{2}}\tau_0\sigma\left(y^{\frac{2k+1}{4}}F(z)\right) = y^{\frac{2k+1}{4}}(F|U_4\tau_0)(z)$. Der selbstadjungierte Operator $\mathcal{N} := i^{k+\frac{1}{2}}\tau_0\sigma$ hat die Eigenwerte $\left(\frac{2}{2k+1}\right)2^k = (-1)^{\frac{k}{2}}2^k$ und $-(-1)^{\frac{k}{2}}2^{k-1}$. Sei

$$\begin{aligned} V &:= L_{\operatorname{cusp}}^2(\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}, j^{2k+1}) \\ &= \left\{ f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(\gamma z) = j(\gamma, z)^{2k+1} f(z) \text{ für } \gamma \in \Gamma_0(4), f \text{ cuspidal und quadratintegrierbar} \right\}. \end{aligned}$$

der Hilbert-Raum der Gewicht $k + \frac{1}{2}$ -Maaß-Spitzenformen und $V^+ \subset V$ der Eigenraum von \mathcal{N} zum Eigenwert $(2i)^k$ (vgl. [Niwa 2, Lemma 1 und S. 201]).

Für Gewicht Null lässt sich eine einfache Unterscheidung in *gerade* und *ungerade* Formen an den Fourierkoeffizienten festmachen: $a_{-n} = \pm a_n$. Für Formen geraden Gewichts $2k$, $k \in \mathbb{N}_0$, mit Spektralparameter 2ν sorgen die Maassoperatoren dafür, dass diese Relation in

$$(3.1.7.1) \quad a_{-n} = \pm \left(2\nu - k + \frac{1}{2}\right)_{2k} a_n$$

für $n > 0$ übergeht. Äquivalent dazu ist die Definition von geraden Formen als den Eigenfunktionen des Θ -Operators aus [Maaß 2, (25)]

$$E_{2k-2}^+ \circ \dots \circ E_{-2k}^+ \{f(-\bar{z})\}$$

mit positivem Eigenwert.

Definition 3.1.7.2. Falls das obere (bzw. untere) Vorzeichen in (3.1.7.1) zutrifft, sollen die Maaßformen $f(\tau) = \sum_{n \neq 0} a_n W_{k \operatorname{sign} n, 2\nu}(4\pi |n| y) e(nx)$ vom Gewicht $2k$ wieder gerade (bzw. ungerade) heißen.

Bemerkung. Automorphe Formen, die von holomorphen Formen kommen, sind gerade. Sämtliche Maaßformen zerfallen wieder in die direkte Summe des Raumes der geraden und ungeraden Maaßformen.

Satz 3.1.7.3. Sei $k \in 2\mathbb{N}_0$. Für Maaß-Spitzenformen

$$g(z) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+1}{4} \operatorname{sign} n, \nu}(4\pi |n| y) e(nx) \in V^+$$

vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ für $\Gamma_0(4)$ ist

$$f(\tau) := \int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}} g(z) \overline{\Theta_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2}$$

eine gerade Maaßform vom Gewicht $2k$ für $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ und zwar ist

$$f(\tau) = \frac{3\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{4}} b_1}{(4\sqrt{\pi})^k} \operatorname{Shim}_1(g),$$

wobei $\operatorname{Shim}_1(g)$ der von den holomorphen Modulformen bekannte Shimura-Lift aus Def. 3.1.6.5 ist. Die Korrespondenz ist kompatibel mit den Heckeoperatoren.⁶

BEWEIS. [Niwa 1], [Sarnak 2, Theorem 3.6 ff.], [Katok Sarnak, Proposition 4.1], [Kojima]. □

Damit ist Niwa's Lemma auf automorphe Formen beliebigen geraden Gewichts verallgemeinert. Die Umkehrung der Maaß-Shintani-Korrespondenz ist die Shimura-Korrespondenz.

3.1.8. Beispiele: Holomorphe Poincaréreihen. Die Zyklenintegrale der Poincaréreihen (Abschnitt 2.2) lassen sich zu einer erzeugenden Funktion kombinieren.

Satz 3.1.8.1. Seien

$$P_k(m, z) := \begin{cases} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} q^m |k\gamma(z)|, & k \in 2\mathbb{N}, k \geq 12, \\ \frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} q^m |k\gamma(z)| \right) \Big|_{\text{pr}}, & k - \frac{1}{2} \in \mathbb{N}, k > 6 \end{cases}$$

die Poincaréreihen zu $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ bzw. aus den Kohnen-Plus-Räumen. pr ist Kohnens Projektionsoperator, [Kohnen 3, S. 250]. Für $k \in 2\mathbb{N}, n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ist⁷

$$(3.1.8.1) \quad \boxed{\int_{\mathfrak{F}} P_{2k}(n, \tau) \Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu = \frac{\Gamma(k)}{(2\pi i n)^k} \sum_{m|n} m^k P_{k+\frac{1}{2}}(m^2, z)},$$

$$\int_{\mathfrak{F}} \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) m^k P_{2k}(m, \tau) \Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu = \Gamma(k) \left(\frac{n}{2\pi i}\right)^k P_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z).$$

BEWEIS. Für $n = 1$ folgt es aus Gleichung (3.1.5.1) und Abschnitt 2.2:

$$\int_{\mathfrak{F}} P_{2k}(1, \tau) \Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu = \frac{\Gamma(k)}{(2\pi i)^k} P_{k+\frac{1}{2}}(1, z).$$

⁶wie in Satz 3.1.6.3

⁷ $\Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) := \eta^k y^{-\frac{2k+1}{4}} \Theta_{2k}(z, \tau)$

Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\int_{\mathfrak{F}} P_{2k}(n, \tau) \Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu \stackrel{(3.1.5.1)}{=} -\frac{1}{2} \sum_{\substack{d=0,1 \\ d \equiv 1 \pmod{4}}}^{\infty} q^d \int_{Q \in \mathcal{Q}_d} P_{2k}(n, z) Q(z, 1)^{k-1} dz$$

$$\stackrel{\text{HS. 2.2.1}}{=} \frac{\Gamma(k)}{(2\pi in)^k} \sum_{\substack{d=0,1 \\ d \equiv 1 \pmod{4}}} \left\{ d^{\frac{k}{2}} \varepsilon(\sqrt{d} | n) + (-1)^{\frac{k}{2}} \sqrt{2n\pi} d^{\frac{2k-1}{4}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(n, d)}{\sqrt{a}} J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi n \sqrt{d}}{a} \right) \right\} q^d.$$

Die rechte Seite von (3.1.8.1) ist

$$\frac{\Gamma(k)}{(2\pi in)^k} \sum_{m|n} m^k P_{k+\frac{1}{2}}(m^2, z) = \frac{\Gamma(k)}{(2\pi in)^k} \sum_{m|n} m^k \cdot \sum_{\substack{d=1 \\ d \equiv 1 \pmod{4}}} \left\{ \delta_{m^2, d} + \frac{\pi}{2i^{\frac{k+1}{2}}} \left(\frac{d}{m^2} \right)^{\frac{2k-1}{4}} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade}, c}) \frac{S_{k+\frac{1}{2}, \infty, \infty}(m^2, d; 4c)}{c} J_{k-\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi m \sqrt{d}}{c} \right) \right\} q^d.$$

Wegen Hilfssatz C.3.3.4.2 (C.3.3.4.6) ist das gleich (setze $m = \frac{n}{t}$, $c = \frac{a}{t}$ und summiere über $t | \text{ggT}(a, n)$). Die zweite Zeile des Satzes ergibt sich mit Hilfe der Möbiusschen Umkehrformeln. \square

Folgerung 3.1.8.1.1. Die Spitzenformen im Kohnen-Plus-Raum $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$, $k \geq 6$ werden durch die Poincaréreihen

$$P_{k+\frac{1}{2}}(m^2, z), \quad m = 1, \dots, n = \begin{cases} \left[\frac{k}{6} \right] - 1, & k \equiv 1 \pmod{6} \\ \left[\frac{k}{6} \right], & \text{sonst} \end{cases}$$

erzeugt.

BEWEIS. Nach [Peterson 2, Satz 4] wird $S_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ durch die ersten n Poincaréreihen $P_{2k}(m, z)$, $m = 1, \dots, n$ erzeugt. Das Bild des Θ -Lifts wird nach Satz 3.1.8.1 von $P_{k+\frac{1}{2}}(m^2, z)$, $m = 1, \dots, n$ erzeugt. Hecke-Eigenformen werden durch Θ_{2k} auf Hecke-Eigenformen zu den gleichen Eigenwerten abgebildet. Sie sind sowohl in $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ als auch in $\Gamma_0(4)$ eindeutig durch ihre Hecke-Eigenwerte (dieselben in beiden Räumen) bestimmt, s. [Kohnen 1, Theorem 1 ii)]. Daher liegen alle Hecke-Eigenformen (d.h. eine Basis) von $S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4))$ im Bild des Θ -Lifts und

$$\dim S_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) = \dim \Theta_{2k}(S_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))) = \dim S_{k+\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4)).$$

\square

Der Θ -Lift gibt einen Isomorphismus der Räume $M_{2k}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ und $M_{k+\frac{1}{2}}(\Gamma_0(4))$, der für Hecke-Eigenformen die Umkehrung des Shimura-Isomorphismus Shim_1 (vgl. Definition 3.1.6.5) ist, aber für $\dim S_k > 1$ auf den Poincaréreihen von ihm abweicht⁸: Z.B. ist i.a.

$$\text{Shim}_1 \left(P_{k+\frac{1}{2}}(1, z) \right) \neq \lambda \cdot P_{2k}(1, z).$$

3.2. Zagier-Lift

3.2.1. Bekannte Ergebnisse.

Satz 3.2.1.1. Falls $f(\tau) = \sum a_n e(nz) \in M_0^1, \sigma_1(0) := -\frac{1}{24}$, ist

$$2 \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_{-n} \sigma_1(n) + \sum_{d \in \mathbb{N}} \left(\sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_{-d}^+} \frac{f(\tau_Q)}{w_Q} \right) q^d - \sum_{m \in \mathbb{N}} \left(m \sum_{k \in \mathbb{N}} a(-mk) \right) q^{-m^2}$$

⁸da die Poincaréreihen dann Linearkombinationen mehrerer Hecke-Eigenformen sind

der holomorphen Teil der harmonischen schwachen Maaßform $y^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_0(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$ vom Gewicht $\frac{3}{2}$ mit

$$\Omega_0(z, \tau) := y^{\frac{3}{4}} \sum_{d \equiv 0,1 \pmod{4}} e(-d\bar{z}) \sum_{|Q|=d} \left(4y \left(\frac{q(\tau)}{\eta} \right)^2 - \frac{1}{2\pi} \right) e^{-4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta} \right)^2}.$$

BEWEIS. Der Fall $p = 1$ von [Bruinier Funke 1, Theorem 1.1]. Der nicht-holomorphe Teil wird in [Bruinier Funke 1, Theorem 4.5] wiedergegeben. \square

Folgerung 3.2.1.1.1. [Bruinier Funke 1, Corollary 4.8]

Wenn der konstante Fourierkoeffizient von $f \in S_0^!$ verschwindet, gilt

$$y^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_0(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} \in M_{\frac{3}{2}}^!.$$

Beispiele für Satz und Folgerung sind $f \equiv 1$ mit dem Bild $G_{\frac{3}{2}}$ bzw. $f(\tau) = j(\tau) - 744$, das auf $-\frac{E_4(4z)\theta_1(z)}{\eta(4z)^6} \in M_{\frac{3}{2}}^!(\Gamma_0(4))$ abgebildet wird.

In der Maaß-Shintani-Reihe kommen CM-Werte als negative Fourierkoeffizienten vor. Durch Konjugation bzw. die Symmetrie $z \mapsto \bar{z}$ vertauschen sich positive und negative Fourierkoeffizienten.

3.2.2. Korrespondenz von Formen negativen Gewichts $-2k, k \in \mathbb{N}_0$. Die folgenden Überlegungen haben mehr heuristischen Charakter.

Sei f automorphe Spitzenform vom Gewicht $-2k$ mit Spektralparameter ν . Die Maaß-Shintani-Korrespondenz liefert für nicht-negatives **gerades** k folgende Fourierreihe:

$$\int_{\mathfrak{F}} \overline{f(\tau)} \Theta_{2k}(z, \tau) d\mu = \sum_{n>0} \frac{C_n(\bar{f})}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) e(nx) + \sum_{n<0} \frac{k! C_n(\bar{f})}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx);$$

$k+1$ -maliges Anwenden des Maaßoperators E^- liefert mit Hilfe von [Bruggeman 1, (4.4)]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{F}} \overline{f(\tau)} E_{-k+\frac{1}{2}}^- \circ \cdots \circ E_{k-\frac{3}{2}}^- \circ E_{k+\frac{1}{2}}^- \Theta_{2k}(z, \tau) d\mu \\ &= \frac{2^{k+1}}{4^{k+1}} \left(\left(-k - \frac{1}{2} \right)^2 - \bar{\nu}^2 \right) \left(\left(-k + \frac{3}{2} \right)^2 - \bar{\nu}^2 \right) \cdots \left(\left(k - \frac{1}{2} \right)^2 - \bar{\nu}^2 \right) \\ & \cdot \sum_{n>0} \frac{C_n(\bar{f})}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) e(nx) - 2^{k+1} \sum_{n<0} \frac{k! C_n(\bar{f})}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx). \end{aligned}$$

Konjugieren, Multiplizieren mit $-\frac{1}{2\pi}$ und Ersetzen von n durch $-n$ ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) d\mu = \left(\nu - k - \frac{1}{2} \right) \sum_{2k+2} \frac{C_{-n}(f)}{2^{2k+\frac{7}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{5}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \\ (3.2.2.1) \quad & + \sum_{n>0} \frac{k! C_{-n}(f)}{2^{k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) e(nx) \end{aligned}$$

Für automorphe Spitzenformen f vom Gewicht $-2k$ mit Spektralparameter $k + \frac{1}{2}$ sind die Beiträge der Zyklenintegrale Null.

Für **ungerades** k kann man die Shintani-Maaß-Korrespondenz auf die geliftete und anschließend konjugierte

Funktion f anwenden und hat

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{F}} \overline{E_{-2k}^{+\tau} f(\tau)} \Theta_{2k-2}(z, \tau) d\mu &= - \int_{\mathfrak{F}} \overline{f(\tau)} E_{2k-2}^{-\tau} \Theta_{2k-2}(z, \tau) d\mu \\ &= \sum_{n>0} \frac{C_n \left(\overline{E_{-2k}^{+\tau} f} \right)}{2^{k+\frac{1}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) e(nx) + \sum_{n<0} \frac{(k-1)! C_n \left(\overline{E_{-2k}^{+\tau} f} \right)}{2^{2k-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{3}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \end{aligned}$$

Konjugieren, Multiplizieren mit $2^{3k-2}\pi^{k-1}$ und Ersetzen von n durch $-n$ ergibt

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) d\mu &= \sum_{n<0} \frac{2^{2k-\frac{5}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{3}{4}} C_{-n} \left(E_{-2k}^{+} f \right)}{|n|^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \\ &\quad + \sum_{n>0} \frac{2^{k-\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}-\frac{1}{4}} (k-1)! C_{-n} \left(E_{-2k}^{+} f \right)}{n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}, \frac{\nu}{2}}(4\pi n y) e(nx) \end{aligned}$$

und für $\nu = k + \frac{1}{2}$ hat man

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) d\mu = y^{\frac{1-2k}{4}} \left\{ \sum_{n<0} \frac{2^{k-2} C_{-n} \left(E_{-2k}^{+} f \right)}{|n|^{\frac{k+1}{2}} \sqrt{\pi}} \Gamma\left(k + \frac{1}{2}, 4\pi |n| y\right) e(nz) + \sum_{n>0} \frac{(k-1)! C_{-n} \left(E_{-2k}^{+} f \right)}{2n^{\frac{k+1}{2}}} e(nz) \right\}.$$

Das motiviert folgende Kernfunktion für eine Korrespondenz von automorphen Formen vom Gewicht $-2k$ auf Formen vom Gewicht $\frac{3}{2} + k$ für gerades k bzw. $\frac{1}{2} - k$ für ungerades k , vgl. [Bruinier Funke 1, Lemma 7.6, Theorem 7.7] und [Zagier 13, Theorem 1, 5(ii), 11] im holomorphen Fall:

Definition 3.2.2.1. Für $k \in 2\mathbb{N}_0$ sei

$$\Omega_{2k}(z, \tau) := -\frac{1}{2\pi} E_{k-\frac{1}{2}}^{+} \circ \dots \circ E_{-k-\frac{1}{2}}^{+} \overline{\Theta_{2k}(z, \tau)}$$

mit den Maaßoperatoren $E_m^{+} = 4iy\partial_z + m = 2iy\partial_x + 2y\partial_y + m$. Sie beziehen sich im folgenden immer, wenn nicht ausdrücklich anders erwähnt, auf die Variable z . Für $k \in \mathbb{N}_{\text{ungerade}}$ sei

$$\Omega_{2k}(z, \tau) := 2^{3k-2}\pi^{k-1} E_{2k-2}^{+\tau} \overline{\Theta_{2k-2}(z, \tau)}$$

mit dem Maaßoperator bezogen auf die Variable τ .

Konstruiert wurde diese Kernfunktion für $k = 0$ in [Kudla Millson]. Die Fourierreihe bzgl. $-\bar{z}$ vertauscht die Rolle von Zyklenintegralen und CM-Werten. Das Integral von Ω_0 über den Standardfundamentalebereich stammt von [Funke], s. auch [Bruinier Funke 1, Corollary 7.2]. Man kommt dabei auf die nicht-holomorphe Eisensteinreihe vom Gewicht $\frac{3}{2}$ aus [Zagier 2]:

$$y^{-\frac{3}{4}} \int_{\mathfrak{F}} \Omega_0(z, \tau) \frac{d\xi dy}{\eta^2} = -\frac{1}{6} + 2 \sum_{N=1}^{\infty} H(N) e(Nz) + \frac{1}{8\pi\sqrt{y}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta(4\pi n^2 y) e(-n^2 z)$$

$$\text{mit } \beta(y) = \int_1^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-ty} dt = 2e^{-y} - 2\sqrt{\pi y} \operatorname{erfc}(\sqrt{y}) = \frac{W_{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}}(y)}{e^{\frac{y}{2}} \sqrt{y}}.$$

Die Verallgemeinerung für schwach-holomorphe Modulformen wurde von [Bruinier Funke 1] ausgewertet. Damit sind auch die Beispiele aus [Zagier 13] erklärt. Mit Hilfe von Hilfssatz 3.1.2.3 ergibt sich

Hilfssatz 3.2.2.2. Die Thetafunktion $\Omega_{2k}(z, \tau)$ transformiert in z wie eine automorphe Form vom Gewicht $k + \frac{3}{2}$ bzw. $\frac{1}{2} - k$, in τ wie eine automorphe Form vom Gewicht $2k$:

$$\Omega_{2k}(z, \tau) = O\left(y^C \left(1 + \frac{1}{y^{\frac{3}{2}}}\right) \left(\eta + \frac{1}{\eta}\right)\right) \quad \text{für } z, \tau \in \mathcal{H}, C \in \mathbb{R};$$

das gilt sogar für die Summe der Absolutbeträge,

$$\begin{aligned}\Omega_{2k}(\gamma_1 z, \tau) &= \Omega_{2k}(z, \tau) \cdot \begin{cases} j(\gamma_1, z)^{2k+3}, & k \text{ gerade} \\ j(\gamma_1, z)^{1-2k}, & k \text{ ungerade} \end{cases} \quad \text{und } \gamma_1 \in \Gamma_0(4), \\ \Omega_{2k}(z, \gamma_2 \tau) &= \left(\frac{cz+d}{|cz+d|} \right)^{2k} \Omega_{2k}(z, \tau) \quad \text{für } \gamma_2 \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \Delta_{2k}^\tau \Omega_{2k}(z, \tau) &= 4 \Delta_{k+\frac{3}{2}}^z \Omega_{2k}(z, \tau) - \frac{3}{4} \Omega_{2k}(z, \tau), \quad \Delta^z \text{ bezieht sich auf } z, \Delta^\tau \text{ auf } \tau.\end{aligned}$$

BEWEIS. Man kann Ω_{2k} als Funktion von $z \in \mathcal{H}$ und $g \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$ schreiben:

$$y^{\frac{3}{4}} \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} e(x(4ac-b^2)) f(\sqrt{y}g^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$$

mit

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = \left\{ P(a+c)^2 - \frac{1}{2\pi} \right\} e^{-2\pi(2a^2+b^2+2c^2)},$$

P ein Polynom, vgl. Hilfssatz 3.2.2.4.

Die gleiche Argumentation wie in [Niwa 1, §2] führt zur 1. Beh. Das Anwenden der Maaßoperatoren ändert das Wachstumsverhalten von Schwartzfunktionen nicht grundlegend. Interessanter ist die Frage, ob Ω_{2k} wie für $k=0$ bei $i\infty$ exponentiell abfällt und der Lift daher auch für schwach-holomorphe Modulformen sinnvoll ist. Maaßoperatoren und Laplaceoperator vertauschen (sowohl bezüglich derselben als auch verschiedener Variablen). Anwendung der Relationen aus Hilfssatz 3.1.3.5 führt mit Hilfe von Hilfssatz 3.1.2.3 zur Differenzialgleichung von Ω_k . \square

Satz 3.2.2.3. Automorphe Spitzenformen vom Gewicht $-2k$, $k \in \mathbb{N}_0$ mit Eigenwert $-k(1+k)$ entsprechen unter der Ω -Korrespondenz automorphen Formen vom Gewicht $k + \frac{3}{2}$ (k gerade) bzw. $\frac{1}{2} - k$ (k ungerade) mit Spektralparameter $\frac{2k+1}{4}$:

$$\int_{\tilde{\mathfrak{F}}} f(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) d\mu = \begin{cases} 2k! y^{\frac{2k+3}{4}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{\frac{k}{2}} C_{-n}(f) e(nz), & k \text{ gerade,} \\ 2k! y^{\frac{1-2k}{4}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-\frac{k+1}{2}} C_{-n}(f) e(nz) + \sum_{n \leq 0} c'_n(y) e(nx), & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

BEWEIS. Spezialfall der Gleichungen (3.2.2.1) ff.

Nach Hilfssatz 3.1.3.3 ist $2k! C_{-n}(f) = (k-1)! C_{-n}(E_{-2k}^+ f)$; (3.2.2.1) und $W_{\frac{k}{2} + \frac{3}{4}, \frac{k}{2} + \frac{1}{4}}(4\pi ny) = (4\pi ny)^{\frac{2k+3}{4}} e^{-2\pi ny}$. Wegen Hilfssatz 3.2.2.2 gibt es keine Konvergenzprobleme für automorphe Spitzenformen. \square

Bemerkung. Diese Überlegungen waren eher heuristischer Natur zur Konstruktion des Thetakerns. Eine sinnvolle Klasse von Funktionen für die Theta-Korrespondenz wird in [Bruinier Funke 2, 3. Weak Maass forms] eingeführt.

Falls die Konvergenz keine Schwierigkeiten macht, hat man dabei auch [Zagier 13, Theorem 11] (k ungerade) erklärt:

Folgerung 3.2.2.3.1. [Zagier 13, Theorem 11]

Für gerades k , d.h. $k=0, 2, 4, 6$; $F_1 = j - 744$, $F_3 = E_4^2/\Delta$, $F_5 = E_4/\Delta$ und $F_7 = 1/\Delta$ ist⁹

$$\int_{\tilde{\mathfrak{F}}} \eta^{-k} F_{k+1}(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = -2(4\pi i)^k y^{\frac{2k+3}{4}} \gamma_{k+1}(z);$$

⁹dann ist $F_{k+1} = F_{-2k}(1, \tau)$, $\gamma_{k+1} = F_{k+\frac{3}{2}}(1, z)$ im Sinne von Anhang C.3.3

$\gamma_{k+1}(z) = q^{-1} + O(q) \in M_{k+\frac{3}{2}}^1$ sind eindeutig gegeben durch:

$$\begin{aligned}\gamma_1(z) &= \frac{E_4(4z)\alpha}{144\Delta(4z)} = \frac{16E_4(4z)}{\theta_3(z)\theta_2^4(z)}, & \gamma_3(z) &= \frac{5E_6(4z)\alpha(z) + E_4(4z)\beta(z)}{864\Delta(4z)}, \\ \gamma_5(z) &= \frac{5E_4^2(4z)\alpha(z) + E_6(4z)\beta(z)}{864\Delta(4z)}, & \gamma_7(z) &= E_4(4z)\gamma_3(z)\end{aligned}$$

mit den Spitzenformen

$$\begin{aligned}\alpha(z) &:= E_6(4z)E_{\frac{7}{2}}(z) - E_4(4z)E_{\frac{11}{2}}(z) \in S_{9\frac{1}{2}}^+(\Gamma), \\ \beta(z) &:= E_4(4z)^2E_{\frac{7}{2}}(z) - E_6(4z)E_{\frac{11}{2}}(z) \in S_{11\frac{1}{2}}^+(\Gamma)\end{aligned}$$

und

$$\theta_3(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \in M_{\frac{1}{2}}^+(\Gamma_0(4)), \theta_2^4(z) := 16 \sum_{\substack{n=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \sigma(n) q^n \in M_2(\Gamma_0(4)).$$

BEWEIS. Sei $\partial_h = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{h}{4\pi\eta}$ wie in [Zagier 13, vor Theorem 11]. Wegen Hilfssatz 3.1.3.3 ist¹⁰:

$$E_h^{+\tau} \left(\eta^{\frac{h}{2}} F(\tau) \right) = -8\pi\eta^{\frac{h}{2}+1} \partial_h F(\tau) \text{ f\u00fcr (schwach-)holomorphe } F \text{ vom Gewicht } h,$$

also

$$\begin{aligned}(8\pi)^k \Phi_{k+1}(\tau_Q) &:= (-8\pi)^k \partial_{-2} \circ \partial_{-4} \circ \dots \circ \partial_{-2k} F_{k+1}(\tau) \Big|_{\tau=\tau_Q} = E_{-2}^{+\tau} \circ E_{-4}^{+\tau} \circ \dots \circ E_{-2k}^{+\tau} \left(\eta^{-k} F_{k+1}(\tau) \right) \Big|_{\tau=\tau_Q} \\ &= 2^k k! c_k = \left(\frac{\sqrt{d}}{a} \right)^k C_k[F_{k+1}; \tau_Q]\end{aligned}$$

mit den kanonische Taylorkoeffizienten $C_k[F; \tau_Q]$ f\u00fcr holomorphe Funktionen F vom Gewicht $-2k$, definiert durch

$$\frac{1}{(1-w)^{-2k}} F\left(\frac{\tau_Q - \bar{\tau}_Q w}{1-w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n[F; \tau_Q] \frac{w^n}{n!} \quad (|w| < 1), \text{ vgl. (3.1.3.2).}$$

Insgesamt ist

$$(3.2.2.2) \quad k! C_{-n}(\eta^{-k} F_{k+1}) = (4\pi)^k \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_{-n}} \frac{\Phi_{k+1}(\tau_Q)}{w_Q},$$

d.h.

$$n. \text{ ter Koeff. des Zagier-Lifts} \stackrel{\text{Satz 3.2.2.3}}{=} n^{\frac{k}{2}} (4\pi)^k C_{-n}(\Phi_{k+1}).$$

Damit ist die Folgerung bis auf einen konstanten Faktor bewiesen¹¹. □

F\u00fcr $k=0$ sind die Konvergenzfragen in [Funke, 4.1] gekl\u00e4rt. Die Kernfunktion $\Omega_0(z, \tau)$ verschwindet bei $\tau \rightarrow i\infty$ wie $e^{-C\eta^2}$. Das l\u00e4sst sich auf den gewichteten Fall \u00fcbertragen, vgl. Abschnitt 3.2.3. Daher ist die Ω -Korrespondenz auf schwach-holomorphen Modulformen definierbar.

Hilfssatz 3.2.2.4. F\u00fcr $k \in 2\mathbb{N}_0, d = b^2 - 4ac$ sei

$$\omega_{2k,n}(z, \tau) := -\frac{1}{2\pi} E_{2n-k-\frac{5}{2}}^+ \circ \dots \circ E_{-k-\frac{1}{2}}^+ \left(y^{\frac{2k+3}{4}} e(-d\bar{z}) \frac{\left(\frac{a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c}{\eta} \right)^k}{e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)^2}} \right).$$

¹⁰ $E_h^{+\tau}(f)$ ist die Maa\u00dfableitung bezogen auf τ

¹¹Hier wird \u00fcber positiv und negativ definite Formen summiert

Dann gilt

$$\omega_{2k,n}(z, \tau) = \left(\frac{\sqrt{y}(a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c)}{\eta} \right)^k \omega_{0,n}(z, \tau),$$

$$\omega_{0,n}(z, \tau) = - \frac{y^{\frac{3}{4}} e(-d\bar{z})}{2\pi e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)^2}} \text{He}_{2n} \left(\sqrt{8\pi y} \frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)$$

mit den Hermite-Polynomen

$$\text{He}_{2n}(x) = (-1)^n (2n-1)!! \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{2}\right).$$

Mit Hilfe dieser Funktionen läßt sich die Kernfunktion konstruieren. Für $k \in 2\mathbb{N}_0$:

$$\Omega_{2k}(z, \tau) = \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} \omega_{2k,k+1} = -(2k+1)!! \frac{y^{\frac{2k+3}{4}}}{2\pi\eta^k} \sum_{d \equiv 0,1 \pmod{4}} e(-d\bar{z}) \sum_{|Q|=d} Q^k(\bar{\tau}, 1) {}_1F_1\left(k + \frac{3}{2}, \frac{1}{2}; -4\pi y \frac{q^2(\tau)}{\eta^2}\right);$$

für ungerades $k \in \mathbb{N}$:

$$\Omega_{2k}(z, \tau) = \frac{2^{3k+2} \pi^k y^{\frac{2k+5}{4}}}{\eta^{k+1}} \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} e(-d\bar{z}) \frac{(a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c)^k}{e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)^2}} (a|\tau|^2 + b\xi + c).$$

BEWEIS. 1) k gerade:

Wir verwenden vollständige Induktion nach n :

Für $n = 0$ lautet die erste Aussage:

$$\omega_{2k,0} = \left(\frac{\sqrt{y}q(\bar{\tau})}{\eta} \right)^k \omega_{0,0}(z, \tau), \text{ setze } \omega_{0,0}(z, \tau) := - \frac{y^{\frac{3}{4}} e(-d\bar{z})}{2\pi e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)^2}}.$$

Es gibt nichts zu beweisen. Der Schluss von n auf $n+1$ geht folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \omega_{2k,n+1} &= E_{2n-k-\frac{1}{2}}^+ \omega_{2k,n} = \left\{ 2iy \partial_x + 2y \partial_y + \left(2n - k - \frac{1}{2} \right) \right\} \left\{ \left(\frac{\sqrt{y}q(\bar{\tau})}{\eta} \right)^k \omega_{0,n} \right\} \\ &= \left(\frac{q(\bar{\tau})}{\eta} \right)^k \left\{ 2iy^{\frac{k}{2}+1} \partial_x \omega_{0,n} + 2y \frac{k}{2} y^{\frac{k}{2}-1} \omega_{0,n} + 2y^{\frac{k}{2}+1} \partial_y \omega_{0,n} + \left(2n - k - \frac{1}{2} \right) y^{\frac{k}{2}} \omega_{0,n} \right\} \\ &= \left(\frac{q(\bar{\tau})}{\eta} \right)^k y^{\frac{k}{2}} E_{2n-\frac{1}{2}}^+ \omega_{0,n} = \left(\sqrt{y} \frac{q(\bar{\tau})}{\eta} \right)^k \omega_{0,n+1}. \end{aligned}$$

Der explizite Ausdruck für die $\omega_{0,n}$ läßt sich ebenfalls induktiv bestätigen. Für $n = 0$ ist alles klar.

Sei $\omega_{0,n} = -(2n-1)!! \frac{y^{\frac{3}{4}} e(-d\bar{z})}{2\pi e^{ry}} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; ry\right)$ mit $r := 4\pi \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta} \right)^2$ schon bewiesen. Dann ist nach Definition $\omega_{0,n+1} = -\frac{(2n-1)!!}{2\pi} E_{2n-\frac{1}{2}}^+ \left(y^{\frac{3}{4}} e^{-2\pi id\bar{z}-ry} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; ry\right) \right)$ und mit $\Phi := y^{\frac{3}{4}} e^{-2\pi idx-2\pi dy-ry} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; ry\right)$:

$$\begin{aligned} E_{2n-\frac{1}{2}}^+(\Phi) &= 2iy(-2\pi id)\Phi + 2y \left\{ \frac{3\Phi}{4y} - (2\pi d + r)\Phi + y^{\frac{3}{4}} \frac{e(-d\bar{z})}{e^{ry}} \frac{\partial}{\partial y} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; ry\right) \right\} + \left(2n - \frac{1}{2} \right) \Phi \\ &= (2n+1-2ry)\Phi + 2y^{\frac{7}{4}} r \frac{e(-d\bar{z})}{e^{ry}} {}_1F_1\left(1-n; \frac{3}{2}; ry\right) \\ &= \frac{y^{\frac{3}{4}} e(-d\bar{z})}{e^{ry}} \left\{ (2n+1-2ry) {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; ry\right) - 4nry {}_1F_1\left(1-n; \frac{3}{2}; ry\right) \right\} \\ &\stackrel{[\text{AS}, (13.4.11)]}{=} (2n+1) \frac{y^{\frac{3}{4}} e(-d\bar{z})}{e^{ry}} {}_1F_1\left(-n-1; \frac{1}{2}; ry\right) \\ &\stackrel{(\text{A.7.3.3})}{=} (2n+1) y^{\frac{3}{4}} e(-d\bar{z}) {}_1F_1\left(n + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -ry\right). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Induktionsbehauptung. Die Darstellung mit Hilfe von Hermite-Polynomen verwendet [AS, 22.3.11], [AS, 22.5.56].

2) k ungerade: zu zeigen ist

$$\begin{aligned} & 2^{3k-2}\pi^{k-1} \{2(\tau - \bar{\tau})\partial_{\tau} + (2k-2)*\} \left(y^{\frac{2k+1}{4}} e^{2\pi i d(-x+iy)} \frac{\left(\frac{a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c}{\frac{\tau - \bar{\tau}}{2i}}\right)^{k-1}}{e^{4\pi y \left(\frac{a\tau\bar{\tau} + b\frac{\tau + \bar{\tau}}{2} + c\right)^2}} \right) \\ &= \frac{2^{3k+2}\pi^k y^{\frac{2k+5}{4}}}{\eta^{k+1}} e(-d\bar{z}) \frac{(a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c)^k}{e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta}\right)^2}} (a|\tau|^2 + b\xi + c). \end{aligned}$$

Das lässt sich leicht mit MATHEMATICA überprüfen. □

Unter der Voraussetzung der Konvergenz ergibt das:

Satz 3.2.2.5. Die Liftung von schwach-holomorphen Modulformen $f \in M_{-2k}^1$ nach $g(z) = \int_{\mathfrak{F}} \Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) f(\tau) d\mu \in M_{k+\frac{3}{2}}^1$ aus [Zagier 13, Theorem 11] hat folgenden Integralkern:

Für $k \in 2\mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} \Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) &= -\frac{(2k+2)!}{2^{k+2}\pi\eta^{2k}} \sum_{d \equiv 0,1 \pmod{4}} e(-d\bar{z}) \sum_{|Q|=d} \frac{Q^k(\bar{\tau}, 1)}{e^{4\pi y \left(\frac{q(\tau)}{\eta}\right)^2}} \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(-16\pi y \frac{q^2(\tau)}{\eta^2})^j}{(k+1-j)!(2j)!} \\ &= -\frac{(2k+1)!!}{2\pi\eta^{2k}} \sum_{d \equiv 0,1 \pmod{4}} e(-d\bar{z}) \sum_{|Q|=d} Q^k(\bar{\tau}, 1) {}_1F_1\left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -4\pi y \frac{q^2(\tau)}{\eta^2}\right) \end{aligned}$$

und für $k \in \mathbb{N}_{\text{ungerade}}$

$$\Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) = \frac{2^{3k+2}\pi^k y^{k+1}}{\eta^{2k+1}} \sum_{a,b,c \in \mathbb{Z}} e((4ac - b^2)\bar{z}) (a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c)^k \frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{e^{4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta}\right)^2}}.$$

BEWEIS. $\Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) = \frac{1}{\eta^k y^{\frac{2k+3}{4}}} \sum_{a,b,c} \omega_{2k,k+1}(z, \tau)$ für k gerade und Hilfssatz 3.2.2.4. Es fehlt noch der Nachweis,

dass der Integralkern wie $e^{-C\eta^2}$ bei $i\infty$ abnimmt, im nächsten Abschnitt. □

3.2.3. Konvergenz. Wie in [Bruinier Funke 1, Prop. 4.1] hat man

Satz 3.2.3.1. Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für $\eta \rightarrow \infty$

$$\Omega_{2k}(z, \tau) = \left(e^{-C\eta^2} \right)$$

gleichmäßig in ξ .

BEWEIS. Ich beschränke mich im folgenden immer auf gerades k .

Die Summe über alle ganzzahligen a, b, c im Kern Ω_{2k} wird durch Poisson-Summation bezüglich c vereinfacht. Sei $t = -\frac{2\sqrt{y}}{\eta} (a|\tau|^2 + b\xi + c)$ und

$$f(c) = e\left(- (b^2 - 4ac)\bar{z}\right) (a\bar{\tau}^2 + b\bar{\tau} + c)^k {}_1F_1\left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -4\pi y \left(\frac{a|\tau|^2 + b\xi + c}{\eta}\right)^2\right).$$

Dann ist

$$(3.2.3.1) \quad \begin{aligned} \hat{f}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(c) e(-cw) dc \\ &= - \left(\frac{\eta}{2\sqrt{y}} \right)^{k+1} e \left((w - 4a\bar{z}) (a|\tau|^2 + b\xi) - b^2\bar{z} \right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i ut} (t+v)^k {}_1F_1 \left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\pi t^2 \right) dt \end{aligned}$$

mit $u = \frac{\eta}{2\sqrt{y}}(w - 4a\bar{z})$ und $v = 2i\sqrt{y}(2a\bar{\tau} + b)$. Das Integral ist wegen (A.7.3.3) von der Form $\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i ut - \pi t^2} P(t) dt$ mit einem Polynom $P(t)$. P kann im folgenden verschiedene Polynome bezeichnen. Das lässt sich geschlossen auswerten, vgl. (D.1.3.5):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{2\pi i ut - \pi t^2} dt = e^{-\pi u^2} P(u).$$

Also ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n {}_1F_1 \left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\pi t^2 \right) e(ut) dt = e^{-\pi u^2} P(u).$$

Den konstanten Teil dieses Polynoms erhält man, indem man $u = 0$ setzt und hat für $n = 0, 1, 2, \dots, k$ nach (D.1.3.6):

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n {}_1F_1 \left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\pi t^2 \right) dt = 0.$$

Das bedeutet

$$(3.2.3.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i ut} (t+v)^k {}_1F_1 \left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\pi t^2 \right) dt = e^{-\pi u^2} u P_k(u, v),$$

mit

$$P_k(u, v) = u^{k+2} \sum_{m=0}^k v^m (c_{k,m,0} u^m + c_{k,m,1} u^{m+2} + \dots + c_{k,m,k-m} u^{2k-m}).$$

Das Integral ist bei unendlich fallend wie $e^{-C\eta^2}$, außer $w = a = u = 0$; dann verschwindet aber das Polynom. Die anderen Faktoren in (3.2.3.1) sind auch $O(e^{-C\eta^2})$, daher auch $\hat{f}(w) = O(e^{-C\eta^2})$. Insgesamt ergibt sich

$$(3.2.3.3) \quad \begin{aligned} \Omega_{2k}(z, \tau) &= \frac{(2k+1)!! \eta^2}{2^{k+2} \pi \sqrt[4]{y}} \sum_{a,b,w} (w - 4a\bar{z}) P \left(\frac{\eta}{\sqrt{y}} (w - 4a\bar{z}), \sqrt{y} (2a\bar{\tau} + b) \right) \\ &\quad \cdot e(-\bar{z}b^2) e \left((w - 4a\bar{z}) (a|\tau|^2 + b\xi) \right) \exp \left(-\frac{\pi\eta^2}{4y} (w - 4a\bar{z})^2 \right) \\ &= \frac{(2k+1)!! \eta^2}{2^{k+2} \pi \sqrt[4]{y}} \sum_{a,b,w} (w - 4a\bar{z}) P \left(\frac{\eta}{\sqrt{y}} (w - 4a\bar{z}), \sqrt{y} (2a\bar{\tau} + b) \right) \\ &\quad \cdot e(-\bar{z}b^2) e \left((w - 4a\bar{z}) (a|\tau|^2 + b\xi) \right) e(4a^2\eta^2\bar{z} - a\eta^2w) \exp \left(-\frac{\pi\eta^2}{4y} |w - 4a\bar{z}|^2 \right) \\ &= \frac{(2k+1)!! \eta^2}{2^{k+2} \pi \sqrt[4]{y}} \sum_{a,b,w} (w - 4a\bar{z}) P \left(\frac{\eta}{\sqrt{y}} (w - 4a\bar{z}), \sqrt{y} (2a\bar{\tau} + b) \right) \\ &\quad \cdot e \left(-\bar{z} (b + 2a\xi)^2 \right) e((a\xi + b)\xi w) \exp \left(-\frac{\pi\eta^2}{4y^2} |w - 4a\bar{z}|^2 \right) \end{aligned}$$

□

3.2.4. Heckeoperatoren. Aus den gleichen Gründen wie in Satz 3.1.6.3 ist diese Korrespondenz verträglich mit den Heckeoperatoren:

Satz 3.2.4.1. Für automorphe Formen f vom Gewicht $-2k, k \in 2\mathbb{N}_0$ ist

$$\boxed{\int_{\mathfrak{F}} \mathbb{T}_p(f(\tau)) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \mathbb{T}_{p^2} \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}.}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{F}} \mathbb{T}_p(f(\tau)) \Omega_{2k}(z, \tau) d\mu \stackrel{(3.2.2.1)}{=} \left(\nu - k - \frac{1}{2}\right)_{2k+2} \sum_{n < 0} \frac{C_{-n}(\mathbb{T}_p(f))}{2^{2k+\frac{5}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{5}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi|n|y) e(nx) \\ & + \sum_{n > 0} \frac{C_{-n}(\mathbb{T}_p(f))}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi ny) e(nx) \\ & = \frac{1}{\sqrt{p}} \left\{ \left(\nu - k - \frac{1}{2}\right)_{2k+2} \sum_{n < 0} \frac{C_{-np^2}(f) + \left(\frac{-n}{p}\right) C_{-n}(f) + p C_{-\frac{n}{p^2}}(f)}{2^{2k+\frac{5}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{5}{4}} |n|^{\frac{3}{4}}} W_{-\frac{k}{2}-\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi|n|y) e(nx) \right. \\ & \left. + \sum_{n > 0} \frac{C_{-np^2}(f) + \left(\frac{-n}{p}\right) C_{-n}(f) + p C_{-\frac{n}{p^2}}(f)}{2^{2k+\frac{3}{2}} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}} n^{\frac{3}{4}}} W_{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}, \frac{\nu}{2}}(4\pi ny) e(nx) \right\} = \mathbb{T}_{p^2} \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}. \end{aligned}$$

□

Hecke-Maaß Eigenformen korrespondieren wieder mit Hecke-Maaß Eigenformen zu den gleichen Eigenwerten, falls sie existieren. Wegen (3.1.6.3) gibt es aber keine holomorphen Eigenformen¹². Aus heuristischen Gründen habe ich den nachfolgenden Satz dennoch eingefügt, denn es gibt eine Korrespondenz von Eisensteinreihen, die zwar nicht in den hier betrachteten Definitionsbereich fallen, aber die gleichen Relationen zwischen den Koeffizienten erfüllen. Insbesondere gibt es wieder die gleichen Relationen zwischen den Fourierkoeffizienten wie beim Shimura-Lift.

Satz 3.2.4.2. Zwischen den Fourierkoeffizienten der korrespondierenden Hecke-Maaß Spitzenformen $f(\tau) = \sum_{n \neq 0} a_n W_{-k \operatorname{sign} n, \nu}(4\pi|n|y) e(nx)$ mit $a_1 = 1$ und $F(\tau) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+3}{4} \operatorname{sign} n, \frac{\nu}{2}}(4\pi|n|y) e(nx)$ besteht für alle Fundamentaldiskriminanten D folgender Zusammenhang:

$$\mathcal{L}_D(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n^2 D}}{n^{s-\frac{1}{2}}} = b_{-D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}.$$

BEWEIS. Man kann wieder eine Hecke-normalisierte Orthogonal-Basis von Hecke-Maaß Eigenformen f_j finden mit

$$\begin{aligned} f_j(\tau) &= \sum_{m \neq 0} \frac{a_j(m)}{\sqrt{|m|}} W_{k \operatorname{sign} m, \nu}(4\pi|m|y) e(mx), \\ a_j(n) a_j(m) &= \sum_{\substack{d | \operatorname{ggT}(m, n) \\ d > 0}} a_j\left(\frac{mn}{d^2}\right), \\ L(f_j, s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_j(n)}{n^s} = \prod_p (1 - a_j(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1}. \end{aligned}$$

Die Funktionen $F_j(z) = \int_{\mathfrak{F}} f_j(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$ mit den Fourierkoeffizienten b_j sind ebenfalls Hecke-Maaß Eigenformen zu den Eigenwerten $a_j(n)$ und für die Fourierkoeffizienten von $\mathbb{T}_{p^2} F_j$ gilt wieder

$$a_j(p) b_j(n) = p b_j(np^2) + p^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n(-1)^{k+1}}{p} \right) b_j(n) + p^{-1} b_j\left(\frac{n}{p^2}\right).$$

¹²der Form $\sum_{n > n_0} a_n q^n$.

Der Satz folgt wie im Beweis des Shimura-Lifts Satz 3.1.6.4, außer dass jetzt $D = (-1)^{k+1} n$. \square

Es ergibt sich wieder die

Folgerung 3.2.4.2.1. Die Fourierkoeffizienten der korrespondierenden Hecke-Maaß Spitzenformen

$f(\tau) = \sum_{n \neq 0} a_n W_{-k \operatorname{sign} n, \nu} (4\pi |n| y) e(nx)$ mit $a_1 = 1$ und $F(\tau) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+3}{4} \operatorname{sign} n, \frac{\nu}{2}} (4\pi |n| y) e(nx)$ erfüllen für Fundamentaldiskriminanten D folgende Relationen ($n > 0$):

$$\sqrt{n} \sum_{d|n} \frac{\chi_D(d) b_{-n^2 D/d^2}}{d^{\frac{3}{2}}} = b_{-D} \cdot a_n \quad \text{bzw.} \quad b_{-D} \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d) \chi_D(d) a_{n/d}}{d} = \sqrt{n} b_{-n^2 D}.$$

Insbesondere lässt sich die Liftung für Hecke-Maaß Spitzenformen ähnlich der Shimura-Korrespondenz umkehren. Falls Satz 3.2.4.1 auch für schwach-holomorphe Formen zutrifft, d.h.

$$\int_{\mathfrak{F}} \mathbb{T}_p(J(\tau)) \Omega_0(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = \mathbb{T}_{p^2} \int_{\mathfrak{F}} J(\tau) \Omega_0(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2},$$

liefert das einen neuen Beweis für [Zagier 13, Theorem 5 (ii)] und beantwortet [Borchers 2, Problem 16.5].

3.2.5. Fourierkoeffizienten. Um das Rankin-Selberg-Unfolding zur Berechnung der Fourierkoeffizienten des Ω -lifts durchzuführen, braucht man gewisse Einschränkungen, um die Konvergenz zu gewährleisten. Für die arithmetischen Beispiele aus [Zagier 13] ist die Klasse der harmonischen schwachen Maaßformen¹³ sinnvoll.

Satz 3.2.5.1. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $f(\tau) = \sum_{n \geq n_1} c_n q^n + \sum_{n > 0} c'_n \Gamma(1 + 2k, 4\pi n \eta) q^{-n} \in \widehat{\mathbb{S}}_{-2k}$.

Dann ist die Fourierreihe des Zagier-Lifts für gerades $k > 0$:

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu = -2(4\pi i)^k \sum_{m, n > 0} m^{2k+1} n^k c_{-mn} q^{-m^2} + 2k! \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{\frac{k}{2}} C_{-n}^+(\eta^{-k} f) q^n \in S_{k+\frac{3}{2}}^!$$

Für $k = 0, c_0 = 0$ ist

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_0^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu = -2 \sum_{m, n > 0} m c_{-mn} q^{-m^2} + 4 \sum_{n > 0} \sigma_1(n) c_{-n} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} C_{-n}^+(f) q^n + \text{nicht-hol.} \in \widehat{\mathbb{S}}_{\frac{3}{2}}.$$

Der konstante Term trägt eine nicht-holomorphe Eisensteinreihe bei:

$$\int_{\mathfrak{F}} \Omega_0^{\text{hol.}}(z, \tau) \frac{d\xi dy}{\eta^2} = 2G_{\frac{3}{2}}(z) = \frac{1}{8\pi\sqrt{y}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta(4\pi n^2 y) q^{-n^2} - \frac{1}{6} + 2 \sum_{n \in \mathbb{N}} H(n) q^n \in \widehat{\mathbb{M}}_{\frac{3}{2}}.$$

Für ungerades k ist $\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu \in \widehat{\mathbb{S}}_{\frac{1}{2}-k}$ und der holomorphe Anteil ist

$$2(-1)^{\frac{k+1}{2}} (4\pi)^k \left(\sum_{m, n > 0} n^k c_{-mn} q^{-m^2} - 2 \frac{B_{k+1}}{B_{2k+2}} \sum_{m > 0} \sigma_{2k+1}(m) c_{-m} \right) - 2k! \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-\frac{k+1}{2}} C_{-n}^+(\eta^{-k} f) q^n.$$

Da harmonische schwache Maaßformen $\in \widehat{\mathbb{S}}_{-2k}$ eindeutig durch Hauptteil und Gewicht bestimmt sind, s. Anhang C.3.3, ergibt sich die

¹³Anhang C.3

Folgerung 3.2.5.1.1. [Duke Jen 2, Proposition 7 u. 8]. Sei $k \in \mathbb{N}_0$, $f(\tau) = \sum_{n \leq 0} c_n q^n + O(1)$ schwach-holomorph vom Gewicht $-2k$. Mit den Poincaréreihen $F_{k+\frac{1}{2}}(m, z) := \frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} q^{-m} |_{k+\frac{1}{2}} \gamma(z) \right) \Big|_{\text{pr}}$ aus dem Kohnen-Plus-Raum ist

$$\int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \Omega_{2k}^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu = \begin{cases} -2(4\pi i)^k \sum_{m, n > 0} c_{-mn} m^{2k+1} n^k F_{k+\frac{3}{2}}(m^2, z), & k \text{ gerade,} \\ 2c_0 G_{\frac{3}{2}}(z) - 2 \sum_{m, n > 0} c_{-mn} m F_{\frac{3}{2}}(m^2, z), & k = 0, \\ 2(-1)^{\frac{k+1}{2}} (4\pi)^k \sum_{m, n} c_{-mn} n^k F_{\frac{1}{2}-k}(m^2, z), & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Inbesondere

$$k \in 2\mathbb{N}_0 : \int_{\mathfrak{F}} F_{-2k}(n, \tau) \Omega_{2k}^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu = \begin{cases} -2(4\pi i n)^k \sum_{m|n} m^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(m^2, z), & k \text{ gerade,} \\ 2(-1)^{\frac{k+1}{2}} (4\pi n)^k \sum_{m|n} m^{-k} F_{\frac{1}{2}-k}(m^2, z), & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

BEWEISE VON SATZ UND FOLGERUNG. Analog zum Beweis der Maaß-Shimura-Korrespondenz. Da die Kernfunktion in den Spitzen schnell gegen Null geht, braucht man keine Regularisierung. \square

3.2.6. Umkehrung der Korrespondenz. [Borchers 2, Problem 16.10]. Da sich die Maaß-Shintani Liftung umkehren lässt, vgl. Abschnitt 3.1.7, gilt das unter geeigneten Voraussetzungen auch für den Zagier-Lift. Die Maaßoperatoren sind allerdings nicht immer umkehrbar. Das ergibt die Einschränkungen.

Satz 3.2.6.1. Für eine automorphe Spitzenform

$$g(z) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+3}{4} \text{ sign } n, \nu} (4\pi |n| y) e(nx)$$

vom Gewicht $k + \frac{3}{2}$, $k \in 2\mathbb{N}_0$ und Spektralparameter $\nu \neq \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{5}{4}, \dots, \pm \frac{2k+1}{4}$ im Bild des Zagier-Lifts ist, gilt

$$\int_{\Gamma_0(4) \setminus \mathcal{H}} g(z) \overline{\Omega_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{3\bar{b}_{-1}}{2^{k-\frac{1}{2}} \pi^{\frac{k+3}{4}}} f(\tau),$$

dabei ist f eine Art Shimura-Lift: Die Fourierkoeffizienten a_n von f sind

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{b_{-D}} \sum_{d|n} \frac{\chi_D(d) b_{-n^2 D/d^2}}{d^{\frac{3}{2}}} \text{ bzw. } b_{-D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \mathcal{L}_D(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n^2 D}}{n^{s-\frac{1}{2}}}$$

für Fundamentaldiskriminanten D .

BEWEIS. Sei f_0 eine Hecke-normalisierte automorphe Spitzenform mit

$$g(z) = c \int_{\mathfrak{F}} f_0(\tau) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}, \text{ d.h. } g(z) = -\frac{c}{2\pi} E_{k-\frac{1}{2}}^+ \circ \dots \circ E_{-k-\frac{1}{2}}^+ \int_{\mathfrak{F}} f_0(\tau) \overline{\Theta_{2k}(z, \tau)} \frac{d\xi d\eta}{\eta^2}.$$

Die Maaßoperatoren lassen sich unter den gegebenen Umständen umkehren:

$$-\frac{c}{2\pi} \left(2\nu - k - \frac{1}{2} \right)_{2k+2} \int_{\mathfrak{F}} f_0(\tau) \overline{\Theta_{2k}(z, \tau)} \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = E_{-k+\frac{3}{2}}^- \circ \dots \circ E_{k+\frac{3}{2}}^- g(z)$$

bzw. nach Satz 3.1.7.3

$$\begin{aligned} \frac{3\sqrt{2}\pi^{\frac{1}{4}}c_1}{(4\sqrt{\pi})^k}\bar{f}(\tau) &= -\frac{2\pi}{c(2\bar{\nu}-k-\frac{1}{2})_{2k+2}}\int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}}E_{k-\frac{3}{2}}^+\circ\dots\circ E_{-k-\frac{3}{2}}^+\bar{g}(z)\overline{\Theta_{2k}(z,\tau)}\frac{dx\,dy}{y^2}, \\ \bar{f}(\tau) &= \frac{2^{2k+\frac{1}{2}}\pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}{3cc_1(2\bar{\nu}-k-\frac{1}{2})_{2k+2}}\int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}}\bar{g}(z)\overline{E_{-k+\frac{1}{2}}^-\circ\dots\circ E_{k+\frac{1}{2}}^-\Theta_{2k}(z,\tau)}\frac{dx\,dy}{y^2}, \\ f(\tau) &= -\frac{2^{2k+\frac{3}{2}}\pi^{\frac{k}{2}+\frac{7}{4}}}{3cc_1(2\nu-k-\frac{1}{2})_{2k+2}}\int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}}g(z)\overline{\Omega_{2k}(z,\tau)}\frac{dx\,dy}{y^2}, \end{aligned}$$

dabei ist c_1 der erste Fourierkoeffizient von $-\frac{2\pi}{c(2\bar{\nu}-k-\frac{1}{2})_{2k+2}}E_{k-\frac{3}{2}}^+\circ\dots\circ E_{-k-\frac{3}{2}}^+\bar{g}(z)$, d.h. $c_1 = -\frac{2^{k+2}\pi\bar{b}_{-1}}{c(2\bar{\nu}-k-\frac{1}{2})_{2k+2}}$, vgl. [Bruggeman 1, (4.4)] und $\bar{f} = \text{Shim}_1\left(E_{k-\frac{3}{2}}^+\circ\dots\circ E_{-k-\frac{3}{2}}^+\bar{g}\right)$.

Gerade Formen gehen durch die Maaßoperatoren in gerade Formen über. \square

Für schwach-holomorphe Modulformen ergibt sich aus Folgerung 3.2.5.1.1

Folgerung 3.2.6.1.1.

$$\int_{\mathfrak{F}}\sum_{m|n}\frac{\mu\left(\frac{n}{m}\right)}{m^k}F_{-2k}(m,\tau)\Omega_{2k}^{\text{hol}}d\mu = \begin{cases} -2(4\pi i)^k n^{k+1}F_{k+\frac{3}{2}}(n^2,z), & k \text{ gerade;} \\ 2(-1)^{\frac{k+1}{2}}(4\pi)^k n^{-k}F_{\frac{1}{2}-k}(n^2,z), & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

BEWEIS. Möbiussche Umkehrformeln [Apostol 1, Theorem 2.9] \square

Als Analogie zum Shimura-Isomorphismus der Räume $M_{k+\frac{1}{2}}, M_{2k}$ hat man eine Hecke-kompatible bijektive Korrespondenz von harmonischen schwachen Maaßformen aus $\widehat{S}_{-2k}, k > 0$ und von schwach-holomorphen Modulformen des Gewichts $k + \frac{3}{2}$ mit Koeffizienten wie im Kohnen-Plus-Raum, deren Hauptteil nur Koeffizienten zu quadratischen Indizes c_{-n^2} enthält, ein Teilraum von $S_{k+\frac{3}{2}}^+$.

Bis jetzt wurde der Kern der Maaß-Shintani Korrespondenz nur für gerades k konstruiert. Andererseits ist die umgekehrte Shimura-Korrespondenz [Koblitz, IV §4], [Shimura 2] in der gleichen Form auch für ungerades k gültig. Mit Hilfe der im nächsten Kapitel 4 erwähnten Dualität von Formen des Gewichts $2-2k$ und $2k$ lässt sich der Fall von ungeradem k verstehen; z.B. sieht die Umkehrung der Maaß-Shintani Korrespondenz Satz 3.1.6.4 formal genauso aus wie die Umkehrung der Zagier-Lift Satz 3.2.4.2. Das Anwenden der Maaßoperatoren ändert die Fourierkoeffizienten einer Maaßform nicht wesentlich. Also ergibt sich die Vermutung, dass die Shimura-Korrespondenz für ungerades k genau die Zusammensetzung aus der Umkehrung des Zagier-Lifts und dem mehrfachen Anwenden der Maaßoperatoren E^+ ist:

Satz 3.2.6.2. Sei $g(z) = \sum_{n \neq 0} b_n W_{\frac{2k+3}{4} \text{ sign } n, \nu}(4\pi|n|y)e(nx) \in V^+$ eine Maaß-Spitzenform vom Gewicht $k + \frac{3}{2}$, $k \in 2\mathbb{N}_0$ im Bild des Zagier-Lifts. Dann ist

$$\text{Shim}_1(g) = \frac{\pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}{3 \cdot 2^{k+\frac{3}{2}}\bar{b}_{-1}}E_{2k}^+\circ\dots\circ E_{-2k}^+\int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}}g(z)\overline{\Omega_{2k}(z,\tau)}\frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Ist g auch Eigenform aller Heckeoperatoren, so ist das $\text{Shim}_1(g) = \text{Shim}_D(g)$ für alle Fundamentaldiskriminanten D .

BEWEIS. Sei $\tilde{f}(\tau) = \sum_{n \neq 0} \tilde{a}_n W_{-k \text{ sign } n, 2\nu}(4\pi|n|y)e(nx)$ die g unter dem Zagier-Lift entsprechende Hecke-Maaßform mit

$$g(z) = \int_{\mathfrak{F}}\tilde{f}(\tau)\Omega_{2k}(z,\tau)\frac{d\xi d\eta}{\eta^2};$$

also wie in Satz 3.2.6.1

$$\int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}} g(z) \overline{\Omega_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{3\bar{b}_{-1}}{2^{k-\frac{1}{2}}\pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}} \tilde{f}_0(\tau),$$

falls die Korrespondenz 1 – 1 ist. Dabei ist \tilde{f}_0 die Hecke-Normalisierung von \tilde{f} . Daher gilt

$$a_1 \mathcal{L}_D(s+1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{-n^2 D}}{n^{s-\frac{1}{2}}} = b_{-D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

auch für die Koeffizienten von

$$f(\tau) := E_{2k}^+ \circ \dots \circ E_{-2k}^+ \int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}} g(z) \overline{\Omega_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2} = \sum_{n \neq 0} a_n W_{k+1, 2\nu}(4\pi |n| y) e(nx),$$

d.h. $\text{Shim}(g)$ ist das Hecke-normalisierte f :

$$E_{2k}^+ \circ \dots \circ E_{-2k}^+ \int_{\Gamma_0(4)\backslash\mathcal{H}} g(z) \overline{\Omega_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{3 \cdot 2^{k+\frac{3}{2}} \bar{b}_{-1}}{\pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}} \text{Shim}(g).$$

□

Gewicht = 0	$\frac{3}{2}$
$j(z) - 744$ $= \frac{1}{q} + 196884q + 21493760q^2 + \dots$ $j(z)^2 - 1488j(z) + 159768$ $= \frac{1}{q^2} + 42897520q + 40491909396q^2 + \dots$ $j(z)^3 - 2232j(z)^2 + 1069956j(z) - 36866976$ $= \frac{1}{q^3} + 2592899910q + 12756069900288q^2 + \dots$	$= \frac{1}{q} - 2 + 248q^3 - 492q^4 + 4119q^7 - 7256q^8 + \dots$ $\frac{177 E_4 \alpha + 2 E_4^2 E_{11/2}(z)}{\Delta}$ $= \frac{2}{q^4} + \frac{1}{q} - 6 - 53256q^3 - 287244q^4 - 16572393q^7 + \dots$ $\frac{(3j^2 - 4680j + 972676) E_4 \alpha + 6(j - 744) E_4^2 E_{11/2}(z)}{\Delta}$ $= \frac{3}{q^9} + \frac{1}{q} - 8 + 12288992q^3 - 153540528q^4 + 67515202851q^7 - \dots$
Gewicht = -2	$-\frac{1}{2}$
$\frac{E_4(z) E_6(z)}{\Delta(z)}$ $= \frac{1}{q} - 240 - 141444q - 8529280q^2 + \dots$ $\frac{E_4(z) E_6(z)}{\Delta(z)} (j(z) - 504)$ $= \frac{1}{q^2} - 2160 - 68234240q - 34428048516q^2 - \dots$ $\frac{E_4(z) E_6(z)}{\Delta(z)} (j(z)^2 - 1248j(z) + 180252)$ $= \frac{1}{q^3} - 6720 - 6446476530q - 16767789046272q^2 - \dots$	$= \frac{1}{q} + 10 - 64q^3 + 108q^4 - 513q^7 + 808q^8 + \dots$ $\frac{5 E_4^2 E_{7/2}(z) + 3 E_6 E_{11/2}}{16\Delta}$ $= \frac{1}{2q^4} + \frac{1}{q} + 45 + 16128q^3 + 66096q^4 + 2225151q^7 + \dots$ $\frac{(5j - 3696) E_4^2 E_6 \alpha + (j - 1488) E_4^3 \beta + 8884\Delta\beta}{18\Delta^2}$ $= \frac{1}{3q^9} + \frac{1}{q} + \frac{280}{3} - 3845376q^3 + 36348912q^4 - 9258231717q^7 - \dots$
Gewicht = -4	$\frac{7}{2}$
$\frac{E_4(z)^2}{\Delta(z)}$ $= \frac{1}{q} + 504 + 73764q + 2695040q^2 + \dots$ $\frac{E_4(z)^2}{\Delta(z)} (j(z) - 1248)$ $= \frac{1}{q^2} + 16632 + 86241280q + 24916561956q^2 + \dots$ $\frac{E_4(z)^2}{\Delta(z)} (j(z)^2 - 1992j(z) + 714996)$ $= \frac{1}{q^3} + 122976 + 13305642390q + 19326934844928q^2 + \dots$	$\frac{5 E_6 \alpha + E_4 \beta}{6\Delta}$ $= \frac{1}{q} - 384q^3 + 1248q^4 - 19473q^7 + 40768q^8 + \dots$ $\frac{(-4j + 1245) E_6 \alpha + (4j - 3927) E_4 \beta}{6\Delta}$ $= \frac{8}{q^4} + \frac{1}{q} + 119808q^3 + 896256q^4 + 96339951q^7 + \dots$ $\frac{(135j^2 - 132192j + 7332260) E_6 \alpha + (27j^2 - 46656j + 10631764) E_4 \beta}{6\Delta}$ $= \frac{27}{q^9} + \frac{1}{q} - 30506496q^3 + 521607552q^4 - 418027463637q^7 + \dots$
Gewicht = -6	$-\frac{5}{2}$
$\frac{E_6(z)}{\Delta(z)}$ $= \frac{1}{q} - 480 - 28404q - 682240q^2 + \dots$ $\frac{E_6(z)}{\Delta(z)} (j(z) - 264)$ $= \frac{1}{q^2} - 61920 - 87326720q - 15382933236q^2 - \dots$ $\frac{E_6(z)}{\Delta(z)} (j(z)^2 - 1008j(z) + 61452)$ $= \frac{1}{q^3} - 1050240 - 22876173090q - 19556393905152q^2 - \dots$	$= \frac{1}{q} - 2 + 8q^3 - 12q^4 + 39q^7 - 56q^8 + \dots$ $\frac{(1152 - j) \Delta \alpha + E_4 E_6 \beta}{96\Delta^2}$ $= \frac{1}{8q^4} + \frac{1}{q} - \frac{129}{4} - 3336q^3 - 10944q^4 - 233433q^7 - \dots$ $\frac{(5j^2 - 7416j + 783432) \Delta \alpha + (j - 504) E_4 E_6 \beta}{162\Delta^2}$ $= \frac{1}{27q^9} + \frac{1}{q} - \frac{4376}{27} + 935712q^3 - 6925488q^4 + 1078227411q^7 - \dots$
Gewicht = -8	$\frac{11}{2}$
$\frac{E_4(z)}{\Delta(z)}$ $= \frac{1}{q} + 264 + 8244q + 139520q^2 + \dots$ $\frac{E_4(z)}{\Delta(z)} (j(z) - 1008)$ $= \frac{1}{q^2} + 135432 + 71434240q + 8126603316q^2 + \dots$ $\frac{E_4(z)}{\Delta(z)} (j(z)^2 - 1752j(z) + 417636)$ $= \frac{1}{q^3} + 5196576 + 32915684070q + 17401742189568q^2 + \dots$	$\frac{5 E_4^2 \alpha + E_6 \beta}{6\Delta}$ $= \frac{1}{q} + 312q^3 - 1632q^4 + 57351q^7 - 144704q^8 + \dots$ $\frac{(-16j + 20709) E_4^2 \alpha + (16j - 3807) E_6 \beta}{6\Delta}$ $= \frac{32}{q^4} + \frac{1}{q} - 185544q^3 - 2022624q^4 - 438452217q^7 + \dots$ $\frac{(1215j^2 - 2385288j + 825614132) E_4^2 \alpha + (243j^2 - 239112j + 13472164) E_6 \beta}{6\Delta}$ $= \frac{243}{q^9} + \frac{1}{q} + 59018208q^3 - 1428071808q^4 + 2199449986419q^7 + \dots$

Spitzenformen $\alpha = \eta^{18} \theta_4(z)$, $\beta = \frac{1}{144} \{E_4^2 E_{7/2}(z) - E_6 E_{11/2}(z)\}$,
Argumente $4z$ wurden weggelassen: $j = j(4z)$, $\eta = \eta(4z)$, $E = E(4z)$, ...;

TABELLE 1. Zagier-Lift

linke Spalte: $F_{-2k}(n, z)$, rechte Spalte: $\frac{(-1)^{\lfloor \frac{k}{2} + 1 \rfloor}}{2(4\pi n)^k} \int_{\mathfrak{F}} F_{-2k}(n, \tau) \Omega_{2k}^{\text{hol.}}(z, \tau) d\mu$

3.3. Beispiel: Eisensteinreihen

Die Korrespondenzen von automorphen Formen ganzen und halbganzen Gewichts lassen sich auf harmonische schwache Maaßformen erweitern. Für den Zagier-Kern hat man einfache Konvergenz, da er mehr als exponentiell abfällt. Beim Shintani-Kern müssen die Integrale regularisiert werden. [Choi Lim 2] betrachten die Shimura-Korrespondenz für harmonische schwache Maaßformen.

Definitionen und Fourierentwicklung von metaplektischen Eisensteinreihen, s. Anhang C.3.2.4.

Aufgrund der Eigenschaften des Thetakerns übertragen sich die Spektralparameter (bis auf den Faktor 2) automatisch, ebenso wie die Hecke-Eigenwerte, und da das Spektrum der Spitzenformen diskret ist, müssen Eisensteinreihen zu beliebigem Spektralparameter im Falle der Konvergenz der auftretenden Integrale wieder mit Eisensteinreihen korrespondieren.¹⁴ Es ist allerdings notwendig, die Integrale zu regularisieren, da die bisherigen Untersuchungen meist für Spitzenformen gedacht waren.

Mit den erwähnten Methoden und dem Rankin-Selberg „Unfolding“ hat man leicht folgende Sätze:

Satz 3.3.1 (Kudla-Millson). Für $k = 0, s \neq \frac{\rho}{2}, 1$ und $k \in 2\mathbb{N}, s \neq 1 - |k|, \dots, -2, -1, \frac{\rho}{2}$ ist:

$$\int_{\mathfrak{F}} E_{-2k}(\tau, s) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = -(-1)^{\frac{k}{2}} \frac{\Gamma(k+1-s) \Gamma\left(\frac{s+k+2}{2}\right) \zeta(s)}{2^{k+1-s} \pi^{\frac{s+k+2}{2}} \Gamma(1-s)} E_{k+\frac{3}{2}}\left(z, \frac{2s+1}{4}\right).$$

Mit den vervollständigten Funktionen

$$E_{-2k}^*(\tau, s) := \pi^{-s} \Gamma(s+k) \zeta(2s) E_{-2k}(\tau, s)$$

und

$$E_{k+\frac{3}{2}}^*(z, t) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2t-\frac{1}{2}} \left(t - \frac{1}{4}\right)_{\frac{k}{2}+1} \Gamma\left(2t - \frac{1}{2}\right) \zeta(4t-1) E_{k+\frac{3}{2}}(z, t)$$

ist

$$\int_{\mathfrak{F}} E_{-2k}^*(\tau, s) \Omega_{2k}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = -\frac{(-1)^{\frac{k}{2}} (s-k)_{2k}}{2^{k+1-2s} \pi^{\frac{s+k+2}{2}}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) E_{k+\frac{3}{2}}^*\left(z, \frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right)$$

für $s \in \mathbb{C}$, außer $k = 0, s = 0 \vee 1$.

Bemerkung. Die Funktionalgleichung für $E_{-2k}(\tau, s)$ hat die Funktionalgleichung für $E_{k+\frac{3}{2}}\left(z, \frac{2s+1}{4}\right)$ zur Folge.

Satz 3.3.2 (holomorph). Sei $k \in 2\mathbb{N}, q := e^{2\pi i \tau}$,

$$G_{-2k}(\tau) := \eta^k \zeta(2k+1) E_{-2k}(\tau, -k) = \zeta(2k+1) + \frac{4^k \zeta(2k+2)}{\pi} \eta^{2k+1} + \sum_{n>0} \sigma_{-2k-1}(n) \left(q^n + \bar{q}^n \sum_{j=0}^{2k} \frac{(4\pi n \eta)^j}{j!} \right)$$

und

$$G_{k+\frac{3}{2}}(z) := \sum_{N \geq 0} H(k+1, N) q^N = \frac{\zeta(-2k-1)}{2^{k+\frac{5}{2}} y^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}} E_{k+\frac{3}{2}}\left(z, \frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right)$$

die eindeutig definierte ([Zagier 2], [Cohen]-)Eisensteinreihe aus $M_{k+\frac{3}{2}}^+$ zur Gruppe $\Gamma_0(4)$. Dann ist

$$\int_{\mathfrak{F}} G_{-2k}(\tau) \Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = (-1)^{\frac{k}{2}} (4\pi)^k \zeta(k+1) G_{k+\frac{3}{2}}(z).$$

Satz 3.3.3 (Umkehrung). Für $k \in 2\mathbb{N}_0, \text{Re } \nu > -\frac{2k+1}{4}$ ist:

$$\int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}} E_{k+\frac{3}{2}}\left(z, \frac{1}{2} + \nu\right) \overline{\Omega_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{3 \Gamma\left(k + \frac{1}{2} + 2\nu\right) \zeta(4\nu+1)}{2^{k+4\nu} \pi^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}+\nu} \Gamma\left(\nu - \frac{k}{2} - \frac{1}{4}\right)} E_{-2k}\left(z, \frac{1}{2} + 2\nu\right).$$

¹⁴Es reicht, die konstanten Fourierkoeffizienten zu vergleichen.

Satz 3.3.4 (Maaß-Shintani). Für $k \in 2\mathbb{N}$ ist

$$\mathbf{R}. \int_{\mathfrak{F}} \mathbf{E}_{2k}(\tau, s) \Theta_{2k}(z, \tau) d\mu = (4\pi)^{-\frac{k+1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{k+1-s}{2}\right) \zeta(1-s) \mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}\left(z, \frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

und mit den vervollständigten Eisensteinreihen

$$\mathbf{E}_{2k}^*(\tau, s) := \pi^{-s} \Gamma(s+k) \zeta(2s) \mathbf{E}_{2k}(\tau, s)$$

und

$$\mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}^*(z, t) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2t-\frac{1}{2}} \left(t + \frac{1}{4}\right)^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(2t - \frac{1}{2}\right) \zeta(4t-1) \mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}(z, t),$$

$$\mathbf{R}. \int_{\mathfrak{F}} \mathbf{E}_{2k}^*(\tau, s) \Theta_{2k}(z, \tau) d\mu = \frac{\left(\frac{1-s}{2}\right)^{\frac{k}{2}}}{(4\pi)^{\frac{s+k}{2}}} \Gamma\left(\frac{s+k}{2}\right) \zeta(s) \mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}^*\left(z, \frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right).$$

Satz 3.3.5 (holomorph). Sei $k \in 2\mathbb{N}, \kappa = k + \frac{1}{2}$ und $G_{2k}(\tau) := -\frac{B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) e(n\tau)$ die holomorphe Eisensteinreihe in $M_{2k}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$. Sie korrespondieren mit den Cohen-Eisensteinreihen

$$G_{\kappa}(z) := \sum_{N=0}^{\infty} H(k, N) q^N = y^{-\frac{\kappa}{2}} \zeta(1-2k) \mathbf{E}_{\kappa}\left(z, \frac{\kappa}{2}\right)$$

des Gewichts κ , wenn man Borchers' Regularisierung verwendet:

$$\mathbf{R}. \int_{\mathfrak{F}} G_{2k}(\tau) \Theta_{2k}^{\mathrm{hol}}(z, \tau) \frac{d\xi d\eta}{\eta^2} = -\frac{B_k}{4k} G_{k+\frac{1}{2}}(z).$$

Satz 3.3.6 (Shimura). Die $\mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}\left(z, \frac{1}{2} + 2\nu\right)$ sind Hecke-Maaßformen und

$$\mathrm{Shim}_1\left(\mathbf{E}_{2k}\left(\frac{1}{2} + 2\nu, s\right)\right) = c^{-1} \mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}\left(z, \frac{1}{2} + \nu\right)$$

mit $c =$ erster Fourierkoeffizient von $\mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}\left(z, \frac{1}{2} + \nu\right)$, und im holomorphen Fall ist mit den $H(k, n)$ aus [Cohen] für $k \in \mathbb{N}$ und Fundamentaldiskriminanten D mit $(-1)^k D > 0$:

$$\sum_{t|n} \chi_D(t) t^{k-1} H\left(k, \frac{n^2 |D|}{t^2}\right) = H(k, |D|) \sigma_{2k-1}(n).$$

Satz 3.3.7 (Niwa). Für $k \in 2\mathbb{N}_0$ ist

$$\mathbf{R}. \int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}} \mathbf{E}_{k+\frac{1}{2}}\left(z, \frac{1}{2} + \nu\right) \overline{\Theta_{2k}(z, \tau)} \frac{dx dy}{y^2} = \frac{3 \Gamma\left(\nu + \frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right) \zeta(4\nu + 1)}{(4\pi)^{\nu + \frac{k}{2} + \frac{1}{4}}} \mathbf{E}_{2k}\left(\tau, \frac{1}{2} + 2\nu\right).$$

Teil 2

Mock-Modulformen

Konvergenz durch Regularisierung

Im Zusammenhang mit harmonischen schwachen Maaßformen fallen verschiedene Dinge auf. Die nicht-holomorphe Eisensteinreihe E_{2-k} , vgl. (4.1.1) und Anhang (C.3.2.1.1), ist eine $(k-1)$ -fache Stammfunktion der holomorphen Eisensteinreihe E_k vom Gewicht k . Solche Stammfunktionen heißen Eichlerintegrale. Die nicht-holomorphen Fourierkoeffizienten sind gleich den holomorphen. Der holomorphen Anteil einer harmonischen schwachen Maaßform ist Eichlerintegral \tilde{f} einer schwach-holomorphen Modulform $f \in M_k^!$ von komplementärem Gewicht und der nicht-holomorphen Anteil ist modifiziertes Eichlerintegral \tilde{g} einer (anderen) solchen Form. Allgemein gibt es eine $\text{mathcal{C}}^\infty$ -Fortsetzung von $\tilde{f}(z)$, $z \in \mathcal{H}$ auf $\tilde{f}(-z)$, $z \in \mathcal{H}^-$. Entsprechend macht es oft Sinn, die Reihensumme für f in der unteren Halbebene zu bilden und man kommt so (z.B. bei Poincaréreihen) auf die Fourierkoeffizienten des nicht-holomorphen Anteils von F . Dabei treten drei Themen miteinander in Beziehung: Das Wachstumsverhalten am Rand der hyperbolischen Halbebene, die Fortsetzbarkeit über die Spitzen hinaus in die untere Halbebene und die Frage nach der Kompletzierbarkeit von Ramanujans holomorphen Mock-Thetafunktionen zu harmonischen schwachen Maaßformen. [Zwegers 1] fand die Antwort auf den letzten Punkt mit Hilfe des Transformationsverhaltens von modifizierten Eichlerintegralen. Ein überraschendes Ergebnis ist, dass es zu jeder Modulform $\sum_{n \geq n_0} a_n q^n \in M_k^!$, $k > 1$ eine harmonische schwache Maaßform $\sum_{n \geq n_0} \frac{a_n}{n^{k-1}} q^n + \sum_{n \geq n_1} a'_n \Gamma(k-1, 4\pi n y) q^{-n}$ vom Gewicht $2-k$ gibt.

4.1. Notationen

Dieses Kapitel basiert auf der Theorie der schwach-holomorphen Modulformen bzw. harmonischen schwachen Maaßformen, vgl. Anhänge C.1 und C.3. Der 'slash' Operator $|_k$ ist folgendermaßen zu lesen:

Modulgruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$:	$f _k \gamma(z) = (cz + d)^{-k} f(\gamma z)$,
Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(4)$:	$f _k \gamma(z) = \left(\left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d\right)^{2k} (cz + d)^{-k} f(\gamma z)$,
metaplektische Gruppe $\text{Mp}_2(\mathbb{Z})$:	$f _k \gamma(z) = \phi(z)^{-2k} (M_{\gamma, \phi})^{-1} f(\gamma z)$,

mit der gemeinsamen Eigenschaft: $f|_k \gamma_1|_k \gamma_2(z) = f|_k(\gamma_1 \gamma_2)(z)$.

Sei $k \in 2\mathbb{Z}$. Wir benötigen folgende Eisensteinreihen ([Bruggeman 1, 3.2], [Diamond Shur, 4.10 Nonholomorphic Eisenstein series], Anhang C.3.2):

$$E_k(z) := \sum_{\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})} |cz + d|^{-s} (cz + d)^{-k} \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \sum'_{\substack{m, n \in \mathbb{Z} \\ \text{ggT}(m, n) = 1}} \frac{1}{|mz + n|^{2s} (mz + n)^k} \Big|_{s=0},$$

absolut und gleichmäßig konvergent für $\text{Re } s > 1 - \frac{k}{2}$. Anhand der Fourierreihe C.2.1.1 kann man sie auf $s = 0$ analytisch fortsetzen. Für $k > 2$ sind das die bekannten holomorphen Eisensteinreihen

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n.$$

Man hat folgende Fourierentwicklung für negatives Gewicht $2 - 2k, k \geq 2$:

$$(4.1.1) \quad \begin{aligned} G_{2-2k}(z) &:= \zeta(2k-1) E_{2-2k}(z) \\ &= \zeta(2k-1) + \frac{(-4)^{k-1}}{\pi} \zeta(2k) y^{2k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2k+1}(n) \left\{ q^n + \frac{\Gamma(2k-1, 4\pi ny)}{(2k-2)!} q^{-n} \right\} \\ &= \zeta(2k-1) + \frac{(-4)^{k-1}}{\pi} \zeta(2k) y^{2k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2k+1}(n) \left\{ q^n + \bar{q}^n \sum_{j=0}^{2k-2} \frac{(4\pi ny)^j}{j!} \right\}, \end{aligned}$$

vgl. auch [Bri Gu Ke On, Theorem 2.4]. Der Begriff der Modulform soll auf diese Fälle verallgemeinert werden:

Definition 4.1.1. [Bruinier Funke 2] Eine C^∞ -Funktion $f: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *harmonische schwache Maaßform* $f \in \widehat{\mathbb{M}}_k^!(\Gamma')$ vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma' \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, falls

- (1) $\forall \gamma \in \Gamma': f|_k \gamma = f$.
- (2) $y^{\frac{k}{2}} f$ ist eine Maaßform zum Eigenwert $1 - \frac{k}{2}$ ($1 - \frac{k}{2}$) des Laplaceoperators Δ_k .
- (3) Das Wachstum ist in allen Spitzen höchstens exponentiell: $f|_k \gamma(z) = O(e^{cy}), y \rightarrow \infty$.

4.2. Eichlerintegrale, Perioden- und L -Funktionen

4.2.1. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Mit [Bol]'s Identität (Lemma C.3.5.2) folgt, dass Modulformen vom Gewicht $2 - 2k, k \in \mathbb{N}$ durch D^{2k-1} auf Modulformen abgebildet werden. Lässt sich dieser Schluß umkehren? Wie sieht es mit $(2k-1)$ -fachen Stammfunktionen, sogenannten Eichlerintegralen \tilde{f} von Modulformen $f \in M_{2k}$ aus, vgl. [Zagier 9]:

$$\tilde{f}(z) := -\frac{(2\pi i)^{2k-1}}{(2k-2)!} \int_z^{i\infty} (f(\tau) - a_0) (\tau - z)^{2k-2} d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{2k-1}} q^n,$$

Das Transformationsverhalten von Eichlerintegralen und Modulformen ist sehr ähnlich. Die Abweichung von der Modularität lässt sich durch eine rationale Periodenfunktion ψ beschreiben, vgl. [Knopp, Choie Zagier, Kent].

$$\text{Sei } C_k := \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{\Gamma(k-1)};$$

$$\begin{aligned} \psi_{-\frac{d}{c}}(z) &:= \tilde{f}(z) - (cz+d)^{2k-2} \tilde{f}(\gamma z) \\ &= C_{2k} \left\{ \int_z^{i\infty} (f(\tau) - a_0) (\tau - z)^{2k-2} d\tau - (cz+d)^{2k-2} \int_{\gamma z}^{i\infty} (f(\tau) - a_0) (\tau - \gamma z)^{2k-2} d\tau \right\} \\ &= C_{2k} \left\{ \int_z^{i\infty} (f(\tau) - a_0) (\tau - z)^{2k-2} d\tau - \int_z^{\gamma^{-1}(i\infty)} \left(f(\tau) - \frac{a_0}{(c\tau+d)^{2k}} \right) (\tau - z)^{2k-2} d\tau \right\}; \end{aligned}$$

im Spezialfall $\gamma = S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\psi(z) := \psi_0(z) = \left(\tilde{f} - \tilde{f}|_{2-2k} S \right)(z) := C_{2k} \left\{ \int_z^{i\infty} (f(\tau) - a_0) (\tau - z)^{2k-2} d\tau - \int_z^0 \left(f(\tau) - \frac{a_0}{\tau^{2k}} \right) (\tau - z)^{2k-2} d\tau \right\}.$$

Für $\tau_0 = X = z \in \mathcal{H}$ erhält man (bis auf einen Faktor) das Periodenpolynom r_f aus [Zagier 9]:

$$\psi = C_{2k} r_f.$$

Im Fall der Eisensteinreihe $G_{2k}(z) := -\frac{B_{2k}}{4k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n$ ist der letzte Ausdruck

$$\left(\tilde{G}_{2k} - \tilde{G}_{2k}|_{2-2k} S \right)(z) = \frac{\zeta(2k-1)}{2} - (2\pi i)^{2k-1} \left\{ \sum_{\substack{j=-1 \\ j \text{ ungerade}}}^{2k-1} \frac{B_{j+1} B_{2k-j-1}}{(j+1)! (2k-j-1)!} z^{2k-j-2} \right\} - \frac{\zeta(2k-1)}{2} z^{2k-2}.$$

¹gleicher Eigenwert wie holomorphe Modulformen

Es gibt allerdings eine $(2k - 1)$ -fache Stammfunktion von G_{2k} , die zusätzlich modular transformiert:

$$G_{2-2k}(z) \stackrel{(4.1.1)}{=} \zeta(2k-1) + \frac{(-4)^{k-1}}{\pi} \zeta(2k) y^{2k-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{-2k+1}(n) \left\{ q^n + \bar{q}^n \sum_{j=0}^{2k-2} \frac{(4\pi n y)^j}{j!} \right\}.$$

Beide Funktionen erfüllen

$$D^{2k-1}(\tilde{G}_{2k}) = D^{2k-1}(G_{2-2k}) = G_{2k}.$$

Daher ist $\tilde{G}_{2k} - G_{2-2k} =$ ein Polynom in z vom Grad $\leq 2k - 2$ mit antiholomorphen Koeffizienten. Die Eisensteinreihe G_{2-2k} besteht zusätzlich zum Eichlerintegral noch aus einem nicht-holomorphen Anteil mit den gleichen Fourierkoeffizienten wie der holomorphe Anteil. Mit dem Differenzialoperator Θ lassen sich holomorphe und nicht-holomorphe Fourierkoeffizienten vertauschen, vgl. Hilfssatz C.3.5.3:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &:= (\Theta \tilde{f})(z) = \frac{(4\pi y)^{2k-2}}{(2k-2)!} (\partial_{2-2k}^{2k-2} \tilde{f})(-\bar{z}) \\ &= -\frac{(4\pi y)^{2k-2} (2\pi i)^{2k-1}}{(2k-2)!^2} y^{2k-2} \int_{-\bar{z}}^{i\infty} (f(\tau) - a_0) \partial^{2k-2}(\tau + \bar{z})^{2k-2} d\tau \\ &= C_{2k} \int_{-\bar{z}}^{i\infty} (f(\tau) - a_0) (\tau + z)^{2k-2} d\tau = C_{2k} \int_{-\bar{z}}^{i\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau} (\tau + z)^{2k-2} d\tau \\ &= C_{2k} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{2iy}^{iT+z} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e(-nz) e^{2\pi i n t} t^{2k-2} dt = C_{2k} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{4\pi ny}^{2\pi n(T-iz)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e(-nz)}{(-2\pi i n)^{2k-1}} e^{-w} w^{2k-2} dw \\ &= -C_{2k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{e(-nz)}{(2\pi i n)^{2k-1}} \Gamma(2k-1, 4\pi n y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{2k-1}} \bar{q}^n \sum_{j=0}^{2k-2} \frac{(4\pi n y)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Das Verhalten von Modulformen am Rand der hyperbolischen Halbebene \mathcal{H} sieht recht chaotisch aus. Während Spitzenformen bei senkrechter Annäherung an die Spitze den eindeutigen Grenzwert Null haben, tritt bei senkrechter Annäherung an irrationale Punkte auf der reellen Achse ein dichtes Band von Häufungspunkten

auf [Lehner]. In [Lawrence Zagier] wurde das Verhalten der beiden Eichlerintegrale $\int_z^{i\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau-z}} d\tau, z \in \mathcal{H}$ und

$\int_{\bar{z}}^{i\infty} \frac{f(\tau)}{\sqrt{\tau-z}} d\tau, z \in \mathcal{H}^-$ für eine Modulform vom Gewicht $\frac{3}{2}$ untersucht und festgestellt, dass die Funktion von der oberen Halbebene \mathcal{H} durch die rationalen Punkte in die untere Halbebene \mathcal{C}^∞ „durchsickert“. Dieses Verhalten, das dort an einem speziellen Beispiel ausgeführt wurde, soll hier allgemein für (vektorwertige) Modulformen (halb-ganzen Gewichts) untersucht werden. Entscheidend ist, dass die beiden Eichlerintegrale bis auf etwas exponentiell Kleines dieselbe asymptotische Entwicklung wie die Periodenfunktion

$$\mathbf{R}. \int_{\operatorname{Re} z}^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau$$

haben und das ist reell-analytisch und lässt sich von der oberen Halbebene senkrecht durch die rationalen Punkte auf die untere Halbebene fortsetzen. Aufgrund des binomischen Lehrsatzes hat man für $f \in M_k, k \in 2\mathbb{N}$ ein Periodenpolynom.

4.2.2. Regularisierte Integrale. Die Regularisierung von divergenten Integralen, vgl. Anhang D.2.3, läuft darauf hinaus, dass man die Integrale für variables s, n und k dort berechnet, wo sie konvergieren und dann analytisch zu den gewünschten Parameterwerten fortsetzt. Es ist entscheidend, auch das Gewicht variabel zu setzen. Betrachte folgendes Beispiel:

Hilfssatz 4.2.2.1. Sei $2k \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $s, z \in \mathbb{C}$, $s - k \notin \mathbb{N}_0$, $a > 0$, $z_1 \in \mathcal{H}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $C_k := \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}$, $q = e(z)$:

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathbf{R}. \int_a^\infty e^{-2\pi n y} y^{s-1} dy &= \begin{cases} -\frac{a^s}{s}, & n = 0 \\ \frac{\Gamma(s, 2\pi n a)}{(2\pi n)^s}, & n \neq 0 \end{cases} \\ 2) \quad \mathbf{R}. \int_0^a e^{-\frac{2\pi n}{c^2 y}} y^{s-k-1} dy &= \begin{cases} \frac{a^{s-k}}{s-k}, & n = 0 \\ \frac{\Gamma(k-s, \frac{2\pi n}{c^2 a})}{(\frac{2\pi n}{c^2})^{k-s}}, & n \neq 0 \end{cases} \\ 3) \quad C_k \mathbf{R}. \int_{z_1}^{i\infty} e(n\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau &= \begin{cases} -\frac{(-2\pi i(z_1 - z))^{k-1}}{\Gamma(k)}, & n = 0 \\ \frac{\Gamma(k-1, -2\pi i n(z_1 - z))}{\Gamma(k-1)n^{k-1}} q^n, & n \neq 0 \end{cases} \\ 4) \quad C_k \mathbf{R}. \int_{-\frac{d}{c}}^{z_1} e(n\gamma\tau) \frac{(\tau - z)^{k-2}}{(c\tau + d)^k} d\tau &= \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(k)(cz+d)} \left(\frac{-2\pi i(z_1 - z)}{ci+d} \right)^{k-1}, & n = 0 \\ -\frac{(cz+d)^{k-2}}{n^{k-1}\Gamma(k-1)} \Gamma\left(k-1, \frac{-2\pi i n(z_1 - z)}{(ci+d)(cz+d)}\right) e(n\gamma z), & n \neq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

BEWEIS. Die ersten beiden Aussagen sind klar für $n \geq 0$ und ergeben sich mit analytischer Fortsetzung nach $n < 0$.

3)

$$\int e(n\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau = \begin{cases} \frac{(\tau - z)^{k-1}}{k-1}, & n = 0, \\ -\frac{\Gamma(k-1, -2\pi i n(\tau - z))}{(-2\pi i n)^{k-1}} e^{2\pi i n z}, & n \neq 0. \end{cases}$$

4) Mit $w = \gamma\tau$, $u = \gamma z$, $w - u = \frac{\tau - z}{(c\tau + d)(cz + d)}$, $dw = \frac{d\tau}{(c\tau + d)^2}$ folgt aus 3)

$$\int e(n\gamma\tau) \frac{(\tau - z)^{k-2}}{(c\tau + d)^k} d\tau = \begin{cases} \frac{1}{(k-1)(cz+d)} \left(\frac{\tau - z}{c\tau + d} \right)^{k-1}, & n = 0, \\ -\frac{(cz+d)^{k-2}}{(-2\pi i n)^{k-1}} \Gamma\left(k-1, -\frac{2\pi i n(\tau - z)}{(c\tau + d)(cz + d)}\right) e^{2\pi i n \gamma z}, & n \neq 0. \end{cases}$$

Die wesentliche Singularität in den Spitzen leistet den Beitrag Null, falls $n > 0$ und nach analytischer Fortsetzung auch für $n < 0$. \square

4.2.3. Vektorwertige Modulformen. Schwach-holomorphe Modulformen zu beliebigen Kongruenzuntergruppen lassen sich einheitlich mit Hilfe von vektorwertigen Modulformen zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ beschreiben, vgl. [Selberg 2] und [Borchers 2, Lemma 2.6]. Ist $f \in M_k^!(N, \chi)$, $k \in \mathbb{Z}$, so gibt es eine Darstellung ρ von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ durch Permutationsmatrizen, so dass der Vektor

$$\mathfrak{f} = (f|A)_{A \in \Gamma_0(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

modular transformiert, d.h. $\forall \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \mathfrak{f}(\gamma z) = (cz + d)^k \rho(\gamma) \cdot \mathfrak{f}(z)$.

Wir betrachten etwas allgemeiner vektorwertige Modulformen mit Transformationsverhalten bezüglich der metaplektischen Gruppe $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$. Es gibt keinen Unterschied für ganzes und halbganzes Gewicht.

Die folgenden Bezeichnungen stammen aus [Bundschuh, 1.2 Vektorwertige Modulformen] und [Bruinier Funke 2, Abschnitt 3]:

Betrachte die Gruppe von Paaren $(M, \phi(z))$, wobei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ und ϕ eine holomorphe Quadratwurzel von $z \mapsto cz + d$ ist, mit der Multiplikation

$$(M, \varphi(z))(N, \psi(z)) := (MN, \varphi(N(z)) \cdot \psi(z)).$$

Sei $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ das Urbild von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bzgl. der Überlagerung, (V, q) ein reeller quadratischer Raum, L ein gerades Gitter der Signatur $(b^+, b^-]$ und Stufe N . Die quadratische Form $q(x) = \frac{1}{2}(x, x)$ sei nicht ausgeartet, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $k > 1$ und ρ die Weildarstellung auf dem Gruppenring $\mathbb{C}[L'/L]$.

Definition 4.2.3.1.

$$M_k^! := \mathfrak{M}_{k,L}^!(\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}))$$

ist der Raum der vektorwertigen schwach-holomorphen Modulformen vom Gewicht k zur Darstellung ρ der Gruppe $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ mit Darstellungsmatrix $M_{\gamma, \phi}$. Das sind alle zweimal differenzierbaren Funktionen $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}[L'/L]$ mit

- $\forall (\gamma, \phi) \in \Gamma : f(\gamma z) = \phi(z)^{2k} M_{\gamma, \phi} f(z)$
- Die Funktion f wächst in jeder Spitze der Gruppe Γ höchstens exponentiell.

Dann hat $f \in \mathfrak{M}_k^!$ eine Fourierentwicklung²

$$(4.2.3.1) \quad f(z) = \sum_{h \in L'/L} f_h(z) \mathbf{e}_h \text{ mit } f_h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}+q(h)} a_{h,n} q^n,$$

dabei ist $\langle \mathbf{e}_h \rangle_{h \in L'/L}$ die Standardbasis des Gruppenrings L'/L . Die Zweideutigkeit der Quadratwurzel tritt nie in Erscheinung, da sie sich bei ϕ und $M_{\gamma, \phi}$ gegenseitig aufhebt.

$$f_{\text{HT}}(z) := \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \leq 0}} a_{h,n} q^n \mathbf{e}_h \text{ der Hauptteil der Funktion } f,$$

$$f(z) - \frac{M_{\gamma, \phi}^{-1} f_{\text{HT}}(\gamma z)}{\phi(\tau)^{2k}} \text{ nimmt exponentiell ab für } y \searrow 0, \text{ wegen der Funktionalgleichung}$$

und da $\sum_{n>0} a_{h,n} q^n \rightarrow 0$ und $a_{h,n} = O(e^{c\sqrt{n}})$,

$$f_0 := \sum_{\substack{h \in L'/L \\ q(h)=0}} a_{h,0} \mathbf{e}_h \text{ der konstante Term.}$$

Definition 4.2.3.2. (Eichlerintegrale) Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, k > 1, C_k := \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}, z \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(z) &:= C_k \mathbf{R}. \int_z^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau \\ &= \tilde{f}_{\text{HT}}(z) + C_k \int_z^{i\infty} (f(\tau) - f_{\text{HT}}(\tau)) (\tau - z)^{k-2} d\tau \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{\text{HT}}(z) &:= C_k \mathbf{R}. \int_z^{i\infty} f_{\text{HT}}(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau \stackrel{\text{HS.4.2.2.1}}{=} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n < 0}} \frac{a_{h,n}}{n^{k-1}} q^n \mathbf{e}_h, \\ \tilde{f}(z) &= \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n}}{n^{k-1}} q^n \mathbf{e}_h. \end{aligned}$$

Sei $z \in \mathcal{H}^-$. Definiere folgendes modifizierte Eichlerintegral:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{f}}(-z) &:= C_k \mathbf{R}. \int_{\bar{z}}^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau \\ &\stackrel{\text{HS.4.2.2.1}}{=} -\frac{(4\pi|y|)^{k-1}}{\Gamma(k)} f_0 + C_k \left\{ \int_{\bar{z}}^{i\infty} (f(\tau) - f_{\text{HT}}(\tau)) (\tau - z)^{k-2} d\tau + \mathbf{R}. \int_{\bar{z}}^{i\infty} (f_{\text{HT}}(\tau) - f_0) (\tau - z)^{k-2} d\tau \right\} \\ &\stackrel{\text{HS.4.2.2.1}}{=} \frac{1}{\Gamma(k-1)} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n}}{n^{k-1}} \Gamma(k-1, 4\pi n|y|) q^n \mathbf{e}_h - \frac{(4\pi|y|)^{k-1}}{\Gamma(k)} f_0. \end{aligned}$$

²Eine zweite Möglichkeit ist, vektorwertige Funktionen zur adjungierten Darstellung ρ^* mit der Fourierentwicklung $f(z) = \sum_{h \in L'/L} f_h(z) \mathbf{e}_h, f_h(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}-q(h)} a_{h,n} q^n$ zu betrachten. Das geht völlig analog und wird hier nicht eigens untersucht.

Sei $z \in \mathcal{H}$:

$$\tilde{f}_{\text{HT}}(z) := \tilde{f}_0(z) + \frac{1}{\Gamma(k-1)} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \leq 0}} \frac{a_{h,n}}{n^{k-1}} \Gamma(k-1, 4\pi n y) q^{-n} \mathbf{e}_h,$$

$$\tilde{f}_0(z) := -\frac{(4\pi|y|)^{k-1}}{\Gamma(k)} f_0.$$

\tilde{f} ist holomorph und $D^{2k-1}\tilde{f} = f$. Ähnlich ist $\frac{\partial^{k-1}\tilde{f}}{\partial \bar{z} \partial^{k-2}z}(z) = (-2\pi i)^{k-1} f(-\bar{z})$.

Definition 4.2.3.3. Im vektorwertigen Zusammenhang definieren wir für $f \in \mathfrak{M}_k^!$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}|\gamma(z) &:= \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma,\phi}^{-1} \tilde{f} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right), \\ \tilde{f}|\gamma(z) &:= \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma,\phi}^{-1} \tilde{f} \left(\frac{az+b}{cz+d} \right), \\ \Psi|\gamma(z) &:= \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma,\phi}^{-1} \Psi \left(\frac{az+b}{cz+d} \right). \end{aligned}$$

mit der folgenden Definition für $\Psi = \Psi_0$:

Definition 4.2.3.4. Sei $f(z) := \sum_{h \in L'/L} \sum_{n \in \mathbb{Z}+q(h)} a_{h,n} e(nz) \mathbf{e}_h$ eine vektorwertige schwach-holomorphe Modulform

vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, k > 1$ zur metaplektischen Gruppe $\text{Mp}_2(\mathbb{Z})$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, $C_k = \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{\Gamma(k-1)}$. Dann ist die Periodenfunktion

$$\Psi_{-\frac{d}{c}}(z) := C_k \mathbf{R} \cdot \int_{-\frac{d}{c}}^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau, \quad z \in \mathbb{C},$$

wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \Psi_{-\frac{d}{c}}(z) &= (\tilde{f} - \tilde{f}|\gamma)(z) \\ (4.2.3.2) \quad &= C_k \left\{ \int_{-\frac{d}{c}}^i \left\{ f(\tau) - \frac{M_{\gamma,\phi}^{-1} f_{\text{HT}}(\gamma(\tau))}{\phi(\tau)^{2k}} \right\} (\tau - z)^{k-2} d\tau + \int_i^{i\infty} \{f(\tau) - f_{\text{HT}}(\tau)\} (\tau - z)^{k-2} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{R} \cdot \int_{-\frac{d}{c}}^i \frac{M_{\gamma,\phi}^{-1} f_{\text{HT}}(\gamma(\tau))}{\phi(\tau)^{2k}} (\tau - z)^{k-2} d\tau + \mathbf{R} \cdot \int_i^{i\infty} f_{\text{HT}}(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Folgerung 4.2.3.4.1. Für Funktionen f wie in (4.2.3.1) konvergieren folgende Summen:

$$\begin{aligned} \Psi_{-\frac{d}{c}}(z) &= \frac{1}{\Gamma(k-1)} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n}}{n^{k-1}} \Gamma(k-1, 2\pi n(1+iz)) q^n \mathbf{e}_h \\ &\quad + \frac{\phi(z)^{2k-4}}{\Gamma(k-1)} M_{\gamma,\phi}^{-1} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n}}{n^{k-1}} \Gamma\left(k-1, \frac{2\pi n(1+iz)}{(ci+d)(cz+d)}\right) e(n\gamma z) \mathbf{e}_h \\ &\quad - \frac{(2\pi(1+iz))^{k-1}}{\Gamma(k)} \left\{ f_0 - \frac{1}{\phi(-\frac{d}{c}+i)^{2k-2} (cz+d)} M_{\gamma,\phi}^{-1} f_0 \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Definition (4.2.3.2) und Hilfssatz 4.2.2.1. □

Das Transformationsverhalten von $\tilde{f}(-z)$ bezüglich $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist

$$\begin{aligned} (\tilde{f} - \tilde{f}|\gamma)(-z) &= C_k \left\{ \int_{\bar{z}}^{i\infty} (f(\tau) - f_{\text{HT}}(\tau)) (\tau - z)^{k-2} d\tau + \int_{-\frac{d}{c}}^{\bar{z}} \left(f(\tau) - M_{\gamma, \phi}^{-1} \frac{f_{\text{HT}}(\gamma\tau)}{\phi(\tau)^{2k}} \right) (\tau - z)^{k-2} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{R} \cdot \int_{\bar{z}}^{i\infty} f_{\text{HT}}(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau + \mathbf{R} \cdot M_{\gamma, \phi}^{-1} \int_{-\frac{d}{c}}^{\bar{z}} f_{\text{HT}}(\gamma\tau) \frac{(\tau - z)^{k-2}}{\phi(\tau)^{2k}} d\tau \right\} \\ &= C_k \cdot \mathbf{R} \cdot \int_{-\frac{d}{c}}^{\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau. \end{aligned}$$

Es ergibt sich wieder dieselbe Periodenfunktion, deren Eigenschaften bei senkrechter Annäherung an die reelle Achse im folgenden untersucht werden.

Hilfssatz 4.2.3.5. Falls die Vektorkomponenten von $f(z)$, $z \in \mathcal{H}$, f wie in (4.2.3.1), linear unabhängig sind, erfüllt die Periodenfunktion $\Psi := \Psi_0$ die Manin-Relationen:

$$\Psi + \Psi|S = \Psi + \Psi|U + \Psi|U^2 \equiv 0$$

diesmal mit dem $|\text{-slash-}$ -Operator der metaplektischen Gruppe, s. Abschnitt 4.1

$$S := \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{z} \right), T := \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right), U := ST = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sqrt{z+1} \right)$$

mit der entlang der negativen reellen Achse unstetigen Standardquadratwurzel;

$$S^2 = U^3 = Z = \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, i \right), Z^4 = Id,$$

$$\Psi|_{2-k}(\gamma, \phi)(z) := \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma, \phi}^{-1} \Psi \left(\frac{az+b}{cz+d} \right)$$

und die folgende Funktionalgleichung

$$\Psi(z) = M_T^{-1} \Psi(z+1) + (z+1)^{k-2} M_{TST}^{-1} \Psi \left(\frac{z}{z+1} \right)$$

mit der zu TST gehörenden Quadratwurzel.

BEWEIS DES HILFSSATZES. Für Spitzenformen f ist

$$\Psi(z) := C_k \int_0^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau$$

$$\begin{aligned} \Psi|_{2-k} \gamma(z) &:= C_k \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma, \phi}^{-1} \int_0^{i\infty} f(\tau) (\tau - \gamma z)^{k-2} d\tau = C_k \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma, \phi}^{-1} \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(\gamma\xi) (\gamma\xi - \gamma z)^{k-2} \frac{d\xi}{\phi(\xi)^4} \\ &= C_k \phi(z)^{2k-4} \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} \phi(\xi)^{2k} f(\xi) \frac{(\xi - z)^{k-2}}{\phi(\xi)^{2k-4} \phi(z)^{2k-4} \phi(\xi)^4} d\xi = C_k \int_{\gamma^{-1}(0)}^{\gamma^{-1}(i\infty)} f(\xi) (\xi - z)^{k-2} d\xi, \end{aligned}$$

so dass die Manin-Relationen klar sind.

Allgemein muß man die Integrale regularisieren. Die Stammfunktion (Eichlerintegral) geht in den Spitzen gegen ∞ . Für Funktionen $f \in \mathfrak{M}_k^!$, die von skalaren Modulformen zu Kongruenzuntergruppen kommen, ist wieder

$$\tilde{f}|T = \tilde{f},$$

aus der Fourierentwicklung sieht man, dass für die Komponentenfunktionen $f_h(z+1) = e^{2\pi i q(h)} f_h(z)$ und M_T ist eine Diagonalmatrix. Ebenso ist

$$\tilde{f}|S^2 = \tilde{f}.$$

Für die verschiedenen Funktionalgleichungen s. [Manin 1, Manin 2] bzw. [Kohnen Zagier 2, 1.1]. Die Manin-Relationen wurden in [Zagier 9] für $f \in M_k$ bewiesen. Für schwach-holomorphe Modulformen ohne konstanten Term zur vollen Modulgruppe vgl. [DIT 1, Theorem 2], [Bri Gu Ke On, Theorem 1.2]. Allgemein ist

$$\begin{aligned}\Psi &= \tilde{f} - \tilde{f}|S \\ \Psi|U &= \tilde{f}|(TS) - \tilde{f}|(STS) = \tilde{f}|S - \tilde{f}|(STS) \\ \Psi|U^2 &= \tilde{f}|(TSTS) - \tilde{f}|(STSTS) = \tilde{f}|(STS) - \tilde{f}|T, \text{ da } (ST)^3 = \text{Id}.\end{aligned}$$

Daraus folgt $\Psi + \Psi|U + \Psi|U^2 = 0$. $\Psi = -\Psi|S$ ist klar. Die Funktionalgleichung ist äquivalent zu

$$\Psi = \Psi|T + \Psi|TST$$

bzw. nach Anwenden von S

$$-\Psi = \Psi|S = \Psi|U + \Psi|U^2,$$

□

Wie definieren wir die vektorwertige L-Reihe einer schwach-holomorphen Modulform? Wir versuchen, für $f \in M_k^!$ eine L-Reihe zu definieren³:

$$L_f^*(s) = \int_0^\infty (f(iy) - a_0) y^{s-1} dy = (2\pi)^{-s} \Gamma(s) L_f(s)$$

mit

$$L_f(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n^s}, \left(\frac{1}{n^s} := \exp(-s(\log|n| + i\pi)) \text{ für } n < 0 \right), \text{ Re } s \gg 1.$$

Das Integral wie auch die Dirichletreihe sind allerdings divergent, aber es lässt sich folgender Sinn geben⁴:

Definition 4.2.3.6. Sei $f(z) := \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} a_{h,n} q^n \mathbf{e}_h$ eine vektorwertige schwach-holomorphe Modulform vom

Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ wie in (4.2.3.1), $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, $x = -\frac{d}{c}$. Definiere⁵

$$\begin{aligned}L_x^*(s) &:= \mathbf{R} \cdot \int_0^\infty f(x+iy) y^{s-1} dy := \int_0^{t_0} \left\{ f(x+iy) - \frac{M_{\gamma,\phi}^{-1} f_{\text{HT}}(\gamma z)}{\phi(z)^{2k}} \right\} y^{s-1} dy \\ &+ \int_{t_0}^\infty \{ f(x+iy) - f_{\text{HT}}(x+iy) \} y^{s-1} dy + \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n < 0}} \frac{a_{h,n} \Gamma(s, 2\pi n t_0) q^n}{(2\pi n)^s} \mathbf{e}_h \\ &+ \frac{c^{2k-2s}}{\phi(-\frac{d}{c} + i)^{2k}} M_{\gamma,\phi}^{-1} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n < 0}} \frac{a_{h,n} \Gamma(k-s, \frac{2\pi n}{c^2 t_0}) e(\frac{na}{c})}{(2\pi n)^{k-s}} \mathbf{e}_h - \frac{t_0^s}{s} f_0 - \frac{t_0^{s-k}}{\phi(-\frac{d}{c} + i)^{2k} (k-s)} M_{\gamma,\phi}^{-1} f_0, \\ L_x(s) &:= \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} L_x^*(s) \text{ und } L(s) := L_f(s) := L_0(s).\end{aligned}$$

Die Ableitung der rechten Seite nach t_0 ist Null, d.h. der Ausdruck ist unabhängig von t_0 , da die Fourierkoeffizienten von der Größenordnung $O(e^{c\sqrt{n}})$ sind, (Ramanujan, [Rademacher], [Bruinier Funke 2, Lemma 3.4]). Für $t_0 \rightarrow$

³Die folgenden Abschnitte sind Verallgemeinerungen von [Zagier 9, 2. Periods of cusp forms and non-cusp forms] auf schwach-holomorphe Modulformen

⁴Man braucht eine Regularisierung im Sinne von Anhang D.2, indem man $\int_0^\infty e^{2\pi i n z} y^{s-1} dy$, definiert für $\text{Re}(n) > 0$ auf $n < 0$ analytisch fortsetzt

⁵ $y^s := \exp(s \log y)$ mit dem Hauptwert des Logarithmus

0 ist formal $L_f^*(s) \rightarrow \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n^s}$, aber die Dirichletreihe $\sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{n^s}$ konvergiert wegen $a_n = O(e^{c\sqrt{n}})$ vermutlich nirgendwo. Vielmehr konvergiert folgende Darstellung:

Hilfssatz 4.2.3.7. Sei $f \in \mathfrak{M}_k^!$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $x = -\frac{d}{c}$. Die L -Reihen

$$L_x^*(s) = \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in L'/L \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n} \Gamma\left(s, \frac{2\pi n}{c}\right) e(nx)}{(2\pi n)^s} \mathbf{e}_h + \frac{c^{2k-2s}}{\phi\left(-\frac{d}{c} + i\right)^{2k}} M_{\gamma, \phi}^{-1} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in L'/L \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n} \Gamma\left(k-s, \frac{2\pi n}{c}\right) e\left(\frac{na}{c}\right)}{(2\pi n)^{k-s}} \mathbf{e}_h \\ - \frac{1}{sc^s} f_0 - \frac{1}{\phi\left(-\frac{d}{c} + i\right)^{2k} (k-s) c^{s-k}} M_{\gamma, \phi}^{-1} f_0.$$

und $L_x(s)$ sind in ganz \mathbb{C} meromorphe Funktionen mit den einzigen Polen in $s = k$ und für $L_x^*(s)$ auch $s = 0$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $L_x(-m) = 0$. Es gilt die folgende Funktionalgleichung:

$$L_{\frac{a}{c}}^*(k-s) = \frac{\phi\left(-\frac{d}{c} + i\right)^{2k}}{c^{2k-2s}} M_{\gamma, \phi} L_{-\frac{d}{c}}^*(s).$$

BEWEIS. Die Integrale ergeben sich aus Hilfssatz 4.2.2.1. Die Konvergenz folgt aus der Asymptotik der unvollständigen Γ -Funktion [AS, 6.5.32]. \square

Beispiele. Sei $k \in 2\mathbb{N}$. Für $M_k^!(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ist

$$L_f^*(s) = \sum_{n \neq 0} \frac{a_n \Gamma(s, 2\pi n)}{(2\pi n)^s} + i^k \sum_{n \neq 0} \frac{a_n \Gamma(k-s, 2\pi n)}{(2\pi n)^{k-s}} - \left(\frac{1}{s} + \frac{i^k}{k-s}\right) a_0.$$

Das ist in der ganzen s -Ebene meromorph mit zwei einfachen Polen bei 0 und k mit den Residuen

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{s=0} L_f^*(s) &= -a_0, \\ \mathrm{Res}_{s=k} L_f^*(s) &= i^k a_0. \end{aligned}$$

Es gilt die Funktionalgleichung

$$L_f^*(k-s) = i^k L_f^*(s).$$

$L_f(s)$ ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{k\}$ und

$$\begin{aligned} L_f(0) &= -a_0, \\ \mathrm{Res}_{s=k} L_f(s) &= \frac{(2\pi i)^k}{\Gamma(k)} a_0. \end{aligned}$$

Für $\gamma = S$ sieht die Periodenfunktion so aus:

$$\psi(z) = C_k \left\{ \frac{a_0}{k-1} \left(z^{k-1} + \frac{1}{z} \right) + \sum_{n=0}^{k-2} i^{1-n} \binom{k-2}{n} L_f^*(n+1) z^{k-2-n} \right\}.$$

Satz 4.2.3.8 (Eichler-Shimura-Isomorphismus). Sei $k \in 2\mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_k &:= z^{-1} \cdot \{ \text{Polynome in } z \text{ vom Grad } \leq k \}, \\ \widehat{W}_k &:= \left\{ \phi \in \widehat{V}_k : \phi|_{2-k}(1+S) = \phi|_{2-k}(1+U+U^2) = 0 \right\} \end{aligned}$$

mit der üblichen $|_{2-k}$ -Aktion. Die Periodenfunktion

$$\psi_f(z) \doteq \frac{a_0}{k-1} \left(z^{k-1} + \frac{1}{z} \right) + \sum_{j=0}^{k-2} i^{1-j} \binom{k-2}{j} L_f^*(j+1) z^{k-2-j}$$

vermittelt einen Isomorphismus $\psi : \begin{cases} M_k^!(1)/\mathbb{D}^{k-1}(S_{2-k}^!(1)) & \longrightarrow \widehat{W}_k, \\ f = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n & \longmapsto \psi_f. \end{cases}$

BEWEIS. [Zagier 9, 2. Periods of cusp forms and non-cusp forms. Theorem], [Bri Fri Ke, Theorem 2.4, 2.5], [Bri Gu Ke On, Theorem 1.2]. \square

4.2.4. Randverhalten der Periodenfunktionen.

Satz 4.2.4.1.

Sei f wie in (4.2.3.1), $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $x = -\frac{d}{c}$. Die Funktionen

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{C}, & \tilde{f}_x(y) &:= -\phi(z)^{2k-4} M_{\gamma,\phi}^{-1} \tilde{f}_{HT}(\gamma z) + \tilde{f}(z), & z &= -\frac{d}{c} + iy \\ \tilde{\tilde{f}}_x(-*) : \mathbb{R}^- &\rightarrow \mathbb{C}, & \tilde{\tilde{f}}_x(-y) &:= -\phi(z)^{2k-4} M_{\gamma,\phi}^{-1} \tilde{\tilde{f}}_{HT}(-\gamma z) + \tilde{\tilde{f}}(-z) \end{aligned}$$

sind holomorph in \mathcal{H} bzw. reell-analytisch in \mathcal{H}^- und unterscheiden sich für $y \rightarrow 0$ nur um etwas exponentiell⁶ Kleines von der Periodenfunktion $\Psi_x(z)$ und haben denselben einfachen Pol bei senkrechter Annäherung an den Punkt $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x(y) &\sim \Psi_x(z) \\ \tilde{\tilde{f}}_x(-y) &\sim \Psi_x(z) \\ \Psi_x(z) &\sim -\frac{(2\pi)^{k-1} i}{\phi\left(-\frac{d}{c} + i\right)^{2k-2} \Gamma(k) cy} M_{\gamma,\phi}^{-1} f_0. \end{aligned}$$

BEWEIS. Mit Folgerung 4.2.3.4.1 und wegen

$$\begin{aligned} \Gamma(k-1, 2\pi n(1+iz)) e^{-2\pi ny} &\rightarrow \Gamma\left(k-1, 2\pi n\left(1 - i\frac{d}{c}\right)\right), \\ (cz+d)^{k-2} \Gamma\left(k-1, \frac{2\pi n(1+iz)}{(ci+d)(cz+d)}\right) e^{-\frac{2\pi n}{c^2 y}} \\ &\stackrel{[\text{AS}, 6.5.32]}{\sim} \left(\frac{2\pi n(1+iz)}{ci+d}\right)^{k-2} \exp\left(-\frac{2\pi n(1+iz)}{(ci+d)icy} - \frac{2\pi n}{c^2 y}\right) = O(1), \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Insgesamt

$$(4.2.4.1) \quad \tilde{f}_x(y) \sim C_k \mathbf{R}. \int_x^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau = \frac{(2\pi)^{k-1}}{\phi\left(-\frac{d}{c} + i\right)^{2k-2} \Gamma(k) icy} M_{\gamma,\phi}^{-1} f_0 \quad \text{für } y \searrow 0,$$

ebenso für $\tilde{\tilde{f}}_x(-y)$ und $y \nearrow 0$. □

Im folgenden untersuchen wir die Details der Entwicklung in den Spitzen:

Wie sehen die Mellintransformierten aus? Leider haben die Periodenfunktion ψ_x und die Eichlerintegrale $\tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}$ keine günstigen Eigenschaften für die Mellintransformation: Sie sind weder bei Null noch im Unendlichen exponentiell klein. Rein formal ist

$$\begin{aligned} \mathbf{R}. \int_0^\infty \tilde{f}(z) y^{s-1} dy &= \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \mathbf{R}. \int_0^\infty y^{s-1} \mathbf{R}. \int_y^\infty f(x+i\eta) (\eta - y)^{k-2} d\eta dy \\ &= \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \mathbf{R}. \int_0^\infty f(x+i\eta) \mathbf{R}. \int_0^\eta y^{s-1} (\eta - y)^{k-2} dy d\eta \\ &\stackrel{(\text{D.1.2.3})}{=} \frac{(2\pi)^{k-1} \Gamma(s)}{\Gamma(s+k-1)} \mathbf{R}. \int_0^\infty f(x+i\eta) \eta^{s+k-2} d\eta = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} L_x(s+k-1) \end{aligned}$$

⁶ $\tilde{f}(z) - \tilde{f}_{HT}(z)$ bzw. $\tilde{\tilde{f}}(-z) - \tilde{\tilde{f}}_{HT}(-z)$ fallen schnell ab für $\text{Im } z \rightarrow \infty$, weil $a_n = O(e^{C\sqrt{n}})$; [Bruinier Funke 2, Lemma 3.4].

mit Polen für $s = 1, 0, -1, -2, \dots$ mit den Residuen

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=-n} \mathbf{R}. \int_0^{\infty} \tilde{f}(z) y^{s-1} dy &= \frac{(-2\pi)^n}{n!} L_x(k-n-1) \\ \operatorname{Res}_{s=1} \mathbf{R}. \int_0^{\infty} \tilde{f}(z) y^{s-1} dy &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Res}_{s=k} L_x(s), \end{aligned}$$

Man muss sich über die Vertauschbarkeit der Integrationsreihenfolge für normalisierte Integrale Gedanken machen, z.B. indem man die Integrationsbereiche immer in $(0, 1)$ und $(1, \infty)$ zerlegt und jeweils die Reihenfolge vertauscht. Für normale Modulformen $f \in M_{k+\frac{3}{2}}$ ist das alles gleichmäßig konvergent. Für schwach-holomorphe Modulformen beweisen wir eine asymptotische Entwicklung ohne Mellintransformation:

Hilfssatz 4.2.4.2. Für halbzahliges $k, c \in \mathbb{R}$ und $|y| < 1$ gibt es folgende Reihenentwicklung:

$$\frac{\Gamma(k-1, c(1-y))}{\Gamma(k-1)} e^{-cy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-n-1, c) (-cy)^n}{\Gamma(k-n-1) n!}.$$

BEWEIS. Für $c > 0$:

$$\begin{aligned} e^{-cy} \Gamma(k-1, c(1-y)) &= \int_c^{\infty} e^{-t} (t-cy)^{k-2} dt = \int_c^{\infty} e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-2}{n} t^{k-2-n} (-cy)^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-2}{n} (-cy)^n \int_c^{\infty} e^{-t} t^{k-2-n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-2}{n} (-cy)^n \Gamma(k-1-n, c), \end{aligned}$$

da Integral und Summe vertauscht werden dürfen. Analytische Fortsetzung auf $c < 0$ liefert die Beh. \square

Hilfssatz 4.2.4.3. Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, d < 0$ und $y \searrow 0$ gibt es folgende asymptotische Entwicklung:

$$\begin{aligned} &y^{k-2} \Gamma\left(k-1, -\frac{d}{y}(1-y)\right) e^{-\frac{d}{y}} \\ \sim &(-d)^{k-2} \left\{ \Gamma(1, d) - \binom{k-2}{1} \frac{\Gamma(2, d)}{d} y + \binom{k-2}{2} \frac{\Gamma(3, d)}{d^2} y^2 - \binom{k-2}{3} \frac{\Gamma(4, d)}{d^3} y^3 + \dots \right\}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Γ -Funktion hat folgende asymptotische Entwicklung für große zweite Argumente

$$\Gamma(k-1, d(1-t)) \stackrel{[\text{AS}, 6.5.32]}{\sim} e^{d(1-t)} (d(1-t))^{k-2} \left(1 + \frac{k-2}{d(1-t)} + \frac{(k-2)(k-3)}{(d(1-t))^2} + \dots \right).$$

Die Potenzen von $1-t$ lassen sich nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln

$$(1-t)^{k-m} = (-1)^m (-t)^{k-2} \left(\frac{1}{t^{m-2}} - \frac{k-m}{t^{m-1}} + \frac{\binom{k-m}{2}}{t^m} - \dots \right)$$

und man erhält insgesamt

$$\begin{aligned} e^{-td} \Gamma(k-1, d(1-t)) &\sim e^{-d} (-td)^{k-2} \left\{ 1 - \left(1 + \frac{1}{d}\right) \frac{k-2}{t} + \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{1!d} + \frac{1}{d^2}\right) \frac{(k-2)(k-3)}{t^2} - \dots \right\} \\ &\sim (-td)^{k-2} \left\{ \Gamma(1, d) - \binom{k-2}{1} \Gamma(2, d) (td)^{-1} + \binom{k-2}{2} \Gamma(3, d) (td)^{-2} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

\square

Satz 4.2.4.4. Sei $f(z) = \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \geq n_0}} a_{h,n} q^n \in \mathfrak{M}_k^!$, $z = -\frac{d}{c} + iy \in \mathcal{H}$, $y \downarrow 0$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$, d.h. $\gamma z = \frac{a}{c} + \frac{i}{c^2 y}$.

Für $k > 1$, $2k \in \mathbb{N}$ ist bei senkrechter Annäherung an den Punkt x der reellen Achse:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x(y) &= \tilde{f}(z) - \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma, \phi}^{-1} \tilde{f}_{HT}(\gamma z) \\ \Psi_x(z) &\sim \frac{1}{2\pi y} \operatorname{Res}_{s=k} L_x(s) + L_x(k-1) + \frac{(-2\pi y)}{1!} L_x(k-2) + \frac{(-2\pi y)^2}{2!} L_x(k-3) + \dots \end{aligned}$$

bzw. für $z = -\frac{d}{c} + iy \in \mathcal{H}^-$, $y \uparrow 0$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x(-y) &= \tilde{f}(-z) - \phi(z)^{2k-4} M_{\gamma, \phi}^{-1} \tilde{f}_{HT}(-\gamma z) \\ \Psi_x(z) &\sim \frac{1}{2\pi y} \operatorname{Res}_{s=k} L_x(s) + L_x(k-1) + \frac{(-2\pi y)}{1!} L_x(k-2) + \frac{(-2\pi y)^2}{2!} L_x(k-3) + \dots \end{aligned}$$

Für $M_k^!(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ brechen diese Reihenentwicklungen nach k Termen ab und es gibt Gleichheit:

$$\psi_x(x+iy) = \frac{1}{2\pi y} \operatorname{Res}_{s=k} L_x(s) + L_x(k-1) - 2\pi y L_x(k-2) + \dots + \frac{(-2\pi y)^{k-1}}{(k-1)!} L_x(0).$$

BEWEIS. Insgesamt ergibt sich mit Hilfssatz 4.2.3.4.1 und den Hilfssätzen 4.2.4.2, 4.2.4.3, $d := \frac{\pi n}{2c^2} < 0$, $t = \frac{1}{y}$:

$$\begin{aligned} \Psi_x(z) &\sim \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n} e(nx)}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^N \frac{\Gamma(k-j-1, 2\pi n) (-2\pi n y)^j}{\Gamma(k-j-1) j!} \mathbf{e}_h \\ &\quad - \frac{(2\pi i n)^{k-2}}{\phi(-\frac{d}{c} + i)^{2k-4}} M^{-1} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n} e(\frac{an}{c})}{n} \sum_{j=0}^N \frac{\binom{k-2}{j} \Gamma(j+1, \frac{2\pi n}{c^2})}{\Gamma(k-1) (-\frac{2\pi n}{c^2})^j} y^j \mathbf{e}_h \\ &\quad - \frac{(2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k)} (1-y)^{k-1} \left\{ f_0 - \frac{1}{\phi(-\frac{d}{c} + i)^{2k} y} M^{-1} f_0 \right\} \end{aligned}$$

Der Koeffizient von y^j ist

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^j (2\pi)^{k-1}}{\Gamma(k-j-1) j!} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n} \Gamma(k-j-1, 2\pi n) e(nx)}{(2\pi n)^{k-j-1}} \mathbf{e}_h \\ &\quad - \frac{c^{2k-2s} (-1)^j (2\pi)^{k-1}}{\phi(-\frac{d}{c} + i)^{2k} \Gamma(k-j-1) j!} M^{-1} \sum_{h \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}+q(h) \\ n \neq 0}} \frac{a_{h,n} \Gamma(j+1, \frac{2\pi n}{c^2}) e(\frac{na}{c})}{(2\pi n)^{j+1}} \mathbf{e}_h \\ &\quad - \frac{(-1)^j (2\pi)^{k-1}}{j! \Gamma(k-j-1)} \left\{ \frac{1}{k-j-1} f_0 - \frac{1}{(j+1) \phi(-\frac{d}{c} + i)^{2k}} M^{-1} f_0 \right\} \end{aligned}$$

für $j = -1, 0, 1, \dots$

Das ist aber nach Lemma 4.2.3.7 gleich $\frac{(-2\pi)^j}{j!} L_x(k-j-1)$. Die Pole der Mellintransformierten sind tatsächlich wie am Anfang des Abschnitts vermutet, so dass es auch im allgemeinen Fall von schwach-holomorphen Modulformen halbganzen Gewichts eine asymptotische Entwicklung

$$\frac{1}{2\pi y} \operatorname{Res}_{s=k} L_x(s) + L_x(k-1) + \frac{(-2\pi y)}{1!} L_x(k-2) + \frac{(-2\pi y)^2}{2!} L_x(k-3) + \dots$$

gibt. □

4.3. Spezielle L-Werte

Satz 4.3.1 (Perioden ω^\pm, Ω^\pm). Sei $f \in S_k(N, \chi)$ eine Heckeform. Es gibt $F(z) = \sum_{n \geq n_0} C_n^+ q^n - \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle} \tilde{f} \in \widehat{S}_{2-k, \infty}(N, \chi)$ mit $C_n^+ \in \mathbb{K}_f \ \forall n < 0, C_0^+ = 0$. Dann hat $f' = D^{k-1}(F) - C_1^+ f \in S_{k, \infty}^!(N, \chi)$ Fourierkoeffizienten aus \mathbb{K}_f .⁷ Es gibt Vektoren aus Polynomen $\mathfrak{p}_f^+ := (\mathbb{K}_f[z^2])^n, \mathfrak{p}_f^- := (z \cdot \mathbb{K}_f[z^2])^n$ aus $(W_k)^n, n = [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ und Konstanten $c_0 := -\frac{(2\pi i)^{k-1}}{(k-2)!}, \omega^+, \omega^- \in \mathbb{C}$ mit $\frac{\omega^+ \omega^-}{i \langle f, f \rangle} \in \mathbb{K}_f$, falls k gerade ist, sonst $\frac{|\omega^\pm|^2}{\langle f, f \rangle} \in \mathbb{K}_f, \Omega^+ := -\omega^+ \left(C_1^+ - \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle} \right), \Omega^- := -\omega^- \left(C_1^+ + \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle} \right)$, so dass

$$\begin{aligned} \Psi_f &= c_0 \left(\omega^+ \mathfrak{p}_f^+ + \omega^- \mathfrak{p}_f^- \right), \\ \Psi_{f'} &= c_0 \left(\Omega^+ \mathfrak{p}_f^+ + \Omega^- \mathfrak{p}_f^- \right) \end{aligned}$$

für die vektorwertigen Periodenfunktionen

$$\Psi_{\mathfrak{g}}(z) := \left(-\frac{(2\pi i)^{k-1}}{(k-2)!} \mathbf{R} \cdot \int_0^{i\infty} (g|A)(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau \right)_{A \in \Gamma_0(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}.$$

BEWEIS. Die Aussage für Hecke Spitzenformen ist aus [Pasol Popa, Proposition 5.11 ff]. Sei

$$\mathfrak{f} = (f|A)_{A \in \Gamma_0(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$$

die vektorwertige Modulform auf der vollen Modulgruppe, d.h. für alle $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ gibt es Darstellungsmatrizen M_γ , so dass

$$\mathfrak{f}(\gamma z) = (cz + d)^k M_\gamma \cdot \mathfrak{f}(z), \quad \text{d.h.} \quad \mathfrak{f}|_\gamma = f.$$

Der slash-Operator ist für vektorwertige Modulformen wie folgt definiert:

$$\mathfrak{f}|_\gamma := (cz + d)^{-k} M_\gamma^{-1} \cdot \mathfrak{f}(\gamma z).$$

Wir bezeichnen die entsprechenden vektorwertigen $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Modulformen mit Frakturbuchstaben, z.B. $\mathfrak{F} = (F|A)_{A \in \Gamma_0(N) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$. Mit F sind nach [Stein, Beweis zu Theorem 9.18, Case 2] auch die Komponenten von \mathfrak{F} algebraisch. Dann gilt:

$$\Psi_f = \Psi_0 = \tilde{f} - \tilde{f}|S, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der slash-Operator ist auf Vektoren anders definiert als auf den Komponenten! Wir verwenden den Differenzialoperator ξ , vgl. Hilfssatz C.3.5.2 und S.197. Nach [Br On Rh] gibt es ein $F \in \widehat{S}_{2-k}(N, \chi)$ „gut“ für $K(f)(z) := f(-\bar{z})$, d.h. $\xi_{2-k} F = K(f)$. Die Funktion

$$F - C_1^+ \tilde{f} = \tilde{f}' + C_0^+ - \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle} \tilde{f}, \quad \text{wobei } f' \in M_{k, \infty}^!(N, \chi),$$

hat nach [Guer Kent Ono] Fourierkoeffizienten aus \mathbb{K}_f . Der Koeffizient C_0^+ lässt sich mit der expliziten Konstruktion von Poincaréreihen aus dem Hauptteil von F berechnen, Hilfssatz C.3.3.3.2, und ist algebraisch. Man kann $C_0^+ = 0$ wählen: Wie in [Bri Gu Ke On, Theorem 1.2] ist $M_{2-k}^!(N, \chi) / S_{2-k}^!(N, \chi)$ nichttrivial. $M_{2-k}^!(N, \chi)$ hat eine Basis mit Fourierkoeffizienten aus $M = \mathbb{Z}[\chi]$, wie in Satz C.1.1.3. Daher hat eine dieser Basisfunktionen g einen konstanten Fourierkoeffizienten $c_0 \neq 0$. Ersetze F gegebenenfalls durch $F - \frac{C_0^+}{c_0} g$ (und f' durch $f' - \frac{C_0^+}{c_0} D^{k-1} g$). Die entsprechende vektorwertige $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Modulform besteht im wesentlichen aus den Entwicklungen in jeder Spitze. Diese sind nicht eindeutig, aber es ist eindeutig, dass die konstanten Koeffizienten in allen Spitzen Null sind. Das

⁷Das sind die schwachen Hecke-Eigenformen aus Abschnitt 5.3

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes und F transformiert modular, d.h. für die entsprechende vektorwertige Modulform

$$0 = \mathfrak{F}|(1-S) = \tilde{f}'|(1-S) + C_1^+ \tilde{f}|(1-S) - \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle} \tilde{f}|(1-S)$$

$$\stackrel{\text{S.99 f.}}{=} \Psi_{f'}(z) + C_1^+ \Psi_f(z) - \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1} \langle f, f \rangle} \Psi_f(-z)$$

und mit $\Psi_f(-z) = c_0 (\omega^+ \mathfrak{p}_f^+ - \omega^- \mathfrak{p}_f^-)$ folgt die Beh. □

Folgerung 4.3.1.1 (L-Wert in der Mitte des kritischen Streifens). *Sei $4 \mid k$ und $g \in S_{\frac{k+1}{2}}(4)$ die der Heckeform $f \in S_k(1)$ unter der Shimura-Korrespondenz (Folgerung 3.1.6.4.2 mit $D=1$) entsprechende Heckeform. Dann ist für die schwache Hecke-Eigenform f' aus dem vorigen Satz:*

$$L_{f'}\left(\frac{k}{2}\right) = -\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\left(\frac{k}{2}-1\right)! \langle g, g \rangle} \left(C_1^+ \langle f, f \rangle + \frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \right).$$

Falls $k \equiv 2 \pmod{4}$ ist $L_{f'}\left(\frac{k}{2}\right) = 0$ aufgrund der Funktionalgleichung.

BEWEIS. [Kohnen Zagier 1, Theorem 1], K. Bringmann - J. Funke (unveröffentlicht) □

Beispiele. Modulgruppe $SL_2(\mathbb{Z})$

- $\Delta(z) = q \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \dots \in S_{12}(1)$,
- $\Delta'(z) := -\frac{1}{2073} \Delta(z) \left(2048 j(z)^3 - 4524033 j(z)^2 + 2121795000 j(z) - 68381511228 \right)$
 $= \frac{1}{2073} \left(-\frac{2048}{q^2} + \frac{2049}{q} - 47709536q - 7454869971360q^2 + \dots \right) \in S_{12}^1(1)$,
- $j(z) = \frac{E_4(z)^3}{\Delta(z)} = \frac{1}{q} + 744 + 196884q + 21493760q^2 + 864299970q^3 + \dots \in M_0^1(1)$.
- $F_{-10}(1, z) = \frac{1}{q} + \frac{24}{B_{12}} + C_1^+ q + \dots \in M_{-10}^1(1)$, $C_1^+ = -1842, 89$;
- $\omega^+ = 0, 114379$; $\Omega^+ = \omega^+ \left(C_1^+ - \frac{2^{10} \cdot 10!}{(4\pi)^{11} \omega^+ \omega^-} \right) = -211, 113$;
- $\omega^- = 0, 00926928$; $\Omega^- = \omega^- \left(C_1^+ + \frac{2^{10} \cdot 10!}{(4\pi)^{11} \omega^+ \omega^-} \right) = -17, 0560$;

n	$\binom{10}{n-1} \cdot L_{\Delta}^*(n)$	$\binom{10}{n-1} \cdot L_{\Delta'}^*(n)$
1	$\frac{36}{691} \omega^+$	$\frac{36}{691} \Omega^+$
2	$4 \omega^-$	$4 \Omega^-$
3	ω^+	Ω^+
4	$25 \omega^-$	$25 \Omega^-$
5	$3 \omega^+$	$3 \Omega^+$
6	$42 \omega^-$	$42 \Omega^-$
7	$3 \omega^+$	$3 \Omega^+$
8	$25 \omega^-$	$25 \Omega^-$
9	ω^+	Ω^+
10	$4 \omega^-$	$4 \Omega^-$
11	$\frac{36}{691} \omega^+$	$\frac{36}{691} \Omega^+$

4.4. Mock-Modulformen und Eichlerintegrale

Statt Eichlerintegrale in die untere Halbebene fortzusetzen, kann man auch versuchen, sie in der gleichen (oberen) Halbebene durch einen nicht-holomorphen Anteil zu vervollständigen, so dass sie modular transformieren. Man kann vermuten, dass bei der Fortsetzung der Reihensumme einer Mock-Modulform f in die untere Halbebene \mathcal{H}^- der modulare Defekt derselbe bleibt wie in \mathcal{H}

$$f(z) - (cz + d)^{-k} f(\gamma z) = C_{2-k} \mathbf{R} \cdot \int_x^{i\infty} P(\tau) (\tau - z)^{-k} d\tau, P \in M_{2-k}^!$$

ebenso wie beim Übergang von einem Eichlerintegral zum anderen, so dass $f - \tilde{P}$ wieder modular transformiert und Eigenfunktion des Laplaceoperators Δ_k ist. Die Reihensumme von f in der unteren Halbebene ist somit $f^* = \tilde{P}(-z)$. Nach [Ramanujan] heißt eine holomorphe Funktion f , die keine 'Thetafunktion' ist, Mock-Thetafunktion, wenn sie in jeder Spitze $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ die gleiche asymptotische Entwicklung wie eine (schwach-holomorphe) Modulform hat, d.h.

$$f|\gamma(z) = a_{-n,\alpha} q^{-n} + \dots + a_{-1,\alpha} q^{-1} + O(1), \quad z \rightarrow \alpha \text{ (senkrecht von oben).}$$

Mock-Thetafunktionen sind die holomorphen Anteile von harmonischen schwachen Maaßformen F vom Gewicht $\frac{1}{2}$ und Spektralparameter $\frac{3}{16}$, vgl. [Zwegers 1, Zwegers 2]. [Zagier 15] verallgemeinert das zu

Definition 4.4.1. Die folgenden Funktionen sind invariant bezüglich des $|\textit{slash}$ -Operators der Gruppe $\Gamma = \Gamma_0(N)$, Nebentyp $\chi \vee \Gamma_0(4)$.

- (1) Mock-Spitzenformen $f \in \mathbb{S}_k(N, \chi)$ sind die holomorphen Anteile der Funktionen aus $\widehat{\mathbb{S}}_k(N, \chi)$, d.h. der harmonischen schwachen Maaßformen, deren nicht-holomorpher Anteil in den Spitzen exponentiell verschwindet.
- (2) Mock-Modulformen $f \in \mathbb{M}_k(N, \chi)$ sind die holomorphen Anteile von harmonischen schwachen Maaßformen F vom Gewicht κ , deren nicht-holomorpher Anteil in den Spitzen von höchstens polynomialem Wachstum ist.
- (3) Schwache Mock-Modulformen $f \in \mathbb{M}_k^!(N, \chi)$ sind (bis auf Konstanten) der holomorphe Anteil von harmonischen schwachen Maaßformen F vom Gewicht k , deren nicht-holomorpher Anteil in den Spitzen höchstens von exponentiellem Wachstum ist, d.h. $F \in \widehat{\mathbb{M}}_k^!(N, \chi)$.
- (4) $\mathbb{S}_k^+, \mathbb{M}_k^+$ und $\mathbb{M}_k^{!+}$ ($k - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$) sind die entsprechenden Räume von Modulformen zu $\Gamma_0(4)$ mit Koeffizienten c_n , die die Bedingung $c_k = 0$ für $n \equiv -(-1)^{[k]} \vee 2 \pmod{4}$ erfüllen (Kohnen-Plus-Raum).

Zu jeder Mock-Modulform kann man nach Definition eine Kompletzierung zu einer harmonischen schwachen Maaßform finden ($\widehat{\mathbb{S}}_k, \widehat{\mathbb{M}}_k, \widehat{\mathbb{M}}_k^!, \dots$). Aus der Klassifizierung der harmonischen schwachen Maaßformen im Anhang C.3 ergibt sich ein vollständiger Überblick über die Mock-Modulformen aus den Räumen $\mathbb{S}_k, \mathbb{M}_k, \mathbb{M}_k^!$ bzw. den dazugehörigen Kohlen-Plus-Räumen $\mathbb{S}_k^+, \mathbb{M}_k^+$ und $\mathbb{M}_k^{!+}$.

Im Falle von ganzem Gewicht $k \leq 0$ ist Mock-Modulform dasselbe wie Eichlerintegral:

Satz 4.4.2. *Sei $f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n \in \mathbb{S}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$, $k \leq 0$, eine Mock-Spitzenform. Dann ist*

$$f(z) = \sum_{n < 0} a_n \widetilde{F}_{2-k}(n, z).$$

Für Gewicht Null kann man noch eine beliebige Konstante addieren.

BEWEIS. Gewicht 0:

$$\begin{aligned} \text{Sei } f(z) &= c'_0 y + \sum_{n \geq n_0} c_n q^n + \sum_{n \geq n_0} c'_n \bar{q}^n \text{ modular vom Gewicht } 0; \\ Df(z) &= -\frac{c'_0}{4\pi} + \sum_{n \geq n_0} n c_n q^n \in M_2^!(\Gamma) = \left\langle \frac{d}{dz} P(j(z)) \right\rangle \\ &\Rightarrow c'_0 = 0, \sum_{n \geq n_0} c_n q^n = c_0 + P(j(z)) \in M_0^!(\Gamma). \end{aligned}$$

Holomorpher und nicht-holomorpher Anteil werden durch Konjugation (bzw. auch durch $\Theta = X : z \mapsto -\bar{z}$) vertauscht, also

$$f(z) = P_1(j(z)) + \overline{P_2(j(z))} \text{ mit Polynomen } P, P_1, P_2.$$

Für negatives Gewicht gibt es eine Basis aus Poincaréreihen, [Rademacher, 134.]

$$f(z) = \sum_{n < 0} a_n F_k(n, z),$$

die wegen [Bol]'s Identität wieder auf Poincaréreihen des komplementären Gewichts $2 - k$ abgebildet werden, vgl. Lemma C.3.5.4. \square

4.5. Konvergenz in der unteren Halbebene

Der Rand des Einheitskreises ist für die analytische Fortsetzung eine unüberwindliche Barriere, da es bei jeder Einheitswurzel eine Singularität gibt, s. auch [Bri Ka Koh]. Es zeigt sich jedoch, dass die Fourierreihe von Mock-Modulformen oft auch außerhalb des Einheitskreises konvergiert, und zwar gegen das Eichlerintegral einer (schwach-)holomorphen Modulform P . Das wurde erstmals in [Peterson 2, §3 Verallgemeinerungen; Integralformen] angesprochen. Beispiele finden sich in [Lawrence Zagier]. [Hikami] arbeitet mit q -hypergeometrischen Reihen. \widetilde{P} ist dann die nicht-holomorphe Kompletzierung der Mock-Modulform f , d.h. $f - \widetilde{P}$ transformiert modular. Das stimmt zumindest für Poincaréreihen $F_k(n, z)$. Für negatives k ist $\widetilde{P}_{2-k}(n, z)$ die analytische Fortsetzung des holomorphen Anteils von $F_k(n, z)$ auf die untere Halbebene. Man zeigt das entlang derselben Argumentationslinien wie in [Rademacher, 135. The series for the modular form $F(\tau)$] und [Lehner, Ch. IX, 3. Expansions of Zero]. Heuristisch ist naheliegend, dass $P_{2-k}(n, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} q^n |\gamma|$ etwas mit der analytischen Fortsetzung von

$F_{2-k}(n, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} q^{-n} |\gamma|$ außerhalb des Einheitskreises zu tun haben könnte, und dass daher $\widetilde{P}_{2-k}(n, z)$ eine

Fortsetzung von $\widetilde{F}_{2-k}(n, z)$ ist⁸. Es gibt also zwei Möglichkeiten, von der einen in die andere Halbebene fortzusetzen: Zusätzlich zur Fortsetzung vom einen auf das andere Eichlerintegral macht auch die bekannte analytische Fortsetzung von holomorphen Funktionen (eingeschränkten⁹) Sinn. Indem man bei einem Übergang von einer in die andere Halbebene die eine, beim anderen Übergang die andere Methode wählt, hat man die modulare Kompletzierung der Mock-Modulform.

⁸Modulformen lassen sich aber nicht analytisch fortsetzen.

⁹Es gibt keine Fortsetzung entlang einer offenen Umgebung.

Der holomorphe Anteil der Fourierreihe der Poincaréreihen lässt sich auch in der unteren Halbebene sinnvoll interpretieren:

Proposition 4.5.1. *Sei L ein gerades Gitter, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und ϱ die Weildarstellung (bzw. deren Dual) auf dem Gruppenring $\mathbb{C}[L'/L]$. Der nicht-holomorphe Anteil der Poincaréreihen aus [Bruinier 1] hat dieselben Fourierkoeffizienten, die man erhält, indem man die (holomorphe) Reihensumme in der unteren Halbebene berechnet.*

BEWEIS. Sei¹⁰ $m < 0$. Der holomorphe Anteil der vektorwertigen Poincaréreihe $F_{\beta,m}^L(\tau, 1 - \frac{k}{2}) \in \widehat{\mathfrak{M}}_k^!$ vom Gewicht $k < 0$ zum Gitter L aus [Bruinier 1, Def.1.8, Prop.1.10] ist¹¹

$$\begin{aligned}
(4.5.1) \quad F_{\beta,m}^+ \left(\tau, 1 - \frac{k}{2} \right) &:= 2\mathfrak{e}_{\beta}(m\tau) + 2\pi \sum_{\gamma \in L/L'} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n+q(\gamma) \geq 0}} \left(\frac{n+q(\gamma)}{-m} \right)^{\frac{k-1}{2}} \\
&\cdot \sum_{c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} H_c(\beta, m, \gamma, n+q(\gamma)) I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{-m(n+q(\gamma))} \right) q^{n+q(\gamma)} \mathfrak{e}_{\gamma} \\
&= 2\mathfrak{e}_{\beta}(m\tau) + 2\pi \sum_{\gamma \in L/L'} \sum_{\substack{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma/\Gamma_{\infty}}} \frac{\varrho_{\gamma\beta}^{-1} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right)}{e^{\pi i \operatorname{sign}(c)k/2} |c|} e \left(\frac{ma}{c} \right) \Phi_c \left(e \left(\frac{d}{c} \right) q \right) \mathfrak{e}_{\gamma}
\end{aligned}$$

mit

$$\Phi_c(z) := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n+q(\gamma) \geq 0}} \left(\frac{n+q(\gamma)}{-m} \right)^{\frac{k-1}{2}} I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{-m(n+q(\gamma))} \right) z^{n+q(\gamma)}$$

Die Funktion $z \mapsto \Phi_c(z)$ hat eine holomorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.

Sei

$$B_c(t) := \left(\frac{t+q(\gamma)}{-m} \right)^{\frac{k-1}{2}} I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{-m(t+q(\gamma))} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{cn}}{n!} (t+q(\gamma))^n$$

mit

$$a_{cn} := \frac{(-m)^{1-k+n} \left(\frac{2\pi}{|c|} \right)^{1-k+2n}}{\Gamma(2-k+n)}, \quad l(s) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{cn}}{s^{n+1}}, \quad |s| = \eta > 0 \text{ beliebig.}$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
B_c(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=\eta} e^{s(t+q(\gamma))} l(s) \, ds, \\
\Phi_c(z) &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n+q(\gamma) \geq 0}} B_c(n) z^{n+q(\gamma)} = \begin{cases} \frac{z^{q(\gamma)+1}}{2\pi i} \int_{|s|=\eta} \frac{e^{(q(\gamma)+1)s} l(s)}{1-ze^s} \, ds, & \gamma \neq 0, q(\gamma) = -\gamma^2, \\ \frac{z^{q(\gamma)}}{2\pi i} \int_{|s|=\eta} \frac{e^{q(\gamma)s} l(s)}{1-ze^s} \, ds, & \text{sonst.} \end{cases}
\end{aligned}$$

¹⁰Das Vorzeichen in [Bruinier 1] ist umgekehrt in dieser Arbeit

¹¹ $H_c(\beta, m, \gamma, n) := \frac{e^{-\pi i \operatorname{sign}(c)k/2}}{|c|} \sum_{\substack{d \pmod{c}^* \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma/\Gamma_{\infty}}} \varrho_{\gamma\beta}^{-1} \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) e \left(\frac{ma+nd}{c} \right)$, Kloostersumme

Entsprechend der Argumentation in [Lehner, Ch.IX 3. Expansions of Zero] liefert diese Integraldarstellung die analytische Fortsetzung Φ_c^* von Φ_c nach $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} \Phi_c^*(z) &= z^{q(\gamma)+1} \operatorname{Res}_{s=0} \frac{e^{(q(\gamma)+1)s} l(s)}{1 - ze^s} = -z^{q(\gamma)+1} \operatorname{Res}_{s=0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((q(\gamma)+1)s)^j}{j!} \sum_{n=1}^{\infty} (ze^s)^{-n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{cl}}{s^{l+1}} \\ &= -\operatorname{Res}_{s=0} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((q(\gamma)+1)s)^j}{j!} \sum_{n=1}^{\infty} z^{q(\gamma)+1-n} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-sn)^p}{p!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_{cl}}{s^{l+1}} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j+p=l} \frac{(q(\gamma)+1)^j (-n)^p}{j! p!} a_{cl} z^{q(\gamma)+1-n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q(\gamma)-n)^l}{l!} a_{cl} z^{q(\gamma)-n} \end{aligned}$$

für $\gamma \neq 0, q(\gamma) = -\gamma^2$ bzw.

$$\Phi_c^*(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(q(\gamma)-n)^l}{l!} a_{cl} z^{q(\gamma)-n} \quad \text{sonst; d.h.}$$

$$(4.5.2) \quad \Phi_c^*(z) = -\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ q(\gamma)+n < 0}} B_c(n) z^{q(\gamma)+n} \quad \text{für } |z| > 1.$$

Damit hat man die analytische Fortsetzung außerhalb des Einheitskreises. Gleichung (4.5.2) eingesetzt in die Fourierreihe (4.5.1) ergibt¹²

$$F_{\beta,m}^* \left(\tau, 1 - \frac{k}{2} \right) := 2\epsilon_{\beta}(m\tau) - 2\pi \sum_{\substack{\gamma \in L/L' \\ n \in \mathbb{Z} + q(\gamma) \\ n < 0}} \left| \frac{n}{m} \right|^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} H_c(\beta, m, \gamma, n) J_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{|mn|} \right) q^n \epsilon_{\gamma}.$$

Es ergeben sich genau die Fourierkoeffizienten von $F_{\beta,m}^L \left(\tau, 1 - \frac{k}{2} \right)$ mit negativem Index, vgl. [Bruinier 1, Prop.1.10]. \square

Beispiele. Vektorwertige Modulformen zum Gitter \mathbb{Z} mit der quadratischen Form $q(a) = a^2$ für gerades $k + \frac{1}{2}$ bzw. $q(a) = -a^2$ für ungerades $k + \frac{1}{2}$ entsprechen den $\Gamma_0(4)$ -Formen aus dem Kohnen-Plus-Raum, vgl. [Bruinier 1, Example 1.3] und Anhang C.3.2.4.

Das Ergebnis hängt von der Summationsreihenfolge ab, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

4.6. Mock-Modulformen haben unendlich viele Schatten

Die Eichlerintegrale von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Spitzenformen haben unendlich viele Schatten. Für $\tilde{\Delta}$ eine explizite Konstruktion:

Hilfssatz 4.6.1. *Das Eichlerintegral der Diskriminantenfunktion $\Delta \in S_{12}$ lässt sich auf unendlich viele Arten zu einer harmonischen schwachen Maaßform komplettieren:*

$$\forall m \in \mathbb{N} : \quad \tilde{\Delta}(z) + \frac{(4\pi)^{11} \langle \Delta, \Delta \rangle}{10! \tau_m} \left(m^{11} \tilde{F}_{12}(m, z) - \frac{24\sigma_{11}(m)}{B_{12}} \right) = -\frac{(4\pi)^{11} \langle \Delta, \Delta \rangle}{10! \tau_m} F_{-10}(-m, z)$$

mit den Poincaréreihen aus Definition C.3.3.2.2.

BEWEIS. Nach Hilfssatz C.3.3.1.4 ist

$$F_{-10}^-(m, z) = -m^{11} c_m \tilde{\Delta} = -m^{11} \tilde{P}_{12}(m, z)$$

mit $c_m = \frac{10! \tau(m)}{(4\pi m)^{11} \langle \Delta, \Delta \rangle}$, $\langle \Delta, \Delta \rangle = 1,035\,362 \cdot 10^{-6}$. Jedesmal ergibt sich eine modulare Komplettierung von $\tilde{\Delta}$. Die Poincaréreihe $F_{-10}^-(m, z)$ ist eine harmonische schwache Maaßform vom Gewicht -10 , deren nicht-holomorpher

¹² $F_{\beta,m}^* \left(\tau, 1 - \frac{k}{2} \right)$ bezeichne die Reihensumme von $F_{\beta,m}^+ \left(\tau, 1 - \frac{k}{2} \right)$ für $\operatorname{Re} \tau < 0$.

Anteil ein Vielfaches des modifizierten Eichlerintegrals der Δ -Diskriminante sein muss:

$$D^{11}F_{-10}(m, z) = -m^{11}F_{12}(m, z)$$

$$F_{-10}(m, z) = \frac{24\sigma_{11}(m)}{B_{12}} - m^{11}\tilde{F}_{12}(m, z) - m^{11}c_m\tilde{\Delta}(z).$$

Anwendung von Θ vertauscht holomorphen und nicht-holomorphen Anteil:

$$m^{11}c_m\tilde{\Delta}(z) - \frac{24\sigma_{11}(m)}{B_{12}} + m^{11}\tilde{F}_{12}(m, z) = -\Theta F_{-10}(m, z) \stackrel{\text{HS.C.3.5.4}}{=} -F_{-10}(-m, z)$$

und $\tilde{\Delta}$ ist eine schwache Mock-Modulform mit unendlich vielen Schatten. □

Kongruenzen

Die ursprüngliche Fragestellung für dieses Kapitel war das folgende Problem: Die Poincaréreihe

$$F_{-10}^+(1, z) = \frac{1}{q} - \frac{65520}{691} - 1842,89q - 23274,08q^2 - 225028,76q^3 + \dots$$

aus $\mathbb{S}_{-10} := \mathbb{S}_{-10}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ hat vermutlich irrationale Fourierkoeffizienten. Addiert man jedoch $c\tilde{\Delta}$ z.B. mit $c = 1842,89\dots$, so ist das eine Mock-Modulform aus \mathbb{M}_{-10}^1 mit rationalen Fourierkoeffizienten:

$$\frac{1}{q} - \frac{65520}{691} - \frac{1490923}{2^6}q^2 - \frac{164044054}{3^6}q^3 - \frac{29502448479}{4^7}q^4 \dots$$

Es ist die Frage, wie man c optimal wählt, so dass der holomorphe Anteil von $f := F_{-10}^+(1, z) + c\tilde{\Delta}$ Fourierkoeffizienten mit möglichst kleinen Nennern hat. Der Differentialoperator D^{11} vermittelt einen einfachen Zusammenhang mit dem Raum S_{12}^1 . Durch Computerexperimente stellt man fest, dass ganzzahlige Fourierkoeffizienten von Modulformen $g(z) = \sum_{n \gg -\infty} c(n)q^n \in S_{12}^1 \setminus D^{11}M_{-10}^1$ folgende Teilbarkeit haben:

$$(5.0.1) \quad \begin{aligned} \forall m \gg 1 : \quad & \mathrm{ord}_2 c(2^m) = 3m + \text{konst.} \\ & \mathrm{ord}_3 c(3^m) = 2m + \text{konst.} \\ & \mathrm{ord}_5 c(5^m) = m + \text{konst.} \\ & \mathrm{ord}_7 c(7^m) = m + \text{konst.} \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort, dass die Fourierkoeffizienten einer Mock-Modulform f vom Gewicht -10 nicht ganzzahlig sein können, denn dann müsste für die Fourierkoeffizienten der Modulform $D^{11}f$ gelten:

$$\forall \text{ Primzahlen } p : \quad c(p^m) \equiv 0 \pmod{p^{11m + \text{konst.}}}.$$

Auf der Suche nach einem Beweis von (5.0.1) stößt man auf folgende Kongruenzen der Ramanujan τ -Funktion

$$\begin{aligned} \tau(2^m n) &\equiv 0 \pmod{2^{3m}}, \\ \tau(3^m n) &\equiv 0 \pmod{3^{2m}}, \\ \tau(5^m n) &\equiv 0 \pmod{5^m}, \\ \tau(7^m n) &\equiv 0 \pmod{7^m}. \end{aligned}$$

Das erinnert an Ramanujans bekannte Kongruenzen für die Partitionszahlen $p(n)$ und läßt sich auf Fourierkoeffizienten holomorpher, schwach-holomorpher, Mock-Modulformen sowie Jacobiformen modulo Primzahlpotenzen verallgemeinern. Wir untersuchen Transformationsverhalten bezüglich der Gruppen $\Gamma_0(N)$ mit Nebentyp.

5.1. Hecke-Spitzenformen

Wir versuchen, die Arithmetik von Modulformkoeffizienten auf die Wirkung der Heckeoperatoren zurückzuführen. Am übersichtlichsten ist das bei Hecke-Eigenformen.

Wir benötigen folgende HECKEOPERATOREN [**Li**, 1. Basic Lemmas]: Sei p eine Primzahl, $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} U_t : M_k^!(N, \chi) &\rightarrow \begin{cases} M_k^!(N, \chi), & t \mid N, \\ M_k^!(tN, \mathbf{1} \cdot \chi), & t \nmid N, \end{cases} & f(z) = \sum_i c_i q^i \mapsto \sum_i c_{ti} q^i, \\ V_t : M_k^!(N, \chi) &\rightarrow M_k^!(tN, \mathbf{1} \cdot \chi), & f(z) = \sum_i c_i q^i \mapsto \sum_i c_i q^{ti}, \\ T_p^{\chi, k} : M_k^!(N, \chi) &\rightarrow M_k^!(N, \chi), T_p := T_p^{\chi, k}, & f(z) = \sum_i c_i q^i \mapsto \sum_i \left(c_{pi} + \chi(p) p^{k-1} c_{\frac{i}{p}} \right) q^i \text{ mit } c_{\frac{i}{p}} := 0 \text{ für } p \nmid i, \end{aligned}$$

Die Koeffizienten von Hecke-Eigenformen erfüllen die Rekursion:

$$(5.1.1) \quad \tau_i(p^{m+1}) = \tau_i(p) \tau_i(p^m) - \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{m-1}).$$

Die Involution

$$K : M_k^!(N, \chi) \rightarrow M_k^!(N, \overline{\chi}), \quad f(z) \mapsto \overline{f(-\bar{z})}$$

hat auf Neuformen aus $S_k(N, \chi)$ eine ähnliche Wirkung wie die Fricke-Involution $\tau_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}$, vgl. [**Ogg 2**, Lemma 7]. Der Operator K vertauscht mit D^{k-1} und $K T_p^{\chi, k} = T_p^{\overline{\chi}, k} K$. Um Teilbarkeit der Fourierkoeffizienten zu untersuchen, beschäftigen wir uns mit Hecke-Eigenformen. Die Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ besitzen nach [**Stein**, Theorem 9.4] eine Basis von simultanen Eigenformen aller Heckeoperatoren T_p , $p \nmid N$.

$$(5.1.2) \quad S_k(N, \chi) = \bigoplus_{\substack{m \\ \text{cond}(\chi) \mid m \mid N}} \bigoplus_{t \mid \frac{N}{m}} \left\{ V_t f_i^{\{m\}} \mid i = 1, \dots, s \right\} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle, \quad s = \dim S_k(m, \chi_m),$$

dabei sind $f_i^{\{m\}}(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_i^{\{m\}}(j) q^j \in S_k^{\text{neu}}(m, \chi_m)$ Neuformen der Stufe m , normalisiert durch $\tau_i^{\{m\}}(1) = 1$, χ

wird von einem Charakter $\chi_m \pmod{m}$ induziert. Die Heckeoperatoren (genauer $\sqrt{\chi(p)} \cdot T_p$) sind hermitesch, [**Iwaniec 3**, Theorem 6.20]:

$$(5.1.3) \quad p \nmid N : \quad \langle T_p f, g \rangle = \chi(p) \langle f, T_p g \rangle.$$

Das führt zu folgender Relation der T_p -Eigenwerte:

$$(5.1.4) \quad p \nmid N : \quad \tau_i(p) = \chi(p) \overline{\tau_i(p)} \text{ bzw. } \tau_i(p) \in \sqrt{\chi(p)} \mathbb{R}.$$

Induktiv ergibt sich:

$$\forall m \in \mathbb{N} : \quad \tau_i(p^m) = \chi(p)^m \overline{\tau_i(p^m)}.$$

Definition 5.1.1. [**Ribet**] Angenommen, ψ ist nicht der triviale Charakter. Eine Neuform heißt CM-Form, falls für ihre Fourierkoeffizienten gilt:

$$c(p) = \psi(p) \overline{c(p)}$$

für alle Primzahlen p einer Menge der Dichte 1.

Nach der Ramanujan-Petersson Vermutung, bewiesen durch [**Deligne**], gilt:

$$(5.1.5) \quad \forall p \nmid N : \quad |\tau_i(p)| \leq 2p^{\frac{k-1}{2}}.$$

Falls $p \mid N$, bezeichnen wir die Eigenwerte des Heckeoperators $T_p = U_p$ auch mit

$$(5.1.6) \quad v_i = v_i(p) = \tau_i(p).$$

In diesem Fall ist

$$(5.1.7) \quad |v_i| = 0 \vee p^{\frac{k-2}{2}} \vee p^{\frac{k-1}{2}}, \quad [\text{Atkin Li, Theorem 2.1}].$$

Jetzt untersuchen wir die Wirkung der Heckeoperatoren auf Spitzen $\kappa \neq \infty$:

Hilfssatz 5.1.2. Sei $N \in \mathbb{N}$, χ ein Charakter \pmod{N} , $p \nmid N$ eine Primzahl, $f(z) = \sum_{n \gg -\infty} c_n e^{2\pi i n z} \in M_{k, \infty}^!(N, \chi)$ eine schwach-holomorphe Modulform mit Hauptteil nur in der Spitze ∞ . Falls $\text{ggT}(N, n) = 1$, kann $T_n f$ keinen Hauptteil in anderen Spitzen als ∞ haben, d.h.

$$T_n f \in M_{k, \infty}^!(N, \chi).$$

BEWEIS. Der Heckeoperator bewahrt Holomorphie in \mathcal{H} und Transformationsverhalten bezüglich $\Gamma_0(N)$. Spitzen äquivalent zu ∞ sind von der Form $\frac{a}{b}$ mit $\text{ggT}(a, b) = 1, N \mid b$. Wegen

$$T_n f \doteq \sum_{ad=n} f \left| \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \right. = \sum_{ad=n} d^{-k} f \left(\frac{a^2 z + ab}{n} \right)$$

und

$$z \sim \infty \iff \frac{a^2 z + ab}{n} \sim \infty$$

trägt der Hauptteil von f in der Spitze ∞ einen Hauptteil von $T_n f$ nur in der Spitze ∞ bei. □

Definition 5.1.3. Für die Teilbarkeitseigenschaften der Fourierkoeffizienten der Modulformen aus $M_k^!(N, \chi)$ spielen die p -Ordnungen der Koeffizienten a_j des Polynoms

$$p_{T_m}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \tau_i(m)) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n, \quad n = \#\{\text{verschiedene } T_m\text{-Eigenwerte auf } S_k(N, \chi)\}$$

des Heckeoperators T_m auf den Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ eine Rolle.

Die *Newtonsteigungen* des Newton-Polygons (Anhang A.4) zu p_{T_p} seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$.

(Falls $\tau_i(p) = 0$, ist $\tau_i(p^{m+1}) = 0, \tau_i(p^{2m}) = (-\chi(p)p^{k-1})^m$, setze $\alpha_i := \frac{k-1}{2}$)

- Wir bezeichnen p_{T_m} als das *Heckepolynom*¹ zu T_m .
- Der p -Teil einer Modulform sind die $\dots, -p^2, -p, -1, 1, p, p^2, \dots$ -ten Fourierkoeffizienten.
- Im ganzen Kapitel sei $s := \dim S_k(N, \chi), n := \#\{\text{verschiedene } T_p\text{-Eigenwerte auf } S_k(N, \chi)\}$.
- Sei \mathbb{K}_f der Körper, der die Fourierkoeffizienten² der Heckeform f enthält, mit Ring der ganzen Zahlen \mathcal{O}_f .
- Mit \mathbb{K}_p meinen wir die Vervollständigung des Körpers \mathbb{K} bezüglich eines Primideals $\mathfrak{p} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ über p .
- Sei $M = \mathbb{Q}(\chi(2), \chi(3), \chi(4), \dots)$.
- Sei $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$ der Körper, der alle Fourierkoeffizienten aller Neuformen aus $S_k(m, \chi_m), \text{cond}(\chi) \mid m \mid N$ enthält, mit Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$.
- Sei $p \nmid N$. Wir definieren Räume von Modulformen, die auf dem p -Teil Null sind:

$$(5.1.8) \quad S_k^0 := \left\{ f(z) = \sum_j c_j q^j \in S_k(N, \chi) \mid \forall j \in \mathbb{N}_0 : c_j \text{ algebraisch, } c_{p^j} = 0 \right\}.$$

Dieser Raum ist genau dann nicht leer, falls es mindestens zwei Neuformen mit gleichem Eigenwert gibt, z.B. falls in der Basis (5.1.2) Altformen auftreten. Er enthält T_p -Eigenformen, aber keine simultanen Eigenformen (Neuformen).

Unsere Argumentation benutzt (hauptsächlich) Eigenschaften des p -Teils, d.h. der p^m -ten Fourierkoeffizienten von Modulformen ($m \in \mathbb{N}_0$). Wir betrachten Teilbarkeit von Modulformkoeffizienten oft im vervollständigten diskreten Bewertungsring \mathbb{K}_p . Komplexe Konjugation ist dann entsprechend einer fest gewählten Einbettung von \mathbb{C} in \mathbb{C}_p zu verstehen. Für eine Primzahl p fixieren wir einen algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}_p$ von \mathbb{Q}_p und eine Einbettung $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Sei \mathbb{C}_p die p -adische Vervollständigung von $\overline{\mathbb{Q}}_p$ und ord_p die normalisierte fortgesetzte p -adische Bewertung. Im Folgenden verstehen wir unter Fourierkoeffizienten meist Fourierkoeffizienten in der Spitze ∞ , unter dem Hauptteil einer Funktion den Hauptteil in der Spitze ∞ .

Es gibt konkrete Vermutungen über die p -Ordnungen der Koeffizienten a_j des Heckepolynoms p_{T_p} , vgl. [Buzzard Calegari, Conjecture 1]. Eisensteinreihen treten in Familien auf: $E_{(p-1)p^r} \equiv 1 \pmod{p^{r+1}}$, vgl. [Serre 1]. Für die Definition einer p -adischen Familie von Modulformen vgl. [Kassaei]. Etwas vereinfacht gesagt geht es darum, dass es zu jeder Modulform vom Gewicht k_1 eine von grösserem Gewicht $k_2 \equiv k_1 \pmod{(p-1)p^m}$ gibt, deren Koeffizienten kongruent bzgl. einer hohen p -Potenz sind. [Hida 1] hat das für „gewöhnliche“ Neuformen $f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_j(n) q^n$ mit $\text{ggT}(p, \tau_j(p)) = 1$ in L_p gezeigt. [Coleman 2] hat das verallgemeinert: Alle Neuformen treten in Familien auf; man muss allerdings noch die Eigenformen zu den Stufen $\Gamma(Np^m), m = 1, 2, \dots$ hinzunehmen. Der p -adische Grenzwert ist eine sogenannte overkonvergente Modulform im Sinne von [Katz], vgl.

¹Das ist hier nicht immer das charakteristische Polynom des Heckeoperators, das oft mehrfache Nullstellen hat.

²Dann enthält \mathbb{K}_f auch die Werte von χ .

Abschnitt C.4. Die Hecke-Eigenwerte einer Familie konvergieren in der p -adischen Metrik. Klassisch bedeutet das, dass die ersten m Newtonsteigungen (ein $m \in \mathbb{N}$) periodisch im Gewicht sind, [Gouvêa 2]. Für die Primzahl 2 ist die Periode der minimalen Newtonsteigung α_1 explizit bekannt:

Beispiele. [Emerton, Theorem 1.1] Sei $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $p = 2$, $k \geq 12$ und $k \neq 14$.

- (1) Für $k \equiv 0 \pmod{4}$ ist $\alpha_1 = 3$.
- (2) Für $k \equiv 2 \pmod{8}$ ist $\alpha_1 = 4$.
- (3) Für $k \equiv 6 \pmod{16}$ ist $\alpha_1 = 5$.
- (4) Für $k \equiv 14 \pmod{16}$ ist $\alpha_1 = \alpha_2 = 6$.

In den Fällen (1), (2) und (3) ist $\alpha_2 > \alpha_1$.

[Co Ste Tei] Sei $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $p = 3$, $k \geq 12$, $k \not\equiv 10, 14 \pmod{18}$.

- (1) Für $k \equiv 0 \pmod{6}$ ist $\alpha_1 = 2$.
- (2) Sonst ist $\alpha_1 = 3$.

Definition 5.1.4. Sei $k \in \mathbb{N}$, p eine Primzahl, $\tau_1(p), \dots, \tau_n(p)$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte des Heckeoperators T_p auf $S_k(N, \chi)$ und $f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_i(n) q^n$ die Neufolgen von $S_k(N, \chi)$:

Gewöhnliche Primzahlen p erfüllen: $\forall i : \mathrm{ord}_p \tau_i(p) = 0$.

Ungewöhnliche Primzahlen erfüllen: $\forall i : \mathrm{ord}_p \tau_i(p) > 0$.

Meistens benötigen wir, dass p ungewöhnlich³ ist. Welche Primzahlen sind *gewöhnlich*, *ungewöhnlich*? Für Modulformen zur Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird vermutet, dass es unendlich viele ungewöhnliche Primzahlen (und damit Ramanujan-Kongruenzen) gibt, die eine $\log \log$ -Verteilung haben. Gewöhnliche Primzahlen sind i.a. $\geq k - 1$:

Satz 5.1.5. Sei $X_0(N)$ vom Geschlecht Null, $N \neq 2, 3$, sei $p \geq 5$ eine gewöhnliche Primzahl für $S_k(\Gamma_0(N))$, $p \nmid N$. Dann ist $p \geq k - 1$ oder $N = 1, p = 11, k = 22$.

BEWEIS. Angenommen, p ist gewöhnlich und $p \leq k - 2$. Betrachte U_p auf $\widetilde{M}_k(\Gamma_0(N))$, dem Raum der mod p reduzierten Formen aus $M_k(\Gamma_0(N))$. Der lineare Operator $U_p \equiv T_p$ wird bezüglich einer Basis durch eine Matrix repräsentiert, deren Determinante bis auf das Vorzeichen gleich dem Produkt der Eigenwerte, also nach Voraussetzung eine Einheit ist. Daher ist diese Matrix und die Abbildung U_p auf $\widetilde{M}_k(\Gamma_0(N))$ invertierbar. Dazu äquivalent ist, dass $\ker U_p$ auf diesen Räumen trivial ist. Da $S_k(\Gamma_0(N))$ nach [Choi 1] eine Basis der Form

$$\begin{aligned} & q^s + O(q^{s+1}), \\ & q^{s-1} + O(q^{s+1}), \\ & \vdots \\ & q + O(q^{s+1}) \end{aligned}$$

mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten hat, sind die Dimensionen der mod p reduzierten und nicht reduzierten Modulformen gleich. Sei $k = Ap + B$, $A \geq 1$, $2 \leq B \leq p + 1$. Nach [Dewar 2, (1.1)] ist

$$\dim \ker U_p \big|_{\widetilde{M}_k(\Gamma_0(N))} = \dim M_k(\Gamma_0(N)) - \dim M_{A+B}(\Gamma_0(N)).$$

Sei $p \geq 13$. Wegen $k - A - B = A(p - 1) = 12 \vee \geq 16$ ist für $N = 1$

$$\dim \ker U_p \big|_{\widetilde{M}_k(\Gamma_0(N))} > 0.$$

Das gilt erst recht für $N > 1$, da die Dimensionszahlen dann stärker mit dem Gewicht anwachsen. Das bedeutet, dass die Annahme falsch war. Für $p = 5$ und $p = 7$ ist ebenfalls $\ker U_p \neq 0$, für $p = 11$ gibt es eine Ausnahme ($N = 1, k = 22$), wie man sich durch ein leichtes Computerprogramm überzeugt. \square

³engl.: ordinary vs. non-ordinary von 'ordinary vs. supersingular reduction' elliptischer Kurven (Gewicht 2), ACHTUNG: Die Primzahl $p = 13$ ist für Gewicht $k = 24$ weder *gewöhnlich* noch *ungewöhnlich*, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1$.

Größere Primzahlen sind in der Regel *gewöhnlich*. Dann gibt es bis auf vereinzelte Ausnahmen keine Ramanujan-Kongruenzen. Für $S_{12}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ gibt es folgende *ungewöhnliche* Primzahlen: 2, 3, 5, 7, 2411, 7758337633, [Ly Ro]. Die meisten Arbeiten zum Thema Kongruenzen von Hecke-Polynomen beschäftigen sich mit Kongruenzen von $\tau_i(p) \bmod q$ für verschiedene Primzahlen p und q , z.B. im Zusammenhang mit Galoisdarstellungen, s. [Serre 1, Serre 2]. In diesem Kapitel wird versucht, etwas über Kongruenzen zur gleichen Primzahl auszusagen.

Satz 5.1.6. *Angenommen, $p \nmid N$. Die p -Teile aller Modulformen $S_k(N, \chi)$ haben eine n -dimensionale Basis von Neuformen $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ (beliebiger Stufe $m_i \mid N$), $n =$ Anzahl verschiedener T_p -Eigenwerte. Gilt zusätzlich in der Deligne-Abschätzung (5.1.5) echte Ungleichheit, dann gibt es U_p -Eigenformen in $S_k(pN, \mathbf{1} \cdot \chi)$, die den p -Teil von $S_k(N, \chi)$ aufspannen: zu allen Neuformen $f_i \in S_k(m, \chi_m)$ die Altformen $f_i - x V_p f_i$, wobei $x^2 - \tau_i(p)x + \chi_m(p)p^{k-1} = 0$. Falls $\tau_i(p) = \pm 2\sqrt{\chi_m(p)p^{\frac{k-1}{2}}}$, so ist $\tau_i(p^m) = (m+1)\left(\frac{\tau_i(p)}{2}\right)^m$ und der U_p -Operator ist bezüglich der Basis $\left\langle f_i - \frac{\tau_i(p)}{2}V_p f_i, f_i \right\rangle$ in Jordan-Normalform.*

BEWEIS. Seien $f_i, i = 1, \dots, n$ eine maximale Anzahl von Neuformen der Basis (5.1.2) von $S_k(N, \chi)$ mit paarweise verschiedenen T_p -Eigenwerten $\tau_i(p)$. Altformen aus der Basis (5.1.2) verschwinden auf dem p -Teil: $V_t f_i \in S_k^0$. Offensichtlich bilden die Vektoren

$$(1, \tau_i(p), \tau_i(p^2), \tau_i(p^3), \dots), \quad i = 1, \dots, n,$$

eine Basis der p -Teile von $S_k(N, \chi)$. Sei

$$f_i(z) = q + \tau_i(2)q^2 + \dots + \tau_i(p)q^p + \dots \in S_k(m, \chi_m) \subset S_k(N, \chi)$$

eine Neuform, d.h.

$$T_p f_i(z) = \tau_i(p) f_i(z).$$

Nach Definition von T_p und U_p ist

$$\begin{aligned} U_p f_i(z) &= \tau_i(p) f_i(z) - \chi_m(p) p^{k-1} f_i(pz), \\ U_p f_i(pz) &= f_i(z). \end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom der Matrix $\begin{pmatrix} \tau_i(p) & -\chi_m(p)p^{k-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$X^2 - \tau_i(p)X + \chi_m(p)p^{k-1} = 0.$$

Der Operator U_p hat die Eigenwerte

$$v_i, v_i^c = \frac{\tau_i(p) \pm i\sqrt{4\chi_m(p)p^{k-1} - \tau_i(p)^2}}{2}$$

vom Betrag $p^{\frac{k-1}{2}}$. Nehmen wir an, dass in der [Deligne]-Abschätzung echte Ungleichheit gilt:

$$|\tau_i(p)| < 2p^{\frac{k-1}{2}}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\tau_i(p) \neq \pm 2\sqrt{\chi_m(p)p^{\frac{k-1}{2}}}, \text{ vgl. (5.1.4) und [Choie Kohnen].}$$

Die Neuform f_i spaltet in $S_k(pN, \mathbf{1}_p \cdot \chi)$ in zwei Alt-Eigenformen auf:

$$(5.1.9) \quad \begin{aligned} \Upsilon_i(z) &= f_i(z) - v_i^c f_i(pz) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(i) q^i \text{ mit } p\text{-Teil } v_i(p^m) = v_i^m, \\ \Upsilon_i^c(z) &= f_i(z) - v_i f_i(pz) \text{ mit } p\text{-Teil } (v_i^c)^m. \end{aligned}$$

Umgekehrt ist

$$f_i(z) = \frac{v_i \Upsilon_i(z) - v_i^c \Upsilon_i^c(z)}{v_i - v_i^c}.$$

Die zwei U_p -Eigenformen haben einen p -Teil mit Newtonsteigungen $\min(\alpha_1, \frac{k-1}{2})$ und $\max(k-1-\alpha_1, \frac{k-1}{2})$. \square

Wir benötigen auch die Eigenform $K(f) \in S_k(N, \overline{\chi})$ und die zugehörigen $K(\Upsilon_i), K(\Upsilon_i^c) \in S_k(pN, \overline{\chi} \cdot \mathbf{1}_p)$. Für ihre Eigenwerte gilt:

$$(5.1.10) \quad \boxed{\overline{v}_i = \overline{\chi}(p)v_i^c},$$

wie eine Argumentüberlegung zeigt. Falls die $\tau_i(p)$ paarweise verschieden und $\neq \pm 2\sqrt{\chi(p)}p^{\frac{k-1}{2}}$, sind auch die U_p -Eigenwerte v_i, v_i^c paarweise verschieden.

Definition 5.1.7. Sei p eine feste Primzahl, $k \in \mathbb{N}, p \nmid u, f(z) = \sum_{n \gg -\infty} c_n q^n \in M_k^!(N, \chi) \cap \overline{\mathbb{Q}}\{q\}$ schwach-holomorph. Die Modulform f heißt

- *mindestens α_i -arithmetisch*, falls es ein $\lambda \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\forall m \gg 1 : \lambda \cdot c_{p^m} \equiv 0 \pmod{p^{m\alpha_i}},$$

- *α_i -arithmetisch*, falls f mindestens α_i -arithmetisch, aber nicht mindestens β -arithmetisch für ein $\beta > \alpha$ ist;

Hilfssatz 5.1.8 (RAMANUJAN-KONGRUENZENZEN FÜR NEUFORMEN). Sei $N \in \mathbb{N}, p$ eine Primzahl, $f \in S_k(N, \chi)$ eine Neuform zum Eigenwert $\tau_j(p)$. Sei zunächst $p \nmid N$:

Für $\alpha_j = \text{ord}_p \tau_j(p) \leq \frac{k-1}{2}, \tau_j(p) \neq 0, \pm 2\sqrt{\chi(p)}p^{\frac{k-1}{2}}$, gilt:

$$\text{ord}_p \tau_j(p^m) = m\alpha_j.$$

Falls $\tau_j(p) = 0$ gilt $\text{ord}_p \tau_j(p^m) = m(k-1)$. Setze $\alpha_j := \frac{k-1}{2}$. Falls $\text{ord}_p \tau_j(p) \geq \frac{k-1}{2}$, ist f $\frac{k-1}{2}$ -arithmetisch. Falls $p \mid N$, ist $\tau_j(p^m) = v_j^m$ und die Teilbarkeit klar.

BEWEIS. Wählt man $\Upsilon_j(z) := f_j(z) - v_j^c f_j(pz) \in S_k(Np, \chi \cdot \mathbf{1}_p)$, falls v_j, v_j^c Lösungen von

$$X^2 - \tau_j X + \chi(p)p^{k-1} = 0$$

sind, so ist der p^m -te Fourierkoeffizient von Υ_j einfach v_j^m . Mit dem Satz von Vieta folgt unter der Voraussetzung $\alpha_j \leq \frac{k-1}{2}$:

$$\text{ord}_p(v_j) = \text{ord}_p(\tau_j) = \alpha_j \leq \text{ord}_p(v_j^c) = k-1-\alpha_j.$$

Aus der Definition der Υ_j folgt:

$$(5.1.11) \quad f_j = \frac{v_j \Upsilon_j - v_j^c \Upsilon_j^c}{v_j - v_j^c} \text{ bzw. } \tau_j(p^m) = \frac{v_j^{m+1} - (v_j^c)^{m+1}}{v_j - v_j^c}.$$

Falls $\tau_j(p) = \pm 2\sqrt{\chi(p)}p^{\frac{k-1}{2}}$, ist $v_j = v_j^c = \frac{\tau_j(p)}{2}$, der U_p -Operator läßt sich nicht diagonalisieren. Gleichung (5.1.11) nimmt die Form $\tau_j(p^m) = (m+1)v_j^m$ an. Daraus folgt die behauptete Arithmetik.

Dasselbe gilt für $v_j \neq v_j^c$ mit gleicher p -Ordnung $\frac{k-1}{2}$. Falls $\text{ord}_p \tau_j(p) \geq \frac{k-1}{2}$, ist $\text{ord}_p(v_j) = \text{ord}_p(v_j^c) = \frac{k-1}{2}$, vgl. auch [Gouvêa 2]. \square

Dieses Verhalten (Hilfssatz 5.1.8) bei Neuformen scheint eine generelle Eigenschaft von Modulformen zu sein.

Meistens nummerieren wir die U_p -Eigenwerte nach wachsenden Newtonsteigungen durch: Zu $v_1, \dots, v_n, v_n^c, \dots, v_1^c$ gehören die Newtonsteigungen

$$\min\left(\alpha_1, \frac{k-1}{2}\right) \leq \dots \leq \min\left(\alpha_n, \frac{k-1}{2}\right) \leq \max\left(k-1-\alpha_n, \frac{k-1}{2}\right) \leq \dots \leq \max\left(k-1-\alpha_1, \frac{k-1}{2}\right).$$

Folgerung 5.1.8.1. Gegeben eine Primzahl p . Eine Linearkombination⁴ von Neuformen $f_{i_j} \in S_k(m, \chi_m)$, $\text{cond}(\chi) \mid m \mid N$ paarweise verschiedener T_p -Eigenwerte der Newtonsteigungen $\alpha_{i_1} \leq \alpha_{i_2} \leq \dots$ ist $\min(\alpha_{i_1}, \frac{k-1}{2})$ -arithmetisch.

⁴mit Koeffizienten aus \mathbb{C}_p

BEWEIS. Falls $\tau_i \neq \pm 2\sqrt{\chi(p)}p^{\frac{k-1}{2}}$, ist $v_i \neq v_i^c$. Statt mit Stufe N -Neuformen f_j rechnen wir mit den entsprechenden Stufe pN -Altformen Υ_j, Υ_j^c . Modulformen verschiedener Newtonsteigungen machen sich keine Konkurrenz. Bleibt der Fall gleicher Newtonsteigungen: Sei $\alpha = \text{ord}_p(v_1) = \text{ord}_p(v_2), \beta \geq 0, c_1 \neq 0$. Wir rechnen in \mathbb{C}_p und zeigen, dass jede Linearkombination α -arithmetisch ist. Sei zunächst $\tau_i \neq \pm 2\sqrt{\chi(p)}p^{\frac{k-1}{2}}$:

$$\forall m : c_1 v_1^m + c_2 v_2^m \equiv 0 \pmod{p^{(\alpha+\beta)m+\gamma}},$$

oder, indem man durch $c_1 v_1^m$ dividiert:

$$\begin{aligned} 1 + d_1 \omega^m &\equiv 0 \pmod{p^{\beta m + \delta}}, & \omega := \frac{v_2}{v_1} \neq 1 \text{ eine Einheit, } d_1 = \frac{c_2}{c_1} \neq 0, \\ 1 + d_1 \omega^{m+1} &\equiv 0 \pmod{p^{\beta(m+1) + \delta}} \end{aligned}$$

bzw. nach Subtraktion

$$\begin{aligned} \forall m : d_1 (\omega - 1) \omega^m &\equiv 0 \pmod{p^{\beta m + \delta}} \\ \Rightarrow \beta &= 0. \end{aligned}$$

Das beweist die Aussage für zwei U_p -Eigenwerte gleicher Newtonsteigung. Für eine größere Anzahl verwende vollständige Induktion:

$$\begin{aligned} (5.1.12) \quad \forall m : c_1 v_1^m + \dots + c_s v_s^m &\equiv 0 \pmod{p^{(\alpha+\beta)m+\gamma}}, \text{ dividiert durch } c_1 v_1^m: \\ 1 + d_2 \omega_2^m + \dots + d_s \omega_s^m &\equiv 0 \pmod{p^{\beta m + \delta}}, & \omega_i := \frac{v_i}{v_1} \neq 1 \text{ Einheit, } d_i \neq 0 \text{ und wieder} \\ d_2 (\omega_2 - 1) \omega_2^m + \dots + d_s (\omega_s - 1) \omega_s^m &\equiv 0 \pmod{p^{\beta m + \delta}}, \end{aligned}$$

dieselbe Aussage wie (5.1.12) für $s \rightarrow s-1, \alpha = 0$. Mit $\tau_i(p^m) = \frac{v_i^{m+1} - (v_i^c)^{m+1}}{v_i - v_i^c}$ folgt die Beh.

Falls $\tau_i = \pm 2\sqrt{\chi(p)}p^{\frac{k-1}{2}}$, ist $v_i = v_i^c$ und es gibt nur eine Jordan-Normalform. Die Argumentation bleibt ähnlich: $(c_1 + c_2 m) v_i^m$ ist $\frac{k-1}{2}$ -arithmetisch.

$(c_1 + c_2 m) v_i^m + (d_1 + d_2 m) (-v_i)^m$ ist $\frac{k-1}{2}$ -arithmetisch, indem man gerade und ungerade Koeffizienten getrennt betrachtet.

Ähnlich geht $c_0 v_0^m + \dots + c_i v_i^m + (d_1 + d_2 m) v_{i+1}^m$ für gleiche Newtonsteigung $\frac{k-1}{2}$. \square

5.2. Galoistheorie

Spitzenformen aus $S_k(\Gamma_1(N))$ haben eine Basis mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, daher ist das charakteristische Polynom des Heckeoperators T_p auf $S_k(\Gamma_1(N))$ aus $\mathbb{Z}[x]$. Sei $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1$ der Körper, der alle Fourierkoeffizienten aller Neuformen aus $S_k(\Gamma_1(m)), m \mid N$ enthält. $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1/\mathbb{Q}$ ist eine Galoiserweiterung. Automorphismen σ von $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1/\mathbb{Q}$ wirken koeffizientenweise auf Neuformen $f(z) = \sum c_n q^n \in S_k(\Gamma_1(m)), m \mid N$:

$$f^\sigma := \sum c_n^\sigma q^n.$$

Solche Neuformen sind immer Neuformen aus $S_k(m, \chi_m)$ für einen Charakter $\chi \pmod{N}$, die unter σ in Neuformen aus $S_k(m, \chi_m^\sigma)$ übergehen ([Ribet]). Die Permutationen σ , die die Werte von χ invariant lassen, bilden eine Untergruppe von $\text{Gal}(\mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1/\mathbb{Q})$. Der entsprechende Fixkörper ist $M = \mathbb{Q}(\chi(1), \dots, \chi(N))$. Diese Untergruppe operiert auf $S_k(N, \chi) \cap \mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1[[q]]$: Sei $f \in S_k(N, \chi)$ und $\langle f_1, \dots, f_t \rangle$ alle Neuformen aus $S_k(N, \chi)$ beliebiger Stufe $m \mid N$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sigma : \quad f &\longrightarrow f^\sigma \\ \sum_{i=1}^t c_i f_i &\longrightarrow \sum_{i=1}^t c_i^\sigma f_i^\sigma, \end{aligned}$$

wobei die Neuformen permutiert werden. Daher ist $f^\sigma \in S_k(N, \chi), \mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1/M$ eine Galoiserweiterung. Das gilt auch für Eisensteinreihen und folglich für schwach-holomorphe Modulformen aus $M_k^!(N, \chi)$.

Satz 5.2.1 (Mittelung über Galoisconjugierte). *Sei $f \in M_k^!(N, \chi)$ eine schwach-holomorphe Modulform, deren Hauptteil (in ∞) algebraische Fourierkoeffizienten aus M (bzw. $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1$) hat. Dann gibt es eine schwach-holomorphe Modulform g , die den gleichen Hauptteil wie f hat, so dass alle Fourierkoeffizienten aus M (bzw. $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}^1$) sind.*

BEWEIS. Sei $m \in \mathbb{N}$ eine obere Schranke für die Polordnungen von f in allen Spitzen. Dann ist $\Delta^{m+1}f$ eine $\Gamma_1(N)$ -Spitzenform. Diese haben eine (endliche) Basis $\langle f_1, \dots, f_m \rangle$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, d.h.

$$\Delta^{m+1}f = c_1 f_1 + \dots + c_m f_m.$$

Indem man die ersten Fourierkoeffizienten in allen Spitzen vergleicht, ergeben sich die c_i als Lösungen eines linearen Gleichungssystems, nach Hilfssatz C.1.1.2 mit algebraischen Koeffizienten. Dieses hat nach Voraussetzung eine Lösung, könnte aber unter- oder überbestimmt sein. Man erhält ein reguläres Gleichungssystem, indem man genügend viele Gleichungen mit algebraischen Koeffizienten hinzufügt oder weglässt. Dieses hat nach der Cramerschen Regel eine algebraische Lösung $c_i, i = 1, \dots, m$. Das ergibt eine Modulform g_1 mit dem gleichen Hauptteil wie f und algebraischen Fourierkoeffizienten, z.B. aus der Galoiserweiterung $\mathbb{K}/\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$. Sei $G_1 = \text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{K}_{\text{Hecke}})$.

Dann hat $g_2 = \frac{1}{\#G_1} \sum_{\sigma \in G_1} g_1^\sigma$ Fourierkoeffizienten in $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$. Falls der Hauptteil von f aus $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$ kommt, sind wir fertig. Sonst sei $G_2 = \text{Gal}(\mathbb{K}_{\text{Hecke}}/M)$, und $g = \frac{1}{\#G_2} \sum_{\sigma \in G_2} g_2^\sigma$ hat Fourierkoeffizienten in M . \square

Unter *galoiskonjugiert* verstehen wir im folgenden meist konjugiert bezüglich $\text{Gal}(\mathbb{K}_{\text{Hecke}}/M)$.

5.3. Schwache Hecke-Eigenformen

Die Teilbarkeitseigenschaften des p -Teils der schwach-holomorphen Modulformen sind ganz ähnlich wie bei den Spitzenformen. Es gibt eine Analogie zur Hecke-theorie. Die p -Ordnungen des $1, p, p^2, \dots$ -ten Fourierkoeffizienten ergeben schließlich eine arithmetische Folge. Das ist die typische Eigenschaft von Hecke-Eigenformen, vgl. Hilfssatz 5.1.8. [Guerzhoy 5] hat schwach-holomorphe Modulformen eingeführt, die sich ähnlich wie Hecke-Spitzenformen verhalten. Wir präzisieren einige Begriffe:

Definition 5.3.1. Gegeben eine Primzahl $p, k, N \in \mathbb{N}, k \geq 2$ und χ ein Dirichletcharakter mod N . Eine *schwache Hecke-Eigenform*⁵ zum Eigenwert $\tau_i(p)$ auf der Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit Nebentyp χ ist eine schwach-holomorphe Modulform $f' \in S_k^!(N, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten, so dass

$$(5.3.1) \quad \exists d \in M_{2-k}^!(N, \chi), d \neq 0 : \quad T_p f' = \tau_i(p) f' + D^{k-1} d.$$

Wir bezeichnen d als *Heckedefekt* für f' . Er hängt noch von der Primzahl p ab.

Zu jeder Neuform f_i aus $S_k(N, \chi)$ mit Hecke-Eigenwerten $\tau_i(m)$ bezeichnen wir mit *Hecke-Eigenraum* E_i alle Modulformen $f' \in S_k^!(N, \chi)$, die (5.3.1) $\forall p \nmid N$ erfüllen.

Dadurch werden schwache Hecke-Eigenformen zu einem gegebenen Eigenwert nicht eindeutig festgelegt. Man kann z.B. eine Spitzenform mit T_p -Eigenwert $\tau_i(p)$ oder eine beliebige schwach-holomorphe Modulform aus $D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten dazu addieren.

Bemerkung. Schwach-holomorphe Modulformen aus $D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$ sind *triviale* schwache Hecke-Eigenformen zu jedem beliebigen Hecke-Eigenwert.

Es gibt folgende implizite Charakterisierung:

Hilfssatz 5.3.2. Gegeben eine Primzahl $p, N \in \mathbb{N}$ und χ ein Dirichletcharakter mod N . Dann sind äquivalent:

- f' ist eine schwache Hecke-Eigenform zum T_p -Eigenwert $\tau_i(p)$.
- Es gibt eine harmonische schwache Maaßform $F \in \widehat{S}_{2-k}(N, \chi)$ und T_p -Eigenformen $f_1, f_2 \in S_k(N, \chi)$ zum gleichen Eigenwert $\tau_i(p)$ mit

$$\begin{aligned} D^{k-1}F - f' &\doteq f_1, \\ \xi_{2-k}F &\doteq K(f_2), \quad (\doteq \dots \text{proportional}), \\ f' &\text{ hat algebraische Fourierkoeffizienten.} \end{aligned}$$

Wir sagen, f' ist dual zu f_2 , falls $\xi_{2-k}F \neq 0$.

⁵genauer : Eigenform des Heckeoperators T_p , keine simultane Eigenform

BEWEIS. \Rightarrow : Sei $F \in \widehat{\mathcal{S}}_{2-k}(N, \chi)$ harmonische schwache Maaßform mit dem gleichen Hauptteil wie das Eichlerintegral \tilde{f}' , vgl. Satz C.3.3.1.3. Dann hat $D^{k-1}F - f'$ keinen Hauptteil und ist eine Spitzenform f_1 . Nach Hilfssatz C.3.6.2 ist $S_k^!(N, \chi) = D^{k-1}\mathcal{S}_{2-k}(N, \chi) \oplus S_k(N, \chi)$ eine direkte Summe, speziell $f' = D^{k-1}F + s$, $s \in S_k(N, \chi)$. Der Operator $T_p - \tau_i(p) \text{Id}$ lässt diese drei Räume invariant. Nun ist $T_p f' - \tau_i(p) f' \in D^{k-1}\mathcal{S}_{2-k}(N, \chi)$. Der direkte Summand in $S_k(N, \chi)$ ist also Null, d.h. $T_p f_1 = \tau_i(p) f_1$ und

$$T_p f' - \tau_i(p) f' = T_p D^{k-1}F - \tau_i(p) D^{k-1}F = D^{k-1}d.$$

Wegen der Injektivität von D^{k-1} ist $p^{k-1}T_p F - \tau_i(p)F = d$, d.h. der nicht-holomorphe Anteil von F wird durch $T_p - p^{1-k}\tau_i(p) \text{Id}$ gelöscht. Er muss proportional zu einem modifizierten Eichlerintegral \tilde{f}_2 sein, f_2 eine T_p -Eigenform zum Eigenwert $\tau_i(p)$ und daher ein Urbild von $K(f_2)$ unter ξ_{2-k} . \square

Die entscheidende Eigenschaft von NeufORMEN ist, dass sie Eigenformen aller Heckeoperatoren T_n , $n \in \mathbb{N}$ sind.

Definition 5.3.3. Eine *simultane schwache Hecke-Eigenform* f' ist eine schwache Hecke-Eigenform, so dass die Heckerelation (5.3.1) für alle Primzahlen $p \nmid N$ gilt.

Eine *schwache NeufORMEN* $f' \in S_k^!(N, \chi)$ ist eine simultane schwache Hecke-Eigenform, so dass die Heckerelation (5.3.1) für alle Primzahlen p gilt. Wir fordern zusätzlich, dass die Fourierkoeffizienten von f' aus \mathbb{K}_{f_2} kommen sollen. Für eine schwache NeufORMEN f' ist f_2 eine NeufORMEN.

Wir dehnen den Begriff *dual* auf Linearkombinationen von schwachen Hecke-Eigenformen aus:

Falls $f' = \sum f'_i + D^{k-1}g$ mit schwachen Hecke-Eigenformen f'_i zum T_p -Eigenwert $\tau_i(p)$ und harmonischen schwachen Maaßformen F_i entsprechend Hilfssatz 5.3.2, so heißt f' *dual* zu $K(\xi_{2-k}(\sum F_i))$.

Diese Definition läßt noch sehr viel Spielraum, den wir in den Anwendungen auch ausschöpfen wollen.

Hilfssatz 5.3.4. Für eine schwach-holomorphe Modulform f' aus einem Hecke-Eigenraum dual zu einer Spitzenform $f \in S_k(N, \chi)$ aus demselben Eigenraum, F wie in Hilfssatz 5.3.2 und $\{\cdot, \cdot\}$ aus Definition C.1.2.1 ist

$$\{K(f), F\} \text{ algebraisch und } \neq 0.$$

BEWEIS. Mit f' hat auch $f'|\gamma$ algebraische Fourierkoeffizienten für alle $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, [Stein, Beweis zu Theorem 9.18, Case 2]. Das sind (höchstens) $[\text{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma(N)]$ verschiedene Entwicklungen von $f' = D^{k-1}F - cf_i$ in den Spitzen des Fundamentalbereichs, die sich zu einer vektorwertigen $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Modulform zusammenfügen lassen. Das gleiche gilt für die Hauptteile von $(F - cf_i)|\gamma$. Nach [Bruinier Funke 2, Proposition 3.5] ist $\{K(f), F\}$ eine ganzzahlige Linearkombination der Fourierkoeffizienten der Hauptteile der einzelnen Vektorkomponenten und daher algebraisch. Nach Hilfssatz 5.3.2 ist

$$\{K(f), F\} = \langle K(f), c \cdot K(f) \rangle = \bar{c} \|K(f)\|^2 \neq 0 \text{ wegen } c \neq 0.$$

\square

Beispiele. Falls F „gut“ (im Sinne von [Guer Kent Ono]) für die NeufORMEN f ist, gilt

$$\{K(f), F\} = 1.$$

Bemerkung. Für CM-Formen F und Primzahlen $p \nmid N$, die im CM-Körper total zerlegt sind, ist $F - p^{1-k}\nu_i^c(p) V_p F$ eine p -adische Modulform, [Bri Guer Ka, Theorem 1.2].

Aufgrund der Charakterisierung in Hilfssatz 5.3.2 ist klar, dass schwache Hecke-Eigenformen dann schwache NeufORMEN sind, falls der Hecke-Eigenwert $\tau_i(p)$ einfach ist.

Hilfssatz 5.3.5. Sei $N, u \in \mathbb{N}, p$ eine Primzahl und $f'_i(z) = \sum_{n \gg -\infty} \tau'_i(n) q^n$ eine schwache Hecke-Eigenform zum Eigenwert $\tau_i(p)$. Dann gibt es schwach-holomorphe Formen $d, d' \in M_{2-k}^!(N, \chi)$ mit algebraischen Koeffizienten, so dass

$$(5.3.2) \quad \begin{aligned} \tau'_i(p^{m+1}u) &= \tau_i(p) \tau'_i(p^m u) - \chi(p) p^{k-1} \tau'_i(p^{m-1}u) + (p^m u)^{k-1} d|_{p^m u}, \\ \tau'_i(p^m u) &= \tau_i(p^m) \tau'_i(u) + \sum_{t+l=m-1} \tau_i(p^t) (p^l u)^{k-1} d|_{p^l u}. \end{aligned}$$

Man kann den Hauptteil auf verschiedene Arten wählen. Für die Teilbarkeitseigenschaften der Fourierkoeffizienten der schwachen Hecke-Eigenformen spielt das keine große Rolle: Für zwei verschiedene simultane schwache Hecke-Eigenformen $f'_i, f''_i \in S_k^!(N, \chi)$ aus demselben Hecke-Eigenraum dual zu derselben Spitzenform f_i gilt

$$(5.3.3) \quad f'_i = \lambda f''_i + f_i + D^{k-1}(d'), \quad \lambda, \mu \text{ algebraisch,}$$

f_i aus demselben Hecke-Eigenraum mit algebraischen Fourierkoeffizienten.

BEWEIS. Gleichung (5.3.2) folgt (rekursiv) aus der Hecke-Relation (5.3.1).

Nach Hilfssatz 5.3.2 gibt es harmonische schwache Maaßformen $F_1, F_2 \in \widehat{S}_{2-k}(N, \chi)$ mit den gleichen Hauptteilen wie $\widetilde{f}'_i, \widetilde{f}''_i$, deren Schatten proportional sind. Dann hat $F_2 - \lambda F_1$ keinen Schatten und ist in $M_{2-k}^!(N, \chi)$, mit anderen Worten (Folgerung C.1.2.1.2)

$$\{K(f_i), F_2\} = \lambda \{K(f_i), F_1\}.$$

Wegen Hilfssatz 5.3.4 ist λ algebraisch, ebenso hat $\mu f_i + D^{k-1}d' \in S_k^!(N, \chi)$ algebraische Fourierkoeffizienten. Der Raum $M_k(N, \chi)$ hat eine Basis, so dass alle Fourierkoeffizienten algebraisch sind, daher auch $M_{2-k}^!(N, \chi)$. Es gibt eine algebraische Linearkombination dieser Basisfunktionen mit dem gleichen Hauptteil (in allen Spitzen) wie d' . Für negatives Gewicht ist das eindeutig. Daher hat d' algebraische Fourierkoeffizienten und μ ist algebraisch. \square

Folgerung 5.3.5.1 (Ramanujankongruenzen für schwache Neufornen). Sei $N \in \mathbb{N}$. Für eine schwache Hecke-Eigenform $f'_i \in S_k^!(N, \chi)$ zum Eigenwert $\tau_i(p)$ gilt:

$$\cup_p^m f'_i \equiv 0 \pmod{p^{m \cdot \min(\alpha_i, \frac{k-1}{2}) - A_p}} \text{ für ein } A_p \in \mathbb{Z}, \alpha_i = \text{ord}_p \tau_i(p).$$

Falls f'_i und die Heckedefekte für alle p ganzzahlige Koeffizienten haben, kann man $A_p = 0$ wählen.

BEWEIS. Sei p eine Primzahl. Die Nenner der Fourierkoeffizienten von f'_i und des Heckedefektes d sind nach Hilfssatz C.1.1.2 gleichmäßig beschränkt. Die Heckerelation (5.3.2) ergibt die Beh. \square

Hilfssatz 5.3.6. Sei f eine Neuforn der Stufe $m \mid N$ und $g \in S_k(N, \chi)$ eine simultane Hecke-Eigenform aus demselben Eigenraum wie f mit algebraischen Fourierkoeffizienten. Dann gilt:

$$g = \sum_{t \mid \frac{N}{m}} c_t V_t f \text{ mit } c_t \text{ algebraisch..}$$

BEWEIS. Bestimme die c_t rekursiv nach aufsteigendem Index. \square

Satz 5.3.7 (Altformen). 1) Sei $f' \in S_k^!(N, \chi)$ eine schwache Neuforn der Stufe $m \mid N$ dual zur Neuforn f und g' eine simultane schwache Hecke-Eigenform aus demselben Eigenraum wie f' . Dann gilt:

$$(5.3.4) \quad g' = \sum_{t \mid \frac{N}{m}} (c_t V_t f' + d_t V_t f) + D^{k-1}(g)$$

mit algebraischen c_t, d_t und $g \in M_{2-k}^!(N, \chi) \cap \overline{\mathbb{Q}}\{q\}$.

2) Falls zusätzlich $f', g' \in \mathbb{K}_f\{q\}$, so ist $c_t, d_t \in \mathbb{K}_f$.

3) Falls das Eichlerintegral \widetilde{g}' ganzzahlige Fourierkoeffizienten hat, gibt es eine schwache Neuforn dual zu f , die mindestens $(k-1)$ -arithmetisch ist.

BEWEIS. Seien F und G dual zu f bzw. g , d.h. $\xi_{2-k}(F) \doteq K(f)$ und $\xi_{2-k}(G)$ aus dem Hecke-Eigenraum von $K(f)$, d.h. nach Hilfssatz 5.3.6 von der Form $\sum_{t \mid \frac{N}{m}} c_t V_t K(f)$. Für die Linearkombination $\sum_{t \mid \frac{N}{m}} t^{k-1} c_t V_t F$ gilt:

$\xi_{2-g}(G) = \xi_{2-k} \left(\sum_{t \mid \frac{N}{m}} t^{k-1} c_t V_t F \right)$, d.h. $g' - \sum_{t \mid \frac{N}{m}} c_t V_t f' \in S_k^!(N, \chi)$. Eine zweite Möglichkeit besteht darin, die c_t als Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\forall t' \mid \frac{N}{m} : \left\{ V_{t'} f, g' - \sum_t c_t V_t f' \right\} = 0$$

zu bestimmen. Das hat offensichtlich eine algebraische Lösung. Der Hauptteil bestimmt g bis auf eine Spitzenform, die nach Definition 5.3.1 und Hilfssatz 5.3.6 von der Form $\sum_{t|\frac{N}{m}} d_t V_t f$ mit algebraischen d_t ist.

2) Annahme, $c_t, d_t \in \mathbb{K} \supset \mathbb{K}_f$. Wähle a so, dass $\mathbb{K}_f(a)$ der Galoisabschluß von \mathbb{K} ist. Die Aussage folgt durch Mittelbildung über die Galoisconjugierte $\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{K}_f(a)/\mathbb{K}_f)$. Dabei bleiben die Funktionen f' und g' invariant und $\frac{1}{\#\sigma} \sum_{\sigma} c_t \in \mathbb{K}_f$, ebenso für d_t . Da die Räume $\langle V_t f' \rangle, \langle V_t f \rangle$ und $D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$ disjunkt sind, folgt die Beh.

3) Sei t_{\min} das minimale $t \neq 0$ in der Zerlegung des Satzes, $p \nmid N$. Dann ist der p -Teil von $c_{t_{\min}} f' + d_{t_{\min}} f$ mindestens $(k-1)$ -arithmetisch, da die $t_{\min} \cdot p^m$ -ten Fourierkoeffizienten der übrigen Summanden $c_t V_t f' + d_t V_t f$, $t > t_{\min}$ Null sind. \square

Satz 5.3.8 (Summe von schwachen NeufORMEN). *Sei $\langle f_i \rangle$ die Basis (5.1.2) von $S_k(N, \chi)$.*

- Die Fourierkoeffizienten einer schwachen Hecke-Eigenform f'_i dual zur NeufORM f_i spannen einen Erweiterungskörper von \mathbb{K}_{f_i} auf.
- Es gibt untereinander galoiskonjugierte schwache Hecke-Eigenformen f'_i dual zu den f_i mit Hauptteil nur in der Spitze ∞ , Fourierkoeffizienten aus \mathcal{O}_{f_i} .
- Zu einer schwach-holomorphen Modulform $f' \in S_k^!(N, \chi) \setminus D^{k-1}M_{2-k}^!(N, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten gibt es eine Zerlegung

$$(5.3.5) \quad \boxed{f' = \sum_{\text{einige } i} c_i f'_i + D^{k-1}(g), \quad c_i \text{ algebraisch,}}$$

in schwache Hecke-Eigenformen f'_i dual zu den f_i und ein $g \in M_{2-k}^!(N, \chi)$, o.B.d.A. $c_i = 1$.

- Falls f' Fourierkoeffizienten in $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$ hat, kann man f'_i wie in Punkt 1 wählen und $c_i \in \mathbb{K}_{f_i}$. Dann hat g Fourierkoeffizienten in $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$.
- Falls f' Fourierkoeffizienten in M hat, kann man f'_i wie in Punkt 1 wählen und galoiskonjugierte $c_i \in \mathbb{K}_{\text{Hecke}}$. Dann hat g Fourierkoeffizienten in M .
- Falls das Eichlerintegral $\tilde{f}' \in \mathbb{M}_{2-k}^!(N, \chi)$ ganzalgebraische Fourierkoeffizienten hat, sind alle schwachen NeufORMEN f'_i der Zerlegung (5.3.5) mindestens $(k-1)$ -arithmetisch.

($A \cup B$ bezeichnet den Körper, der durch A und B erzeugt wird.)

BEWEIS. Sei $\mathbb{K}_{f'_i}$ der Koeffizientenkörper von f'_i . Die Galoisautomorphismen aus $\text{Gal}(\mathbb{K}_{f'_i}/M)$ permutieren die $\tau_i(p)$ nichttrivial für bestimmte Primzahlen p , daher (ihre Fortsetzungen) auch die f'_i , d.h. $\mathbb{K}_{f'_i}/M$ hat mindestens so viele Automorphismen wie \mathbb{K}_{f_i}/M und $\mathbb{K}_{f'_i} \supset \mathbb{K}_{f_i}$.

Zu jeder NeufORM $f_i \in S_k(m, \chi_m)$ gibt es eine harmonische schwache Maaßform F_i mit $\xi_{2-k} F_i \doteq K(f_i)$, die „gut“ für f_i ist. Die Modulform $D^{k-1}(\mathcal{F}_\alpha)$ mit $\mathcal{F}_\alpha = F - \alpha \tilde{f}_i$ aus [Guer Kent Ono, Theorem 1.1] hat algebraische Koeffizienten aus \mathbb{K}_{f_i} mit beschränkten Nennern (o.B.d.A. ganzalgebraisch), falls $F|_1 - \alpha$ algebraisch ist, d.h. $D^{k-1}(\mathcal{F}_{F|_1})$ ist eine schwache NeufORM aus $S_k(m, \chi_m)$ wie in der ersten Aussage des Satzes. Sei f' eine beliebige schwache Hecke-Eigenform (Alt- oder NeufORM) mit ganzalgebraischen Fourierkoeffizienten und

$\sum c_i f'_i$ eine algebraische Linearkombination dual zu derselben Spitzenform f wie f' . Dann ist $f' - \sum_{i=1}^s c_i f'_i \in$

$D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi)) + S_k(N, \chi)$. Daher gibt es zu jeder schwach-holomorphen Modulform f' eine Zerlegung

$f' = \sum_{i=1}^s (c_i f'_i + d_i f_i) + D^{k-1}(g)$ mit reellen c_i, d_i . Man kann wie in Satz 5.2.1 argumentieren, dass man wegen

endlicher Polordnung eine Linearkombination aus endlich vielen Basisfunktionen hat und die c_i als Lösungen eines linearen Gleichungssystems algebraisch sind. Mit f'_i ist auch $c_i f'_i + d_i f_i$ eine schwache Hecke-Eigenform dual zu f_i . Mittelt man in der Zerlegung $f' = \sum c_i f'_i + D^{k-1}g$, $c_i \in K$, über $\text{Gal}(\mathbb{K}/\mathbb{K}_{\text{Hecke}})$ und sind die Fourierkoeffizienten von f' aus $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$, so folgt: $c_i \in \mathbb{K}_{\text{Hecke}}$, f'_i und g haben Fourierkoeffizienten in $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$. Sind die Fourierkoeffizienten von f' sogar aus M , so mittelt man noch einmal über $\text{Gal}(\mathbb{K}_{\text{Hecke}}/M)$.

Es gibt Primzahlen $p_j \nmid N$, so dass $\prod_{j \neq i} (T_{p_j} - \tau_j(p_j)) f'$ Projektion auf den Eigenraum dual zu $\langle V_i f_i \rangle$ ist. Natürlich

hat $\tilde{f}'_i := \widetilde{T(i) f'} = \prod_{j \neq i} (p^{k-1} T_{p_j} - \tau_j(p_j)) \tilde{f}'$ ganzalgebraische Koeffizienten, falls das für \tilde{f}' zutrifft. Satz 5.3.7 3)

ergibt den letzten Punkt. \square

Folgerung 5.3.8.1. *Schwach-holomorphe Modulformen haben folgende Basen:*

$$\begin{aligned} S_k^!(N, \chi) &= \langle f'_1, f'_2, \dots, f'_s \rangle \oplus \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle \oplus D^{k-1} (M_{2-k}^!(N, \chi)), \\ M_k^!(N, \chi) &= S_k^!(N, \chi) \oplus \langle \text{Eisensteinreihen} \rangle; \end{aligned}$$

dabei sind f'_i vorgegebene simultane schwache Hecke-Eigenformen dual zu den f_i der Basis (5.1.2).

Für Modulformen aus $M_k^!(N, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten sind das algebraische Linearkombinationen.

Folgerung 5.3.8.2. *Falls der Heckedefekt zu einer Primzahl p Fourierkoeffizienten aus M hat, sind die Fourierkoeffizienten von f'_i aus \mathbb{K}_{f_i} . Die Umkehrung gilt im allgemeinen nicht.*

BEWEIS. Bei bekanntem Heckedefekt d lässt sich die schwache Hecke-Eigenform $f'_i = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n$ eindeutig aus

$$T_p f'_i - \tau_i(p) f'_i = D^{k-1} d$$

rekonstruieren, indem man rekursiv $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \dots$, jeweils aus $M[\tau_i(p)]$ bestimmt. Nach dem vorigen Satz sind die Fourierkoeffizienten mindestens aus \mathbb{K}_{f_i} , also $\mathbb{K}_{f_i} \subset M[\tau_i(p)] \subset \mathbb{K}_{f_i}$.

Sei umgekehrt z.B. $\dim S_k(1) = 2$ und $\tau_i(2), \tau_i(3) \notin \mathbb{Q}, H_1 = \frac{1}{q} + O(q) \in S_k^!(1)$. Dann sind

$$\begin{aligned} f'_1 &:= T_2 H_1 - \tau_2(2) H_1 = \frac{2^{k-1}}{q^2} - \frac{\tau_2(2)}{q} + O(q), \\ f'_2 &:= T_2 H_1 - \tau_1(2) H_1 = \frac{2^{k-1}}{q^2} - \frac{\tau_1(2)}{q} + O(q) \end{aligned}$$

schwache Hecke-Eigenformen, aber $T_3 f'_i - \tau_i(3) f'_i$ hat keine Fourierkoeffizienten in \mathbb{Q} , sondern in $\mathbb{Q}[\tau_i(3)]$. \square

Folgerung 5.3.8.3. *Für $X_0(N)$ vom Geschlecht Null gibt es zu jeder schwachen Hecke-Eigenform $f' \in S_k(N, \chi)$ ein Vielfaches cf' , sodass deren Heckedefekte d für alle Primzahlen p ganzzahlige Koeffizienten haben, d wie in (5.3.1).*

BEWEIS. Wir können o.B.d.A annehmen, dass \tilde{f}' einen Hauptteil in der Spitze ∞ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten hat und konstant in allen anderen Spitzen ist (bis auf eine schwach-holomorphe Modulform, deren Fourierkoeffizienten algebraisch mit beschränktem Nenner sind). Für alle Primzahlen $p \nmid N$ hat die schwach-holomorphe Modulform $d := p^{k-1} T_p \tilde{f}' - \tau(p) \tilde{f}' \in M_{2-k}^!(N, \chi)$ einen Hauptteil mit ganzzahligen Koeffizienten. Nach Satz C.1.1.3 hat d gleichmäßig beschränkte Nenner. \square

Mit Hilfe dieser Basis lassen sich Kongruenzen von Fourierkoeffizienten schwach-holomorpher Modulformen beweisen.

Folgerung 5.3.8.4 (schwache Multiplikativität). *Sei $\text{ggT}(m, u) = 1$. Für die Fourierkoeffizienten einer simultanen schwachen Hecke-Eigenform f' mit Eigenwerten $\tau_i(u)$ gibt es ein A_u mit*

$$(5.3.6) \quad \tau'_i(mu) \equiv \tau'_i(m) \tau_i(u) \pmod{\frac{m^{k-1}}{\text{ggT}(A_u, m^{k-1})}},$$

und speziell für eine Primzahl $p \nmid u$:

$$\tau'_i(p^m u) \equiv \tau'_i(p^m) \tau_i(u) \pmod{p^{m(k-1)-A_u}}.$$

Falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ist $A_u = A$ unabhängig von u .

BEWEIS. Sei zunächst f' eine Neuform und $F \in \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \chi)$ die harmonische schwache Maaßform entsprechend Hilfssatz 5.3.2. Der Operator $(u^{k-1} T_u - \tau_i(u) \cdot)$ löscht den nicht-holomorphen Anteil von F . Berechne den m -ten Fourierkoeffizienten in $T_u f' = \tau_i(u) f' + D^{k-1} d$. Die Fourierkoeffizienten von d sind algebraisch mit beschränktem Nenner, daher Gleichung (5.3.6), die auch für die Fourierkoeffizienten von $V_t f', t \mid N$ bzw. Linearkombinationen daraus gilt. Die Gleichmäßigkeit in u ergibt sich mit Folgerung 5.3.8.3. \square

Schwache Neuformen lassen sich explizit berechnen. Man kann sogar den Heckedefekt mit Hilfe des modularen Gitters, Abschnitt C.1.2 berechnen, ohne die schwache Neuform zu kennen:

Folgerung 5.3.8.5. Sei $p \nmid N$, $\tau_j(p)$ ein T_p -Eigenwert auf $S_k(N, \chi)$ und $H_m(z) = \frac{1}{q^m} + O(q) \in S_{k, \infty}^!(N, \chi) \cap M\{q\}$ die Basisfunktion aus Abschnitt C.1.1. Definiere

$$f_j^! := \chi(p)^{1-n} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n (T_p - \tau_i(p)) H_1 \in S_{k, \infty}^!(N, \chi) \cap \mathbb{K}_{f_j}\{q\}.$$

Dann ist $f_j^!$ eine schwache Hecke-Eigenform und, falls der T_p -Eigenwert $\tau_j(p)$ einfach ist, eine schwache Neuform dual zu f_j mit Heckedefekt $d = \chi(p) d_{p^n} \in M_{2-k}^!(N, \chi) \cap M\{q\}$, d_{p^n} aus Def. C.1.2.2. Der p -Teil von $f_j^!$ ist

$$(5.3.7) \quad \tau_j^!(p^i) = \sum_{l=0}^{i-1} p^{l(k-1)} d|_{p^l} \cdot \tau_j(p^{i-l-1}) \in \mathbb{K}_{f_j}.$$

Falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, haben alle Fourierkoeffizienten einen durch Disk (p_{T_p}) gleichmäßig beschränkten Nenner.

Die Konstruktion der $f_j^!$ läßt sich verallgemeinern, indem man H_1 durch irgendein $H \in S_k^!(N, \chi)$, das nicht aus $D^{k-1}M_{2-k}^!(N, \chi) + S_k(N, \chi)$ kommt, ersetzt.

BEWEIS. Wende den Operator $\chi(p)^{1-n} \prod_{\substack{i \\ i \neq j}} (T_p - \tau_i(p))$ auf die Zerlegung $H_1 = \sum_{i=1}^s c_i f'_i + D^{k-1}g$ aus Satz 5.3.8

an. Dann werden alle schwachen Hecke-Eigenformen außer f'_j nach $D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$ verschoben. Wir zeigen, dass f'_j in der Zerlegung tatsächlich vorkommt: Die im Hilfssatz konstruierte Funktion $(f_j^!)$ hat einen Hauptteil der Form

$$(5.3.8) \quad \frac{a_{n-1}}{q^{p^{n-1}}} + \frac{a_{n-2}}{q^{p^{n-2}}} + \dots + \frac{a_0}{q} \text{ mit } a_{n-1} \neq 0.$$

Sie ist orthogonal (im Sinne von $\{\cdot, \cdot\}$) zu $f_1, \dots, \widehat{f_j}, \dots, f_n$, da diese Anteile durch die Heckeoperatoren gelöscht wurden. Sie ist nicht orthogonal zu f_j , denn das Gleichungssystem

$$a_0 + \tau_i(p) a_1 + \dots + \tau_i(p^{n-1}) a_{n-1} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

ist regulär, hat daher nur die triviale Lösung $a_0 = a_1 = \dots = 0$. Daher ist $f_j^! \notin D^{k-1}M_{2-k}^!(N, \chi) + S_k(N, \chi)$ und ist schwache Hecke-Eigenform zum Eigenwert $\tau_j(p)$. Der Heckedefekt ist das Eichlerintegral von

$$\chi(p)^{1-n} \prod_{i=1}^n (T_p - \tau_i(p)) H_1 \in M\{q\}$$

und hat den Hauptteil

$$- \left(\frac{\chi(p)}{q^{p^n}} + \frac{a_{n-1}}{q^{p^{n-1}}} + \frac{a_{n-2}}{q^{p^{n-2}}} + \dots + \frac{a_0}{q} \right).$$

Das legt die Funktion eindeutig fest, die wir in Definition C.1.2.2 schon berechnet hatten: $\chi(p) d_{p^n}$. Der p -Teil von $f_j^!$ ergibt sich aus den Rekursionsformeln (5.3.2).

Für Geschlecht Null hat Disk $(p_{T_p}) \cdot H_1$ ganzzahlige Koeffizienten aus M , vgl. Satz C.1.1.4 (5). \square

Folgerung 5.3.8.6. Sei $k, N \in \mathbb{N}$, $p \nmid N$ eine Primzahl. Dann ist

$$f_j^! := \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ p^{i(k-1)} a_{j,i} H_{p^i} + \tau_j^!(p^i) \Delta_{p^i}^{\{N\}} \right\} + g_j \in S_k^!(N, \chi), \quad j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

mit einem $g_j \in S_k^0$ und

$$a_{j,i} = (-\chi(p))^{i+1-n} \sum_{s=0}^{\frac{n-i-1}{2}} \left(\binom{i+2s}{i+s} - \binom{i+2s}{i+s+1} \right) (\chi(p) p^{k-1})^s \sigma_{n-i-1-2s}(\tau_1, \dots, \widehat{\tau_j}, \dots, \tau_n) \in L[\tau_j],$$

$$\tau_j^!(p^i) = \sum_{l=0}^{i-1} p^{l(k-1)} d|_{p^l} \cdot \tau_j(p^{i-l-1}) \text{ algebraisch.}$$

BEWEIS. Lange Rechnung. \square

Die weiteren Untersuchungen sind von der expliziten Form der $f_j^!$ unabhängig.

Beispiele. Sei $p \nmid N, g \in S_k^0$ (jeweils) eine Funktion mit verschwindendem Hauptteil, der T_p -Eigenwert $\tau_1(p)$ einfach. Für $\dim S_k(N, \chi) = 1$ ist

$$f_1^! = H_1 + g.$$

Für $n = 2$:

$$f_1^! = p^{k-1}H_p - \overline{\tau_2}H_1 + \chi(p) \overline{h_1(p^2)} \frac{f_1 - f_2}{\tau_1 - \tau_2} + g.$$

Für $n = 3$:

$$\begin{aligned} f_1^!(z) &= p^{2(k-1)}H_{p^2} - p^{k-1}\overline{\tau_2 + \tau_3}H_p + \overline{\tau_2\tau_3} + \chi(p)p^{k-1}H_1 + \\ &+ \chi(p) \frac{p^{k-1}\overline{h_p(p^3)} + (\tau_1 - \tau_2 - \tau_3)\overline{h_1(p^3)}}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_1 - \tau_3)} f_1 + \chi(p) \frac{p^{k-1}\overline{h_p(p^3)} - \tau_3\overline{h_1(p^3)}}{(\tau_2 - \tau_1)(\tau_2 - \tau_3)} f_2 \\ &+ \chi(p) \frac{p^{k-1}\overline{h_p(p^3)} - \tau_2\overline{h_1(p^3)}}{(\tau_3 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_2)} f_3 + g \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

Damit ist der p -Teil dieser Funktionen eindeutig festgelegt. Wir haben die übrigen Koeffizienten nicht berechnet. Alles, was man dazu wissen muß, ist Folgerung 5.3.8.4 über schwache Multiplikativität. Falls $p \mid N$, geht alles analog, wenn man statt der Basis $\langle H_p^m \rangle$ schwach-holomorphe Modulformen nimmt, die nur in der Spitze Null einen Hauptteil haben. Der U_p -Operator belässt den Hauptteil dann nur in dieser Spitze, vgl. Satz C.3.5.8.

Damit und mit Anhang C.1 haben wir ein detailliertes Verständnis der Räume schwach-holomorpher Modulformen gewonnen, das es uns ermöglicht, ihren p -Teil arithmetisch genau zu verstehen. Das betrifft die im Vorwort des Kapitels angekündigten Ramanujan-Kongruenzen, erst kürzlich entdeckte schärfere Kaneko-Kongruenzen wie auch die Frage nach der Ganzzahligkeit der Koeffizienten von Mock-Modulformen.

5.4. Ramanujan-Honda-Kaneko Kongruenzen

Sei $p > 3$ eine Primzahl, $p \equiv 2 \pmod{3}, m \gg 1$. Dann gibt es nach [Guerzhoy 7] ein $A_p \in \mathbb{N}$ mit

$$U_{p^m} \left(\frac{E_4(6z)}{\eta(6z)^4} \right) \equiv 0 \pmod{p^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - A_p}}.$$

Sei p eine Primzahl, $p \equiv 3 \pmod{4}, m \gg 1$. Dann gibt es nach [Chi] ein $A_p \in \mathbb{N}$ mit

$$U_{p^m} \left(\frac{E_4(4z)}{\eta(4z)^2 \eta(8z)^2} \right) \equiv 0 \pmod{p^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - A_p}}.$$

Dieses Phänomen hat folgende Verallgemeinerung:

Satz 5.4.1 (RAMANUJAN-KONGRUENZENZEN). Sei $S_k(N, \chi) \neq \emptyset, f \in S_k^!(N, \chi)$ schwach-holomorph mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, p eine ungewöhnliche Primzahl. Dann gibt es ein $A_p \in \mathbb{N}$ mit

$$\boxed{U_{p^m}(f) \equiv 0 \pmod{p^{m \cdot \min(\alpha_1, \frac{k-1}{2}) - A_p}},}$$

α_1 ist die minimale Newtonsteigung des T_p -Hecke-Polynoms auf $S_k(N, \chi)$. Falls die Modulkurve $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ist $A = A_p$ gleichmäßig in p .

BEWEIS. Für schwache Hecke-Eigenformen ist das Folgerung 5.3.5.1 und für Modulformen aus $D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$ gilt sogar

$$U_{p^m} f \equiv 0 \pmod{p^{(k-1)m-A}}, \text{ vgl. Hilfssatz C.1.1.2.}$$

Für ein beliebiges $f \in S_k^!(N, \chi)$ bestimme eine (algebraische) Linearkombination dieser Basisfunktionen entsprechend Satz 5.3.8. Falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ergibt sich die Behauptung aus Folgerung 5.3.8.3. \square

Folgerung 5.4.1.1. *Weitere Beispiele für verschiedene Kongruenzuntergruppen sind:*

$$\begin{aligned} \Gamma_0(9) : \quad & \text{Für } p \equiv 2 \pmod{3} \text{ gilt: } \quad \mathbb{U}_{p^m} \left(\frac{\mathbb{E}_4(3z)^2}{\eta(3z)^8} \right) \equiv 0 \pmod{p^{3\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - A}}, \\ \Gamma_0(16), \chi_{-4} : \quad & \text{Für } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ gilt: } \quad \mathbb{U}_{p^m} \left(\frac{\mathbb{E}_6(4z)}{\eta(4z)^6} \right) \equiv 0 \pmod{p^{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - A}}, \\ \Gamma_0(23), \chi_{-23} : \quad & \text{Für } \left(\frac{p}{23} \right) = -1 \text{ gilt: } \quad \mathbb{U}_{p^m} (1272H_1) \equiv 0 \pmod{p^{2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - A_p}}, \\ \Gamma_0(27) : \quad & \text{Für } p \equiv 2 \pmod{3} \text{ gilt: } \quad \mathbb{U}_{p^m} \left(\frac{\mathbb{E}_4(3z)}{\eta(3z)^2 \eta(9z)^2} \right) \equiv 0 \pmod{p^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - A_p}}. \end{aligned}$$

mit der schwachen Hecke-Eigenform zum \mathbb{T}_p -Eigenwert $0, \left(\frac{p}{23}\right) = -1$:

$$H_1(z) := -\frac{1}{279840} \left(\frac{\mathbb{E}_4(z) - 23^4 \mathbb{E}_4(23z)}{\eta(z) \eta(23z)} - 11650 G_{3,\infty}(z) + 121670 G_{3,0}(z) \right) = \frac{1}{q} + O(q) \in S_{3,\infty}^! \left(23, \left(\frac{\cdot}{23} \right) \right)$$

mit den bekannten Eisensteinreihen zu den beiden Spitzen ∞ und Null:

$$G_{3,\infty}(z) := -24 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{t|j} \left(\frac{t}{23} \right) t^2 \right) q^j, \quad G_{3,0}(z) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{t|j} \left(\frac{j/t}{23} \right) t^2 \right) q^j.$$

In Satz 5.5.1 und Folgerung zeigen wir, dass diese Kongruenzen in gewisser Hinsicht optimal sind.

BEWEIS. Im Nenner steht jeweils die einzige Spitzenform $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_1(j) q^j$ aus $S_k(\Gamma, \chi)$, eine CM-Form zum Charakter $\psi = \left(\frac{-m}{\cdot}\right)$, $m = 3, 4 \vee 23$. Wir betrachten jeweils Primzahlen p , die träge im CM-Körper sind, d.h. $\psi(p) = -1$. Dann ist $\tau_1(p) = 0$, d.h. $\alpha_1 = \frac{k-1}{2}$, vgl. Def. 5.1.3. Satz 5.4.1 ergibt die Kongruenzen. \square

Im Hintergrund der Kongruenzen von Fourierkoeffizienten steht die Tatsache, dass schwach-holomorphe Modulformen eine asymptotische Spektralentwicklung in overkonvergente Eigenfunktionen des \mathbb{U}_p -Operators haben, vgl. Anhang C.4. Das hängt von einigen heute noch unbewiesenen Annahmen ab. Allerdings kann man den Anteil der klassischen Spitzenformen im Spektrum beweisen.

Sei p eine ungewöhnliche Primzahl. Wir beweisen in Hilfssatz 5.4.2, dass die p -Ordnungen der p^m -ten Koeffizienten ($m = 1, 2, 3, \dots$) einer einzelnen schwachen Hecke-Eigenform eine arithmetische Folge der konstanten Differenz α_i bilden, falls der Υ_i -Spektralkoeffizient ungleich Null ist. Man kann natürlich durch Multiplikation mit einer Konstanten die Ordnungen der Fourierkoeffizienten beliebig vergrößern, nicht aber die Differenz der arithmetischen Folge. Wenn man Neufornen mit größerer Steigung α_j dazu addiert, verbessert das die Teilbarkeit auch nicht wesentlich. Aber was ist mit einer Hecke-Spitzenform der gleichen Steigung α_i ? Es wird sich zeigen, dass die Differenzen der arithmetischen Folge der p -Ordnungen (unter einfachen Voraussetzungen) eine obere Schranke $k-1-\alpha_i$ haben. Diese wird im p -adischen Grenzwert angenommen, d.h. es gibt eine p -adisch konvergente Folge $(\lambda_l)_{l \in \mathbb{N}}$ ganzer Zahlen, so dass die Modulformen $f_l^! + \lambda_l f_l$ Koeffizienten haben, deren p -Ordnungen eine arithmetische Folge unbegrenzt wachsender Länge mit konstanter Differenz $k-1-\alpha_i$ enthält. Der Grenzwert $\lambda = \lim_{l \rightarrow \infty} \lambda_l$ ist also, was die p -Ordnungen angeht, optimal.

Hilfssatz 5.4.2 (Spektralkoeffizienten von schwachen Neufornen). *Gegeben eine Primzahl $p, k \in \mathbb{N}$. Sei $\dim S_k(N, \chi) > 0$ und f'_i eine simultane schwache Hecke-Eigenform mit \mathbb{T}_p -Eigenwert $\tau_i = \tau_i(p)$ und Heckedefekt d . Falls $p \nmid N$, seien Υ_i, Υ_i^c die entsprechenden Altformen in $S_k(pN, 1_p \cdot \chi)$ mit \mathbb{U}_p -Eigenwerten $v_i, v_i^c, \tau_i = v_i + v_i^c$ und $\alpha_i = \text{ord}_p(\tau_i)$. Für $p \mid N$ setze $v_i = \tau_i$. Dann gilt in \mathbb{C}_p :*

$$\begin{aligned} p \mid N : \quad & \left| p^{k-1} \tau'_i(p^m) - \left(p^{k-1} \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{v}_i^{j+1} \right) v_i^m \right|_p \leq cp^{-(k-1)m}, \\ p \nmid N : \quad & \left| p^{k-1} \tau'_i(p^m) - \left(p^{k-1} \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{v}_i^{j+1} \right) \tau_i(p^m) \right|_p \leq cp^{-\max(k-1-\alpha_i, \frac{k-1}{2})m}. \end{aligned}$$

Falls $p \nmid N$ ungewöhnlich ist:

$$\left| p^{k-1} \tau'_i(p^m) - \left(p^{k-1} \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^{j+1} \right) \tau_i(p^m) + \left(\bar{v}_i \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_i(p^j)} \right) v_i^c(p^m) \right|_p \leq cp^{-(k-1)m},$$

wobei die Konstante c nur von der schwachen Eigenform f' abhängt.

Falls $f'_i \in S_{2-k}^!(N, \chi)$ mindestens $(k-1)$ -arithmetisch ist, gilt $\sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_i(p^j)} = 0$.

BEWEIS. vgl. Prop. C.4.1.6 (4);

O.B.d.A. seien die Fourierkoeffizienten von f'_i und vom Hecke Defekt d ganzzahlig. Mit Hilfssatz 5.3.5 ist:

$$(5.4.1) \quad \tau'_i(p^m) = \tau_i(p^m) \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{m-1} p^{j(k-1)} d|_{p^j} \tau_i(p^{m-j-1}).$$

Sei zunächst $p \nmid N$, $v_i \neq v_i^c$. Mit $p^{k-1} = v_i \bar{v}_i = \bar{\chi}(p) v_i v_i^c$ und $\tau_i(p^m) = \frac{v_i^{m+1} - (v_i^c)^{m+1}}{v_i - v_i^c}$ hat man

$$\begin{aligned} \tau'_i(p^m) &= \frac{1}{v_i - v_i^c} \left\{ \left(v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} (\bar{\chi}(p) v_i^c)^j \right) v_i^m - \left(v_i^c \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} (\bar{\chi}(p) v_i)^j \right) (v_i^c)^m \right\} \\ &= \frac{1}{v_i} \left(v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} (\bar{\chi}(p) v_i^c)^j \right) \frac{v_i^{m+1} - (v_i^c)^{m+1}}{v_i - v_i^c} + \frac{(v_i^c)^m}{v_i} \sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} \bar{\chi}(p)^j \frac{(v_i^c)^{j+1} - v_i^{j+1}}{v_i - v_i^c}. \end{aligned}$$

Die Klammer $\left(v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} (\bar{\chi}(p) v_i^c)^j \right) \stackrel{(5.1.10)}{=} \left(v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} \bar{v}_i^j \right)$ ist eine Cauchyfolge und daher für $m \rightarrow \infty$ konvergent. Die Summe $\sum_{j=0}^{m-1} d|_{p^j} \overline{\tau_i(p)^j}$ ist p -adisch gleichmäßig in m beschränkt und konvergent, falls p ungewöhnlich ist. Mit der Relation (5.1.10) folgt die erste Aussage. Im Falle von Konvergenz sei

$$(5.4.2) \quad d_1 = \frac{v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^j}{v_i - v_i^c}, \quad d_2 = - \frac{v_i^c \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^{c^j}}{v_i - v_i^c}.$$

Der Fehler

$$\tau'_i(p^m) - d_1 v_i^m - d_2 (v_i^c)^m = - \frac{1}{v_i - v_i^c} \left\{ \sum_{j=m}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^j v_i^m - \sum_{j=m}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^{c^j} (v_i^c)^m \right\} = - \frac{p^{m(k-1)}}{v_i - v_i^c} \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^{j+m}} \overline{(v_i^j - (v_i^c)^j)}$$

ist von der gesuchten Größenordnung, da d beschränkte Nenner hat.

Falls $v_i = v_i^c$ und wegen $\tau_i(p^m) = (m+1) v_i^m$ wird aus (5.4.1):

$$\tau'_i(p^m) = \left((m+1) \tau'_i(1) + \frac{1}{v_i} (md|_1 + (m-1)d|_p \bar{v}_i + (m-2)d|_{p^2} \bar{v}_i^2 + \dots + d|_{p^{m-1}} \bar{v}_i^{m-1}) \right) v_i^m.$$

Sei $d_1 = \frac{v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^j}{v_i}$. Dann ist:

$$\tau'_i(p^m) - d_1 \tau_i(p^m) = - \frac{v_i^m}{v_i} \cdot \{ 1d|_1 + 2d|_p \bar{v}_i + \dots + md|_{p^{m-1}} \bar{v}_i^{m-1} + (m+1)(d|_{p^m} \bar{v}_i^m + d|_{p^{m+1}} \bar{v}_i^{m+1} + \dots) \}.$$

Mit $d_2 = - \frac{\sum_{j=0}^{\infty} (j+1) d|_{p^j} \bar{v}_i^j}{v_i}$ ist

$$\tau'_i(p^m) - d_1 \tau_i(p^m) - d_2 v_i^m = \frac{v_i^m}{v_i} \sum_{j=m+1}^{\infty} (j-m) d|_{p^j} \bar{v}_i^j = \frac{p^{m(k-1)}}{v_i} \sum_{j=1}^{\infty} j \cdot d|_{p^{j+m}} \bar{v}_i^j.$$

Der Fall $p \mid N$ geht analog:

$$\begin{aligned} \exists d \in M_{2-k}^1(N, \chi) : \quad U_p \Upsilon' &= v_i(p) \Upsilon' + D^{k-1}d \\ v_i'(p^m) &= v_i^m v_i'(1) + \sum_{j=0}^{m-1} p^{j(k-1)} d|_{p^j} v_i^{m-j-1}. \end{aligned}$$

Für $f_i' \in S_{2-k}^1(N, \chi)$ mindestens $(k-1)$ -arithmetisch kann es nach Folgerung 5.1.8.1 keine $(k-1-\alpha_i)$ -arithmetische Eigenform Υ_i^c im Spektrum haben. \square

Mit dem Beweis zu [Guer Kent Ono, Theorem 1.2] lässt sich das verallgemeinern. Die Voraussetzung dort, $\alpha_i < \frac{k-1}{2}$ oder CM-Form, ist für Konvergenz notwendig, für die Ungleichungen hier jedoch nicht:

Hilfssatz 5.4.3 (allgemeinere Version). *Gegeben eine Primzahl $p, k \in \mathbb{N}$. Sei $\dim S_k(N, \chi) > 0$ und f_i' eine simultane schwache Hecke-Eigenform mit T_p -Eigenwert $\tau_i = \tau_i(p)$ und Heckedefekt d . Falls $p \nmid N$, seien Υ_i, Υ_i^c die entsprechenden Altformen in $S_k(pN, 1_p \cdot \chi)$ mit U_p -Eigenwerten $v_i, v_i^c, \tau_i = v_i + v_i^c$ und $\alpha_i = \text{ord}_p(\tau_i)$. Für $p \mid N$ setze $v_i = \tau_i$. Dann gilt in \mathbb{C}_p :*

$$\begin{aligned} p \mid N : \quad & \left| p^{k-1} f_i' - \left(p^{k-1} \tau_i'(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{v_i^{j+1}} \right) f_i \right|_p \leq c p^{-(k-1)m}; \\ p \nmid N : \quad & \left| p^{k-1} f_i' - \left(p^{k-1} \tau_i'(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{v_i^{j+1}} \right) f_i \right|_p \leq c p^{-\max(k-1-\alpha_i, \frac{k-1}{2})m}. \end{aligned}$$

Falls $p \nmid N$ ungewöhnlich ist:

$$\left| p^{k-1} f_i' - \left(p^{k-1} \tau_i'(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{v_i^{j+1}} \right) f_i + \left(\overline{v_i} \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_i(p^j)} \right) \Upsilon_i^c \right|_p \leq c p^{-(k-1)m}.$$

Folgerung 5.4.3.1. *Sei p eine ungewöhnliche Primzahl, $p \nmid N$ und f_i eine Neuf orm. Die Frage, ob p -adisch $\sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_i(p^j)} = 0$ hängt nur von f_i und nicht von der speziellen Auswahl von f_i' dual zu f_i bzw. dem daraus resultierenden Heckedefekt d ab.*

BEWEIS. Für zwei verschiedene schwache Neuf ormen f_i', f_i'' gilt nach Gleichung (5.3.3)

$$f_i' = \lambda f_i'' + \mu f_i + d', \quad \lambda, \mu \text{ algebraisch, } d_i' \in D^{k-1}(M_{2-k}^1(N, \chi)).$$

Der Operator $T_p - \tau_i(p)$ löscht die Neuf orm f_i und bildet den Raum $D^{k-1}(M_{2-k}^1(N, \chi))$ auf sich ab. Nach Hilfssatz 5.4.2 ist $\sum_{j=0}^{\infty} d''|_{p^j} \overline{\tau_i(p^j)} = 0$ falls d'' der Heckedefekt einer Funktion $d' \in D^{k-1}(M_{2-k}^1(N, \chi))$ ist, d.h. falls $D^{k-1}d'' = (T_p - \tau_i(p))d'$. \square

Folgerung 5.4.3.2 (Überlagerung von Spektrallinien). *Gegeben eine Primzahl p . Eine Linearkombination (mit Koeffizienten aus \mathbb{C}_p) von schwachen Neuf ormen $f_i' \in S_k^1(m, \chi_m)$, $\text{cond}(\chi) \mid m \mid N$ paarweise verschiedener T_p -Eigenwerte, die β_i -arithmetisch sind, ist β_1 -arithmetisch; $(\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots, \beta_1 < k-1)$.*

BEWEIS. Ersetze f_i' durch die klassischen Spektrallinien $\Upsilon_i = f_i - v_i^c V_p f_i$ und Υ_i^c entsprechend Hilfssatz 5.4.2 und Beweis von Satz 5.1.8.1. \square

Folgerung 5.4.3.3 (schwache Multiplikativität - verallgemeinert). *Sei $\text{ggT}(m, u) = 1$. Für die Fourierkoeffizienten einer simultanen schwachen Hecke-Eigenform f' mit Eigenwerten $\tau_i(u)$ gibt es ein A mit*

$$\tau_i'(p^m u) \equiv \tau_i'(p^m) \tau_i(u) \pmod{p^{m(k-1)-A}}.$$

Diese Resultate sehen sehr hypothetisch aus. Es wird real, wenn man schwache Hecke-Eigenformen nimmt, die dual zu CM-Formen sind.

Laut [**Honda Kaneko**] gilt für $k \in \{4, 6, 8, 10, 14\}$, $p \equiv 1 \pmod{3}$: $U_p \left(\frac{E_k(6z)}{\eta(6z)^4} \right) \equiv 0 \pmod{p}$.

[**Guerzhoy 7**] verallgemeinerte den Fall $k = 4$ zu $U_{p^m} \left(\frac{E_4(6z)}{\eta(6z)^4} \right) \equiv 0 \pmod{p^{m-A_p}}$

und [**Chi**] bewies für $p \equiv 1 \pmod{4}$: $U_{p^m} \left(\frac{E_4(4z)}{\eta(4z)^2 \eta(8z)^2} \right) \equiv 0 \pmod{p^{m-A_p}}$

für Konstanten A_p und alle natürlichen Zahlen m . Dieses Phänomen tritt auf, da der p -Teil der schwach-holomorphen Modulform verschwindet.

Satz 5.4.4 (KANEKO-KONGRUENZEN). *Sei p eine Primzahl, $u \in \mathbb{N}$ und die T_p -Eigenwerte auf $S_k(N, \chi)$ paarweise verschieden. Sei $f' \in S_k^1(N, \chi) \cap \overline{\mathbb{Q}}\{q\}$ und der p -Teil von f' Null. Dann gibt es ein $A \in \mathbb{N}$ unabhängig von p mit*

$$\boxed{U_{p^m} f' \equiv 0 \pmod{p^{m(k-1)-A}}.}$$

BEWEIS. Betrachte die Zerlegung aus Satz 5.3.8. Der p -Teil von f' ist Null, ebenso der p -Teil von $T_p f'$ und daher wegen Folgerung 5.3.8.5 auch der p -Teil aller f'_i . Schwache Multiplikativität (Folgerung 5.4.3.3) überträgt die Arithmetik des p -Teils einer schwachen Neuf orm auf alle anderen Fourierkoeffizienten. \square

Folgerung 5.4.4.1 (vgl. Vermutungen in [**Honda Kaneko**]). *Seien $m, u \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{Z}[[q]]$:*

$$\begin{aligned} \Gamma_0(9) : \quad & \text{Für } p \equiv 1 \pmod{3} \text{ gilt:} & U_{p^m} \left(\frac{E_4(3z)^2}{\eta(3z)^8} \right) & \equiv 0 \pmod{p^{3m-A}}, \\ \Gamma_0(16), \chi_{-4} : \quad & \text{Für } p \equiv 1 \pmod{4} \text{ gilt:} & U_{p^m} \left(\frac{E_6(4z)}{\eta(4z)^6} \right) & \equiv 0 \pmod{p^{2m-A}}, \\ \Gamma_0(27) : \quad & \text{Für } f \in M_4(\Gamma_0(3)), p \equiv 1 \pmod{3} \text{ gilt:} & \left(\frac{f(3z)}{\eta(3z)^2 \eta(9z)^2} \right) \Big|_{p^{m_u}} & \equiv 0 \pmod{p^{m-A}}, \\ \Gamma_0(32) : \quad & \text{Für } f \in M_4(\Gamma_0(2)), p \equiv 1 \pmod{4} \text{ gilt:} & \left(\frac{f(4z)}{\eta(4z)^2 \eta(8z)^2} \right) \Big|_{p^{m_u}} & \equiv 0 \pmod{p^{m-A}}, \\ \Gamma_0(36) : \quad & \text{Für } f \in M_4(\Gamma_0(4)), p \equiv 1 \pmod{3} \text{ gilt:} & \left(\frac{f(3z)}{\eta(6z)^4} \right) \Big|_{p^{m_u}} & \equiv 0 \pmod{p^{m-A}}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Voraussetzungen von Satz 5.4.4 sind erfüllt: Die konstanten Fourierkoeffizienten der schwach-holomorphen Modulformen sind in allen Spitzen Null. Fourierkoeffizienten sind eventuell nicht eindeutig, aber es ist eindeutig, ob der konstante Koeffizient Null ist. Das kann man analog [**Chi**, Proposition 1] überprüfen, außer dass z.B. $\gamma \in \Gamma_0(4)$ die Eisensteinreihen $E_{4,\infty}, E_{4,0}, E_{4,\frac{1}{2}} \in M_4(\Gamma_0(4))$ nicht invariant lässt, sondern permutiert. Im Nenner steht jeweils die einzige Spitzenform, im Fall $\Gamma_0(9)$ CM mit χ_{-3} , für $\Gamma_0(16)$ CM mit χ_{-4} , in den anderen Fällen handelt es sich um Modulformen zu den CM-Kurven $y^2 + y = x^3, y^2 = x^3 - x, y^2 = x^3 + 1$. Die Indizes der Fourierkoeffizienten sind $\equiv -1 \pmod{3}$ bzw. $\equiv -1 \pmod{4}$ und daher ist der p -Teil Null. \square

Trotz dieser guten Kongruenzen für CM-Formen haben die entsprechenden Eichlerintegrale

$$\left(\widetilde{\frac{E_4(3z)^2}{\eta(3z)^8}} \right), \left(\widetilde{\frac{E_6(4z)}{\eta(4z)^6}} \right), \left(\widetilde{\frac{f(3z)}{\eta(3z)^2 \eta(9z)^2}} \right), \dots$$

keine ganzzahligen Fourierkoeffizienten, da die im CM-Körper trägen Primzahlen (Folgerung 5.4.1.1) nicht mit-spielen. Mehr dazu im nächsten Abschnitt, Satz 5.5.1 und Folgerung.

Vermutung 5.4.5. Seien $m \in \mathbb{N}$, $f \in M_{k_1}(n, \chi) \cap \mathbb{Z}[[q]]$, $S_{k_1}(\Gamma_0(n)) = \emptyset$, s ein Etaprodukt, $s^m \in S_{k_2}(n, \chi)$, $\forall m s \in S_{k_2}(m^2 n, \chi)$:

$$U_{p^m} \left(\frac{f(mz)}{s(mz)} \right) \equiv 0 \pmod{p^{(k_1-k_2-1)m-A}},$$

falls der p -Teil dieser Funktion Null, ist.

Interessant ist, dass auch viele meromorphe automorphe Formen ähnliche Kongruenzen aufweisen, vgl. Abschnitt C.4.2.

5.5. Ganzheit und Selbstähnlichkeit

Mock-Modulformen haben ganzzahlige Fourierkoeffizienten, solange keine Spitzenformen von komplementärem Gewicht k auftreten.⁶ Vermutlich sind die Koeffizienten dann irrational. Das Auftreten rationaler Koeffizienten (für Poincaréreihen vgl. Bemerkung auf S. 227) hängt mit dem Verschwinden von Hecke-Eigenwerten zusammen⁷. Weitere Mock-Modulformen mit rationalen Fourierkoeffizienten sind Eichlerintegrale \tilde{f} , falls $f \in M_k^!(N, \chi) \cap \mathbb{Z}\{q\}$. Eine naheliegende Frage ist, ob es arithmetische Mock-Modulformen $h \in \mathbb{M}_{2-k}^!(N, \chi)$ mit ganzalgebraischen Koeffizienten gibt, bzw. ob es schwach-holomorphe Modulformen $H = D^{k-1}h \in M_k^!(N, \chi)$ gibt, deren n -ter Fourierkoeffizient durch n^{k-1} teilbar ist. Natürlich gibt es Modulformen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, z.B.:

$$\frac{E_4^2(z) E_6(z)}{\Delta^2(z)} = \frac{1}{q^2} + \frac{24}{q} - 196560 - 47709536q + \dots \in M_{-10}^!(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})),$$

aber [Ramanujan]s Definition der Mock-Modulformen schließt (schwach-)holomorphe Modulformen aus. Betrachte die schwache Neuform

$$H_1 := \Delta(j^2 - 1464j + 142236) = \frac{1}{q} + 47709536q^2 + 39862705122q^3 + \dots \in S_{12}^!.$$

Wir versuchen $\mu, \lambda \in \mathbb{Z}$ so zu wählen, dass

$$\mu h_1(n) + \lambda \tau(n) \equiv 0 \pmod{n^{k-1}}$$

für die Fourierkoeffizienten der Funktion

$$\mu H_1 + \lambda \Delta \in S_{12}^!.$$

Diese Kongruenz ist bei gegebenem μ genau dann eindeutig für $\lambda \pmod{\frac{n^{k-1}}{(\tau(n), n^{k-1})}}$ lösbar, falls

$$(\tau(n), n^{k-1}) \mid \mu \cdot h_1(n).$$

Kompliziertere Hauptteile ergeben keine neuen Aspekte, da der Unterschied in $D^{k-1}(M_{-10}^!)$ liegt und damit mindestens $(k-1)$ -arithmetisch ist.

Es zeigt sich, dass die Ganzalgebraizität von Mock-Modulformkoeffizienten eine sehr starke Einschränkung ist, z.B. müssen dann alle Komponenten aus den Hecke-Eigenräumen (Satz 5.3.8) ganzalgebraische Fourierkoeffizienten haben. Ungewöhnliche Primzahlen stellen im allgemeinen ein Hindernis für die Ganzzahligkeit der Koeffizienten dar:

Satz 5.5.1. Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, p$ eine ungewöhnliche Primzahl, $p \nmid N$. Falls p -adisch

$$(5.5.1) \quad \boxed{\sum_{j=0}^{\infty} d_{|p^j} \overline{\tau_i(p^j)} \neq 0}$$

für jeweils eine schwache Neuform aus jeder Galoiskonjugationsklasse aus $S_k^!(m, \chi_m) \subset S_k^!(N, \chi)$, dann gibt es keine Mock-Modulform in $\mathbb{M}_{2-k}^!(N, \chi) \setminus M_{2-k}^!(N, \chi)$ mit ganzalgebraischen Koeffizienten aus M .

BEWEIS. Der Raum $\mathbb{M}_{2-k}^!(N, \chi)$ ist nur unwesentlich komplizierter als $\mathbb{S}_{2-k}(N, \chi)$, vgl. Hilfssatz C.3.6.2. Satz 5.3.8 lässt sich fast wörtlich auf $f' \in M_k^!(N, \chi)$ übertragen. Insbesondere haben alle direkten Summanden aus den Hecke-Eigenräumen \tilde{f}'_i ganzalgebraische Koeffizienten, falls das für \tilde{f}' zutrifft. Schwache Eisensteinreihen sind im Prinzip klassische Eisensteinreihen aus $M_k^!(N, \chi)$. Sie haben Hecke-Eigenwerte von der Form $\psi_1(p) +$

⁶Sie sind schwach-holomorph.

⁷[Br On Rh]

$\psi_2(p)p^{k-1}$, die teilerfremd zu p sind, [Stein]. Ihre Eichlerintegrale sind nie ganzalgebraisch. Daher enthält f' keine Eisensteinreihe und ist aus $S_k^!(N, \chi)$ und

$$f' = \sum_{\text{einige } i} c_i f'_i + D^{k-1}(g)$$

mit schwachen Hecke-Eigenformen f'_i aus den Hecke-Eigenräumen und algebraischen c_i . Falls \tilde{f}' ganzalgebraische Fourierkoeffizienten hat, sind die schwachen Neufurmen aus der Zerlegung (5.3.5) mindestens $(k-1)$ -arithmetisch, vgl. Satz 5.3.7, und der Grenzwert (5.5.1) ist Null, vgl. Hilfssatz 5.4.2. Mit jeder (schwachen) Neufurm kommen auch alle Galoisconjugierten in der Zerlegung vor. \square

Bemerkung. Es handelt sich um eine neue Anwendung der „Paarung von Mock-Modulformen mit ihren Schatten“, [Guer Kent Ono]. In [Bri Guer Ka] wurde gezeigt, dass es für $p \mid N$ eine p -adische Linearkombination der Neufurm Υ_i und der entsprechenden schwachen Neufurm gibt, die $(k-1)$ -arithmetisch ist. Hier zeigen wir, dass das für $p \nmid N$ i.a. nicht mehr zutrifft. Es gibt zwei Spektrallinien im p -adischen overkonvergenten Spektrum (zur Stufe pN). Man kann durch Überlagerung von f_i und f'_i eine davon löschen, aber in Stufe N (unter nachprüfaren Bedingungen) i.a. nicht beide gleichzeitig. Beide sind zu „langsam“ (Newtonsteigung α_i und $k-1-\alpha_i$), als dass sie von Mock-Modulformen komplementären Gewichts kommen könnten.

Für $X_0(N)$ vom Geschlecht Null kann man mit Hilfe des Hauptmoduls $j_N = \frac{1}{q} + O(1)$ das modulare Gitter aus Anhang C.1.2 benutzen, um den Heckedefekt d_{p^n} zu erhalten. Für Geschlecht > 0 gibt es z.B. den Algorithmus auf S.278.

Folgerung 5.5.1.1. *Es gibt keine Mock-Modulformen in $M_k^!(N, \chi) \setminus M_k^!(N, \chi)$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, falls:*

N	χ	k	N	χ	k
1	1	$0 \geq k \geq -72$	3	$(\frac{\cdot}{3})$	$0 \geq k \geq -27$
2	1	$0 \geq k \geq -34$	4	$(\frac{\cdot}{4})$	$0 \geq k \geq -13$
3	1	$0 \geq k \geq -36$	5	$(\frac{\cdot}{5})$	$0 \geq k \geq -14$
4	1	$0 \geq k \geq -14$	7	$(\frac{\cdot}{7})$	$0 \geq k \geq -7$
5	1	$0 \geq k \geq -14$	3	$(\frac{\cdot}{3})$	$0 \geq k \geq -27$
7	1	$0 \geq k \geq -4$	4	$(\frac{\cdot}{4})$	$0 \geq k \geq -13$
9	1	$0 \geq k \geq -2$	5	$(\frac{\cdot}{5})$	$0 \geq k \geq -14$
11	1	$0 \geq k \geq -8$	7	$(\frac{\cdot}{7})$	$0 \geq k \geq -7$
14	1	$k = 0$	8	$(\frac{\cdot}{8})$	$0 \geq k \geq -3$
15	1	$k = 0$	12	$(\frac{\cdot}{3})$	$k = -1$
17	1	$k = 0$	11	$(\frac{\cdot}{11})$	$k = -3$
19	1	$k = 0$	16	$(\frac{\cdot}{4})$	$k = -1$
21	1	$k = 0$	23	$(\frac{\cdot}{23})$	$k = -1$
27	1	$k = 0$	37	$(\frac{\cdot}{37})$	$k = 0$
32	1	$k = 0$			
36	1	$k = 0$			

und einige weitere Einzelfälle, vgl. die Tabelle in Anhang C.4.5.

BEWEIS. Sei $f \in S_k(N, \chi) \setminus S_k^!(N, \chi)$, d.h. $\xi_k f \in S_{2-k}(N, \chi)$. Falls $S_{2-k}(N, \chi) = \emptyset$, Wid. Eine häufige Situation ist $\dim S_k(N, \chi) = 1$ und $\tau_1(p) = 0$. Dann ist $p_{T_p}(x) = x$. Für $SL_2(\mathbb{Z})$ gibt es Basen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten ([Choi 1]) und das Hecke polynomial ist aus $\mathbb{Z}[x]$. Falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, sind die Heckedefekte bekannt: $d_{|p^n} = \chi(p) \overline{h_{p^n}(p^n)}$. Nachweise dafür, dass $\sum_{j=0}^{\infty} h_{2^j} \tau_1(2^j) \neq 0$ in den Fällen, wo $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, findet man in der Tabelle im Anhang C.4.5, gewonnen mit dem Programm „Gamma0N.sage“ aus Abschnitt E.3.

Beispiele für $S_2^!(N, \mathbf{1})$, $X_0(N)$ vom Geschlecht 1. Das betrifft die Fälle $N = 14, 15, 17, 19, 21, 27, 32, 36$:

$S_2^!(\Gamma_0(14)), p = 11$:

$$f_1' = \frac{E_4(z)}{\eta(z)\eta(2z)\eta(7z)\eta(14z)} + \frac{13(E_2(z) - 2E_2(2z))}{9} - \frac{161(E_2(z) - 7E_2(7z))}{18} + \frac{203(E_2(z) - 14E_2(14z))}{9}.$$

$S_2^!(\Gamma_0(15)), p = 7$:

$$f_1' = \frac{E_4(z)}{\eta(z)\eta(3z)\eta(5z)\eta(15z)} + \frac{3(E_2(z) - 3E_2(3z))}{16} - \frac{35(E_2(z) - 5E_2(5z))}{16} + \frac{285(E_2(z) - 15E_2(15z))}{16}.$$

$S_2^!(\Gamma_0(19)), p = 23$:

$$f_1' = \frac{10E_6(z)}{(\eta(z)\eta(19z))^4} + 66463710(E_2(z) - 19E_2(19z)).$$

$S_2^!(\Gamma_0(21)), p = 23$:

$$f_1' = \frac{4E_8(z)}{(\eta(z)\eta(3z)\eta(7z)\eta(21z))^3} + 517155(E_2(z) - 3E_2(3z)) - 509635(E_2(z) - 7E_2(7z)) \\ + 2430435(E_2(z) - 21E_2(21z)).$$

Die Beispiele von [Honda Kaneko] sind:

$$S_2^!(\Gamma_0(27)), p = 11: \quad f_1' = \frac{E_4(3z)}{(\eta(3z)\eta(9z))^2}.$$

$$S_2^!(\Gamma_0(32)), p = 3: \quad f_1' = \frac{E_4(4z)}{(\eta(4z)\eta(8z))^2}.$$

$$S_2^!(\Gamma_0(36)), p = 5: \quad f_1' = \frac{E_4(6z)}{\eta(6z)^4}.$$

In allen diesen Fällen ist $\tau_1(p) = 0, p \nmid \tau_1'(p)$ und $d = \widetilde{T_p f_1'}$ hat ganzzahlige Fourierkoeffizienten; außerdem

$$S_2^!(\Gamma_0(17)), p = 3: \quad f_1' = \frac{3E_6(z)}{(\eta(z)\eta(17z))^4} - \frac{73695(E_2(z) - 17E_2(17z))}{2}.$$

Hier gilt $\tau_1(p) = 0, p \mid \tau_1'(p)$, aber der Grenzwert $g_1 = \text{ord}_p \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \tau_1(p^j) = 2$ existiert.

Man überprüft leicht, dass genügend viele Fourierkoeffizienten ganzzahlig sind.

Die Fälle $S_k^!\left(11, \left(\frac{\cdot}{11}\right)^k\right)$, $S_2^!\left(37, \left(\frac{\cdot}{37}\right)\right)$ lassen sich mit den MATHEMATICA-Programmen im Anhang E.3.2 berechnen.

Wir erläutern noch kurz den Fall $S_3^!\left(23, \left(\frac{\cdot}{23}\right)\right)$. Es gibt drei algebraisch konjugierte Neuf Formen, CM-Formen, deren Hecke-Eigenwerte p -adische Einheiten sind, falls $\left(\frac{p}{23}\right) = 1$ und Null für $\left(\frac{p}{23}\right) = -1$. Es gibt entsprechend drei algebraisch konjugierte schwache Neuf Formen, z.B.

$$f_1' = (T_2 - \tau_2(2))(T_2 - \tau_3(2))H_1 = (T_2)^2 H_1 + \tau_1(2)T_2 H_1 + (\tau_1(2)^2 - 12)H_1.$$

Die Hecke Polynome sind $p_{T_2}(x) = x^3 - 12x + 7, p_{T_5}(x) = x^3$ und

$$H_1(z) = -\frac{1}{279840} \left(\frac{E_4(z) - 23^4 E_4(4z)}{\eta(z)\eta(23z)} - 11650 G_{3,\infty}(z) + 121670 G_{3,0}(z) \right) \in S_{3,\infty}^!\left(23, \left(\frac{\cdot}{23}\right)\right).$$

Es gibt drei untereinander konjugierte Heckedefekte d für die Primzahl 5:

$$d = \widetilde{T_5 f_i'} = -\frac{1}{q^{20}} - \frac{\tau_i(2)}{q^{10}} + \frac{8 - \tau_i(2)^2}{q^5} + \left(-40 - 12\tau_i(2) - \tau_i(2)^2\right)q + \dots$$

Der erste Fourierkoeffizient $d|_1 = \left(-40 - 12\tau_i(2) - \tau_i(2)^2\right)$ ist in allen drei Fällen 5-adisch eine Einheit, $\tau_i(5) = 0$ und daher $\sum_{j=0}^{\infty} d|_{5^j} \overline{\tau_i(5^j)} \neq 0$, d.h. es gibt keine auf dem 5-Teil mindestens $(k-1) = 2$ -arithmetischen nichttrivialen schwachen Neufurmen. (Sie sind $\frac{k-1}{2} = 1$ -arithmetisch.) Angenommen, es gäbe eine nichttriviale Mock-Modulform $f' \in \mathbb{S}_{-1}\left(23, \left(\frac{\cdot}{23}\right)\right)$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten. Dann wäre nach Satz 5.3.8

$$D^2 f' = f'_1 + f'_2 + f'_3 + D^2 g, \quad g \in M_{-1}^1\left(23, \left(\frac{\cdot}{23}\right)\right)$$

mit nichttrivialen galoiskonjugierten schwachen Neufurmen f'_i , die für alle Primzahlen mindestens 2-arithmetisch wären. Wid. \square

Die Grenzen für das Gewicht k ergeben sich aus der Länge der Rechenzeit.

Wir zeigen folgende effektive Version von [Guer Kent Ono, Theorem 1.2]:

Folgerung 5.5.1.2 (Fraktale Muster). *Falls $k \in \mathbb{N}, k > 1, S_k(N, \chi) = \langle f_1 \rangle$ eindimensional, $p \nmid N, \tau_1(p) = 0, \tau'(p^{2m}) = 0 \forall m, \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_1(p^j)} \neq 0$ und $f' \in S_k^!(N, \chi) \setminus D^{k-1}(M_{2-k}^1(N, \chi))$ ganzalgebraische Fourierkoeffizienten hat, gibt es $c \in \mathbb{Q}_p, A \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\frac{U_{p^{2m+1}} f'}{(-\chi(p) p^{k-1})^m} \equiv c f \pmod{p^{m(k-1)+A}}.$$

BEWEIS. Hier ist $\alpha = \frac{k-1}{2}, v = \sqrt{-\chi(p) p^{k-1}}, v^c = -v, \tau(p^{2m}) = v^{2m}$. Nach dem Basistheorem (Folgerung 5.3.8.1) ist die schwach-holomorphe Modulform $f'(z) = \sum \tau'(m) q^m$ eine schwache Neufurm dual zu f_1 :

$$(5.5.2) \quad T_n f' = \tau_1(n) f' + D^{k-1} d_n, \quad d_n \in M_{2-k}^1(N, \chi),$$

d.h. für $n = p, d = d_p$:

$$U_{p^{2m+1}} f' + \chi(p) p^{k-1} U_{p^{2m-1}} f' = p^{2m(k-1)} D^{k-1} g, \quad g = U_{p^{2m}} d \in M_{2-k}^1(pN, \chi),$$

bzw.

$$\frac{U_{p^{2m+1}} f'}{(-\chi(p) p^{k-1})^m} \equiv \frac{U_{p^{2m-1}} f'}{(-\chi(p) p^{k-1})^{m-1}} \pmod{p^{m(k-1)+A}}$$

und $\frac{U_{p^{2m+1}} f'}{(-\chi(p) p^{k-1})^m}$ ist eine Cauchyfolge mit p -adischem Grenzwert F , sodass

$$\frac{U_{p^{2m+1}} f'}{(-\chi(p) p^{k-1})^m} \equiv F \pmod{p^{m(k-1)+A}}.$$

Nach Hilfssatz 5.4.2 gibt es Konstanten $d_1, d_2 \in \overline{\mathbb{Q}_p}, c > 0$ mit

$$|\tau'(p^m) - d_1 v^m - d_2 (-v)^m|_p < c p^{-m(k-1)}$$

mit U_p -Eigenfunktionen $\Upsilon = f + v V_p f, \Upsilon^c = f - v V_p f$. Da die p^{2m} -ten Fourierkoeffizienten von f' Null sind, muss $d_2 = -d_1$ sein. Wegen Hilfssatz 5.4.2 ist $2d_1 v = \sum d|_{p^j} \overline{\tau(p^j)} \neq 0$, vgl. Folgerung 5.5.1.1. Daher ist der erste Fourierkoeffizient von F nicht Null. Wegen (5.5.2) ist für $p \nmid n$:

$$T_n U_{p^{2m+1}} f' = \tau_1(n) U_{p^{2m+1}} f' + p^{(2m+1)(k-1)} D^{k-1} U_{p^{2m+1}} d_n$$

Teilt man durch $(\chi(p) p^{k-1})^m$ und bildet den Grenzwert $m \rightarrow \infty$, so folgt wie im Beweis zu [Guer Kent Ono, Theorem 1.2]:

$$T_n F = \tau_1(n) F.$$

Nach Konstruktion ist F eine U_{p^2} -Eigenfunktion und

$$F|_{p^{2m+1}} = 0, \quad F|_{p^{2m}} = (-\chi(p) p^{k-1})^m$$

und daraus

$$F \doteq f.$$

□

Beispiele (vgl. Folgerung 5.4.1.1). Sei $m \gg 1$. Es gibt jeweils $c \in \mathbb{Q}_p, A, A_p \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\begin{aligned} \Gamma_0(9) : \quad & \text{Für } p \equiv 2 \pmod{3} \text{ gilt:} & U_{p^{2m}} \left(\frac{E_4(3z)^2}{\eta(3z)^8} \right) & \equiv c(-1)^m p^{3m} \eta(3pz)^8 & \pmod{p^{6m-A}}, \\ \Gamma_0(16), \chi_{-4} : \quad & \text{Für } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ gilt:} & U_{p^{2m}} \left(\frac{E_6(4z)}{\eta(4z)^6} \right) & \equiv cp^{2m} \eta(4pz)^6 & \pmod{p^{4m-A}}, \\ \Gamma_0(27) : \quad & \text{Für } p \equiv 2 \pmod{3} \text{ gilt:} & U_{p^{2m}} \left(\frac{E_4(3z)}{\eta(3z)^2 \eta(9z)^2} \right) & \equiv c(-p)^m \eta(3pz)^2 \eta(9pz)^2 & \pmod{p^{2m-A_p}}, \\ \Gamma_0(32) : \quad & \text{Für } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ gilt:} & U_{p^{2m}} \left(\frac{E_4(4z)}{\eta(4z)^2 \eta(8z)^2} \right) & \equiv c(-p)^m \eta(4pz)^2 \eta(8pz)^2 & \pmod{p^{2m-A_p}}, \\ \Gamma_0(36) : \quad & \text{Für } p \equiv 2 \pmod{3} \text{ gilt:} & U_{p^{2m}} \left(\frac{E_4(6z)}{\eta(6z)^4} \right) & \equiv c(-p)^m \eta(6pz)^4 & \pmod{p^{2m-A_p}}. \end{aligned}$$

5.6. Adele

Hilfssatz 5.6.1 (Approximation). Sei p eine Primzahl und $f' \in S_k^!(N, \chi)$ mit Fourierkoeffizienten aus $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$ und mit⁸ $\alpha_n < \frac{k-1}{2}$. Dann gibt es $c \in \mathbb{N}$ und eine Folge von Modulformen aus $F_j \in S_k(N, \chi)$ mit dem p -adischen Grenzwert $F \in (\mathbb{K}_{\text{Hecke}})_p \{q\}$, so dass

$$\begin{aligned} p \mid N \text{ oder } p \text{ gewöhnlich :} & \quad U_{p^m}(cf' + F) \equiv 0 \pmod{p^{(k-1)m}}, \\ \text{sonst:} & \quad U_{p^m}(cf' + F) \equiv 0 \pmod{p^{(k-1-\alpha_n)m}}. \end{aligned}$$

Im Falle, dass die Modulkurve $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ist die Konstante c unabhängig von p .

BEWEIS. Betrachte wieder die Zerlegung $cf' = \sum_{i=1}^s f'_i + D^{k-1}g$ in simultane schwache Hecke-Eigenformen f'_i

dual zu f_i , so dass alle Heckedefekte ganzzahlige Fourierkoeffizienten haben (Satz 5.3.8). Nach Hilfssatz 5.4.2 ist

$$\begin{aligned} p \mid N : & \quad p^{k-1} \tau'_i(p^m) - A \cdot v_i^m & \equiv 0 \pmod{p^{(k-1)m-B}}, \\ p \nmid N, \text{ gewöhnlich :} & \quad p^{k-1} \tau'_i(p^m) - A \cdot \tau_i(p^m) & \equiv 0 \pmod{p^{(k-1)m-B}}, \\ p \nmid N, \text{ ungewöhnlich :} & \quad p^{k-1} \tau'_i(p^m) - A \cdot \tau_i(p^m) + \left(\bar{v}_i \sum_{t=0}^{\infty} d|_{p^t} \overline{\tau_i(p^t)} \right) v_i^c(p^m) & \equiv 0 \pmod{p^{(k-1)m-B}}, \end{aligned}$$

wobei $A = p^{k-1} \tau'_1(1) + \sum_{t=0}^{\infty} d|_{p^t} \bar{v}_i^{t+1}$. Wähle $F_j = \sum_{i=1}^s \left(\tau'_i(1) + p^{1-k} \sum_{t=0}^j d|_{p^t} \bar{v}_i^{t+1} \right) f_i$. Mit schwacher Multiplikativität (Folgerung 5.4.3.3) hat man Kongruenzen für alle Fourierkoeffizienten⁹ von $f' + F$, wobei man eventuell noch eine Potenz von p im Modul verliert. Wegen $\text{ord}_p(v_i) \neq \text{ord}_p(v_i^c)$ ist $v_i \in (\mathcal{O}_{\text{Hecke}})_p$. □

Die p -adischen Hecke-Eigenfunktionen hängen von der Primzahl p ab. Daher ist die Vorstellung einer adelischen Spektralentwicklung abwegig. Nichts desto weniger kann man einen adelischen Koeffizienten der ersten Eigenfunktion (klassische Neuf orm) berechnen und damit Aussagen über Kongruenzen zu allen Primzahlen kodieren. Das

⁸Die Newtonsteigungen scheinen erheblich kleiner als $\frac{k-1}{2}$ zu sein. Sie liegen fast ausnahmslos im Intervall $(0, \frac{k-1}{p+1})$. Sie scheinen zumindest für die volle Modulgruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ etwa gleichverteilt und (bis auf Ausnahmen) ganzzahlig zu sein, und man hätte dann einen durchschnittlichen Abstand $\alpha_{i+1} - \alpha_i \approx \frac{12}{p+1}$. Detaillierte Berechnungen finden sich in [Gouvêa 2].

⁹gleichmäßig mit der Methode von [Guer Kent Ono, Beweis von Theorem 1.2]

Problem ist der Nenner p^{k-1} der Fourierkoeffizienten von F_j , falls p ungewöhnlich ist.

$S :=$ Menge von Primzahlen mit Newtonsteigungen $\alpha_i < \frac{k-1}{2}$, sodass nur endlich viele ungewöhnlich sind;

$(\mathbb{A}_K)_S := \prod_{\substack{p|p \\ p \in S}} \widehat{\mathbb{K}_p}$ die eingeschränkten Adele des Zahlkörpers \mathbb{K} .

Es ist nicht ohne weiteres möglich, unendlich viele ungewöhnliche Primzahlen in die Menge S zu nehmen, da die Nenner der F_j unbegrenzt anwachsen könnten und das Produkt dann keine guten Konvergenzeigenschaften hat (lokalkompakt).

Satz 5.6.2 (Nenner von Mock-Modulformen). *Sei $X_0(N)$ vom Geschlecht Null. Zu einer Mock-Modulform $f' \in \mathbb{S}_{2-k}(N, \chi)$ mit Fourierkoeffizienten des Hauptteils aus $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$ gibt es (eingeschränkte) Adele $\lambda_i = ((\lambda_i)_\infty, (\lambda_i)_{f_i}) \in (\mathbb{A}_{\mathbb{K}_{\text{Hecke}}})_S$, so dass*

$$D^{k-1} f' + \sum_{i=1}^s \lambda_i f_i = \sum_{m \gg -\infty} C_m q^m,$$

projektiver Grenzwert von Modulformen aus $S_k^1(N, \chi) \cap \mathbb{K}_{\text{Hecke}}\{q\}$ ist mit

$$(5.6.1) \quad C_m \in (\mathbb{A}_{\mathbb{K}_{\text{Hecke}}})_S, \quad C_m \equiv 0 \pmod{N_m}$$

und

$$N_m := \prod_{p \nmid N, p|m} p^{\max\{0, \text{ord}_p(m)(k-1-\alpha_n(p))+\beta(p)\}} \prod_{p|N, p|m} p^{\max\{0, \text{ord}_p(m)(k-1)+\beta(p)\}},$$

wobei $\alpha_n(p)$ die maximale Newtonsteigung des Heckeoperators T_p auf $S_k(N, \chi)$ und $\beta(p)$ Konstanten sind.

BEWEIS. Sei $D^{k-1} f' = \frac{1}{c} \left(\sum_{i=1}^s F'_i + D^{k-1} g \right)$ eine Zerlegung in Eigenräume des Heckeoperators,

$F'_i, g \in M_{2-k}^1(N, \chi)$ entsprechend Satz 5.3.8. Es gibt reelle Zahlen $(\lambda_i)_\infty$, so dass $f'_i \doteq F'_i + (\lambda_i)_\infty f_i$ simultane schwache Hecke-Eigenformen (Satz 5.3.8) sind, deren Fourierkoeffizienten und Heckedefekte für alle p ganzalgebraisch aus $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$ sind, vgl. Folgerung 5.3.8.3.

Falls p gewöhnlich und daher $\text{ord}_p(\bar{v}_i) = k-1$, zerfällt das Polynom $X^2 - \tau_i(p)X + \chi(p)p^{k-1}$ schon über $\mathbb{K}_{\text{Hecke}}$

und $(\lambda_i)_p = -\frac{\sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \bar{v}_i^{j+1}}{p^{k-1}} \in (\mathcal{O}_{\text{Hecke}})_p$ ist ganzalgebraisch.

KOMPATIBILITÄT für teilerfremde Zahlen m und n :

Wir nehmen an, dass es $\mu \in \mathbb{N}, \nu_i(m), \nu_i(n) \in \mathcal{O}_{\text{Hecke}}$ gibt mit

$$\begin{aligned} \mu \tau'_i(m) + \nu_i(m) \tau_i(m) &\equiv 0 \pmod{N_m} \\ \mu \tau'_i(n) + \nu_i(n) \tau_i(n) &\equiv 0 \pmod{N_n}. \end{aligned}$$

Nach dem chinesischen Restsatz gibt es eine Lösung $\nu_i \in \mathcal{O}_{f_i}$, so dass

$$(5.6.2) \quad \mu \tau'_i(m) + \nu_i \tau_i(m) \equiv 0 \pmod{N_m}$$

und gleichzeitig

$$(5.6.3) \quad \mu \tau'_i(n) + \nu_i \tau_i(n) \equiv 0 \pmod{N_n}.$$

Bleibt zu zeigen:

$$(5.6.4) \quad \mu \tau'_i(mn) + \nu_i \tau_i(mn) \equiv 0 \pmod{N_{mn}}.$$

Die Kompatibilität von (5.6.2) und (5.6.3) ist kein Problem, da $\text{ggT}(N_m, N_n) = 1$.

Die Kompatibilität von (5.6.2) und (5.6.4) folgt aus $N_{mn} = \text{kgV}(N_m, N_n) = N_m N_n$:

Wegen schwacher Multiplikativität ist

$$\mu \tau'_i(mn) + \nu_i \tau_i(mn) \stackrel{\text{Folgerung 5.3.8.4}}{\equiv} (\mu \tau'_i(m) + \nu_i \tau_i(m)) \tau_i(n) \equiv 0 \pmod{N_m}$$

und aus Symmetriegründen ebenfalls

$$\mu\tau_i'(mn) + \nu_i\tau_i(mn) \equiv 0 \pmod{N_n}. \quad \checkmark$$

Eventuell muss man die $\beta(p)$ entsprechend den Konstanten in Folgerung 5.3.8.4 anpassen. Wegen starker Approximation ([Narkiewicz, Theorem 6.28]) gibt es eine simultane Lösung ν_i und von (5.6.3) damit λ_i in den endlichen (eingeschränkten) Adelen $(\mathbb{A}_{\mathbb{K}_{\text{Hecke}}})_S^\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Folgerung 5.6.2.1. Falls alle Primzahlen $p \nmid N$ gewöhnlich sind, kann man tatsächlich $C_m \equiv 0 \pmod{m^{k-1}}$ erreichen, d.h. es gibt Mock-Modulformen mit Koeffizienten in $\widehat{\mathcal{O}}_{\text{Hecke}} = \prod_p (\mathcal{O}_{\text{Hecke}})_p$.

Das und Satz 5.1.5 machen deutlich, dass Ramanujans Mock-Thetafunktionen kleines Gewicht ($k = \frac{1}{2}$) haben.

Beispiele. Für $H_1 := \Delta(j^2 - 1464j + 142236) = \frac{1}{q} + 47709536q^2 + 39862705122q^3 + \dots \in M_{12}^1(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ sehen die Ramanujan-Kongruenzen folgendermaßen aus, vgl. Hilfssatz 5.4.2:

$$\begin{aligned} h_1(2^m) &\equiv 0 \pmod{2^{3m+2}} \\ h_1(3^m) &\equiv 0 \pmod{3^{2m+3}} \\ h_1(5^m) &\equiv 0 \pmod{5^m} \\ h_1(7^m) &\equiv 0 \pmod{7^m} \\ h_1(2411^m) &\equiv 0 \pmod{2411^{m-1}} \\ h_1(p^m) &\equiv 0 \pmod{p^{\alpha m + \beta_p}} \end{aligned}$$

während es ein eingeschränktes Adel $\lambda \in \widehat{\prod}_S \mathbb{Q}_p$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} h_1(2^m) + \lambda \tau(2^m) &\equiv 0 \pmod{2^{8m+7}} \\ h_1(3^m) + \lambda \tau(3^m) &\equiv 0 \pmod{3^{9m+3}} \\ h_1(5^m) + \lambda \tau(5^m) &\equiv 0 \pmod{5^{10m+1}} \\ h_1(7^m) + \lambda \tau(7^m) &\equiv 0 \pmod{7^{10m}} \\ h_1(2411^m) + \lambda \tau(2411^m) &\equiv 0 \pmod{2411^{10m+1}} \\ h_1(p^m) + \lambda \tau(p^m) &\equiv 0 \pmod{p^{(11-\alpha)m + \beta_p}} \\ h_1(2^m 3^l) + \lambda \tau(2^m 3^l) &\equiv 0 \pmod{2^{8m+7} 3^{9l+3}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

simultan für große m gilt und diese Kongruenzen sind bestmöglich.

5.7. Mock-Jacobiformen

Verallgemeinerungen auf Jacobiformen halbganzen Gewichts sind naheliegend.

Definition 5.7.1. p -adische Modulformen der Stufe N lassen sich als Grenzwerte von Modulformen der Stufe N definieren, vgl. [Sofer]. p -adische Jacobiformen werden wie in [Guerzhoy 1] als p -adische Grenzwerte von Jacobiformen verstanden. Jacobiformen halbganzen Gewichts wurden in [Choie 1] definiert.

Satz 5.7.2. Für $k \in 2\mathbb{N}$, eine Primzahl p , $N \in \mathbb{N}$ mit $\text{kgV}(4, p) \mid N$ gibt es p -adische Jacobiformen vom Gewicht $\frac{5}{2} - k$, Index 1 zur Gruppe $\Gamma_0(N)$, die zugleich p -adische Grenzwerte von nichttrivialen Mock-Jacobiformen sind. Für $N = 1, k = 6$ oder $N = 2, k = 4, p \nmid N$ gibt es keine p -adischen Mock-Jacobiformen vom Gewicht $\frac{5}{2} - k$, Index 1 zur Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit ganzzahligen Koeffizienten.

BEWEIS. Wir verwenden halbganzes Gewicht, weil dann Differenzialoperatoren zur Verfügung stehen, die genau den Operatoren D^{k-1} und ξ_{2-k} für Modulformen vom Gewicht $2 - k$ entsprechen, vgl. [Choie Lim 1,

Theorem 1.2, 1.3], [Choi 1, 4. Analogue of Bol's result] und [Bri Ri]. Wir zeigen folgende Isomorphie:

$$(5.7.1) \quad \begin{aligned} J_{k+\frac{1}{2},1}^1(\Gamma_0(N)) &\cong M_k^+(\Gamma_0(4N)) \\ \phi(\tau, z) &\longleftrightarrow h(\tau) = h_0(4\tau) + h_1(4\tau), \end{aligned}$$

dabei ist $\phi(\tau, z) = h_0(\tau)\vartheta_{1,0}(\tau, z) + h_1(\tau)\vartheta_{1,1}(\tau, z)$ die bekannte Theta-Zerlegung [Eichler Zagier, Ch.II §5] der Jacobiform ϕ und

$$M_k^+(\Gamma_0(4N)) := \left\{ h \in M_k^1(\Gamma_0(4N)) \mid h(\tau) = \sum_{n \equiv 0 \vee 3 \pmod{4}} c_n e(n\tau) \right\}.$$

Aus dem Transformationsverhalten der ϑ -Funktionen folgt, dass $h \in M_k^+(\Gamma_0(4N))$, [Mani Rama, Theorem 3.1]. Umgekehrt folgt für Funktionen aus $M_k^+(\Gamma_0(4N))$ wegen [Atkin Lehner], dass die Vektorkomponenten $h_0(4\tau) = V_4 U_4 h$ und $h_1(4\tau) = h(\tau) - h_0(4\tau)$ $\Gamma_0(4N)$ -Modulformen sind. Das ist äquivalent zu $h_\mu \in M_k(\Gamma_0^0(N, 4))$. Außerdem gilt ([Tanigawa, Lemma 3]) für $\mu \in \{0, 1\}$:

$$h_\mu(\tau + 1) = e\left(-\frac{\mu^2}{4}\right) h_\mu(\tau).$$

Damit haben h_0, h_1 Transformationsverhalten für die Gruppe $\Gamma_0(N) = \left\langle \Gamma_0^0(N, 4), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ und das nach (5.7.1) entsprechende ϕ transformiert wie eine Jacobiform aus $J_{k+\frac{1}{2},1}^1(\Gamma_0(N))$. Es gibt p -adische Grenzwerte von Mock-Modulformen aus $\mathbb{M}_{2-k}^+(\Gamma_0(4N))$ mit derselben +Bedingung wie oben, z.B. $V_4 f$ mit f p -adischer Mock-Modulform vom Gewicht $2 - k$ zur Gruppe $\Gamma_0(N)$, vgl. [Bri Guer Ka, Theorem 1.1]. Diese Form entspricht unter der angegebenen Korrespondenz einer p -adischen Mock-Jacobiform, hier verstanden als

$$\phi(\tau, z) = \sum_{\mu=0}^1 h_\mu(\tau) \vartheta_{1,\mu}(\tau, z)$$

mit einer vektorwertigen p -adischen Mock-Modulform (h_μ). Der zweite Teil folgt aus Folgerung 5.5.1.1 bzw. der Tabelle in Anhang C.4.5. \square

Folgerung 5.7.2.1 (Ramanujan-Kongruenzen). *Für Jacobi-Spitzenformen sowie schwach-holomorphe Jacobiformen $\phi = \sum_{\substack{n,r \\ 4n-r^2 \neq 0}} c(n,r) q^n \zeta^r$ halbganzen Gewichts, Index 1 zur Gruppe $\Gamma_0(4)$ mit ganzzahligen Koeffizienten gibt es folgende Teilbarkeit:*

$$\exists b \in \mathbb{N} : \forall m \gg 1 : 4n - r^2 = 2^m \Rightarrow 2^{m\alpha_1 + b} \mid c(n, r),$$

α_1 ist die minimale Newtonsteigung des Heckeoperators T_2 auf den entsprechenden Spitzenformen.

BEWEIS. Betrachte den 2-Teil der ϕ unter (5.7.1) entsprechenden Modulform. \square

Definition 5.7.3. Unter p -adischen *overkonvergenten Jacobiformen* verstehen wir diejenigen Jacobiformen, die unter der Korrespondenz (5.7.1) p -adischen overkonvergenten Modulformen entsprechen.

Folgerung 5.7.3.1. *(Schwach-)Holomorphe sowie Mock-Jacobiformen halbganzen Gewichts, Index 1 zur Gruppe $\Gamma_0(4)$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten haben eine asymptotische 2-adische overkonvergente Spektralentwicklung.*

BEWEIS. Wähle $N = 4, p = 2$. Die Teilbarkeit von $\Gamma_0(16)$ -Modulformen weicht nicht sehr stark von der Situation für $\Gamma_0(2)$ ab. Einmal sind $\Gamma_0(2)$ -Modulformen gleichzeitig auch $\Gamma_0(16)$, andererseits haben Neufurmen für $\Gamma_0(2^m), m > 1$ nur ungerade Fourierkoeffizienten ([Atkin Lehner]), liefern also keinen Beitrag für die asymptotische Spektralentwicklung des p -Teils. Die geraden Fourierkoeffizienten kommen von $V_{2^m} \Upsilon_i$ für Stufe-2-Heckeformen Υ_i . Die asymptotische Spektralreihe von $V_{2^m} \Upsilon_i$ ist einfach $\frac{1}{v_i^m} \Upsilon_i$. Daher gibt es eine Spektralentwicklung in overkonvergente Eigenformen des U_2 -Operators. Das gilt nicht nur für holomorphe Modulformen, sondern aus den gleichen Gründen wie zuvor auch für schwach-holomorphe und Mock-Modulformen mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten positiven oder negativen Gewichts. Wir müssen noch sicherstellen, dass die $\Gamma_0(2)$ -Basisfunktionen aus dem $\Gamma_0^+(16)$ -Raum kommen. Wähle einfach $V_4 \Upsilon_i \sim \frac{1}{v_i^2} \Upsilon_i$ und die unter (5.7.1)

korrespondierenden Jacobiformen bilden eine Basis für den 2–Teil der overkonvergenten Jacobiformen. Beachte allerdings, dass der U_2 –Operator auf den Jacobiformen im allgemeinen keine Parallele hat. \square

Teil 3

Hintergrundmaterial, spezielle Funktionen und Tabellen

Allgemeines

A.1. Symmetrische Polynome

QUELLE: http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_polynomial

ELEMENTARSYMMETRISCHE POLYNOME:

Definition A.1.1. Seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned}\sigma_m(x_1, \dots, x_n) &:= 0 \text{ für } m \in \mathbb{Z}^- \vee m > n, \\ \sigma_0(x_1, \dots, x_n) &:= 1, \\ \sigma_m(x_1, \dots, x_n) &:= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}.\end{aligned}$$

In den Fourierkoeffizienten der schwachen Heckeformen tauchen Polynome auf, die symmetrisch in allen Hecke-Eigenwerten x_1, \dots, x_n außer einem x_j sind.

NEWTON-GIRARD FORMELN:

Sei $p_k := p_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j^k$, $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (x - x_1) \cdots (x - x_n)$. Dann gilt

$$(A.1.1) \quad \forall m \in \mathbb{N}: \sum_{k=0}^{\min(m,n)} a_k p_{m-k} = 0.$$

BEWEIS. http://en.wikipedia.org/wiki/Newton's_identities □

VOLLSTÄNDIGE HOMOGENE SYMMETRISCHE POLYNOME:

Definition A.1.2.

$$\begin{aligned}h_m(x_1, \dots, x_n) &:= 0 \text{ für } m \in \mathbb{Z}^-, \\ h_0(x_1, \dots, x_n) &:= 1, \\ h_m(x_1, \dots, x_n) &:= \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, \quad m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Kurzschreibweise für Argumente:

$$h_m(x_{i,j}) := h_m(x_i, \dots, x_j).$$

Falls die Argumente aus dem Zusammenhang klar sind, lassen wir sie ganz weg.

Die x_i sind die Hecke-Eigenwerte $\tau_i = \tau_i(p)$ von T_p auf $S_k(N, \chi)$; n ist die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte, nicht in jedem Fall $\dim S_k(\Gamma)$.

Hilfssatz A.1.3. Sei $n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_0, p(x) := (x - x_1) \cdots (x - x_n)$,

$$(Euler): \quad \sum_{j=1}^n \frac{x_j^i}{p'(x_j)} = \begin{cases} 0, & i = 0, \dots, n-2 \\ h_{i-n+1}(x_1, \dots, x_n), & i \geq n-1 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{f_j}{p'_T(\tau_j)} = \Delta_{p^{n-1}}^{\{N\}}$$

mit den Basisfunktionen für $S_k(N, \chi)$.

BEWEIS. Ein einfacher Beweis für Eulers Lemma findet sich in [Serre 3, Ch.III Discriminant and Different]. Es ist klar, dass die Spitzenformen $\Delta_{p^{n-1}}$ eine Darstellung in der Hecke-Basis haben. Sie wurde bereits berechnet, s. Abschnitt C.1.1. \square

A.2. Partielle Summation

Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ eine arithmetische Funktion, d.h. $a(x) = 0$ für $x \notin \mathbb{N}$, und für $0 < x < y$:

$$\sum'_{x \leq n \leq y} a(n) f(n) := \left(\sum_{x \leq n \leq y} a(n) f(n) \right) - \frac{1}{2} a(x) f(x) - \frac{1}{2} a(y) f(y),$$

$$\sum'_{n \leq x} a(n) f(n) := \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \left(\sum_{n \leq x} a(n) f(n) \right) - \frac{1}{2} a(x) f(x), & x \geq 1, \end{cases}$$

sei $A(x) = \sum'_{n \leq x} a(n)$ mit $A(z) := 0$ für $z < 1$ und $f : [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig bis auf endlich viele Sprungstellen $\notin \mathbb{N}_0$.

Dann gilt:

$$(A.2.1) \quad \sum'_{x \leq n \leq y} a(n) f(n) = \int_x^y f(t) dA(t).$$

Ist $f : (x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ sogar stetig differenzierbar, so gilt:

$$(A.2.2) \quad \sum'_{n \leq x} a(n) f(n) = A(x) f(x) - \int_1^x A(t) f'(t) dt.$$

Ist die Funktion f zusätzlich monoton fallend und positiv, so gilt:

$$(A.2.3) \quad \sum'_{x \leq n \leq y} a(n) f(n) = O\left(f(x) \max_{x \leq \xi \leq y} |A(\xi)|\right).$$

BEWEIS. vgl. Abel's identity [Apostol 1, Theorem 4.2]. Der Beweis funktioniert auch, wenn sich am Rand des Integrationsintervalls eine Singularität befindet. \square

A.3. Chinesischer Restsatz

Wir benötigen den Chinesischen Restsatz für nicht-teilerfremde Moduln.

Satz A.3.1. Seien $n_1, \dots, n_m \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_m \in \mathcal{O}$, ein Ring ganzalgebraischer Zahlen. Dann gibt es eine Lösung $x \in \mathcal{O}$ des Systems simultaner Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{n_1}, \\ x &\equiv a_2 \pmod{n_2}, \\ &\vdots \\ x &\equiv a_m \pmod{n_m}, \end{aligned}$$

genau dann wenn

$$\forall i, j: a_i \equiv a_j \pmod{\text{ggT}(n_i, n_j)}.$$

Diese Lösung ist eindeutig $\pmod{\text{kgV}(n_1, \dots, n_m)}$.

BEWEIS. [Mollin, Theorem 2.5 Generalized Chinese Remainder Theorem] \square

Folgerung A.3.1.1. Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen, $n_0 < n_1 < n_2 < \dots, m_0 < m_1 < m_2 < \dots$ natürliche Zahlen. Ein unendliches System simultaner Kongruenzen

$$\begin{aligned} x &\equiv a_0 \pmod{p^{n_0}} \\ x &\equiv a_1 \pmod{p^{n_1}} \\ x &\equiv a_2 \pmod{p^{n_2}} \\ &\vdots \\ x &\equiv b_0 \pmod{q^{m_0}} \\ x &\equiv b_1 \pmod{q^{m_1}} \\ x &\equiv b_2 \pmod{q^{m_2}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

hat genau eine Lösung in $x \in \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$, falls $\forall i < j$:

$$\begin{aligned} a_i &\equiv a_j \pmod{p^{n_i}} \\ b_i &\equiv b_j \pmod{q^{m_i}}. \end{aligned}$$

Diese Lösung x hat dann eine eindeutige Projektion auf eine Restklasse $y \in \mathbb{Z}/p^{n_i}q^{m_j}\mathbb{Z}$ mit

$$\begin{aligned} y &\equiv a_i \pmod{p^{n_i}} \\ y &\equiv b_j \pmod{q^{m_j}}. \end{aligned}$$

A.4. Primzahlen und Newton-Polygone

Definition A.4.1. [Narkiewicz, Ch.1 §2 Valuations and Exponents]

Sei K ein Zahlkörper. *Exponenten* von K sind surjektive Homomorphismen

$$n : K^* \rightarrow \mathbb{Z}$$

mit

$$n(x+y) \geq \min(n(x), n(y))$$

für alle $0 \neq x, y \in K$.

Sei \mathfrak{p} ein Primideal des Ringes \mathcal{O}_K der ganzen algebraischen Zahlen aus K . Schreibe $x\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^{n(x)}I$ mit $n(x) \in \mathbb{Z}$ und einem gebrochenen Ideal $I \subset \mathcal{O}_K$, teilerfremd zu \mathfrak{p} . Dann ist $n(x) := \text{ord}_{\mathfrak{p}}(x)$ der durch \mathfrak{p} induzierte Exponent von K oder die p -Ordnung.

Definition A.4.2. Sei $M \in \mathbb{N}, p$ eine Primzahl und

$$f(x) = x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_m \in L[x]$$

ein Polynom mit $a_m \neq 0$. Die untere konvexe Hülle des Polygonzuges

$$\left\{ (0, 0), (1, \text{ord}_p(a_1)), \dots, (m, \text{ord}_p(a_m)) \right\}$$

heißt *Newton-Polygon* zu $f(x)$ und $\alpha_j, j = 1, \dots, m$ ist die *Steigung* des Newton-Polygons im Intervall $[j-1, j]$.

Beispiele. Das charakteristische Polynom des Heckeoperators T_2 auf $S_{46}(\text{SL}_2(\mathbb{Z}))$ ist:

$$p_T(x) = x^3 - 3814272x^2 - 44544640241664x + 135250282417024401408 \in \mathbb{Z}[x], n(x) := \text{ord}_2(x);$$

Da $2^7 \parallel 3814272$, $2^{12} \parallel 44544640241664$ und $2^{25} \parallel 135250282417024401408$, sind die Steigungen $\alpha_1 = \alpha_2 = 6$ und $\alpha_3 = 13$.

Hilfssatz A.4.3. *Eigenschaften der Newtonsteigungen:*

$$\begin{aligned} \text{ord}_p(a_1) &\geq \alpha_1, & \text{,,} &= \text{“ für } \alpha_1 < \alpha_2; \\ \text{ord}_p(a_j) &\geq \alpha_1 + \dots + \alpha_j, & \text{,,} &= \text{“ für } \alpha_j < \alpha_{j+1}; \\ \text{ord}_p(a_n) &= \alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

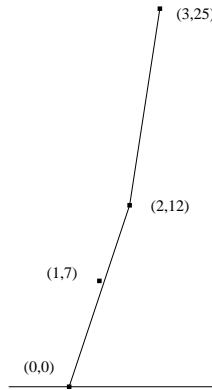


ABBILDUNG A.4.1. Newton-Polygon zu p_T für $S_{46}, \alpha_1 = \alpha_2 = 6, \alpha_3 = 13$

Satz A.4.4. Sei $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ der Ring der ganzen Zahlen des algebraischen Zahlkörpers \mathbb{K} , \mathfrak{p} ein Primideal von $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ und $L/\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ eine endliche Körpererweiterung des vervollständigten Körpers $\mathbb{K}_{\mathfrak{p}}$ mit Ring der ganzen Zahlen \mathcal{O}_L . Dann gilt

$$\mathfrak{p}\mathcal{O}_L = \mathfrak{P}^e$$

für das Primideal $\mathfrak{P} \subset \mathcal{O}_L$, Verzweigungsindex $e \in \mathbb{N}$.

BEWEIS. [Koch, Beweis von Satz 4.5.3], [Frö Tay, Theorem 16, Corollary] □

Satz A.4.5. Sei p eine Primzahl, \mathbb{K} ein p -adischer Körper mit Ring der ganzen Zahlen $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, a_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}, a_n \neq 0$ ein separables Polynom. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Steigungen des Newton-Polygons von f und $p\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{p}^e$ die Primidealzerlegung von (p) im Ring $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Dann ist $e\alpha_j$ der durch \mathfrak{p} induzierte Exponent von x_j :

$$(x_j)_{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}} = \mathfrak{p}^{e\alpha_j} I$$

mit einem zu \mathfrak{p} teilerfremden Ideal I .

BEWEIS. [Neukirch, Kap.II §6 Henselsche Körper (6.3) Satz] □

Hilfssatz A.4.6. Sei L wie in Definition 5.1.3. Für die Anzahl g der Primideale in $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$ über der Primzahl p gilt

$$\frac{[\mathbb{K}_{\text{Hecke}} : L]}{2!^{n_2} 3!^{n_3} 4!^{n_4} \dots} \mid g \mid [\mathbb{K}_{\text{Hecke}} : L],$$

wobei n_j die Anzahl der j -Tupel $(\alpha_{i+1}, \alpha_{i+2}, \dots, \alpha_{i+j})$ mit $\alpha_{i+1} = \dots = \alpha_{i+j}$ ist.

BEWEIS. Bekanntlich gilt für die Zerlegung $(p) = (\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g)^e$ in der Galoiserweiterung $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$

$$efg = [\mathbb{K}_{\text{Hecke}} : L].$$

Nach Satz A.4.5 ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{e\alpha_1} &\parallel \tau_1(p), \\ \mathfrak{p}^{e\alpha_2} &\parallel \tau_2(p), \\ &\vdots \\ \mathfrak{p}^{e\alpha_n} &\parallel \tau_n(p) \end{aligned}$$

bei geeigneter Wahl eines Primideals $\mathfrak{p} \mid p$. Die linken Seiten sind invariant unter der Aktion der Zerlegungsgruppe $Z_{\mathfrak{p}}$ von \mathfrak{p} . Die rechten Seiten werden permutiert:

$$\begin{aligned} \mathfrak{p}^{e\alpha_1} &\parallel \sigma(\tau_1(p)), \\ \mathfrak{p}^{e\alpha_2} &\parallel \sigma(\tau_2(p)), \\ &\vdots \\ \mathfrak{p}^{e\alpha_n} &\parallel \sigma(\tau_n(p)). \end{aligned}$$

Nun ist

$$\left\{ \left(\sigma(\tau_1(p)), \dots, \sigma(\tau_n(p)) \right) \mid \sigma \in Z_{\mathfrak{p}} \right\}$$

gleichmächtig mit $Z_{\mathfrak{p}}$. Aufgefasst als Permutationen der Indizes muss es sich um eine Untergruppe der Permutationsgruppe

$$\left\{ \sigma \in S_n \mid (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (\alpha_{\sigma(1)}, \dots, \alpha_{\sigma(n)}) \right\}$$

der Ordnung $2!^{n_2} 3!^{n_3} 4!^{n_4} \dots$ handeln. Also

$$|Z_{\mathfrak{p}}| = ef = \frac{[\mathbb{K}_{\text{Hecke}} : L]}{g} \mid 2!^{n_2} 3!^{n_3} 4!^{n_4} \dots$$

□

Folgerung A.4.6.1. Falls die Newtonsteigungen $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_s$ paarweise verschieden sind, ist die Primzahl p total zerlegt:

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_s \text{ in } \mathcal{O}_{f_1}$$

bzw.

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_g \text{ in } \mathcal{O}_{\text{Hecke}}.$$

BEWEIS. In diesen Fällen ist das Hauptideal (p) gleichzeitig in \mathcal{O}_{f_1} und $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$ total zerlegt, vgl. [Koch, 6.3 Primidealzerlegung in einem Zwischenkörper, Satz 6.3.2] □

Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

Gewicht	Newtonst.	$(2) = \prod \mathfrak{p}$ in \mathcal{O}_{f_1}	$(2) = \prod \mathfrak{p}$ in $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$	Teilbarkeit in $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$
12	3	2	2	$2^3 \parallel \tau$
16	3	2	2	$2^3 \parallel \tau$
18	4	2	2	$2^4 \parallel \tau$
20	3	2	2	$2^3 \parallel \tau$
22	5	2	2	$2^5 \parallel \tau$
24	3,7	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^7 \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^7\mathfrak{p}_2^3 \parallel \tau_2$
26	4	2	2	$2^4 \parallel \tau$
28	3,8	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^8 \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^8\mathfrak{p}_2^3 \parallel \tau_2$
30	6,6	2	2	$2^6 \parallel \tau_{1,2}$
32	3,7	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^7 \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^7\mathfrak{p}_2^3 \parallel \tau_2$
34	4,8	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1^4\mathfrak{p}_2^8 \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^8\mathfrak{p}_2^4 \parallel \tau_2$
36	3,9,9	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^9\mathfrak{p}_3^9 \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^9\mathfrak{p}_2^3\mathfrak{p}_3^9 \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^9\mathfrak{p}_2^9\mathfrak{p}_3^3 \parallel \tau_3$
38	5,8	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_1^5\mathfrak{p}_2^8 \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^8\mathfrak{p}_2^5 \parallel \tau_2$
40	3,7,11	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{1,1}\mathfrak{p}_{1,2}\mathfrak{p}_{2,1}\mathfrak{p}_{2,2}\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{3,2}$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^3\mathfrak{p}_3^7\mathfrak{p}_4^7\mathfrak{p}_5^{11}\mathfrak{p}_6^{11} \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^7\mathfrak{p}_2^{11}\mathfrak{p}_3^3\mathfrak{p}_4^{11}\mathfrak{p}_5^3\mathfrak{p}_6^7 \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^{11}\mathfrak{p}_2^7\mathfrak{p}_3^{11}\mathfrak{p}_4^3\mathfrak{p}_5^7\mathfrak{p}_6^3 \parallel \tau_3$
42	4,9,12	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{1,1}\mathfrak{p}_{1,2}\mathfrak{p}_{2,1}\mathfrak{p}_{2,2}\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{3,2}$	$\mathfrak{p}_1^4\mathfrak{p}_2^4\mathfrak{p}_3^9\mathfrak{p}_4^9\mathfrak{p}_5^{12}\mathfrak{p}_6^{12} \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^9\mathfrak{p}_2^{12}\mathfrak{p}_3^4\mathfrak{p}_4^{12}\mathfrak{p}_5^4\mathfrak{p}_6^9 \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^{12}\mathfrak{p}_2^9\mathfrak{p}_3^{12}\mathfrak{p}_4^4\mathfrak{p}_5^9\mathfrak{p}_6^4 \parallel \tau_3$
44	3,8,11	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{1,1}\mathfrak{p}_{1,2}\mathfrak{p}_{2,1}\mathfrak{p}_{2,2}\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{3,2}$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^3\mathfrak{p}_3^8\mathfrak{p}_4^8\mathfrak{p}_5^{11}\mathfrak{p}_6^{11} \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^8\mathfrak{p}_2^{11}\mathfrak{p}_3^3\mathfrak{p}_4^{11}\mathfrak{p}_5^3\mathfrak{p}_6^8 \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^{11}\mathfrak{p}_2^8\mathfrak{p}_3^{11}\mathfrak{p}_4^3\mathfrak{p}_5^8\mathfrak{p}_6^3 \parallel \tau_3$
46	6,6,13	$\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2$	$\mathfrak{p}_{1,1}^2\mathfrak{p}_{1,2}^2\mathfrak{p}_2^2$	$\mathfrak{p}_1^{12}\mathfrak{p}_2^{12}\mathfrak{p}_3^{26} \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^{12}\mathfrak{p}_2^{26}\mathfrak{p}_3^{12} \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^{26}\mathfrak{p}_2^{12}\mathfrak{p}_3^{12} \parallel \tau_3$
48	3,7,12,15	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$	$\prod_{i=1}^4 \mathfrak{p}_{i,1} \cdots \mathfrak{p}_{i,6}$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2^3\mathfrak{p}_3^3\mathfrak{p}_4^3\mathfrak{p}_5^3\mathfrak{p}_6^3\mathfrak{p}_7^7 \cdots \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^7\mathfrak{p}_2^3\mathfrak{p}_3^{12}\mathfrak{p}_4^{12}\mathfrak{p}_5^{15}\mathfrak{p}_6^{15} \cdots \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^{12}\mathfrak{p}_2^{15}\mathfrak{p}_3^7\mathfrak{p}_4^{15}\mathfrak{p}_5^7\mathfrak{p}_6^{12} \cdots \parallel \tau_3$ $\mathfrak{p}_1^{15}\mathfrak{p}_2^{12}\mathfrak{p}_3^{15}\mathfrak{p}_4^7\mathfrak{p}_5^{12}\mathfrak{p}_6^7 \cdots \parallel \tau_4$
50	4,8,13	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$	$\mathfrak{p}_{1,1}\mathfrak{p}_{1,2}\mathfrak{p}_{2,1}\mathfrak{p}_{2,2}\mathfrak{p}_{3,1}\mathfrak{p}_{3,2}$	$\mathfrak{p}_1^4\mathfrak{p}_2^4\mathfrak{p}_3^8\mathfrak{p}_4^8\mathfrak{p}_5^{13}\mathfrak{p}_6^{13} \parallel \tau_1$ $\mathfrak{p}_1^8\mathfrak{p}_2^{13}\mathfrak{p}_3^4\mathfrak{p}_4^{13}\mathfrak{p}_5^4\mathfrak{p}_6^8 \parallel \tau_2$ $\mathfrak{p}_1^{13}\mathfrak{p}_2^8\mathfrak{p}_3^{13}\mathfrak{p}_4^4\mathfrak{p}_5^8\mathfrak{p}_6^4 \parallel \tau_3$

TABELLE 1. Primteiler von Hecke-Eigenwerten

A.5. Rankin-Selberg Methode für gewichtete Funktionen

Einige Male wird die Rankin-Selberg Methode für Distributionen angewendet, die wie automorphe Formen vom Gewicht $2k$ bzw. $k + \frac{1}{2}$ transformieren.

Sei

$$E_{2k}(z, s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\frac{C\bar{z} + D}{Cz + D} \right)^k (\mathrm{Im} \gamma(z))^s$$

$$E_{k+\frac{1}{2}, \infty}(z, s) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-(2k+1)} (\mathrm{Im} \gamma z)^s$$

Satz A.5.1. Sei $f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m(y) e(mx)$ eine stetige Funktion in der oberen Halbebene \mathcal{H} , die wie automorphe Formen vom Gewicht κ mit $\kappa \in 2\mathbb{Z} \vee \kappa - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ transformiert und in der Spitze $y \rightarrow \infty$ genügend schnell verschwindet, z.B. $f(x+iy) = O(y^{-N})$ für alle $N > 0, y \rightarrow \infty$; so ist

$$(E_\kappa(\cdot, s), f)_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} = \int_0^\infty \overline{c_0(y)} y^{s-2} dy,$$

$$(E_{\kappa, \infty}(\cdot, s), f)_{\Gamma_0(4)} = \int_0^\infty \overline{c_0(y)} y^{s-2} dy$$

für $\mathrm{Re} s \gg 1$.

BEWEIS. Sei zunächst $\kappa \in 2\mathbb{Z}$:

$$(E_{2k}(\cdot, s), f(\cdot)) = \int_{\mathfrak{F}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \left(\frac{C\bar{z} + D}{Cz + D} \right)^k (\mathrm{Im} \gamma z)^s \overline{\left(\frac{Cz + D}{C\bar{z} + D} \right)^k f(\gamma z)} d\mu$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} \int_{\gamma \mathfrak{F}} (\mathrm{Im} z)^s \overline{f(z)} d\mu = \int_0^\infty y^s \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(z) dx \frac{dy}{y^2} = \int_0^\infty y^{s-2} \overline{c_0(y)} dy.$$

Für κ halbzahlrig fügen sich die Translatierten des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}_0(4)$ auch wieder zu dem Streifen $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}$ zusammen

$$\int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}} E_{\kappa, \infty}(z, s) \overline{f(z)} \frac{dx dy}{y^2} = \int_{\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} j(\gamma, z)^{-2k-1} (\mathrm{Im} \gamma z)^s \overline{j(\gamma, z)^{-2k-1} f(\gamma z)} d\mu$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma_0(4)} \int_{\gamma(\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H})} y^s \overline{f(z)} d\mu = \int_0^\infty y^{s-2} \overline{c_0(y)} dy.$$

Vertauschung von Integration und Summation sind für absolut konvergente Reihen zulässig. \square

A.6. Die Poincaréreihe $\frac{y^s}{2} \sum_{b^2-4ac=d} \frac{1}{|az^2+bz+c|^s}$

Die Exponentialsummen $S_a(n, d)$ traten zum ersten Mal bei den Fourierkoeffizienten der holomorphen Modulform $\sum_{\substack{(a,b,c) \\ b^2-4ac=d}} \frac{1}{(az^2+bz+c)^k}$ auf, vgl. [Zagier 1, Appendix]. Sie haben auch etwas mit der nicht-holomorphen

Poincaréreihe $Z_d(z, s)$, definiert für $\mathrm{Re} s > 1$ durch $\frac{y^s}{2} \sum_{\substack{(a,b,c) \\ b^2-4ac=d}} \frac{1}{|az^2+bz+c|^s}$, zu tun. Sie liefern die analytische

Fortsetzung dieser Funktion. Diese Funktion hat folgende Eigenschaften

Satz A.6.1. Die Funktion $Z_d(z, s) := \frac{y^s}{2} \sum_{\substack{(a,b,c) \\ b^2-4ac=d}} \frac{1}{|az^2+bz+c|^s}, z \in \mathcal{H}, \mathrm{Re} s > 1, d \in \mathbb{D}^{0+}$ ist holomorph in

$\mathrm{Re} s > 1$ und reell-analytisch in $z = x + iy \in \mathcal{H}$. Sie erfüllt folgende Gleichung

$$(A.6.1) \quad y^2 \left(\frac{\partial^2 Z_d(z, s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z_d(z, s)}{\partial y^2} \right) = s(s-1) Z_d(z, s) - s^2 d Z_d(z, s+2).$$

In z ist sie $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -invariant: $Z_d(\gamma z, s) = Z_d(z, s)$ für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Sie lässt sich auf $\mathrm{Re} s > -1$ analytisch fortsetzen mit Polen bei $s = 1$ mit Residuum $\frac{6L(1, d)}{\pi}$, bei $s = t_j = \frac{1}{2} + \nu_j$ entsprechend den Maaßformen mit Residuen

$$\frac{2^{t_j-1} \Gamma\left(\frac{t_j+1}{2}\right) \Gamma(\nu_j)}{\Gamma(t_j) d^{\frac{t_j}{2}} \Gamma\left(\frac{t_j}{2}\right)} \sum_l C_d(f_{j,l}) \overline{f_{j,l}(-\bar{z})},$$

bei $s = t_j - 1, \frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2} - 1$, wobei ρ eine Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion ist, und bei $s = -\frac{1}{2}$. Für Quadratzahlen d kommt noch ein Pol bei $s = \frac{1}{2}$ hinzu.

BEWEIS. Sei zunächst $d \neq \square$. Man kann $Z_d(z, s)$ mit der Δ -Eigenfunktion $\sum_{Q, |Q|=d} \frac{1}{\left(a\left|z + \frac{b}{2a}\right|^2\right)^s}$ vergleichen:

$$\begin{aligned} Z_d(z, s) &= \frac{y^s}{2} \sum_{b^2-4ac=d} \frac{1}{|az^2+bz+c|^s} \approx \frac{y^s}{2} \sum_{b^2-4ac=d} \frac{1}{|az^2+bz+\frac{b^2}{4a}|^s} \\ &= \frac{y^s}{2} \sum_{a \neq 0} \frac{1}{|a|^s} \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \frac{1}{\left|z + \frac{b}{2a}\right|^{2s}} = y^s \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^s} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left|z + n + \frac{b}{2a}\right|^{2s}} \\ &= y^s \sum_{a=1}^{\infty} \frac{1}{a^s} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \left(\frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} y^{1-2s} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} y^{\frac{1}{2}-s} \sum_{r \neq 0} |r|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y) e^{2\pi i r x} e^{\pi i r \frac{b}{a}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s} y^{1-s} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} \sqrt{y} \sum_{r \neq 0} |r|^{s-\frac{1}{2}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(r, d)}{a^s} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y) e(rx) \\ \text{(A.6.2)} \quad &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right) \zeta(s) L(s, d)}{\Gamma(s) \zeta(2s)} y^{1-s} + \frac{4\pi^s}{\Gamma(s)} \sqrt{y} \sum_{r=1}^{\infty} r^{s-\frac{1}{2}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(r, d)}{a^s} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y) \cos(2\pi r x), \quad \mathrm{Re} s > 1, \end{aligned}$$

vgl. [Zagier 10, Appendix A (3)].

Für $d = \square$ kommt noch folgender Beitrag hinzu:

(A.6.3)

$$y^s \sum_{c \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\left|\sqrt{d}z + c\right|^s} = y^s \left\{ \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(s - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} (\sqrt{d}y)^{1-2s} + \frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} (\sqrt{d}y)^{\frac{1}{2}-s} \sum_{r \neq 0} |r|^{s-\frac{1}{2}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|r|y) e(\sqrt{d}x) \right\}$$

Der Fehler, der bei der Näherung gemacht wurde, beträgt:

$$\begin{aligned} \Delta(z, s) &:= \frac{y^s}{2} \sum_{\substack{b^2-4ac=d \\ a \neq 0}} \left(\frac{1}{|az^2+bz+c|^s} - \frac{1}{|az^2+bz+\frac{b^2}{4a}|^s} \right) \\ &= y^s \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \frac{1}{|a|^s} \left(\frac{1}{\left|z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right|^s} - \frac{1}{\left|z + \frac{b}{a}\right|^{2s}} \right). \end{aligned}$$

Mit $t := z + \frac{b}{2a}$, d.h. $|t| > y$, $\varepsilon := \frac{d}{4a^2 t^2} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, also $|\varepsilon| < \frac{d}{4a^2 y^2}$ ist

$$\Delta(z, s) = y^s \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \frac{1}{a^s} \left(\frac{1}{|t^2 - t^2 \varepsilon|^s} - \frac{1}{|t|^{2s}} \right) = y^s \sum_{a=1}^{\infty} \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \frac{1}{|at^2|^s} \left(\frac{1}{|1 - \varepsilon|^s} - 1 \right)$$

oder

$$\text{(A.6.4)} \quad |\Delta(z, s)| \leq \frac{1}{y^{\mathrm{Re} s}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(s)}{a^s} \left| \frac{1}{|1 - \varepsilon|^s} - 1 \right|.$$

Folgende Dinge sind klar:

- (1) $\varepsilon \in \mathbb{C}, |\varepsilon| < \frac{1}{4}, \varepsilon' := \left| \frac{1}{1-\varepsilon} \right| - 1 \Rightarrow |\varepsilon'| < \frac{4}{3} |\varepsilon|$
- (2) $\varepsilon' \in \mathbb{R}, |\varepsilon'| < \frac{1}{3} \Rightarrow |\log(1+\varepsilon')| < \frac{5}{4} |\varepsilon'| < \frac{5}{3} |\varepsilon|$ mit der Potenzreihe des Logarithmus;
- (3) Voraussetzungen wie in (1); $|s\varepsilon| < \frac{1}{5} \Rightarrow \left| \frac{1}{|1-\varepsilon|^s} - 1 \right| = \left| e^{s \log(1+\varepsilon')} - 1 \right| \leq 3 |s\varepsilon|$ mit der Potenzreihe des Logarithmus.

Für a genügend groß sind die Voraussetzungen von Punkt (3) erfüllt: Wähle $a(y, s) \in \mathbb{N}$, so dass $|\varepsilon| = \frac{d}{4a^2|t|^2} < \frac{1}{4}, |s\varepsilon| < \frac{1}{5}$ für $a > a(y, s)$; dann ist

$$\begin{aligned} |\Delta(z, s)| &\stackrel{\text{(A.6.4)}}{\leq} \frac{1}{y^{\operatorname{Re} s}} \sum_{a=1}^{a(y,s)} \frac{N_d(a)}{a^s} \left| \frac{1}{|1-\varepsilon|^s} - 1 \right| + \frac{3|s|d}{4y^{\operatorname{Re} s+2}} \sum_{a>a(y,s)} \frac{N_d(a)}{a^{\operatorname{Re} s+2}} \\ &\leq \text{konst}(z, s) + \frac{3|s|d}{4y^{\operatorname{Re} s+2}} \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^{\operatorname{Re} s+2}} < \text{konst}(z, s) < \infty \quad \text{für } \operatorname{Re} s > -1. \end{aligned}$$

Es ist ersichtlich, dass die Reihe für $\Delta(z, s), \operatorname{Re} s > -1$ absolut konvergiert und daher nach dem Majorantenkriterium auch lokal gleichmäßig [Fischer Lieb, Kap. I, Satz 7.2]. Also ist $\Delta(z, s)$ holomorph in s für $\operatorname{Re} s > -1$, vgl. [Fischer Lieb, Kap. III]; nach entsprechenden Sätzen der reellen Analysis [Forster 1] auch reell-analytisch in $x+iy \in \mathcal{H}$ (die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Ableitungen lässt sich ähnlich zeigen!). Die Fourierreihe (A.6.2) ist meromorph in der gesamten s -Ebene und für $x+iy \in \mathcal{H}$ reell-analytisch (beachte $\left| \sum_{a=1}^{\infty} \frac{S_a(r,d)}{a^s} \right| \leq \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^{\operatorname{Re} s}} < \infty$ für $\operatorname{Re} s > 1$ und Satz 2.5.2.1).

Die Gleichung (A.6.1) ergibt sich folgendermaßen: Für $z = x+iy$ sei $N(x, y) := |az^2+bz+c|^2$. Es gilt

$$(A.6.5) \quad y(N_x^2 + N_y^2) - 4N \cdot N_y = -4dyN, \quad \rightarrow \text{MATHEMATICA, also}$$

$$(A.6.6) \quad y^2 \frac{y^2 N_x^2 + (2N - yN_y)^2}{N^4} = \frac{y^2}{N^4} \{y^2(N_x^2 + N_y^2) + 4N^2 - 4NN_y y\}$$

$$\stackrel{\text{(A.6.5)}}{=} \frac{4y^2}{N^2} - \frac{4d \cdot y^4}{N^3} = \frac{4g^2}{y^2} (1 - d \cdot g) \quad \text{für } g = g(x, y) = \frac{y^2}{N}.$$

Nun ist $g_x = y^2 \frac{N_x}{N^3}, g_y = \frac{y(2N - yN_y)}{N^2}$, die linke Seite von (A.6.6), also $= g_x^2 + g_y^2$. (A.6.6) lässt sich umformen zu

$$(A.6.7) \quad y^2 \frac{s(s-2)}{4} g^{\frac{s}{2}-2} (g_x^2 + g_y^2) + s g^{\frac{s}{2}} (1 - 2dg) = s(s-1) g^{\frac{s}{2}} - d \cdot s^2 g^{\frac{s}{2}+1}.$$

Die linke Seite von (A.6.7) ist

$$\begin{aligned} &y^2 \left\{ \frac{s}{2} \left(\frac{s}{2} - 1 \right) g^{\frac{s}{2}-2} g_x^2 + \frac{s}{2} g^{\frac{s}{2}-1} g_{xx} + \frac{s}{2} g^{\frac{s}{2}-1} g_{yy} + \frac{s}{2} \left(\frac{s}{2} - 1 \right) g^{\frac{s}{2}-2} g_y^2 \right\} \\ &= y^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{s}{2} g^{\frac{s}{2}-1} g_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{s}{2} g^{\frac{s}{2}-1} g_y \right) \right\} = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) g^{\frac{s}{2}} \end{aligned}$$

Identität (A.6.7) sagt daher

$$y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{y^s}{|az^2+bz+c|^s} = s(s-1) \frac{y^s}{|az^2+bz+c|^s} - d \cdot s^2 \frac{y^{s+2}}{|az^2+bz+c|^{s+2}}.$$

Das ist die Aussage (A.6.1).

Für die Residuen betrachte (A.6.2). $s=1$ ist klar. Die Residuen für $s = \frac{\rho}{2}, 0 < \operatorname{Re} \rho < 1, \zeta(2\rho) = 0$ kommen vom konstanten Term von (A.6.2). Die Residuen der Pole auf der Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ entsprechend den Maaßformen sind selbst Maaßformen, wie man sich an der Gleichung (A.6.1) und Satz 2.5.2.1 klar macht:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=\nu_j=\frac{1}{2}+t_j} Z_d(z, s) &= \sum_{n \neq 0} \frac{2\pi^{t_j}}{\Gamma(t_j)} \sqrt{y} |n|^{\nu_j} \frac{2^{t_j-2} \Gamma\left(\frac{t_j+1}{2}\right) \Gamma(\nu_j)}{|n|^{\nu_j} \pi^{t_j} d^{\frac{t_j}{2}} \Gamma\left(\frac{t_j}{2}\right)} \sum_l \overline{\gamma_{n,j,l}} C_d(f_{j,l}) K_{\nu_j}(2\pi |n| y) e(nx) \\ &= \frac{2^{t_j-1} \Gamma\left(\frac{t_j+1}{2}\right) \Gamma(\nu_j)}{d^{\frac{t_j}{2}} \Gamma(t_j) \Gamma\left(\frac{t_j}{2}\right)} \sum_l C_d(f_{j,l}) \overline{f_{j,l}(-\bar{z})} \end{aligned}$$

mit den Maaßformen zum Spektralparameter ν_j

$$f_{j,l}(z) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \gamma_{m,j,l} \sqrt{y} K_{\nu_j}(2\pi |m| y) e(mx).$$

Für $d = \square$ kommt noch ein Pol bei $s = \frac{1}{2}$ von (A.6.3) dazu. \square

A.7. Spezielle Funktionen

A.7.1. Diracsche δ -Distribution. vgl. [Messiah, Anhang A Distributionen];

Definition A.7.1.1. Die Diracsche δ -Distribution ist dasjenige (bei gleichmäßiger Konvergenz der Testfunktionen) stetige lineare Funktional auf der Menge der von unten halbstetigen Testfunktionen $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\delta(x)[f(x)] := f(0).$$

Man kann die δ -Distribution auch symbolisch so darstellen:

$$\lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + x^2};$$

das bedeutet, dass man (im Grenzwert) dasselbe Ergebnis erhält, indem man gegen diese Funktionenfolge integriert. Etwas allgemeiner definiert man

$$\delta(g(x))[f(x)] := \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta f(x)}{\delta^2 + g(x)^2} dx,$$

oder die Schreibweise

$$\int_M \delta(g(z)) f(z) dz := \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_M \frac{\delta f(z)}{\delta^2 + g(z)^2} dz$$

für eine Umgebung $M \subset \mathbb{C}$ der Nullstellenmenge von g .

Hilfssatz A.7.1.2. Für $a \neq 0$ ist $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$.

Hilfssatz A.7.1.3. Für alle Nullstellen x_0 von $f(x)$, falls nicht zugleich $g(x_0) = 0$, gilt:

$$\delta\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \sum_{\substack{x_0, \\ f(x_0)=0}} \delta\left(\frac{f(x)}{g(x_0)}\right) = \sum_{\substack{x_0, \\ f(x_0)=0}} |g(x_0)| \cdot \delta(f(x))$$

Hilfssatz A.7.1.4. Ist die Funktion g stetig differenzierbar in den Nullstellen x_0 von g mit Ableitung $\neq 0$ und f dort stetig, so gilt

$$\delta(g(x))[f(x)] = \sum_{\substack{x_0, \\ g(x_0)=0}} \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|}$$

anders ausgedrückt

$$\delta(g(x)) = \sum_{\substack{x_0, \\ g(x_0)=0}} \frac{\delta(x - x_0)}{|g'(x_0)|}.$$

BEWEIS.

$$\delta(g(x))[f(x)] = \lim_{\delta \searrow 0} \sum_{\substack{x_0, \\ g(x_0)=0}} \frac{1}{\pi} \int_{U(x_0)} \frac{\delta f(x)}{\delta^2 + g(x)^2} dx = \lim_{\delta \searrow 0} \frac{1}{\pi} \sum_{x_0} \int_{g(U(x_0))} \frac{\delta f(g^{-1}(z))}{(\delta^2 + z^2) |g'(g^{-1}(z))|} dz$$

mit der Substitution $z = g(x)$.¹ Beiträge ergeben sich nur in Umgebungen $U(x_0)$ der Nullstellen x_0 von g . Dort existiert eine eindeutige Umkehrfunktion g^{-1} und für beliebiges $\varepsilon > 0$ und genügend kleine Umgebungen $U = U(x_0)$ ist aus Stetigkeitsgründen

$$\left| \int_{g(U)} \frac{\delta f(g^{-1}(z))}{(\delta^2 + z^2) g'(g^{-1}(z))} dz - \int_{g(U)} \frac{\delta f(x_0)}{(\delta^2 + z^2) |g'(x_0)|} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

und für $\delta < \delta_0(\varepsilon)$:

$$\left| \int_{g(U)} \frac{\delta f(x_0)}{(\delta^2 + z^2) |g'(x_0)|} dz - \frac{f(x_0)}{|g'(x_0)|} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

□

A.7.2. Spezielle Besselfunktionen.

Definition A.7.2.1. Sei $\nu \in \mathbb{N}_0$:

$$L_\nu(z) := -Y_\nu(z) - \frac{2}{\pi} K_\nu(z),$$

$$M_\nu(z) := -Y_\nu(z) + \frac{2}{\pi} K_\nu(z).$$

Die klein geschriebenen Funktionen ergeben sich daraus durch Subtraktion der Singularität bei Null, z.B.

$$\begin{aligned} l_0(z) &:= L_0(z) - \frac{1}{\pi} z^2 \log z, & m_0(z) &:= M_0(z) + \frac{4}{\pi} (\log z + \gamma - \log 2), \\ l_1(z) &:= L_1(z) + \frac{2z}{\pi} \log \frac{z}{2}, & m_1(z) &:= M_1(z) - \frac{4}{\pi z}, \\ l_2(z) &:= L_2(z) - \frac{2}{\pi}, & m_2(z) &:= M_2(z) - \frac{8}{\pi z^2}, \\ l_3(z) &:= L_3(z) - \frac{4}{\pi z}, & m_3(z) &:= M_3(z) - \frac{32}{\pi z^3}. \end{aligned}$$

ASYMPTOTISCHE BEZIEHUNGEN, gleichmäßig in $0 < z < 1 - \varepsilon$:

$$\begin{aligned} L_0(z) &= \frac{1}{\pi} z^2 \log z + O(z^2), \\ L_1(z) &= -\frac{2}{\pi} z \log z + O(z), \\ L_2(z) &= \frac{2}{\pi} + O(z^4 \log z), \\ L_3(z) &= \frac{4}{\pi z} + O(z^3 \log z), \\ M_0(z) &= -\frac{4}{\pi} \log z + O(1), \\ M_1(z) &= \frac{4}{\pi z} + O(z^3 \log z), \\ M_2(z) &= \frac{8}{\pi z^2} + O(z^2 \log z), \\ M_3(z) &= \frac{32}{\pi z^3} + O(z). \end{aligned}$$

¹ g dreht die Integrationsgrenzen um, falls $g'(x_0) < 0$

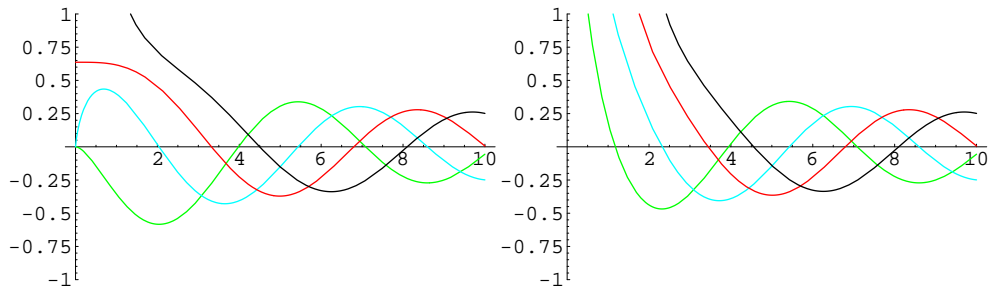


ABBILDUNG A.7.2.1. L_0, L_1, L_2, L_3 M_0, M_1, M_2, M_3

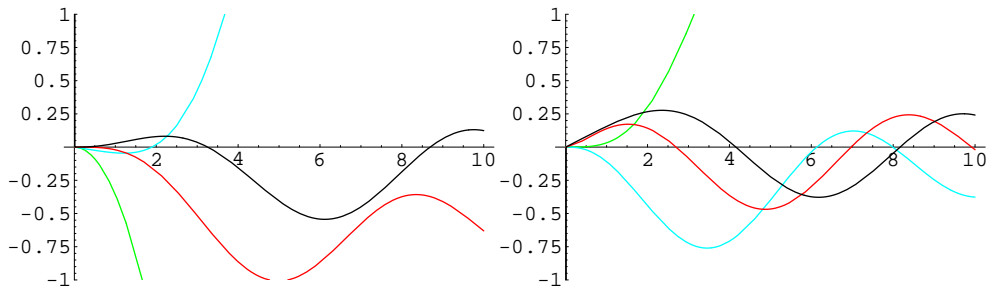


ABBILDUNG A.7.2.2. l_0, l_1, l_2, l_3 m_0, m_1, m_2, m_3

vgl. [AS, Besselfunctions of integer order]. *gleichmäßig in* $0 < z < \infty$:

$$(A.7.2.1) \quad L_0(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$(A.7.2.2) \quad L_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{8z} \cos\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{c_2}{z^2} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + \dots + O\left(\frac{1}{z^t}\right) \right\},$$

$$L_2(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$L_3(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right).$$

$$M_0(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$M_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$M_2(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right),$$

$$M_3(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z + \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{z^{\frac{3}{2}}}\right).$$

vgl. [AS].

ABLEITUNGEN ($t, d, x > 0, n \in \mathbb{N}_0$):

$$(A.7.2.3) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \sqrt{\frac{td}{x}} L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \right\} = 2\pi M_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right),$$

$$(A.7.2.4) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \frac{td}{x} L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \right\} = 2\pi\sqrt{\frac{td}{x}} M_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right),$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{td}{x} M_2 \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right) \right\} = 2\pi \sqrt{\frac{td}{x}} L_1 \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right), \\
& \frac{d}{dt} \left\{ \frac{td}{x} m_2 \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right) \right\} = 2\pi \sqrt{\frac{td}{x}} L_1 \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right), \\
\text{(A.7.2.5)} \quad & \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{x}{td} \right)^{\frac{n}{2}} L_n \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right) \right\} = -2\pi \left(\frac{x}{td} \right)^{\frac{n+1}{2}} L_{n+1} \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right), \\
& \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{x}{td} \right)^{\frac{n}{2}} l_n \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right) \right\} = -2\pi \left(\frac{x}{td} \right)^{\frac{n+1}{2}} l_{n+1} \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right), \\
& \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{x}{td} \right)^{\frac{1}{2}} m_1 \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right) \right\} = -2\pi \left(\frac{x}{td} \right) m_2 \left(4\pi \sqrt{\frac{xt}{d}} \right),
\end{aligned}$$

vgl. [Wilton 1, 3.].

A.7.3. Kummer Funktion.

Definition A.7.3.1. Sei $b \notin \mathbb{Z}_0^-, a, b \in \mathbb{C}$. Dann ist

$${}_1F_1(a; b; z) := 1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \text{ ganz in } z$$

eine Lösung der Differenzialgleichung

$$zF'' + (b-z)F' - aF = 0, F(0) = 1, F_z(0) = \frac{a}{b}.$$

INTEGRALDARSTELLUNG:

Für $\operatorname{Re} b > \operatorname{Re} a > 0$ ist

$${}_1F_1(a; b; z) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{z\tau} \tau^{a-1} (1-\tau)^{b-a-1} d\tau.$$

ASYMPTOTIK: $z \in \mathbb{R}^+, z \rightarrow \infty$

$$\text{(A.7.3.1)} \quad a \in \mathbb{Z}^-, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} : {}_1F_1(a; b; z) \sim \frac{(-z)^{-a}}{(b)_{-a}}, \text{ Polynom}$$

$$\text{(A.7.3.2)} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_0^- : {}_1F_1(a; b; z) \sim \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}, \text{ [AS, 13.1.4]}$$

KUMMER-TRANSFORMATION: [AS, (13.1.27)]

$$\text{(A.7.3.3)} \quad e^{-X} {}_1F_1\left(-n; \frac{1}{2}; X\right) = {}_1F_1\left(n + \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -X\right)$$

A.7.4. Whittakerfunktionen.

Definition A.7.4.1. [Magnus Ober, 6. Kap. §2]

Die Whittakerfunktionen sind Lösungen der Differenzialgleichung

$$F'' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) F = 0.$$

Für $\operatorname{Re}(\mu + \frac{1}{2} - \kappa) > 0, \operatorname{Re} z > 0$

$$(A.7.4.1) \quad W_{\kappa, \mu}(z) := \frac{z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2} - \kappa)} \int_0^{\infty} e^{-z\tau} \tau^{\mu - \kappa - \frac{1}{2}} (1 + \tau)^{\mu + \kappa - \frac{1}{2}} d\tau, \text{ [AS, 13.2.5]}$$

$$(A.7.4.2) \quad = \frac{z^{\mu + \frac{1}{2}}}{4^{\mu} \Gamma(\mu + \frac{1}{2} - \kappa)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{zu}{2}} (u+1)^{\mu + \kappa - \frac{1}{2}} (u-1)^{\mu - \kappa - \frac{1}{2}} du \text{ Subst. } u = 2\tau + 1$$

$$(A.7.4.3) \quad = e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2} + \mu} U\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, z\right) \text{ [AS, 13.1.33]}$$

mit Kummers hypergeometrischer Funktion $U(a, b, z) := \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{b-a-1} dt$.

Für $\mu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}^-$ ist

$$(A.7.4.4) \quad M_{\kappa, \mu}(z) := e^{-\frac{z}{2}} z^{\frac{1}{2} + \mu} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; z\right)$$

eine weitere Lösung der Whittaker-DGL, eindeutig für $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$. Man kann holomorph auf dieselbe Riemannsche Fläche wie $z^{\frac{1}{2} + \mu}$ fortsetzen.

Für $\operatorname{Re}(\frac{1}{2} + \mu + \kappa), \operatorname{Re}(\frac{1}{2} + \mu - \kappa) > 0$ ist

$$M_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(1 + 2\mu) z^{\mu + \frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu + \kappa) \Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)} \int_0^1 e^{z\tau} \tau^{\mu - \kappa - \frac{1}{2}} (1 - \tau)^{\mu + \kappa - \frac{1}{2}} d\tau.$$

EIGENSCHAFTEN:

$$(A.7.4.5) \quad W_{\kappa, \mu}(z) = W_{\kappa, -\mu}(z), \text{ [GR, 9.232.1]}$$

$$(A.7.4.6) \quad \begin{aligned} \overline{W_{\kappa, \mu}(z)} &= W_{\kappa, \bar{\mu}}(z) \\ \overline{M_{\kappa, \mu}(z)} &= M_{\kappa, \bar{\mu}}(z) \end{aligned} \text{ für } \kappa \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^+$$

$$(A.7.4.7) \quad W_{\kappa, \mu}(z) = \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu - \kappa)} M_{\kappa, \mu}(z) + \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2} + \mu - \kappa)} M_{\kappa, -\mu}(z), \text{ [AS, 13.1.34]}$$

$$(A.7.4.8) \quad M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-i\pi(\mu + \frac{1}{2})} M_{-\kappa, \mu}(ze^{i\pi}), \text{ [Magnus Ober, 6. Kap. §2]}$$

MAASSOPERATOREN: [Bruggeman 1, 4.1]

Für $2k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} E_k^+ \left\{ W_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \right\} &= \begin{cases} -2 W_{(\frac{k}{2} + 1) \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx), & n > 0 \\ 2 \left(\frac{k}{2} + s\right) \left(\frac{k}{2} + 1 - s\right) W_{(\frac{k}{2} + 1) \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx), & n < 0 \end{cases} \\ E_k^- \left\{ W_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \right\} &= \begin{cases} 2 \left(\frac{k}{2} - s\right) \left(\frac{k}{2} + s - 1\right) W_{(\frac{k}{2} - 1) \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx), & n > 0 \\ -2 W_{(\frac{k}{2} - 1) \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx), & n < 0 \end{cases} \\ E_k^+ \left\{ M_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \right\} &= (2s + k) M_{(\frac{k}{2} + 1) \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \\ E_k^- \left\{ M_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \right\} &= (2s - k) M_{(\frac{k}{2} - 1) \operatorname{sign} n, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n| y) e(nx) \end{aligned}$$

Sei im folgenden $y > 0$ bzw. $y \rightarrow \infty$

$$(A.7.4.9) \quad W_{0,\mu}(y) = \sqrt{\frac{y}{\pi}} K_{\mu}\left(\frac{y}{2}\right), \text{ [GR, 9.235.2]}$$

$$(A.7.4.10) \quad W_{\kappa,\mu}(y) \sim e^{-\frac{y}{2}} y^{\kappa} \text{ [GR, 9.227]}$$

$$(A.7.4.11) \quad W_{\kappa,\kappa-\frac{1}{2}}(y) = M_{\kappa,\kappa-\frac{1}{2}}(y) = e^{-\frac{y}{2}} y^{\kappa}, \text{ [Bruinier 1, (1.31)]}$$

$$(A.7.4.12) \quad W_{\kappa,\kappa+\frac{1}{2}}(y) = e^{\frac{y}{2}} y^{-\kappa} \Gamma(1+2\kappa, y)$$

$$(A.7.4.13) \quad W_{-\frac{3}{4},\frac{1}{4}}(y) = e^{\frac{y}{2}} \sqrt[4]{y} \beta(y), \text{ (A.7.4.12).}$$

Mit (A.7.3.1) und (A.7.3.1) ist

$$(A.7.4.14) \quad M_{\kappa,\mu}(y) \sim \begin{cases} \frac{\Gamma(1+2\mu)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu-\kappa)} e^{\frac{y}{2}} y^{-\kappa}, & \text{für } \kappa - \mu + \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}, \mu \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}^- \\ \frac{(-1)^{\kappa-\mu-\frac{1}{2}}}{(2\mu+1)_{\kappa-\mu-\frac{1}{2}}} e^{-\frac{y}{2}} y^{\kappa}, & \text{sonst, Nenner } \neq 0 \end{cases}$$

$$(A.7.4.15) \quad M_{\frac{k}{2},\frac{1-k}{2}}(y) = (-1)^k (k-1) e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{k}{2}} \gamma(1-k, -y) \sim (k-1) e^{\frac{y}{2}} y^{-\frac{k}{2}} \text{ für } k \notin \mathbb{N}^{\geq 2}$$

$$(A.7.4.16) \quad \text{Sei } k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Z}_0^- : M_{-\frac{k}{2},\frac{k-1}{2}}(y) = e^{\frac{y}{2}} y^{\frac{k}{2}}, \text{ [Bruinier 1, (1.30)]}$$

$$(A.7.4.17) \quad \text{Sei } k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} : M_{-\frac{k}{2},\frac{1-k}{2}}(y) = (1-k) e^{\frac{y}{2}} y^{\frac{k}{2}} \gamma(1-k, y) \sim (1-k) e^{-\frac{y}{2}} y^{-\frac{k}{2}},$$

$$(A.7.4.18) \quad M_{\frac{2k+1}{4},\frac{2k+1}{4}}(y) \sim \frac{(2k+1)!! e^{\frac{y}{2}}}{2^{k+1} y^{\frac{2k+1}{4}}}, \text{ (A.7.4.14)}$$

$$(A.7.4.19) \quad M_{-\frac{2k+1}{4},\frac{2k+1}{4}}(y) \sim \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{k!} e^{\frac{y}{2}} y^{\frac{2k+1}{4}} \text{ für } k > 0 \text{ nach (A.7.4.14);}$$

A.7.5. Meijer G-Funktionen.

Definition A.7.5.1. ([GR, 9.3]) $m, n, p, q \in \mathbb{N}, q \geq 1, 0 \leq n \leq p \leq q$ und $0 \leq m \leq q$; sei $z \neq 0$:

$$G_{p,q}^{m,n}\left(z \left| \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j - s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - a_j + s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j + s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(a_j - s)} z^s ds,$$

dabei läuft die Kurve C von $\infty - i\tau$ nach $\infty + i\tau$ ($\tau > 0$) und umschließt alle Pole

$$b_j, b_j + 1, b_j + 2, \dots \quad (j = 1, \dots, m),$$

aber keinen der Pole

$$a_j - 1, a_j - 2, a_j - 3, \dots \quad (j = 1, \dots, n),$$

des Integranden.

Satz A.7.5.2. *Es gibt folgende asymptotische Darstellungen für große reelle Zahlen z*

$$G_{0,4}^{2,0}(z) \sim AH(z e^{2\pi i}) + \bar{A}H(z e^{-2\pi i}).$$

Erfüllen die Zahlen a_1 und b_1, \dots, b_m die Bedingung

$$a_1 - b_h \neq 1, 2, 3, \dots \quad (h = 1, \dots, m)$$

dann gilt

$$G_{1,5}^{2,1}(z) \sim AH(z e^{2\pi i}) + \bar{A}H(z e^{-2\pi i}) + e^{-3\pi i a_1} \Delta \cdot E(z e^{3\pi i}),$$

dabei ist

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{1}{4\pi^2} e^{(a_1+\dots+a_n-b_{m+1}-\dots-b_q)\pi i} \\
 \vartheta &= \frac{1}{4} \left\{ -\frac{3}{2} + \sum_{h=1}^q b_h - \sum_{h=1}^p a_h \right\} \\
 H(z) &= \frac{z^\vartheta}{\exp(4\sqrt[4]{z})} \left\{ \sqrt{2}\pi^{\frac{3}{2}} + \frac{M_1}{\sqrt[4]{z}} + \frac{M_2}{\sqrt[4]{z}^2} + \dots \right\} \\
 \Delta &= -\frac{1}{\prod_{j=3}^5 \{\Gamma(a_1 - b_j) \Gamma(1 + b_j - a_1)\}} \\
 E(z) &= z^{-1+a_1} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \prod_{j=1}^5 \Gamma(1 + b_j - a_1 + h)}{h! z^h}
 \end{aligned}$$

s. [Meijer, I(1)-(4),(13),(16),(17),II(45),VII Theorem 17,18]

Aus dem Satz ergeben sich folgende

Asymptotische Beziehungen ($0 < z < \infty$):

$$\begin{aligned}
 \text{(A.7.5.1)} \quad G_{04}^{20} \left(z^2 \left| \begin{matrix} - \\ 0,0;0,\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\cos 4\sqrt{z}}{\sqrt{z}} + \frac{\sin 4\sqrt{z}}{16z} - \frac{\cos 4\sqrt{z}}{512z^{\frac{3}{2}}} + \dots \right) \\
 G_{04}^{20} \left(z^2 \left| \begin{matrix} - \\ 0,0;0,-\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin 4\sqrt{z}}{z} - \frac{\cos 4\sqrt{z}}{16z^{\frac{3}{2}}} - \frac{9 \sin 4\sqrt{z}}{512z^2} + \dots \right) \\
 G_{04}^{20} \left(z^2 \left| \begin{matrix} - \\ 0,0;-1,\frac{1}{2} \end{matrix} \right. \right) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin 4\sqrt{z}}{z} + \frac{7 \cos 4\sqrt{z}}{16z^{\frac{3}{2}}} - \frac{57 \sin 4\sqrt{z}}{512z^2} + \dots \right) \\
 \text{(A.7.5.2)} \quad G_{04}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} - \\ 0,1;-\frac{1}{2},0 \end{matrix} \right. \right) &= -\frac{\cos(4\sqrt[4]{z})}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z}} + M_1 \frac{\sin 4\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{z}^2} + M_2 \frac{\cos 4\sqrt[4]{z}}{\sqrt[4]{z}^3} + \dots + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}^m}\right), \\
 \text{(A.7.5.3)} \quad G_{04}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} - \\ 0,1;\frac{1}{2},0 \end{matrix} \right. \right) &= \frac{\sin(4\sqrt[4]{z})}{\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\right), \\
 \text{(A.7.5.4)} \quad G_{15}^{21} \left(z \left| \begin{matrix} 1;- \\ \frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{1}{2},0,0 \end{matrix} \right. \right) &= \sqrt{\pi} - \frac{\cos(4\sqrt[4]{z})}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), \\
 \text{(A.7.5.5)} \quad G_{15}^{21} \left(z \left| \begin{matrix} 0; \\ 0,1;-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{3}{2} \end{matrix} \right. \right) &= \frac{\sin(4\sqrt[4]{z})}{\sqrt{2\pi}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}}\right)
 \end{aligned}$$

oder allgemeiner für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
 \text{(A.7.5.6)} \quad G_{04}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} - \\ 0,0;\frac{1}{2},-k \end{matrix} \right. \right) &= \frac{\cos\left(4\sqrt[4]{z} - \frac{k\pi}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{z}^{k+1}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}^{k+2}}\right), \\
 \text{(A.7.5.7)} \quad G_{04}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} - \\ 0,0;-\frac{1}{2},-k \end{matrix} \right. \right) &= \frac{\sin\left(4\sqrt[4]{z} - \frac{k\pi}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{z}^{k+2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}^{k+3}}\right), \\
 \text{(A.7.5.8)} \quad G_{04}^{20} \left(z \left| \begin{matrix} - \\ 0,1;\frac{1}{2},-k \end{matrix} \right. \right) &= \frac{\sin\left(4\sqrt[4]{z} - \frac{k\pi}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt[4]{z}^k} + M_1 \frac{\cos\left(4\sqrt[4]{z} - \frac{k\pi}{2}\right)}{\sqrt[4]{z}^{k+1}} + \\
 &\quad + M_2 \frac{\sin\left(4\sqrt[4]{z} - \frac{k\pi}{2}\right)}{\sqrt[4]{z}^{k+2}} + \dots + O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{z}^{k+m}}\right),
 \end{aligned}$$

Die Asymptotik für $z \searrow 0$ erhält man mit Hilfe des Residuensatzes als die Summe der Residuen an den Polen auf der x-Achse in Richtung $+\infty$.

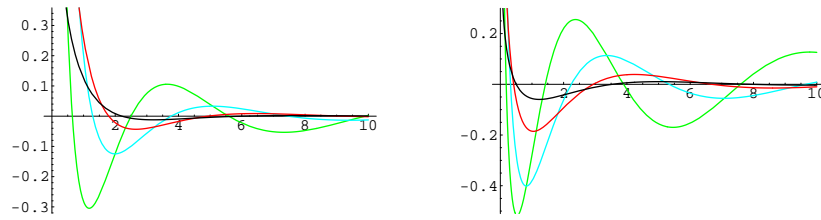


ABBILDUNG A.7.5.1. $G_{04}^{20}\left(z^2 \left|_{0,0;-\frac{1}{2},-k}^- \right.\right); \quad G_{04}^{20}\left(z^2 \left|_{0,0;\frac{1}{2},-k}^- \right.\right); \quad k=0,1,2,3$

Beispiele. $z \in \mathbb{R}^+$:

$$\begin{aligned} G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,0;0,\frac{1}{2}}^- \right.\right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n + H_{2n} - 2\gamma - \log 2 - \frac{1}{2} \log z}{n!^2 (2n)!} (4z)^n, \\ G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,0;-1,\frac{1}{2}}^- \right.\right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n + H_{2n} - 2\gamma - \log 2 - \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{2n+2}}{n! (n+1)! (2n)!} (4z)^n, \\ G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,0;-\frac{1}{2},0}^- \right.\right) &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n + H_{2n} - 2\gamma - \log 2 - \frac{1}{2} \log z + \frac{1}{2n+1}}{n!^2 (2n+1)!} (4z)^n. \end{aligned}$$

Asymptotische Beziehungen ($0 < z < 1 - \epsilon$):

$$\begin{aligned} G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,0;\frac{1}{2},-k}^- \right.\right) &= -\frac{\log(4z) + 4\gamma - H_k + \frac{2}{k+1} z \log(4z)}{\sqrt{\pi} k!} + O(z), \\ G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,0;-\frac{1}{2},-k}^- \right.\right) &= -2 \frac{\log(4z) + 4\gamma - H_k - 2 + \frac{4}{3(k+1)} z \log(4z)}{\sqrt{\pi} k!} + O(z), \\ G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,1;-\frac{1}{2},0}^- \right.\right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} + \frac{4z \log z}{3\sqrt{\pi}} + O(z), \\ G_{04}^{20}\left(z \left|_{0,1;\frac{1}{2},-k}^- \right.\right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} k!} + \frac{2z \log z}{\sqrt{\pi} (k+1)!} + O(z). \end{aligned}$$

BEWEIS.

$$\begin{aligned} \pi^{\frac{3}{2}} G_{04}^{20}\left(\frac{n^2}{256} \left|_{0,0;0,\frac{1}{2}}^- \right.\right) &\stackrel{(D.1.5.1)}{=} \int_0^1 \frac{4K_0(\sqrt{nx}) - 2\pi Y_0(\sqrt{nx})}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= -\pi^2 \left(J_0\left(\sqrt{\frac{in}{2}}\right) Y_0\left(\sqrt{-\frac{in}{2}}\right) + I_0\left(\sqrt{\frac{in}{2}}\right) Y_0\left(\sqrt{\frac{in}{2}}\right) \right) \\ &= 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_k + H_{2k} - 2\gamma - \log \frac{n}{8}}{k!^2 (2k)!} \left(\frac{n}{8}\right)^{2k} \end{aligned}$$

Aus der Definition folgt:

$$\begin{aligned} 2z^{2k-1} G_{04}^{20}\left(z^2 \left|_{0,0;\frac{1}{2},1-k}^- \right.\right) &= \frac{d}{dz} \left\{ z^{2k} G_{04}^{20}\left(z^2 \left|_{0,0;\frac{1}{2},-k}^- \right.\right) \right\} \\ 2z^{2k-1} G_{04}^{20}\left(z^2 \left|_{0,0;-\frac{1}{2},1-k}^- \right.\right) &= \frac{d}{dz} \left\{ z^{2k} G_{04}^{20}\left(z^2 \left|_{0,0;-\frac{1}{2},-k}^- \right.\right) \right\} \end{aligned}$$

und speziell

$$\begin{aligned} G_{04}^{20} \left(z^2 \middle| \begin{matrix} - \\ 0,0;0,-\frac{1}{2} \end{matrix} \right) &= \frac{2}{z} \int G_{04}^{20} \left(z^2 \middle| \begin{matrix} - \\ 0,0;0,\frac{1}{2} \end{matrix} \right) dz \\ G_{04}^{20} \left(z^2 \middle| \begin{matrix} - \\ 0,0;-\frac{1}{2},-k \end{matrix} \right) &= \frac{2}{z} \int G_{04}^{20} \left(z^2 \middle| \begin{matrix} - \\ 0,0;\frac{1}{2},-k \end{matrix} \right) dz \\ G_{04}^{20} \left(z^2 \middle| \begin{matrix} - \\ 0,0;-1,\frac{1}{2} \end{matrix} \right) &= \frac{2}{z^2} \int z G_{04}^{20} \left(z^2 \middle| \begin{matrix} - \\ 0,0;0,\frac{1}{2} \end{matrix} \right) dz. \end{aligned}$$

□

A.7.6. Funktionalgleichungen.

Gammafunktion:

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s},$$

Riemannsche Zetafunktion:

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \\ \frac{2^{s-1} \pi^s}{\Gamma(s)} \zeta(1-s) &= \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s), \end{aligned}$$

Dedekindsche Zetafunktion:

$$\begin{aligned} d > 0: \quad \left(\frac{\sqrt{d}}{\pi}\right)^s \Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s, d) &= \left(\frac{\sqrt{d}}{\pi}\right)^{1-s} \Gamma^2\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s, d), \\ d < 0: \quad \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta(s, d) &= \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2\pi}\right)^{1-s} \Gamma(1-s) \zeta(1-s, d), \end{aligned}$$

L -Reihen:

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} |d|^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s, d) &= \pi^{-\frac{1-s}{2}} |d|^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) L(1-s, d), \quad \delta = \begin{cases} 0, & d > 0, \\ 1, & d < 0. \end{cases} \\ L(s, d) &= 2^s \pi^{s-1} |d|^{\frac{1}{2}-s} \Gamma(1-s) L(1-s, d) \cdot \begin{cases} \sin \frac{\pi s}{2}, & d > 0 \\ \cos \frac{\pi s}{2}, & d < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

nicht-holomorphe Eisensteinreihen:

$$2\kappa \in \mathbb{Z}: \quad E_{\kappa}^*(z, s) = E_{\kappa}^*(z, 1-s)$$

mit

$$E_{\kappa}^*(z, s) = \begin{cases} \pi^{-s} \Gamma\left(s + \frac{|\kappa|}{2}\right) \zeta(2s) E_{\kappa}(z, s), & \kappa \in 2\mathbb{Z}, \\ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(s + \frac{|\kappa|}{2}\right) \Gamma\left(2s - \frac{1}{2}\right) \zeta(4s-1)}{\Gamma\left(s + \frac{(-1)^{|\kappa|}}{4}\right)} E_{\kappa}(z, s), & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. [Apostol 1, 12.8 und 12.10]; [Zagier 10], [Zagier 5, Prop. 3], [Roelcke 2, Satz 10.2 ff.], [Bump, Prop. 1.10.1] bzw. Satz C.2.3.1. □

Darstellungsanzahlen

B.1. Allgemeines

Schon Gauß hat die Anzahl $f_D(n)$ der inäquivalenten Darstellungen der Zahl n durch primitive quadratische Formen der Diskriminante D untersucht. Wenn man sich auf primitive Darstellungen, d.h. solche $n = ax^2 + bxy + cy^2$ mit teilerfremden x, y beschränkt, so ist deren Anzahl

$$N_D(n) = \sum_{\substack{b \pmod{2n} \\ b^2 \equiv D \pmod{4n}}} 1,$$

vgl. [Zagier 7, §8 Satz 3 ff.]. Sei $D = df^2$, d Grundzahl, $f \in \mathbb{N}$, $\text{ggT}(n, f) = 1$. Aus der Definition folgt leicht die Beziehung

$$(B.1.1) \quad \begin{aligned} f_D(n) &= f_d(n) = \sum_{t|n} \chi_d(t) \quad \text{mit dem Kroneckersymbol } \chi_d = \left(\frac{d}{\cdot}\right), \\ f_D(n) &= \sum_{m^2|n} N_D\left(\frac{n}{m^2}\right), \quad \text{[Zagier 7, §8 (26)].} \end{aligned}$$

Mit den Möbiusschen Umkehrformeln hat man für $\text{ggT}(n, f) = 1$:

$$(B.1.2) \quad N_D(n) = \sum_{k^2|n} \mu(k) f_D\left(\frac{n}{k^2}\right) = N_d(n).$$

Für n mit $\text{ggT}(n, f) = 1$ sind die Funktionen $f_D(n), N_D(n)$ multiplikativ. Allgemein gilt, vgl. [Hirzebruch Zagier, Ch.1 Prop.2]:

$$N_{df^2}(n) = \prod_{\substack{p \text{ Primzahl} \\ p^\alpha \parallel f, p^\beta \parallel n}} N_{dp^{2\alpha}}(p^\beta).$$

Hilfssatz B.1.1. Für Fundamentaldiskriminanten $d \in \mathbb{D}$ und eine beliebige Primzahl p ist:

$$N_{dp^{2\alpha}}(p^\beta) = \begin{cases} p^{\lfloor \frac{\beta}{2} \rfloor}, & \beta \leq 2\alpha, \\ p^\alpha (1 + \chi_d(p)), & \beta = 2\alpha + 1, \\ p^\alpha \chi_d(p) (1 + \chi_d(p)), & \beta \geq 2\alpha + 2. \end{cases}$$

BEWEIS. Aus Gleichung (B.1.2) ergibt sich leicht

$$N_d(p^\beta) = \begin{cases} 1, & \beta = 0, \\ 1 + \chi_d(p), & \beta = 1, \\ \chi_d(p) (1 + \chi_d(p)), & \beta \geq 2. \end{cases}$$

Aus der Definition folgt $N_{df^2}(1) = N_{df^2}(p) = 1$, falls $p \nmid f$ und wegen

$$p N_{dp^{2\alpha}}(p^\beta) = N_{dp^{2\alpha+2}}(p^{\beta+2}) \quad \text{[Hirzebruch Zagier, (22) f.]}$$

ergibt sich rekursiv die allgemeine Aussage. □

Hilfssatz B.1.2. Für $\varepsilon > 0$ ist:

$$\begin{aligned} \text{ggT}(n, f) = 1 : \quad N_D(n) &\leq f_D(n) \leq d(n) = O(n^\varepsilon) \\ \text{ggT}(n, D) = m : \quad N_D(n) &= O(m \cdot d(m) n^\varepsilon). \end{aligned}$$

BEWEIS. Aus der Definition der $N_D(n)$ und (B.1.1) folgt sofort die erste Abschätzung. Die zweite Zeile folgt aus:

$$N_{dp^{2\alpha}}(p^\beta) \leq p^{\min(\alpha, \beta)} N_d(p^\beta),$$

$$N_{df^2}(n) \leq md(m) N_d\left(\prod_{p|n, p \nmid m} p^\beta\right) = O(m \cdot d(m) n^\varepsilon) \text{ mit } m = \text{ggT}(n, f).$$

□

Falls n ein Produkt von verschiedenen Primzahlen $p, p \nmid f$ mit $\chi_d(p) = 1$ ist, so

$$N_D(n) = f_D(n) = d(n) = 2^{\#\{p|n\}}, \text{ d.h. } \sup_n N_D(n) = \infty.$$

Falls $p \parallel n$ mit $\chi_D(p) = -1$, so ist $f_D(n) = N_D(n) = 0$. Mit Siebmethoden kann man zeigen, dass der Anteil aller übrigen Zahlen im Intervall $[1, x]$ $O\left(\frac{x}{\sqrt{\log x}}\right)$ beträgt, d.h. der Anteil der Werte n mit $f_D(n) = N_D(n) = 0$ geht gegen 100%.

Für Dirichletreihen übersetzt bedeutet das

$$(B.1.3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_D(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s) L(s, D)}{\zeta(2s)}$$

und für Fundamentaldiskriminanten d :

$$(B.1.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n^s} = \zeta(s) \mathcal{L}_d(s).$$

Die Anzahlfunktion $N_D(a)$ tritt in der Bogenlängendistribution \mathfrak{D}_D in Satz 1.3.2 deshalb auf, weil es die Anzahl der Geodätischen $\mathfrak{C}_{(a,*,*)}$ in $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H} = [0, 1] + i\mathbb{R}$ zur Diskriminante D ist.

B.2. Mittelwerte

Im folgenden sei immer $d \in \mathbb{D}$ eine Fundamentaldiskriminante und $D = df^2$ eine beliebige Diskriminante, $f \in \mathbb{N}$.

Hilfssatz B.2.1. Für beliebige Diskriminanten $D \in \mathbb{D}^{0+}$, $\varepsilon > 0$ und $x > 0$ ist:

$$\sum_{n \leq x} N_D(n) = O(D^\varepsilon x^{1+\varepsilon}).$$

BEWEIS.

$$\sum_{n \leq x} N_D(n) \leq \sum_{m|D} \sum_{\substack{n \leq x \\ \text{ggT}(n, D) = m}} N_D(n) \stackrel{\text{HS. B.1.2}}{=} O\left(\sum_{m|D} \sum_{\substack{n \leq x \\ m|n}} m \cdot d(m) x^\varepsilon\right) = O\left(\sum_{m|D} m \cdot d(m) \frac{x}{m} x^\varepsilon\right).$$

Mit $d(m) \leq d(D) = O(D^{\frac{\varepsilon}{2}})$ folgt die Beh. □

Ähnlich wie beim Beweis des Primzahlsatzes kann man auch hier versuchen, mit Methoden der komplexen Integration einen asymptotischen Hauptteil mit explizitem Fehler zu erreichen. Im folgenden beziehen wir uns auf eine Arbeit von [Landau] aus dem Jahr 1912. Der dort bewiesene Satz soll für $Z(s) = \frac{\zeta(s) L(s, D)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_D(n)}{n^s}$ spezialisiert werden. Ich stelle hier noch einmal die nötigen Hilfssätze zusammen. Zunächst eine Abschätzung der Größenordnung von $Z(s)$ auf der Geraden $\text{Re } s = \frac{1}{2}$:

Hilfssatz B.2.2. Sei d eine Fundamentaldiskriminante, D eine beliebige Diskriminante und $\tilde{t} = |t| + 1$. Dann gilt gleichmäßig

$$\begin{aligned} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \mathcal{L}_d\left(\frac{1}{2} + it\right) \right| &= O(d^{0,19} \tilde{t}^{0,35}) \\ \left| \frac{\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) L\left(\frac{1}{2} + it, D\right)}{\zeta(1 + 2it)} \right| &= O(D^{0,19} \tilde{t}^{0,35}) \end{aligned}$$

BEWEIS. Nach [Huxley] ist $\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O\left(\tilde{t}^{\frac{89}{570} + \varepsilon}\right)$.

Außerdem ist $\mathcal{L}_d\left(\frac{1}{2} + it\right) \ll (d\tilde{t})^{\frac{3}{16} + \varepsilon}$, vgl. [Heath-Brown],

$\left| \frac{1}{\zeta(1 + it)} \right| = O(\log^7 t)$ für $t \geq t_0 > 0$, vgl. [Apostol 1, Theorem 13.7] und $\sum_{t|f} \mu(t) \frac{\left(\frac{f}{t}\right)}{t^{\frac{1}{2} + it}} \sigma_{-2it}\left(\frac{f}{t}\right) = o(f^\varepsilon)$, d.h.

$L\left(\frac{1}{2} + it, D\right) \ll (D\tilde{t})^{\frac{3}{16} + \varepsilon}$. □

Mit Hilfe des Lemmas von Phragmén-Lindelöf ([Landau, Hilfssatz 6]) lässt sich diese Ungleichung auf einen Teil des „kritischen“ Streifens $0 < \operatorname{Re} s < 1$ erweitern:

Hilfssatz B.2.3. Für $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2} \leq \sigma = \operatorname{Re} s \leq 1 + \varepsilon$, $t = \operatorname{Im} s$, $|t| > t_0 > 0$ ist

$$\begin{aligned} |\zeta(s) \mathcal{L}_d(s)| &= (d^{0,19} t^{0,35})^{\frac{1+\varepsilon-\sigma}{\frac{1}{2}+\varepsilon}}, \\ \left| \frac{\zeta(s) L(s, D)}{\zeta(2s)} \right| &= (D^{0,19} t^{0,35})^{\frac{1+\varepsilon-\sigma}{\frac{1}{2}+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Auf dem linken Rand des Streifens gilt B.2.2. Auf dem rechten Rand ist $|\zeta(s)| \leq \zeta(1 + \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \gamma + O(\varepsilon) \ll_\varepsilon 1$, vgl. [Zagier 7, 4, Aufgabe 4], und $\left| \frac{1}{\zeta(2s)} \right| \leq \frac{\zeta(2\sigma)}{\zeta(4\sigma)} = O(1)$ für $\sigma = \operatorname{Re} s > \frac{1}{2} + \varepsilon$, vgl. [Apostol 2, Theorem 7.11]. Im Innern hat die Funktion endliche Ordnung, wenn man den Pol ausklammert, d.h. $|t| > t_0 > 0$. Mit dem Phragmén-Lindelöf-Lemma folgt die Beh. □

Satz B.2.4. Für $D \neq \square$, $x > D^{0,4}$ ist $\sum'_{n \leq x} N_D(n) = \frac{L(1, D)}{\zeta(2)} x + O(x^{0,63} D^{0,15})$.

BEWEIS. Um die Summenfunktion der Darstellungsanzahlen $N_D(n)$ auszurechnen, lässt sich die trankierte Perron-Formel ([Karatsuba, Chapter V, §1 A General Theorem], [Kara Voronin, Appendix, 5]) verwenden. Mit $A(n) = n^\varepsilon$, $\alpha = 1$ und $b = 1 + \varepsilon$ ist dann für $x = N + \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{N}$:

$$(B.2.1) \quad \sum'_{n=1}^x N_D(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T\varepsilon}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon} \log x}{T}\right).$$

Wir werten das Integral mit dem Residuensatz aus:

$$(B.2.2) \quad \int_{1+\varepsilon-iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds = 2\pi i \frac{L(1, D)}{\zeta(2)} x + \left\{ \int_{1+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}-iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}+iT}^{1+\varepsilon+iT} \right\} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds$$

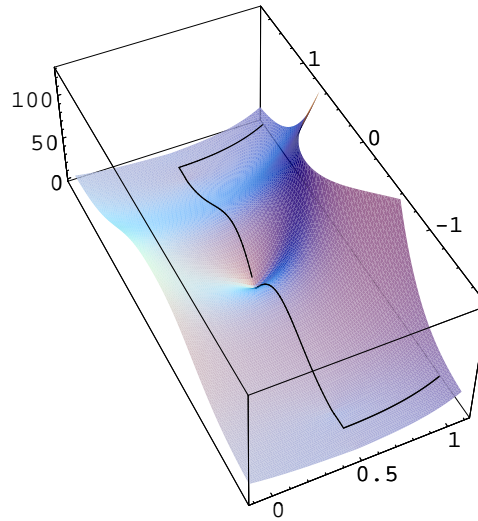


ABBILDUNG B.2.1. Integrationsweg; $d = 2524, x = 50, T = 1.5$

Im Unterschied zum Beweis des Primzahlsatzes, s. [Karatsuba, Chapter V, §2 The Prime Number Theorem], mit $Z(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ gibt es keine weiteren Pole (außer bei 1) bis $\text{Re } s = \frac{1}{2}$. Vergleicht man (B.2.1) und (B.2.2), so ergibt sich folgende Ungleichung:

$$(B.2.3) \quad \left| \sum'_{n=1}^x N_D(n) - \frac{L(1, s)}{\zeta(2)} x \right| \leq \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{1+\varepsilon-iT}^{\frac{1}{2}-iT} + \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} + \int_{\frac{1}{2}+iT}^{1+\varepsilon+iT} \right\} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds + O_\varepsilon \left(\frac{x^{1+\varepsilon} \log x}{T} \right)$$

Das erste und dritte Integral lässt sich nach B.2.3 abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{2}+iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds \right| &\ll_\varepsilon \frac{1}{T} \int_{\frac{1}{2}}^{1+\varepsilon} x^\sigma (D^{0,19} T^{0,35})^{\frac{1+\varepsilon-\sigma}{2+\varepsilon}} d\sigma = \frac{(D^{0,19} T^{0,35})^{\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}}}{T} \int_{\frac{1}{2}}^{1+\varepsilon} \left(\frac{x}{(D^{0,19} T^{0,35})^{\frac{2}{1+2\varepsilon}}} \right)^\sigma d\sigma \\ &\ll \frac{(D^{0,19} T^{0,35})^{\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}}}{T} \max_{\frac{1}{2} < \sigma < 1+\varepsilon} \left(\frac{x}{(D^{0,19} T^{0,35})^{\frac{2}{1+2\varepsilon}}} \right)^\sigma = O \left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \right) + O \left(\frac{\sqrt{x} D^{0,19}}{T^{0,65}} \right). \end{aligned}$$

Das zweite Integral in (B.2.3) lässt sich in $\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} = \int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1-i}{2}} + \int_{\frac{1-i}{2}}^{\frac{1+i}{2}} + \int_{\frac{1+i}{2}}^{\frac{1}{2}+iT}$ unterteilen und mit Hilfssatz B.2.2 abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1-i}{2}}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds \right| &\ll \sqrt{x} \int_{\frac{1}{2}}^T \frac{1}{t} D^{0,19} t^{0,35} dt \ll \sqrt{x} D^{0,19} T^{0,35} \\ \left| \int_{\frac{1-i}{2}}^{\frac{1+i}{2}} \frac{x^s \zeta(s) L(s, D)}{s \zeta(2s)} ds \right| &\ll D^{0,19} \sqrt{x} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \tilde{t}^{0,35} dt \ll \sqrt{x} D^{0,19} \end{aligned}$$

Insgesamt wird aus (B.2.3), falls $T > 1$

$$\sum'_{n \leq x} N_D(n) - \frac{L(1, D)}{\zeta(2)} x = O \left(\frac{x^{1+2\varepsilon}}{T} \right) + O(\sqrt{x} D^{0,19} T^{0,35}).$$

Setzt man $T = x^\alpha D^\delta > 1$. Dann ergeben sich folgende Fehlerterme

$$O(x^{1+2\alpha-\delta} D^{-\delta}) \quad \text{und} \quad O(x^{\frac{1}{2}+0,35\alpha} D^{0,19+0,35\delta}),$$

die noch gegeneinander ausbalanciert werden müssen. Die beiden Terme sind ungefähr gleich für $\alpha = 0,37 + 1,48\varepsilon$, $\delta = -0,14$ und ab $x > D^{0,4}$ ist $T > 1$. Die Beschränkung auf $x = N + \frac{1}{2}$ ist nicht wesentlich. \square

Ein analoger Beweis führt zu

Satz B.2.5. Für $x > d^{0,4}$, d Fundamentaldiskriminante ist $\sum'_{n \leq x} f_d(n) = \mathcal{L}_d(1)x + O(x^{0,63}d^{0,15})$.

Damit kommt man schon auf eine asymptotische Abschätzung für $x > c\frac{\sqrt{d}}{2y}$, da $\mathcal{L}_d(1) \neq 0$. Unter Annahme der Lindelöf-Hypothese für die Dirichletschen L-Reihen lässt sich der Fehler noch weiter verbessern.

Lindelöf-Hypothese. Sei $\tilde{t} = |t| + 1$. Für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) = O(\tilde{t}^\delta),$$

$$\mathcal{L}_d\left(\frac{1}{2} + it\right) = O((d\tilde{t})^\delta).$$

Es ergibt sich dann ein

Lemma B.2.6. Für alle $\delta > 0, 0 < \varepsilon < \frac{1}{10}, \frac{1}{2} \leq \sigma = \operatorname{Re} s \leq 1 + \varepsilon, t = \operatorname{Im} s, |t| > t_0 > 0$ ist

$$|\zeta(s)\mathcal{L}_d(s)| \ll (d\tilde{t})^{\delta\frac{1+\varepsilon-\sigma}{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)^2$$

In diesem Fall ist

$$\int_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} \frac{x^s}{s} \zeta(s)\mathcal{L}_d(s) ds \ll \sqrt{x} \int_{\frac{1}{2}}^T \frac{d^\delta t^\delta}{t} dt + \int_{\frac{1}{2}-i}^{\frac{1}{2}+i} \frac{x^s}{s} \zeta(s)\mathcal{L}_d(s) ds \ll \sqrt{x} d^\delta T^\delta$$

und

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}+iT}^{1+\varepsilon+iT} \frac{x^s}{s} \zeta(s)\mathcal{L}_d(s) ds &\ll \frac{1}{T} \int_{\frac{1}{2}}^{1+\varepsilon} x^\sigma (Td)^{\delta\frac{1+\varepsilon-\sigma}{\frac{1}{2}+\varepsilon}} d\sigma = \frac{(Td)^{\delta\frac{1+\varepsilon}{\frac{1}{2}+\varepsilon}}}{T} \int_{\frac{1}{2}}^{1+\varepsilon} \left(\frac{x}{(dT)^{\frac{2\delta}{1+2\varepsilon}}}\right)^\sigma d\sigma \\ &\ll \frac{(Td)^{\delta\frac{1+\varepsilon}{\frac{1}{2}+\varepsilon}}}{T} \max_{\frac{1}{2} < \sigma < 1+\varepsilon} \left(\frac{x}{(dT)^{\frac{2\delta}{1+2\varepsilon}}}\right)^\sigma = O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right) + O\left(\frac{\sqrt{x}d^\delta}{T^{1-\delta}}\right) \end{aligned}$$

Also insgesamt

$$\sum'_{n \leq x} f_d(n) - \mathcal{L}_d(1)x = O\left(\frac{x^{1+2\varepsilon}}{T}\right) + O(\sqrt{x}d^\delta T^\delta).$$

Mit $T \asymp \sqrt{x}$ ergibt das

Vermutung B.2.7. Für alle $\delta > 0, x > x_0 > 0, d \in \mathbb{D}^+$ ist

$$(B.2.4) \quad \sum'_{n \leq x} f_d(n) = \mathcal{L}_d(1)x + O\left(d^\delta x^{\frac{1+\delta}{2}}\right)$$

gleichmäßig in d .

Für $\sum'_{n \leq x} N_d(n), d \in \mathbb{D}^+$ lässt sich der Fehler genauso abschätzen.

Wie man in (B.3.2.4) sieht, hat die Güte der Approximation $\Delta_d(x) := \sum'_{n \leq x} f_d(n) - \mathcal{L}_d(1)x$ direkt mit der Bogenlänge der Geodätischen Λ_d zur Grundzahl d zu tun:

$$(B.2.5) \quad l(\Lambda_d) = -8 \int_0^\infty \frac{\Delta_d(t)}{t} dt.$$

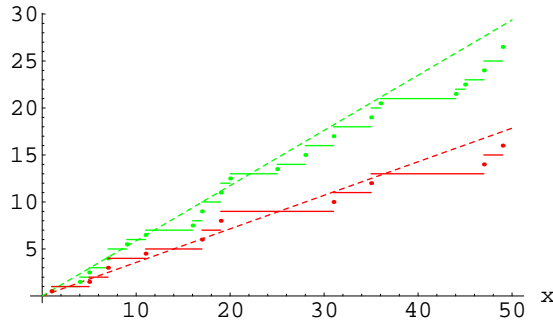


ABBILDUNG B.2.2. $d = 4565$; $\sum'_{n \leq x} f_d(n), \mathcal{L}_d(1)x, \sum'_{n \leq x} N_D(n), \frac{L(1, D)}{\zeta(2)}x$

B.3. Voronoïformeln

Bei den mit $N_d(n)$ verwandten Funktionen $f_d(n)$ kann man nicht bloß die Größenordnung der Summenfunktion ermitteln. Da die Dirichletreihe $\sum \frac{f_d(n)}{n}$ eine einfache Funktionalgleichung (A.7.6) erfüllt, lassen sich die Gedanken aus [Landau] wesentlich weiter anwenden: Es gibt explizite Reihenentwicklungen durch „besselähnliche“ Funktionen¹. Analog zur trankierten Voronoïformel für das Dirichletsche Teilerproblem:

$$(B.3.0.1) \quad \begin{aligned} \Delta(x) = & \sum'_{n \leq N} \sqrt{\frac{x}{n}} d(n) L_1(4\pi\sqrt{nx}) + \frac{\log N + 2\gamma}{2\pi} L_0(4\pi\sqrt{Nx}) + \frac{1}{2\pi} \int_N^\infty L_0(4\pi\sqrt{xt}) \frac{dt}{t} \\ & - \Delta(N) \sqrt{\frac{x}{N}} L_1(4\pi\sqrt{Nx}) + \sqrt{x} \sum_{n=1}^\infty \frac{d(n)}{\sqrt{n}} \int_{4\pi\sqrt{Nx}}^\infty L_2(u) L_1\left(u\sqrt{\frac{n}{x}}\right) du \end{aligned}$$

mit

$$\Delta(x) := \sum'_{n \leq x} d(n) - x \log x - (2\gamma - 1)x - \frac{1}{4}, \text{ vgl. [Wilton 1, Theorem 1],}$$

wird hier eine Näherung für die Anzahl $F_d(x)$ der Ideale der Norm $\leq x$ im reell-quadratischen Körper der Diskriminante d mit explizitem Fehlerterm gegeben. Problematisch bleibt allerdings der Hauptterm, eine Exponentialsumme, die sich nicht in der gleichen Weise wie im Dirichletschen Teilerproblem abschätzen lässt.

Im folgenden sei $d \in \mathbb{D}^+$ immer eine Fundamentaldiskriminante,

$$\begin{aligned} \Delta_d(x) &:= \sum'_{n \leq x} f_d(n) - \mathcal{L}_d(1)x, \\ \tilde{\Delta}_d(x) &:= \int_0^x \Delta_d(t) dt. \end{aligned}$$

B.3.1. Bekannte Resultate. [Walfisz] hat folgende Reihenentwicklungen bewiesen:

$$(B.3.1.1) \quad \Delta_d(x) = \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{x}{n}} f_d(n) L_1(4\pi\sqrt{\frac{xn}{d}});$$

$$(B.3.1.2) \quad \tilde{\Delta}_d(x) = \frac{\sqrt{dx}}{2\pi} \sum_{n=1}^\infty \frac{f_d(n)}{n} m_2(4\pi\sqrt{\frac{xn}{d}}), \text{ lokal gleichmäßig in } x > 0.$$

Das sind Verallgemeinerungen der ursprünglich von [Voronoï 2] entwickelten Summenformel

$$\sum'_{n=1}^x d(n) = x \log x + (2\gamma - 1)x + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^\infty \sqrt{\frac{x}{n}} d(n) L_1(4\pi\sqrt{nx}).$$

¹vgl. Anhänge A.7.2 und A.7.5

Diese Formeln lassen sich für beliebige Gewichtsfunktionen beschränkter Schwankung $g(t)$ auf Summen $\sum_{0 < a \leq n \leq b} f_d(n)g(n)$ verallgemeinern. Allerdings haben die Besselfunktionen Singularitäten bei $t = 0$, so dass man die Voraussetzungen im Fall von Summen über $0 \leq n \leq N$ etwas einschränken muss.

Hilfssatz B.3.1.1. [Chandra 3]: Sei $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und

$$\int_0^1 t^p |g''(t)| dt < \infty \text{ für ein } p < 1 :$$

$$\sum'_{n \leq N} f_d(n)g(n) = \mathcal{L}_d(1) \int_0^N g(t) dt + \frac{2\pi}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) \int_0^N M_0(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}})g(t) dt,$$

Diese Formeln ermöglichen Abschätzungen der Art $\sum_{n \leq x} f_d(n) = \mathcal{L}_d(1)x + O(x^{\frac{1}{3}})$ und daran anschließend

$\sum_{n \leq x} N_d(n) = \frac{\mathcal{L}_d(1)}{\zeta(2)}x + o(x^{\frac{1}{2}})$, für die Folgerung vgl. [Postnikov]. Leider sind die Konstanten im $O(\cdot)$ -Term noch von d abhängig. Gleichmäßige Abschätzungen liefern trankierte Voronoïformeln, vgl. [Ivič]. Für die integrierte Funktion gibt es genauere Fehlerabschätzungen

$$(B.3.1.3) \quad \tilde{\Delta}_d(x) = O(x^{\frac{3}{4}}) \quad \text{s. [Walfisz].}$$

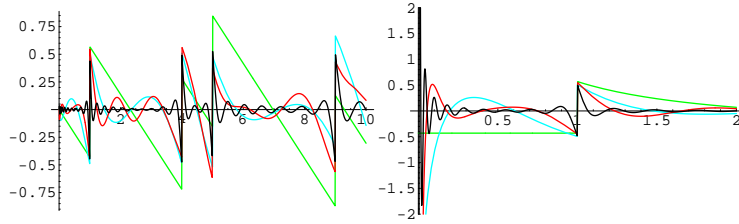
B.3.2. Trankierte Voronoïformeln. Um die Voronoïformeln (B.3.1.1), (B.3.1.2) praktisch anwenden zu können, braucht man Abschätzungen der unendlichen Summen. Hilfssatz B.3.1.1 lässt sich weiter umformen. Setzt man in der Voronoï-Chandrasekharan-Formel $g(n) = \frac{L_1(4\pi\sqrt{\frac{xn}{d}})}{\sqrt{n}}$, so ergibt sich eine verbesserte Abschätzung. So kann man im Prinzip die Voronoïformel mehrfach auf sich selbst anwenden. Das scheitert jedoch irgendwann an der Kompliziertheit der Integrale. Im folgenden wird ein anderer Weg beschritten, der analytisch sauberer ist (, jedoch etwas künstlich erscheint) und auf das gleiche Ergebnis führt. Er geht auf Integrale über Besselfunktionen von Hardy zurück und wurde in der Form in [Wilton 1] auf das Dirichletsche Teilerproblem angewandt, d.h. auf den Spezialfall $d = 1$. Der Fehler, den man in (B.3.1.1) macht, wenn man die Summe bei $n = N$ abbricht, lässt sich so berechnen:

Satz B.3.2.1. Sei $x > 0, N > 0, d$ Fundamentaldiskriminante und $\Sigma(d, x, N) := \Delta_d(x) - \sum'_{n \leq N} \sqrt{\frac{x}{n}} f_d(n) L_1(4\pi\sqrt{\frac{xn}{d}})$.

$$(B.3.2.1) \quad \begin{aligned} \Sigma(d, x, N) &= \frac{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}}{2\pi} L_0(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}) - \sqrt{\frac{x}{N}} \Delta_d(N) L_1(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}) \\ &+ \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_{4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}}^{\infty} L_2(u) L_1(u\sqrt{\frac{n}{x}}) du \end{aligned}$$

$$(B.3.2.2) \quad = \frac{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}}{2\pi} L_0(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}) - \sqrt{\frac{x}{N}} \Delta_d(N) L_1(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}) + \chi(d, x, N)$$

$$\text{mit } \chi(d, x, N) := \frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \int_N^{\infty} \frac{\Delta_d(t)}{t} L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) dt.$$


 ABBILDUNG B.3.2.1. $\Sigma(5, x, N)$, $\frac{\Sigma(5, x, N)}{x}$ ($N=0, 1, 10, 100$)

BEWEIS. Sei $F_d(x) := \sum'_{n \leq x} f_d(n)$. Dann gilt mit (D.1.4.4) und (B.3.1.2):

$$\begin{aligned}
 F_d(x) &\stackrel{(D.1.4.4)}{=} \frac{2\pi x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n} \int_0^{\infty} l_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
 &\stackrel{\text{Def. v. } L_3}{=} \frac{2\pi x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n} \int_N^{\infty} \left(L_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) - \frac{\sqrt{d}}{\pi^2\sqrt{xt}} \right) m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
 &\quad + \frac{2\pi x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n} \int_0^N l_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
 (B.3.2.3) \quad &\stackrel{(B.3.1.2)}{=} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) \int_N^{\infty} \left(\frac{x}{td} \right)^{\frac{3}{2}} L_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \frac{td}{n} m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) dt \\
 &\quad - \frac{2x}{\pi} \int_N^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n} m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{dt}{t} + \frac{4\pi^2 x^{\frac{3}{2}}}{d} \int_0^N l_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^{\frac{3}{2}}} dt.
 \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{tn} m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}})$ und $\frac{2\pi x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n} l_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}})$ haben integrierbare Majoranten, und man kann wegen dem Konvergenzatz von Lebesgue Integration und Summation vertauschen. Mit (B.3.1.2) ist

$$\begin{aligned}
 F_d(x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) \left(\frac{td}{n} m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{x}{td} L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \right) \Big|_N^{t=\infty} \\
 &\quad + 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) \int_N^{\infty} \frac{x}{td} L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \sqrt{\frac{td}{n}} L_1(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) dt - \frac{4x}{\sqrt{d}} \int_N^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^2} dt \\
 &\quad - 2\pi\sqrt{d} \frac{x}{td} l_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \tilde{\Delta}_d(t) \Big|_0^{t=N} + 2\pi\sqrt{d} \int_0^N \frac{x}{td} l_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \Delta_d(t) dt \\
 (B.3.1.2) \quad &\stackrel{(B.3.1.2)}{=} \frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_N^{\infty} L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) L_1(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
 &\quad + \frac{2\pi x}{\sqrt{d}N} \cdot \frac{2}{\pi} \tilde{\Delta}_d(N) - \frac{4x}{\sqrt{d}} \int_N^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^2} dt + 2\pi\sqrt{d} \int_0^N \frac{x}{td} l_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \Delta_d(t) dt.
 \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
 2\pi \int_0^N \frac{x}{td} l_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) \Delta_d(t) dt &= \int_0^N \frac{x}{td} \left(2\pi L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) - 4 \right) (F_d(t) - \mathcal{L}_d(1)t) dt \\
 &= 2\pi \int_0^N F_d(t) \frac{x}{td} L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) dt - 2\pi \mathcal{L}_d(1) \int_0^N t \frac{x}{td} L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) dt - \frac{4x}{d} \int_0^N \frac{\Delta_d(t)}{t} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -F_d(t) \sqrt{\frac{x}{td}} L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \Big|_0^N + \int_0^N \sqrt{\frac{x}{td}} L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) dF_d(t) \\
&\quad + \mathcal{L}_d(1) \left\{ t \sqrt{\frac{x}{td}} L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \Big|_0^N - \int_0^N \sqrt{\frac{x}{td}} L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) dt \right\} - \frac{4x}{d} \left\{ \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t} \Big|_0^N + \int_0^N \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^2} dt \right\} \\
&= -\Delta_d(N) \sqrt{\frac{x}{Nd}} L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}\right) + \sum'_{n \leq N} \sqrt{\frac{x}{nd}} f_d(n) L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xn}{d}}\right) \\
&\quad + \frac{\mathcal{L}_d(1)}{2\pi} L_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}\right) - \frac{4x}{d} \frac{\tilde{\Delta}_d(N)}{N} - \frac{4x}{d} \int_0^N \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^2} dt.
\end{aligned}$$

Also mit $\Sigma(d, x, N) := \Delta_d(x) - \sum'_{n \leq N} \sqrt{\frac{x}{n}} f_d(n) L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xn}{d}}\right)$,

$$\begin{aligned}
\Sigma(d, x, N) &= \frac{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}}{2\pi} L_0\left(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}\right) - \sqrt{\frac{x}{N}} \Delta_d(N) L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}\right) \\
&\quad + \sqrt{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_{4\pi\sqrt{\frac{xN}{d}}}^{\infty} L_2(u) L_1\left(u\sqrt{\frac{n}{x}}\right) du - x \left(\frac{4}{\sqrt{d}} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^2} dt + \mathcal{L}_d(1) \right).
\end{aligned}$$

Alle Terme sind für festes $d > 0, N = \frac{1}{2}$ von der Größenordnung $o(x)$, s. [Wilton 1], außer eventuell dem letzten, daher verschwindet auch der Koeffizient von x , d.h.

$$(B.3.2.4) \quad \int_0^{\infty} \frac{\Delta_d(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\Delta}_d(t)}{t^2} dt = -\frac{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}}{4};$$

und die erste Gleichung des Satzes ist bewiesen.

Aussage (B.3.2.2): Die Zeile (B.3.2.3) lässt sich vereinfachen. Aus dem gleichen Grund wie dort lassen sich Summation und Integration vertauschen.

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) \int_N^M \left(\frac{x}{td}\right)^{\frac{3}{2}} L_3\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \frac{td}{n} m_2\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) dt \stackrel{(B.3.1.2)}{=} 4\pi^2 \sqrt{d} \int_N^M \left(\frac{x}{td}\right)^{\frac{3}{2}} L_3\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \tilde{\Delta}_d(t) dt.$$

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
&-x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{n} m_2\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \Big|_N^{t=M} + \frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_N^M L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{2\pi x}{t\sqrt{d}} L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \tilde{\Delta}_d(t) \Big|_N^{t=M} + \frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \int_N^M L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \frac{\Delta_d(t)}{t} dt,
\end{aligned}$$

also mit (B.3.1.2)

$$\frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_N^M L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \int_N^M L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) \frac{\Delta_d(t)}{t} dt.$$

Da

$$\frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_N^M L_2\left(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}\right) L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) \frac{dt}{\sqrt{t}} \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

wie der Beweis der Folgerung zeigt, folgt die Beh. □

Folgerung B.3.2.1.1. Für $N \gg d, \varepsilon > 0$ ist:

$$\Sigma(d, t, N) = T + O\left(\frac{\mathcal{L}_d(1) d^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{tN}}\right) + O\left(\sqrt[4]{\frac{td}{N^3}} \Delta_d(N)\right) + O\left(\sqrt{\frac{t^{1+\varepsilon}d}{N}}\right),$$

gleichmäßig in $0 < a \leq t \leq b$ mit

$$T := 0 \quad \text{für } t < \frac{1}{2},$$

$$T := \frac{\text{sign}(\tau - t)}{\pi} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{5}{4}} f_d(\tau) \text{si}\left(4\pi\sqrt{\frac{N}{d}}|\sqrt{t} - \sqrt{\tau}|\right) \quad \text{für } t \geq \frac{1}{2}, \tau = \left[t + \frac{1}{2}\right].$$

BEWEIS. [Wilton 1, Theorem 3]. Man verwendet Hilfssatz D.1.4.1 mit $\tau = 4\pi\sqrt{\frac{Nx}{d}}, y = \sqrt{\frac{n}{x}}$, ersetzt in [Wilton 1, 4., Beweis zu Theorem 3] N durch $\frac{N}{d}$ und $d(n)$ durch $f_d(n)$ und erhält:

$$\sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_d(n)}{\sqrt{n}} \int_{4\pi\sqrt{\frac{tN}{d}}}^{\infty} L_2(u) L_1\left(u\sqrt{\frac{n}{t}}\right) du = T + O\left(\sqrt{\frac{t^{1+\varepsilon}d}{N}}\right).$$

Die Behauptung folgt dann aus Satz B.3.2.1 (B.3.2.1) und (A.7.2.1), (A.7.2.2). Für festes t geht T gegen 0, falls $\frac{N}{d} \rightarrow \infty$ (nicht gleichmäßig in t), da $\text{si}(x) \sim -\frac{\cos x}{x}$. □

Jetzt benötige ich folgende genauere

Summenformel. Sei $0 \leq x < y, g: [x, y] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ stetig. Dann ist:

$$\sum'_{x \leq n \leq y} f_d(n) g(n) = \mathcal{L}_d(1) \int_x^y g(t) dt + \frac{2\pi}{\sqrt{d}} \sum'_{n \leq N} f_d(n) \int_x^y M_0\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) g(t) dt$$

$$- \mathcal{L}_d(1) \sqrt{N} \int_x^y L_1\left(4\pi\sqrt{\frac{Nt}{d}}\right) g(t) \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{2\pi \Delta_d(N)}{\sqrt{d}} \int_x^y M_0\left(4\pi\sqrt{\frac{Nt}{d}}\right) g(t) dt + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{x+\varepsilon}^y g(t) d\chi(d, t, N),$$

falls alle Summen, Integrale und Grenzwerte existieren.

BEWEIS. Nach (A.2.1), (B.3.1.1) und (A.7.2.3) ist

$$\sum'_{a \leq n \leq b} f_d(n) g(n) - \mathcal{L}_d(1) \int_a^b g(t) dt = \int_a^b g(t) d\Delta_d(t)$$

$$= \int_a^b g(t) d\Sigma(d, t, N) + \frac{2\pi}{\sqrt{d}} \sum'_{n \leq N} f_d(n) \int_a^b M_0\left(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}\right) g(t) dt$$

und Satz B.3.2.1 (B.3.2.2), (A.7.2.3) und (A.7.2.5). □

B.3.3. Größenordnung der Restglieder. Hier ist die genaueste mir bekannte Abschätzung für $\sum_{n \leq x} f_d(n), x \gg d$:

Satz B.3.3.1. [Huxley Watt] Für Fundamentaldiskriminanten d und $x \gg d$ gilt:

$$\Delta_d(x) = O\left(d^{\frac{50}{73}} x^{\frac{23}{73}} (\log x)^{\frac{461}{146}}\right).$$

Ebenso gelten die elementaren Abschätzungen von [Richert] erst für $x > d$:

$$\Delta_d(x) = O\left(d^{\frac{55}{82}} x^{\frac{27}{82}}\right).$$

Allerdings wird sich zeigen, dass der interessante Bereich bei $N \approx \sqrt{d}$ liegt und dafür liefert Landaus Methode (Satz B.2.5) bessere Ergebnisse. Eine detaillierte Fehleranalyse wie in [Wilton 1], [Wilton 2] führt auf folgenden

Hilfssatz B.3.3.2. Zunächst sei $N > d, 0 \leq t \leq a$:

$$(B.3.3.1) \quad \chi(d, t, N) = O\left(\frac{d}{N}\right)$$

$$(B.3.3.2) \quad \chi(d, t, N) = O\left(\sqrt{td}\right), t \rightarrow 0$$

$$(B.3.3.3) \quad \chi(d, t, 0) = \Delta_d(t)$$

$$(B.3.3.4) \quad x \int_0^x \frac{\chi(d, t, N)}{t\sqrt{x^2 - t^2}} dt = O\left(\frac{\sqrt{xd^{\frac{2}{3}}}}{N^{\frac{1}{3}}}\right).$$

Für $N > x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}d$ ist:

$$(B.3.3.5) \quad \int_0^x \frac{d\chi(d, t, N)}{\sqrt{x^2 - t^2}} = O\left(\frac{\sqrt[4]{d}}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon}(x - [x])\sqrt[4]{N}}}\right).$$

Mit $\frac{d^{1+\varepsilon}}{x} \ll N \ll x^{\frac{1}{2}-\varepsilon}d$ ist:

$$(B.3.3.6) \quad \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2}^{-2k-1} d\chi(d, t, N) = O_k\left(\frac{x^{\frac{3k}{2}}d^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}{N^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}\right) \quad \text{für } k \in \mathbb{N}$$

BEWEIS. auf Nachfrage. □

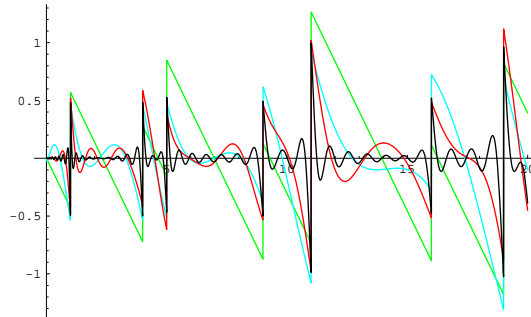


ABBILDUNG B.3.3.1. Gibbs-Phänomen für $\chi(5, t, N)$ mit $N=0,1,10,100$
Es gibt Sprünge bei n mit $f_d(n) \neq 0$.

B.3.4. Voronoïentwicklung des modifizierten konstanten Terms. Die gleichmäßige Verteilung der Geodätischenfolge \mathfrak{D}_d bzgl. der Bogenlänge folgt aus der Konvergenz der Distribution gegen 1. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Fourier-Stieltjes-Koeffizienten asymptotisch zu $(2\sqrt{d}\mathcal{L}_d(1), 0, 0, \dots)$ sind. Ersetzt man im konstanten Term $N_d(a)$ durch $f_d(a)$, was im Mittel $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ mal so groß ist, so lässt sich die Summe durch trankierte Voronoïformeln ausdrücken. Ich teile nur die Ergebnisse mit:

Satz B.3.4.1. Für $k \in \mathbb{N}, d \in \mathbb{D}^+, d^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \ll N \ll d^{\frac{3}{4}-\varepsilon}, x = \frac{\sqrt{d}}{2y}$ ist:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} f_d(n) (x^2 - n^2)^{k-\frac{1}{2}} &= \frac{\binom{2k-1}{k}}{4^k} \pi \mathcal{L}_d(1) x^{2k} + \frac{\pi \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{d}} x^{2k} \sum_{n=1}^N f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,0;\frac{1}{2},-k} \right) \\ &- \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \mathcal{L}_d(1) d^{\frac{k+1}{2}}}{2\sqrt{2}\pi^{k+\frac{3}{2}} N^{\frac{k}{2}}} x^{\frac{3}{2}k-1} \sin\left(4\pi\sqrt{\frac{Nx}{d}} - \frac{k\pi}{2}\right) - \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \Delta_d(N) d^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{2}\pi^{k+\frac{1}{2}} N^{\frac{k+1}{2}}} x^{\frac{3k-1}{2}} \cos\left(4\pi\sqrt{\frac{Nx}{d}} - \frac{k\pi}{2}\right) \\ &+ O\left(\frac{\mathcal{L}_d(1) d^{\frac{k}{2}+1} x^{\frac{3}{2}(k-1)}}{N^{\frac{k+1}{2}}}\right) + O\left(\frac{\Delta_d(N) d^{\frac{k+1}{2}} x^{\frac{3k}{2}-1}}{N^{\frac{k}{2}+1}}\right) + O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}k} d^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}{N^{\frac{k}{2}+\frac{3}{4}}}\right). \end{aligned}$$

Für $N > d^{\frac{5}{4}+\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{f_d(n)}{\sqrt{x^2 - n^2}} &= \frac{\pi \mathcal{L}_d(1)}{2} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{N'} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},0}^- \right) \\ &\quad - \frac{\mathcal{L}_d(1)y}{\sqrt{2\pi}} \sin(4\pi \sqrt{\frac{Nx}{d}}) + O \left(\frac{d^{\frac{1}{8}+\varepsilon}}{(x - [x]) \sqrt[4]{N}} \right). \end{aligned}$$

BEWEIS. Mit der SUMMENFORMEL in Abschnitt B.3.2. □

Folgerung B.3.4.1.1. Der Ausdruck $1 + \frac{2\sqrt{\pi}}{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},0}^- \right)$ ist $(C, 1)$ -summierbar zu $\frac{2}{\pi \mathcal{L}_d(1)} \sum_{n < x} \frac{f_d(n)}{\sqrt{x^2 - n^2}}$. Genauer gilt:

$$\frac{2}{\pi \mathcal{L}_d(1)} \sum_{n < x} \frac{f_d(n)}{\sqrt{x^2 - n^2}} = \frac{1}{N'} \sum_{N=1}^{N'} \left\{ 1 + \frac{2\sqrt{\pi}}{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}} \sum_{n=1}^N f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},0}^- \right) \right\} + O \left(\frac{d^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{4}-\varepsilon} (x - [x]) \sqrt[4]{N'}} \right).$$

Bemerkung. Der Grenzwert von $\frac{4y}{\pi \mathcal{L}_d(1)} \sum_{n < \frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{f_d(n)}{\sqrt{d - 4y^2 n^2}}$ für $d \rightarrow \infty$ existiert nach Computertests wohl nicht; es gibt nur einen Grenzwert von $\frac{\mathfrak{D}_{d,y}}{l(\Lambda_d)}$ im distributionellen Sinn. Es gibt eine Asymptotik bei variablem y , vgl. Proposition B.3.4.2.

Folgerung B.3.4.1.2. Für $x = \frac{\sqrt{d}}{2y}$, $d \rightarrow \infty$ ist

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{f_d(n)}{\sqrt{x^2 - n^2}} &\sim \frac{\pi \mathcal{L}_d(1)}{2} - \frac{\sqrt{2} d^{1,18} \mathcal{L}_d(1)}{4\pi x} \sin 4\pi \sqrt{x} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{d^{2,36}} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},0}^- \right), \\ \sum_{n \leq x} f_d(n) \sqrt{x^2 - n^2} &\sim \frac{\pi}{4} \mathcal{L}_d(1) x^2 + \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{d}} x^2 \sum_{n=1}^{d^{0,81}} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},-1}^- \right), \\ \sum_{n \leq x} f_d(n) (x^2 - n^2)^{\frac{3}{2}} &\sim \frac{3\pi}{16} \mathcal{L}_d(1) x^4 + \frac{3\pi^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{d}} x^4 \sum_{n=1}^{d^{0,72}} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},-2}^- \right), \\ \sum_{n \leq x} f_d(n) (x^2 - n^2)^{\frac{5}{2}} &\sim \frac{5\pi}{32} \mathcal{L}_d(1) x^6 + \frac{15\pi^{\frac{5}{2}}}{8\sqrt{d}} x^6 \sum_{n=1}^{d^{0,67}} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;\frac{1}{2},-3}^- \right). \end{aligned}$$

Betrachtet man statt der eindimensionalen Distribution $\mathfrak{D}_{d,y}$ das Integral $\int_Y^{\infty} * \frac{dy}{y^2}$ des konstanten Terms von $\mathfrak{D}_{d,y}$, so kommt man auf folgenden

Satz B.3.4.2. Für $d \in \mathbb{D}^+$, $N > d^{2,5}$, $x > 1$ gilt:

$$\sum_{n \leq x} f_d(n) \operatorname{arcosh} \frac{x}{n} = \frac{\pi \mathcal{L}_d(1)}{2} x - \frac{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}}{4} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}} x}{2\sqrt{d}} \sum_{n \leq N} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;0,-\frac{1}{2}}^- \right) + O \left(\frac{\sqrt{x} d^{\frac{2}{3}}}{N^{\frac{1}{6}}} \right).$$

Die Beweise der Sätze B.3.4.1 und B.3.4.2 ergeben leider erst für $N \gg \sqrt{d} \approx x$ günstige Fehlerabschätzungen. Das verhindert eine Trivialabschätzung des Hauptgliedes wie im Fall des Dirichletschen Teilerproblems, wo man $N \approx \sqrt[3]{x}$ wählt. Eine weitere Schwierigkeit sind die Singularitäten der G-Funktionen bei 0. Auf jeden Fall folgt aus den Beweisen die Konvergenz der Voronoïformeln für $N \rightarrow \infty$:

Satz B.3.4.3. Für $d \in \mathbb{D}^+$, $x > 0$, $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^x f_d(n) \operatorname{arcosh} \frac{x}{n} = \frac{\pi \mathcal{L}_d(1)}{2} x - \frac{\mathcal{L}_d(1)\sqrt{d}}{4} + \frac{\pi^{\frac{3}{2}} x}{2\sqrt{d}} \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \Big|_{0,0;-\frac{1}{2},0}^- \right)$$

und

$$\sum_{n=1}^x f_d(n) (x^2 - n^2)^{k-\frac{1}{2}} = \frac{\binom{2k-1}{k}}{4^k} \pi \mathcal{L}_d(1) x^{2k} + \frac{\pi \Gamma(k + \frac{1}{2})}{\sqrt{d}} x^{2k} \sum_{n=1}^{\infty} f_d(n) G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 n^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,0;\frac{1}{2},-k} \right).$$

Satz B.3.4.1 und B.3.4.2 sind der Versuch, die Schwierigkeiten durch die Singularitäten der Fourierkoeffizienten $\frac{f_d(a)}{\sqrt{d-4a^2y^2}}$ zu umgehen. Oft vereinfachen sich Schwierigkeiten durch Integration. Die Reihen in Satz B.3.4.1

gehen durch rekursives Anwenden des Differenzialoperators $\frac{d}{xdx}$ ineinander über. Im Falle des Dirichletschen Teilerproblems lassen sich die Summenformeln für höheres Gewicht, d.h. (B.3.1.2), leichter beweisen. Es gibt dann keine Schwierigkeiten mit der Vertauschung von Integration und Summation, da die Reihen gleichmäßig konvergieren. Daraus lässt sich dann (B.3.1.1) mit dem Riemannsches Lokalisationsatz ableiten. In Satz B.3.4.2 wurden

die Fourierkoeffizienten der eindimensionalen Distribution in y -Richtung integriert. Das Integral $\int_{y_1}^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} \frac{dy}{y\sqrt{d-4a^2y^2}}$

liefert den arcosh . Leider funktionieren diese Methoden nicht bei den oszillierenden Termen. Die Theorie der Exponentialsummen mit Charakteren, wie sie in [Huxley] dargelegt ist, hat wieder den entscheidenden Nachteil, dass die hier betrachteten Summationsbereiche zu kurz sind. Sie liefern Abschätzungen erst für $x > d^5$. Sonst lässt

sich die Gleichmäßigkeit bezüglich d nicht gewährleisten. Der Schluss von $\sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{f_d(a)}{y\sqrt{d-4a^2y^2}}$ auf $\sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{N_d(a)}{y\sqrt{d-4a^2y^2}}$

lässt sich folgendermaßen bewerkstelligen. Nach (B.1.2) ist $\sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2y}} \frac{N_d(a)}{y\sqrt{d-4a^2y^2}} = \sum_{k \leq \frac{\sqrt{d}}{2y}} \mu(k) \sum_{a=1}^{\frac{\sqrt{d}}{2(k^2y)}} \frac{f_d(a)}{y\sqrt{d-4a^2(k^2y)^2}}$.

Ähnliches gilt für $\sum f_d(n) \operatorname{arcosh} \frac{x}{n}$ und $\sum N_d(n) \operatorname{arcosh} \frac{x}{n}$. Das vergrößert den Fehler natürlich weiter.

Bemerkung. Die Fehlerabschätzungen des Kapitels 1.4 sind allerdings besser.

Modulformen und Verallgemeinerungen

C.1. Schwach-holomorphe Modulformen

C.1.1. Basen. Der Raum der schwach-holomorphen Modulformen $M_k^!(\Gamma, \chi)$ besteht aus denjenigen Funktionen, die bzgl. der Gruppe Γ vom Gewicht k mit (Dirichlet-)Charakter χ transformieren und holomorph in \mathcal{H} , meromorph in den Spitzen sind. Meistens ist $\Gamma = \Gamma_0(N)$, $k \in \mathbb{Z}$. Falls $\Gamma = \Gamma_0(4)$ und $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, meinen wir immer Modulformen, die mit dem Theta-Multiplikator wie $\theta_3(z)^{2k}$ transformieren. In diesem Fall oder wenn Γ die volle Modulgruppe ist, schreiben wir auch einfach $M_k^!$.

Definition C.1.1.1. Sei $k \in \mathbb{Z}$, $\Gamma = \Gamma_0(N)$, χ ein Dirichletcharakter mod N , κ eine Spitze von $X_0(N)$.

$$M_k^!(N, \chi) := \left\{ f \in \mathbb{C}\{q\}, f|_k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \chi(d)f, \gamma \in \Gamma, f \text{ holomorph in } \mathcal{H}, \text{ meromorph in allen Spitzen} \right\},$$

$$M_{k,\kappa}^!(N, \chi) := \left\{ \text{Modulformen aus } M_k^!(N, \chi) \text{ mit Hauptteil nur in der Spitze } \kappa, \text{ konstant in den anderen Spitzen} \right\},$$

$$S_k^!(N, \chi) := \left\{ f \in M_k^!(N, \chi) \left| (f|_\gamma)(z) = \sum_{n \geq n_0} a_{\gamma,n} q^n, a_{\gamma,0} = 0 \text{ f\"ur alle } \gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \right. \right\}, S_{k,\infty}^!(N, \chi) \text{ entsprechend;}$$

bzw. f\"ur die Gruppe $\Gamma_0(4)$, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$M_k := M_k(\Gamma_0(4)), S_k := S_k(\Gamma_0(4))$$

$$M_k^! := \left\{ f \in \mathbb{C}\{q\}, f|_k \gamma = f \text{ f\"ur } \gamma \in \Gamma_0(4), f \text{ holomorph in } \mathcal{H}, \text{ meromorph in den Spitzen } \infty, 0, \frac{1}{2} \right\},$$

$$M_k^{!+} := \left\{ f \in M_k^! \left| f(z) = \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ (-1)^{|k|} n \equiv 0, 1 \pmod{4}}} a_n q^n, f|_k \gamma = f \text{ f\"ur } \gamma \in \Gamma_0(4) \right. \right\}, \text{ Kohnen-Plus-Raum,}$$

$$S_k^! := \left\{ f \in M_k^! \left| \text{konst. Koeff. in allen Spitzen} = 0 \right. \right\},$$

$$S_k^{!+} := \left\{ f \in M_k^{!+} \left| \text{konst. Koeff. in allen Spitzen} = 0 \right. \right\};$$

Die R\"aume $M_k^!(N, \chi)$, $S_k^!(N, \chi)$, $M_k^{!+}$, $S_k^{!+}$ sind unendlich dimensional. F\"ur die Modulgruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ wird die Konstruktion einer Basis der schwach-holomorphen Modulformen in [Duke Jen 1] erkl\"art, f\"ur den Kohnen-Plus-Raum in [Duke Jen 2].

Hilfssatz C.1.1.2. *Schwach-holomorphe Modulformen aus $M_k^!(N, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten in einer Spitze κ haben algebraische Fourierkoeffizienten von beschr\"anktem Nenner in allen Spitzen des Fundamentalbereichs $\Gamma_0(N) \setminus \mathcal{H}$.*

Mock-Modulformen $f \in \mathbb{S}_k(N, \chi)$, $k \leq 0$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten in einer Spitze haben ebenfalls algebraische Koeffizienten in allen anderen Spitzen. Allerdings bleiben die Nenner im allgemeinen nicht beschr\"ankt.

BEWEIS. Multipliziere mit einer Potenz der Diskriminantenfunktion Δ , um eine Spitzenform zu erhalten, deren Fourierkoeffizienten dann beschr\"ankte Nenner haben. Multiplikation mit $\frac{1}{\Delta} \in \mathbb{Z}\{q\}$ ver\"andert diese Eigenschaft nicht.

Die Aussage f\"ur Fourierkoeffizienten in den anderen Spitzen folgt aus dem Beweis zu [Stein, Theorem 9.18]. Die Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ ist kompatibel mit einer geeigneten algebraischen Erweiterung.

Ist f eine Mock-Modulform, so betrachte $D^{k-1}f$. Der Differentialoperator vertauscht mit der Aktion von $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$

und daher kann man D^{k-1} auf jede Spitze einzeln anwenden. Das Beispiel $\tilde{\Delta} \in M_{-10}^1(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ hat rationale Koeffizienten mit unbegrenzt wachsenden Nennern; vgl. auch Abschnitt 5.5. \square

Satz C.1.1.3. *Schwach-holomorphe Modulformen aus $S_{k,\infty}^1(N, \chi)$, $k \geq 1$ haben eine Miller-Basis, d.h. eine Basis der Form:*

$$\Delta^{\mathrm{top}} := \begin{matrix} q^{i_s} + O(q^{i_s+1}) \\ q^{i_{s-1}} + O(q^{i_{s-1}+1}) \\ \vdots \\ q^{i_1} + O(q^{i_1+1}) \\ \frac{1}{q} + O(q) \\ \frac{1}{q^2} + O(q) \\ \vdots \end{matrix}, \quad 0 < i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_s, \quad s = \dim S_k(N, \chi),$$

mit algebraischen Fourierkoeffizienten aus M . Falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ist $\forall j : i_j = j$ möglich und die Nenner der Fourierkoeffizienten aller Basisfunktionen sind gleichmäßig beschränkt.¹

Für $k \leq 0$ bestimme die Zahlen $i_1 = 1 < i_2 < \dots < i_s$ für $S_{2-k}(N, \chi)$. Sei t die kleinste natürliche Zahl, die in dieser Folge fehlt. Dann gibt es eine Miller-Basis der Form

$$\begin{matrix} \frac{1}{q^t} + O\left(\frac{1}{q^t}\right) \\ \frac{1}{q^{t+1}} + O\left(\frac{1}{q^t}\right) \\ \frac{1}{q^{t+2}} + O\left(\frac{1}{q^t}\right) \\ \vdots \end{matrix}$$

mit Koeffizienten aus M und derselben Aussage über gleichmäßige Beschränktheit.

BEWEIS. Die Fourierkoeffizienten der Spitzenformen $S_{k,\infty}(N, \chi)$ haben eine Basis in Zeilenstufenform

$$(C.1.1.1) \quad \Delta^{\mathrm{top}} := \begin{matrix} q^{i_s} + O(q^{i_s+1}) \\ q^{i_{s-1}} + O(q^{i_{s-1}+1}) \\ \vdots \\ q^{i_1} + O(q^{i_1+1}), \end{matrix}$$

die sich durch den Gaußalgorithmus aus der Basis (5.1.2) ergibt, d.h. alle Fourierkoeffizienten sind aus $\mathbb{K}_{\mathrm{Hecke}}$. Es gibt nach [Rhoades, Theorem 2.2] ein $f' \in S_{2-k,\infty}(N, \chi)$ mit Hauptteil $\frac{1}{q^m}$. Nach Anwenden von D^{k-1} landet das in $S_{k,\infty}^1(N, \chi)$. Die Aussagen zur Algebraizität der Fourierkoeffizienten folgen aus Satz 5.2.1.

Falls es einen Hauptmodul $j_N = \frac{1}{q} + O(1) \in M_{0,\infty}^1(\Gamma_0(N)) \cap \mathbb{Z}\{q\}$ gibt, sind die $\langle \Delta^{\mathrm{top}}, \Delta^{\mathrm{top}} j_N, \Delta^{\mathrm{top}} j_N^2, \dots \rangle$ linear unabhängig. Daraus folgt: $\forall j : i_j = j$.

Für $k \leq 0$ gibt es keine Spitzenformen. Seien $f_i(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} q^j$ die Spitzenformen der Millerbasis von $S_{2-k}(N, \chi)$.

Ein Hauptteil $\sum_{n < 0} a_j q^j$ gehört nach Folgerung C.1.2.1.2 genau dann zu einer schwach-holomorphen Modulform, wenn

$$\forall i : a_{-1} c_{i,1} + a_{-2} c_{i,2} + \dots = 0.$$

¹Bezeichnungen aus Definition 5.1.3

Die Koeffizientenvektoren $(c_{i,1}, \dots, c_{i,u})_{i=1, \dots, s}$ sind linear unabhängig, falls $u < t$ da $t \leq s + 1$. Dann gibt es nur die triviale Lösung 0. Für $u \geq t$ sind sie immer linear abhängig und es gibt einen Hauptteil mit Koeffizienten aus M , der zu einer Modulform gehört (Folgerung C.3.3.1.3.1). \square

Zunächst definieren wir Basen der Räume $M_k^1(N, \chi)$, die günstig im Hinblick auf Teilbarkeitseigenschaften ihres p -Teils ($1, p, p^2, \dots$ -ter Koeffizient) sind und aus kleineren algebraischen Erweiterungen als die NeufORMEN kommen. Daher lassen sie sich leicht berechnen. Die p -Ordnungen ihres p -Teils sind ähnlich übersichtlich wie bei den NeufORMEN.

In [Choi 1] findet sich eine Standardbasiskonstruktion für $M_k(\Gamma_0(N))$, $k \in 2\mathbb{N}_0$, falls $X_0(N)$ vom Geschlecht Null ist. Eine ähnliche Konstruktion lässt sich auf $M_k(N, \chi)$ für beliebiges $N \in \mathbb{N}$ verallgemeinern. Die T_p -Eigenwerte kommen für höhere Stufe häufig mehrfach in der Basis (5.1.2) vor. Dann ist die Determinante der Vandermonde-ähnlichen Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \tau_1(p) & & \tau_s(p) \\ \tau_1(p^2) & & \tau_s(p^2) \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_1(p^{s-1}) & \cdots & \tau_s(p^{s-1}) \end{pmatrix}, \quad s := \dim S_k(N, \chi),$$

$\det = \prod_{i>j} (\tau_i(p) - \tau_j(p)) = 0$ und man kann die Spitzenformen nicht mehr bijektiv dem p -Teil zuordnen. Man kann (durch Gaußalgorithmus) eine Basis mit p -Teil der Form

$$(C.1.1.2) \quad \begin{array}{l} \mathbf{1} \cdot q + \cdots + 0 \cdot q^p + \cdots + 0 \cdot q^{p^{n-1}} + \dots \\ 0 \cdot q + \cdots + \mathbf{1} \cdot q^p + \cdots + 0 \cdot q^{p^{n-1}} + \dots \\ \vdots \\ 0 \cdot q + \cdots + 0 \cdot q^p + \cdots + \mathbf{1} \cdot q^{p^{n-1}} + \dots \\ 0 \cdot q + \cdots + 0 \cdot q^p + \cdots + 0 \cdot q^{p^{n-1}} + \dots \\ \vdots \\ 0 \cdot q + \cdots + 0 \cdot q^p + \cdots + 0 \cdot q^{p^{n-1}} + \dots \end{array}$$

finden; davon sind $s - n$ Spitzenformen auf dem p -Teil Null, so dass das Verhalten auf diesen Koeffizienten allein durch die ersten n Formen beschrieben wird, vgl. den Beweis von Satz 5.1.6. Die Vandermondesche Matrix hat n linear unabhängige Zeilen und die restlichen Zeilen werden durch Differenzbildung auf dem p -Teil identisch Null. Insbesondere sind alle Altformen ($\forall t, f, p \nmid t > 1$) auf dem p -Teil Null. Seien f_1, \dots, f_n eine Basis von NeufORMEN zu paarweise verschiedenen Eigenwerten und S_k^0 der Raum von Spitzenformen, deren p -Teil verschwindet, mit Fourierkoeffizienten aus demselben Körper wie die NeufORMEN. Die Basisfunktionen (C.1.1.2) sind nicht eindeutig. Nur der p -Teil ist eindeutig. Vielleicht stellt man sich eher Äquivalenzklassen von Funktionen modulo Spitzenformen aus S_k^0 vor. Entscheidend ist, dass es in allen auftretenden Fällen tatsächlich konkrete Funktionen gibt.

Satz C.1.1.4. Sei $k, N \in \mathbb{N}, k \geq 2$. Es gibt eine Basis

$$\left\langle \Delta_{p^0}^{\{N\}}, \Delta_{p^1}^{\{N\}}, \dots, \Delta_{p^{n-1}}^{\{N\}} \right\rangle,$$

sodass die p -Teile von $\Delta_{p^j}^{\{N\}}$ die p -Teile aller Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ erzeugen. Falls die T_p -Eigenwerte $\tau_i(p)$ paarweise verschieden sind, ist das eine Basis aller Spitzenformen $S_k(N, \chi)$. Diese Basis lässt sich folgendermaßen bestimmen:

- (1) Der p -Teil ist ganzzahlig: $\forall m \in \mathbb{N}_0 : \tau_{p^j}^{\{N\}}(p^m) \in M$.
- (2) $\forall j, m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} : \tau_{p^j}^{\{N\}}(p^m) = \delta_{jm}$.

Man gewinnt diese Basis, indem man die Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} g_1(1) & g_1(p) & g_1(p^2) & \dots & g_1(p^{s-1}) \\ \vdots & & & & \\ g_s(1) & g_s(p) & g_s(p^2) & \dots & g_s(p^{s-1}) \end{pmatrix}$$

einer beliebigen Basis $\langle g_j \rangle_{j=1, \dots, s}$, $g_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} g_j(i) q^i$ von $S_k(N, \chi)$ in Zeilenstufenform bringt.

Dazu gibt es schwach-holomorphe Modulformen $\langle H_1, H_2, H_3, \dots \rangle$ vom Gewicht k , d.h. $H_j(z) = \frac{1}{q^j} + \sum_{m=0}^{\infty} h_j(m) q^m \in S_{k, \infty}^1(N, \chi)$, $j \in \mathbb{N}$, so dass für die Koeffizienten gilt:

- (3) Falls die Modulkurve $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ist der p -Teil ganzzahlgemäß.
- (4) $\forall m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} : h_j(p^m) = 0$.

Für alle Basisfunktionen gilt:

- (5) Sämtliche Fourierkoeffizienten sind aus M , für $X_0(N)$ vom Geschlecht Null sind die Nenner gleichmäßig beschränkt durch $\text{Disk}(p_{T_p})$.

Diese Funktionen hängen noch vom Gewicht k , von der Primzahl p , der Gruppe $\Gamma = \Gamma_0(N)$ und vom Nebentyp χ ab. Außerdem sind sie nur bis auf Funktionen aus S_k^0 eindeutig.

BEWEIS. Zunächst zeige ich, dass es tatsächlich eine Basis mit der Eigenschaft (2) gibt. Starten wir mit den Neufurmen $f_j(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_j(i) q^i, j = 1, \dots, n$, die den p -Teil von $S_k(N, \chi)$ aufspannen. Der Gauß-Algorithmus, angewendet auf die Koeffizientenmatrix

$$(C.1.1.3) \quad V_0^T := \begin{pmatrix} 1 & \tau_1(p) & \tau_1(p^2) & \dots & \tau_1(p^{n-1}) \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \tau_n(p) & \tau_n(p^2) & \dots & \tau_n(p^{n-1}) \end{pmatrix},$$

ergibt eine eindeutige Lösung, denn mit Hilfe von Spaltenaddition sieht man, dass

$$(C.1.1.4) \quad \det = \begin{vmatrix} 1 & \tau_1(p) & \tau_1(p)^2 & \dots & \tau_1(p)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \tau_n(p) & \tau_n(p)^2 & \dots & \tau_n(p)^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\tau_j(p) - \tau_i(p)) \neq 0.$$

Insbesondere sind die $1, p, p^2, \dots, p^{n-1}$ -ten Koeffizienten der Hecke-Eigenformen linear unabhängig. Daher gibt es eine Basis, sodass (2) gilt. Seien $\lambda_{j,i}$ die Koeffizienten der Entwicklung von $\Delta_{p^j}^{\{N\}}$ in eine Basis von Stufe- N -Neufurmen paarweise verschiedener Eigenwerte f_1, \dots, f_n und sonstiger Basisfunktionen der Standardbasis (5.1.2):

$$(C.1.1.5) \quad \Delta_{p^j}^{\{N\}} = \sum_{i=1}^n \lambda_{j,i} f_i + \sum_{i=n+1}^s \lambda_{j,i} f_i \text{ mit } f_{n+1}, \dots, f_s \in S_k^0,$$

d.h.

$$\begin{aligned} \tau_{p^j}^{\{N\}}(p^m) &= \sum_{i=1}^n \lambda_{j,i} \tau_i(p^m), \\ s_{j,m} &:= \sum_{i=1}^n \lambda_{j,i} \tau_i^m. \end{aligned}$$

Die elementarsymmetrischen Funktionen der $\tau_j(p), j = 1, \dots, n$ bezeichnen wir mit σ_j . Dann gilt analog den Newton-Girard-Formeln, vgl. (A.1.1)

$$(C.1.1.6) \quad \forall k \geq n : \quad s_{j,k} = s_{j,k-1}\sigma_1 - s_{j,k-2}\sigma_2 + s_{j,k-3}\sigma_3 \mp \dots + (-1)^{n-1} s_{j,k-n}\sigma_n.$$

Aus (2) folgt rekursiv $s_{j,k} \in L$ und mit

$$\tau_{p^j}^{\{N\}}(p^m) = \sum_{i=0}^{\frac{m}{2}} (-\chi(p) p^{k-1})^i \binom{m-i}{i} s_{j,m-2i}$$

die Eigenschaft (1).

Nach Satz C.1.1.3 gibt es entsprechende schwach-holomorphe Basisfunktionen H_j mit Hauptteil $\frac{1}{q^m}$ und Fourierkoeffizienten aus M . Mit Hilfe einer Linearkombination der $\Delta_{p^j}^{\{N\}}$ lassen sich die $0, 1, p, p^2, \dots, p^{n-1}$ -ten Koeffizienten löschen. Das ist Aussage (4). Falls es keine Spitzenform gibt, startet man mit einer Linearkombination aller Eisensteinreihen, die in ∞ eine Nullstelle maximal möglicher Ordnung hat oder, falls das Gewicht $k = 0$ ist, mit der konstanten Funktion 1. Die Koeffizienten $\lambda_{j,i}, i \leq n$ sind Lösungen eines linearen Gleichungssystems mit Koeffizienten aus $\mathcal{O}_{\text{Hecke}}$ und Systemdeterminante (C.1.1.4), ein Teiler von $\text{Disk}(p_{T_p})$; für $i > n$ o.B.d.A. $\lambda_{j,i} = 0$. Alle Fourierkoeffizienten sind wegen Satz C.1.1.3 aus M .

(3) Falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, existiert ein Hauptmodul $j_N(z) = \frac{1}{q} + \dots \in M_{0,\infty}^1(\Gamma_0(N)) \cap \mathbb{Z}\{q\}$ mit einem einfachen Pol in ∞ und konstant in den anderen Spitzen (Liste in [Choi 1, Table 2]). Daher sind die Modulformen H_j von der Form $\Delta_{p^{n-1}}^{\{N\}} \cdot \text{Polynom}(j_N)$ und p -Teil ganzzahlgemäß. \square

Beispiele. Diese Basis sieht etwas ungewöhnlich aus. Es gibt jedoch erstaunliche Regelmäßigkeiten. Für $\text{SL}_2(\mathbb{Z}), p = 2, k = 42$ mit Heckepolynom

$$p_{T_2}(x) = x^3 + 344688x^2 - 6374982426624x - 520435526440845312.$$

ist

$$\begin{aligned} \Delta_1^{\{1\}} &= \mathbf{q} - \frac{147452}{9}q^3 - 30855526170q^5 + \dots - 237541401468862464q^8 + \dots, \\ \Delta_2^{\{1\}} &= \mathbf{q}^2 - \frac{783}{4}q^3 - 83724625q^5 + \dots + 1976935915520q^8 + \dots, \\ \Delta_4^{\{1\}} &= -\frac{1}{576}q^3 + \mathbf{q}^4 - \frac{615}{16}q^5 + \dots - 344688q^8 + \dots \end{aligned}$$

Die 2-Ordnungen der 2^m -ten Koeffizienten ($m = 0, 1, 2, \dots$) sind völlig regelmäßig

$$\begin{aligned} \Delta_1^{\{N\}} : & \quad 0, \ /, \ /, \ 25, \ 29, \ 33, \ 37, \ 41, \ 45, \ 49, \ 53, \ \dots \\ \Delta_2^{\{N\}} : & \quad /, \ 0, \ /, \ 13, \ 17, \ 21, \ 25, \ 29, \ 33, \ 37, \ 41, \ \dots \\ \Delta_4^{\{N\}} : & \quad /, \ /, \ 0, \ 4, \ 8, \ 12, \ 16, \ 20, \ 24, \ 28, \ 32, \ \dots \end{aligned}$$

Dazu gehören die M_{42}^1 -Formen

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{1}{q} - 31080726q^3 - 398604069640640q^5 + \dots, \\ H_2 &= \frac{1}{q^2} - \frac{8090641595}{9}q^3 - 24311899396576500q^5 + \dots, \\ H_3 &= \frac{1}{q^3} - 21454401528q^3 - 1130390763371899875q^5 + \dots, \\ H_4 &= \frac{1}{q^4} - \frac{7001359561989}{16}q^3 - \frac{169470726327454521115}{4}q^5 + \dots \end{aligned}$$

Die 2-Ordnungen der 2^m -ten Koeffizienten ($m = 0, 1, 2, \dots$) sind

$$\begin{aligned} H_1 &: /, /, /, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, \\ H_2 &: /, /, /, 15, 19, 23, 27, 31, 35, 39, 43, \\ H_4 &: /, /, /, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, \\ H_8 &: /, /, /, \boxed{2}, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, \\ H_{16} &: /, /, /, 8, \boxed{2}, 14, 18, 22, 26, 30, 34, \\ H_{32} &: /, /, /, 8, 8, \boxed{2}, 14, 18, 22, 26, 30, \\ H_{64} &: /, /, /, 8, 8, 8, \boxed{2}, 14, 18, 22, 26, \end{aligned}$$

mit offensichtlichem Zusammenhang zu den p -Ordnungen der Spitzenformen $\Delta_{2^j}^{\{N\}}$ (die ersten drei Zeilen stimmen bis auf eine konstante Differenz von 2 überein). Alle auftretenden Formen sind 4-arithmetisch.

Definition C.1.1.5. Sei $\dim S_k(N, \chi) = s$ und n sei die Anzahl verschiedener T_p -Eigenwerte. Wir verwenden im folgenden die Abkürzung

$$h_m := h_m(p^n).$$

Diese Werte werden wir als Anfangswerte bezeichnen, da $h_m(p^0) = \dots = h_m(p^{n-1}) = 0$.

Hilfssatz C.1.1.6 (Hecketheorie). Sei $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0, p$ eine Primzahl, $p \nmid N, n$ die Anzahl paarweise verschiedener T_p -Eigenwerte. Dann gibt es eine Spitzenform $f \in S_k^0$ mit verschwindendem p -Teil, so dass

$$T_p H_{p^m} = \varepsilon(m > 0) H_{p^{m-1}} + \chi(p) p^{k-1} H_{p^{m+1}} + h_{p^m} \Delta_{p^{n-1}}^{\{N\}} + f.$$

Falls alle T_p -Eigenwerte paarweise verschieden sind, ist $f \equiv 0$.

BEWEIS. Durch den Hauptteil und die $1, p, \dots, p^{n-1}$ -ten Koeffizienten ist der p -Teil der Modulform nach Satz C.1.1.4 eindeutig bestimmt. Der $1, p, \dots, p^{n-2}$ -te Koeffizient ist Null. Der p^{n-1} -te Koeffizient ist $h_{p^m}(p^n)$. Nach Hilfssatz 5.1.2 hat $T_p H_{p^m}$ keinen Hauptteil in Spitzen $\kappa \neq \infty$. \square

Die folgenden Hilfssätze entsprangen dem Versuch, Analogien zwischen den Basen von Spitzenformen $q^{p^m} + \dots$ und den parallelen schwach-holomorphen Modulformen $\frac{1}{q^{p^m}} + \dots$ herzustellen. Die Fourierkoeffizienten der Basisfunktionen lassen sich durch Anwendung der Heckeoperatoren aus den Anfangswerten h_{p^m} berechnen.

Hilfssatz C.1.1.7. Sei p eine Primzahl, $p \nmid N, n$ die Anzahl paarweise verschiedener T_p -Eigenwerte, $m, s \in \mathbb{N}_0, s \geq n, l = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tau_{p^m}^{\{N\}}(p^s) &= \sum_{i=0}^n (\chi(p) p^{k-1})^i \sum_{j=0}^{\min(s-1-i, m)} \tau_{p^{m-j+i}}^{\{N\}}(p^n) \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^{s-i-j-1}), \quad \forall m < n \\ h_{p^m}(lp^s) &= \sum_{i=0}^{s-1} (\chi(p) p^{k-1})^i \sum_{j=0}^{\min(s-1-i, m)} h_{p^{m-j+i}} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-i-j-1}) + \sum_{i=\max(0, s-m)}^s (\chi(p) p^{k-1})^i h_{p^{m-s+2i}}(l); \end{aligned}$$

wobei $\tau_{p^n}^{\{N\}}(p^n) := -1$ und Summanden mit sinnlosen Argumenten Null sind. Falls alle T_p -Eigenwerte paarweise verschieden sind, kann man $l \in \mathbb{N}$ beliebig mit $p \nmid l$ nehmen.

BEWEIS. Ich beweise nur die zweite Aussage, da die erste Relation nicht weiter benötigt wird und ihr Beweis nahezu analog ist. Zunächst ergibt die Anwendung des Heckeoperators T_p nach Hilfssatz C.1.1.6:

$$s \geq 1, m \geq 0: \quad h_{p^m}(lp^s) - h_{p^{m-1}}(lp^{s-1}) = \chi(p)p^{k-1}(h_{p^{m+1}}(lp^{s-1}) - h_{p^m}(lp^{s-2})) + h_{p^m}\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-1}).$$

Durch Iteration hat man

$$\begin{aligned} h_{p^m}(lp^s) &= h_{p^{m-1}}(lp^{s-1}) + (\chi(p)p^{k-1})^s h_{p^{m+s}}(l) \\ &\quad + h_{p^m}\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-1}) + \chi(p)p^{k-1}h_{p^{m+1}}\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-2}) + \dots + (\chi(p)p^{k-1})^{s-1} h_{p^{m+s-1}}\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(l). \end{aligned}$$

Das ist auch für $s = 0$ noch richtig. Ersetzt man m und s durch $m - j$ und $s - j$ und summiert über $j = 0, 1, \dots, t = \min(s, m)$, so ist

$$h_{p^m}(lp^s) = \sum_{j=0}^t (\chi(p)p^{k-1})^{s-j} h_{p^{m+s-2j}}(l) + \sum_{\substack{i,j \\ 0 \leq i+j \leq s-1 \\ j \leq t}} (\chi(p)p^{k-1})^i h_{p^{m-j+i}}\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-i-j-1}).$$

□

C.1.2. Modulares Gitter. [Bruinier Funke 2] führen folgende Paarung von Modulformen ein:

Definition C.1.2.1. Sei $f \in M_k^!(N, \chi)$, $g \in \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \overline{\chi})$ und

$$\{f, g\}_\Gamma := \langle f, \xi_{2-k}(g) \rangle_\Gamma,$$

das Skalarprodukt, verstanden in der Verallgemeinerung von [Guerzhoy 4, Proof of Theorem 1] und [Kent, Prop. 4.4.1]. Falls g einen Hauptteil nur in der Spitze ∞ hat und in den anderen Spitzen konstant ist, gilt

$$\{f, g\} = \text{konstanter Term von } fg^+,$$

wie in [Bruinier Funke 2, Proposition 3.5], [Rhoades, Lemma 3.1].

Folgerung C.1.2.1.1. Schwach-holomorphe Modulformen $f \in M_{k,\infty}^!(N, \chi)$ und $g \in M_{2-k,\infty}^!(N, \overline{\chi})$ sind orthogonal: $\{f, g\} = 0$.

Folgerung C.1.2.1.2. Sei $k \in \mathbb{N}$, $g \in \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \overline{\chi})$. Dann sind äquivalent

- $\forall f \in S_k(N, \chi): \quad \{f, g\} = 0.$
- g ist schwach-holomorph: $g \in M_{2-k}^!(N, \overline{\chi}).$

BEWEIS. Sei $\xi_{2-k}(g) = \sum_i c_i g_i$ eine Summe von Hecke-Eigenformen aus $S_k(N, \chi)$. Aus $\{g_j, g\} = \sum_i \overline{c}_i \langle g_j, g_i \rangle = \overline{c}_j \langle g_j, g_j \rangle = 0$ folgt $c_j = 0$. Also ist g schwach-holomorph. □

Die im Abschnitt C.1.1 konstruierten Basisfunktionen vom Gewicht lassen sich zu einem Gitter anordnen.

$$\begin{aligned}
 \Delta_{p^{n-1}}^{\{N\}} &= 0q + \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(2)q^2 + \dots + 0q^p + \dots + \mathbf{1}q^{p^{n-1}} + \dots + \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 &\vdots \\
 \Delta_p^{\{N\}} &= 0q + \tau_p^{\{N\}}(2)q^2 + \dots + \mathbf{1}q^p + \dots + \tau_p^{\{N\}}(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 \Delta_1^{\{N\}} &= \mathbf{1}q + \tau_1^{\{N\}}(2)q^2 + \dots + \dots + \tau_1^{\{N\}}(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 E &= \mathbf{1} + 0q + e(2)q^2 + \dots + 0q^p + \dots + e(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 (C.1.2.1) \quad H_1 &= \frac{\mathbf{1}}{q} + 0q + h_1(2)q^2 + \dots + 0q^p + \dots + 0q^{p^{n-1}} + \dots + h_1(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 H_2 &= \frac{\mathbf{1}}{q^2} + 0q + h_2(2)q^2 + \dots + \dots + h_2(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 H_3 &= \frac{\mathbf{1}}{q^3} + 0q + h_3(2)q^2 + \dots + \dots + h_3(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 H_4 &= \frac{\mathbf{1}}{q^4} + 0q + h_4(2)q^2 + \dots + \dots + h_4(p^m)q^{p^m} + \dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

mit den Funktionen $\Delta_{p^j}^{\{N\}}$ aus Satz C.1.1.4 und der Eisensteinreihe E mit $e(p^j) = h_i(p^j) = 0, j = 0, \dots, n-1, i \in \mathbb{N}$. Alle Funktionen außer E sind nach Satz C.1.1.4 aus $S_{k,\infty}^!(N, \chi)$.

In Satz C.1.2.3 beweisen wir, dass in den senkrechten Spalten von (C.1.2.1) die Fourierkoeffizienten einer Modulform von komplementärem Gewicht und komplex konjugiertem Nebentyp $\bar{\chi}$ stehen:

Definition C.1.2.2. Sei n sei die Anzahl verschiedener T_p -Eigenwerte. Definiere Funktionen

$$d_{p^m}(z) := -\frac{1}{q^{p^m}} + \frac{\overline{\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^m)}}{q^{p^{n-1}}} + \dots + \frac{\overline{\tau_{p^0}^{\{N\}}(p^m)}}{q} + \overline{e_k(p^m)} + \overline{h_1(p^m)}q + \overline{h_2(p^m)}q^2 + \dots$$

Für $m < n$ ist $d_{p^m} \equiv 0$. Hauptsächlich interessiert uns der Spezialfall $m = n$ und

$$\chi(p) D^{k-1} d_{p^n} = \chi(p) \left(\frac{p^{n(k-1)}}{q^{p^n}} - \frac{p^{(n-1)(k-1)} \overline{\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^n)}}{q^{p^{n-1}}} - \dots - \frac{\overline{\tau_{p^0}^{\{N\}}(p^n)}}{q} + \overline{h_1}q + 2^{k-1} \overline{h_2}q^2 + \dots \right).$$

Satz C.1.2.3. Die Funktionen d_{p^m} sind aus $M_{2-k}^1(N, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten aus M ; falls $X_0(N)$ Geschlecht Null hat, ganzalgebraisch aus L .

BEWEIS. Nach Satz [Rhoades, Theorem 2.2] gibt es Funktionen $F_m \in \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \chi)$ mit dem Hauptteil

$$-\frac{1}{q^{p^m}} + \frac{\overline{\tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^m)}}{q^{p^{n-1}}} + \dots + \frac{\overline{\tau_{p^0}^{\{N\}}(p^m)}}{q} + \overline{e_k(p^m)} + O(q)$$

in der Spitze ∞ , konstant in eventuellen weiteren Spitzen. Man kann F_m schwach-holomorph aus $M_{2-k}^1(N, \chi)$ wählen, da $K(F_m)$ orthogonal auf S_k^0 , vgl. Def. 5.1.8, und den Spitzenformen der gegebenen Basis (C.1.2.1) steht (Folgerung C.1.2.1.2):

$$\left\{ \Delta_{p^j}^{\{N\}}, K(F_m) \right\} = -\tau_{p^j}^{\{N\}}(p^m) + \tau_{p^j}^{\{N\}}(p^m) = 0.$$

Wegen Folgerung C.1.2.1.1 ist $K(F_m)$ orthogonal auf alle Basisfunktionen (C.1.2.1):

$$0 = \{H_j, K(F_m)\} = -h_j(p^m) + \overline{(F_m|_j)}.$$

Dadurch ist die gesamte Fourierentwicklung von F_m eindeutig gegeben. Setze $d_{p^m} = F_m$. Nach Satz C.1.1.4 kommen die Fourierkoeffizienten aus den angegebenen algebraischen Erweiterungen. \square

C.2. Nicht-holomorphe Eisensteinreihen (Maassformen)

C.2.1. Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Für jedes Gewicht $k \in 2\mathbb{Z}$ gibt es jeweils nur eine Eisensteinreihe zur vollen Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, vgl. [Maass 4, Theorem 31].

Definition C.2.1.1. Für $k \in 2\mathbb{Z}$, $\mathrm{Re} s > 1$ sei

$$\begin{aligned} E_{2k}(z, s) &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})} y^s |_{2k} \gamma(z) = \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}} \left(\frac{C\bar{z} + D}{Cz + D} \right)^k \left(\frac{y}{|Cz + D|^2} \right)^s \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{ggT}(C,D)=1} \frac{y^s}{(Cz + D)^{s+k} (C\bar{z} + D)^{s-k}} \end{aligned}$$

die Eisensteinreihe zum Spektralparameter $\nu = s - \frac{1}{2}$, vgl. [Bruggeman 1, 3.2]. $E_{2k}^*(z, s) := \pi^{-s} \Gamma(s + |k|) \zeta(2s) E_{2k}(z, s)$ heißt vervollständigte Eisensteinreihe.

Es handelt sich um Maassformen vom Gewicht $2k$, d.h.

$$\Delta_{2k} E_{2k}(z, s) = s(1-s) E_{2k}(z, s)$$

und für $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$E_{2k}(\cdot, s) |_{2k} \gamma(z) = E_{2k}(z, s),$$

In der Terminologie von [Maass 4] ist

$$2\zeta(2s) E_{2k}(z, s) = y^s G(z, \bar{z}; s+k, s-k) = \sum'_{m, n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{m\bar{z} + n}{mz + n} \right)^k \left(\frac{y}{|mz + n|^2} \right)^s,$$

summiert über alle ganzen m, n mit Ausnahme von $m = n = 0$.

FOURIERENTWICKLUNG: [Maass 4, Ch. IV 3], [Kubota, §6.1], [Fay, Theorem 3.4 (76)]

Die Fourierreihe liefert die meromorphe Fortsetzung der Eisensteinreihen in die gesamte s -Ebene:

$$\begin{aligned} E_{2k}(z, s) &= y^s + (-1)^k \pi \frac{\Gamma(2s-1) \zeta(2s-1)}{\Gamma(s+k) \Gamma(s-k) \zeta(2s)} (4y)^{1-s} + \\ (C.2.1.1) \quad &+ \frac{(-1)^k \pi^s}{\zeta(2s)} \sum_{n \neq 0} \frac{|n|^{s-1} \sigma_{1-2s}(n)}{\Gamma(s+k \operatorname{sign} n)} W_{k \operatorname{sign} n, s-\frac{1}{2}} (4\pi |n| y) e(nx) \end{aligned}$$

speziell für $k = 0, s \neq 0, 1$

$$\begin{aligned} E(z, s) &:= E_0(z, s) = y^s + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(s - \frac{1}{2}) \zeta(2s-1)}{\Gamma(s) \zeta(2s)} y^{1-s} + \\ &+ \frac{4\pi^s}{\Gamma(s) \zeta(2s)} \sqrt{y} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}-s} \sigma_{2s-1}(n) K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi n y) \cos(nx), \end{aligned}$$

$$E(z, 0) = 1,$$

$$E(z, 1) = \infty.$$

Es gibt Pole bei $s = \frac{\rho}{2}, 1$ für $k = 0$ und $s = 1 - |k|, \dots, -2, -1, \frac{\rho}{2}$ für $k \neq 0$, dabei bezeichne ρ die nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen ζ -Funktion.

Für $k \neq 0$ sind die vervollständigten Eisensteinreihen $E_{2k}^*(z, s) = \pi^{-s} \Gamma(s + |k|) \zeta(2s) E_{2k}(z, s)$ holomorph in $s \in \mathbb{C}$. Für Gewicht $k = 0$ ist $E^*(z, s)$ holomorph in der ganzen s -Ebene bis auf Pole bei $s = 0$ und 1 .

In den Eisensteinreihen $(-1)^k E_{2k}^*(z, s)$ ist der erste Fourierkoeffizient normiert zu $W_{k, s-\frac{1}{2}}(4\pi y) e(x)$.

MAASSOPERATOREN: [Bruggeman 1, (4.6)]

$$E_\kappa^+ E_\kappa(z, s) = (2s + \kappa) E_{\kappa+2}(z, s),$$

$$E_\kappa^- E_\kappa(z, s) = (2s - \kappa) E_{\kappa-2}(z, s).$$

Für $s = k$ hat man holomorphe Eisensteinreihen $E_{2k}(z) := y^{-k} E_{2k}(z, k)$.

C.2.2. Gruppe $\Gamma_0(4)$. Eisensteinreihen gibt es nur zu regulären Spitzen, also $\mathfrak{a} = \infty, 0$ für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ bzw. $\frac{1}{2}$ für gerades k .

Definition C.2.2.1. Für Maaßformen² F vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ sei

$$\begin{aligned} F|_k \tau_0(z) &:= F|_k \tau_0^{-1}(z) = \left(\frac{|z|}{z}\right)^k F\left(-\frac{1}{4z}\right), \\ F|_k \tau_{\frac{1}{2}}(z) &:= \left(\frac{|z|}{z}\right)^k F\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4z}\right); \end{aligned}$$

für $\operatorname{Re}(s) > 1 - \frac{k}{2}$:

$$\begin{aligned} E_{k,\infty}(z, s) &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} \operatorname{Im}^s z|_k \gamma, \\ E_{k,0}(z, s) &:= E_{k,\infty}(\cdot, s)|_k \tau_0^{-1}(z) = \left(\frac{|z|}{z}\right)^k E_{k,\infty}\left(-\frac{1}{4z}, s\right), \\ k \in 2\mathbb{Z}: \quad E_{k,\frac{1}{2}}(z, s) &:= E_{k,\infty}(\cdot, s)|_k \tau_{\frac{1}{2}}^{-1}(z) = \left(\frac{|z|}{z}\right)^k E_{k,\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4z}, s\right). \end{aligned}$$

Diese Maaßformen lassen sich analytisch in die ganze s -Ebene fortsetzen. Spezialisiert man auf $s = \frac{k}{2}$, so ergeben sich harmonische schwache Maaßformen:

$$\begin{aligned} E_{k,\mathfrak{a}}|_k \tau_{\mathfrak{a}}(z) &:= E_{k,\infty}(z) := y^{-\frac{k}{2}} E_{k,\infty}\left(z, \frac{k}{2}\right), \\ G_{k,\mathfrak{a}}(z) &:= \zeta(2-2k) E_{k,\mathfrak{a}}(z), \quad \left(\mathfrak{a} \neq \frac{1}{2}, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\right) \vee k \in 2\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Sie hängen mit den Funktionen

$$\begin{aligned} E_\infty(z, s, k) &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} (\operatorname{Im} \gamma z)^s \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^k (cz + d)^{-\frac{k}{2}}, \\ E_0(z, s, k) &:= z^{-\frac{k}{2}} E_\infty\left(-\frac{1}{4z}, s, k\right) = \left(\frac{y}{4}\right)^s \sum_{\substack{\operatorname{ggT}(u,2v)=1 \\ u>0}} \frac{\left(\frac{-v}{u}\right) \varepsilon_u^k}{|uz + v|^{2s} (uz + v)^{\frac{k}{2}}} \end{aligned}$$

aus [Goldfeld Hoffstein, §1 Eisenstein series on $\Gamma_0(4)$] folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} E_{k,\infty}(z, s) &= y^{\frac{k}{2}} E_\infty\left(z, s - \frac{k}{2}, 2k\right), \\ E_{k,0}(z, s) &= \left(\frac{y}{4}\right)^{\frac{k}{2}} E_0\left(z, s - \frac{k}{2}, 2k\right). \end{aligned}$$

In [Sturm 1, Goldfeld Hoffstein] wurden auch die Fourierkoeffizienten ausgerechnet. Die Beispiele für positives Gewicht $k \geq \frac{5}{2}$ finden sich in [Kohnen 2]. Der Fall $k = \frac{3}{2}$ wurde von [Cohen, Hirzebruch Zagier] untersucht.

Satz C.2.2.2. [Fay, (76')] Die Eisensteinreihen $E_{k,\mathfrak{a}}(z, s)$, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $\mathfrak{a} = 0 \vee \infty$ lassen sich in die ganze s -Ebene meromorph fortsetzen. Sei $n_{\mathfrak{b}} := n + \kappa_{\mathfrak{b}}$. Die Fourierentwicklung um die Spitze \mathfrak{b} ist:

$$\begin{aligned} E_{k,\mathfrak{a}}(\cdot, s)|_k \tau_{\mathfrak{b}}(z) &= \delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} y^s + \delta_{0\kappa_{\mathfrak{b}}} \frac{\pi \Gamma(2s-1)}{i^k 4^{s-1} \Gamma\left(s - \frac{k}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{k}{2}\right)} \sum_{c>0} \frac{S_{k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(0, 0; c)}{c^{2s}} y^{1-s} \\ &+ \frac{\pi^s}{i^k} \sum_{n_{\mathfrak{b}} \neq 0} \frac{|n_{\mathfrak{b}}|^{s-1}}{\Gamma\left(s + \frac{k}{2} \operatorname{sign}(n_{\mathfrak{b}})\right)} \sum_{c>0} \frac{S_{k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(0, n_{\mathfrak{b}}; c)}{c^{2s}} W_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n_{\mathfrak{b}}, s - \frac{1}{2}}(4\pi |n_{\mathfrak{b}}| y) e(n_{\mathfrak{b}} x) \end{aligned}$$

mit den Kloostersummen aus Definition C.3.3.4.1.

²Die Definition ist für Maaßformen etwas anders als für Modulformen, vgl. Definition C.3.2.2.1 und auch Abschnitt BEZEICHNUNGEN UND DEFINITIONEN

C.2.3. Metaplektische Gruppe. Notationen und Bezeichnungen kommen aus [Bruinier 1], numerische Auswertungen für den holomorphen Spezialfall $t = \frac{\kappa}{2}$ aus [Bruinier Kufß] und die Verallgemeinerung auf nicht-holomorphe Eisensteinreihen aus [Bruinier Kühn]. Eine übersichtliche Zusammenstellung der wichtigsten Voraussetzungen zum Thema Gitter, vektorwertige Modulformen und Weil-Darstellungen findet sich in [Bundschuh]. Im einzelnen sei $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ die metaplektische Überlagerung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, d.h. die Gruppe von Paaren $(M, \phi(z))$, wobei $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und ϕ eine holomorphe Quadratwurzel von $z \mapsto cz + d$ ist, mit der Multiplikation

$$(M, \varphi(z))(N, \psi(z)) := (MN, \varphi(N(z)) \cdot \psi(z)).$$

Sei $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ das Urbild von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ bzgl. der Überlagerung; L das eindimensionale Gitter \mathbb{Z} mit der quadratischen Form $q(a) = a^2$, d.h. der Bilinearform $(a, b) = 2ab$ mit Gram-Matrix (2). Das dazu duale Gitter L' ist $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und die Diskriminantengruppe $L'/L = \{0, \frac{1}{2}\}$. Sei $(\mathbf{e}_\gamma)_{\gamma \in L'/L}$ die Standardbasis des Gruppenringes $\mathbb{C}[L'/L]$, d.h. der Menge der formalen Linearkombinationen $\sum_{\gamma \in L'/L} x_\gamma \mathbf{e}_\gamma$ mit $x_\gamma \in \mathbb{C}$ und der Multiplikation $\mathbf{e}_\gamma \cdot \mathbf{e}_\delta := \mathbf{e}_{\gamma+\delta}$,

linear ausgedehnt. Der quadratische Raum (L, q) hat die Signatur $(b^+, b^-) = (1, 0)$. Vektorwertige Modulformen entsprechen Modulformen halbganzen Gewichts aus dem Kohnen-Plus-Raum, s. [Eichler Zagier, Theoreme 5.1, 5.4]. Eine Darstellung ρ_L der metaplektischen Gruppe auf $\mathbb{C}[L'/L]$, d.i. die Weil-Darstellung bezogen auf den quadratischen Modul $(L'/L, q)$, lässt sich für die Erzeugenden $T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right)$ und $S = \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{z} \right)$ folgendermaßen angeben:

$$\begin{aligned} \rho_L(T) \mathbf{e}_\gamma &= e(q(\gamma)) \mathbf{e}_\gamma, \\ \rho_L(S) \mathbf{e}_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{i|L'/L|}} \sum_{\delta \in L'/L} e(-(\gamma, \delta)) \mathbf{e}_\delta; \end{aligned}$$

mit $\gamma \in L'/L = \{0, \frac{1}{2}\}$; explizit

$$(C.2.3.1) \quad \begin{aligned} \rho_L(T) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\ \rho_L(S) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2i}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_0 \\ \mathbf{e}_{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

ρ_L^* ist die hierzu duale Darstellung und wird durch die konjugiert-komplexe Matrix gegeben.

A) Das Gewicht κ der vektorwertigen Eisensteinreihe mit Spektralparameter $s - \frac{1}{2}$ sei $k + \frac{3}{2}$, $k \in 2\mathbb{Z}$. Ich bezeichne sie hier³ mit

$$\mathfrak{E}_{k+\frac{3}{2}}(z, s) := \frac{1}{2} \sum_{(M, \phi) \in \tilde{\Gamma}_\infty \setminus \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})} (y^s \mathbf{e}_0) \Big|_{k+\frac{3}{2}}^* (M, \phi), \quad \mathrm{Re}(s) > 1$$

mit dem metaplektischen $|\cdot|_\kappa^*$ -Operator für vektorwertige Funktionen \mathfrak{f}

$$\left(\mathfrak{f} \Big|_\kappa^* (M, \phi) \right) (z) := \left(\frac{\phi(z)}{|\phi(z)|} \right)^{-2\kappa} \rho_L^*(M, \phi)^{-1} \mathfrak{f}(Mz).$$

B) Für Gewicht $\kappa \in 2\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ergeben sich metaplektische Eisensteinreihen

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{k+\frac{1}{2}}(z, s) &:= \frac{1}{2} \sum_{(M, \phi) \in \tilde{\Gamma}_\infty \setminus \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})} (y^s \mathbf{e}_0) \Big|_{k+\frac{1}{2}} (M, \phi), \quad \mathrm{Re}(s) > 1, \\ \left(\mathfrak{f} \Big|_\kappa (M, \phi) \right) (z) &:= \left(\frac{\phi(z)}{|\phi(z)|} \right)^{-2\kappa} \rho_L(M, \phi)^{-1} \mathfrak{f}(Mz) \end{aligned}$$

basierend auf der Weil-Darstellung bezogen auf den quadratischen Modul $(L'/L, q)$, $q(a) = a^2$ und Signatur $(1, 0)$. Bekanntlich⁴ ist dann

$$(C.2.3.2) \quad \mathfrak{E}_\kappa(z, s) := \frac{1}{2^{2s+1}} \{ (\mathfrak{E}_\kappa(4z, s))_1 + (\mathfrak{E}_\kappa(4z, s))_2 \}$$

³In den Bezeichnungen von [Bruinier Kühn] ist $y^{\frac{\kappa}{2}} E_0(z, t - \frac{\kappa}{2}) = \mathfrak{E}_\kappa(z, t)$, da der Ausgangspunkt dort die holomorphe Funktion mit Parameter 0 ist.

⁴[Eichler Zagier, Theorem 5.4]; $(\cdot)_i$, $i = 1, 2$ bezeichne die i -te Vektorkomponente.

die eindeutig gegebene Eisensteinreihe im Kohnen-Plus-Raum, eine Maaßform.

Konjugation wirkt wie im ganzzahligen Fall:

$$\begin{aligned}\overline{\mathfrak{E}_\kappa(z, s)} &= \mathfrak{E}_{-\kappa}(z, \bar{s}), \\ \overline{E_\kappa(z, s)} &= E_{-\kappa}(z, \bar{s}),\end{aligned}$$

allerdings ist eine Eisensteinreihe bezogen auf die Weil-Darstellung, die andere auf deren Dual.

Satz C.2.3.1. [Bruinier Kühn, Prop. 3.1, 3.2] *Die Eisensteinreihen $E_\kappa(z, s)$, $\kappa - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, im Kohnen-Plus-Raum lassen sich in die ganze s -Ebene meromorph fortsetzen. Sie haben folgende Fourierreihe*

$$\begin{aligned}E_\kappa(z, s) &= y^s + (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \frac{\pi \Gamma(2s-1) \zeta(4s-2)}{2^{6s-\frac{7}{2}} \Gamma(s+\frac{\kappa}{2}) \Gamma(s-\frac{\kappa}{2}) \zeta(4s-1)} y^{1-s} \\ &+ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} 2^{-4s+\frac{3}{2}} \pi^s}{\zeta(4s-1)} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}}} \frac{|n|^{s-1} L\left(2s-\frac{1}{2}, (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n\right)}{\Gamma\left(s+\frac{\kappa}{2} \operatorname{sign} n\right)} W_{\frac{\kappa}{2} \operatorname{sign} n, s-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y) e(nx) \\ &= y^s + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \pi \Gamma(2s-1) \zeta(4s-2)}{2^{6s-\frac{7}{2}} \Gamma(s+\frac{\kappa}{2}) \Gamma(s-\frac{\kappa}{2}) \zeta(4s-1)} y^{1-s} + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \pi^{3s-\frac{1}{2}}}{4^s \Gamma(2s-\frac{1}{2}) \zeta(4s-1)} \\ &\cdot \sum_{\substack{n \neq 0 \\ (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}}} \frac{L\left(-2s+\frac{3}{2}, (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n\right)}{|n|^s \sin\left(\pi\left(s+\frac{(-1)^{\lfloor \kappa \rfloor}}{4} \operatorname{sign} n\right)\right) \Gamma\left(s+\frac{\kappa}{2} \operatorname{sign} n\right)} W_{\frac{\kappa}{2} \operatorname{sign} n, s-\frac{1}{2}}(4\pi|n|y) e(nx)\end{aligned}$$

und erfüllen folgende Funktionalgleichung:

$$E_\kappa(z, 1-s) = (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \frac{2^{6s-\frac{7}{2}} \Gamma(s+\frac{\kappa}{2}) \Gamma(s-\frac{\kappa}{2}) \zeta(4s-1)}{\pi \Gamma(2s-1) \zeta(4s-2)} E_\kappa(z, s)$$

oder symmetrischer aufgeschrieben: Sei

$$(C.2.3.3) \quad E_\kappa^*(z, s) := \left(\frac{2}{\pi}\right)^{2s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(s+\frac{|\kappa|}{2}\right) \Gamma\left(2s-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(s+\frac{(-1)^{\lfloor \kappa \rfloor}}{4}\right)} \zeta(4s-1) E_\kappa(z, s)$$

die vervollständigte Eisensteinreihe. Dann ist $E_\kappa^*(z, 1-s) = E_\kappa^*(z, s)$.

Für $s = \frac{1}{2}$ ergibt sich der Grenzwert⁵

$$\begin{aligned}E_\kappa^*\left(z, \frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{|\kappa|+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{\lfloor \kappa \rfloor}}{4}\right)} \left\{ \sqrt{\frac{y}{2}} \left\{ \log \frac{2y}{\pi^2} + 3\gamma + \frac{1}{2} \left(\psi\left(\frac{1+\kappa}{2}\right) + \psi\left(\frac{1-\kappa}{2}\right) \right) \right\} + \right. \\ &\left. + (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \sqrt{\pi} \sum_{\substack{n \neq 0 \\ (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}}} \frac{L\left(\frac{1}{2}, (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n\right)}{\sqrt{|n|} \Gamma\left(\frac{\kappa}{2} \operatorname{sign} n + \frac{1}{2}\right)} W_{\frac{\kappa}{2} \operatorname{sign} n, 0}(4\pi|n|y) e(nx) \right\}.\end{aligned}$$

Die Funktionen $E_\kappa(z, \cdot)$ sind holomorph bis auf Pole bei $s = \frac{\rho+1}{4}$, wobei ρ eine nichttriviale Nullstelle der Riemannschen Zetafunktion ist, für $|\kappa| - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{N}_0$ zusätzlich bei $s = \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \dots, 1 - \frac{|\kappa|}{2}$ und für $|\kappa| - \frac{3}{2} \in 2\mathbb{N}$ zusätzlich bei $s = -\frac{3}{4}, -\frac{7}{4}, \dots, 1 - \frac{|\kappa|}{2}$.

Die $E_\kappa^*(z, \cdot)$ sind für $|\kappa| - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{N}_0$ ganze Funktionen und haben für $|\kappa| - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{N}_0$ Pole bei $s = \frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$.

Die Maaßoperatoren wirken wie im ganzzahligen Fall:

$$\begin{aligned}E_\kappa^+ E_\kappa(z, s) &= (2s+\kappa) E_{\kappa+2}(z, s), \\ E_\kappa^- E_\kappa(z, s) &= (2s-\kappa) E_{\kappa-2}(z, s).\end{aligned}$$

⁵ $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, Digamma Funktion

BEWEIS. Sei zunächst $\kappa - \frac{3}{2} \in 2\mathbb{N}$. Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten sind die Dirichletreihen⁶ $\sum'_c \frac{H_c^*(0, 0, \gamma, n)}{|c|^s}$ von Interesse, deren Koeffizienten, verallgemeinerte Kloostersummen, in [Bruinier 1, (1.13)] definiert wurden. Nach [Bruinier Kufß, (4.13), (4.14), (4.21), Example 2] ist für $\gamma = n = 0$

$$\begin{aligned} \sum'_c \frac{H_c^*(0, 0, 0, 0)}{|c|^t} &\stackrel{(13)}{=} \tilde{L}_{0,0}(t+1) \stackrel{(14),(12)}{=} (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \frac{2}{\sqrt{2} \zeta(t + \frac{1}{2})} \sum_{a \in \mathbb{N}} \frac{N_0(a)}{a^{t + \frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \sqrt{2} \zeta(2t)}{\zeta(2t+1)}, \text{ vgl. [Zagier 5, Prop. 3]}. \end{aligned}$$

Allgemein ist ($n = d_0 f^2$)

$$\begin{aligned} \sum'_c \frac{H_c^*(0, 0, \gamma, n)}{|c|^t} &\stackrel{(13)}{=} \tilde{L}_{\gamma,n}(t+1) \stackrel{(14),(21)}{=} (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \frac{2}{\sqrt{2}} \prod_p L_{\gamma,n}(t+1, p) \\ &\stackrel{Ex.10}{=} (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \sqrt{2} \prod_p \frac{1 - p^{-2t-1}}{1 - \left(\frac{d_0}{p}\right) p^{-t-\frac{1}{2}}} \left(\sigma_{-2t}(p^{v_p(f)}) - \left(\frac{d_0}{p}\right) p^{-t-\frac{1}{2}} \sigma_{-2t}(p^{v_p(f)-1}) \right) \\ &= (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} \sqrt{2} \frac{L\left(t + \frac{1}{2}, (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} 4n\right)}{\zeta(2t+1)}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in [Bruinier Kühn, Proposition 3.1] ergibt das unter Berücksichtigung von (C.2.3.2)

$$\begin{aligned} 2^{2s+1} E_\kappa(z, t) &= 2(4y)^t (4y)^{\frac{\kappa}{2}} + (-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} 2^{\frac{3}{2}} \pi (4y)^{-t-\kappa+1} (4y)^{\frac{\kappa}{2}} \frac{\Gamma(2t + \kappa - 1) \zeta(4t + 2\kappa - 2)}{2^{2t+\kappa-1} \Gamma(t) \Gamma(t + \kappa) \zeta(4t + 2\kappa - 1)} \\ &+ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} 2^{\kappa + \frac{1}{2}} \pi^{t+\kappa} 4^{\frac{\kappa}{2}}}{\Gamma(t + \kappa) \zeta(2(2t + \kappa - 1) + 1)} \\ &\cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}}} \left\{ \left(\frac{n}{4}\right)^{t+\kappa-1} (4\pi n)^{-\frac{\kappa}{2}} L\left(2t + \kappa - \frac{1}{2}, (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n\right) W_{\frac{\kappa}{2}, -t + \frac{1-\kappa}{2}}(4\pi n y) e(n x) \right\} \\ &+ \frac{(-1)^{\lfloor \frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \rfloor} 2^{\kappa + \frac{1}{2}} \pi^{t+\kappa} 4^{\frac{\kappa}{2}}}{\Gamma(t) \zeta(2(2t + \kappa - 1) + 1)} \\ &\cdot \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z}^- \\ (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}}} \left\{ \left(\frac{|n|}{4}\right)^{t+\kappa-1} (4\pi |n|)^{-\frac{\kappa}{2}} L\left(2t + \kappa - \frac{1}{2}, (-1)^{\lfloor \kappa \rfloor} n\right) W_{\frac{\kappa}{2}, -t + \frac{1-\kappa}{2}}(4\pi |n| y) e(n x) \right\} \end{aligned}$$

Einsetzen von $\kappa = k + \frac{3}{2}$ und $t = s - \frac{k}{2} - \frac{3}{4}$ ergibt die erste Behauptung. Verwenden der Funktionalgleichungen

$$(C.2.3.4) \quad L\left(2s - \frac{1}{2}, n\right) = \frac{2^{2s-\frac{3}{2}} \pi^{2s-\frac{1}{2}} n^{-2s+1}}{\sin \pi \left(s + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(2s - \frac{1}{2}\right)} L\left(-2s + \frac{3}{2}, n\right)$$

für $n > 0$ und

$$(C.2.3.5) \quad L\left(2s - \frac{1}{2}, n\right) = \frac{2^{2s-\frac{3}{2}} \pi^{2s-\frac{1}{2}} |n|^{-2s+1}}{\sin \pi \left(s - \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(2s - \frac{1}{2}\right)} L\left(-2s + \frac{3}{2}, n\right)$$

für $n < 0$ führt zur 2. Gleichheit. Für $\kappa - \frac{1}{2} \in 2\mathbb{N}$ hat man genau dieselbe Berechnung, wenn man den quadratischen Modul $(L'/L, \tilde{q})$, $\tilde{q}(a) = -a^2$, Signatur $(0, 1)$ zugrunde legt. Mit Konjugation kommt man auf den Bereich $\kappa < -2$ und mit den Maaßoperatoren auf $-2 < \kappa < 2$.

Die analytische Fortsetzung ergibt sich aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Fourierreihe. Die Pole kommen vom konstanten Fourierkoeffizienten. Gewicht κ und $-\kappa$ gehen durch Konjugation auseinander hervor und haben konjugiert komplexe Polstellen. Ich betrachte daher bloß positives Gewicht.

Der Zähler von $\frac{\Gamma(2s-1) \zeta(4s-2)}{\Gamma\left(s + \frac{\kappa}{2}\right) \Gamma\left(s - \frac{\kappa}{2}\right) \zeta(4s-1)}$ hat einfache Pole in $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ und keine Nullstellen. Der Nenner hat einfache Nullstellen in $s = -\frac{1}{4}$, falls $\kappa = \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \dots$, in $s = -\frac{3}{4}$, falls $\kappa = \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2}, \dots$, in $s = -\frac{5}{4}$, falls $\kappa = \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}, \dots$ usw. und sonst keine Nullstellen.

⁶summiert über $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Der Nenner von $\frac{\Gamma(2s-1)\zeta(4s-2)}{\Gamma(s+\frac{\kappa}{2})\Gamma(s-\frac{\kappa}{2})\zeta(4s-1)}$ hat für $s = \frac{1}{2}$ ebenfalls einen einfachen Pol, bei $s = \frac{3}{4}$ dagegen nur für Gewicht $\kappa = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots$. Insgesamt ergeben sich folgende Pole

s	κ
$\frac{3}{4}$	$\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}, \pm\frac{9}{2}, \dots$
$-\frac{1}{4}$	$\pm\frac{5}{2}, \pm\frac{9}{2}, \pm\frac{13}{2}, \dots$
$-\frac{3}{4}$	$\pm\frac{7}{2}, \pm\frac{11}{2}, \pm\frac{15}{2}, \dots$
$-\frac{5}{4}$	$\pm\frac{9}{2}, \pm\frac{13}{2}, \pm\frac{17}{2}, \dots$
\vdots	\dots

Die anderen Fourierkoeffizienten liefern keine weiteren Pole.

Die Funktionalgleichung kann man für jeden Koeffizienten einzeln überprüfen, ebenso wie das Wirken der Maaßoperatoren.

Die Fourierkoeffizienten $c_n, n \neq 0$ sind exponentiell abfallend wegen der Whittakerfunktion: die L -Reihen sind für Realteil > 1 beschränkt, im kritischen Streifen für festes t polynomial in n beschränkt, vgl. [AS, Exercise 22, Ch. 12] und für kleinere Realteile aufgrund der Funktionalgleichung ebenfalls, daher lokal gleichmäßig konvergent. Sämtliche andere auftretende Funktionen haben eine eindeutige analytische Fortsetzung. Die Invarianz gegenüber dem $\Gamma_0(4)$ -Slash-Operator $|_{\kappa}$ bleibt bei analytischer Fortsetzung erhalten. \square

C.3. Harmonische schwache Maaßformen (Mock-Modulformen)

Es hat sich als sinnvoll erwiesen, die Räume holomorpher Modulformen zu verallgemeinern. Außer der ganz allgemeinen Theorie der Eigenfunktionen des Laplaceoperators (Maaßformen) kann man auch den Laplaceeigenwert (der holomorphen Modulformen) festhalten, aber die polynomiale Wachstumsbeschränkung in den Spitzen lockern und gleichzeitig reell-analytische Funktionen zulassen. Wir wiederholen hier noch einmal die Definition der harmonischen schwachen Maaßformen:

Definition C.3.0.1. [Bruinier Funke 2] Eine \mathcal{C}^∞ -Funktion $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt harmonische schwache Maaßform vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ zur Kongruenzuntergruppe $\Gamma' \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, falls

- (1) $\forall \gamma \in \Gamma' : f|_k \gamma = f$.
- (2) $y^{\frac{k}{2}} f$ ist eine Maaßform zum Eigenwert⁷ $\frac{k}{2}(1 - \frac{k}{2})$ des Laplaceoperators Δ_k .
- (3) Das Wachstum ist in allen Spitzen höchstens exponentiell: $\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : f|_k \gamma(z) = O(e^{cy}), y \rightarrow \infty$.

$$f \in \widehat{\mathbb{M}}_k^!(\Gamma')$$

Für Spitzen κ des Fundamentalbereichs $\Gamma' \backslash \mathcal{H}$ sind $\widehat{\mathbb{M}}_{k,\kappa}^!(\Gamma')$ die harmonischen schwachen Maaßformen, die in allen Spitzen $\neq \kappa$ verschwinden.

Manchmal bezeichnen wir diese Funktionen auch als nicht-holomorphe Modulformen. Schwach-holomorphe Modulformen bilden eine Teilmenge der harmonischen schwachen Maaßformen.

C.3.1. Fourierkoeffizienten. Automorphe Eigenfunktionen F von Δ_k zum Spektralparameter $s = \frac{k}{2}$ haben folgende Fourierentwicklung, [Magnus Ober, 6. Kap. §2]: $\tau = \xi + i\eta$,

$$F(\tau) = c_0 \eta^s + c'_0 \eta^{1-s} + \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left\{ c_n W_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n, \frac{k-1}{2}}(4\pi |n| \eta) + c'_n M_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} n, |\frac{k-1}{2}|}(4\pi n \eta) \right\} e(nx).$$

Im Unterschied zu den üblichen Maaßformen wird hier nicht angenommen, dass die Funktion f in den Spitzen beschränkt bleibt. Die Wachstumsbedingung in den Spitzen bewirkt, dass $c_n = 0$ für $n < n_1$ und $c'_n = 0$ für $k < 1, n < n_2$ oder $k > 1, n > n_2$ mit $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$. Wegen (A.7.4.11), (A.7.4.12) und (A.7.4.16) ergibt sich folgende

⁷gleicher Eigenwert wie holomorphe Modulformen

Entwicklung für schwache Maaßformen vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_0$:

$$(C.3.1.1) \quad \boxed{f = f^+ + f^-, \quad f^+(\tau) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq n_1}} c_n q^n, \quad f^-(\tau) = c'_0 \eta^{1-k} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq n_1 \\ n \neq 0}} c'_n \Gamma(1-k, 4\pi n \eta) q^{-n},}$$

vgl. [Bruinier Funke 2, (3.2)]; q^n bezeichnet je nach Situation $e(nz)$ oder $e(n\tau)$. Wegen (A.7.4.11), (A.7.4.16) und (A.7.4.13) ergibt sich folgende Entwicklung für harmonische schwache Maaßformen vom Gewicht $\frac{3}{2}$:

$$(C.3.1.2) \quad f(z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq n_1}} \left\{ c_n q^n + c'_n \frac{\beta(4\pi n y)}{\sqrt{y}} q^{-n} \right\},$$

vgl. [Hirzebruch Zagier]'s nicht-holomorphe Eisensteinreihe vom Gewicht $\frac{3}{2}$ und Satz 3.2.1.1⁸. Für Gewicht $k + \frac{3}{2}$ heißt das:

Beispiele. Sei $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{M}}_{k+\frac{3}{2}}^! &:= \left\{ \text{harmonische schwache Maaßformen } f, \text{ d.h.} \right. \\ &\quad \left. f(z) = c_0 + c'_0 y^{-k-\frac{1}{2}} + \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \neq 0}} c_n q^n + c'_n \Gamma\left(-\frac{1}{2} - k, 4\pi n y\right) q^{-n} \right\}, \\ \widehat{\mathbb{M}}_{\frac{3}{2}-k}^! &:= \left\{ \text{harmonische schwache Maaßformen } f, \text{ d.h.} \right. \\ &\quad \left. f(z) = c_0 + c'_0 y^{k+\frac{1}{2}} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ n \geq n_1}} \left\{ c_n q^n + y^{k+\frac{1}{2}} c'_n \beta_{k+1}(4\pi n y) \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Der Zagier-Lift startet von der folgenden Menge

$$(C.3.1.3) \quad \widehat{\mathbb{S}}_{-2k} := \left\{ \text{harmonische schwache Maaßformen mit der Fourierentwicklung} \right. \\ \left. f(\tau) = \sum_{n \geq n_1} c_n q^n + \sum_{n > 0} c'_n \Gamma(2k+1, 4\pi n \eta) q^{-n} \right\}.$$

C.3.2. Eisensteinreihen.

C.3.2.1. Gruppe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$.

$$E_{2k}(z) := 1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) q^n \in M_{2k}(\Gamma), k \in \mathbb{N}^{\geq 2},$$

$$E_2(z) := 1 - \frac{3}{\pi y} - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n) q^n,$$

$$E_0(z) := 1$$

und für $k < 0$ folgende harmonische schwache Maaßformen ([Bri Gu Ke On, Theorem 2.4])

$$(C.3.2.1.1) \quad E_{2k}(z) = 1 + \frac{(-4)^{-k} \zeta(2-2k)}{\pi \zeta(1-2k)} y^{1-2k} + \frac{1}{\zeta(1-2k)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{2k-1}(n) \left(q^n + \frac{\Gamma(1-2k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-2k)} q^{-n} \right).$$

$$\text{Definiere } G_{2k}(z) := \begin{cases} \frac{1}{2} \zeta(1-2k) E_{2k}(z), & k > 0; \\ \zeta(1-2k) E_{2k}(z), & k < 0. \end{cases}$$

⁸Tatsächlich ist sogar $f(z) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \geq n_1}} c_n q^n + \frac{c'_0}{\sqrt{y}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta(4\pi n^2 y) q^{-n^2}$

Anwendung der Differenzialoperatoren⁹ ξ_{2k} und D^{1-2k} ergibt für $k < 0$:

$$\begin{aligned} \xi_{2k} E_{2k}(z) &= \frac{4^{-2k} \pi^{1-2k} B_{2-2k}}{(1-k) \Gamma(1-2k) \zeta(1-2k)} E_{2-2k}(z), \\ D^{1-2k} E_{2k}(z) &= \frac{\zeta(2k-1)}{2 \zeta(1-2k)} E_{2-2k}(z). \end{aligned}$$

BEWEIS. Verwende ($k \in \mathbb{Z}^-$)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow k} \frac{\Gamma(2s-1) \zeta(2s-1)}{\Gamma(s+k) \Gamma(s-k) \zeta(2s)} &= \frac{\zeta(2-2k)}{4\pi^2 \zeta(1-2k)}, \\ \lim_{s \rightarrow k} \zeta(2s) \Gamma(s+k) &= (-4\pi^2)^k \zeta(1-2k), \\ \lim_{s \rightarrow k} \zeta(2s) \Gamma(s-k) &= (-4\pi^2)^k \Gamma(1-2k) \zeta(1-2k) \end{aligned}$$

in der Fourierentwicklung (C.2.1.1). □

C.3.2.2. Jacobi-Thetafunktionen.

Definition C.3.2.2.1. Die Modulkurve $\Gamma_0(4) \backslash \mathcal{H}$ hat die drei Spitzen $\infty, 0$ und $\frac{1}{2}$. Sei $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \{\gamma \in \Gamma_0(4) \mid \gamma \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$ der Stabilisator der Spitze \mathfrak{a} mit Erzeugendem $\gamma_{\mathfrak{a}}, \tau_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ mit $\tau_{\mathfrak{a}} \infty = \mathfrak{a}, \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \gamma_{\mathfrak{a}} \tau_{\mathfrak{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Der holomorphe Anteil der Fourierentwicklungen von Modulformen um die Spitze \mathfrak{a} sind von der Form $q^{\kappa_{\mathfrak{a}}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n q^n, 0 \leq \kappa_{\mathfrak{a}} < 1$. Diese Daten werden immer folgendermaßen gewählt:

$$\begin{aligned} \tau_{\infty} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_0 := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_{\frac{1}{2}} := \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \\ \gamma_{\infty} &:= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\frac{1}{2}} := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}; \\ \kappa_{\infty} &:= \kappa_0 := 0, \quad \kappa_{\frac{1}{2}} := \begin{cases} 0, & 2k \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{1}{4}, & 2k \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{1}{2}, & 2k \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{3}{4}, & 2k \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Die Spitze \mathfrak{a} heißt *regulär*, falls $\kappa_{\mathfrak{a}} = 0$. Die Spitzen ∞ und 0 sind immer regulär. Die Spitze $\frac{1}{2}$ ist nur für $2 \mid k$ regulär. Oft verwenden wir die Bezeichnung κ anstelle von $\kappa_{\frac{1}{2}}$. Die 'slash'-Operatoren seien folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} f \Big|_k \tau_0(z) &:= (-2iz)^{-k} f\left(-\frac{1}{4z}\right), \text{ Atkin-Lehner Involution} \\ f \Big|_k \tau_{\frac{1}{2}}(z) &:= (-2iz)^{-k} f\left(-\frac{1}{4z} + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Sie erfüllen die Relationen:

$$\begin{aligned} f \Big|_k \tau_{\infty}(z) &= f(z), \\ (f \Big|_k \tau_0) \Big|_k \tau_0(z) &= f(z), \\ \left((f \Big|_k \tau_{\frac{1}{2}}) \Big|_k \tau_{\frac{1}{2}} \right) \Big|_k \tau_{\frac{1}{2}}(z) &= i^k f(z). \end{aligned}$$

Betrachte folgende Basisfunktionen aller Modulformen zu $\Gamma_0(4)$:

⁹Abschnitt C.3.5

Definition C.3.2.2.2 (Jacobi-Thetafunktionen).

$$\begin{aligned}\theta_2(z) &:= q^{\frac{1}{4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)} = 2 \frac{\eta(4z)^2}{\eta(2z)}, \\ \theta_3(z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} = \frac{\eta(2z)^5}{\eta(z)^2 \eta(4z)^2}, \\ \theta_4(z) &:= \theta_3\left(z + \frac{1}{2}\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{n^2} = \frac{\eta(z)^2}{\eta(2z)}.\end{aligned}$$

θ_3 ist eine $\Gamma_0(4)$ -Modulform: $\theta_3 \in M_{\frac{1}{2}}^+$. Sei

$$v_k(\gamma) := \left(\left(\frac{c}{d} \right) \varepsilon_d^{-1} \right)^{2k} \text{ der übliche Multiplikator von } \theta_3^{2k}.$$

BEWEIS. Das Verhalten der Thetafunktion θ_3 ist bekannt, s. [Koblitz, Ch. III §4]. □

Hilfssatz C.3.2.2.3. *Relationen der Jacobi-Thetafunktionen:*

$$\begin{aligned}\theta_3(4z) + \theta_2(4z) &= \theta_3(z), \\ \theta_3(4z) - \theta_2(4z) &= \theta_4(z), \\ \theta_3(z)^2 &= E_{1,\infty}(z) := 1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \left(\frac{-4}{d} \right) q^n, \\ \theta_2(z)^4 &= 16F(z) := 16 \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ ungerade}}} \sigma(n) q^n, \\ \theta_2(z)^4 + \theta_4(z)^4 &= \theta_3(z)^4,\end{aligned}$$

Die Thetafunktionen sind Modulformen:

$$\theta_3(z) \in M_{\frac{1}{2}}^+; \theta_2(z)^4, \theta_4(z)^4 \in M_2(\Gamma_0(4))$$

mit folgendem Transformationsverhalten bzgl. $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)$:

$$\begin{aligned}\theta_2(\gamma z) &= \left(\frac{-b}{a+2b} \right) \varepsilon_{a+2b}^{-1} \sqrt{cz+d} \theta_2(z), \\ \theta_3(\gamma z) &= \left(\frac{c}{d} \right) \varepsilon_d^{-1} \sqrt{cz+d} \theta_3(z), \\ \theta_4(\gamma z) &= \left(\frac{2(d-a) - 4b + c}{a - \frac{c}{2}} \right) \varepsilon_{a-\frac{c}{2}}^{-1} \sqrt{cz+d} \theta_4(z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta_2 \Big|_{\frac{1}{2}} \tau_0(z) &= \theta_4(z), & \theta_2 \Big|_{\frac{1}{2}} \tau_{\frac{1}{2}}(z) &= \sqrt{i} \theta_4(z), \\ \theta_3 \Big|_{\frac{1}{2}} \tau_0(z) &= \theta_3(z), & \theta_3 \Big|_{\frac{1}{2}} \tau_{\frac{1}{2}}(z) &= \theta_2(z), \\ \theta_4 \Big|_{\frac{1}{2}} \tau_0(z) &= \theta_2(z), & \theta_4 \Big|_{\frac{1}{2}} \tau_{\frac{1}{2}}(z) &= \theta_3(z).\end{aligned}$$

BEWEIS. Aus der Theorie der Summe von vier Quadraten [Rademacher, 83] weiß man

$$\theta_3(z)^4 = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d \Rightarrow \theta_4(z)^4 = 1 + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-q)^n \sum_{\substack{d|n \\ 4 \nmid d}} d,$$

$$\theta_3(z)^4 = \theta_2(z)^4 + \theta_4(z)^4,$$

d.h. $\theta_2(z)^4 = 16 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \sigma_1(n) q^n \in M_2(\Gamma_0(4))$ ist die Eisensteinreihe aus [Koblitz, III §3 Problem 10 (c)].

Sei $v_{\frac{1}{2}}(\gamma) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1}$ der Multiplikator von θ_3 . Entsprechend dem Hilfssatz aus [Lehner, Ch. VIII 3F] ist dann

$$v_{\frac{1}{2}}\left(\tau_{\frac{1}{2}}\gamma\tau_{\frac{1}{2}}^{-1}\right) = v_{\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} * & * \\ -4b & a+2b \end{pmatrix}\right) \text{ bzw. } v_{\frac{1}{2}}\left(\tau_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma\tau_{\frac{1}{2}}\right) = v_{\frac{1}{2}}\left(\begin{pmatrix} * & * \\ 2(d-a)-4b+c & a-\frac{c}{2} \end{pmatrix}\right)$$

der Multiplikator von θ_2 bzw. θ_4 bzgl. der konjugierten Gruppe $\Gamma' = \Gamma_0(4)$.

Außerdem wird das Verhalten von θ_3 unter $\tau_{\frac{1}{2}}$ benötigt¹⁰:

$$\theta_3|\tau_{\frac{1}{2}} = \theta_2, \quad \theta_3|\tau_{\frac{1}{2}}^{-1} = \theta_4.$$

□

C.3.2.3. Eisensteinreihen zur Gruppe $\Gamma_0(4)$.

Satz C.3.2.3.1. [Fay, (76')] Für halbganzes $k \geq \frac{5}{2}$ gibt es folgende arithmetische $\Gamma_0(4)$ -Modulformen

$$G_{k,\infty}(z) = \zeta(2-2k) + \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]}n=d(2^\alpha f)^2}}^{\infty} \left\{ L\left(\frac{3}{2}-k, (-1)^{[k]}n\right) - 2^{2\alpha(k-1)-1} \frac{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{\frac{1}{2}-k}}{1-2^{1-2k}} L\left(\frac{3}{2}-k, df^2\right) \right\} q^n,$$

$$G_{k,0}(z) = \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} 2^{k-\frac{3}{2}}}{(1-2^{1-2k})} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]}n=d(2^\alpha f)^2}}^{\infty} 4^{\alpha(k-1)} \left(1 - \left(\frac{d}{2}\right)2^{\frac{1}{2}-k}\right) L\left(\frac{3}{2}-k, df^2\right) q^n.$$

Für Gewicht $k \leq \frac{3}{2}$ sind die Eisensteinreihen nicht-holomorph. Der nicht-holomorphe Anteil ist arithmetisch:

$$G_{k,\infty}(z) = \zeta(2-2k) + \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} 2^{\frac{3}{2}-3k} \zeta(3-2k)}{\pi(1-2^{1-2k})} y^{1-k}$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]}n=d(2^\alpha f)^2}}^{\infty} \left\{ \sum_{t|2^\alpha} \mu(t) \frac{\left(\frac{d}{t}\right)}{t^{\frac{3}{2}-k}} \sigma_{2k-2}\left(\frac{2^\alpha}{t}\right) - 2^{2\alpha(k-1)-1} \frac{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{\frac{1}{2}-k}}{1-2^{1-2k}} \right\} L\left(\frac{3}{2}-k, df^2\right) q^n$$

$$+ \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]+1}n=d(2^\alpha f)^2}}^{\infty} \left\{ \sum_{t|2^\alpha} \mu(t) \frac{\left(\frac{d}{t}\right)}{t^{\frac{3}{2}-k}} \sigma_{2k-2}\left(\frac{2^\alpha}{t}\right) - 2^{2\alpha(k-1)-1} \frac{1-\left(\frac{d}{2}\right)2^{\frac{1}{2}-k}}{1-2^{1-2k}} \right\} L\left(\frac{3}{2}-k, df^2\right) \cdot$$

$$\cdot q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)},$$

$$G_{k,0}(z) = \frac{2^{1-2k} (1-4^{1-k}) \zeta(3-2k)}{\pi(1-2^{1-2k})} y^{1-k}$$

$$+ \frac{(-1)^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} 2^{k-\frac{3}{2}}}{1-2^{1-2k}} \left\{ \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]}n=d(2^\alpha f)^2}}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{d}{2}\right)2^{\frac{1}{2}-k}\right) 4^{\alpha(k-1)} L\left(\frac{3}{2}-k, df^2\right) q^n \right.$$

$$\left. + \frac{(4\pi y)^{1-k}}{\Gamma(1-k)} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]+1}n=d(2^\alpha f)^2}}^{\infty} \left(1 - \left(\frac{d}{2}\right)2^{\frac{1}{2}-k}\right) (|d|f^2)^{1-k} L\left(\frac{3}{2}-k, df^2\right) \beta_{\frac{3}{2}-k}(4\pi n y) q^{-n} \right\}$$

¹⁰Definition C.3.2.2.1

$$= c_0 y^{1-k} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n + \sum_{n<0} c_n q^n \Gamma(1-k, 4\pi |n| y)$$

und

$$G_{k,\infty}|_k \tau_{\frac{1}{2}}(z) := 4^{1-k} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} c_{4(n+\kappa)} q^{n+\kappa} + \sum_{n<0} c_{4(n+\kappa)} q^{n+\kappa} \Gamma(1-k, 4\pi |n+\kappa| y) \right\}.$$

mit jedem vierten Koeffizienten von $G_{k,0}$ und $\kappa = \kappa_{\frac{1}{2}}$.

Der nicht-holomorphe Anteil kommt von den Eisensteinreihen komplementären Gewichts:

$$\begin{aligned} \xi_{2-k} G_{2-k,\infty} &= \frac{2^{4k-5} \pi^{2k-2}}{(1-2^{3-2k}) \Gamma(2k-2)} \left\{ (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{\frac{1}{2}-k} G_{k,\infty}(z) - (-1)^{\lfloor k \rfloor} (1-4^{1-k}) G_{k,0}(z) \right\}, \\ \xi_{2-k} G_{2-k,0} &= \frac{2^{4k-5} \pi^{2k-2}}{(1-2^{3-2k}) \Gamma(2k-2)} \left\{ (-1)^{\lfloor k \rfloor} (1-4^{1-k}) G_{k,\infty}(z) - (-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{\frac{1}{2}-k} G_{k,0}(z) \right\} \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ ungerade, ergeben sich folgende Eisensteinreihen

$$\begin{aligned} E_{k,\infty}(z) &= 1 - \frac{2k}{B_{k,\chi_{-4}}} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\chi_{-4}}(n) q^n, \\ E_{k,0}(z) &= \delta_{k1} + \frac{2^k k}{|B_{k,\chi_{-4}}|} \sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \sigma_{1-k,\chi_{-4}}(n) q^n. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{Z}^-$, k ungerade hat man Mock-Eisensteinreihen

$$\begin{aligned} E_{k,\infty}(z) &= 1 + \frac{1}{L(1-k, -4)} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\chi_{-4}}(n) \left(q^n + \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)} q^{-n} \right), \\ E_{k,0}(z) &= \frac{|E_{1-k}|}{2^{k+1} \pi^{k-1} (1-k)! L(1-k, -4)} y^{1-k} \\ &\quad + \frac{(-1)^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-1}}{L(1-k, -4)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{1-k,\chi_{-4}}(n)}{n^{1-k}} \left(q^n - \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)} q^{-n} \right) \end{aligned}$$

und für gerades k

$$\begin{aligned} E_{k,\infty}(z) &= \frac{1}{1-2^k} (E_k(2z) - 2^k E_k(4z)), \\ E_{k,0}(z) &= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{1-2^k} (E_k(2z) - E_k(z)), \\ E_{k,\frac{1}{2}}(z) &= \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{1-2^k} (E_k(z) - (2^k + 1) E_k(2z) + 2^k E_k(4z)), \text{ holomorph für } k \geq 4. \end{aligned}$$

Die Eisensteinreihe $E_{k,\frac{1}{2}}(z)$, $2 \mid k$ hat dieselben Fourierkoeffizienten wie $E_{k,0}(z)$, allerdings alternierend und $E_{k,\frac{1}{2}}|_{\tau_{\frac{1}{2}}}(z) = E_{k,\infty}(z)$.

Folgerung C.3.2.3.1.1. Zusammenhang zwischen Eisensteinreihen und Thetafunktionen:

$$\begin{aligned} E_{\frac{3}{2},\infty}(z) &= \frac{\theta_3^3(z)}{3} - 8G_{\frac{3}{2}}(z), \\ E_{\frac{3}{2},0}(z) &= \frac{2\theta_3^3(z)}{3} + 8G_{\frac{3}{2}}(z), \\ G_{\frac{3}{2}}|_{\frac{3}{2}} \tau_0(z) &= -G_{\frac{3}{2}}(z) - \frac{\theta_3^3(z)}{24}, \\ \theta_3^3(z) &= E_{\frac{3}{2},\infty}(z) + E_{\frac{3}{2},0}(z); \\ E_{\frac{3}{2},\infty}(z) &= 1 + 2q + 4q^2 - 2q^4 + 8q^5 + 8q^6 - 8q^7 + \dots + 2 \left(Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(4)} + 2Q^{(9)} + \dots \right) \end{aligned}$$

mit

$$Q_k^{(n)} := \begin{cases} -\frac{(4\pi y)^{1-k}}{\Gamma(2-k)}, & n = 0, \\ \frac{\Gamma(1-k, 4\pi ny)}{n^{1-k}\Gamma(1-k)} q^{-n}, & n \neq 0; \end{cases}$$

und den holomorphen Fourierkoeffizienten $c_n = r_3(n)/3 - 8H(n)$, $r_3(n) = 12(1 - (\frac{d}{2}))H(-df^2)$, $-n = (2^\alpha f)^2 d$, f ungerade, $d \in \mathbb{D}^-$, $\alpha = -1, 0, 1, 2, \dots$. Die $Q^{(n)}$ sind so gewählt, dass man im nicht-holomorphen Anteil sofort das modifizierte Eichlerintegral erkennt ... $E_{\frac{3}{2}, \infty} = 1 + 2q + \dots + \widetilde{2\theta_3}$.

$$E_{\frac{3}{2}, 0}(z) = 4q + 8q^2 + 8q^3 + 8q^4 + 16q^5 + 16q^6 + 8q^7 + \dots - 2(Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(4)} + 2Q^{(9)} + \dots)$$

mit den holomorphen Fourierkoeffizienten $c_{n,0} = 8H(n) + \frac{2}{3}r_3(n)$,

$$E_{\frac{3}{2}, \infty} |_{\frac{3}{2}} \tau_{\frac{1}{2}}(z) = q^{\frac{3}{4}}(4 + 4q + 12q^2 + 8q^3 + 12q^4 + 12q^5 + 16q^6 + \dots) - 2(Q^{(\frac{1}{4})} + Q^{(\frac{9}{4})} + Q^{(\frac{25}{4})} + Q^{(\frac{49}{4})} + \dots)$$

mit den holomorphen Fourierkoeffizienten $c_{n, \frac{1}{2}} = 4H(4n+3) + \frac{1}{3}r_3(4n+3)$,

$$E_{\frac{3}{2}, 0} \left| \tau_{\frac{1}{2}}(z) = q^{\frac{3}{4}}(4 - 4q + 12q^2 - 8q^3 + 12q^4 - 12q^5 + 16q^6 - 12q^7 + \dots) + 2(Q^{(\frac{1}{4})} + Q^{(\frac{9}{4})} + Q^{(\frac{25}{4})} + Q^{(\frac{49}{4})} + \dots) \right.$$

mit den holomorphen Fourierkoeffizienten $(-1)^n c_{n, \frac{1}{2}}$ und

$$G_{\frac{3}{2}} |_{\tau_{\frac{1}{2}}}(z) = -\frac{q^{\frac{3}{4}}}{6}(1 + 3q + 3q^2 + 6q^3 + 3q^4 + 9q^5 + 4q^6 + 9q^7 + \dots) + \frac{1}{4}(Q^{(\frac{1}{4})} + Q^{(\frac{9}{4})} + Q^{(\frac{25}{4})} + Q^{(\frac{49}{4})} + \dots)$$

mit den holomorphen Fourierkoeffizienten $\frac{(-1)^n - 2}{24} c_{n, \frac{1}{2}}$.

C.3.2.4. Der Kohnen-Plus-Raum.

Hilfssatz C.3.2.4.1. Der Raum der Modulformen $f \in \widehat{\mathbb{M}}_k^!(\Gamma_0(4))$,

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n q^n + \sum_{n \geq n_0} a'_n \Gamma(1-k, 4\pi ny) q^{-n}$$

von halbganzen Gewicht k ist die direkte Summe zweier Eigenräume des Operators $U_4 \tau_0$ mit den Eigenwerten $\alpha_1 = (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{k-\frac{1}{2}}$ und $\alpha_2 = -\frac{1}{2}\alpha_1$. Der Eigenraum zu α_1 ist der Kohnen-Plus-Raum und man kann f durch

$$f|_{\text{pr}} := \frac{2}{3\alpha_1} f|_{U_4 \tau_0} + \frac{1}{3} f$$

in den Kohnen-Plus-Raum $\widehat{\mathbb{M}}_k^{!+}$ projizieren. Dadurch ergibt sich folgende Linearkombination der Fourierentwicklungen um die drei Spitzen $\infty, 0$ und $\frac{1}{2}$:

$$f|_{\text{pr}}(z) = \frac{2}{3} \left\{ \sum_{\substack{n \equiv 0 \vee (-1)^{\lfloor k \rfloor} \\ (\text{mod } 4)}} a_n q^n + \sum_{\substack{-n \equiv 0 \vee (-1)^{\lfloor k \rfloor} \\ (\text{mod } 4)}} a'_n \Gamma(1-k, 4\pi ny) q^{-n} \right\} + \frac{\alpha_1}{3} \left((f|_{\tau_0})(4z) + (f|_{\tau_{\frac{1}{2}}})(4z) \right).$$

Für Funktionen aus dem Kohnen-Plus-Raum hängen die Fourierreihen um die drei Spitzen direkt zusammen:

$$f|_{\tau_0}(z) = \sum_{n \geq n_0} a_{4n} q^n + \sum_{n \geq n_0} a'_{4n} \Gamma(1-k, 4\pi ny) q^{-n},$$

$$f|_{\tau_{\frac{1}{2}}}(z) = \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ n \equiv (-1)^{\lfloor k \rfloor} \\ (\text{mod } 4)}} a_n q^{\frac{n}{4}} + \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ -n \equiv (-1)^{\lfloor k \rfloor} \\ (\text{mod } 4)}} a'_n \Gamma(1-k, \pi ny) q^{-\frac{n}{4}},$$

also einmal die geraden, einmal die ungeraden Koeffizienten.¹¹

BEWEIS. Ähnlich wie für holomorphe Modulformen in [Kohnen 2, Satz 2.1.3].
Über den Operator $U_4 \tau_0$ vgl. [Niwa 2, Lemma 1, S.201]

□

Beispiele. für den Projektionsoperator:

$$\begin{aligned} G_{\frac{3}{2}}|_{\text{pr}} &= G_{\frac{3}{2}}, \\ \theta_3^3|_{\text{pr}} &= 0, \text{ denn } M_{\frac{3}{2}}^+ = \emptyset \end{aligned}$$

und entsprechend

$$E_{\frac{3}{2}, \infty}|_{\text{pr}} = -8 G_{\frac{3}{2}}.$$

Definition C.3.2.4.2 (Modulformen ($s = \frac{k}{2}$)). Sei $G_k(z) := \zeta(2-2k) y^{-\frac{k}{2}} E_k(z, \frac{k}{2})$.

Satz C.3.2.4.3. Für k halbganz, $k > 2$ gibt es im Kohnen-Plus-Raum die Eisensteinreihen

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} L\left(\frac{3}{2} - k, (-1)^{[k]} n\right) q^n \\ &= \zeta(2-2k) + \frac{(-1)^{[\frac{k}{2}]} (k - \frac{3}{2})!}{2^{k-\frac{3}{2}} \pi^{[k]}} \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{k-1} L\left([k], (-1)^{[k]} n\right) q^n \end{aligned}$$

und für $k < 2$ folgende harmonische schwache Maaßformen

$$\begin{aligned} G_k(z) &= \zeta(2-2k) + \sum_{n \in \mathbb{N}} L\left(\frac{3}{2} - k, (-1)^{[k]} n\right) q^n + \frac{(-1)^{[\frac{k+1}{2}]} 2^{\frac{5}{2}-3k} \zeta(3-2k)}{\pi} y^{1-k} \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-k)} \sum_{n \in \mathbb{N}} L\left(\frac{3}{2} - k, (-1)^{k+\frac{1}{2}} n\right) \Gamma(1-k, 4\pi n y) q^{-n} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} L\left(\frac{3}{2} - k, (-1)^{[k]} n\right) q^n \\ &\quad + (-1)^{[\frac{k+1}{2}]} \frac{2^{\frac{7}{2}-5k} \pi^{2-2k}}{(1-2k)!} y^{1-k} \sum_{n \in \mathbb{N}_0} L\left([k], (-1)^{k+\frac{1}{2}} n\right) \beta_{\frac{3}{2}-k}(4\pi n y) q^{-n}. \end{aligned}$$

Ihr nicht-holomorpher Anteil wird durch ξ_{2-k} auf die holomorphen Eisensteinreihen abgebildet

$$\xi_{2-k} G_{2-k}(z) = (-1)^{[\frac{k+1}{2}]} \frac{2^{\frac{7}{2}-5k} \pi^{2-2k}}{(1-2k)!} G_k(z).$$

BEWEIS. Der Satz ergibt sich als Spezialisierung von Satz C.2.3.1 über nicht-holomorphe Eisensteinreihen unter Berücksichtigung von

¹¹Kohnen benutzt etwas andere Entwicklungen. Sei

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_n a(n) q^n, \\ f|_{\tau_0}(z) &= \sum_n a^{\tau_0}(n) q^n, \\ f|_{\tau_{\frac{1}{2}}}(z) &= \sum_{n \equiv (-1)^{[k]} \pmod{4}} a^{\tau_{\frac{1}{2}}}\left(\left[\frac{n}{4}\right]\right) q^{\frac{n}{4}}. \end{aligned}$$

Dann ist in den Bezeichnungen von [Kohnen 3, Prop.3]

$$\begin{aligned} f|_{\eta^{(-1)}}(z) &= (-z+1)^{-k} f\left(\frac{z}{-z+1}\right) = 2^{-k} \sum_n i^{k-n} a^{\tau_0}(n) q^n, \\ f|_{\eta^{(\frac{1}{2})}}(z) &= (2z+1)^{-k} f\left(\frac{z}{2z+1}\right) = \sum_n i^{2\left(n+\kappa_{\frac{1}{2}}\right)-k} a^{\tau_{\frac{1}{2}}}(n) q^{n+\kappa_{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

- (1) $\lim_{s \rightarrow -k} (s+k) \Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0;$
- (2) $\lim_{s \rightarrow -2k} \frac{\zeta(s)}{s+2k} = (-1)^k \frac{(2k)! \zeta(2k+1)}{2^{2k+1} \pi^{2k}}, \quad k \in \mathbb{N};$
- (3) $\lim_{s \rightarrow \frac{k}{2}} \Gamma(s - \frac{k}{2}) \zeta(4s-1) = (-1)^{[k]} 4^k \pi^{2k-1} (1-2k)! \zeta(2-2k), \quad k - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^-.$

Der zweite Grenzwert folgt aus der Funktionalgleichung der ζ -Funktion; der dritte ergibt sich aus (1) und (2). Verwenden der Funktionalgleichung von $L(s, d)$, s. Anhang A.7.6.

Für die Anwendung des Operators ξ_{2-k} s. Def. C.3.5.1. □

Für positives Gewicht sind das die bekannten [Cohen]-Eisensteinreihen.

Beispiele.

$$\begin{aligned}
 E_{\frac{1}{2}}(z) &:= y^{-\frac{1}{4}} E_{\frac{1}{2}}\left(z, \frac{1}{4}\right) = \theta_3(z) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \dots \\
 G_{\frac{3}{2}}(z) &= -\frac{1}{12} + \sum_{n>0} L(0, -n) q^n + \frac{1}{8\pi\sqrt{y}} + \frac{1}{8\pi\sqrt{y}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta(4\pi n^2 y) q^{-n^2} \\
 &= -\frac{1}{12} + \frac{q^3}{3} + \frac{q^4}{2} + q^7 + q^8 + q^{11} + \frac{4q^{12}}{3} + \dots + \frac{1}{16\pi\sqrt{y}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \beta(4\pi n^2 y) q^{-n^2} \\
 G_{\frac{5}{2}}(z) &= \frac{1}{120} + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(-1, n) q^n \\
 &= \frac{1}{120} - \frac{q}{12} - \frac{7q^4}{12} - \frac{2q^5}{5} - q^8 - \frac{25q^9}{12} - 2q^{12} - 2q^{13} - \frac{55q^{16}}{12} - 4q^{17} - \dots \\
 G_{\frac{7}{2}}(z) &= -\frac{1}{252} + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(-2, -n) q^n \\
 &= -\frac{1}{252} - \frac{2q^3}{9} - \frac{q^4}{2} - \frac{16q^7}{7} - 3q^8 - 6q^{11} - \frac{74q^{12}}{9} - 16q^{15} - \frac{33q^{16}}{2} - \dots \\
 G_{-\frac{1}{2}}(z) &= \zeta(3) + \frac{8\pi^3}{45} y^{\frac{3}{2}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(2, -n) q^n + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n \in \mathbb{N}} L(2, n) \Gamma\left(\frac{3}{2}, 4\pi n y\right) q^{-n} \\
 &= \zeta(3) + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(2, -n) q^n \\
 &\quad + \frac{8\pi^3}{45} y^{\frac{3}{2}} \{1 + 15 \beta_2(4\pi n y) q^{-1} + 105 \beta_2(16\pi n y) q^{-4} + 72 \beta_2(20\pi n y) q^{-5} + \dots\} \\
 G_{-\frac{3}{2}}(z) &= \zeta(5) - \frac{128\pi^5}{945} y^{\frac{5}{2}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(3, n) q^n - \frac{8\pi^{\frac{5}{2}}}{3} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{L(-2, -n)}{n^{\frac{5}{2}}} \Gamma\left(\frac{5}{2}, 4\pi n y\right) q^{-n} \\
 &= \zeta(5) + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(3, n) q^n \\
 &\quad + \frac{128\pi^5}{945} y^{\frac{5}{2}} \{-1 + 140 \beta_3(12\pi n y) q^{-3} + 315 \beta_3(16\pi n y) q^{-4} + 1440 \beta_3(28\pi n y) q^{-7} + \dots\} \\
 G_{-\frac{5}{2}}(z) &= \zeta(7) - \frac{512\pi^7}{4725} y^{\frac{7}{2}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(4, -n) q^n + \frac{32\pi^{\frac{7}{2}}}{45} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{L(-3, n)}{n^{\frac{7}{2}}} \Gamma\left(\frac{7}{2}, 4\pi n y\right) q^{-n} \\
 &= \zeta(7) + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(4, -n) q^n \\
 &\quad + \frac{512\pi^7}{4725} y^{\frac{7}{2}} \{-1 + 7 \beta_4(4\pi n y) q^{-1} + 847 \beta_4(16\pi n y) q^{-4} + 1680 \beta_4(20\pi n y) q^{-5} + \dots\} \\
 G_{-\frac{7}{2}}(z) &= \zeta(9) + \frac{8192\pi^9}{93555} y^{\frac{9}{2}} + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(5, n) q^n + \frac{32\pi^{\frac{9}{2}}}{315} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{L(-4, -n)}{n^{\frac{9}{2}}} \Gamma\left(\frac{9}{2}, 4\pi n y\right) q^{-n} \\
 &= \zeta(9) + \sum_{n \in \mathbb{N}} L(5, n) q^n
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{8192\pi^9}{93555} y^{\frac{9}{2}} \{1 + 396 \beta_5 (12\pi ny) q^{-3} + 1485 \beta_5 (16\pi ny) q^{-4} + 19008 \beta_5 (28\pi ny) q^{-7} + \dots\}$$

C.3.3. Poincaréreihen. [Rademacher] hat gezeigt, dass es zu jedem Hauptteil tatsächlich eine Modulform gibt, die in jeder Spitze diesen Hauptteil hat. Man muss dazu aber harmonische schwache Maaßformen zulassen, das sind Modulformen, die von Maaßformen mit dem gleichen Spektralparameter wie holomorphe Modulformen kommen. Die Rademacher-Schule, z.B. [Zuckerman] hat gezeigt, wie sich das auf Kongruenzuntergruppen Γ' verallgemeinern lässt. Man kann (in unter Γ') inäquivalenten Spitzen verschiedene asymptotische Entwicklungen zulassen. Auch dann bestimmt diese Asymptotik mehr oder weniger eindeutig eine Modulform bzw. harmonische schwache Maaßform. Die Hauptbeiträge der Hardy-Ramanujan-Rademacher Kreis-Methode kommen vom Hauptteil der Funktion.

C.3.3.1. Allgemeines.

Definition C.3.3.1.1. Es gibt nicht-holomorphe Poincaréreihen $F_{k,\mathfrak{a}}(m, z) \in M_k^!(\Gamma_0(N))$ mit vorgegebenem Hauptteil $q^{m+\kappa_{\mathfrak{a}}}$ in der Spitze \mathfrak{a} von $\Gamma_0(N) \setminus \mathcal{H}$:

Sei $m \in \mathbb{Z}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\gamma_{\mathfrak{a}}$ ein Erzeugendes des Stabilisators $\Gamma_{\mathfrak{a}} = \{\gamma \in \Gamma_0(N) \mid \gamma\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\}$ der Spitze \mathfrak{a} und

$$v_k : \Gamma_0(N) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ein Multiplikatorsystem zur Gruppe $\Gamma_0(N)$ vom Gewicht k , d.h.

$$\begin{aligned} |v_k(\gamma)| &= 1, \\ v_k(\gamma_1\gamma_2) ((c_1a_2 + c_2d_1)z + c_1b_2 + d_1d_2)^{-k} &= v_k(\gamma_1)(c_1\gamma_2z + d_1)^{-k} v_k(\gamma_2)(c_2z + d_2)^{-k}, \\ v_k(\gamma_{\mathfrak{a}}) &= e^{2\pi i\kappa_{\mathfrak{a}}}, \quad 0 \leq \kappa_{\mathfrak{a}} < 1. \end{aligned}$$

$$F_{k,\mathfrak{a}}(m, z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \tau_{\mathfrak{a}}^{-1}\Gamma_0(N)} \bar{v}_k(\tau_{\mathfrak{a}}\gamma) (cz + d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_{\mathfrak{a}}}(\gamma z),$$

$$F_{k,\mathfrak{a}}(0, z) := E_{k,\mathfrak{a}}(z), \quad \kappa_{\mathfrak{a}} \neq \frac{1}{2}$$

mit

$$\varphi_m(z) := \begin{cases} q^{-m}, & k \geq \frac{3}{2}, \\ \frac{\gamma(1-k, 4\pi my)}{\Gamma(1-k)} q^{-m}, & k \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

LITERATUR: [Iwaniec 3, Ch.2 Automorphic Forms in General, Ch.3 The Eisenstein and the Poincaré series], [Lehner].

Beispiele für Poincaréreihen folgen im Abschnitt C.3.3. Die Daten für die Kongruenzuntergruppe $\Gamma_0(4)$ werden in Definition C.3.2.2.1 erläutert.

In [Lehner, Ch. IX Forms of positive and zero dimension] wurde gezeigt, dass sich die Fourierkoeffizienten mit positivem Index eindeutig aus den Hauptteilen in den Spitzen ergeben. Der Beweis ist auch im nicht-holomorphen Fall gültig. Die nicht-holomorphen Anteile (insofern sie in den Spitzen verschwinden) werden durch den Hauptteil eindeutig festgelegt.

Hilfssatz C.3.3.1.2. Sei $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 1$. Eine harmonische schwache Maaßform $f \in \widehat{S}_k(N, \chi)$, die in den Spitzen verschwindet, ist eine holomorphe Spitzenform (aus $S_k(N, \chi)$).

BEWEIS. Für $S_{2-k}(N, \chi) \neq \emptyset$ ist $k \leq 0$, $\xi_k f \in S_{2-k}(N, \chi)$ und es gibt ein $g \in \widehat{S}_k(N, \chi)$ mit $\xi_k g \in S_{2-k}(N, \chi)$, $f - g \in S_k^!(N, \chi) \cap S_k(N, \chi) = \emptyset$ holomorph und ohne Hauptteil, Widerspruch. Sonst ist f holomorph, also eine Spitzenform. \square

Folgerung C.3.3.1.2.1. Eine harmonische schwache Maaßform ist durch holomorphen und nicht-holomorphen Hauptteil eindeutig (bis auf Spitzenformen) festgelegt.

Das bedeutet, dass im Fall negativen Gewichts die Poincaréreihen eine Basis sämtlicher harmonischer schwacher Maaßformen darstellen:

Satz C.3.3.1.3.

Sei $N \in \mathbb{N}, \chi$ ein Dirichletcharakter mod $N, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_0^-, f|_{\tau_a}(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n^{(a)} q^{n+\kappa_a} \in \mathbb{M}_k(N, \chi)$ die Fourierentwicklung in der Spitze \mathfrak{a} des Fundamentalbereichs $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$. Dann ist

$$f(z) = \sum_{\mathfrak{a}} \sum_{n > 0} a_{-n}^{(\mathfrak{a})} F_{k, \mathfrak{a}}(-n, z).$$

Für $k = 0$ kann man noch eine beliebige Konstante dazu addieren.

BEWEIS. ([Rademacher, 134.], [Niebur, Corollary zu Theorem 1], [Bruinier 1], [Bri O 5, Theorem 1.1]), [Rhoades, Theorem 2.2]; vgl. Hilfssätze C.3.3.2.3, C.3.3.2.5, C.3.3.3.2 und C.3.3.5.3 □

Bemerkung. Die Poincaréreihen $F_k(m, z)$ sind i.a. harmonische schwache Maaßformen. Linearkombinationen sind schwach-holomorphe, falls eine schwach-holomorphe Modulform mit gegebenem Hauptteil existiert, z.B.

$$\frac{G_{\frac{15}{2}}(z)}{\Delta(4z)} = F_{-\frac{9}{2}}(4, z) + 56F_{-\frac{9}{2}}(1, z) = \frac{1}{q^4} + \frac{56}{q} + 390 + 15360q^3 + 42264q^4 + 615240q^7 + 1379920q^8 + \dots$$

d.h. wegen $S_{\frac{13}{2}} = \langle \frac{1}{128}\theta_3\theta_4^4\theta_4^4(7\theta_3^4 + \theta_4^4) \rangle = \langle 1q - 56q^4 + 120q^5 - 240q^8 + 9q^9 + \dots \rangle$.

Folgerung C.3.3.1.3.1. Sei $k \leq 0$. Jeder holomorphe und nicht-holomorphe Hauptteil in jeder Spitze ist in $\mathbb{M}_k^1(N, \chi)$ realisierbar.

Für positives Gewicht $k > 1$ ist das etwas komplizierter: Produkte von harmonischen schwachen Maaßformen sind i.a. keine Eigenfunktionen des Laplaceoperators wie das Beispiel $j(z)\overline{j(z)}$ zeigt. Der Operator Θ steht auch nicht mehr zur Verfügung. Nur ξ_k sorgt dafür, dass der nicht-holomorphe Anteil wieder modifiziertes Eichlerintegral einer Modulform $\in M_{2-k}^1$ ist. Wegen der Exaktheit von (C.3.6.2) existieren diese Formen:

Formen vom Gewicht $\frac{3}{2}$ und 2 sind z.B. die Eisensteinreihen $G_{\frac{3}{2}}$ und E_2 . Mock-Modulformen von positivem Gewicht k , falls $S_k = \emptyset$ wurden in [Bruggeman 2, (19.5)] als Ableitungen der Poincaréreihen $\sum_{M \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (cz + d)^{-k} \varphi_{m,s}(Mz)$

nach dem Spektralparameter an der Stelle $s = \frac{k}{2}$ gegeben,

$$\varphi_{m,s}(z) := \frac{(4\pi my)^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma(2s)} M_{-\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi my) e(-mx), \quad m > 0, \text{Re } s > \frac{1}{2}.$$

In [Bri Dia Ra] wird erklärt, wie man die Urbilder unter ξ_{2-k} von beliebigen holomorphen Modulformen negativen Gewichts konstruiert.

Die Poincaréreihen selbst erzeugen genau die Räume schwach-holomorphen Modulformen M_k^1 , ([Br On Rh, Proposition 6.1]). Die Konvergenz der Poincaréreihen ist für $k \geq 2$ und $k \leq 0$ gewährleistet. Es mag irgendwo in der Literatur Beweise für die übrigen Gewichte $\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ geben. Computerberechnungen ergeben Konvergenz.

Beispiele. (Der Kohnen-Plus-Raum)

Die Dualität von **Eisensteinreihen** der halbganzen Gewichte k und $2 - k$ im Kohnen-Plus-Raum sieht folgendermaßen aus (vgl. Abschnitt 4.2 im ganzzahligen Fall):

Die holomorphen Anteile der $\Gamma_0(4)$ -Eisensteinreihen negativen halbganzen Gewichts k im Kohnen-Plus-Raum

$\sum_{n=0}^{\infty} L\left(\frac{3}{2} - k, (-1)^{[k]} n\right) q^n$ sind Mock-Modulformen aus \mathbb{M}_k^+ .

$$G_{\frac{5}{2}}(z) = \frac{1}{120} - \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{3}{2}} L(2, n) q^n = \frac{1}{120} + \sum_{n=1}^{\infty} L(-1, n) q^n$$

$$G_{-\frac{1}{2}}(z) = \zeta(3) + \frac{8\pi^3}{45} y^{\frac{3}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} L(2, -n) q^n - 4\pi^{\frac{3}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} L(-1, n) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}, 4\pi n y\right)}{n^{\frac{3}{2}}} q^{-n}$$

$$G_{\frac{7}{2}}(z) = -\frac{1}{252} + \sum_{n=1}^{\infty} L(-2, -n) q^n$$

$$G_{-\frac{3}{2}}(z) = \zeta(5) - \frac{128\pi^5}{945} y^{\frac{5}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} L(3, n) q^n - \frac{8\pi^{\frac{5}{2}}}{3} \sum_{n=1}^{\infty} L(-2, -n) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}, 4\pi n y\right)}{n^{\frac{5}{2}}} q^{-n}$$

$$G_{\frac{9}{2}}(z) = \frac{1}{240} + \sum_{n=1}^{\infty} L(-3, n) q^n$$

$$G_{-\frac{5}{2}}(z) = \zeta(7) - \frac{512\pi^7}{4725} y^{\frac{7}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} L(4, -n) q^n + \frac{32\pi^{\frac{7}{2}}}{45} \sum_{n=1}^{\infty} L(-3, n) \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}, 4\pi n y\right)}{n^{\frac{7}{2}}} q^{-n}$$

Bei den Eisensteinreihen zu negativem Gewicht sieht man wieder einen Teil, der ähnlich wie das Eichlerintegral

$$\frac{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} 2^{k-\frac{3}{2}} \pi^{[k]} \tilde{G}_k(z)}{\left(k - \frac{3}{2}\right)!}$$

aussieht, aber andere Summationsindizes hat und die nichtarithmetischen Werte der Dirichletschen L-Reihen enthält und das modifizierte Eichlerintegral mit den rationalen Koeffizienten von $G_{k+\frac{1}{2}}(z)$

$$\frac{(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} 2^{k-\frac{3}{2}} \pi^{[k]} \tilde{G}_k(z)}{\left(k - \frac{3}{2}\right)!} \approx \tilde{G}_k(z).$$

Die Koeffizienten des Eichlerintegrals \tilde{G}_k liegen für halbganzes Gewicht k nicht mehr im Kohnen-Plus-Raum, da die Plus-Bedingung für $[2 - k]$ anders aussieht als für $[k]$.

Hilfssatz C.3.3.1.4. Sei $k \in \mathbb{Z}^-$, $m \in \mathbb{N}$ und $\langle f_1, f_2, \dots, f_n \rangle$ eine Basis von S_{2-k} , bestehend aus Hecke-Eigenformen $f_n(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} q^m$. Dann ist der nicht-holomorphe Anteil der Poincaréreihe $F_k(m, z)$

$$F_k^-(m, z) = \mu_1 \bar{c}_{1m} \tilde{f}_1 + \mu_2 \bar{c}_{2m} \tilde{f}_2 + \dots + \mu_n \bar{c}_{1n} \tilde{f}_n$$

mit

$$\mu_r = -\frac{\Gamma(1-k)}{(4\pi)^{1-k} \|f_r\|^2}.$$

BEWEIS. vgl. [Iwaniec 3, (3.29)]

Nach Lemma C.3.5.4 ist

$$\xi_k F_k(m, z) = \frac{(4\pi m)^{1-k}}{\Gamma(1-k)} P_{2-k}(m, z)$$

bzw.

$$F_k^-(m, z) = -m^{1-k} \tilde{P}_{2-k}(m, z).$$

Da

$$P_{2-k}(m, z) = \sum_{r=1}^n \frac{\langle f_r, P_{2-k}(m, \cdot) \rangle}{\langle f_r, f_r \rangle} f_r(z)$$

die Koordinatendarstellung von $P_{2-k}(m, z)$ in dem Orthogonalsystem¹² $\langle f_r \rangle$ ist, folgt mit Gleichung (C.3.3.2.1) die Behauptung. \square

¹²Nach [Ogg 1, Proposition 12] sind Hecke-Eigenformen orthogonal.

Folgerung C.3.3.1.4.1 ([Ono 2]). [Lehmer]'s Vermutung

$$\forall n \in \mathbb{N} : \tau(n) \neq 0$$

trifft zu, falls $F_{-10}(n, z)$ immer einen nicht-holomorphen Anteil hat bzw. falls $P_{12}(n, z) \neq 0$.

C.3.3.2. Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$.

Definition C.3.3.2.1. Für $k \in 2\mathbb{N}, k \geq 12, m \in \mathbb{N}$ sei $P_k(m, z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} q^m |k\gamma(z)$

Diese holomorphen Poincaréreihen wurden von [Pettersson 1] als $\frac{1}{2}G_{-k}(z, \mathbf{1}, \text{Id}, \Gamma, m)$ eingeführt und berechnet. Sie haben folgende Eigenschaft:

$$(C.3.3.2.1) \quad \langle f, P_k(m, \cdot) \rangle = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi m)^{k-1}} c_m \text{ für } f(z) = \sum_n c_n q^n \in S_k,$$

dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt und f eine Spitzenform.

Definition C.3.3.2.2. [Hejhal 1, Ch. VI Prop. 8.2], [Fay], [Bruinier 2, (4.1)]

Sei $k \in 2\mathbb{Z} \setminus \{2\}, m \in \mathbb{Z}$:

$$F_k(m, z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma} (\varphi_m |k\gamma)(z),$$

$$\varphi_m(z) := \begin{cases} q^{-m}, & k \geq 4, \\ \frac{\gamma(1-k, 4\pi my)}{\Gamma(1-k)} q^{-m}, & k \leq 0; \end{cases}$$

$$K(m, n; c) := \sum_{\substack{v \pmod{c} \\ \text{ggT}(v, c) = 1}} e\left(\frac{m\bar{v} + nv}{c}\right), \bar{v} \in \mathbb{N} \text{ mit } v\bar{v} \equiv 1 \pmod{c}.$$

Hilfssatz C.3.3.2.3. Für $k \in 2\mathbb{N}, k \geq 12, m \in \mathbb{N}$ ist

$$P_k(m, z) = q^m + 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{K(m, n; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right) q^n.$$

Die $P_k(m, z), m \in \mathbb{N}$ spannen den Raum der Spitzenformen S_k auf.

BEWEIS. [Iwaniec 3, Fourier expansion of Poincaréseries (3.19)]. □

Hilfssatz C.3.3.2.4. $K(m, n; c) = K(-m, -n; c) = K(n, m; c) \in \mathbb{R}$.

Die Fourierreihe von F_k konvergiert für alle geraden k und auch für $k = 2$:

Hilfssatz C.3.3.2.5. Sei $k \in 2\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Für $k \in 2\mathbb{N}_0$ ist die Poincaréreihe $F_k(m, z)$ schwach-holomorph mit Fourierreihe

$$F_k(m, z) = q^{-m} + 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{K(-m, n; c)}{c} I_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right) q^n \in M_k^!$$

Für $k \in 2\mathbb{Z}^-$ ist

$$F_k(m, z) := q^{-m} + \frac{2(2-k)\sigma_{1-k}(m)}{B_{2-k}} + 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{K(-m, n; c)}{c} I_{1-k}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right) q^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\delta_{m,n} + 2\pi(-1)^{\frac{k}{2}} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{K(-m, -n; c)}{c} J_{1-k}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right) \right\} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi ny)}{\Gamma(1-k)} q^{-n}$$

eine i.a. harmonische schwache Maaßform. Falls $k \geq -8 \vee k = -12$ ist $F_k(m, z) = q^{-m} + O(1) \in M_k^!$ holomorph.

Die $F_k(m, z), m \in \mathbb{N}$ spannen zusammen mit M_k den Raum \widehat{S}_k auf.

BEWEIS. [Bruinier 2, (4.2)], [Lehner, Ch. VIII, IX], [Niebur, §2 Cor.], [Bri O 3, (4.3)] □

Beispiele.

Ich verwende folgendes Symbol für nicht-holomorphe Fourierkoeffizienten

$$Q^{(n)} = Q_k^{(n)} := \begin{cases} -\frac{(4\pi y)^{1-k}}{\Gamma(2-k)}, & n = 0 \\ \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{n^{1-k} \Gamma(1-k)} q^{-n}, & n \neq 0 \end{cases}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \xi_k \left(c Q_k^{(n)} \right) &= -\bar{c} \frac{(4\pi)^{1-k}}{\Gamma(1-k)} q^n, \quad q = e^{2\pi i z}, \\ \widetilde{c q^n} &:= \frac{(-2\pi i)^{1-k}}{\Gamma(1-k)} \int_{-\bar{z}}^{\infty} c q^n (\tau + z)^{-k} d\tau = c Q_k^{(n)}. \end{aligned}$$

(nicht-holomorphe Poincaréreihen)

$$\begin{aligned} E_{-10}(z) &= 1 + \frac{1}{\zeta(11)} \left(q + \frac{2049}{2048} q^2 + \frac{177148}{177147} q^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_{12}}{24} Q_{-10}^{(0)} + Q_{-10}^{(1)} + 2049 Q_{-10}^{(2)} + 177148 Q_{-10}^{(3)} + \dots \right) \\ F_{-10}(1, z) &= \frac{1}{q} + \frac{24}{B_{12}} - 1842,89q - 23274,08q^2 - 225028,76q^3 + \dots \\ &\quad - \frac{10!}{(4\pi)^{11} \|\Delta\|^2} \left(Q^{(1)} - 24 Q^{(2)} + 252 Q^{(3)} + \dots \right) \\ F_{-10}(2, z) &= \frac{1}{q^2} + \frac{24\sigma_{11}(2)}{B_{12}} - 47665306,53q - 3687806578,19q^2 + \dots \\ &\quad + \frac{24 \cdot 10!}{(4\pi)^{11} \|\Delta\|^2} \left(Q^{(1)} - 24 Q^{(2)} + 252 Q^{(3)} + \dots \right) \\ F_{-10}(3, z) &= \frac{1}{q^3} + \frac{24\sigma_{11}(3)}{B_{12}} - 39863169531,47q - 13646324629099,01q^2 + \dots \\ &\quad - \frac{252 \cdot 10!}{(4\pi)^{11} \|\Delta\|^2} \left(Q^{(1)} - 24 Q^{(2)} + 252 Q^{(3)} + \dots \right) \\ E_{-14}(z) &= 1 + \frac{1}{\zeta(15)} \left(q + \frac{32769}{32768} q^2 + \frac{14348908}{14348907} q^3 + \dots \right. \\ &\quad \left. - \frac{B_{16}}{32} Q^{(0)} + Q^{(1)} + 32769 Q^{(2)} + 14348908 Q^{(3)} + \dots \right) \\ F_{-14}(1, z) &= \frac{1}{q} + \frac{32}{B_{16}} - 45,67q - 366,47q^2 - 2493,45q^3 + \dots \\ &\quad - \frac{14!}{(4\pi)^{15} \|\Delta E_4\|^2} \left(Q^{(1)} + 216 Q^{(2)} - 3348 Q^{(3)} + \dots \right) \\ F_{-14}(2, z) &= \frac{1}{q^2} + \frac{32\sigma_{15}(2)}{B_{16}} - 12008361,57q - 490110472,68q^2 + \dots \\ &\quad - \frac{216 \cdot 14!}{(4\pi)^{15} \|\Delta E_4\|^2} \left(Q^{(1)} + 216 Q^{(2)} - 3348 Q^{(3)} + \dots \right) \\ F_{-14}(3, z) &= \frac{1}{q^3} + \frac{32\sigma_{15}(3)}{B_{16}} - 35778227645,69q - 5804859606863,46q^2 + \dots \\ &\quad + \frac{3348 \cdot 14!}{(4\pi)^{15} \|\Delta E_4\|^2} \left(Q^{(1)} + 216 Q^{(2)} - 3348 Q^{(3)} + \dots \right) \end{aligned}$$

ist das in [Iwaniec 3, Ch. 3, The Eisenstein and the Poincaré Series] zu finden. Die Funktion Linearkombination der Poincaréreihen $F_{k,a}(m, z)$, $m > 0$.

C.3.3.3. Gruppe $\Gamma_0(N)$.

Die Situation ist eine naheliegende Verallgemeinerung des vorigen Abschnitts. In [Rademacher] wird mit Hilfe der Hardy-Ramanujan Kreismethode gezeigt, wie man schwach-holomorphe Modulformen mit vorgegebenem Hauptteil in der Spitze ∞ realisiert. Das wurde durch die Rademacher-Schule, z.B. [Zuckerman] auf beliebige Kongruenzuntergruppen verallgemeinert. [Lehner, Ch. IX] liefert eine übersichtliche Zusammenfassung der Ergebnisse. Für negatives Gewicht k sind die Funktionen eindeutig bestimmt. Tatsächlich konvergieren diese Fourierreihen aber für (fast) jedes Gewicht. Für positives Gewicht $k > 2$ kann man dasselbe durch Konstruktion von Poincaréreihen erreichen. Diese Idee geht auf [Peterson 1] zurück. Tatsächlich liefern beide Ansätze sowohl für positives als auch negatives Gewicht dasselbe Ergebnis.

Definition C.3.3.3.1. Der Fundamentalbereich $\Gamma_0(N) \backslash \mathcal{H}$ hat $\sum_{t|N} \varphi(\text{ggT}(t, \frac{N}{t}))$ Spitzen. Wir beschäftigen uns hier mit den regulären Spitzen $\infty, 0$ und $\frac{p}{N}$, falls $p \parallel N$. Ihr Stabilisator Γ_∞, Γ_0 bzw. $\Gamma_{\frac{p}{N}}$ wird erzeugt durch $\gamma_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -N & 1 \end{pmatrix}$ bzw. $\gamma_{\frac{p}{N}} = \begin{pmatrix} 1-N & p \\ -\frac{N^2}{p} & N+1 \end{pmatrix}$ und die Skalierungsmatrizen¹³ sind $\tau_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\tau_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}$ und $\tau_{\frac{p}{N}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \begin{pmatrix} p & -b \\ N & pa \end{pmatrix}$ mit $p^2a + bN = p$, d.h.

$$\tau_a \infty = a, \quad \tau_a^{-1} \gamma_a \tau_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die Gruppen $\Gamma_0(N)$ definieren wir wie üblich¹⁴

$$f|_{\tau_0}(z) := (\sqrt{N}z)^{-k} f\left(-\frac{1}{Nz}\right).$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, $p \parallel N$ prim, $k \in 2\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$; $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\infty, 0\}$:

$$\begin{aligned} K(m, n; c) &:= \sum_{\substack{d=1 \\ \text{ggT}(c,d)=1 \\ ad \equiv 1 \pmod{c}}}^c e\left(\frac{am + dn}{c}\right), & \text{ Kloostersumme} \\ K'(m, n; c) &:= K\left(\frac{m}{N} \pmod{c}, n; c\right), \\ K''(m, n; c) &:= K\left(\frac{m}{p} \pmod{\frac{Nc}{p}}, n; \frac{Nc}{p}\right), \quad p \nmid c \\ P_{k\mathbf{a}}^{(N)}(m, \cdot) |_{k\tau_{\mathbf{b}}}(z) &:= \sum_{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \tau_a^{-1} \Gamma_0(N) \tau_b} (cz + d)^{-k} \varphi_{-m}(Mz) \quad \text{für } k > 0, \\ E_{k\mathbf{a}}^{(N)} |_{k\tau_{\mathbf{b}}}(z) &:= \sum_{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \tau_a^{-1} \Gamma_0(N) \tau_b} (cz + d)^{-k} \quad \text{für } k \in 2\mathbb{N}, \\ F_{k\mathbf{a}}^{(N)}(m, \cdot) |_{k\tau_{\mathbf{b}}}(z) &:= \sum_{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \backslash \tau_a^{-1} \Gamma_0(N) \tau_b} (cz + d)^{-k} \varphi_m(Mz) \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

φ_m wie in Definition C.3.3.2.2.

¹³Def.: $\tau_\kappa \infty = \kappa$, $\tau_\kappa^{-1} \gamma_\kappa \tau_\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\Gamma_\kappa = \{\gamma \in \Gamma_0(N) \mid \gamma\kappa = \kappa\} = \langle \gamma_\kappa \rangle$

¹⁴ohne die Drehfaktoren wie bei $\Gamma_0(4)$

Hilfssatz C.3.3.3.2. Für $N \in \mathbb{N}, p \parallel N$ prim, $k \in 2\mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
P_{k,\infty}^{(N)}(m, z) &= P_{k,0}^{(N)}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = q^m + (-1)^{\frac{k}{2}} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ N|c}} \frac{K(m, n; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right), \\
P_{k,0}^{(N)}(m, z) &= P_{k,\infty}^{(N)}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ \text{gg}\Gamma(N,c)=1}} \frac{K'(m, n; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{mn}{N}}\right), \\
P_{k,\frac{p}{N}}^{(N)}(m, z) &= (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2\pi\sqrt{p}}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ p|c}} \frac{K''(m, n; c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{4\pi}{Nc}\sqrt{pmn}\right), \\
F_{k,\infty}^{(N)}(m, z) &= q^{-m} + (-1)^{\frac{k}{2}} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ N|c}} \frac{K(-m, n; c)}{c} I_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right), \\
F_{k,0}^{(N)}(m, z) &= F_{k,\infty}^{(N)}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ \text{gg}\Gamma(N,c)=1}} \frac{K'(-m, n; c)}{c} I_{k-1}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{mn}{N}}\right), \\
F_{k,\frac{p}{N}}^{(N)}(m, z) &= (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2\pi\sqrt{p}}{N} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ p|c}} \frac{K''(-m, n; c)}{c} I_{k-1}\left(\frac{4\pi}{Nc}\sqrt{pmn}\right).
\end{aligned}$$

Falls $S_k(\Gamma_0(N)) = \emptyset$, sind die $P_{k,\mathfrak{a}}^{(N)}(m, z) \equiv 0$, ähnlich für die $F_{k,\mathfrak{a}}^{(N)}(m, z)$. Eisensteinreihen und Poincaréreihen lassen sich genauso für negatives Gewicht definieren. Für die Gruppe $\Gamma_0(p)$ hat man ($k \in 2\mathbb{Z}_0$)

$$\begin{aligned}
F_{k,\infty}^{(p)}(m, z) &= F_{k,0}^{(p)}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = q^{-m} + \frac{2(2-k)(\sigma_{1-k}(m) - p^{2-k}\sigma_{1-k}(\frac{m}{p}))}{(1-p^{2-k})B_{2-k}} \\
&\quad + (-1)^{\frac{k}{2}} 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ p|c}} \frac{K(-m, n; c)}{c} I_{1-k}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\delta_{m,n} + (-1)^{\frac{k}{2}} 2\pi \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c>0 \\ p|c}} \frac{K(-m, -n; c)}{c} J_{1-k}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{mn}\right) \right\} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi ny)}{\Gamma(1-k)} q^{-n}, \\
F_{k,0}^{(p)}(m, z) &= F_{k,\infty}^{(p)}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{m^{1-k}}{(1-k)!} \left(\frac{2\pi}{\sqrt{p}}\right)^{2-k} \sum_{\substack{c=1 \\ p|c}}^{\infty} \frac{\sum_{d|(c,m)} d\mu\left(\frac{c}{d}\right)}{c^{2-k}} \\
&\quad + (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} q^n \sum_{\substack{c>0 \\ p|c}} \frac{K'(-m, n; c)}{c} I_{1-k}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{mn}{p}}\right) \\
&\quad + (-1)^{\frac{k}{2}} \frac{2\pi}{\sqrt{p}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c>0 \\ p|c}} \frac{K'(-m, -n; c)}{c} J_{1-k}\left(\frac{4\pi}{c}\sqrt{\frac{mn}{p}}\right) \frac{\Gamma(1-k, 4\pi ny)}{\Gamma(1-k)} q^{-n}.
\end{aligned}$$

Für $k = 0$ verschwinden die nicht-holomorphen Fourierkoeffizienten.

BEWEIS. [Iwaniec 3, Fourier expansion of Poincaré series+example], [Iwaniec 3, 2.5. Double coset decomposition+example], [Iwaniec 3, Kloosterman sums for congruence groups]. Es gibt folgende Doppelnebenklassen zu $\Gamma_0(N)$:

$\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}$	∞
∞	$\Gamma_0(N)$
0	$\begin{pmatrix} \sqrt{N}\mathbb{Z} & \frac{1}{\sqrt{N}}\mathbb{Z} \\ \sqrt{N}\mathbb{Z} & \sqrt{N}\mathbb{Z} \end{pmatrix}$
$\frac{p}{N}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{p}\mathbb{Z} & \frac{1}{\sqrt{p}}\mathbb{Z} \\ \frac{N}{\sqrt{p}}\mathbb{Z} & \sqrt{p}\mathbb{Z} \end{pmatrix}$

Die Kloostermansumme zur Spitze $\frac{p}{N}$ ist für $p \nmid c$:

$$K''(m, n; c) := S_{k, \frac{p}{N}, \infty} \left(m, n, \frac{N}{\sqrt{p}}c \right) = \sum_{\substack{d=1 \\ \text{ggT}(d, \frac{Nc}{p})=1 \\ ad \equiv 1 \pmod{\frac{Nc}{p}}}}^{\frac{Nc}{p}} e \left(\frac{ma\sqrt{p} + nd\sqrt{p}}{\frac{N}{\sqrt{p}}c} \right) = S_{k, \infty, \infty} \left(\frac{m}{p} \pmod{\frac{Nc}{p}}, n; \frac{Nc}{p} \right).$$

□

C.3.3.4. Kloostermansummen zu $\Gamma_0(4)$.

Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen und Poincaréreihe zu $\Gamma_0(4)$ braucht man verallgemeinerte Kloostermansummen, vgl. [Iwaniec 3, 2.5 Double coset decomposition Prop. 2.7, 3.2 Fourier expansion of Poincaré series]:

Definition C.3.3.4.1. Kloostermansummen regeln den Beitrag des Multiplikators in den jeweiligen Spitzen:

$$\begin{aligned} S_{k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}}(m, n; c) &:= \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}} / \Gamma_\infty} \bar{v}_k(\tau_{\mathfrak{a}} \gamma \tau_{\mathfrak{b}}^{-1}) e \left(\frac{ma + nd}{c} \right) \\ &= \sum_{\substack{c, d \in \mathbb{R} \\ 0 \leq d < c \\ \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \tau_{\mathfrak{a}} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau_{\mathfrak{b}}^{-1} \in \Gamma_0(4) \\ -c \leq a < 0}} \left(\left(\frac{c'}{d'} \right) \varepsilon_{d'} \right)^{2k} e \left(\frac{ma + nd}{c} \right), \end{aligned}$$

z.B.

$$\begin{aligned} S_{k, \infty, \infty}(m, n; c) &= S_{k, 0, 0}(m, n; c) = \sum_{\substack{d=1 \\ \text{ggT}(d, c)=1, \\ ad \equiv 1 \pmod{c}}}^c \left(\left(\frac{c}{d} \right) \varepsilon_d \right)^{2k} e \left(\frac{ma + nd}{c} \right), \quad 4 \mid c \\ S_{k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(m, n; c) &= \sum_{\substack{d=1 \\ \text{ggT}(d, c)=1 \\ -c \leq a < 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)}}^c \left(\left(\frac{-b}{a+2b} \right) \varepsilon_{a+2b} \right)^{2k} e \left(\frac{ma + nd}{c} \right), \quad 4 \mid c \\ S_{k, \frac{1}{2}, \infty}(m, n; 2c) &= \sum_{\substack{d=1 \\ \text{ggT}(d, 2c)=1 \\ -c \leq a < 0 \\ \begin{pmatrix} 2a-c & \frac{b-d}{2} \\ 4a & b \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4)}}^{2c} \left(\left(\frac{a}{b} \right) \varepsilon_b \right)^{2k} e \left(\frac{ma + nd/2}{c} \right), \quad 2 \nmid c \end{aligned}$$

mit

$$\varepsilon_d := \begin{cases} 1, & d \equiv 1 \pmod{4}, \\ i, & d \equiv 3 \pmod{4}, \end{cases} \quad \delta_{\text{ungerade},c} := \begin{cases} 1, & c \text{ ist ungerade}; \\ 0, & \text{sonst} \end{cases};$$

$$\delta_{\square,m} := \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \\ 1, & m \text{ ist Quadratzahl } > 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \delta_{2\Delta,m} := \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \\ 1, & m = n(n+1) \text{ f\"ur ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{etc.}$$

Zur Berechnung der $\Gamma_0(4)$ -Kloostersummen betrachte die Tabelle der $\Gamma_0(4)$ -Matrizen $\tau_a \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tau_b^{-1}$:

$a \setminus b$	∞	0	$\frac{1}{2}$
∞	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2b & \frac{a}{2} \\ -2d & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2b & \frac{a}{2}+b \\ -2d & \frac{c}{2}+d \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} -\frac{c}{2} & -\frac{d}{2} \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} d & -\frac{c}{4} \\ -4b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} d & -\frac{c}{4}-\frac{d}{2} \\ -4b & a+2b \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} a-\frac{c}{2} & b-\frac{d}{2} \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2b+d & \frac{a}{2}-\frac{c}{4} \\ -4b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2b+d & b-\frac{c}{4}+\frac{a-d}{2} \\ -4b & a+2b \end{pmatrix}$

Die Summation in den Kloostersummen geht immer über Paare natürlicher Zahlen c, d mit $0 < d \leq c$. Man braucht eventuell $a, b \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, so dass $ad - bc = 1, -c \leq a < 0$. Es gibt folgende weitere Einschränkungen

$a \setminus b$	∞	0	$\frac{1}{2}$
∞	$4 \mid c, \text{ggT}(c, d) = 1, 2 \nmid d$ $ad \equiv 1 \pmod{c}$	$c \equiv 2 \pmod{4}, \text{ggT}(\frac{c}{2}, d) = 1, 2 \mid d$ $ad \equiv 1 \pmod{\frac{c}{2}}, 2 \mid a$	$c \equiv 2 \pmod{4}, \text{ggT}(\frac{c}{2}, d) = 1, 2 \mid d$ $ad \equiv 1 \pmod{\frac{c}{2}}, 2 \nmid a$
0	$c \equiv 2 \pmod{4}, \text{ggT}(\frac{c}{2}, d) = 1, 2 \mid d$ $ad \equiv 1 \pmod{\frac{c}{2}}, 2 \mid a$	$4 \mid c, \text{ggT}(c, d) = 1, 2 \nmid d$ $ad \equiv 1 \pmod{c}$	$c \equiv 2 \pmod{4}, \text{ggT}(c, d) = 1, 2 \nmid d$ $ad \equiv 1 \pmod{c}$
$\frac{1}{2}$	$c \equiv 2 \pmod{4}, \text{ggT}(c, d) = 1, 2 \nmid d$ $ad \equiv 1 \pmod{\frac{c}{2}}, 2 \mid a$	$c \equiv 2 \pmod{4}, \text{ggT}(c, d) = 1, 2 \nmid d$ $ad \equiv 1 \pmod{c}$	$4 \mid c, \text{ggT}(c, d) = 1, 2 \nmid d$ $ad \equiv 1 \pmod{c}$

Die Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b$ haben für die verschiedenen Spitzen folgende allgemeine Form:

$a \setminus b$	∞	0	$\frac{1}{2}$
∞	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^-+1 & \mathbb{Z}^- \\ 4\mathbb{N} & 2\mathbb{N}_0+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^- & \mathbb{Z}^-+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{N}_0+2 & 2\mathbb{N} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^-+1 & \mathbb{Z}^-+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{N}_0+2 & 2\mathbb{N} \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^- & \mathbb{Z}^-+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{N}_0+2 & 2\mathbb{N} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^-+1 & \mathbb{Z}^- \\ 4\mathbb{N} & 2\mathbb{N}_0+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^-+1 & \mathbb{Z}^- \\ 4\mathbb{N}_0+2 & 2\mathbb{N}_0+1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^- & \mathbb{Z}^-+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{N}_0+2 & 2\mathbb{N}_0+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^-+1 & \mathbb{Z}^- \\ 4\mathbb{N}_0+2 & 2\mathbb{N}_0+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}^-+1 & \mathbb{Z}^- \\ 4\mathbb{N} & 2\mathbb{N}_0+1 \end{pmatrix}$

Die vielfältigen Relationen der Poincaréreihen untereinander spiegeln die zahlreichen Symmetrien der Kloostersummen wieder.

Hilfssatz C.3.3.4.2 (Eigenschaften von Kloostersummen).

Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, c \in \mathbb{N}, m, n \in \mathbb{Z}, \kappa = \kappa(k)$. Dann gibt es folgende Symmetrien der verschiedenen Spitzen:

$$(C.3.3.4.1) \quad \begin{aligned} S_{k,\infty,\infty}(m, n; c) &= S_{k,0,0}(m, n; c), \quad 4 \mid c \\ S_{k,\infty,0}(m, n; c) &= i^{2k} S_{k,0,\infty}(m, n; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\ S_{k,\infty,\frac{1}{2}}(m, n + \kappa\frac{1}{2}; c) &= i^{-2(n+\kappa\frac{1}{2})} S_{k,0,\frac{1}{2}}(m, n + \kappa\frac{1}{2}; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\ S_{k,\frac{1}{2},0}(m + \kappa\frac{1}{2}, n; c) &= i^{-2(m+\kappa\frac{1}{2})} S_{k,\frac{1}{2},0}(m + \kappa\frac{1}{2}, n; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \end{aligned}$$

$$(C.3.3.4.2) \quad S_{k,\infty,\infty}(m, 4n; 2c) = (-1)^{\lfloor \frac{m+3k-1}{2} \rfloor} i^k \sqrt{2} S_{k,\infty,0}(m, n; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4}, k \notin \mathbb{Z}$$

$$(C.3.3.4.3) \quad S_{k,\infty,\infty}(m, 4(n + \kappa\frac{1}{2}); 2c) = (-1)^{\lfloor \frac{m+3k-1}{2} \rfloor} i^k \sqrt{2} S_{k,\infty,\frac{1}{2}}(m, n + \kappa\frac{1}{2}; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4}, k \notin \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned}
(C.3.3.4.4) \quad S_{k,\infty,\infty}(0, n; 2c) &= 2i \left(\frac{-4}{n} \right) S_{k,\infty,0}(0, n; c), \quad k \text{ ungerade}, c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,\infty,\frac{1}{2}}(0, n + \kappa_{\frac{1}{2}}; c) &= S_{k,\infty,0}(0, 4(n + \kappa_{\frac{1}{2}}); c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,\infty,\frac{1}{2}}(m, n + \kappa_{\frac{1}{2}}; c) &= \frac{1}{4} i^{-2(n + \kappa_{\frac{1}{2}})} S_{k,\infty,\infty}(4m, 4(n + \kappa_{\frac{1}{2}}); 4c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,0,\frac{1}{2}}(m, n + \kappa_{\frac{1}{2}}; c) &= \frac{1}{4} S_{k,\infty,\infty}(4m, 4(n + \kappa_{\frac{1}{2}}); 4c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,\frac{1}{2},\infty}(m + \kappa_{\frac{1}{2}}, n; c) &= \frac{1}{4} i^{-2(m + 3\kappa_{\frac{1}{2}})} S_{k,\infty,\infty}(4(m + \kappa_{\frac{1}{2}}), 4n; 4c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,\frac{1}{2},0}(m + \kappa_{\frac{1}{2}}, n; c) &= \frac{1}{4} S_{k,\infty,\infty}(4(m + \kappa_{\frac{1}{2}}), 4n; 4c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(m + \kappa_{\frac{1}{2}}, n + \kappa_{\frac{1}{2}}; c) &= \frac{1}{4} S_{k,\infty,\infty}(4(m + \kappa_{\frac{1}{2}}), 4(n + \kappa_{\frac{1}{2}}); 4c), \quad 4 \mid c
\end{aligned}$$

vertauschen von m und n :

$$\begin{aligned}
S_{k,\infty,\infty}(m, n; c) &= S_{k,\infty,\infty}(n, m; c), \quad 4 \mid c \\
S_{k,\infty,0}(m, n; c) &= S_{k,\infty,0}(n, m; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,0,\infty}(m, n; c) &= S_{k,0,\infty}(n, m; c), \quad c \equiv 2 \pmod{4} \\
S_{k,0,0}(m, n; c) &= S_{k,0,0}(n, m; c), \quad 4 \mid c
\end{aligned}$$

$$(C.3.3.4.5) \quad S_{k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(m + \kappa_{\frac{1}{2}}, n + \kappa_{\frac{1}{2}}; c) = S_{k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(n + \kappa_{\frac{1}{2}}, m + \kappa_{\frac{1}{2}}; c), \quad 4 \mid c$$

komplementäres Gewicht:

$$\begin{aligned}
S_{k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m + \kappa_{\mathfrak{a}}(k), n + \kappa_{\mathfrak{b}}(k); c) &= \overline{S_{2-k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(-m - \kappa_{\mathfrak{a}}(k), -n - \kappa_{\mathfrak{b}}(k); c)} \\
S_{k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m + \kappa_{\mathfrak{a}}(k), n + \kappa_{\mathfrak{b}}(k); c) &= d_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} S_{2-k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(-m - \kappa_{\mathfrak{a}}(k), -n - \kappa_{\mathfrak{b}}(k); c)
\end{aligned}$$

mit

$$d_{k\mathfrak{a}\mathfrak{b}} = \begin{cases} 1, & \mathfrak{a} = \infty, \mathfrak{b} \neq \infty \\ (-1)^{2k}, & \mathfrak{a} \neq \infty, \mathfrak{b} = \infty; \text{ beachte } \kappa_{\mathfrak{a}}(k) = 1 - \kappa_{\mathfrak{a}}(2-k) \text{ für } \mathfrak{a} = \frac{1}{2} \wedge 2 \nmid k \\ i^{2k}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Saliésumme:

$$(C.3.3.4.6) \quad S_{\mathfrak{a}}(n, d) := \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \cos \frac{\pi nb}{a} = \frac{1-i}{4\sqrt{a}} \sum_{t \mid \text{ggT}(a,n)} (1 + \delta_{\text{ungerade}, \frac{a}{t}}) \sqrt{t} S_{k+\frac{1}{2},\infty,\infty} \left(\frac{n^2}{t^2}, d; \frac{4a}{t} \right),$$

falls $a, k, n, d \in \mathbb{N}, 2 \mid k, d \equiv 0, 1 \pmod{4}$, dabei ist $\delta_{\text{ungerade}, n} := \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

Hilfssatz C.3.3.4.3. Sei $(-1)^{[k]} n = d(2^\alpha f)^2$, $d \in \mathbb{D}, f$ ungerade, $\text{Re } t \gg 1, \sigma_{k,\chi}(n) = \sigma_{k,\chi}(-n) := \sum_{t \mid n} \chi(t) t^k$.

Die Dirichletreihen der Kloostersummen sind für halbganzes k :

$$\sum_{\substack{c > 0 \\ 4 \mid c}} \frac{S_{k,\infty,\infty}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} \frac{(1+i^{2k}) \left(1 - \left(\frac{d}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}-t}\right) c_n(t, k) L\left(t - \frac{1}{2}, df^2\right)}{(1-2^{1-2t}) \zeta(2t-1)}, & n \neq 0, \\ \frac{(1+i^{2k}) \zeta(2t-2)}{4^t (1-2^{1-2t}) \zeta(2t-1)}, & n = 0. \end{cases}$$

mit

$$c_n(t, k) = \begin{cases} -2^{-2t}, & (-1)^{[k]} n \equiv 2 \vee 3 \pmod{4} \\ 2^{-2t} + \left(\frac{2}{n}\right) 2^{\frac{3}{2}-3t}, & (-1)^{[k]} n \equiv 1 \pmod{4} \\ 2^{-2t} + 2^{2-2t} c_{n/4}(t, k), & 4 \mid n \end{cases},$$

$$\sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 2 \pmod{4}}} \frac{S_{k, \infty, 0}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} \frac{(1 - (\frac{2}{n}) 2^{\frac{1}{2}-t}) L(t - \frac{1}{2}, df^2)}{2^t (1 - 2^{1-2t}) \zeta(2t-1)}, & n \neq 0, k - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}, \\ \frac{(1 - 2^{2-2t}) \zeta(2t-2)}{2^t (1 - 2^{1-2t}) \zeta(2t-1)}, & n = 0 \end{cases}$$

und für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$

$$\sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 2 \pmod{4}}} \frac{S_{k, \infty, \frac{1}{2}}(0, n + \kappa \frac{1}{2}; c)}{c^t} = \sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 2 \pmod{4}}} \frac{S_{k, \infty, 0}(0, 4(n + \kappa \frac{1}{2}); c)}{c^t} \text{ koeffizientenweise,}$$

Die Kloostersummen zur Spitze ∞ ergeben sich für ungerades k zu

$$\sum_{c \in 4\mathbb{N}} \frac{S_{k, \infty, \infty}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{\text{sign}(n)^i \cdot \sigma_{t-1, \chi_{-4}}(n)}{2^{2t-1} |n|^{t-1} L(t, -4)}, & n \neq 0 \end{cases}$$

Für gerades k ist

$$\sum_{c \in 4\mathbb{N}} \frac{S_{k, \infty, \infty}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} \frac{2^{1-2t} \zeta(t-1)}{(1-2^{-t}) \zeta(t)}, & n = 0 \\ 0, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ \frac{(1 - \frac{2^\alpha(t-1)}{2^{t-1}}) \sigma_{t-1}(\frac{n}{2^\alpha})}{(1-2^{t-1}) |n|^{t-1} \zeta(t)}, & 2^\alpha \parallel n, \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Für ganzes Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$\sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 2 \pmod{4}}} \frac{S_{k, \infty, 0}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} \frac{\mathcal{L}(t-1, \chi_{-4}^k)}{2^t \mathcal{L}(t, \chi_{-4}^k)}, & n = 0 \\ \frac{\sigma_{1-t, \chi_{-4}^k}(n)}{2^t \mathcal{L}(t, \chi_{-4}^k)}, & n \neq 0 \end{cases}$$

mit

$$\mathcal{L}(t, \chi_{-4}^k) = \begin{cases} (1 - 2^{-t}) \zeta(t), & 2 \mid k \\ L(t, -4), & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Für gerades Gewicht $k \in 2\mathbb{Z}$ ist

$$\sum_{\substack{c>0 \\ c \equiv 2 \pmod{4}}} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \infty}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} \frac{(1-2^{1-t}) \zeta(t-1)}{(2^t-1) \zeta(t)}, & n = 0 \\ \frac{(-1)^n \sigma_{1-t}(\frac{n}{2^\alpha})}{(2^t-1) \zeta(t)}, & n \neq 0, 2^\alpha \parallel n \end{cases},$$

$$\sum_{\substack{c>0 \\ 4 \mid c}} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(0, n; c)}{c^t} = \begin{cases} \frac{\zeta(t-1)}{2^{t-1} (2^t-1) \zeta(t)}, & n = 0 \\ 0, & n \text{ ungerade} \\ \frac{(1+2^\alpha(1-t)(1-2^t)) \sigma_{1-t}(\frac{n}{2^\alpha})}{(2^t-1)(2^{t-1}-1) \zeta(t)}, & n \neq 0, 2^\alpha \parallel n, \alpha > 0 \end{cases};$$

vgl. Hilfssatz C.3.3.4.2 für die übrigen Spitzen.

Die Beweise sind Standard. Gleichung (C.3.3.4.6) ist [Kohnen 3, Prop. 5] mit $D = 1$ bzw. [Bri O 3, Prop. 3.2].

C.3.3.5. *Poincaréreihen zur Gruppe $\Gamma_0(4)$.*

Für das Gewicht k nehmen wir an: $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Für die regulären Spitzen ∞ und 0 ist das in [Iwaniec 3, Ch. 3, The Eisenstein and the Poincaré Series] zu finden. Die Funktion

$$F_{k,\infty}(m, z) := \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} q^{-m} |k\gamma(z) \in M_k^1(\Gamma_0(4)), k > 1$$

hat den Hauptteil q^{-m} in der Fourierentwicklung um ∞ . Nach [Lehner, Ch. VIII 3F] kann man dasselbe für die Spitze $\mathfrak{a} = 0 \vee \frac{1}{2}$ durch die Poincaréreihe

$$F_{k,\mathfrak{a}}(m, z) = i^{3k} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4)} \bar{v}_k(\tau_{\mathfrak{a}}\gamma) (cz + d)^{-k} e((\kappa_{\mathfrak{a}} - m)\gamma z)$$

erreichen; dabei ist $v_k\left(\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \left(\left(\frac{C}{D}\right)\varepsilon_D^{-1}\right)^{2k}$ der übliche Theta-Multiplikator. Es ist entscheidend, dass der Multiplikator hier wie auch im folgenden unabhängig vom Repräsentantensystem der Nebenklassen ist. Beachte außerdem, dass $\tau_{\mathfrak{a}}^{-1}\Gamma_\infty\tau_{\mathfrak{a}} = \Gamma_\infty$ für alle Spitzen \mathfrak{a} .

Für negatives Gewicht definiert man die Poincaréreihe wie in [Fay] bzw. [Bruinier 1, 1.3 Non-holomorphic Poincaré series] mit der nicht-holomorphen Eigenfunktion

$$\varphi_m(z) := \frac{(4\pi my)^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma(2-k)} M_{-\frac{k}{2}, \frac{1-k}{2}}(4\pi my) e(-mx)$$

des Laplaceoperators Δ_k .

Definition C.3.3.5.1. [Iwaniec 3, Ch. 3,4], [Bruinier 1]

Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0, \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} P_{k,\mathfrak{a}}(m, \cdot) |k\tau_{\mathfrak{b}}(z) &:= c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}}} \bar{v}_k(\tau_{\mathfrak{a}}\gamma\tau_{\mathfrak{b}}^{-1}) (cz + d)^{-k} e((m + \kappa_{\mathfrak{a}})\gamma z), m + \kappa_{\mathfrak{a}} > 0; \\ F_{k,\mathfrak{a}}(m, \cdot) |k\tau_{\mathfrak{b}}(z) &:= c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}}} \bar{v}_k(\tau_{\mathfrak{a}}\gamma\tau_{\mathfrak{b}}^{-1}) (cz + d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_{\mathfrak{a}}}(\gamma z), m \in \mathbb{N}, \\ F_{k,\mathfrak{a}}(0, \cdot) |k\tau_{\mathfrak{b}}(z) &:= E_{k,\mathfrak{a}} |k\tau_{\mathfrak{b}}(z), \kappa_{\mathfrak{a}} \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} &= \begin{cases} i^k, & \text{für } \mathfrak{a} = \infty, \mathfrak{b} \neq \infty, \\ i^{3k}, & \text{für } \mathfrak{a} \neq \infty, \mathfrak{b} = \infty, \\ 1, & \text{sonst;} \end{cases} \\ \varphi_m(z) &:= \begin{cases} q^{-m}, & k \geq \frac{3}{2}, \\ \frac{\gamma(1-k, 4\pi my)}{\Gamma(1-k)} q^{-m}, & k \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

z.B.

$$\begin{aligned} P_{k,0}(m, \cdot) |k\tau_0(z) &:= P_{k,\infty}(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} \left(\left(\frac{c}{d}\right)\varepsilon_d\right)^{-2k} (cz + d)^{-k} e(m\gamma z), \\ P_{k,\frac{1}{2}}(m, \cdot) |k\tau_{\frac{1}{2}}(z) &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} \left(\left(\frac{-b}{a+2b}\right)\varepsilon_{a+2b}\right)^{-2k} (cz + d)^{-k} e\left(\left(m + \kappa_{\frac{1}{2}}\right)\gamma z\right), \\ F_{k,0}(m, \cdot) |k\tau_0(z) &:= F_{k,\infty}(m, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} \left(\left(\frac{c}{d}\right)\varepsilon_d\right)^{-2k} (cz + d)^{-k} \varphi_m(\gamma z), \\ F_{k,\frac{1}{2}}(m, \cdot) |k\tau_{\frac{1}{2}}(z) &:= \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \setminus \Gamma_0(4)} \left(\left(\frac{-b}{a+2b}\right)\varepsilon_{a+2b}\right)^{-2k} (cz + d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_{\frac{1}{2}}}(\gamma z). \end{aligned}$$

Bemerkung. Der Faktor $c_{\mathbf{a}\mathbf{b}}$ erklärt sich daher, dass die *slash*-Operatoren (völlig willkürliche) Drehfaktoren enthalten (Definition C.3.2.2.1), die keinen weiteren Zweck haben, als die Fourierreihen reell zu machen.

$$f|_k\tau_{\mathbf{b}}(z) = (-2iz)^{-k} f(\tau_{\mathbf{b}}z) = \frac{i^k}{(2z)^k} f(\tau_{\mathbf{b}}z), \quad \mathbf{b} \neq \infty$$

mit der Standardquadratwurzel (PARI); entsprechend in den anderen Fällen.

Hilfssatz C.3.3.5.2. Für Spitzenformen $f \in S_k(\Gamma_0(4))$ ist

$$\langle f, P_{k,\mathbf{a}}(m, \cdot) \rangle = \frac{\Gamma(k-1)}{6(4\pi(m+\kappa_{\mathbf{a}}))^{k-1}} c_m^{(\mathbf{a})}, \quad \text{falls } f|_{\tau_{\mathbf{a}}}(z) = q^{\kappa_{\mathbf{a}}} \sum_n c_n^{(\mathbf{a})} q^n.$$

BEWEIS. vgl. [Lehner, Ch.VIII 4. The Hilbert space of cusp forms]. □

Zur Berechnung der Fourierkoeffizienten braucht man verallgemeinerte Kloostersummen, vgl. Abschnitt C.3.3.4.

Hilfssatz C.3.3.5.3. Für $4 < k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $m + \kappa_{\mathbf{a}} > 0$, $n_{\mathbf{b}} = n + \kappa_{\mathbf{b}}$ ist

$$\begin{aligned} P_{k,\mathbf{a}}(m, \cdot)|_k\tau_{\mathbf{b}}(z) &= \delta_{\mathbf{a}\mathbf{b}} q^{m+\kappa_{\mathbf{b}}} + \frac{2\pi}{i^k} c_{\mathbf{a}\mathbf{b}} \\ &\cdot \sum_{n_{\mathbf{b}} > 0} \left(\frac{n_{\mathbf{b}}}{m + \kappa_{\mathbf{a}}} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_{\mathbf{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathbf{b}}}} \frac{S_{k,\mathbf{a},\mathbf{b}}(m + \kappa_{\mathbf{a}}, n_{\mathbf{b}}; c)}{c} J_{k-1} \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{(m + \kappa_{\mathbf{a}}) n_{\mathbf{b}}} \right) q^{n_{\mathbf{b}}} \\ P_{k,\infty}(m, z) &= P_{k,0}(m, \cdot)|_k\tau_0(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \delta_{m,n} + \frac{\pi}{2i^k} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k,\infty,\infty}(m, n; 4c)}{c} J_{k-1} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) \right\} q^n \\ P_{k,\frac{1}{2}}(m, \cdot)|_k\tau_{\frac{1}{2}}(z) &= q^{\kappa} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n+\kappa > 0}} \left\{ \delta_{m,n} \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{2i^k} \left(\frac{n + \kappa}{m + \kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=0}^{\infty} \frac{S_{k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(m + \kappa, n + \kappa; 4c)}{c} J_{k-1} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{(m + \kappa)(n + \kappa)} \right) \right\} q^{n+\kappa}, \quad \kappa = \kappa_{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

mit den Kloostersummen $S_{k,\mathbf{a},\mathbf{b}}(m + \kappa_{\mathbf{a}}, n_{\mathbf{b}}; c)$ aus Abschnitt C.3.3.4.

Die $P_{k,\mathbf{a}}(m, z)$, $m \in \mathbb{N}$ spannen für alle Spitzen $\mathbf{a} \in \{\infty, 0, \frac{1}{2}\}$ den Raum der Spitzenformen S_k auf. Formen $P_{k,\frac{1}{2}}(m, z)$ existieren erst ab $k \geq 6$.

BEWEIS. [Lehner, Ch VIII, Forms of negative dimension], [Duke 3]. □

Hilfssatz C.3.3.5.4. Der m -te Fourierkoeffizient von $n_{\mathbf{b}}^{k-1} P_{k,\mathbf{a}}(n, z)$ ist gleich dem n -ten Fourierkoeffizient von $(m + \kappa_{\mathbf{a}})^{k-1} P_{k,\mathbf{b}}(m, z)$ für $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \notin \{(\frac{1}{2}, 0), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \infty), (\infty, \frac{1}{2})\}$.

Bemerkung. Die Fourierreihen konvergieren schon ab $k > 1$ und ohne Beweis sei hier vermerkt, dass anscheinend

$$P_{1,\infty}(m, z) = 2c_m \theta_3^2(z) \quad \text{mit } \theta_3^2(z) = \sum_m c_m q^m,$$

$$P_{k,\infty}(m, z) = 0 \quad \text{für } \frac{3}{2} \leq k \leq 4.$$

Satz C.3.3.5.5. Mit den Bezeichnungen aus Definition C.3.3.5.1 sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \{\infty, 0, \frac{1}{2}\}$, $\kappa = \kappa_{\frac{1}{2}}$, $m_{\mathbf{x}} = m - \kappa_{\mathbf{x}}$, $n_{\mathbf{x}} = n + \kappa_{\mathbf{x}}$ für $\mathbf{x} = \mathbf{a} \vee \mathbf{b}$. Für $k \geq 2$ ist $F_{k,\mathbf{a}}(m, z)$ aus dem Raum der schwach-holomorphen Modulformen $M_{k,\mathbf{a}}^1 = M_{k,\mathbf{a}}^1(\Gamma_0(4))$ vom Gewicht k mit Polen nur in der Spitze \mathbf{a} für die Gruppe $\Gamma_0(4)$ mit

Fourierreihe

$$\begin{aligned}
F_{k,a}(m, \cdot) |_{k\tau_b}(z) &= \delta_{ab} q^{-m_a} + \frac{2\pi}{i^k} c_{ab} \cdot \\
&\cdot \sum_{n_b > 0}^{\infty} \left(\frac{n_b}{m_a} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b}} \frac{S_{k,a,b}(-m_a, n_b; c)}{c} I_{k-1} \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{m_a n_b} \right) q^{n_b} \\
F_{k,\infty}(m, z) &= F_{k,0}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = q^{-m} + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k,\infty,\infty}(-m, n; 4c)}{c} I_{k-1} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) q^n, \\
F_{k,\infty}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) &= F_{k,0}(m, z) = i^{2k} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k,0,\infty}(-m, n; 4c-2)}{2c-1} I_{k-1} \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{mn} \right) q^n, \\
F_{k,\frac{1}{2}}(m, z) &= i^{2k} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m-\kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{S_{k,\frac{1}{2},\infty}(\kappa-m, n; 2c)}{c} I_{k-1} \left(\frac{2\pi}{c} \sqrt{(m-\kappa)n} \right) q^n, \\
F_{k,\frac{1}{2}}(m, \cdot) |_{k\tau_{\frac{1}{2}}}(z) &= q^{\kappa} \left\{ q^{-m} + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n+\kappa > 0}}^{\infty} \left(\frac{n+\kappa}{m-\kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k,\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\kappa-m, n+\kappa; 4c)}{c} \right. \\
&\cdot \left. I_{k-1} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{(m-\kappa)(n+\kappa)} \right) q^n \right\}.
\end{aligned}$$

Für $k = \frac{3}{2}$ ist

$$\begin{aligned}
F_{\frac{3}{2},\infty}(m, z) &= F_{\frac{3}{2},0}(m, \cdot) |_{\frac{3}{2}\tau_0}(z) \\
&= q^{-m} - \frac{1+i}{2\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{\frac{3}{2},\infty,\infty}(-m, n; 4c)}{\sqrt{c}} \sinh \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) q^n + \frac{4\delta_{\square,m}}{\sqrt{y}} \left\{ Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(4)} + 2Q^{(9)} + \dots \right\}. \\
F_{\frac{3}{2},0}(m, z) &= F_{\frac{3}{2},\infty}(m, \cdot) |_{\frac{3}{2}\tau_0}(z) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{m}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{\frac{3}{2},0,\infty}(-m, n; 4c-2)}{\sqrt{2c-1}} \sinh \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{mn} \right) q^n + \frac{4\delta_{\square,m}}{\sqrt{y}} \left\{ Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(4)} + 2Q^{(9)} + \dots \right\}. \\
F_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(m, z) &= q^{-m} + \delta_{2\Delta+1,m} - \frac{i}{\sqrt{m-\frac{3}{4}}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{c=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{S_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\infty}(\frac{3}{4}-m, n; 2c)}{\sqrt{c}} \sinh \left(\frac{2\pi}{c} \sqrt{\left(m-\frac{3}{4}\right)n} \right) q^n \\
&- \frac{8\delta_{2\Delta+1,m}}{\sqrt{y}} \left\{ Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(4)} + 2Q^{(9)} + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

Folgende Korrektur

$$\begin{aligned}
&F_{\frac{3}{2},\infty}(m, z) - 2\delta_{\square,m} E_{\frac{3}{2},\infty}, \\
&F_{\frac{3}{2},0}(m, z) - 2\delta_{\square,m} E_{\frac{3}{2},\infty}, \\
&F_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(m, z) - \delta_{2\Delta+1,m} \left(E_{\frac{3}{2},0} - E_{\frac{3}{2},\infty} \right)
\end{aligned}$$

führt auf schwach-holomorphe Formen aus $M_{\frac{3}{2}}^1$.

$$\begin{aligned}
&F_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}(m, \cdot) \Big|_{\frac{3}{2}\tau_{\frac{1}{2}}}(z) - q^{\frac{3}{4}-m} \\
&:= -\frac{1+i}{2\sqrt{m-\frac{3}{4}}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\frac{3}{4}-m, n+\frac{3}{4}; 4c)}{\sqrt{c}} \sinh \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\left(m-\frac{3}{4}\right)\left(n+\frac{3}{4}\right)} \right) q^{n+\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

Für $k = 1$ gibt es holomorphe Formen:

$$F_{1,a}(m, \cdot) |_{1\tau_b}(z) = \delta_{ab} q^{-m_b} + \delta_{0\kappa_b} c_{ab} \frac{\pi}{i} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{1,a,b}(-m_a, 0; c)}{c} +$$

$$+ c_{ab} \frac{2\pi}{i} \sum_{n_b > 0} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b}} \frac{S_{1,a,b}(-m_a, n_b; c)}{c} I_0 \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{m_a n_b} \right) q^{n_b}.$$

Für $k = \frac{1}{2}$ sei

$$F_{\frac{1}{2}, \infty}(m, z) = F_{\frac{1}{2}, 0}(m, \cdot) |_{\frac{1}{2}\tau_0}(z) := q^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-i}{2\sqrt{n}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{\frac{1}{2}, \infty, \infty}(-m, n; 4c)}{\sqrt{c}} \sinh \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) q^n \in M_{\frac{1}{2}, \infty}^1,$$

$$F_{\frac{1}{2}, 0}(m, z) = F_{\frac{1}{2}, \infty}(m, \cdot) |_{\frac{1}{2}\tau_0}(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{\frac{1}{2}, 0, \infty}(-m, n; 4c-2)}{\sqrt{2c-1}} \sinh \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{mn} \right) q^n \in M_{\frac{1}{2}, 0}^1,$$

$$F_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(m, z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{c=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \infty}(\frac{1}{4} - m, n; 2c)}{\sqrt{c}} \sinh \left(\frac{2\pi}{c} \sqrt{\left(m - \frac{1}{4}\right) n} \right) q^n \in M_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^1,$$

$$\text{dabei ist } \frac{1}{\sqrt{n}} \sinh \left(\frac{2\pi}{c} \sqrt{\left(m - \frac{1}{4}\right) n} \right) \Big|_{n=0} := \frac{2\pi}{c} \sqrt{m - \frac{1}{4}};$$

$$F_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(m, \cdot) |_{\frac{1}{2}\tau_{\frac{1}{2}}}(z) = q^{\frac{1}{4}-m} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-i}{2\sqrt{n+\frac{1}{4}}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\frac{1}{4} - m, n + \frac{1}{4}; 4c)}{\sqrt{c}} \sinh \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{\left(m - \frac{1}{4}\right) \left(n + \frac{1}{4}\right)} \right) q^{n+\frac{1}{4}}.$$

Für $k \leq 0$ ist $F_{k,a}(m, z)$ eine harmonische schwache Maaßform $\in \widehat{\mathbb{S}}_k$ vom Gewicht k für die Gruppe $\Gamma_0(4)$ mit Fourierreihe

$$F_{k,a}(m, \cdot) |_{k\tau_b}(z) = \delta_{ab} q^{-m_b} + \delta_{0\kappa_b} c_{ab} \frac{(2\pi)^{2-k} m_a^{1-k}}{i^k \Gamma(2-k)} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b}} \frac{S_{k,a,b}(-m_a, 0; c)}{c^{2-k}}$$

$$+ c_{ab} \frac{2\pi}{i^k} \sum_{n_b > 0} \left(\frac{n_b}{m_a} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b}} \frac{S_{k,a,b}(-m_a, n_b; c)}{c} I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{m_a n_b} \right) q^{n_b}$$

$$+ \sum_{n < 0} \left\{ -\delta_{m, |n|} \delta_{ab} + \frac{2\pi}{i^k} c_{ab} \left(\frac{|n_b|}{m_a} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b}} \frac{S_{k,a,b}(-m_a, n_b; c)}{c} J_{1-k} \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{m_a |n_b|} \right) \right\} \cdot q^{n_b} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi |n_b| y)}{\Gamma(1-k)}.$$

$$F_{k, \infty}(m, z) = F_{k, 0}(m, \cdot) |_{k\tau_0}(z) = q^{-m} + \frac{(\frac{\pi}{2})^{2-k} m^{1-k}}{i^k \Gamma(2-k)} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, 0; 4c)}{c^{2-k}}$$

$$+ \frac{\pi}{2i^k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, n; 4c)}{c} I_{1-k} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) q^n$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\delta_{m, n} + \frac{\pi}{2i^k} \left(\frac{n}{m} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, -n; 4c)}{c} J_{1-k} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) \right\} q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)},$$

$$F_{k, \frac{1}{2}}(m, z) = q^{-m} + \frac{i^{2k} \pi^{2-k} (m - \kappa)^{1-k}}{\Gamma(2-k)} \sum_{\substack{c=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \infty}(\kappa - m, 0; 2c)}{c^{2-k}}$$

$$\begin{aligned}
& + i^{2k} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m-\kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \infty}(\kappa-m, n; 2c)}{c} I_{1-k} \left(\frac{2\pi}{c} \sqrt{(m-\kappa)n} \right) q^n \\
& + i^{2k} \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{m-\kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c=1 \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \infty}(\kappa-m, -n; 2c)}{c} J_{1-k} \left(\frac{2\pi}{c} \sqrt{(m-\kappa)n} \right) q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)}, \\
F_{k, \frac{1}{2}}(m, \cdot) |_{k\tau_{\frac{1}{2}}}(z) & = q^\kappa \left\{ q^{-m} + \varepsilon(2|k) \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-k} (m-\kappa)^{1-k}}{i^k \Gamma(2-k)} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\kappa-m, 0; 4c)}{c^{2-k}} \right. \\
& + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}_0 \\ n+\kappa > 0}}^{\infty} \left(\frac{n+\kappa}{m-\kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\kappa-m, n+\kappa; 4c)}{c} I_{1-k} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{(m-\kappa)(n+\kappa)} \right) q^n \\
& + \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -\delta_{m,n} + \frac{\pi}{2i^k} \left(\frac{n-\kappa}{m-\kappa} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(\kappa-m, \kappa-n; 4c)}{c} J_{1-k} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{(m-\kappa)(n-\kappa)} \right) \right\} \right. \\
& \cdot \left. q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi(n-\kappa)y)}{\Gamma(1-k)} \right\}.
\end{aligned}$$

Für $k > -2$ sind die Reihen holomorph, also in $M_{k, \mathfrak{a}}^1$.

Die $F_{k, \mathfrak{a}}(m, z)$, $m > 0$, $k \neq \frac{3}{2}$ erzeugen zusammen mit M_k die Modulformen aus $\widehat{\mathbb{S}}_k$. Für $k = \frac{3}{2}$ kommt noch die Eisensteinreihe $G_{\frac{3}{2}}(z)$ dazu.

Die $P_{k, \mathfrak{a}}(m, z)$, $m > 0$ spannen den Raum der Spitzenformen S_k auf.

Wie erhält man harmonische schwache Maaßformen, deren nicht-holomorpher Anteil in der Spitze exponentiell anwächst? Für negatives Gewicht gibt es keine Probleme: Ist $k \in \mathbb{Z}^-$, so liefert der Flipping-Operator¹⁵ Θ durch Vertauschung von positiven und negativen Fourierkoeffizienten die gewünschten Modulformen, s. Hilfssatz C.3.5.3. Für $\Gamma_0(4)$ und $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $k \leq \frac{1}{2}$ ist das auch möglich:

Definition C.3.3.5.6. Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $k < 1$, $m \in \mathbb{Z}^-$,

$$\begin{aligned}
\varphi_m(z) & := \frac{(4\pi m y)^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma(2-k)} M_{-\frac{k}{2}, \frac{1-k}{2}}(4\pi m y) e(-mx) = \frac{\gamma(1-k, 4\pi m y)}{\Gamma(1-k)} q^{-m}, \\
F_{k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) |_{k\tau_{\mathfrak{b}}}(z) & := -i^{2k} c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \sum_{\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{\infty} \setminus \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}}} \bar{v}_k(\tau_{\mathfrak{a}} \gamma \tau_{\mathfrak{b}}^{-1})(cz+d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_{\mathfrak{a}}}(\gamma z).
\end{aligned}$$

Satz C.3.3.5.7. Unter den Voraussetzungen von Satz C.3.3.5.5 mit $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $k < 1$, $m_{\mathfrak{a}} = m - \kappa_{\mathfrak{a}} < 0$, $n_{\mathfrak{b}} = n + \kappa_{\mathfrak{b}}$ ist dann

$$\begin{aligned}
F_{k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) |_{k\tau_{\mathfrak{b}}}(z) & = -\delta_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} i^{2k} \frac{\gamma(1-k, 4\pi m_{\mathfrak{a}} y)}{\Gamma(1-k)} q^{-m_{\mathfrak{a}}} + \delta_{0\kappa_{\mathfrak{b}}} \frac{(2\pi)^{2-k} c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} (-m_{\mathfrak{a}})^{1-k}}{i^k \Gamma(2-k)} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}}}} \frac{S_{k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}}(-m_{\mathfrak{a}}, 0; c)}{c^{2-k}} \\
& + \frac{2\pi c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{i^k} \sum_{n_{\mathfrak{b}} > 0} \left(\frac{n_{\mathfrak{b}}}{-m_{\mathfrak{a}}} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}}}} \frac{S_{k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}}(-m_{\mathfrak{a}}, n_{\mathfrak{b}}; c)}{c} J_{1-k} \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{-m_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{b}}} \right) q^{n_{\mathfrak{b}}} \\
& + \frac{2\pi c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}}{i^k} \sum_{n < 0} \left(\frac{n_{\mathfrak{b}}}{m_{\mathfrak{a}}} \right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{\substack{c > 0 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_{\mathfrak{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathfrak{b}}}} \frac{S_{k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}}(-m_{\mathfrak{a}}, n_{\mathfrak{b}}; c)}{c} I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{c} \sqrt{m_{\mathfrak{a}} n_{\mathfrak{b}}} \right) q^{n_{\mathfrak{b}}} \frac{\Gamma(1-k, -4\pi n_{\mathfrak{b}} y)}{\Gamma(1-k)}.
\end{aligned}$$

Die Poincaréreihen $F_{k, \mathfrak{a}}(m, z)$, $m \neq 0$ und die Eisensteinreihen $E_{k, \mathfrak{a}}(z)$ spannen den Raum der harmonischen schwachen Maaßformen $\widehat{\mathbb{M}}_k$, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $k < 1$ auf.

¹⁵Definition C.3.5.1

Bemerkung. Für positives $k \in \mathbb{N}$, $m < 0$ ist

$$F_{k,a}(m, z) = P_{k,a}(-m, z).$$

BEWEIS DER SÄTZE C.3.3.5.5 UND C.3.3.5.7.

vgl. [Fay], [Bri O 3, (2.16)], [Bruinier Funke 2, Remark 3.10], [Bri Ka Rho, Proposition 2].

Die Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b$ haben für die verschiedenen Spitzen folgende allgemeine Form ($a, b < 0; c, d > 0$)

$a \setminus b$	∞	0	$\frac{1}{2}$
∞	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & \mathbb{Z} \\ 4\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{Z}+2 & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{Z}+2 & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}$
0	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{Z}+2 & 2\mathbb{Z} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & \mathbb{Z} \\ 4\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & \mathbb{Z} \\ 4\mathbb{Z}+2 & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z} & \mathbb{Z}+\frac{1}{2} \\ 4\mathbb{Z}+2 & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & \mathbb{Z} \\ 4\mathbb{Z}+2 & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2\mathbb{Z}+1 & \mathbb{Z} \\ 4\mathbb{Z} & 2\mathbb{Z}+1 \end{pmatrix}$

und diese Form ist invariant bei Multiplikation von links oder rechts mit Γ_∞ . Daher gibt es eine Doppelnebenklassenzerlegung von $\tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b$ bzgl. Γ_∞ . Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. Ähnlich wie in [Iwaniec 3, Ch. 3, The Eisenstein and the Poincaré Series] erhält man¹⁶:

$$\begin{aligned} c_{ab}^{-1} F_{ka}(m, \cdot) |_{k\tau_b}(z) &= \sum_{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_\infty \setminus \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b} \bar{v}_k(\tau_a M \tau_b^{-1})(cz+d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_a}(Mz) \\ &= \delta_{ab} \varphi_{m-\kappa_a}(z) + \sum_{1 \neq M \in \Gamma_\infty \setminus \tau_a^{-1} \Gamma_0(4) \tau_b / \Gamma_\infty} \bar{v}_k(\tau_a M \tau_b^{-1}) I_M(z) \end{aligned}$$

mit ($c > 0$)

$$\begin{aligned} I\left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right)(z) &:= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (c(z+n)+d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_a}\left(\frac{a(z+n)+b}{c(z+n)+d}\right) e(-\kappa_b n) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}_{-\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} (c(z+v)+d)^{-k} \varphi_{m-\kappa_a}\left(\frac{a}{c} - \frac{1}{c(c(z+v)+d)}\right) e(-(n+\kappa_b)v) dv \end{aligned}$$

und

$$(C.3.3.5.1) \quad \varphi_m(z) := \frac{(4\pi my)^{-\frac{k}{2}}}{\Gamma(2s)} M_{-\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi my) e(-mx), \operatorname{Re} s > \frac{1}{2};$$

s wird später festgelegt. Variablensubstitution $v = \xi - x - \frac{d}{c}$ ergibt

$$I\left(\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right)(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e\left((n+\kappa_b)x + \frac{(n+\kappa_b)d - (m-\kappa_a)a}{c}\right) \frac{(4\pi(m-\kappa_a)y)^{-\frac{k}{2}}}{i^k c} \mathcal{I}_c(m-\kappa_a, n+\kappa_b)$$

mit

$$\mathcal{I}_c(m, n) = \frac{c}{\Gamma(2s)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\xi+iy}{-\xi+iy}\right)^{-\frac{k}{2}} M_{-\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}\left(\frac{4\pi my}{c^2(\xi^2+y^2)}\right) e\left(\frac{m\xi}{c^2(\xi^2+y^2)} - n\xi\right) d\xi$$

Das Integral erfüllt eine Differenzialgleichung, deren allgemeine Lösung bekannt ist. Die Taylorentwicklung um $m=0$ ergibt die Anfangsbedingung, vgl. [Hejhal 1, S. 357] bzw. Beweis zu [Bruinier 1, Prop. 1.9]

$$(C.3.3.5.2) \quad \mathcal{I}_c(m, n) = \begin{cases} \frac{2\pi\sqrt{-\frac{m}{n}}}{\Gamma(s-\frac{k}{2})} J_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{|c|}\sqrt{-mn}\right) W_{-\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(-4\pi ny), & n < 0; \\ \frac{4\pi^{1+s} m^s |c|^{1-2s} y^{1-s}}{(2s-1)\Gamma(s+\frac{k}{2})\Gamma(s-\frac{k}{2})}, & n = \kappa_b = 0; \\ \frac{2\pi\sqrt{\frac{m}{n}}}{\Gamma(s+\frac{k}{2})} I_{2s-1}\left(\frac{4\pi}{|c|}\sqrt{mn}\right) W_{\frac{k}{2}, s-\frac{1}{2}}(4\pi ny), & n > 0. \end{cases}$$

¹⁶ $v_k(\tau_a M \tau_b^{-1} T^n) = v_k(\tau_a M \tau_b^{-1}) e(\kappa_b n)$

Für $k < 1, s = 1 - \frac{k}{2}, m > 0$ ist $\varphi_{m_a}(z) = \frac{\gamma(1-k, 4\pi m_a y)}{\Gamma(1-k)} q^{-m_a}$ und

$$\mathcal{I}_c(m - \kappa_a, n + \kappa_b) = \begin{cases} 2\pi \sqrt{-\frac{m-\kappa_a}{n+\kappa_b}} (4\pi |n + \kappa_b| y)^{\frac{k}{2}} J_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{-(m - \kappa_a)(n + \kappa_b)} \right) e^{-2\pi(n+\kappa_b)y} \frac{\Gamma(1-k, -4\pi(n+\kappa_b)y)}{\Gamma(1-k)}, & n < 0; \\ \frac{4\pi^{2-\frac{k}{2}} (m-\kappa_a)^{1-\frac{k}{2}} |c|^{k-1} y^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(2-k)}, & n = \kappa_b = 0; \\ 2\pi \sqrt{\frac{m-\kappa_a}{n+\kappa_b}} (4\pi (n + \kappa_b) y)^{\frac{k}{2}} I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{(m - \kappa_a)(n + \kappa_b)} \right) e^{-2\pi(n+\kappa_b)y}, & n + \kappa_b > 0. \end{cases}$$

Für $k < 1, s = 1 - \frac{k}{2}, m < 0$ ist das Integral¹⁷

$$\mathcal{I}_c(m - \kappa_a, n + \kappa_b) = \begin{cases} 2\pi i^{2-k} \sqrt{\frac{m-\kappa_a}{n+\kappa_b}} (4\pi |n + \kappa_b| y)^{\frac{k}{2}} I_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{(m - \kappa_a)(n + \kappa_b)} \right) e^{-2\pi(n+\kappa_b)y} \frac{\Gamma(1-k, -4\pi(n+\kappa_b)y)}{\Gamma(1-k)}, & n < 0; \\ \frac{4\pi^{2-\frac{k}{2}} i^{2-k} |m-\kappa_a|^{1-\frac{k}{2}} |c|^{k-1} y^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(2-k)}, & n = \kappa_b = 0; \\ 2\pi i^{2-k} \sqrt{-\frac{m-\kappa_a}{n+\kappa_b}} (4\pi (n + \kappa_b) y)^{\frac{k}{2}} J_{1-k} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{-(m - \kappa_a)(n + \kappa_b)} \right) e^{-2\pi(n+\kappa_b)y}, & n + \kappa_b > 0. \end{cases}$$

Für $k \geq 2, s = \frac{k}{2}$ ist $\varphi_{m_a}(z) = \frac{1}{\Gamma(k)} q^{-m_a}$ und

$$\mathcal{I}_c(m - \kappa_a, n + \kappa_b) = \begin{cases} 0, & n + \kappa_b \leq 0; \\ \frac{2\pi \sqrt{\frac{m-\kappa_a}{n+\kappa_b}}}{\Gamma(k)} (4\pi (n + \kappa_b) y)^{\frac{k}{2}} I_{k-1} \left(\frac{4\pi}{|c|} \sqrt{(m - \kappa_a)(n + \kappa_b)} \right) e^{-2\pi(n+\kappa_b)y}, & n + \kappa_b > 0. \end{cases}$$

Für $m \in \mathbb{N}$ erhält man die F - und für $m < 0, k > 2$ die P -Poincaréreihen, vgl. Definition C.3.3.4.1 der Kloostersummen. Für Gewicht $k = \frac{3}{2}, s = 1 - \frac{k}{2} = \frac{1}{4}$ sind die Fourierreihen auch noch konvergent, s. [Br Jen On]. Allerdings ergeben sich für $F_{\frac{3}{2}}(m^2, z)$ nicht-holomorphe Anteile, die nur von der Eisensteinreihe $E_{\frac{3}{2}, \infty}(z)$ kommen können. Um holomorphe Formen zu erhalten, muss man Korrekturen vornehmen¹⁸:

$$(C.3.3.5.3) \quad \begin{aligned} & F_{\frac{3}{2}, \infty}(m, z) - 2\delta_{\square, m} E_{\frac{3}{2}, \infty}(z), \\ & F_{\frac{3}{2}, 0}(m, z) - 2\delta_{\square, m} E_{\frac{3}{2}, 0}(z), \end{aligned}$$

$$(C.3.3.5.4) \quad F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, z) - \delta_{2\Delta+1, m} \left(E_{\frac{3}{2}, 0}(z) - E_{\frac{3}{2}, \infty}(z) \right).$$

Der nicht-holomorphe Anteil ist bis auf Vielfache eindeutig (Eichlerintegral von θ_3), d.h.

$$(C.3.3.5.5) \quad F_{\frac{3}{2}, \infty}(m, z) + a_m E_{\frac{3}{2}, \infty}(z) \in M_{\frac{3}{2}}^1.$$

Der Projektionsoperator $\frac{3}{2}\text{pr}$ aus Abschnitt C.3.2.4 wirkt auf Modulformen f vom Gewicht $\frac{3}{2}$ mit den Entwicklungen

$$f(z) = \sum_n a_n q^n, \quad f|\tau_0(z) = \sum_n a_n^{(0)} q^n, \quad f|\tau_{\frac{1}{2}}(z) = \sum_{n \equiv \frac{3}{4} \pmod{1}} a_n^{(\frac{1}{2})} q^n$$

folgendermaßen:

$$\frac{3}{2}f|\text{pr} = \sum_{n \equiv 0,3 \pmod{4}} a_n q^n - \sum_{n \equiv 0 \pmod{4}} a_n^{(0)} q^n - \sum_{n \equiv 3 \pmod{4}} a_n^{(\frac{1}{2})} q^n.$$

Daher wird die Modulform (C.3.3.5.5) auf

$$\frac{3}{2}F_{\frac{3}{2}, \infty}(m, z)|\text{pr} - 12a_m G_{\frac{3}{2}}(z) \in M_{\frac{3}{2}}^{1+}$$

abgebildet. Nach [Br Jen On, Proposition 3.6] ist $a_m = -2\delta_{\square, m}$.

Für vorgegebenen Hauptteil in allen drei Spitzen sind die Formen eindeutig, daher ist

$$F_{\frac{3}{2}, 0}(m, z) = F_{\frac{3}{2}, \infty}(m, \cdot)|\tau_0(z)$$

und die zweite Zeile (C.3.3.5.3) folgt aus der ersten.

Für die dritte Zeile (C.3.3.5.4) kann man ähnlich argumentieren:

$$f = F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, z) = \sum_n a_n q^n = F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, z) + b_m \left(E_{\frac{3}{2}, 0}(z) - E_{\frac{3}{2}, \infty}(z) \right) \in M_{\frac{3}{2}}^{1+}$$

¹⁷Die Funktion $\gamma(1-k, 4\pi my)$, $m < 0$ ist ganz für $k \in \mathbb{Z}$, eindeutig für halbganzes $k < 0$ auf der Riemannschen Fläche der \sqrt{m} -Funktion und wird in PARI und MATHEMATICA so interpretiert, dass $\arg m = \pi$.

¹⁸Für $\delta_{\square, m}, \delta_{\Delta, m}$ s. BEZEICHNUNGEN UND DEFINITIONEN

wird durch τ_0 auf $(-1)^m F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, z)$ abgebildet, hat jedenfalls keinen Hauptteil und insgesamt

$$\begin{aligned} F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, z) &\xrightarrow{\text{pr}} \sum_{\substack{n \equiv 0, 3 \\ (\text{mod } 4)}} a_n q^n - (-1)^m F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, 4z) - F_{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}}(m, \cdot) \Big|_{\tau_{\frac{1}{2}}}(4z) \\ &= -F_{\frac{3}{2}}(4m-3, z) + 24b_m G_{\frac{3}{2}}(z) \in M_{\frac{3}{2}}^{1+}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt, da der Hauptteil $-\frac{1}{q^{4m-3}}$ die Modulform eindeutig festlegt. Wie oben ist $b_m = -\delta_{\square, 4m-3} = -\delta_{2\Delta+1, m}$.

Für Gewicht $k = \frac{1}{2}$ ergeben die Fourierreihen holomorphe Modulformen. Um die Symmetrieeigenschaften zu verbessern, kann man allerdings auch hier¹⁹

$$\begin{aligned} &F_{\frac{1}{2}, \infty}(m, z) + c_m \theta_3, \\ &F_{\frac{1}{2}, 0}(m, z) + c_m \theta_3, \\ &F_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(m, z) - \delta_{\text{ungerade}, m-1} \cdot c_{m-1, \frac{1}{2}} \cdot \theta_3 \end{aligned}$$

korrigieren.

□

C.3.3.6. Der Kohnen-Plus-Raum.

Definition C.3.3.6.1. Die Projektion der $\Gamma_0(4)$ -Poincaréreihe in den Kohnen-Plus-Raum sei

$$\begin{aligned} P_k(m, z) &:= \frac{3}{2} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \Gamma_0(4)} q^m |k\gamma(z)| \right) \Big|_{\text{pr}} \in S_k^+, \quad k > 6, (-1)^{[k]} m \equiv 0, 1 \pmod{4}, m > 0; \\ F_k(m, z) &:= \frac{3}{2} F_{k, \infty}(m, z) \Big|_{\text{pr}}, \quad k > 1 \vee k < 0, (-1)^{[k]} m \equiv 0, 3 \pmod{4}, m \neq 0 \end{aligned}$$

mit [Kohnen 3, S. 250]'s Projektionsoperator pr, vgl. Abschnitt C.3.2.4.

Hilfssatz C.3.3.6.2. Für Spitzenformen $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n q^n \in S_k^+$ ist $\langle f, P_k(m, \cdot) \rangle = \frac{\Gamma(k-1)}{6(4\pi m)^{k-1}} c_m$.

Satz C.3.3.6.3. Sei k halbganz, $m \in \mathbb{N}$.

Für $k \geq \frac{5}{2}$, $(-1)^{[k]} m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ist $F_k(m, z)$ eine schwach-holomorphe Modulform vom Gewicht k für die Gruppe $\Gamma_0(4)$ mit Fourierreihe

$$F_k(m, z) = q^{-m} + \frac{\pi}{2i^k m^{\frac{k-1}{2}}} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]} n \equiv 0, 1 \\ (\text{mod } 4)}}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade}, c}) \frac{n^{\frac{k-1}{2}} S_{k, \infty, \infty}(-m, n; 4c)}{c} I_{k-1} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) q^n.$$

Für Gewicht $k = \frac{3}{2}$, $m \equiv 0, 1 \pmod{4}$ ist

$$\begin{aligned} F_{\frac{3}{2}}(m, z) &:= q^{-m} - \frac{1+i}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0, 3 \\ (\text{mod } 4)}}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade}, c}) \frac{S_{\frac{3}{2}, \infty, \infty}(-m, n; 4c)}{\sqrt{cn}} \sinh \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{mn} \right) q^n \\ &\quad + \frac{4\delta_{\square, m}}{\sqrt{y}} \left\{ Q^{(0)} + 2Q^{(1)} + 2Q^{(4)} + 2Q^{(9)} + \dots \right\} \end{aligned}$$

und die $F_{\frac{3}{2}}(m, z) - 2\delta_{\square, m} E_{\frac{3}{2}}(z)$ bilden eine Basis von $M_{\frac{3}{2}}^{1+}$.

¹⁹ c_m und e_m sind Fourierkoeffizienten der Gewicht $\frac{3}{2}$ -Eisensteinreihen

Für Gewicht $k = \frac{1}{2}, m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ist

$$F_{\frac{1}{2}}(m, z) := q^{-m} + 12H(m) + \frac{1-i}{2} \sum_{\substack{n=1 \\ n \equiv 0,3 \pmod{4}}}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{S_{\frac{1}{2},\infty,\infty}(-m, n; 4c)}{\sqrt{cn}} \sinh\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{mn}\right) q^n$$

eine Basis von $M_{\frac{1}{2}}^{1+}$.

Für $k = -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{11}{2}, (-1)^{[k]} m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ist

$$F_k(m, z) := q^{-m} - \frac{L\left(k - \frac{1}{2}, (-1)^{k+\frac{1}{2}} m\right)}{\zeta(2k-2)} + \frac{\pi}{2i^k m^{\frac{k-1}{2}}} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]} n \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{n^{\frac{k-1}{2}} S_{k,\infty,\infty}(-m, n; 4c)}{c} I_{1-k}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{mn}\right) q^n.$$

Für $k = -\frac{9}{2} \vee k < -6, (-1)^{[k]} m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ist

$$F_k(m, z) := q^{-m} - \frac{L\left(k - \frac{1}{2}, (-1)^{k+\frac{1}{2}} m\right)}{\zeta(2k-2)} + \frac{\pi}{2i^k m^{\frac{k-1}{2}}} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]} n \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{n^{\frac{k-1}{2}} S_{k,\infty,\infty}(-m, n; 4c)}{c} I_{1-k}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{mn}\right) q^n + \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]+1} n \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \left\{ -\delta_{m,n} + \frac{\pi}{2i^k m^{\frac{k-1}{2}}} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{n^{\frac{k-1}{2}} S_{k,\infty,\infty}(-m, -n; 4c)}{c} J_{1-k}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{mn}\right) \right\} \cdot q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi ny)}{\Gamma(1-k)}$$

eine harmonische schwache Maaßform vom Gewicht k .

Sei jetzt $k > 6, (-1)^{[k]} m \equiv 0, 1 \pmod{4}$:

$$P_k(m, z) = \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]} n \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \left\{ \delta_{m,n} + \frac{\pi}{2i^k} \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{S_{k,\infty,\infty}(m, n; 4c)}{c} J_{k-1}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{mn}\right) \right\} q^n.$$

Für halbganzes Gewicht $k < 1, m \in \mathbb{Z}^-, (-1)^{[k]} m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ lassen Modulformen mit nichtholomorphen Singularitäten erzeugen:

$$F_k(m, z) = -i^{2k} \frac{\gamma(1-k, 4\pi my)}{\Gamma(1-k)} q^{-m} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-k} (-m)^{1-k}}{i^k \Gamma(2-k)} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{S_{k,\infty,\infty}(-m, 0; 4c)}{c^{2-k}} + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]} n \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \left(\frac{n}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{S_{k,\infty,\infty}(-m, n; 4c)}{c} J_{1-k}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{-mn}\right) q^n + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]+1} n \equiv 0,1 \pmod{4}}}^{\infty} \left(\frac{n}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade},c}) \frac{S_{k,\infty,\infty}(-m, -n; 4c)}{c} I_{1-k}\left(\frac{\pi}{c}\sqrt{-mn}\right) \cdot q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi ny)}{\Gamma(1-k)}$$

Die $F_k(m, z), m > 0$ erzeugen zusammen mit M_k^+ die Modulformen aus $\widehat{\mathbb{S}}_k^+$, deren Koeffizienten im Kohnen-Plus-Raum liegen. Für $\widehat{\mathbb{M}}_k^+, k < 1$ kommen noch die Eisensteinreihen $E_k(z)$ und die $F_k(m, z), m < 0$ dazu. Die $P_k(m, z), m > 0$ spannen den Raum der Spitzenformen S_k^+ auf.

BEWEIS. vgl. [Bri O 3], [Br Jen On, Theorem 3.3, 3.5, 3.7], [Zagier 13, §5]. In [DIT 3, Proposition 2] werden die Fourierkoeffizienten für Funktionen vom Gewicht $\frac{1}{2}$ behandelt.

Ich leite nur die Fourierreihe der nicht-holomorph explodierenden Poincaréreihen $F_k(m, z)$, $m < 0$ her. Erinnern wir uns an den Projektionsoperator:

$$F_k(m, z) = \frac{3}{2} F_{k, \infty}(m, z) |_{\text{pr}} = q^{-m} + \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]} n \equiv 0 \pmod{4}}}^{\infty} a_n q^n + \sum_{\substack{n=1 \\ (-1)^{[k]+1} n \equiv 0 \pmod{4}}}^{\infty} a'_n q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)} \\ + (-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{k-\frac{3}{2}} \left(F_{k, \infty}(m, \cdot) |_{\tau_0}(4z) + F_{k, \infty}(m, \cdot) |_{\tau_{\frac{1}{2}}}(4z) \right),$$

falls

$$F_{k, \infty}(m, z) = q^{-m} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)}.$$

Nun ist

$$F_{k, \infty}(m, z) = -i^{2k} \frac{\gamma(1-k, 4\pi m y)}{\Gamma(1-k)} q^{-m} + \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-k} (-m)^{1-k}}{i^k \Gamma(2-k)} \sum_{c=1}^{\infty} (1 + \delta_{\text{ungerade}, c}) \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, 0; 4c)}{c^{2-k}} \\ + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, n, 4c)}{c} J_{1-k} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{-mn}\right) q^n \\ + \frac{\pi}{2i^k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, -n, 4c)}{c} I_{1-k} \left(\frac{\pi}{c} \sqrt{-mn}\right) q^{-n} \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{\Gamma(1-k)}, \\ F_{k, \infty}(m, \cdot) |_{\tau_0}(4z) = \frac{\pi^{2-k} (-m)^{1-k}}{\Gamma(2-k)} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, 0}(-m, 0; 4c-2)}{(2c-1)^{2-k}} \\ + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, 0}(-m, n, 4c-2)}{2c-1} J_{1-k} \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{-mn}\right) q^{4n} \\ + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, 0}(-m, -n, 4c-2)}{2c-1} I_{1-k} \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{-mn}\right) q^{-4n} \frac{\Gamma(1-k, 16\pi n y)}{\Gamma(1-k)}$$

und

$$F_{k, \infty}(m, \cdot) |_{\tau_{\frac{1}{2}}}(z) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+\kappa}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \frac{1}{2}}(-m, n+\kappa, 4c-2)}{2c-1} J_{1-k} \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{-m(n+\kappa)}\right) q^{4(n+\kappa)} \\ + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+\kappa}{-m}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sum_{c=1}^{\infty} \frac{S_{k, \infty, \frac{1}{2}}(-m, \kappa-n, 4c-2)}{2c-1} I_{1-k} \left(\frac{2\pi}{2c-1} \sqrt{-m(n+\kappa)}\right) q^{4\left(\kappa-\frac{1}{2}-n\right)} \frac{\Gamma(1-k, 16\pi(n+\kappa)y)}{\Gamma(1-k)}.$$

Mit Gleichung (C.3.3.4.2), (C.3.3.4.3) und wegen $(-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{-m+3k-1}{2} \rfloor} = 1$

für $(-1)^{[k]} m \equiv 0, 3 \pmod{4}$ ist

$$(-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{k-\frac{3}{2}} S_{k, \infty, 0}(-m, n; 4c-2) = \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, 4n; 8c-4)}{i^k 2^{2-k}}$$

und

$$(-1)^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{k-\frac{3}{2}} S_{k, \infty, \frac{1}{2}}(-m, n_{\frac{1}{2}}; 4c-2) = \frac{S_{k, \infty, \infty}(-m, 4n_{\frac{1}{2}}; 8c-4)}{i^k 2^{2-k}}.$$

Das ergibt leicht die Fourierreihe. \square

Beispiele. (nicht-holomorph)

$$\begin{aligned}
F_{-\frac{9}{2}}(-7, z) &= 8341, 7 - 5, 9q^3 - 1, 6q^4 - 0, 6q^7 - 0, 5q^8 + \dots \\
&\quad -7^{\frac{11}{2}} \left(Q^{(-7)} + 1, 9 Q^{(1)} - 615345, 0 Q^{(4)} + 8439785, 0 Q^{(5)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{9}{2}}(-4, z) &= 378, 2 - 1, 1q^3 - 0, 2q^4 - 0, 1q^7 - 0, 1q^8 + \dots \\
&\quad -4^{\frac{11}{2}} \left(Q^{(-4)} - 0, 7 Q^{(1)} - 42222, 5 Q^{(4)} - 370328, 9 Q^{(5)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{9}{2}}(-3, z) &= 76, 6 + 0, 1q^3 - 0, 2q^4 - 0, 1q^7 + 0, 1q^8 \\
&\quad -3^{\frac{11}{2}} \left(Q^{(-3)} + 0, 5 Q^{(1)} - 15390, 1 Q^{(4)} + 112669, 4 Q^{(5)} + \dots \right) \\
E_{-\frac{9}{2}}(z) &= 1 + \frac{1}{\zeta(11)} \left(L(6, -3) q^3 + L(6, -4) q^4 + L(6, -7) q^7 + \dots \right) \\
&\quad - \frac{\pi^6}{122850 \zeta(11)} \left(691 Q^{(0)} - 130 Q^{(1)} - 262210 Q^{(4)} - 877968 Q^{(5)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{9}{2}}(1, z) &= \frac{1}{q} + 0, 19 - 0, 54q^3 + 0, 74q^4 - 1, 88q^7 + 2, 51q^8 + \dots \\
&\quad -1, 124928 \left(Q^{(1)} - 56 Q^{(4)} + 120 Q^{(5)} - 240 Q^{(8)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{9}{2}}(4, z) &= \frac{1}{q^4} + 379, 46 + 15390, 06q^3 + 42222, 53q^4 + \dots \\
&\quad +56 \cdot 1, 124928 \left(Q^{(1)} - 56 Q^{(4)} + 120 Q^{(5)} - 240 Q^{(8)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{9}{2}}(5, z) &= \frac{1}{q^5} + 1270, 58 - 112669, 42q^3 + 370328, 87q^4 + \dots \\
&\quad -120 \cdot 1, 124928 \left(Q^{(1)} - 56 Q^{(4)} + 120 Q^{(5)} - 240 Q^{(8)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{13}{2}}(-7, z) &= -20475, 3 - 20, 4q - 0, 01q^4 + 0, 1q^7 - 0, 4q^8 + \dots \\
&\quad -7^{\frac{11}{2}} \left(Q^{(-7)} - 0, 1 Q^{(1)} + 160482, 7 Q^{(4)} - 2983963, 9 Q^{(5)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{13}{2}}(-4, z) &= -306, 7 - 2, 5q^3 + 0, 7q^4 - 0, 0q^7 - 0, 1q^8 + \dots \\
&\quad -4^{\frac{11}{2}} \left(Q^{(-4)} + 0, 03 Q^{(1)} + 15122, 4 Q^{(4)} + 183862, 6 Q^{(5)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{13}{2}}(-3, z) &= -35, 3 + 1, 4q^3 - 3q^4 - 0, 03q^7 + 0, 02q^8 + \dots \\
&\quad -3^{\frac{11}{2}} \left(Q^{(-3)} - 0, 02 Q^{(1)} + 6334, 1 Q^{(4)} - 65155, 8 Q^{(5)} + \dots \right) \\
E_{-\frac{13}{2}}(z) &= 1 + \frac{1}{\zeta(15)} \left(L(8, -3) q^3 + L(8, -4) q^4 + L(8, -7) q^7 + \dots \right) \\
&\quad + \frac{\pi^8}{321300 \zeta(15)} \left(3617 Q^{(0)} + 34 Q^{(1)} + 1109794 Q^{(4)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{13}{2}}(1, z) &= \frac{1}{q} - 0, 01 + 0, 02q^3 - 0, 03q^4 + 0, 06q^7 - 0, 08q^8 + \dots \\
&\quad -0, 993031 \left(Q^{(1)} + 88 Q^{(4)} - 336 Q^{(5)} + 3696 Q^{(8)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{13}{2}}(4, z) &= \frac{1}{q^4} - 306, 83 - 6334, 10q^3 - 15122, 47q^4 + \dots \\
&\quad -88 \cdot 0, 993031 \left(Q^{(1)} + 88 Q^{(4)} - 336 Q^{(5)} + 3696 Q^{(8)} + \dots \right) \\
F_{-\frac{13}{2}}(5, z) &= \frac{1}{q^5} - 1628, 84 + 65155, 75q^3 - 183862, 58q^4 + \dots \\
&\quad +336 \cdot 0, 993031 \left(Q^{(1)} + 88 Q^{(4)} - 336 Q^{(5)} + 3696 Q^{(8)} + \dots \right)
\end{aligned}$$

C.3.4. Erzeugende Funktionen.

Satz C.3.4.1. Sei $k \in \{0, 4, 6, 8, 10, 14\}$. Die $SL_2(\mathbb{Z})$ -Poincaréreihen haben folgende erzeugende Funktion

$$\frac{E_k(z) F_{2-k}(1, \tau)}{j(\tau) - j(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_k(n, z) e(n\tau);$$

sei

$$\frac{F_{2-k}(1, \tau)}{j(\tau) - t} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) e(n\tau)$$

mit Polynomen P_n von n -tem Grad. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$

$$F_k(n, z) = E_k(z) P_n(j(z)).$$

Die $\Gamma_0(p)$ -Poincaréreihen haben folgende erzeugende Funktion

$$\frac{E_{k,a}^{(p)}(z) F_{2-k,b}^{(p)}(1, \tau)}{F_{0,b}^{(p)}(1, \tau) - F_{0,a}^{(p)}(1, z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_{k,a}^{(p)}(n, z) e(n\tau) = - \sum_{m=1}^{\infty} F_{2-k,b}^{(p)}(m, \tau) e(mz)$$

für $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \{\infty, 0\}$, $\mathbf{a} = \infty \vee \mathbf{b} = \infty$, $k = 0 \vee k > 2$, $S_k = \emptyset$, d.h. falls alle beteiligten Funktionen holomorph sind;

sei

$$\begin{aligned} \frac{F_{2-k,\infty}^{(p)}(1, \tau)}{F_{0,\infty}^{(p)}(1, \tau) - t} &= \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) e(n\tau), \quad k = 0 \vee k > 2, S_k = \emptyset, \\ \frac{E_{2-k,\infty}^{(p)}(\tau)}{F_{0,\infty}^{(p)}(\tau) - t} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(t) e(n\tau), \quad k < 0 \vee k = 2 \end{aligned}$$

mit Polynomen P_n, Q_n von n -tem Grad, die noch vom Gewicht abhängen. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \{\infty, 0\}$

$$\begin{aligned} F_{0,\mathbf{a}}^{(p)}(n, z) - \text{konst.} &= P_n\left(F_{0,\mathbf{a}}^{(p)}(1, z)\right), \\ F_{k,\mathbf{a}}^{(p)}(n, z) &= E_{k,\mathbf{a}}^{(p)}(z) P_n\left(F_{0,\mathbf{a}}^{(p)}(1, z)\right), \quad k > 2, \\ F_{k,\mathbf{a}}^{(p)}(n, z) &= F_{k,\mathbf{a}}^{(p)}(1, z) Q_n\left(F_{0,\mathbf{a}}^{(p)}(1, z)\right), \quad k < 0 \vee k = 2; \end{aligned}$$

sei

$$\begin{aligned} \frac{F_{2-k,0}^{(p)}(1, \tau)}{F_{0,0}^{(p)}(1, \tau) - t} &= \sum_{n=0}^{\infty} P'_n(t) e(n\tau), \quad k = 0 \vee k > 2, S_k = \emptyset, \\ \frac{E_{2-k,0}^{(p)}(\tau)}{F_{0,0}^{(p)}(\tau) - t} &= \sum_{n=1}^{\infty} Q'_n(t) e(n\tau), \quad k < 0 \vee k = 2 \end{aligned}$$

mit Polynomen P'_n, Q'_n von n -tem Grad, die noch vom Gewicht abhängen. Dann ist für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} F_{0,0}^{(p)}(n, z) - \text{konst.} &= P'_n\left(F_{0,\infty}^{(p)}(1, z)\right), \\ F_{k,0}^{(p)}(n, z) &= E_{k,\infty}^{(p)}(z) P'_n\left(F_{0,\infty}^{(p)}(1, z)\right), \quad k > 2, \\ F_{k,0}^{(p)}(n, z) &= F_{k,\infty}^{(p)}(1, z) Q'_n\left(F_{0,\infty}^{(p)}(1, z)\right), \quad k < 0 \vee k = 2. \end{aligned}$$

Die Poincaréreihen im **Kohnen-Plus-Raum** haben folgende erzeugende Funktion

$$\frac{E_k(z) F_{2-k}(4, \tau) + F_k(3, z) F_{2-k}(1, \tau)}{j(4\tau) - j(4z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_k(n, z) e(n\tau) \quad \text{für } k \in \left\{ \frac{5}{2}, \frac{9}{2} \right\}$$

und

$$\frac{E_k(z) F_{2-k}(4, \tau) + F_k(1, z) F_{2-k}(3, \tau)}{j(4\tau) - j(4z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F_k(n, z) e(n\tau) \quad \text{für } k \in \left\{ \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{15}{2} \right\}.$$

BEWEIS. [As Ka Ni], [Duke Jen 1, Theorem 2], Verallgemeinerungen der Formel im Beweis zu [Zagier 13, Theorem 4], [Duke Jen 2]. Computerberechnungen. \square

C.3.5. Differenzial- und Heckeoperatoren.

[Maß 2, Maaß 4, Br On Rh, Bri Ka Rho], ...

Definition C.3.5.1. Wir verwenden folgende Differenzialoperatoren für harmonische schwache Maaßformen vom Gewicht $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$(C.3.5.1) \quad \begin{aligned} D: \widehat{M}_k^!(N, \chi) &\longrightarrow M_{k+2}^!(N, \chi), & Df &:= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{4\pi i} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) = q \frac{\partial f}{\partial q}, \\ \partial: \widehat{M}_k^!(N, \chi) &\longrightarrow \widehat{M}_{k+2}^!(N, \chi), & \partial f &:= \partial_k f = Df - \frac{k}{4\pi y} f, \quad k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, \\ X: \widehat{M}_k^!(N, \chi) &\longrightarrow \widehat{M}_{-k}^!(N, \chi), & Xf(z) &:= y^k f(-\bar{z}), \\ \xi_k: \widehat{M}_k^!(N, \chi) &\longrightarrow M_{2-k}^!(N, \bar{\chi}), & \xi_k F &:= -4\pi \partial_{-k} (y^k \bar{F}) = 2iy^k \frac{\partial}{\partial z} \overline{F(z)}. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{Z}^-$:

$$\begin{aligned} \Theta: \widehat{M}_k^!(N, \chi) &\longrightarrow \widehat{M}_k^!(N, \chi), \\ \Theta f(z) &:= \frac{(4\pi y)^{-k}}{(-k)!} (\partial^{-k} f) (-\bar{z}) = \frac{(4\pi y)^{-k}}{(-k)!} (\partial_{-k-2} \circ \partial_{-k-4} \circ \dots \circ \partial_k f) (-\bar{z}). \end{aligned}$$

Bemerkung. Ein ähnlicher Operator Θ wurde in [Maß 2, (25)] als $f(z) \mapsto \text{konst} \cdot (E_{-k+2}^- \circ \dots \circ E_k^- f) (-\bar{z})$ für Maaßformen positiven Gewichts definiert²⁰ und detailliert in [Bri Ka Rho] (dort bis auf Konjugation \mathcal{F}) untersucht.

Ich stelle einige bekannte Eigenschaften dieser Differenzialoperatoren zusammen:

Hilfssatz C.3.5.2. Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, F eine beliebige reell-analytische Funktion. Dann ist

$$(C.3.5.2) \quad \partial_k^n F := \partial_{k+2(n-1)} \circ \dots \circ \partial_k F = \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (k+j)_{n-j} (z-\bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j},$$

und für $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$:

$$\partial_{2-k}^{k-2} F := \partial_{k-4} \circ \dots \circ \partial_{2-k} F = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(4\pi y)^j}{j!} D^j F,$$

$$[\text{Bol}] \text{'s Identität: } \partial_{2-k}^{k-1} F := \partial_{k-2} \circ \dots \circ \partial_{2-k} F = D^{k-1} F,$$

$$\partial_{\frac{1}{2}-k}^k F = \frac{k!}{(16\pi y)^k} \sum_{j=0}^k \binom{2k-2j}{k-j} \frac{(16\pi y)^j}{j!} D^j F,$$

$$D^{k-1} (F|_{2-k}\gamma) = (D^{k-1} F)|_k \gamma,$$

$$\Theta (F|_{2-k}\gamma) = (\Theta F)|_{2-k}\gamma' \quad \text{mit } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und } \gamma' = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

²⁰Def. der Maaßoperatoren von E_k^+ , E_k^- in den BEZEICHNUNGEN UND DEFINITIONEN

Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} X(F|_k\gamma) &= (XF)|_{-k}\gamma', \\ \partial_k(F|_k\gamma) &= (\partial_k F)|_{k+2}\gamma, \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \\ \xi_k(F|_k\gamma) &= (\xi_k F)|_{2-k}\gamma. \end{aligned}$$

Der Operator ξ_k bildet harmonische schwache Maaßformen vom Gewicht k

$$F(z) = c'_0 + c_0 \frac{y^{1-k}}{1-k} - \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ n \neq 0}} \frac{1}{(4\pi n)^{1-k}} \left(d_n q^n + c_n q^{-n} \Gamma(1-k, 4\pi n y) \right) \in \widehat{\mathbb{M}}_k^1(N, \chi)$$

auf schwach-holomorphe Modulformen

$$(C.3.5.3) \quad f(z) = \xi_k F(z) = \sum_{n \geq n_0} \overline{c_n} q^n \in M_{2-k}^1(N, \overline{\chi})$$

von komplementärem Gewicht $2-k$ ab.
Für halbganzes Gewicht k heißt das:

$$F(z) = c'_0 + c_0 \frac{y^{1-k}}{1-k} - \sum_{\substack{n \geq n_0 \\ n \neq 0}} \left(\frac{d_n}{(4\pi n)^{1-k}} q^n + c_n y^{1-k} \beta_{\frac{3}{2}-k}(4\pi n y) q^{-n} \right)$$

wird auf $f(z) = \xi_k F(z) = \sum_{n \geq n_0} \overline{c_n} q^n$ abgebildet²¹.

Der Operator ξ_{2-k} ist surjektiv und

$$\forall k \in \mathbb{N} : \xi_{2-k} = D^{k-1} (y^{k-2} \overline{X\Theta}).$$

BEWEIS. Die erste Aussage entspricht Hilfssatz 3.1.3.3 (3).

Beweis mit vollständiger Induktion: $n=0$: ✓

Induktionsannahme: Die Aussage sei richtig für n :

$$\partial_{k+2(n-1)} \circ \dots \circ \partial_k F = \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^n \sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j} \text{ mit } c_{n,j} = \binom{n}{j} (k+j)_{n-j}.$$

Ich beweise die Induktionsbehauptung:

$$\begin{aligned} & \partial_{k+2n} \circ \partial_{k+2(n-1)} \circ \dots \circ \partial_k F \\ &= -\frac{k+2n}{4\pi y} \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^n \sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j} + \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^n \sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j} \\ &= \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^{n+1} \sum_{j=0}^n (k+2n) c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j} \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^n \sum_{j=0}^n \left\{ j c_{n,j} (z - \bar{z})^{j-1} \frac{\partial^j F}{\partial z^j} + c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^{j+1} F}{\partial z^{j+1}} \right\} \\ & \quad + \frac{1}{2\pi i} \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^n \left(-\frac{i}{2} \right) (-n) y^{-n-1} \sum_{j=0}^n c_{n,j} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j} \\ &= \left(-\frac{1}{4\pi y} \right)^{n+1} \left\{ (k+n) c_{n,0} F + \sum_{j=1}^n \{ (k+2n) c_{n,j} + j c_{n,j} + c_{n,j-1} - n c_{n,j} \} (z - \bar{z})^j \frac{\partial^j F}{\partial z^j} \right. \\ & \quad \left. + c_{n,n} (z - \bar{z})^{n+1} \frac{\partial^{n+1} F}{\partial z^{n+1}} \right\} \end{aligned}$$

²¹Die Werte der $\beta_{\frac{3}{2}-k}$ -Funktion sind reell für positive Argumente.

Man überzeugt sich, dass die $c_{n,j} = \binom{n}{j} (k+j)_{n-j}$ die Rekursion $c_{n+1,j} = (k+n+j)c_{n,j} + c_{n,j-1}$ erfüllen: zu zeigen ist

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)!}{j!(n-j+1)!} (k+j) \cdots (k+n-1) (k+n) \\ &= (k+n+j) \frac{n!}{j!(n-j)!} (k+j) \cdots (k+n-1) + \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} (k+j-1) \cdots (k+n-1) \end{aligned}$$

Das ist äquivalent zu

$$(n+1)(k+n) = (n-j+1)(k+n+j) + j(k+j-1) \checkmark$$

Die Rekursionen für die Randwerte $c_{n+1,0} = (k+n)c_{n,0}$ und $c_{n+1,n+1} = c_{n,n}$ sind ebenfalls konsistent mit der expliziten Definition $c_{n,0} = k \cdots (k+n-1)$ und $c_{n,n} = 1$.

Ersetzt man in Gleichung (C.3.5.2) k durch $2-k$ bzw. $\frac{1}{2}-k$ und n durch $k-2, k-1$ bzw. k , so ergeben sich die Spezialfälle. Für $n = k-1$ fallen alle Pochhammersymbole mit Ausnahme des letzten weg, $(\)_0 = 1$. **[Bol]**'s Identität findet sich auch in **[Br On Rh, Lemma 2.1]**.

Für die letzten fünf Aussagen beachte, dass die Maßoperatoren und komplexe Konjugation ($y^k \bar{f}$) mit dem slash-Operator vertauschen (**[Fay, (5)]**, **[Br On Rh, 2. Harmonic weak Maass forms]**), während $Xf(z) := y^{k-2} f(-\bar{z})$, f vom Gewicht $2-k$, folgendes Transformationsverhalten hat

$$\begin{aligned} (Xf)|_{2-k} \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix} \varepsilon_d \right)^{-2k} (-cz+d)^{k-2} \frac{y^{k-2}}{|-cz+d|^{2k-4}} f \left(\frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d} \right) \\ X \left(f|_{k-2} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \varepsilon_d \right)^{2k} (-c\bar{z}+d)^{k-2} y^{k-2} f \left(\frac{-a\bar{z}+b}{-c\bar{z}+d} \right). \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{Z}$ und $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \vee \Gamma_0(4)$ ist das **[Maaf 2, Hilfssatz 4]** bzw. **[Maaf 4, Ch. IV §1 (19)]**. Für ungerades k hat man Modulformen vom Nebentyp $\left(\frac{-4}{d}\right)$.

Für halbganzen k und $\Gamma_0(4)$ ist entweder

$$\varepsilon_d \begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix} = \varepsilon_d \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}, \quad d \equiv 1 \pmod{4}$$

oder

$$\varepsilon_d \begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix} = -\varepsilon_d \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \pm i, \quad d \equiv 3 \pmod{4}.$$

In beiden Fällen ist

$$\left(\begin{pmatrix} -c \\ d \end{pmatrix} \varepsilon_d \right)^{-2k} = \left(\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \varepsilon_d \right)^{2k}.$$

Die Berechnung der Fourierreihe von $\xi_k F$ findet sich in **[Bri O 3]**, **[Br On Rh, (1.2),(1.3)]**.

Die Eigenschaften von ξ_{2-k} finden sich in **[Bruinier Funke 2, Theorem 3.7]** und **[Bri Ka Rho, Theorem 1.1]**. \square

Hilfssatz C.3.5.3. **[Maaf 4, Ch.IV §1 (20)]** (Eigenschaften von Θ)

Der Operator Θ bildet Modulformen vom Gewicht $2-k \in \mathbb{Z}^-$ auf Modulformen gleichen Gewichts ab. Der Operator Θ vertauscht die nichtkonstanten holomorphen und nicht-holomorphen Fourierkoeffizienten von Modulformen.

$$\begin{aligned} \Theta \left\{ c_0 + c'_0 y^{1-k} + \sum_{n \neq 0} \left(c_n q^n + c'_n \frac{\Gamma(k-1, 4\pi n y)}{\Gamma(k-1)} q^{-n} \right) \right\} &= c_0 + c'_0 y^{1-k} + \sum_{n \neq 0} \left(c'_n q^n + c_n \frac{\Gamma(k-1, 4\pi n y)}{\Gamma(k-1)} q^{-n} \right), \\ \Theta \circ \Theta &= Id. \end{aligned}$$

Eigenfunktionen von Θ sind die Modulformen, die von geraden Maßformen kommen, d.h. $c'_n = c_n$. Für $c \in \mathbb{R}, m, n \in \mathbb{N}, m \leq k-2, q := e^{2\pi iz}, g(z)$ eine Modulform vom Gewicht $2-k, k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ zur Gruppe

$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), \Gamma_0(p) \vee \Gamma_0(4)$ ist

$$\begin{aligned} \Theta c &= c \\ \Theta y^m &= 0 \\ \Theta y^{k-1} &= y^{k-1} \\ \Theta z^m &= (-z)^m \\ \Theta z^{k-1} &= (z - \bar{z})^{k-1} - z^{k-1} \\ \Theta z^{-1} &= -\frac{1}{\bar{z}} \left(\left(1 - \frac{\bar{z}}{z}\right)^{k-1} - 1 \right) \\ n \neq 0: \Theta q^n &= \frac{\Gamma(k-1, 4\pi ny)}{\Gamma(k-1)} q^{-n} = \bar{q}^n \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(4\pi ny)^j}{j!} \\ \Theta (\tau - z)^{k-2} &= (\tau + z)^{k-2} \end{aligned}$$

BEWEIS. Statt unseres Operators ∂_k verwenden [Br On Rh] den Operator $R_k := -4\pi\partial_k$. Damit lautet der Operator Θ für harmonische Maaßformen vom Gewicht $2 - k$ folgendermaßen

$$\Theta = X \circ \left(\frac{(4\pi y)^{k-2}}{\Gamma(k-1)} \partial_{k-4} \circ \partial_{k-6} \circ \cdots \circ \partial_{2-k} \right) = \frac{(-1)^{k-2}}{\Gamma(k-1)} X \circ R_{k-4} \circ R_{k-6} \circ \cdots \circ R_{2-k}$$

und sie beweisen ([Br On Rh, 3. Proof of Theorem 1.1]):

Falls

$$f(z) = \sum_{n \gg -\infty} \{c_n q^n + c'_n \Gamma(k-1, 4\pi ny) q^{-n}\},$$

so ist

$$R_{2-k}^{k-2} f(z) = \sum_{n \gg -\infty} \left\{ c_n \Gamma(k-1, 4\pi ny) (-y)^{2-k} e^{2\pi i n \bar{z}} + c'_n (k-2)!^2 (-y)^{2-k} e^{-2\pi i n \bar{z}} \right\}.$$

Mit der Definition $X = y^{k-2} g(-\bar{z})$ für harmonische Maaßformen vom Gewicht $2 - k$ folgt sofort, vgl. [Maaß 2, Satz 5]:

$$\Theta f(z) = \sum_{n \gg -\infty} \left\{ \frac{c_n}{\Gamma(k-1)} \Gamma(k-1, 4\pi ny) e^{-2\pi i n z} + \Gamma(k-1) c'_n e^{2\pi i n z} \right\}.$$

Der Beitrag des nicht-holomorphen Terms $c'_0 y^{1-k}$ wird im folgenden noch untersucht. Wie in [Maaß 2, Hilfssatz 5] ist dann sofort

$$\Theta \circ \Theta = \mathrm{Id}.$$

Mit Hilfssatz C.3.5.2 und mit dem binomischen Lehrsatz ist

$$\begin{aligned} \partial_{2-k}^{k-2} y^m &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(4\pi y)^j}{j!} \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} y^m \\ &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^m (-1)^j \binom{m}{j} y^m = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} (1-1)^m y^m = 0, \\ \partial_{2-k}^{k-2} y^{k-1} &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(4\pi y)^j}{j!} \left(-\frac{1}{4\pi}\right)^j \frac{\partial^j}{\partial y^j} y^{k-1} \\ &= 0 - \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} y^{k-1} = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} y^{k-1}, \\ \partial_{2-k}^{k-2} z^m &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^m \frac{(-2iy)^j m!}{j! (m-j)!} z^{m-j} = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} (\bar{z} - z + z)^m. \end{aligned}$$

Allgemein gilt für Polynome P vom Grad $\leq k-2$

$$\begin{aligned}\partial_{2-k}^{k-2} P(z) &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} P(\bar{z}), \\ \partial_{2-k}^{k-2} z^{k-1} &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(-2iy)^j (k-1)!}{j! (k-1-j)!} z^{k-1-j} = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \left\{ (\bar{z} - z + z)^{k-1} - (-2iy)^{k-1} \right\} \\ \partial_{2-k}^{k-2} q^m &= \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(4\pi y)^j}{j!} m^j q^m = \frac{e(m\bar{z})}{(4\pi y)^{k-2}} \Gamma(k-1, 4\pi m y), \\ \partial_{2-k}^{k-2} y^m &= \frac{(m-k+2)_{k-2}}{(4\pi y)^{k-2}} y^m\end{aligned}$$

und

$$\partial_{2-k}^{k-2} (\tau - z)^{k-2} = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(2iy)^j (k-2)!}{j! (k-2-j)!} (\tau - z)^{k-2-j} = \frac{(k-2)!}{(4\pi y)^{k-2}} (z - \bar{z} + \tau - z)^{k-2}.$$

□

Ableiten der Fourierreihe der Eisensteinreihe ergibt

$$D^{2k-1} G_{2-2k}(z) = G_{2k}(z).$$

Das ist ein Beispiel für die Dualität von Modulformen vom Gewicht $2-2k$ und $2k$. Andere Beispiele hat man für Poincaréreihen ([Bri Ka Rho, Lemma 2.3] und in dieser Arbeit die Hilfssätze C.3.5.4, C.3.5.5).

Hilfssatz C.3.5.4. Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$. Für $k \in 2\mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}D^{k-1} F_{2-k}(m, z) &= -m^{k-1} F_k(m, z); \\ \Theta F_{2-k}(m, z) &= F_{2-k, \mathfrak{a}}(-m, z), \\ \xi_{2-k} F_{2-k}(m, z) &= \begin{cases} 0, & k < 12, \\ \frac{(4\pi m)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} P_k(m, z) \in S_k, & k \geq 12. \end{cases}\end{aligned}$$

BEWEIS. Hilfssatz C.3.3.2.4

□

Hilfssatz C.3.5.5. Gruppe $\Gamma_0(4)$, Spitze $\mathfrak{a} \in \{\infty, 0, \frac{1}{2}\}$, $m_{\mathfrak{a}} = m - \kappa_{\mathfrak{a}}$. Sei $F_{k, \mathfrak{a}}(m, z) := P_{k, \mathfrak{a}}(-m, z)$ für $m \in \mathbb{Z}^-, k \geq 2$.

Für $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist

$$\begin{aligned}D^{k-1} F_{2-k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z) &= \begin{cases} |m_{\mathfrak{a}}|^{k-1} F_{k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z), & \mathfrak{a} = \infty, \mathfrak{b} \neq \infty \vee \mathfrak{a} \neq \infty, \mathfrak{b} = \infty, \\ (-|m_{\mathfrak{a}}|)^{k-1} F_{k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z), & \text{sonst}; \end{cases} \\ \Theta F_{2-k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z) &= \begin{cases} F_{2-k, \mathfrak{a}}(-m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z), & \mathfrak{a} = \infty, \mathfrak{b} \neq \infty \vee \mathfrak{a} \neq \infty, \mathfrak{b} = \infty, \\ (-1)^k F_{2-k, \mathfrak{a}}(-m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z), & \text{sonst}. \end{cases}\end{aligned}$$

Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, k > 1$

$$\xi_{2-k} F_{2-k, \mathfrak{a}}(m, \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z) = \begin{cases} -\frac{(4\pi |m_{\mathfrak{a}}|)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} F_{k, \mathfrak{a}}^+(-m', \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z), & \mathfrak{a} = \infty, \mathfrak{b} \neq \infty \vee \mathfrak{a} \neq \infty, \mathfrak{b} = \infty \\ \frac{(4\pi |m_{\mathfrak{a}}|)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} F_{k, \mathfrak{a}}^+(-m', \cdot) | \tau_{\mathfrak{b}}(z), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{mit } m' = \begin{cases} m-1, & \mathfrak{a} = \frac{1}{2} \wedge 2 \nmid k \\ m, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Ähnliches gilt im Kohnen-Plus-Raum:

$$\xi_{2-k} F_{2-k}(m, z) = \frac{(4\pi |m|)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} F_k^+(-m, z), \quad k \text{ halbzahlig}, m \neq 0$$

und auch für $\Gamma_0(p)$:

$$\xi_{2-k} F_{2-k, \mathbf{a}}^{(p)}(m, z) = \frac{(4\pi|m|)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} F_{k, \mathbf{a}}^{(p)+}(-m, z), \quad k \text{ gerade}, m \in \mathbb{N}, \mathbf{a} = \infty \vee 0.$$

BEWEIS. Koeffizientenweise mit [Fay, Theorem 3.4].

Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} D^{k-1} q^{-m} &= (-m)^{1-k} q^{-m} \\ D^{k-1} \left\{ \frac{\Gamma(k-1, 4\pi my)}{\Gamma(k-1)} q^{-m} \right\} &= 0, \\ S_{2-k, \mathbf{a}, \mathbf{b}}(-m_{\mathbf{a}}, n_{\mathbf{b}}; c) &= S_{k, \mathbf{a}, \mathbf{b}}(-m_{\mathbf{a}}, n_{\mathbf{b}}; c) \end{aligned}$$

bzw.

$$S_{k, \mathbf{a}, \mathbf{b}}(-m_{\mathbf{a}}, n_{\mathbf{b}}; c) = d_{k\mathbf{a}\mathbf{b}} S_{k, \mathbf{a}, \mathbf{b}}(m_{\mathbf{a}}, -n_{\mathbf{b}}; c).$$

mit

$$d_{k\mathbf{a}\mathbf{b}} = \begin{cases} 1, & \mathbf{a} = \infty, \mathbf{b} \neq \infty \vee \mathbf{b} = \infty, \mathbf{a} \neq \infty \\ (-1)^k, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Untersuchen wir die Anwendung des ξ -Operators auf Poincaréreihen: Sei $m \in \mathbb{Z}, k > 1$;

$$\begin{aligned} \xi_{2-k} F_{2-k, \mathbf{a}}(m, \cdot) |_{2-k\tau_{\mathbf{b}}}(z) &= 2iy^{2-k} \frac{\partial}{\partial z} \overline{F_{2-k, \mathbf{a}}(m, \cdot) |_{2-k\tau_{\mathbf{b}}}(z)} \\ &= \frac{2iy^{2-k}}{\Gamma(k-1)} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \overline{c_{2-k\mathbf{a}\mathbf{b}}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \tau_{\mathbf{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathbf{b}}} v_{2-k}(\tau_{\mathbf{a}} \gamma \tau_{\mathbf{b}}^{-1})(c\bar{z} + d)^{k-2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \gamma(k-1, 4\pi(m - \kappa_{\mathbf{a}}) \operatorname{Im} \gamma z) e((m - \kappa_{\mathbf{a}}) \gamma \bar{z}) \right\} \end{aligned}$$

mit $v_{2-k} = \bar{v}_k$ ist das

$$\begin{aligned} &= \frac{2iy^{2-k}}{\Gamma(k-1)} \overline{c_{2-k\mathbf{a}\mathbf{b}}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \tau_{\mathbf{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathbf{b}}} \bar{v}_k(\tau_{\mathbf{a}} \gamma \tau_{\mathbf{b}}^{-1})(c\bar{z} + d)^{k-2} e((m - \kappa_{\mathbf{a}}) \gamma \bar{z}) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial z} \int_{-2\pi i(m - \kappa_{\mathbf{a}})(\gamma z - \gamma \bar{z})}^{\infty} e^{-t} t^{k-2} dt \\ &= -\frac{2iy^{2-k}}{\Gamma(k-1)} \overline{c_{2-k\mathbf{a}\mathbf{b}}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \tau_{\mathbf{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathbf{b}}} \bar{v}_k(\tau_{\mathbf{a}} \gamma \tau_{\mathbf{b}}^{-1})(c\bar{z} + d)^{k-2} e^{2\pi i(m - \kappa_{\mathbf{a}}) \gamma z} \cdot \\ &\quad \cdot (-2\pi i(m - \kappa_{\mathbf{a}})(\gamma z - \gamma \bar{z}))^{k-2} \frac{-2\pi i(m - \kappa_{\mathbf{a}})}{(cz + d)^2} \end{aligned}$$

(wegen $\gamma z - \gamma \bar{z} = \frac{2iy}{(cz+d)(c\bar{z}+d)}$)

$$\begin{aligned} &= \frac{(4\pi(m - \kappa_{\mathbf{a}}))^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \overline{c_{2-k\mathbf{a}\mathbf{b}}} \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \setminus \tau_{\mathbf{a}}^{-1} \Gamma_0(4) \tau_{\mathbf{b}}} \bar{v}_k(\tau_{\mathbf{a}} \gamma \tau_{\mathbf{b}}^{-1})(cz + d)^{-k} e((m - \kappa_{\mathbf{a}}) \gamma z) \\ &= \frac{\overline{c_{2-k\mathbf{a}\mathbf{b}}}}{c_{k\mathbf{a}\mathbf{b}}} \frac{(4\pi(m - \kappa_{\mathbf{a}}))^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \cdot \begin{cases} P_{k, \mathbf{a}}(m', \cdot) |_{k\tau_{\mathbf{b}}}(z), & m > 0; \\ F_{k, \mathbf{a}}(-m', \cdot) |_{k\tau_{\mathbf{b}}}(z), & m < 0; \end{cases} \\ \frac{\overline{c_{2-k\mathbf{a}\mathbf{b}}}}{c_{k\mathbf{a}\mathbf{b}}} &= \begin{cases} -1, & \mathbf{a} = \infty, \mathbf{b} \neq \infty \vee \mathbf{b} = \infty, \mathbf{a} \neq \infty \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Allgemein ist das für die Gruppe $\Gamma_0(N)$ richtig, s. auch [Ono 3, Theorem 8.5]. Der $|$ -slash-Operator vertauscht sowohl mit der Maaß-Ableitung, als auch mit komplexer Konjugation X . Insbesondere ist D^{k-1} und ξ mit $|$ -slash vertauschbar. \square

Hilfssatz C.3.5.6. Für die Gruppen $\Gamma_0(N)$, $N = 1, 4, p$ und die Spitzen ∞ und 0 gelten weitere Symmetriebeziehungen der entsprechenden Poincaréreihen, $k \in \mathbb{Z}$:

$$m^{k-1} \times n\text{-ter Koeffizient von } F_{k,\mathfrak{a}}(m, z) = \begin{cases} (-1)^k n^{k-1} \times m\text{-ter Koeffizient von } F_{k,\text{infy}}(n, z), & \mathfrak{a} = \infty, \\ n^{k-1} \times m\text{-ter Koeffizient von } F_{k,0}(n, z), & \mathfrak{a} = 0. \end{cases}$$

$$m^{k-1} \times n\text{-ter Koeffizient von } P_{k,\mathfrak{a}}(m, z) = n^{k-1} \times m\text{-ter Koeffizient von } P_{k,\mathfrak{a}}(n, z).$$

$k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$n\text{-ter Koeffizient von } F_{k,\mathfrak{a}}(m, z) = -m\text{-ter Koeffizient von } F_{2-k,\mathfrak{a}}(n, z).$$

$$n\text{-ter Koeffizient von } P_{k,\mathfrak{a}}(m, z) = -m\text{-ter nicht-hol. Koeffizient von } F_{2-k,\mathfrak{a}}(n, z)$$

und für die Spitze $\frac{1}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\left(m + \kappa_{\frac{1}{2}}\right)^{k-1} \times n\text{-ter Koeffizient von } F_{k,\frac{1}{2}}(m', \cdot) | \tau_{\frac{1}{2}} = (-1)^k \left(n - \kappa_{\frac{1}{2}}\right)^{k-1} \times m\text{-ter Koeffizient von } F_{k,\frac{1}{2}}(n, \cdot) | \tau_{\frac{1}{2}}.$$

$$\left(m + \kappa_{\frac{1}{2}}\right)^{k-1} \times n\text{-ter Koeffizient von } P_{k,\frac{1}{2}}(m', \cdot) | \tau_{\frac{1}{2}} = \left(n - \kappa_{\frac{1}{2}}\right)^{k-1} \times m\text{-ter Koeffizient von } P_{k,\frac{1}{2}}(n, \cdot) | \tau_{\frac{1}{2}}.$$

$k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$:

$$n\text{-ter Koeffizient von } F_{k,\frac{1}{2}}(m', z) = -m\text{-ter Koeffizient von } F_{2-k,\frac{1}{2}}(n, z).$$

$$n\text{-ter Koeffizient von } P_{k,\frac{1}{2}}(m', z) = -m\text{-ter nicht-hol. Koeffizient von } F_{2-k,\frac{1}{2}}(n, z)$$

$$\text{mit } m' = \begin{cases} m + 1, & 2 \nmid k, \\ m, & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEWEIS. folgt aus den Symmetrien der entsprechenden Kloostersummen (vgl. Hilfssatz C.3.3.4.2). \square

In der Spitze $\frac{1}{2}$ muss man vermutlich ganzes Gewicht nehmen und m durch $m + \kappa, \dots$ ersetzen.

HECKEOPERATOREN:

Hilfssatz C.3.5.7. Sei $k \in \mathbb{N}$. Für Modulformen $f \in \widehat{\mathbb{M}}_{2-k}^1(N, \chi)$ gilt

$$\mathbb{T}_p D^{k-1} f = p^{k-1} D^{k-1} \mathbb{T}_p f,$$

$$\mathbb{T}_p \xi_{2-k} f = p^{k-1} \xi_{2-k} \mathbb{T}_p f,$$

und ebenso für Atkin's U_p -Operator:

$$U_p D^{k-1} f = p^{k-1} D^{k-1} U_p f,$$

$$U_p \xi_{2-k} f = p^{k-1} \xi_{2-k} U_p f.$$

BEWEIS. Für die erste Aussage untersuchen wir nur die Wirkung auf eine Potenz q^m :

$$\mathbb{T}_p D^{k-1} q^m = p^{k-1} D^{k-1} \mathbb{T}_p q^m$$

$$m^{k-1} \mathbb{T}_p q^m = p^{k-1} D^{k-1} \left(q^{\frac{m}{p}} + p^{1-k} q^{pm} \right)$$

$$m^{k-1} \left(q^{\frac{m}{p}} + p^{k-1} q^{pm} \right) = p^{k-1} \left\{ \left(\frac{m}{p} \right)^{k-1} q^{\frac{m}{p}} + p^{1-k} (pm)^{k-1} q^{pm} \right\},$$

wobei der Term $q^{\frac{m}{p}}$ nur für $p \mid m$ vorkommt.

Der Operator ξ_{2-k} wirkt nur auf die nicht-holomorphen Anteile, z.B. $c_m q^{-m} \Gamma(k-1, 4\pi m y)$ und bildet es gemäß Definition C.3.5.1 auf $-(4\pi m)^{k-1} \bar{c}_m q^m$ ab und die Argumentation verläuft analog. \square

Satz C.3.5.8. Sei $k, m, n \in \mathbb{N}$:
 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\begin{aligned} T_n P_{2k}(m, z) &= \sum_{d|\mathrm{ggT}(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{2k-1} P_{2k}\left(\frac{mn}{d^2}, z\right) \\ k \in \mathbb{Z}: \quad T_n F_{2k}(m, z) &= \sum_{d|\mathrm{ggT}(m,n)} \left(\frac{n}{d}\right)^{2k-1} F_{2k}\left(\frac{mn}{d^2}, z\right) \end{aligned}$$

$(\Gamma_0(N), \chi)$:

Für Heckeoperatoren T_n mit $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$ gibt es keine Änderung gegenüber der Situation für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Für $t \mid N$ ist U_t der „richtige“ Heckeoperator. Sei $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, p \mid N, p_\chi = \begin{cases} 1, & \chi_p \text{ trivial,} \\ 0, & \chi_p \text{ primitiv,} \end{cases}$

$g(\chi_p) = \sum_{j=1}^{p-1} \chi_p(j) \exp\left(\frac{2\pi i j}{p}\right)$ die Gaußsumme

$$\begin{aligned} U_p P_{k,0}^{(N)}(m, z) &= p^{k-1} P_{k,0}^{(N)}(pm, z); \\ U_p P_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(m, z) &= \chi_{\frac{N}{p}}(p) p^{k-1} P_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(pm, z); \\ p \parallel N: \quad U_p P_{k,\infty}^{(N)}(m, z) &= \begin{cases} P_{k,\infty}^{(N)}\left(\frac{m}{p}, z\right) + p_\chi(p-1) p^{\frac{k-2}{2}} P_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(m, z), & p \mid m, \\ \chi_p(-1) g(\chi_p) p^{\frac{k-2}{2}} P_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(m, z), & p \nmid m. \end{cases} \\ k \in \mathbb{Z}: \quad U_p F_{k,0}^{(N)}(m, z) &= p^{k-1} F_{k,0}^{(N)}(pm, z). \\ U_p F_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(m, z) &= \chi_{\frac{N}{p}}(p) p^{k-1} F_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(pm, z). \\ p \parallel N: \quad U_p F_{k,\infty}^{(N)}(m, z) &= \begin{cases} F_{k,\infty}^{(N)}\left(\frac{m}{p}, z\right) + p_\chi(p-1) p^{\frac{k-2}{2}} F_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(m, z), & p \mid m, \\ \chi_p(-1) g(\chi_p) p^{\frac{k-2}{2}} F_{k, \frac{p}{N}}^{(N)}(m, z), & p \nmid m. \end{cases} \end{aligned}$$

Kohnen-Plus-Raum:

Für p Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} k \in \mathbb{N}, p \nmid n: \quad T_{p^2} P_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) &= p^{k-1} P_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) + p^{2k-1} P_{k+\frac{1}{2}}(p^2 n^2, z), \\ p \mid n: \quad T_{p^2} P_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) &= P_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{n^2}{p^2}, z\right) + p^{2k-1} P_{k+\frac{1}{2}}(p^2 n^2, z), \\ k \in \mathbb{Z}, p \nmid n: \quad T_{p^2} F_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) &= p^{k-1} F_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) + p^{2k-1} F_{k+\frac{1}{2}}(p^2 n^2, z), \\ p \mid n: \quad T_{p^2} F_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) &= F_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{n^2}{p^2}, z\right) + p^{2k-1} F_{k+\frac{1}{2}}(p^2 n^2, z). \end{aligned}$$

BEWEIS. Für die Gruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ findet sich das Resultat in [Iwaniec 3, 6.4 The Hecke operators for the modular group].

Durch Vergleich der Fourierreihen und entsprechende Identitäten über Kloostersummen hat man die Resultate für $\Gamma_0(N)$.

Die Poincaréreihen im Kohnen-Plus-Raum ergeben sich leicht mit Hilfe der Ω -Korrespondenz. Wegen Satz 3.1.8.1

ist

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(k) n^k}{(2\pi i)^k} \mathbb{T}_{p^2} P_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) \\ &= \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) m^k \left\{ p^{2k-1} \int_{\mathfrak{F}} P_{2k}(pm, \tau) \Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu + \int_{\mathfrak{F}} P_{2k}\left(\frac{m}{p}, \tau\right) \Theta_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu \right\} \\ &= \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) m^k \left\{ \frac{p^{2k-1} \Gamma(k)}{(2\pi i pm)^k} \sum_{l|pm} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) + \frac{\Gamma(k)}{(2\pi i \frac{m}{p})^k} \sum_{l|\frac{m}{p}} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) \right\}, \end{aligned}$$

also

$$n^k \mathbb{T}_{p^2} P_{k+\frac{1}{2}}(n^2, z) = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \left\{ p^{k-1} \sum_{l|pm} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) + p^k \sum_{l|\frac{m}{p}} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) \right\}.$$

Dank der Möbiusschen Umkehrformeln ist die Aussage des Satzes äquivalent zu

$$\begin{aligned} & p^k \sum_{l|\frac{n}{p}} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) + p^{k-1} \sum_{l|pn} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) \\ &= \sum_{m|n} \left\{ p^k \left(\frac{m}{p}\right)^k P_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{m^2}{p^2}, z\right) + p^{k-1} (pm)^k P_{k+\frac{1}{2}}(p^2 m^2, z) \right\} + p^{k-1} \sum_{\substack{m|n \\ p \nmid m}} m^k P_{k+\frac{1}{2}}(m^2, z). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$p^k \sum_{l|\frac{n}{p}} l^k P_{k+\frac{1}{2}}(l^2, z) = \sum_{m|n} p^k \left(\frac{m}{p}\right)^k P_{k+\frac{1}{2}}\left(\frac{m^2}{p^2}, z\right)$$

und die zweite Summe auf der linken Seite wird unterteilt in $p \mid l$ und $p \nmid l$.

Wegen Hilfssatz 3.2.6.1.1 ist für $2 \mid k$

$$\begin{aligned} & -2(4\pi i)^k n^{k+1} \mathbb{T}_{p^2} F_{k+\frac{3}{2}}(n^2, z) \\ &= p^{2k+1} \sum_{m|n} \frac{\mu\left(\frac{n}{m}\right)}{m^k} \left\{ p^{-2k-1} \int_{\mathfrak{F}} F_{-2k}(pm, \tau) \Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu + \int_{\mathfrak{F}} F_{-2k}\left(\frac{m}{p}, \tau\right) \Omega_{2k}^{\text{hol}}(z, \tau) d\mu \right\} \\ & \stackrel{\text{Folg. 3.2.5.1.1}}{=} -2(4\pi i)^k \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \left\{ p^k \sum_{l|pm} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) + p^{k+1} \sum_{l|\frac{m}{p}} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) \right\}, \end{aligned}$$

also

$$n^{k+1} \mathbb{T}_{p^2} F_{k+\frac{3}{2}}(n^2, z) = \sum_{m|n} \mu\left(\frac{n}{m}\right) \left\{ p^k \sum_{l|pm} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) + p^{k+1} \sum_{l|\frac{m}{p}} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) \right\}.$$

Dank der Möbiusschen Umkehrformeln ist die Aussage des Satzes äquivalent zu

$$\begin{aligned} & p^{k+1} \sum_{l|\frac{n}{p}} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) + p^k \sum_{l|pn} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) = \sum_{m|n} m^{k+1} \mathbb{T}_{p^2} F_{k+\frac{3}{2}}(m^2, z) \\ &= \sum_{m|n} \left\{ p^{k+1} \left(\frac{m}{p}\right)^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{m^2}{p^2}, z\right) + p^k (pm)^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(p^2 m^2, z) \right\} + p^k \sum_{\substack{m|n \\ p \nmid m}} m^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(m^2, z). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist

$$p^{k+1} \sum_{l \mid \frac{n}{p}} l^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}(l^2, z) = \sum_{m \mid n} p^{k+1} \left(\frac{m}{p}\right)^{k+1} F_{k+\frac{3}{2}}\left(\frac{m^2}{p^2}, z\right)$$

und die zweite Summe auf der linken Seite wird unterteilt in $p \mid l$ und $p \nmid l$.

Für ungerades k geht der Beweis analog. □

C.3.6. Struktursätze.

Hilfssatz C.3.6.1. *Eine holomorphe Funktion f ist eine Mock-Modulform aus $\mathbb{S}_k, \mathbb{M}_k$ bzw. $\mathbb{M}_k^!$ (vom Gewicht $k < 2$), falls es eine (schwach-)holomorphe Modulform $g \in S_{2-k}, M_{2-k}$ bzw. $M_{2-k}^!$ vom Gewicht $2 - k \in \frac{\mathbb{N}}{2}$ gibt, so dass*

$$(C.3.6.1) \quad f(z) + \tilde{g}(z) = f(z) + \mathbf{R} \cdot \int_{-\bar{z}}^{i\infty} g(\tau) (\tau + z)^{k-2} d\tau$$

eine harmonische schwache Maaßform vom Gewicht k ist.

Umgekehrt gibt es zu jedem $g \in S_{2-k}$ (bzw. $\in M_{2-k}, M_{2-k}^!$) eine Mock-Modulform $f \in \mathbb{S}_k$ (bzw. $\in \mathbb{M}_k, \mathbb{M}_k^!$), so dass Gleichung (C.3.6.1) gilt.

Folgerung C.3.6.1.1. *Mock-Spitzenformen $\widehat{\mathbb{S}}_k$ gibt es nur für negatives Gewicht, Mock-Modulformen $\widehat{\mathbb{M}}_k$ nur für $k \leq 2$.*

BEWEIS. Annahme $k > 2$; ξ_k würde die zugehörigen harmonischen schwachen Maaßformen in S_{2-k} bzw. $M_{2-k} = \emptyset$ abbilden. Beispiel vom Gewicht 2: $E_2 \in \widehat{\mathbb{M}}_2$. □

Hilfssatz C.3.6.2. [Bri Gu Ke On, Theorem 1.2] *Sei $k, N \in \mathbb{N}, k \geq 2, \chi$ ein Dirichletcharakter mod N . Es gibt folgende kurze exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow M_{2-k}^!(N, \chi) \xrightarrow{D^{k-1}} S_k^!(N, \chi) \longrightarrow S_k(N, \chi) \oplus S_k(N, \chi) \longrightarrow 0. \\ \sum_{i \geq -\infty} a_i q^i \quad \longmapsto \quad \sum_{i \geq -\infty} i^{k-1} a_i q^i \\ \widehat{\mathbb{M}}_{2-k}^!(N, \chi) = \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \chi) \oplus \Theta \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \chi) \oplus \langle E_{2-k}(N, \chi) \rangle \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{S}_{2-k}(N, \chi) \xrightarrow{D^{k-1}} S_k^!(N, \chi) \longrightarrow S_k(N, \chi) \longrightarrow 0, \quad D^{k-1} \text{ injektiv,} \\ 0 \longrightarrow \mathbb{M}_{2-k}(N, \chi) \xrightarrow{D^{k-1}} M_k^!(N, \chi) \longrightarrow S_k(N, \chi) \longrightarrow 0, \quad D^{k-1} \text{ injektiv,} \\ 0 \longrightarrow \Theta M_{2-k}^!(N, \chi) \hookrightarrow \Theta \widehat{\mathbb{S}}_{2-k}(N, \chi) \xrightarrow{D^{k-1}} S_k(N, \chi) \longrightarrow 0, \\ 0 \longrightarrow \Theta M_{2-k}^!(N, \chi) \hookrightarrow \widehat{\mathbb{M}}_{2-k}^!(N, \chi) \xrightarrow{D^{k-1}} M_k^!(N, \chi) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

BEWEIS. Schwach-holomorphe Modulformen der komplementären Gewichte k und $2 - k$ sind durch den Differenzialoperator D^{k-1} aufeinander bezogen: D^{k-1} bildet $M_{2-k}^!(N, \chi)$ auf Modulformen von komplementärem Gewicht k ab, [Bol]. Die Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ und Formen

$$\begin{aligned} q^{-i_1} + O(q), \\ q^{-i_2} + O(q), \\ \vdots \\ q^{-i_s} + O(q). \end{aligned}$$

aus $S_k^!(N, \chi)$ dual zur Basis (C.1.1.1) liegen nicht im Bild von D^{k-1} . Diese Hauptteile entsprechen unter der Korrespondenz D^{k-1} eindeutig harmonischen schwachen Maaßformen vom Gewicht $2 - k$, deren nicht-holomorpher Anteil in bijektiver Entsprechung zu den Spitzenformen $S_k(N, \chi)$ steht, vgl. auch [Br On Rh, Theorem 1.2, Remark 2]

Die letzten vier exakten Sequenzen sind [Br On Rh, Bruinier Funke 2, Theorem 1.2]. □

Hilfssatz C.3.6.3. [Br On Rh, (1.1)] *Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z} \setminus \{1\}$. Die folgenden Sequenzen sind exakt*

$$(C.3.6.2) \quad \begin{aligned} 0 &\longrightarrow M_k^1(N, \chi) \hookrightarrow \widehat{S}_k(N, \chi) \xrightarrow{\xi_k} S_{2-k}(N, \overline{\chi}) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow M_k^1(N, \chi) \hookrightarrow \widehat{M}_k(N, \chi) \xrightarrow{\xi_k} M_{2-k}(N, \overline{\chi}) \longrightarrow 0, \\ 0 &\longrightarrow M_k^1(N, \chi) \hookrightarrow \widehat{M}_k^1(N, \chi) \xrightarrow{\xi_k} M_{2-k}^1(N, \overline{\chi}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Bemerkung. Es ist eine interessante Frage, welche $\Gamma_0(4)$ -Poincaréreihen $F_{k,a}(m, z)$ einfache (rationale) Koeffizienten haben. Hier zwei Beispiele:

$$\begin{aligned} F_{-3,\infty}(-3, z) &= -64 - 3^4 \left\{ Q^{(-3)} - \frac{2}{27}Q^{(1)} - \frac{4096}{27}Q^{(2)} + \frac{458752}{27}Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-3,\infty}(-2, z) &= \frac{4}{5} - 4 \cdot 1,046340 \left(q - \frac{4}{2^4}q^2 + \frac{16}{4^4}q^4 - \frac{14}{5^4}q^5 + \dots \right) - 2^4 \left\{ Q^{(-2)} - 2Q^{(1)} + 768Q^{(3)} + 32Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-3,\infty}(-1, z) &= \frac{4}{5} + 1,046340 \left(q - \frac{4}{2^4}q^2 + \frac{16}{4^4}q^4 - \frac{14}{5^4}q^5 + \dots \right) - \left\{ Q^{(-1)} + 32Q^{(2)} + 6Q^{(3)} - 1152Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-3,\infty}(0, z) &= E_{-3,\infty}(z) = 1 + \frac{1}{L(4,-4)} \left\{ q + \frac{16}{2^4}q^2 + \frac{80}{3^4}q^3 + \frac{256}{4^4}q^4 + \dots + Q^{(1)} + 16Q^{(2)} + 80Q^{(3)} + 256Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-3,\infty}(1, z) &= \frac{1}{q} - \frac{4}{5} + \frac{32}{2^4}q^2 + \frac{6}{3^4}q^3 - \frac{1152}{4^4}q^4 + \dots - 1,046340 \left\{ Q^{(1)} - 4Q^{(2)} + 16Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-3,\infty}(2, z) &= \frac{1}{q^2} - \frac{4}{5} + 2^4 \left(-2q + \frac{768}{3^4}q^3 + \frac{32}{4^4}q^4 + \dots \right) + 4 \cdot 1,046340 \left\{ Q^{(1)} - 4Q^{(2)} + 16Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-3,\infty}(3, z) &= 1024 \frac{\theta_3^2(\theta_3^4 + 3\theta_4^4)}{\theta_2^{12}} = \frac{1}{q^3} + 64 + 3^4 \left(-\frac{2}{27}q - \frac{2^{12}}{2^4 \cdot 27}q^2 + \frac{458752}{4^4 \cdot 27}q^4 + \dots \right) \\ &\vdots \\ F_{5,\infty}(0, z) &= E_{5,\infty}(z) = 1 + \frac{4}{5}q + \frac{4}{5}q^2 - 64q^3 + \frac{4}{5}q^4 + \dots \\ F_{5,\infty}(1, z) &= \frac{1}{q} + 32q^2 + 6q^3 - 1152q^4 + \dots \\ F_{5,\infty}(2, z) &= \frac{1}{q^2} - 2q + 768q^3 + 32q^4 + \dots \\ F_{5,\infty}(3, z) &= \frac{1}{q^3} - \frac{2}{27}q - \frac{2^{12}}{27}q^2 + \frac{458752}{27}q^4 + \dots \end{aligned}$$

Der Operator D^{1-k} setzt sie mit den $F_{2-k,a}(m, z)$ in Beziehung, die oft ganzzahlige Fourierkoeffizienten haben: $F_{5,\infty}(m, z)$ und $F_{6,\infty}(2m, z)$ sind in $\mathbb{Q}\{q\}$:

$$\begin{aligned} F_{-4,\infty}(-6, z) &= -1952 - 6^5 \left\{ Q^{(-6)} - 402Q^{(2)} + 245760Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-4,\infty}(-4, z) &= 248 - 4^5 \left\{ Q^{(-4)} + 128Q^{(2)} - 36900Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-4,\infty}(-2, z) &= -8 - 2^5 \left\{ Q^{(-2)} - 36Q^{(2)} + 4096Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-4,\infty}(0, z) &= E_{-4,\infty}(z) = 1 + \frac{1}{\zeta(5)} \left\{ -\frac{8192\pi^5 y^5}{14175} + \frac{16}{15}q^2 + \frac{31}{32}q^4 + \dots + \frac{512}{15}Q^{(2)} + \frac{15872}{15}Q^{(4)} + \dots \right\} \\ F_{-4,\infty}(2, z) &= \frac{1}{q^2} - 8 - 2^5 \left(-\frac{36}{2^5}q^2 + \frac{4096}{4^5}q^4 + \dots \right) \\ F_{-4,\infty}(4, z) &= \frac{1}{q^4} + 248 - 4^5 \left(\frac{128}{2^5}q^2 - \frac{36900}{4^5}q^4 + \dots \right) \\ F_{-4,\infty}(6, z) &= \frac{1}{q^6} - 1952 - 6^5 \left(-\frac{402}{2^5}q^2 + \frac{245760}{4^5}q^4 + \dots \right) \\ &\vdots \\ F_{6,\infty}(0, z) &= E_{6,\infty}(z) = 1 + 8q^2 - 248q^4 + 1952q^6 - 8440q^8 + \dots \\ F_{6,\infty}(2, z) &= \frac{1}{q^2} - 36q^2 + 4096q^4 - 97686q^6 + 1179648q^8 + \dots \\ F_{6,\infty}(4, z) &= \frac{1}{q^4} + 128q^2 - 36900q^4 + 1866240q^6 - 43118592q^8 + \dots \end{aligned}$$

$$F_{6,\infty}(6, z) = \frac{1}{q^6} - 402q^2 + 245760q^4 - 22671936q^6 + 876085248q^8 + \dots$$

Natürlich ist das immer dann der Fall, wenn es keine Spitzenformen gibt, also für $k < 5$. Dann sind die $F_{2-k,a}(m, z) \in M_{2-k}^1(\Gamma_0(4))$ schwach-holomorph und diese Räume haben einfache Basen mit ganzzahligen Koeffizienten, vgl. z.B. [Choi 1].

Auch für $S_k(\Gamma_0(4)) = \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \tau(j) q^j \right\rangle$ eindimensional, lässt sich noch einiges sagen: Falls der erste Fourierkoeffizient von $F_{k,\infty}(m, z)$ ganz ist, sind alle Fourierkoeffizienten von $F_{k,\infty}(m, z)$ ganz. Für ungerades n betrachtet man die schwach-holomorphe Modulform

$$n^{k-1} T_n F_{2-k,\infty}(m, z) - \tau(n) F_{2-k,\infty}(m, z)$$

und schliesst durch Anwenden von D^{k-1} daraus, dass

$$T_n F_{k,\infty}(m, z) - \tau(n) F_{k,\infty}(m, z)$$

ganzzahlige Fourierkoeffizienten hat und speziell dass der n -ter Fourierkoeffizient von $F_{k,\infty}(m, z)$ ganz ist. Entsprechend ist der n -te Fourierkoeffizient von $m^{k-1} F_{k,\infty}(m, z) = D^{k-1} F_{2-k,\infty}(m, z)$ ganz.

Für $k = 6$ gibt es genau eine Heckeform $f = \theta_2^4 \theta_3^4 \theta_4^4 = q - 12q^3 + 54q^5 - 88q^7 - \dots$. Der erste Fourierkoeffizient von $F_{6,\infty}(2m, z)$ ist Null, da²² $S_{6,\infty,\infty}(-2m, 1; 4c) = 0$. Also sind alle ungeraden Koeffizienten von $F_{6,\infty}(2m, z)$ ganz. Wegen $U_2 f = 0$ ist $\xi_{-4} U_2 F_{-4,\infty}(2m, z) = 0$, also $U_2 F_{-4,\infty}(2m, z)$ schwach-holomorph und $U_2 F_{6,\infty}(2m, z)$ (die geraden Fourierkoeffizienten) ganzzahlig.

Für $k = 5$ kann man zusätzlich noch die Symmetrien aus Hilfssatz C.3.5.6 verwenden:

Falls der erste Fourierkoeffizient von $F_{k,\infty}(1, z)$ ganz ist, sind alle Koeffizienten von $F_{k,\infty}(1, z)$ ganz und daher die ersten Koeffizienten von allen $F_{k,\infty}(m, z)$ aus $\frac{1}{m^{k-1}}\mathbb{Z}$. Wie oben sind daher alle Koeffizienten aus $\frac{1}{m^{k-1}}\mathbb{Z}$. Man überlegt sich wieder, dass $S_{5,\infty,\infty}(-1, 1, 4c) = 0$, da in der Definition C.3.3.4.1 der Beitrag jedes Paares (d, a) genau durch ein Paar $(4c - a, 4c - d)$ wieder ausgeglichen wird.

In [Br On Rh] werden rationale Koeffizienten von F^+ mit dem Verschwinden von Hecke-Eigenwerten und mit CM-Spitzenformen in Verbindung gebracht, vgl. den Übersichtsartikel [Ono 3, 12.2 Algebraicity and the vanishing of Hecke eigenvalues].

C.4. Overkonvergente Modulformen

C.4.1. Spektraltheorie des U_p – Operators. Die Teilbarkeitsbetrachtungen aus dem 5. Kapitel „Fourierkoeffizienten“ lassen sich verfeinern, indem man statt $\widehat{M}_k^1(N, \chi)$ Räume overkonvergenter Modulformen betrachtet. Es zeigt sich, dass p -adische Modulformen $f(z)$ für $z_{ss} \in \Gamma \setminus \mathcal{H}$, das einer supersingulären elliptischen Kurve entspricht, divergiert. Supersinguläre elliptische Kurven haben Hasse-Invariante Null. Nun ist die Eisensteinreihe E_{p-1} für $p \geq 5$ ein Lift der Hasse-Invariante auf Charakteristik Null und man verlangt, dass r -overkonvergente Modulformen mit p -adischen algebraischen Koeffizienten noch für Punkte $z \in X_0(p^m)$ mit $\text{ord}_p E_{p-1}(z) \leq r$ konvergieren. Für $p = 2 \vee 3$ verlangt man : $\text{ord}_p E_4(z) \leq \frac{4r}{p-1}$. Schwach-holomorphe Modulformen mit Pol nur bei Null sind automatisch overkonvergent. Pole bei unendlich werden mit dem U_p – Operator in die Spitze Null verschoben, vgl. Satz C.3.5.8, und sind dann overkonvergent. Zusätzlich zu den bekannten Hecke-Spitzenformen gibt es abzählbar unendlich viele weitere U_p – Eigenformen, deren Newtonsteigungen $\geq k - 1$ sind ([Coleman 1, Theorem 6.1]) und gegen ∞ gehen (\rightarrow Spektraltheorie kompakter Operatoren). Für diese Eigenformen sind die p -Ordnungen ihrer Fourierkoeffizienten arithmetisch, vgl. Hilfssatz 5.1.8. Der Vorteil der Spektralzerlegung in overkonvergente U_p – Eigenformen liegt darin, dass sich das von Spitzenformen auf schwach-holomorphe Modulformen, Mock-Modulformen, ja sogar auf Jacobiformen ausdehnen lässt und eine einheitliche Erklärung für Ramanujankongruenzen bei allem, was eine overkonvergente Spektralentwicklung hat, ermöglicht. Die in Abschnitt 5.3 betrachteten schwachen Heckeformen sind Summe der entsprechenden Hecke-Spitzenformen und Eigenformen mit Newtonsteigungen $\geq k - 1$.

Definition C.4.1.1. Wir betrachten exemplarisch den Fall, dass die Modulkurve $X_0(p)$ Geschlecht Null hat. Betrachte folgende Räume p -adischer r -overkonvergenter Modulformen ($0 \leq r < \frac{p}{p+1}$) vom Gewicht k :

$$M_{(\chi,k)}(p, r) := \left\{ f \mid f = E^* \sum_{i=0}^{\infty} C_i \left(\frac{p^{\text{konst}(p) \cdot r}}{j_p} \right)^i, C_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p, |C_i|_p \rightarrow 0 \right\}$$

²²In der Definition der Kloostersummen tritt zu jedem Paar (d, a) auch $(a + 2c, d + 2c)$ auf, was den Beitrag annulliert.

mit der $(\Gamma_0(p), \chi)$ -Eisensteinreihe E^* mit U_p -Eigenwert²³ 1, j_p der Hauptmodul²⁴ der Gruppe $\Gamma_0(p)$, Null in der Spitze Null, einfacher Pol in der Spitze ∞ ; vgl. [Loeffler, Theorem 1, Corollary 2] für den Spezialfall $\Gamma_0(p)$.

Man kann diese overkonvergenten Modulformen explizit mit SAGE ausrechnen. Für $X_0(p)$ vom Geschlecht 1 vgl. [Kilford 3]. Tatsächlich benutzen wir overkonvergente Modulformen etwas allgemeiner als hier definiert, vgl. etwa [Kilford 1, 1.2 Definitions], [Coleman 1, Coleman 2, Gouvêa 1].

Sei p eine Primzahl. Wir fixieren einen algebraischen Abschluß $\overline{\mathbb{Q}}_p$ von \mathbb{Q}_p zusammen mit einer Einbettung von $\overline{\mathbb{Q}}$ in $\overline{\mathbb{Q}}_p$. Außerdem betten wir $\overline{\mathbb{Q}}_p$ in seine Vervollständigung \mathbb{C}_p ein. Diese Einbettungen bestimmen eine Erweiterung der p -adischen Bewertung auf \mathbb{C}_p , die wir so normalisieren, dass $\text{ord}_p(p) = 1$.

Hilfssatz C.4.1.2. Sei $k \in \mathbb{N}_0, \forall m \in \mathbb{N}, 0 \leq r < \frac{p^{2-m}}{p+1} : M_{k,0}^!(Np^m, \chi) \cap \overline{\mathbb{Q}}\{q\} \subset M_{(\chi,k)}(N, p, r);$
 $M_{(\chi,k)}(N, p, r)$ ist der Raum p -adischer r -overkonvergenter Modulformen zur Gruppe $\Gamma_0(N)$.

BEWEIS. Sei $m = 1$. Der Hauptmodul j_N hat einen einfachen Pol in der Spitze ∞ . Sei $f \in M_{k,0}^!(Np, \chi)$ mit algebraischen Fourierkoeffizienten. Dann gibt es ein $g = E^* \cdot \text{Polynom}\left(\frac{1}{j_N}\right)$, so dass $f - g \in M_k(Np, \chi)$ und holomorphe (klassische) Modulformen sind overkonvergent für beliebiges $r < \frac{p}{p+1}$, [Coleman 1, Theorem 8.1]. Für höhere Stufe vgl. [Gouvêa 1, I.3.5. Modular forms and modular functions], [Gouvêa Mazur], [Co Gou Joch, 1 (2)]. □

Die folgenden Überlegungen sind unabhängig davon, ob $X_0(N)$ Geschlecht Null hat.

Bemerkung. Für $r = 0$ hat man [Serre 1]'s p -adische Modulformen.

Eigenfunktionen des U_p -Operators, die r -overkonvergent für irgendein $r > 0$ sind, sind gleichzeitig r -overkonvergent für alle $r \in \left(0, \frac{p}{p+1}\right)$, [Co Gou Joch, 1 (4)], [Gouvêa 1, Corollary II.3.18]. Deshalb lege ich $r \in \left(0, \frac{p}{p+1}\right)$ nicht näher fest.

Im folgenden interessiert hauptsächlich die Eigenschaft, dass overkonvergente Funktionen eine Spektralzerlegung haben:

Satz C.4.1.3 (Asymptotische Spektralzerlegung). Sei f eine p -adische r -overkonvergente Modulform, $0 < r < \frac{p}{p+1}$. Es gibt eindeutige $C_i \in \overline{\mathbb{Q}}_p, C_i \rightarrow 0$, so dass für jedes $x > 0$ gilt:

$$\forall m \gg 1, n \in \mathbb{N} : \text{ord}_p\left(f - \sum_{\text{ord}_p(v_i) < x} C_i g_i\right) \Big|_{p^{m \cdot n}} > mx$$

mit den normierten verallgemeinerten Eigenfunktionen $g_i(z) = q + O(q^2)$ zu den Eigenwerten v_i des U_p -Operators auf den overkonvergenten Modulformen. Wir schreiben

$$f \asymp C_1 g_1 + C_2 g_2 + C_3 g_3 + \dots$$

BEWEIS. Für $f \in M_{(\chi,k)}(N, p, r)$ mit $r < \frac{1}{p+1}$ ist Uf rp -overkonvergent. Falls f mindestens $\frac{1}{p+1}$ -overkonvergent ist, hat man die Beh. aus [Gouvêa Mazur, Prop. 1 für $k = 0$], [Loeffler, 5 Spectral Expansions]. □

Bemerkung. Die ersten $\dim M_k(N, \chi)$ Eigenfunktionen bilden das *klassische* Spektrum: Eisensteinreihen mit den Newtonsteigungen 0 und $k - 1$ und die Hecke-Spitzenformen $\Upsilon_i, i = 1, \dots, s$. Die Eigenräume zu allen Eigenwerten v_i sind endlich dimensional.

Es gibt über die overkonvergenten Modulformen hinaus weitere Funktionen, die eine analoge Spektralreihe mit denselben overkonvergenten Eigenfunktionen haben und für die Satz C.4.1.3 von [Gouvêa Mazur] gilt.

²³vgl. [Coleman 2, B1. Eisenstein series], für $k > 0$ ist $E^*(z) = E_{k,1,\chi}(z) = -\frac{B_{k,\chi}}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1,\chi}(n) q^n$

²⁴vgl. [Choi 1, Table 2]

Definition C.4.1.4. Für Funktionen $f(z) = \sum_{i \gg -\infty} f|_i q^i$ schreiben wir

$$(C.4.1.1) \quad f := C_1 g_1 + C_2 g_2 + C_3 g_3 + \dots$$

und nennen es die *asymptotische Spektralentwicklung*²⁵ von f , falls $\exists C_{i,l} \in \overline{\mathbb{Q}}_p$, so dass für jedes $x > 0$ gilt:

$$\forall m \gg 1: \quad \text{ord}_p \left(f(p^m) - \sum_{\text{ord}_p(v_i) < x} (C_{i,0} + C_{i,1}m + C_{i,2}m^2 + \dots + C_{i,j_i}m^{j_i}) v_i^m \right) > mx.$$

Dabei sind $g_{i,l}$ normierte verallgemeinerte²⁶ Eigenfunktionen $g_{i,l}(z) = q + O(q^2)$ zum gleichen Eigenwert v_i des U_p -Operators auf den overkonvergenten Modulformen; in Worten: Der Fehler bei Abbruch der Spektralreihe ist (irgendwann) kleiner als der letzte Term (ohne Koeffizient).

Bemerkung. Die linke Seite in (C.4.1.1) hat eventuell einen Pol in der Spitze ∞ , die rechte Seite nicht. Die Relation bezieht sich nur auf genügend große Koeffizienten des p -Teil. Es ist sehr schwierig, etwas über andere Koeffizienten als den p -Teil zu sagen, da es Eigenformen im Kern des U_p -Operators gibt, z.B. Neufolgen aus $S_k(p^2, \chi \pmod p)$. Unsere Spektralentwicklung legt die Funktion nicht eindeutig fest. Daher wird die Spektralreihe i.a. nicht koeffizientenweise gegen die Funktion konvergieren.

Hilfssatz C.4.1.5. Seien $\Upsilon_i, i = 0, 1, 2, \dots$ die p -adischen overkonvergenten Eigenfunktionen, die im Spektrum von Funktionen aus $M_k^!(N, \chi), k > 0$ vorkommen. Eigenfunktionen Υ_i mit Newtonsteigung $\geq k - 1$ entsprechen bijektiv Eigenfunktionen $\tilde{\Upsilon}_i$, die das Spektrum von Funktionen aus $M_{2-k}^!(N, \chi)$ aufspannen; dabei ist $\tilde{\Upsilon}_i$ das Eichlerintegral von Υ_i , also $D^{k-1}\tilde{\Upsilon}_i = \Upsilon_i$.

BEWEIS. Sei $\sum_i C_i \Upsilon_i'$ die Spektralreihe von $f \in M_{2-k}^!(N, \chi)$. Dann ist $\sum_i C_i D^{k-1} \Upsilon_i'$ Spektralreihe von $D^{k-1} f \in D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$. Der Operator D^{k-1} bildet Eigenformen $\neq 1$ mit Eigenwert ψ_i auf Eigenformen mit Eigenwert $p^{k-1}\psi_i$ ab und erhält Overkonvergenz, [Coleman 1, Prop. 4.3]. Die Spektralreihe ist eindeutig. Funktionen aus $M_k^!(N, \chi)$ enthalten keine weiteren Eigenfunktionen. Man kann mit Hilfe der Heckeoperatoren den nicht-holomorphen Anteil löschen: Angenommen $\sum_j d_j \Upsilon_j$ ist die Spektralreihe von $g \in M_k^!(N, \chi)$. Dann ist das Eichlerintegral \tilde{g} Mock-Modulform aus $\mathbb{M}_{2-k}(N, \chi)$, vgl. Folgerung C.3.3.1.3.1 und $\prod_{i=0}^{s+1} (U_p - v_i) g \in D^{k-1}(M_{2-k}^!(N, \chi))$ hat die Spektralreihe $\sum_j \left(\prod_{i=0}^{s+1} (v_j - v_i) d_j \right) \Upsilon_j$, offensichtlich mit denselben Spektralfunktionen (bis auf die ersten $\dim M_k(N, \chi)$ Eigenformen zum klassischen Spektrum und Newtonsteigung $\leq k - 1$). \square

Dadurch wird der Fall overkonvergenter Modulformen für die Gewichte k und $2 - k$ nahezu identisch.

Proposition C.4.1.6. Einige Funktionen mit asymptotischer Spektralentwicklung:

- (1) Mit f_1 und f_2 haben auch $c_1 f_1 + c_2 f_2, U_p f_1$ und $V_p f_2$ asymptotische Spektralentwicklungen.
- (2) Schwach-holomorphe Modulformen mit algebraischen Fourierkoeffizienten haben eine asymptotische Spektralentwicklung.
- (3) Sei $f \in \mathbb{M}_{2-k}(N, \chi), k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ eine Mock-Modulform mit ganzalgebraischen Koeffizienten. Angenommen die T_p -Eigenwerte auf $S_k(N, \chi)$ sind paarweise verschieden:
 - (a) Dann enthält $D^{k-1} f$ keine klassischen Hecke-Spitzenformen im overkonvergenten Spektrum.
 - (b) Die Mock-Modulform f besitzt eine asymptotische Spektralreihe.
 - (c) Es gibt eine overkonvergente $M_{(\chi, 2-k)}(N, p, r)$ -Modulform, die die gleiche Spektralzerlegung hat.
- (4) Falls der T_p -Eigenwert $\tau_i(p)$ einfach ist, enthält eine schwache Hecke-Eigenform zum Eigenwert $\tau_i(p)$ außer (eventuell) den U_p -Eigenformen in den Eigenräumen zu v_i und v_i^c keine weiteren (klassischen) Spitzenformen im overkonvergenten Spektrum.

BEWEIS. Der erste Punkt ist klar.

(2): Wegen Hilfssatz C.4.1.2 ist das klar für $M_{k,0}^!(\Gamma_0(p))$. Pole in der Spitze ∞ werden mit dem U_p -Operator in die Spitze $\frac{p}{N}$ verschoben und Pole in $\frac{p}{N}$ kann man löschen, indem man $E^* \cdot \text{Polynom} \left(\frac{1}{j_p} \right)$ subtrahiert.

²⁵eigentlich die asymptotische Spektralentwicklung des p -Teils von f . Die Beiträge zu einfachen Hecke-Eigenwerten sind eindeutig. Die Definition berücksichtigt eigentlich nur die Eigenwerte (und nicht die Eigenformen).

²⁶Für $SL_2(\mathbb{Z})$ und vermutlich für $\Gamma_0(p), p = 2, 3, 5$ sind die U_p -Eigenräume eindimensional, dann ist $\sum C_i v_i^m$ die Spektralreihe.

(3)(a): Enthielte $D^{k-1}f$ eine klassische Heckeform Υ_i im Spektrum, so wäre $D^{k-1}f$ α_i -arithmetisch im Widerspruch zu $f \in \mathbb{Z}\{q\}$.

(b): Wenn $U^m f$ eine asymptotische Spektralreihe hat, so wegen (1) und (2) auch $f \sim V^m U^m f \sim \sum_j C_j \Upsilon_j$. Da f ganzalgebraische Koeffizienten hat, ist die minimale Newtonsteigung der Spektralfunktionen wegen (3) mindestens $k - 1$, d.h. das Spektrum von $D^{k-1}f$ enthält nur Eigenformen Υ_i , die unter D^{k-1} ein Urbild ($\tilde{\Upsilon}_i$) haben. Daher hat f die asymptotische Spektralreihe $\sum_j C_j \tilde{\Upsilon}_j$.

(c): Ist $\sum_j d_j \Upsilon_j$ die Spektralreihe von $\prod_{i=1}^n (p^{k-1} U_p - v_i) f$, so ist $\sum_j C_j \Upsilon_j$ die Spektralreihe von f mit $d_j = \prod_{i=1}^n (v_i - v_j) C_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \text{konst} \cdot C_j$ und die eine Spektralreihe konvergiert genau dort, wo auch die andere konvergiert, also in derselben p -adischen $\frac{1}{j_p}$ -Scheibe.

(4): Der Operator $T_p - p^{1-k} \tau_i(p)$ löscht den Schatten der zugehörigen Mock-Modulform $\forall p \nmid N$ und daher ist $T_p - \tau_i(p)$ angewendet auf die schwache Heckeform aus $D^{k-1}(M_{2-k}^1(N, \chi))$, enthält also keine Spitzenform im Spektrum. Andererseits löscht $T_p - \tau_i(p)$ genau die U_p -Eigenformen Υ und Υ^c aus dem Spektrum. \square

Satz C.4.1.7 ([Atkin]-Verfahren). *Sei f eine schwach-holomorphe Modulform vom Gewicht k oder Mock-Modulform vom Gewicht $2 - k$ mit ganzalgebraischen Koeffizienten zur Gruppe $\Gamma_0(N)$, Nebentyp χ und $f \sim C_1 g_1 + C_2 g_2 + C_3 g_3 + \dots$ die asymptotische Spektralzerlegung in overkonvergente U_p -Eigenfunktionen g_i zu den Eigenwerten v_1, v_2, v_3, \dots mit eindeutiger minimaler Newtonsteigung $\alpha_1 < \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \dots$. Dann konvergiert das wiederholte Anwenden des U_p -Operators auf den holomorphen Anteil, gefolgt von einer Normalisierung des Fourierkoeffizienten von q^1 auf 1 gegen die Eigenform g_1 niedrigster Newtonsteigung α_1 , d.h. die ursprüngliche Funktion f ist α_1 -arithmetisch.*

BEWEIS. Die Funktion f besitzt nach Proposition C.4.1.6 eine asymptotische Spektralreihe

$$f \sim C_1 g_1 + C_2 g_2 + C_3 g_3 + \dots, \quad C_i \rightarrow 0$$

und

$$U_p^m f \sim C_1 v_1^m g_1 + C_2 v_2^m g_2 + C_3 v_3^m g_3 + \dots \sim C_1 v_1^m g_1, \quad \text{da } \left(\frac{v_i}{v_1}\right)^m \rightarrow 0.$$

\square

Der nächste Abschnitt behandelt ein Beispiel dazu.

Beispiele (Ramanujans Mock-Modulformen). Ramanujan erwähnte in seinem letzten Brief an Hardy aus dem Jahr 1920 folgende q -Reihen:

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} f(m) q^m = 1 + \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^4}{(1+q)^2(1+q^2)^2} + \frac{q^9}{(1+q)^2(1+q^2)^2(1+q^3)^2} + \dots = \frac{1 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\frac{n(3n+1)}{2}}}{1+q^n}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)},$$

$$\omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega(m) q^m = \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{q^4}{(1-q)^2(1-q^3)^2} + \frac{q^{12}}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2} + \dots = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{3n(n+1) \frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}}}{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})}.$$

[Zwegers 2] zeigte, dass $\begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{24}} f(z) \\ 2q^{\frac{1}{3}} \omega\left(\frac{z}{2}\right) \\ 2q^{\frac{1}{3}} \omega\left(\frac{z+1}{2}\right) \end{pmatrix}$ holomorpher Anteil einer vektorwertigen Modulform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ ist.

Die Situation für halbganzes Gewicht unterscheidet sich geringfügig von den Überlegungen für ganzes Gewicht²⁷:

²⁷vgl. die Arbeit von [Folsom Kent Ono] über Partitionszahlen

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} f(5n+4)q^n &= -3 + 6q - 17q^2 + 34q^3 - 53q^4 + 89q^5 - 154q^6 + 245q^7 - 369q^8 + 557q^9 + \dots \\
 &\equiv 2 + q + 3q^2 + 4q^3 + 2q^4 + 4q^5 + q^6 + q^8 + 2q^9 + 4q^{11} + 2q^{12} + 3q^{14} + \dots \pmod{5}, \\
 -\sum_{n=0}^{\infty} f(5^3n+99)q^n &\equiv 22 + q + 18q^2 + 19q^3 + 22q^4 + 19q^5 + 16q^6 + 20q^7 + 6q^8 + 7q^9 + 5q^{10} + \dots \pmod{5^2} \\
 &\equiv 2 + q + 3q^2 + 4q^3 + 2q^4 + 4q^5 + q^6 + q^8 + 2q^9 + 4q^{11} + 2q^{12} + 3q^{14} + \dots \pmod{5}, \\
 \sum_{n=0}^{\infty} f(5^5n+2474)q^n &\equiv 22 + q + 18q^2 + 19q^3 + 22q^4 + 19q^5 + 16q^6 + 20q^7 + 6q^8 + 7q^9 + 5q^{10} + \dots \pmod{5^2} \\
 &\vdots \\
 \sum_{n=0}^{\infty} f(5^2n+24)q^n &= -53 + 557q - 3592q^2 + 17503q^3 - 71396q^4 + 257256q^5 - 841990q^6 + \dots, \\
 &\equiv 22 + 7q + 8q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 10q^6 + 2q^7 + 24q^8 + 24q^9 + 6q^{11} + \dots \pmod{5^2}, \\
 -\sum_{n=0}^{\infty} f(5^4n+599)q^n &\equiv 47 + 32q + 108q^2 + 28q^3 + 79q^4 + 81q^5 + 85q^6 + 102q^7 + 24q^8 + 49q^9 + \dots \pmod{5^3}, \\
 &\equiv 22 + 7q + 8q^2 + 3q^3 + 4q^4 + 6q^5 + 10q^6 + 2q^7 + 24q^8 + 24q^9 + 6q^{11} + \dots \pmod{5^2}, \\
 \sum_{n=0}^{\infty} f(5^6n+14974)q^n &\equiv 47 + 32q + 108q^2 + 28q^3 + 79q^4 + 81q^5 + 85q^6 + 102q^7 + 24q^8 + 49q^9 + \dots \pmod{5^3}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Analoges gilt für die Koeffizienten $\omega(m)$.

Vermutung C.4.1.8. Sei $p = 5 \vee 7$. Definiere Folgen $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}, (d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen minimal mit

$$\begin{aligned}
 24c_n - 1 &\equiv 0 \pmod{p^n}, \\
 3d_n + 2 &\equiv 0 \pmod{p^n}.
 \end{aligned}$$

Zu jedem $m_0 \in \mathbb{N}$ und alle $m > m_0, m \equiv m_0 \pmod{2}$ gilt

$$\begin{aligned}
 (-1)^{\frac{m-m_0}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} f(5^m n + c_m) q^n &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(5^{m_0} n + c_{m_0}) q^n \pmod{5^{\lfloor \frac{m_0+2}{2} \rfloor}}, \\
 \sum_{n=0}^{\infty} f(7^m n + c_m) q^n &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(7^{m_0} n + c_{m_0}) q^n \pmod{7^{\lfloor \frac{m_0+1}{2} \rfloor}}; \\
 (-1)^{\frac{m-m_0}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \omega(5^m n + d_m) q^n &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \omega(5^{m_0} n + d_{m_0}) q^n \pmod{5^{\lfloor \frac{m_0+2}{2} \rfloor}}, \\
 \sum_{n=0}^{\infty} \omega(7^m n + d_m) q^n &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \omega(7^{m_0} n + d_{m_0}) q^n \pmod{7^{\lfloor \frac{m_0+1}{2} \rfloor}}.
 \end{aligned}$$

C.4.2. Automorphe Formen mit Ramanujan-Kongruenzen. Außer schwach-holomorphen Modulformen weisen auch viele meromorphe Modulformen (mit Polen in der oberen Halbebene) Ramanujan-Kongruenzen auf.

Beispiele. Sei

$$f(z) = \frac{(E_4(z) - E_4(3z))(81E_4(3z) - E_4(z))}{19200} = q + 6q^2 - 27q^3 - 92q^4 + 390q^5 - 162q^6 + \dots$$

die Neufom aus $S_8(\Gamma_0(3))$ mit Nullstellen in $z = \infty, 0, \frac{3+i\sqrt{3}}{6}$ und

$$g(z) = 41 \frac{E_8(z)^2}{f(z)} + 19935 E_8(z) - 3^{10} E_8(3z) = \frac{41}{q} + 23859063q + 3672984352q^2 + \dots$$

Dann gilt für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} U_{2^n} f(z) &\equiv 0 \pmod{2^n}, & U_{2^n} g(z) &\equiv 0 \pmod{2^{n+4}}, \\ U_{3^n} f(z) &\equiv 0 \pmod{3^{3n}}, & U_{3^n} g(z) &\equiv 0 \pmod{3^{3n+9}}, \\ U_{5^n} f(z) &\equiv 0 \pmod{5^n}, & U_{5^n} g(z) &\equiv 0 \pmod{5^n}. \end{aligned}$$

Bemerkung. Im Unterschied zu schwach-holomorphen Modulformen sind die Nenner der Fourierkoeffizienten i.a. nicht beschränkt.

Satz C.4.2.1. Sei $S_k(\Gamma_0(p)) \neq \emptyset$ und f eine meromorphe Modulform vom Gewicht k zur Gruppe $\Gamma_0(p)$, $p = 2, 3, 5 \vee 7$, mit algebraischen Fourierkoeffizienten und mit Polstellen in Punkten $z_1, \dots, z_m \in \overline{\mathfrak{F}}$, so dass die Werte des Hauptmoduls j_p dort algebraisch sind und

$$\text{ord}_p j_p(z_i) > 0, \quad i = 1, \dots, m;$$

dann hat f eine asymptotische Spektralentwicklung in p -adische overkonvergente Eigenfunktionen des U_p -Operators. Falls der konstante Fourierkoeffizient in allen Spitzen Null ist, gibt es Kongruenzen

$$\forall n : \quad U_{p^n} f(z) \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_1 n + c}},$$

dabei ist α_1 die minimale Steigung des Newtonpolygons des charakteristischen Polynoms von T_p auf den Spitzenformen, c eine (ineffektive) Konstante.

BEWEIS. Mit $a_i := j_p(z_i)$ und natürlichen Zahlen b_i gilt:

$$f \cdot \prod_{i=1}^m (j_p - a_i)^{b_i} \text{ ist eine schwach-holomorphe Modulform, mit asymptotischer Spektralentwicklung;}$$

p -adische r -overkonvergente Modulformen bilden (für festes p und r) einen Ring: Man kann sie als p -adische Grenzwerte von q -Reihen²⁸ klassischer Modulformen definieren, die in bestimmten z -Mengen p -adisch konvergieren. Das gleiche gilt dann für Linearkombinationen und Produkte dieser Grenzwerte. Daher reicht es zu zeigen, dass $\prod_{i=1}^m \frac{1}{(j_p - a_i)^{b_i}}$ bzw. die Partialbrüche $\frac{1}{(j_p - a_i)^b}$ (ein wenig) overkonvergent sind.²⁹ Das folgt aus

$$\frac{1}{j_p - a_i} = \frac{1}{j_p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a_i}{j_p} \right)^n, \text{ vgl. [Loeffler, Theorem 1, Corollary 2].}$$

Damit haben wir bewiesen:

$$\exists s \in \mathbb{N} : \quad U_{p^s} f \text{ ist overkonvergent,}$$

d.h. es gibt nach Satz C.4.1.3 eine asymptotische Entwicklung von f in p -adische overkonvergente Eigenfunktionen des U_p -Operators.

Ist der konstante Fourierkoeffizient einer p -adischen Modulform g Null, so gehen auch die p^m -ten Fourierkoeffizienten von g gegen Null:

$$c_0(g) = \frac{1 - p^{k-1}}{2} \zeta(1 - k) \lim_{m \rightarrow \infty} c_{p^m}(g), \text{ [Serre 1, Theorem 7].}$$

Der konstante Fourierkoeffizient ändert sich nicht durch Anwendung des U_p -Operators. Die Eisensteinreihe $E^* = E_k - p^{k-1} V_p E_k$ der Newtonsteigung Null kommt in der Spektralentwicklung von f nicht vor, da ihr p^m -ter Fourierkoeffizient 1 ist. Eigenfunktionen der Newtonsteigung $< k - 1$ sind klassische (holomorphe) Modulformen, die Eisensteinreihe E^* sowie Spitzenformen, [Coleman 1, Theorem 6.1]. Daher ist α_1 die kleinste mögliche Newtonsteigung der Spektralfunktionen von f . □

Die Voraussetzungen des Satzes sind oft erfüllt, z.B. im obigen Beispiel für $p = 3$:

Hilfssatz C.4.2.2. Ist z_0 die Nullstelle einer Spitzenform mit algebraischen Fourierkoeffizienten, z.B. einer Neuforn, so ist $j_p(z_0)$ algebraisch.

Ist umgekehrt $j_p(z_0)$ algebraisch, so gibt es eine Spitzenform mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten, die in z_0 eine einfache Nullstelle hat.

²⁸ $q = \exp(2\pi iz)$

²⁹Ihre Fourierkoeffizienten haben in $\overline{\mathbb{Q}_p}$ beschränkte Nenner.

BEWEIS. Nach [Choi 1, Lemma 2.1, Beweis von Theorem 1] sind solche Spitzenformen in $\Delta_{p,12}^a \Delta_{p,4}^b \Delta_{p,6}^c \overline{\mathbb{Q}}[j_p]$; davon hat $\Delta_{p,12}$ keine Nullstellen, während die j_p -Werte der Nullstellen von $\Delta_{p,4}, \Delta_{p,6}$ algebraisch sind. Das Polynom (in j_p) hat natürlich algebraische Nullstellen.

Sei umgekehrt $j_p(z_0)$ algebraisch vom Grad n . Wähle ein Polynom aus $\mathbb{Z}[X]$ vom Grad n mit dieser Nullstelle. Wähle das Gewicht k so, dass $\dim S_k(\Gamma_0(p)) = n$. Dann gibt es nach obiger Konstruktion eine Spitzenform aus $S_k(\Gamma_0(p))$ mit ganzzahligen Fourierkoeffizienten. \square

C.4.3. Fourierkoeffizienten und Spektralzerlegung. Zur Entdeckung der Ramanujankongruenzen bei fast jeder Modulform aus $M_k^!(N, \chi)$, $k \in \mathbb{N}$ haben sich die Basen H_{p^j} als nützlich erwiesen. Diese Basisfunktionen haben eine interessante Spektralzerlegung in overkonvergente U_p -Hecke-Eigenformen. Da die betrachteten unendlichen Reihen nur dann p -adisch konvergieren, falls die minimale Newtonsteigung der Hecke-Spitzenformen positiv ist, nehmen wir an, dass die Primzahl p *ungewöhnlich* ist und $p \nmid N$. In diesem Abschnitt verwenden wir wieder die Abkürzungen:

$$h_{p^m} := h_{p^m}(p^n).$$

Es folgen einige Identitäten für die Koeffizienten der schwachen Neufornen $f' \in S_k^!(N, \chi)$ aus Abschnitt 5.3 zum T_p -Eigenwert $\tau_i(p)$. Sei d der Heckedefekt von f' entsprechend Definition 5.3.1.

Hilfssatz C.4.3.1. Sei $X_0(N)$ vom Geschlecht Null, $p \nmid N$. Für (schwache) $(\Gamma_0(N), \chi)$ -Neufornen und $\forall m, j \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \tau_i(p^{m+j}) &= \tau_i(p^j) \tau_i(p^m) - \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-1}) \tau_i(p^{m-1}), \\ \tau_i'(p^{m+j}) &= \tau_i(p^j) \tau_i'(p^m) - \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-1}) \tau_i'(p^{m-1}) + \sum_{l=0}^{j-1} \tau_i(p^{j-l-1}) p^{(m+l)(k-1)} d|_{p^{m+l}}. \end{aligned}$$

Sei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a + b = c + d$, $c = \min(a, b, c, d)$. Dann ist³⁰

$$\tau_i(p^a) \tau_i(p^b) - \tau_i(p^c) \tau_i(p^d) = (\chi(p) p^{k-1})^{c+1} \tau_i(p^{a-c-1}) \tau_i(p^{b-c-1}).$$

Sei $\tau_i(p^m) := \frac{v_i^{m+1} - (v_i^c)^{m+1}}{v_i - v_i^c}$, $v_i v_i^c = \chi(p) p^{k-1}$, $v_i \neq v_i^c$. Für Konstanten $c \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^s c^r \tau_i(p^{\lfloor \frac{s-r}{2} \rfloor}) \tau_i(p^{\lfloor \frac{s+1-r}{2} \rfloor}) &= \frac{c^{s+2}}{(v_i - v_i^c)^2} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^{s+3}}{1 - \frac{v_i}{c}} + \frac{1 - \left(\frac{v_i^c}{c}\right)^{s+3}}{1 - \frac{v_i^c}{c}} \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{1 - \left(\frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2}\right)^{\lfloor \frac{s+4}{2} \rfloor}}{1 - \frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2}} - \frac{\tau_i}{c} \frac{1 - \left(\frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2}\right)^{\lfloor \frac{s+3}{2} \rfloor}}{1 - \frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2}} \right\} \end{aligned}$$

Sei $\Delta_{p^{n-1}}^{\{N\}} = \sum_{j=1}^{\infty} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(j) q^j$ die Spitzenform aus Satz C.1.1.4. Dann hat man für ihre Koeffizienten, $u \geq 2b, l = 1$:

$$\sum_{t=a}^b (\chi(p) p^{k-1})^t \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{u-2t}) = (\chi(p) p^{k-1})^a \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(p^{b-a}) \tau_i(lp^{u-a-b})}{p'(\tau_i)}.$$

Falls die Eigenwerte des T_p -Operators auf den Spitzenformen paarweise verschieden sind, kann man beliebiges $l \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid l$ wählen.

Falls $v_i = v_i^c$, wählt man v_i^c variabel und betrachtet den Grenzwert $v_i^c \rightarrow v_i$.

BEWEIS. Für $j = 1$ ist das die Hecke-Multiplikativität (5.1.1). Vollständige Induktion nach j ergibt die erste Aussage. Setze $g(p^l) := p^{l(k-1)} d|_{p^l}$. In die zweite Gleichung setzen wir die Beziehung aus Hilfssatz 5.3.5 ein. Auf der linken Seite hat man

$$\tau_i'(p^{m+j}) \stackrel{(5.3.7)}{=} \tau_i(p^{m+j}) \tau_i'(1) + \sum_{q+l=m+j-1} \tau_i(p^q) g(p^l).$$

³⁰ $\tau_i(p^{-1}) := 0$

Auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} & \tau_i(p^j) \left(\tau_i(p^m) \tau'_i(1) + \sum_{q+l=m-1} \tau_i(p^q) g(p^l) \right) - \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-1}) \left(\tau_i(p^{m-1}) \tau'_i(1) + \sum_{q+l=m-2} \tau_i(p^q) g(p^l) \right) \\ & + \sum_{q=0}^{j-1} \tau_i(p^{j-q-1}) g(p^{m+q}). \end{aligned}$$

Um die Gleichheit zu zeigen, fehlt der Nachweis, dass

$$\begin{aligned} \sum_{q+l=m+j-1} \tau_i(p^q) g(p^l) &= \tau_i(p^j) \sum_{q+l=m-1} \tau_i(p^q) g(p^l) - \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-1}) \sum_{q+l=m-2} \tau_i(p^q) g(p^l) \\ &+ \sum_{q=0}^{j-1} \tau_i(p^{j-q-1}) g(p^{m+q}) \end{aligned}$$

bzw.

$$\sum_{q=0}^{m-1} \tau_i(p^{q+j}) g(p^{m-q-1}) = \tau_i(p^j) \sum_{q+l=m-1} \tau_i(p^q) g(p^l) - \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-1}) \sum_{q+l=m-2} \tau_i(p^q) g(p^l).$$

Das ist eine einfache Anwendung der ersten Gleichung des Hilfssatzes.

Nach der ersten Gleichung von Hilfssatz C.4.3.1 ist

$$\tau_i(p^a) \tau_i(p^b) = \tau_i(p^{a+b}) + \chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{a-1}) \tau_i(p^{b-1}).$$

Daraus ergibt sich rekursiv die Beh.

Unter Verwendung von $\lceil \frac{r}{2} \rceil + \lceil \frac{r+1}{2} \rceil = r$ hat man

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^s c^r \tau_i(p^{\lceil \frac{s-r}{2} \rceil}) \tau_i(p^{\lceil \frac{s+1-r}{2} \rceil}) = 0 + 0 + \sum_{r=0}^s c^{s-r} \tau_i(p^{\lceil \frac{r}{2} \rceil}) \tau_i(p^{\lceil \frac{r+1}{2} \rceil}) \\ &= \frac{c^{s+2}}{(v_i - v_i^c)^2} \left\{ \left(\frac{1-1}{1} \right)^2 + \frac{(1-1)(v_i - v_i^c)}{c} + \frac{(v_i - v_i^c)^2}{c^2} + \dots + \frac{(v_i^{\lceil \frac{s+2}{2} \rceil} - (v_i^c)^{\lceil \frac{s+2}{2} \rceil}) (v_i^{\lceil \frac{s+3}{2} \rceil} - (v_i^c)^{\lceil \frac{s+3}{2} \rceil})}{c^{s+2}} \right\} \\ &= \frac{c^{s+2}}{(v_i - v_i^c)^2} \left\{ \left(1 + \frac{v_i}{c} + \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 + \dots + \left(\frac{v_i}{c} \right)^{s+2} \right) + \left(1 + \frac{v_i^c}{c} + \left(\frac{v_i^c}{c} \right)^2 + \dots + \left(\frac{v_i^c}{c} \right)^{s+2} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{1 \cdot 1}{1} - \frac{\tau_i}{c} - 2 \frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} - \frac{\chi(p) p^{k-1} \tau_i}{c^3} - 2 \frac{(\chi(p) p^{k-1})^2}{c^4} - \dots - \frac{(\chi(p) p^{k-1})^{\lceil \frac{s+2}{2} \rceil}}{c^{s+2}} \right\} \cdot \begin{cases} \tau_i, & s \text{ ungerade,} \\ 2, & 2 \mid s. \end{cases} \end{aligned}$$

In der zweiten Zeile gibt es zwei arithmetische Reihen $-2 \left(1 + \frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} + \left(\frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} \right)^{\lceil \frac{s+2}{2} \rceil (k-1)} \right)$ und $-\frac{\tau_i}{c} \left(1 + \frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} + \left(\frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\chi(p) p^{k-1}}{c^2} \right)^{\lceil \frac{s+1}{2} \rceil (k-1)} \right)$. Die Summenformel für die arithmetische Reihe ergibt den Beweis.

Wir beweisen die zweite Aussage zunächst für $a = 0$:

$$\begin{aligned} & \sum_{t=0}^b p^{t(k-1)} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{u-2t}) \stackrel{\text{Euler-Lemma HS. A.1.3}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(l)}{(v_i - v_i^c) p'(\tau_i)} \sum_{t=0}^b v_i^t (v_i^c)^t (v_i^{u-2t+1} - (v_i^c)^{u-2t+1}) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(l)}{(v_i - v_i^c) p'(\tau_i)} \left\{ v_i^{u+1} \frac{1 - \left(\frac{v_i^c}{v_i} \right)^{b+1}}{1 - \frac{v_i^c}{v_i}} - (v_i^c)^{u+1} \frac{1 - \left(\frac{v_i}{v_i^c} \right)^{b+1}}{1 - \frac{v_i}{v_i^c}} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(l)}{(v_i - v_i^c)^2 p'(\tau_i)} (v_i^{b+1} - (v_i^c)^{b+1}) (v_i^{u-b+1} - (v_i^c)^{u-b+1}) = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(p^b) \tau_i(lp^{u-b})}{p'(\tau_i)}. \end{aligned}$$

Die Aussagen für $t = a$ sind offensichtlich. □

Definition C.4.3.2. Für die Teilbarkeit des p -Teils von schwach-holomorphen Modulformen $M_k^!(N, \chi)$, $p \nmid N$ sind die Grenzwerte

$$g_i := \text{ord}_p \sum_{t=0}^{\infty} \overline{\tau_i(p^t) h_{p^t}}, \quad i = 1, \dots, n$$

entscheidend.

Die Grenzwerte g_i spielen im Abschnitt 5.5 eine Rolle für die Existenz von Mock-Modulformen mit ganzzahligen Koeffizienten, ebenso bei Fragen nach dem p -Teil der Basisfunktionen H_{p^m} . Es interessiert die Frage, ob g_i endlich oder unendlich ist.³¹

Satz C.4.3.3. Sei p eine Primzahl, $p \nmid N$, \mathfrak{p} ein Primideal über p aus dem Zerfällungskörper K des Polynoms $p_{\Gamma}(X)$ des Heckeoperators \mathbb{T}_p , $\mathfrak{p}^e \parallel p$, $\mathfrak{p}^{e\alpha_i} \parallel \tau_i(p)$ in K , $\alpha_i < \frac{k-1}{2}$; $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+1}) & \tau_i(p^{m+1}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| = (\chi(p) p^{k-1})^m \left(d|_1 + \overline{\tau_i(p)} d|_p + \overline{\tau_i(p^2)} d|_{p^2} + \dots + \overline{\tau_i(p^m)} d|_{p^m} \right), \\ \forall j \in \mathbb{N} : & \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+j}) & \tau_i(p^{m+j}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| = \tau_i(p^{j-1}) (\chi(p) p^{k-1})^m \left(d|_1 + \overline{\tau_i(p)} d|_p + \dots + \overline{\tau_i(p^m)} d|_{p^m} \right) \\ & + \tau_i(p^m) \left\{ \tau_i(p^{j-2}) p^{(m+1)(k-1)} d|_{p^{m+1}}(p^n) + \tau_i(p^{j-3}) p^{(m+2)(k-1)} d|_{p^{m+2}} + \dots + p^{(m+j-1)(k-1)} d|_{p^{m+j-1}} \right\}, \\ m \gg 1, \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\tau_i(p^i)} d|_{p^i} \neq 0 \text{ } p\text{-adisch:} & \quad \text{ord}_p \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+j}) & \tau_i(p^{m+j}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| = m(k-1) + (j-1)\alpha_i + g_i, \\ \text{sonst, } m \rightarrow \infty : & \quad \text{ord}_p \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+j}) & \tau_i(p^{m+j}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| - m(k-1) - (j-1)\alpha_i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

BEWEIS. Wir verwenden wieder die Abkürzung $g(p^m) := \chi(p) p^{m(k-1)} \overline{h_{p^m}(p^n)}$. Aus Hilfssatz C.4.3.1 folgt die Rekursion

$$\left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+1}) & \tau_i(p^{m+1}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| = \chi(p) p^{k-1} \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \\ \tau_i'(p^{m-1}) & \tau_i(p^{m-1}) \end{array} \right| + g(p^m) \tau_i(p^m)$$

und daraus die erste Aussage des Satzes.

Sei $j > 1$. Mit

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+j}) & \tau_i(p^{m+j}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| - \tau_i(p^{j-1}) \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+1}) & \tau_i(p^{m+1}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| \\ = & \left| \begin{array}{cc} \tau_i'(p^{m+j}) - \tau_i(p^{j-1}) \tau_i'(p^{m+1}) & \tau_i(p^{m+j}) - \tau_i(p^{j-1}) \tau_i(p^{m+1}) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| \\ = & \left| \begin{array}{cc} -\chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-2}) \tau_i'(p^m) + \tau_i(p^m) \sum_{t=0}^{j-2} \tau_i(p^{j-t-2}) g(p^{m+t+1}) & -\chi(p) p^{k-1} \tau_i(p^{j-2}) \tau_i'(p^m) \\ \tau_i'(p^m) & \tau_i(p^m) \end{array} \right| \end{aligned}$$

und Hilfssatz C.4.3.1 folgt die zweite Aussage.

Die p -Ordnung des ersten Terms der rechten Seite ist wie behauptet, während die darauffolgende Summe eine größere Ordnung als $m(k-1 + \alpha_i)$ hat und daher für großes m eine größere p -Ordnung hat. \square

Außer den Fourierkoeffizienten werden im folgenden auch die Spektralkoeffizienten des Heckedefektes d_{p^n} aus Satz C.1.2.3 häufiger benötigt. Wir nehmen immer an, dass die Primzahl p „ungewöhnlich“ ist, damit die auftretenden Reihen konvergieren.

Vermutung C.4.3.4. Sei d_{p^n} die schwach-holomorphe Modulform vom Gewicht $2-k$, die sich aus dem modularen Gitter (Abschnitt C.1.2) zu $M_{2-k}^!(N, \chi)$ ergibt. Angenommen, es existiert die Spektralentwicklung

$$d_{p^n} \sim c_0 \Psi_0 + c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2 + \dots,$$

mit den overkonvergenten verallgemeinerten U_p -Eigenformen Ψ_i aus $M_{(\chi, 2-k)}(N, p, r)$.

³¹In allen betrachteten Fällen waren diese Grenzwerte endlich.

Für den p^m -ten Koeffizienten heißt das

$$\bar{h}_{p^m} \sim \sum_{i=0}^{\infty} (c_{i,0} + c_{i,1}m + \dots + c_{i,j_i}m^{j_i}) \psi_i^m,$$

zu verstehen in folgendem Sinne:

$$\forall s \in \mathbb{N} \exists m_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq m_0 : \text{ord}_p \left(\bar{h}_{p^m} - \sum_{i=0}^s (c_{i,0} + c_{i,1}m + \dots + c_{i,j_i}m^{j_i}) \psi_i^m \right) \geq m \cdot \text{ord}_p \psi_s \text{ usw.}$$

Mit Hilfe dieser Koeffizienten werden wir verschiedene andere Spektralentwicklungen berechnen. Falls die minimale Newtonsteigung 0 einfach vorkommt, existiert der Grenzwert $c_0 := \bar{h}_{p^\infty}$. Unter Voraussetzung von Vermutung C.4.3.4 kann man eine vollständige Spektralentwicklung der schwachen Heckeformen vornehmen.

Hilfssatz C.4.3.5. *Sei $m, t \in \mathbb{N}_0, |x|_p < 1$. Dann gilt:*

$$\sum_{j=m}^{\infty} j^u x^j = \sum_{t=0}^u (-1)^{u-t} \begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix} \frac{(m)_t x^m}{1-x} {}_2F_1 \left(1, -t; m; \frac{x}{x-1} \right).$$

Die hypergeometrische Funktion ist ein Polynom in $\frac{x}{x-1}$.

BEWEIS. Wir berechnen zunächst $\sum_{j=m}^{\infty} (j)_t x^j = (m)_t x^m {}_2F_1(1, m+t; m; x)$. Mit der linearen Transformationsformel [AS, (15.3.4)] ist das $\frac{(m)_t x^m}{1-x} {}_2F_1\left(1, -t; m; \frac{x}{x-1}\right)$. Das gilt auch p -adisch, da man das durch wiederholtes Ableiten der konvergenten Potenzreihe $\sum_{j=m}^{\infty} x^j = \frac{x^m}{1-x}$ erhalten kann. Mit den Stirling-Zahlen zweiter Art

$\begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix} = \frac{1}{t!} \sum_{j=0}^t (-1)^{t-j} \binom{t}{j} j^u$ ist bekanntlich $j^u = \sum_{t=0}^u (-1)^{u-t} \begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix} (j)_t$ und die Aussage folgt. □

Satz C.4.3.6. *Sei $k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \dim S_k(\Gamma, \chi) > 0$. Unter Annahme von Vermutung C.4.3.4 gilt für ungewöhnliche Primzahlen³² $p \nmid N$ und die Gruppe $\Gamma_0(N)$:*

$$f'_i \sim \begin{cases} \frac{v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{|p^j \bar{v}_i^j} \Upsilon_i - \frac{v_i^c \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{|p^j \bar{v}_i^{c_j}} \Upsilon_i^c + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,0} \psi_j}{1 - \psi_j \bar{\tau}_i + \psi_j^2 \chi(p) p^{k-1}} D^{k-1} \Psi_{j,0}, & v_i \neq v_i^c, \\ \frac{v_i \tau'_i(1) + \sum_{j=0}^{\infty} d_{|p^j \bar{v}_i^j}}{v_i} f_i - \frac{\sum_{j=0}^{\infty} d_{|p^j \tau_i(p^j)}}{v_i} \Upsilon_i^c + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_{j,0} \psi_j}{(1 - \psi_j \bar{v}_i)^2} D^{k-1} \Psi_{j,0}, & v_i = v_i^c = \pm \sqrt{\chi(p)} p^{\frac{k-1}{2}} \end{cases}$$

in p -adische Eigenformen der Stufe pN , falls die U_p -Eigenräume eindimensional sind. Sonst hat man weitere Beiträge von verallgemeinerten Eigenfunktionen $\Psi_{j,1}, \dots$

BEWEIS DES SATZES. Wie im Beweis zu Hilfssatz 5.4.2 ist

$$\tau'_i(p^m) - d_1 v_i^m - d_2 (v_i^c)^m = -\frac{p^{m(k-1)}}{v_i - v_i^c} \sum_{j=m}^{\infty} d_{|p^j} \overline{(v_i^{j-m} - (v_i^c)^{j-m})}.$$

³²Definition 5.1.4

Die Summe ist konvergent, da der Hecke Defekt d Fourierkoeffizienten aus $(\mathbb{K}_{\text{Hecke}})_p$ mit gleichmäßig beschränktem Nenner hat und

$$\begin{aligned} \tau_i'(p^m) - d_1 v_i^m - d_2 (v_i^c)^m &\stackrel{\text{(Verm. C.4.3.4)}}{\sim} - \frac{\chi(p)^{m+1} \overline{v_i v_i^c}^m}{v_i - v_i^c} \sum_{j=m}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{i_s} c_{s,u} j^u \psi_s^j \overline{(v_i^{j-m} - (v_i^c)^{j-m})} \\ &= - \frac{\chi(p)}{v_i - v_i^c} \sum_{s=0}^{\infty} (\psi_s p^{k-1})^m \sum_{u=0}^{i_s} c_{s,u} \sum_{t=0}^u (-1)^{u-t} \begin{Bmatrix} u \\ t \end{Bmatrix} (m)_t \left(\frac{{}_2F_1\left(1, -t; m; \frac{\psi_s \bar{v}_i}{\psi_s \bar{v}_i - 1}\right)}{1 - \psi_s \bar{v}_i} - \frac{{}_2F_1\left(1, -t; m; \frac{\psi_s \bar{v}_i^c}{\psi_s \bar{v}_i^c - 1}\right)}{1 - \psi_s \bar{v}_i^c} \right) \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (\psi_s p^{k-1})^m \left\{ \frac{(c_{s,0} + c_{s,1}m + \dots) \psi_s}{1 - \psi_s \bar{v}_i + \psi_s^2 \chi(p) p^{k-1}} + \dots \right\} \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von (5.1.4) und (5.1.10). Für v_i nimmt man Grenzwerte für die Variable $v_i^c \rightarrow v_i$, vgl. auch Hilfssatz 5.4.2.

Genau genommen müsste man eine endliche Summe mit einem Fehler von der Größenordnung des letzten Summanden (z.B. $\frac{\psi_{s_0} (\psi_{s_0} p^{k-1})^m}{1 - \psi_{s_0} \chi(p) \tau_i + \psi_{s_0}^2 \chi(p) p^{k-1}}$) nehmen. Diese Bemerkung gilt auch für alle noch folgenden Spektralentwicklungen. □

Hilfssatz C.4.3.7. Sei $\psi \in \mathbb{R}, p = 4$ oder eine Primzahl $p \nmid N$, $p_{\Gamma}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \tau_i)$ ein Polynom, dessen Nullstellen die verschiedenen Γ_p -Eigenwerte zu $S_k(N, \chi)$ sind. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1 - \psi \tau_i + \chi(p) p^{k-1} \psi^2) p'_{\Gamma}(\tau_i)} = \frac{\psi^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (1 - \psi \tau_i + \chi(p) p^{k-1} \psi^2)}.$$

BEWEIS. Eulers Lemma (Hilfssatz A.1.3) mit $x_i = \psi \tau_i, i = 1, \dots, n, x_{n+1} = 1 + \chi(p) p^{k-1} \psi^2$. □

Definition C.4.3.8. Setze

$$\delta := \liminf_m \text{ord}_p h_{p^m}.$$

Zunächst ein

Hilfssatz C.4.3.9. Sei $l \in \mathbb{N}$. Falls die Newtonsteigung $k - 1$ genau einmal vorkommt, existieren die Grenzwerte

$$h_{p^\infty}(p^l) := \lim_{m \rightarrow \infty} h_{p^m}(p^l).$$

BEWEIS. Der Grund ist einfach die Existenz einer asymptotischen Spektralzerlegung für schwach-holomorphe Modulformen (Satz C.4.1.3 von [Gouvêa Mazur]), z.B.:

$$(C.4.3.1) \quad d_l = C_0 \Psi_0 + C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2 + \dots$$

mit der p -adischen Eisensteinreihe $\Psi_0 = G^*$ vom Gewicht $2 - k$ und den overkonvergenten U_p -Eigenformen Ψ_i zu den Eigenwerten ψ_i aus $M_{2-k}(N, \bar{\chi}, r)$. Aufgrund der Voraussetzung ist $\forall i \in \mathbb{N} : \text{ord}_p(\psi_i) > 0$.

Der Anteil der Eisensteinreihe G^* im Spektrum von d_l , definiert in Abschnitt C.1.2, ist

$$C_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} d_l|_{p^m} = \lim_{m \rightarrow \infty} h_{p^m}(l) = h_{p^\infty}(l).$$

Der Grenzwert existiert nach Proposition C.4.1.6 wegen der Eindeutigkeit der Spektralzerlegung von d_l . □

Die Vielfachheit von p -Ordnungen von Eigenwerten führt zu den üblichen ultrametrischen Schwierigkeiten, dass man die p -Ordnung der Summe solcher Eigenwerte bzw. ihrer Potenzen nicht kennt.

Seien $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \dots$ die U_p -Eigenfunktionen in $M_{2-k}(p, \chi, r)$, h_{p^m}, \dots die Anfangswerte, c_j, \dots die Koeffizienten in der Spektralentwicklung der Hecke Defekte d_{p^n} . Wir benötigen Details über die Fourierkoeffizienten der Basisfunktionen zur Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit Nebentyp χ .

Satz C.4.3.10. Sei $p \nmid N, m, s \in \mathbb{N}_0, l = 1, p$ eine „ungewöhnliche“ Primzahl, $p \nmid l \in \mathbb{N}, f_1, \dots, f_n$ Heckeformen der Stufe $N, \Upsilon_i = f_i - v_i^c V_p f_i, \Upsilon_i^c = f_i - v_i V_p f_i$ Heckeformen der Stufe pN .

$$(1) \quad h_{p^m}(lp^s) = \sum_{r=\max(0, m+1-s)}^{s+m-1} h_{p^r} \sum_{t=\max(0, r-m)}^{\min(\frac{s+r-m-1}{2}, r)} (\chi(p) p^{k-1})^t \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-m+r-2t-1})$$

$$+ \sum_{i=\max(s-m, 0)}^s (\chi(p) p^{k-1})^i h_{p^{m-s+2i}}(l),$$

$$(2) \quad h_{p^\infty}(p^s) = h_{p^\infty} \left(\frac{\sigma_{k-1}(p^s)}{\prod_{i=1}^n (1 - \tau_i + p^{k-1})} - \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(p^s)}{(1 - \tau_i + p^{k-1}) p'(\tau_i)} \right) \text{ für } N = 1,$$

falls die Newtonsteigung $k - 1$ einfach vorkommt.

$$(3) \quad H_{p^m} \sim \sum_{\substack{i=1 \\ v_i \neq v_i^c}}^n \left\{ \frac{h_1 + h_p \tau_i(p) + \dots + h_{p^{m-1}} \tau_i(p^{m-1}) + \tau_i(p^m) (h_{p^m} + h_{p^{m+1}} v_i^c + h_{p^{m+2}} (v_i^c)^2 + \dots)}{v_i^m (v_i - v_i^c) p'(\tau_i)} \Upsilon_i \right.$$

$$\left. - \frac{h_1 + h_p \tau_i(p) + \dots + h_{p^{m-1}} \tau_i(p^{m-1}) + \tau_i(p^m) (h_{p^m} + h_{p^{m+1}} v_i + h_{p^{m+2}} v_i^2 + \dots)}{(v_i^c)^m (v_i - v_i^c) p'(\tau_i)} \Upsilon_i^c \right\}$$

$$+ \sum_{\substack{j \\ v_j = v_j^c}} \left\{ \frac{h_1 + h_p \tau_j(p) + \dots + h_{p^{m-1}} \tau_j(p^{m-1}) + \tau_j(p^m) (h_{p^m} + h_{p^{m+1}} v_j^c + h_{p^{m+2}} (v_j^c)^2 + \dots)}{v_j^{m+1} p'(\tau_j)} f_j \right.$$

$$\left. - \frac{m+1}{v_j^{m+1} p'(\tau_j)} (h_1 + h_p \tau_j(p) + h_p \tau_j(p) + \dots) \Upsilon_j \right\} + O(k-1).$$

Wir sortieren nach steigender p -Ordnung:

$$(4) \quad h_{p^m}(lp^{m+1+s}) = \begin{cases} \sum_{i=s+1}^{m+s+1} (\chi(p) p^{k-1})^i h_{p^{2i-s-1}}(l), & n = 0, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(lp^s) \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) \right. \\ \quad + (\chi(p) p^{k-1})^{s+1} \sum_{r=s+2}^m h_{p^r} \tau_i(p^{\lfloor \frac{r-s-2}{2} \rfloor}) \tau_i(lp^{\lfloor \frac{r-s-1}{2} \rfloor}) \\ \quad \left. + \sum_{r=m+1}^{2m+s} h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i(p^{\lfloor \frac{s-r+2m}{2} \rfloor}) \tau_i(lp^{\lfloor \frac{s-r+2m+1}{2} \rfloor}) \right\}, & n > 0, s < m, \\ \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(lp^s) \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) \right. \\ \quad + \tau_i(lp^m) \sum_{r=m+1}^s h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i(p^{s+m-r}) \\ \quad \left. + \sum_{r=s+1}^{2m+s} h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i(p^{\lfloor \frac{s-r+2m}{2} \rfloor}) \tau_i(lp^{\lfloor \frac{s-r+2m+1}{2} \rfloor}) \right\}, & n > 0, s \geq m, \end{cases}$$

$$(5) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} U_p^{m+1} H_{p^m} \sim \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{r=0}^{\infty} h_{p^r} \tau_i(p^r)}{p'(\tau_i)} f_i + O(k-1), \text{ falls } v_i \neq v_i^c.$$

Leere Summen sind Null und leere Produkte 1. Falls alle \mathbb{T}_p -Eigenwerte paarweise verschieden sind, kann man $l \in \mathbb{N}, p \nmid l$ wählen.

BEWEIS. Zunächst nehmen wir generell $v_i \neq v_i^c$ an.

(1): Wir berechnen die Fourierkoeffizienten von H_{p^m} mit Hilfssatz C.1.1.7 explizit:

$$h_{p^m}(lp^s) = \sum_{t=0}^{s-1} (\chi(p)p^{k-1})^t \sum_{j=0}^{\min(m, s-t-1)} h_{p^{m-j+t}} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-t-j-1}) + \sum_{i=\max(s-m, 0)}^s (\chi(p)p^{k-1})^i h_{p^{m-s+2i}}(l),$$

umsortiert nach wachsendem Index $r = m - j + t$ der h_{p^r} :

$$h_{p^m}(lp^s) = \sum_{r=\max(0, m+1-s)}^{s+m-1} h_{p^r} \sum_{t=\max(0, r-m)}^{\min(\frac{s+r-m-1}{2}, r)} (\chi(p)p^{k-1})^t \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(lp^{s-m+r-2t-1}) + \sum_{i=\max(s-m, 0)}^s (\chi(p)p^{k-1})^i h_{p^{m-s+2i}}(l),$$

wobei leere Summen Null sind.

(2): Mit Hilfssatz C.1.1.7 ist

$$\begin{aligned} h_{p^m}(p^s) &= \sum_{r=0}^{s-1} p^{r(k-1)} \sum_{t=0}^{\min(s-1-r, m)} h_{p^{m-t+r}} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^{s-r-t-1}) + \sum_{i=\max(s-m, 0)}^s p^{i(k-1)} h_{p^{m-s+2i}}(1) \\ &\stackrel{\text{HS.A.1.3}}{=} \sum_{r=0}^{s-1} p^{r(k-1)} \sum_{t=0}^{\min(s-r, m)} h_{p^{m-t+r}} \sum_{i=1}^n \frac{v_i^{s-r-t} - (v_i^c)^{s-r-t}}{(v_i - v_i^c) p'_T(\tau_i)} + \sum_{i=\max(s-m, 0)}^s p^{i(k-1)} h_{p^{m-s+2i}}(1) \end{aligned}$$

mit $v_i^c := \frac{p^{k-1}}{v_i}$. Da es sich um eine Summe fester endlicher Länge handelt, kann man die Grenzwerte für $m \rightarrow \infty$ einzeln berechnen ($r = s$ und $r = s + 1$ ergeben keinen Beitrag):

$$\begin{aligned} h_{p^\infty}(p^s) &= h_{p^\infty} \sum_{r=0}^{s+1} p^{r(k-1)} \sum_{i=1}^n \frac{1-v_i^{s-r+1}}{1-v_i} - \frac{1-(v_i^c)^{s-r+1}}{1-v_i^c} + h_{p^\infty}(1) \frac{1-p^{(s+1)(k-1)}}{1-p^{k-1}} \\ &= h_{p^\infty} \sum_{i=1}^n \sum_{r=0}^{s+1} \frac{p^{r(k-1)-v_i^{s+1}}(v_i^c)^r - p^{r(k-1)-v_i^r}(v_i^c)^{s+1}}{(v_i - v_i^c) p'_T(\tau_i)} + h_{p^\infty}(1) \cdots \\ &= h_{p^\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-v_i)(1-v_i^c) p'_T(\tau_i)} \left\{ \frac{1-p^{(s+2)(k-1)}}{1-p^{k-1}} + \frac{(v_i^c)^{s+1} (1-v_i^{s+2}) - v_i^{s+1} (1-(v_i^c)^{s+2})}{v_i - v_i^c} \right\} + \quad " \\ &= h_{p^\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1-v_i)(1-v_i^c) p'_T(\tau_i)} \left\{ \frac{1-p^{(s+1)(k-1)}}{1-p^{k-1}} - \tau_i(p^s) \right\} + h_{p^\infty}(1) \sigma_{k-1}(p^s). \end{aligned}$$

Mit Hilfssatz C.4.3.7 folgt die Beh.

(3): Für $l = 1, n > 0$ und $s > 2m$ ist

$$\begin{aligned} h_{p^m}(p^s) &\stackrel{(1)}{=} \sum_{r=0}^m h_{p^r} \sum_{t=0}^r (\chi(p)p^{k-1})^t \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^{s-m+r-2t-1}) + \sum_{r=m+1}^{s-m-1} h_{p^r} \sum_{t=r-m}^r \quad " + \sum_{r=s-m}^{s+m-1} h_{p^r} \sum_{t=r-m}^{\frac{s+r-m-1}{2}} \quad " \\ &\stackrel{\text{HS.C.4.3.1}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'_T(\tau_i)} \left\{ \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) \tau_i(p^{s-m-1}) + \sum_{r=m+1}^{s-m-1} h_{p^r} (v_i v_i^c)^{r-m} \tau_i(p^m) \tau_i(p^{s-r-1}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=s-m}^{s+m-1} h_{p^r} (\chi(p)p^{k-1})^{r-m} \tau_i\left(p^{\lfloor \frac{s-r+m-1}{2} \rfloor}\right) \tau_i\left(p^{\lfloor \frac{s-r+m}{2} \rfloor}\right) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{(v_i - v_i^c) p'_T(\tau_i)} \left\{ \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) \left(v_i^{s-m} - (v_i^c)^{s-m} \right) + \tau_i(p^m) \sum_{r=1}^{\infty} h_{p^{m+r}} \left((v_i^c)^r v_i^{s-m} - v_i^r (v_i^c)^{s-m} \right) \right. \\ &\quad \left. - \tau_i(p^m) (\chi(p)p^{k-1})^{s-2m} \sum_{r=0}^{\infty} h_{p^{s-m+r}} \left(v_i^m (v_i^c)^r - (v_i^c)^m v_i^r \right) \right\} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{2m-1} h_{p^{s-m+r}} (\chi(p)p^{k-1})^{s-2m+r} \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i\left(p^{\lfloor \frac{2m-r-1}{2} \rfloor}\right) \tau_i\left(p^{\lfloor \frac{2m-r}{2} \rfloor}\right)}{p'_T(\tau_i)}. \end{aligned}$$

Die erste Zeile ergibt die Spektrallinien der klassischen Spitzenformen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{h_1 + h_p \tau_i(p) + h_{p^{m-1}} \tau_i(p^{m-1}) + \tau_i(p^m) (h_{p^m} + h_{p^{m+1}} v_i^c + h_{p^{m+2}} (v_i^c)^2 + \dots)}{v_i^m (v_i - v_i^c) p'(\tau_i)} \Upsilon_i - „konj.“$$

Der Rest ist von der Größenordnung $O(k-1)$.

(4): Sei $n > 0, 0 \leq s < m$. Wegen $\Upsilon_i = f_i - \bar{v}_i V_p f_i$ ist $v_i(l) = \bar{v}_i(l) = \tau_i(l)$ für $(l, p) = 1$ und mit (1) ist

$$\begin{aligned} h_{p^m} (lp^{m+1+s}) &= \sum_{r=0}^s h_{p^r} \sum_{t=0}^r (\chi(p) p^{k-1})^t \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}} (lp^{s+r-2t}) + \sum_{r=s+1}^m h_{p^r} \sum_{t=0}^{\frac{s+r}{2}} \dots + \sum_{r=m+1}^{s+2m} h_{p^r} \sum_{t=r-m}^{\frac{s+r}{2}} \dots \\ &\stackrel{\text{HS.C.4.3.1}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(lp^s) \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) + \sum_{r=s+1}^m h_{p^r} \tau_i(l) \left\{ \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s+r}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s+r+1}{2} \rfloor} \right) - \tau_i(p^s) \tau_i(p^r) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=m+1}^{2m+s} h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s-r+2m}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(lp^{\lfloor \frac{s-r+2m+1}{2} \rfloor} \right) \right\} \end{aligned}$$

und mit Hilfssatz C.4.3.1 hat man die Beh.

Sei jetzt $s \geq m$:

$$\begin{aligned} h_{p^m} (lp^{m+1+s}) &\stackrel{\text{HS.C.4.3.1}}{=} \sum_{r=0}^m h_{p^r} \sum_{t=0}^r (\chi(p) p^{k-1})^t \tau_{p^{n-1}}^{\{p\}} (lp^{s+r-2t}) + \sum_{r=m+1}^s h_{p^r} \sum_{t=r-m}^r \dots + \sum_{r=s+1}^{s+2m} h_{p^r} \sum_{t=r-m}^{\frac{s+r}{2}} \dots \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(p^s) \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) + \tau_i(lp^m) \sum_{r=m+1}^s h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i(p^{s+m-r}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=s+1}^{2m+s} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s-r+2m}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(lp^{\lfloor \frac{s-r+2m+1}{2} \rfloor} \right) \right\}. \end{aligned}$$

(5): Nun zum Spektrum für die diagonalen Grenzwerte. Sei jetzt $s \leq m$:

$$\begin{aligned} h_{p^m} (lp^{m+1+s}) &\stackrel{(1), \text{HS.C.4.3.1}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(lp^s) \sum_{r=0}^s h_{p^r} \tau_i(p^r) + \sum_{r=s+1}^m h_{p^r} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s+r}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(lp^{\lfloor \frac{s+r+1}{2} \rfloor} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=m+1}^{2m+s} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} h_{p^r} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s-r+2m}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(lp^{\lfloor \frac{s-r+2m+1}{2} \rfloor} \right) \right\} + \sum_{i=s+1}^{m+s+1} (\chi(p) p^{k-1})^i h_{p^{2i-s-1}}(l). \end{aligned}$$

Mit

$$\tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s+r}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s+r+1}{2} \rfloor} \right) - \tau_i(p^s) \tau_i(p^r) \stackrel{\text{HS.C.4.3.1}}{=} (\chi(p) p^{k-1})^{s+1} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-s-2}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-s-1}{2} \rfloor} \right)$$

folgt

$$\begin{aligned} h_{p^m} (lp^{m+1+s}) &\stackrel{\text{HS.C.4.3.1}}{=} \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(lp^s) \sum_{r=0}^m h_{p^r} \tau_i(p^r) + (\chi(p) p^{k-1})^{s+1} \sum_{r=s+1}^m h_{p^r} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-s-2}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-s-1}{2} \rfloor} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{r=m+1}^{2m+s} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} h_{p^r} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{s-r+2m}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(lp^{\lfloor \frac{s-r+2m+1}{2} \rfloor} \right) \right\} + \sum_{i=s+1}^{m+s+1} (\chi(p) p^{k-1})^i h_{p^{2i-s-1}}(l). \end{aligned}$$

Für $m \rightarrow \infty, \alpha_i > 0$ ist das p -adisch gleichmäßig konvergent:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} h_{p^m} (lp^{m+1+s}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i(lp^s) \sum_{r=0}^{\infty} h_{p^r} \tau_i(p^r) + (\chi(p) p^{k-1})^{s+1} \sum_{\substack{r=s+2 \\ r+s \geq n-1}}^{\infty} h_{p^r} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-s-2}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-s-1}{2} \rfloor} \right)}{p'(\tau_i)} \\ &\quad + \sum_{i=s+1}^{\infty} (\chi(p) p^{k-1})^i h_{p^{2i-s-1}}(l). \end{aligned}$$

Der U_p -Operator erhält Overkonvergenz. Es ist die Frage, ob der Grenzwert der Spektralreihe von $U^{m+1} H_{p^m}$ (für $m \rightarrow \infty$) gleich der Spektralreihe des Grenzwertes ist. Das folgt aus der expliziten Berechnung der Koeffizienten:

Der Grenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} U^{m+1} H_{p^m}$ existiert koeffizientenweise gleichmäßig in s und ist eine p -adische Modulform im Sinne von [Serre 1]. Es wird nicht bewiesen, dass die Grenzfunktion overkonvergent ist. Aber es gibt im analogen Sinne eine asymptotische Spektralentwicklung. Für $s \rightarrow \infty$ erhält man den Spitzenformenanteil von $\lim_{m \rightarrow \infty} U^{m+1} H_{p^m}$:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sum_{r=0}^{\infty} h_{p^r} \tau_i(p^r)}{p'(\tau_i)} f_i.$$

Der Rest von der Größenordnung $O(k-1)$ ergibt die Spektralreihe der Eisensteinreihen und das overkonvergente Spektrum.

Falls $v_i = v_i^c$, bildet man den Grenzwert für variables $v_i^c \rightarrow v_i$. □

Überraschenderweise konvergieren die schwach-holomorphen Basisfunktionen H_* für wachsende Polordnung und die volle Modulgruppe gegen klassische holomorphe Modulformen.

Folgerung C.4.3.10.1. Sei $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z}), k \in 2\mathbb{N}, k \geq 4, \alpha_1 > 0$, falls es Spitzenformen gibt. Falls die Newtonsteigung $k-1$ genau einmal vorkommt, haben die Grenzfunktionen (im p -Teil) folgende asymptotische Spektralzerlegungen:

$$H_{p^\infty} := \lim_{i \rightarrow \infty} H_{p^i} = h_{p^\infty} \left(\frac{G_k}{\prod_{i=1}^n (1 + p^{k-1} - \tau_i)} - \sum_{i=1}^n \frac{f_i}{(1 + p^{k-1} - \tau_i) p'_\Gamma(\tau_i)} \right).$$

BEWEIS. Satz C.4.3.10 (2). □

Folgerung C.4.3.10.2. Sei $\Gamma = \text{SL}_2(\mathbb{Z}), k \in 2\mathbb{N}, k \geq 4$ und $\alpha_1 > 0$, falls es Spitzenformen gibt. Falls die Newtonsteigung $k-1$ genau einmal vorkommt³³, ist

$$h_{p^\infty}(p^\infty) := \lim_{m \rightarrow \infty} H_{p^\infty} \Big|_{p^m} = \frac{h_{p^\infty}}{(1 - p^{k-1}) \prod_{i=1}^n (1 - \tau_i + p^{k-1})}.$$

Für $\dim S_k(\text{SL}_2(\mathbb{Z})) = \emptyset$ setze das leere Produkt = 1.

Der nächste Satz beleuchtet etwas deutlicher den Einfluß der α_1 -Spektrallinie der Diagonalgrenzwerte auf die Tabellen der p -Ordnungen.

Satz C.4.3.11. Sei $k \geq 4, p \nmid N$. Jeweils abhängig von der Gruppe gibt es $u_0, u_1 \geq u_0, u \geq s = \# \text{Spitz.}$, so dass:

u	$\text{ord}_p h_{p^m}(p^u)$
$m - u \geq u_0 - s$	δ
$u - m \geq u_1, s = 0$	$(u - m)(k - 1) + \delta$
$u - m \geq u_1, n > 0$	$(u - m - n)\alpha_1 + g_1$

TABELLE 1. p -Ordnungen

Die Tabellen sind unter folgenden Voraussetzungen am übersichtlichsten:

- Für die ersten beiden Zeilen von Tabelle 1 setzen wir $N = 1, \exists h_{p^\infty} \neq 0$ voraus.
- Falls Stufe N -Spitzenformen existieren, soll $0 < \alpha_1 \neq \alpha_2$ sein und wir nehmen an, dass die kleinste Spektrallinie im Diagonalgrenzwert $\lim_{m \rightarrow \infty} U_p^{m+1} H_{p^m}$ vorkommt, d.h. dass

$$\text{ord}_p \sum_{j=0}^{\infty} h_{p^j} \tau_1(p^j) \text{ endlich ist.}$$

³³Das trifft für $N > 1, p \nmid N$ nicht zu

Unterhalb einer Diagonalen unter der Hauptdiagonale enthalten die Tabellen C.4.4 konstante Einträge. Rechts der Hauptdiagonale unterhalb einer festen Zeile sind die Diagonalen konstant. Rechts davon sind die Zeilen arithmetische Folgen. Sie verschieben sich nach unten jeweils um eins nach rechts.

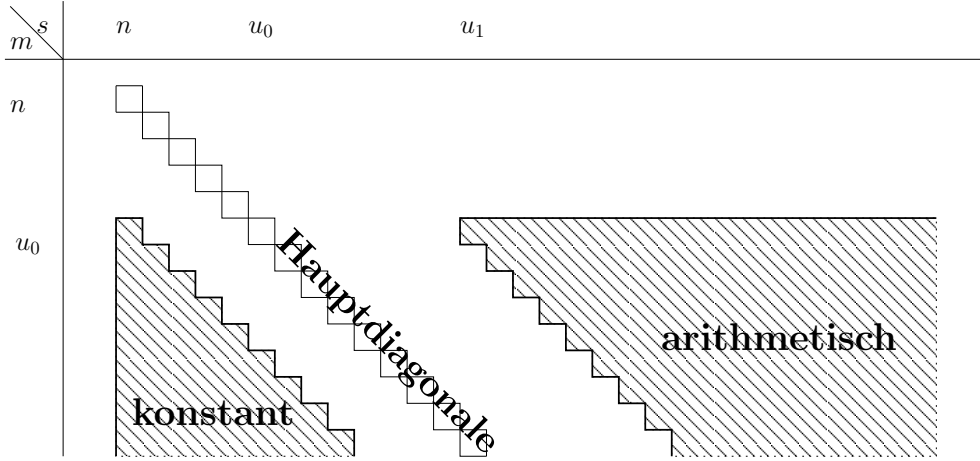


ABBILDUNG C.4.3.1. Bereiche, wo die p -Ordnungen von $h_{p^m}(p^s)$ exakt bekannt sind

BEWEIS. Erste Zeile der ersten Tabelle: Sei $N = 1$.

Da $h_{p^\infty} \neq 0$ und mit Folgerung 5.1.8.1 ist

$$\forall m \geq u_0 > n : \text{ord}_p h_{p^m} = \delta.$$

Sei $m \geq u + u_0 - n$. Das eindeutige Minimum der p -Ordnungen in

$$h_{p^m}(p^u) \stackrel{\text{Satz C.4.3.10(1)}}{=} \begin{cases} \sum_{j=0}^u p^{j(k-1)} h_{p^{m-u+2j}}, & n = 0, \\ \sum_{\substack{r,t \geq 0 \\ r+t \leq u-n}} p^{r(k-1)} h_{p^{m-t+r}} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^{u-r-t-1}), & n > 0 \end{cases}$$

liegt bei dem Term $h_{p^{m-u+n}} \tau_{p^{n-1}}^{\{N\}}(p^{n-1}) = h_{p^{m-u+n}}$ für $r = 0, t = u - n$ mit der p -Ordnung δ .

Der Fall $\dim S_k(N, \chi) = 0$ ist klar mit Satz C.4.3.10.

Die zweite und dritte Zeile der ersten Tabelle folgen unmittelbar aus den Spektralentwicklungen, Satz C.4.3.10.

Um Gleichmässigkeit in m und u zu haben, sind die expliziten Formeln von Satz C.4.3.10 (4) besser geeignet.

Wähle u_0 , so dass $\forall m \geq u_0 : \text{ord}_p h_{p^m} \geq \delta$, vgl. Definition C.4.3.8. Dann ist z.B. für $n > 0, m < u \leq 2m$:

$$h_{p^m}(p^u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p'(\tau_i)} \left\{ \tau_i(p^{u-m-1}) \sum_{r=0}^{\infty} h_{p^r} \tau_i(p^r) + (\chi(p) p^{k-1})^{u-m} \sum_{r=u-m+1}^m h_{p^r} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-u+m-1}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{r-u+m}{2} \rfloor} \right) \right. \\ \left. + \sum_{r=m+1}^{m+u-1} h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{u-r+m-1}{2} \rfloor} \right) \tau_i \left(p^{\lfloor \frac{u-r+m}{2} \rfloor} \right) - \tau_i(p^{u-m-1}) \sum_{r=m+1}^{\infty} h_{p^r} \tau_i(p^r) \right\}.$$

Es gibt eine Konstante $M > 0$ mit $\forall i : \text{ord}_p p'(\tau_i) < M$. Falls $\alpha_1 \neq \alpha_2$, ist $\text{ord}_p p'(\tau_i) = (n-1)\alpha_1$, d.h.

$$\exists u_2 : g_1 - \text{ord}_p p'(\tau_1) + (u_2 - 1)\alpha_1 = \min_i \{g_i - \text{ord}_p p'(\tau_i) + (u_2 - 1)\alpha_i\}.$$

Für $u - m \geq \max(u_0, u_2)$ werden die p -Ordnungen durch den Beitrag der ersten Heckeform f_1 dominiert. Die Summanden in den letzten drei Summen sind jeweils nach steigender p -Ordnung geordnet. Die p -Ordnungen der ersten Summanden sind jeweils dominierend. Das Minimum der geschwungenen Klammer liegt beim ersten Term.

$$\tau_1(p^{u-m-1}) \sum_{r=0}^{\infty} h_{p^r} \tau_1(p^r)$$

mit der p -Ordnung

$$(u - m - 1)\alpha_1 + g_1,$$

falls $m \geq u_0, u-m \geq u_0, u-m \geq u_2$, also ab Zeile u_0 und im Abstand $u_1 := \max(u_0, u_2)$ rechts der Hauptdiagonale. Falls $u > 2m$, hat man analog:

$$h_{p^m}(p^u) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p^i(\tau_i)} \left\{ \tau_i (p^{u-m-1}) \sum_{r=0}^{\infty} h_{p^r} \tau_i (p^r) + \tau(p^m) \sum_{r=m+1}^{u-m-1} h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i (p^{u-r-1}) \right. \\ \left. + \sum_{r=u-m}^{m+u-1} h_{p^r} (\chi(p) p^{k-1})^{r-m} \tau_i (p^{\lfloor \frac{u-r+m-1}{2} \rfloor}) \tau_i (p^{\lfloor \frac{u-r+m}{2} \rfloor}) - \tau_i (p^{u-m-1}) \sum_{r=m+1}^{\infty} h_{p^r} \tau_i (p^r) \right\}$$

und die gleiche Argumentation wie vorher führt unter denselben Voraussetzungen auf die exakte p -Ordnung

$$(u - m - n) \alpha_1 + g_1.$$

□

C.4.4. Tabellen ihrer p -Ordnungen. Es gibt äußerst eindrucksvolle Regelmäßigkeiten, was den p -Teil der schwach-holomorphen Basisfunktionen betrifft. Das ermöglicht ein weitreichendes Verständnis der Fragen nach Teilbarkeit ihrer Koeffizienten.

Koeff.	2 ⁰	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	Koeff.	3 ⁰	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴	Koeff.	5 ⁰	5 ¹	5 ²	5 ³	5 ⁴
H_1	2	11	14	17	20	H_1	3	5	7	9	12	H_1	0	2	3	4	5
H_2	12	2	11	14	17	H_3	6	3	5	7	9	H_5	3	0	2	3	4
H_4	16	12	2	11	14	H_9	9	6	3	5	7	H_{25}	5	3	0	2	3
H_8	20	16	12	2	11	H_{27}	12	9	6	3	5	H_{125}	7	5	3	0	2
	$p = 2$						$p = 3$						$p = 5$				

Koeff.	p ⁰	p ¹	p ²	p ³	p ⁴	Koeff.	p ⁰	p ¹	p ²	p ³	p ⁴
H_1	0	1	2	3	4	H_1	0	0	0	0	0
H_p	2	0	1	2	3	H_p	1	0	0	0	0
H_{p^2}	4	2	0	1	2	H_{p^2}	2	1	0	0	0
H_{p^3}	6	4	2	0	1	H_{p^3}	3	2	1	0	0
	$p = 7, 11$						$p = 13, 17, 19, 23, 29$				

TABELLE 2. $k = 0$
und symmetrisch zur Hauptdiagonalen:

Koeff.	2 ⁰	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	Koeff.	3 ⁰	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴	Koeff.	5 ⁰	5 ¹	5 ²	5 ³	5 ⁴
H_1	2	12	16	20	24	H_1	3	6	9	12	15	H_1	0	3	5	7	9
H_2	11	2	12	16	20	H_3	5	3	6	9	12	H_5	2	0	3	5	7
H_4	14	11	2	12	16	H_9	7	5	3	6	9	H_{25}	3	2	0	3	5
H_8	17	14	11	2	12	H_{27}	9	7	5	3	6	H_{125}	4	3	2	0	3
	$p = 2$						$p = 3$						$p = 5$				

Koeff.	p ⁰	p ¹	p ²	p ³	p ⁴	Koeff.	p ⁰	p ¹	p ²	p ³	p ⁴
H_1	0	2	4	6	8	H_1	0	1	2	3	4
H_p	1	0	2	4	6	H_p	0	0	1	2	3
H_{p^2}	2	1	0	2	4	H_{p^2}	0	0	0	1	2
H_{p^3}	3	2	1	0	2	H_{p^3}	0	0	0	0	1
	$p = 7, 11$						$p = 13, 17, 19, 23, 29$				

TABELLE 3. $k = 2$

Koeff.	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴	2 ⁵
Δ_1	3	6	9	12	15
E	4	4	4	4	4
H_1	5	8	11	14	17
H_2	$\boxed{2}$	10	13	16	19
H_4	7	$\boxed{2}$	10	13	16
H_8	7	7	$\boxed{2}$	10	13

$p = 2, \alpha_1 = 3$

Koeff.	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴	3 ⁵
Δ_1	2	4	6	8	10
E	2	2	2	2	2
H_1	5	7	9	11	13
H_3	$\boxed{4}$	5	7	9	11
H_9	3	$\boxed{4}$	5	7	9
H_{27}	3	3	$\boxed{4}$	5	7

$p = 3, \alpha_1 = 2$

Koeff.	5 ¹	5 ²	5 ³	5 ⁴	5 ⁵
Δ_1	1	2	3	4	5
E	1	1	1	1	1
H_1	1	2	3	4	5
H_5	$\boxed{0}$	2	3	4	5
H_{25}	1	$\boxed{0}$	2	3	4
H_{125}	1	1	$\boxed{0}$	2	3

$p = 5, \alpha_1 = 1$

Koeff.	7 ¹	7 ²	7 ³	7 ⁴	7 ⁵
Δ_1	1	2	3	4	5
E	1	1	1	1	1
H_1	1	2	3	4	5
H_7	$\boxed{0}$	1	2	3	4
H_{49}	1	$\boxed{0}$	1	2	3
H_{343}	1	1	$\boxed{0}$	1	2

$p = 7, \alpha_1 = 1$

Koeff.	11 ¹	11 ²	11 ³
Δ_1	0	0	0
E	1	1	1
H_1	0	0	0
H_{11}	$\boxed{0}$	1	1
H_{121}	1	$\boxed{0}$	1

$p = 11$

Koeff.	p^1	p^2	p^3
Δ_1	0	0	0
E	1	1	1
H_1	$\boxed{0}$	0	0
H_p	0	$\boxed{0}$	0

$p = 13, 23$

Koeff.	p^1	p^2	p^3
Δ_1	0	0	0
E	0	0	0
H_1	$\boxed{0}$	0	0
H_p	0	$\boxed{0}$	0

$p = 17, 19, 29, \dots, 53$

TABELLE 4. $k = 12$

Koeff.	2 ⁰	2 ¹	2 ²	2 ³	2 ⁴
E	3	3	3	3	3
H_1	$\boxed{2}$	20	33	46	59
H_2	7	$\boxed{2}$	20	33	46
H_4	7	7	$\boxed{2}$	20	33
H_8	7	7	7	$\boxed{2}$	20

$p = 2$

Koeff.	3 ⁰	3 ¹	3 ²	3 ³	3 ⁴
E	1	1	1	1	1
H_1	$\boxed{4}$	16	29	42	55
H_3	3	$\boxed{4}$	16	29	42
H_9	3	3	$\boxed{4}$	16	29
H_{27}	3	3	3	$\boxed{4}$	16

$p = 3$

Koeff.	p^0	p^1	p^2	p^3	p^4
E	0	0	0	0	0
H_1	$\boxed{0}$	14	27	40	53
H_p	1	$\boxed{0}$	14	27	40
H_{p^2}	1	1	$\boxed{0}$	14	27
H_{p^3}	1	1	1	$\boxed{0}$	14

$p = 5, 7$

TABELLE 5. $k = 14$

Koeff.	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	Koeff.	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹
Δ_1	60	64	68	72	76	Δ_1	55	58	61	64	67
Δ_2	42	46	50	54	58	Δ_2	38	41	44	47	50
Δ_4	26	30	34	38	42	Δ_4	21	24	27	30	33
Δ_8	12	16	20	24	28	Δ_8	12	15	18	21	24
Δ_{16}	4	8	12	16	20	Δ_{16}	3	6	9	12	15
E_k	3	3	3	3	3	E_k	4	4	4	4	4
H_1	62	66	70	74	78	H_1	57	60	63	66	69
H_2	44	48	52	56	60	H_2	40	43	46	49	52
H_4	28	32	36	40	44	H_4	23	26	29	32	35
H_8	14	18	22	26	30	H_8	14	17	20	23	26
H_{16}	6	10	14	18	22	H_{16}	5	8	11	14	17
H_{32}	$\boxed{2}$	12	16	20	24	H_{32}	$\boxed{2}$	10	13	16	19
H_{64}	13	$\boxed{2}$	12	16	20	H_{64}	7	$\boxed{2}$	10	13	16
H_{128}	11	13	$\boxed{2}$	12	16	H_{128}	7	7	$\boxed{2}$	10	13

$k = 66, \alpha_i = 4, 8, 14, 16, 18$ $k = 68, \alpha_i = 3, 9, 9, 17, 17$

Koeff.	2 ⁵	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	Koeff.	2 ⁶	2 ⁷	2 ⁸	2 ⁹	2 ¹⁰
Δ_1	62	67	72	77	82	Δ_1	78	81	84	87	90
Δ_2	43	48	53	58	63	Δ_2	57	60	63	66	69
Δ_4	26	31	36	41	46	Δ_4	38	41	44	47	50
Δ_8	13	18	23	28	33	Δ_8	21	24	27	30	33
Δ_{16}	5	10	15	20	25	Δ_{16}	10	13	16	19	22
E_k	3	3	3	3	3	Δ_{32}	3	6	9	12	15
H_1	64	69	74	79	84	E_k	5	5	5	5	5
H_2	45	50	55	60	65	H_1	80	83	86	89	92
H_4	28	33	38	43	48	H_2	59	62	65	68	71
H_8	15	20	25	30	35	H_4	40	43	46	49	52
H_{16}	7	12	17	22	27	H_8	23	26	29	32	35
H_{32}	$\boxed{2}$	12	17	22	27	H_{16}	12	15	18	21	24
H_{64}	7	$\boxed{2}$	12	17	22	H_{32}	5	8	11	14	17
H_{128}	7	7	$\boxed{2}$	12	17	H_{64}	$\boxed{2}$	15	21	24	27
						H_{128}	8	$\boxed{2}$	14	17	20
						H_{256}	8	8	$\boxed{2}$	14	17

$k = 70, \alpha_i = 5, 8, 13, 17, 19$ $k = 72, \alpha_i = 3, 7, 11, 17, 19, 21$

TABELLE 6. $p = 2$

C.4.5. Spektrallinien. Berechnung der Grenzwerte $g_i := \text{ord}_p \sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_i(p^j)}$ für schwache Neuf Formen aus $S_k^1(N, \chi)$. Die Primzahlen p sind so gewählt, dass die T_p -Eigenwerte paarweise verschieden sind, so dass man die Heckedefekte mit Folgerung 5.3.8.5 berechnen kann.

N	χ	k	p	char. Polynom des Heckeoperators T_p	Newtonsteigung α_i	Grenzwerte g_i
1	1	1	2	$x - 24$	3	10
				$x - 216$	3	11
				$x + 528$	4	12
				$x - 456$	3	10
				$x + 288$	5	12
				$x^2 - 1080x - 20468736$	3,7	15,18
				$x + 48$	4	13
				$x^2 + 8280x - 195250176$	3,8	13,18
				$x^2 - 8640x - 454569984$	6,6	19,19
				$x^2 - 39960x - 2235350016$	3,7	14,19
				$x^2 + 121680x - 8513040384$	4,8	16,21
					3,9,9	16,28,28
					5,8	17,20
					3,7,11	19,25,30
					4,9,12	22,30,34
					3,8,11	16,26,29
					6,6,13	26,26,32
					3,7,12,15	20,34,42,46
					4,8,13	20,30,33
					3,9,9,16	19,38,38,44
					5,9,11,16	27,39,43,48
					3,7,11,16	21,32,42,45
					4,10,12,14	25,42,48,48
					3,8,12,14,19	22,42,54,58,63
	6,6,14,14	31,31,47,47				
	3,7,13,15,17	23,40,57,63,63				
	4,8,14,16,18	28,45,62,68,68				
	3,9,9,17,17	22,46,46,62,62				
	5,8,13,17,19	32,44,59,67,69				
	3,7,11,17,19,21	29,46,63,80,86,86				
	4,9,12,16,20	31,48,58,65,71				
2	1	1	3	$x - 12$	1	2
				$x + 156$	1	3
				$(x - 1236)(x + 1836)$	1,3	3,5
3	1	1	2	$x + 6$	1	3
				$x - 6$	1	4
				$(x - 18)(x + 36)$	1,2	4,6
				$(x + 12)(x^2 + 54x - 16992)$	1,2,4	5,9,9
3	$(\frac{\cdot}{3})$	1	2	x	3	3
				$x^2 + 504$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{11}{2}, \frac{11}{2}$
				$x^2 + 720$	2,2	5,5
				$x(x^2 + 8424)$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 6$	8,8,8
				$x^4 + 52416x^2 + 75479040$	$\frac{11}{4}, \frac{11}{4}, \frac{11}{4}, \frac{11}{4}$	$\frac{43}{4}, \frac{43}{4}, \frac{43}{4}, \frac{43}{4}$

		17		$x^4 + 137304x^2 + 3863946240$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}$	$\frac{17}{2}, \frac{17}{2}, \frac{25}{2}, \frac{25}{2}$
		19		$x(x^4 + 1051056x^2 + 157480796160)$	2, 2, 5, 5, 9	11, 11, 18, 18, 18
		21			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 4, 4, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}$	$\frac{27}{2}, \frac{27}{2}, 20, 20, \frac{51}{2}, \frac{51}{2}$
		23			$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 3, 3, 6, 6$	$\frac{33}{2}, \frac{33}{2}, 17, 17, 24, 24$
		25			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{13}{2}, 12$	13, 13, 24, 24, 32, 32, 32
		27			2, 2, $\frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, 8, 8$	17, 17, $\frac{67}{2}, \frac{67}{2}, \frac{67}{2}, \frac{67}{2}, 39, 39$
		29			$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}, 7, 7$	$\frac{29}{2}, \frac{29}{2}, \frac{61}{2}, \frac{61}{2}, \frac{77}{2}, \frac{77}{2}, 34, 34$
4	1	6	3	$x + 12$	1	1
		5		x	2	1
		7		$x^2 + 960$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$
4	$(\frac{\cdot}{4})$	9	3	$x(x^2 + 9984)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4$	3, 3, 3
		11		$x^4 + 132480x^2 + 1706987520$	1, 1, $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	4, 4, $\frac{13}{2}, \frac{13}{2}$
		13		$x(x^4 + 1745664x^2 + 142371717120)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 6$	3, 3, 9, 9, 9
		15			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 3, 3$?, ?, 9, 9, 11, 11
		6		$x^2 + 44$	1, 1	3, 3
		8		$x^2 + 116$	1, 1	4, 4
5	$(\frac{\cdot}{5})$	10	2	$x^4 + 1708x^2 + 1216$	1, 1, 2, 2	5, 5, 8, 8
		12		$x^4 + 4132x^2 + 2496256$	1, 1, 3, 3	7, 7, 9, 9
		14			1, 1, 2, 2, 4, 4	7, 7, 13, 13, 15, 15
		16			1, 1, 3, 3, 3, 3	8, 8, 17, 17, 17, 17
		5		$x + 1 + i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
5	$2 \rightarrow i$	7	2	$x^2 + 5(1 + i)x - 88i$	$\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$	4, 3
		9		$x^3 + (1 + i)x^2 - 392ix + 1592(1 - i)$	$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}$
		11			$\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{5}{2}$	4, 7, 7, 10
		3		x	1	1
		5		x	2	1
7	$(\frac{\cdot}{7})$	7	3	$x(x^2 + 2040)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3$	2, 2, 2
		9		$x(x^4 + 17184x^2 + 40430880)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1, 4$	3, 3, 4, 4, 5
		11		$x(x^4 + 132480x^2 + 4381776000)$	1, 1, $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 5$	5, 5, 8, 8, 7
		4		$x - 2\zeta_3$	1	1
7	$3 \rightarrow \zeta_3$	6	2	$x^2 - 2\zeta_3x + 36\zeta_6$	1, 1	2, 2
		8		$x^4 + 6\zeta_3x^3 + 412\zeta_6x^2 - 1704x + 9312\zeta_3$	1, 1, 1, 2	$\frac{14}{3}, \frac{14}{3}, \frac{14}{3}, 5$
		10			1, 1, 1, 2, 2, 2	5, 5, $\frac{26}{3}, \frac{26}{3}, \frac{26}{3}$
		5		$x^2 + 4\zeta_6x - 18\zeta_3$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}, \frac{5}{2}$
7	$3 \rightarrow \zeta_6$	7	2	$(x - 12\zeta_6)(x^2 + 8\zeta_6x - 2\zeta_3)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$	4, 4, 3
		9		$x^4 + 4\zeta_6x^3 - 586\zeta_3x^2 + 592x - 14064\zeta_6$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \frac{11}{2}$
		11			$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$?, ?, 9, 9, $\frac{25}{2}, \frac{25}{2}$
8	1	4	11	$x + 44$	1	0
		3		x	1	0
8	$(\frac{-8}{\cdot})$	5	5	$x(x^2 + 960)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$	0, 0, 0
9	1	4	2	x	$\frac{3}{2}$	1
		2		$x + 2$	1	1
		4	2	$x^2 - 2x - 2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
11	1	6		$x^4 + 4x^3 - 90x^2 - 172x + 752$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
		8			$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$
		10			$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
11	$(\frac{\cdot}{11})$	3	2	x	1	0
		5		$x(x^2 + 30)$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2$	2, 2, 1
12	$(\frac{-3}{\cdot})$	3	5	x	1	0
14	1	2	11	x	$\frac{1}{2}$	0
15	1	2	7	x	$\frac{1}{2}$	0
16	$(\frac{\cdot}{4})$	3	3	x	1	0
16	$5 \rightarrow i, 15 \rightarrow 1$	2	41	x	$\frac{1}{2}$	0

17	1	2	3	x	$\frac{1}{2}$	2
18	$11 \rightarrow \zeta_3$	2	5	x	$\frac{1}{2}$	0
19	1	2	23	x	$\frac{1}{2}$	0
21	1	2	23	x	$\frac{1}{2}$	0
23	$\left(\frac{\cdot}{23}\right)$	3	5	x^3	1, 1, 1	1,1,1
37	$\left(\frac{\cdot}{37}\right)$	2	2	$x^2 + 4$	1, 1	$\neq 0$

Integrale und Regularisierung

D.1. Integralformeln

D.1.1. Trigonometrische Funktionen. In (D.1.1.1)-(D.1.2.1) sei $x > 0, 0 < \theta < \pi, \operatorname{Re} \alpha > -1$:

$$(D.1.1.1) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} = \operatorname{arcosh} \left(\frac{x}{t} \sin \theta + \cos \theta \right), \quad [\text{GR}, 2.261]$$

$$(D.1.1.2) \quad \int \frac{dt}{\sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} = \arcsin \left(\frac{t}{x} \sin \theta - \cos \theta \right), \quad [\text{GR}, 2.261]$$

$$(D.1.1.3) \quad \int \frac{dt}{t\sqrt{x^2 + 2tx \cot \theta - t^2}} = -\frac{1}{x} \operatorname{arcosh} \left(\frac{x}{t} \sin \theta + \cos \theta \right), \quad [\text{GR}, 2.266]$$

$$(D.1.1.4) \quad \int_Y^{\frac{\sqrt{d}}{2n} \cot \frac{\theta}{2}} \frac{dy}{y\sqrt{d + 4ny\sqrt{d} \cot \theta - 4n^2 y^2}} = \frac{1}{\sqrt{d}} \operatorname{arcosh} \left(\frac{\sqrt{d} \sin \theta}{2nY} + \cos \theta \right), \text{ vgl. (D.1.1.3)}$$

D.1.2. Betafunktion.

$$(D.1.2.1) \quad \int_0^x \frac{t^\alpha}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = \frac{1}{2} B \left(\frac{1}{2}, \frac{1 + \alpha}{2} \right) x^\alpha = 2^{\alpha-1} \frac{\Gamma \left(\frac{\alpha+1}{2} \right)^2}{\Gamma(\alpha+1)} x^\alpha, \quad [\text{GR}, 8.380.1]$$

$$(D.1.2.2) \quad \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2}^{2k-1} dt = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left(k + \frac{1}{2} \right)}{2 k!} x^{2k}, \quad [\text{GR}, 3.249.5]$$

Für $\operatorname{Re} s > 0$:

$$(D.1.2.3) \quad \mathbf{R} \int_0^\eta y^{s-1} (\eta - y)^{k-2} dy = \frac{\Gamma(s) \Gamma(k-1)}{\Gamma(s+k-1)} \eta^{s+k-2} \text{ für } \operatorname{Re} k > 1, \eta > 0$$

$$(D.1.2.4) \quad \int_0^\infty \left(\frac{\eta}{a^2 \eta^2 + b^2} \right)^s \frac{d\eta}{\eta} = \frac{B \left(\frac{s}{2}, \frac{s}{2} \right)}{2|ab|^s}, \quad [\text{GR}, 3.251.2]$$

$$(D.1.2.5) \quad \int_0^1 \frac{t^{s-1} \cos(k \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi \Gamma(s)}{2^s \Gamma \left(\frac{s-k+1}{2} \right) \Gamma \left(\frac{s+k+1}{2} \right)} \text{ für } k \in \mathbb{Z}, \operatorname{Re} s > 0, \text{ vgl. Hilfssatz D.1.3.1}$$

D.1.3. Hypergeometrische Funktionen.

Für $y > 0, \operatorname{Re} s > \max \left(\frac{1}{2}, \frac{|k|}{2} \right)$:

$$(D.1.3.1) \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-2\pi i m x}}{(x + iy)^{s+\frac{k}{2}} (x - iy)^{s-\frac{k}{2}}} dx = \begin{cases} \frac{|m|^{s-1} \pi^s}{i^k \Gamma \left(s + \frac{k}{2} \operatorname{sign} m \right)} y^{-s} W_{\frac{k}{2} \operatorname{sign} m, s-\frac{1}{2}}(4\pi |m| y), & m \neq 0 \\ \frac{\pi \Gamma(2s-1)}{i^k 4^{s-1} \Gamma \left(s - \frac{k}{2} \right) \Gamma \left(s + \frac{k}{2} \right)} y^{1-2s}, & m = 0 \end{cases}$$

[Siegel 6, (12)-(14)],

speziell:

$$(D.1.3.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi imx}}{(x+iy)^k} dx = \begin{cases} (-1)^{[k]} \frac{(-2\pi im)^k}{m \Gamma(k) e^{2\pi my}}, & \text{für } m > 0, \\ 0, & m = 0, k \geq \frac{3}{2}, \\ 0, & \text{für } m < 0, \end{cases} \quad y > 0, m \in \mathbb{R}, k \in \frac{1}{2}\mathbb{N}, \text{ Residuensatz.}$$

Hilfssatz D.1.3.1. Wir setzen $\operatorname{Re} s > 0$ voraus.

1) Sei $a < 0 < b$. Dann ist

$$\int_0^b \frac{t^{s-1}}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} dt = \frac{\sqrt{\pi} b^{s-\frac{1}{2}} \Gamma(s)}{\sqrt{-a} \Gamma(s+\frac{1}{2})} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, s; s+\frac{1}{2}; \frac{b}{a}\right).$$

2) Sei $a < b$. Nimmt man Hauptwerte für die Potenzen, so ist:

$$\int_a^b \frac{t^{s-1}}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} dt = \frac{\pi b^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, s; 1; 1 - \frac{b}{a} + 0i\right).$$

3) Sei $k \in \mathbb{Z}, \tau = \pm 1, 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} (e^{-i\theta} t - \tau)^{2k}}{(t^2 - 2\tau t \cos \theta + 1)^{s+k}} dt = \begin{cases} \frac{(i\tau)^k \Gamma(s) \Gamma(\frac{s-k}{2}) \Gamma(\frac{s+k}{2})}{2 \Gamma(s-k) \Gamma(s+k)}, & \theta = \frac{\pi}{2}, \\ e^{i(\theta-\pi)s} \left(\frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1 - e^{2i\theta}) \right. \\ \quad \left. + 2\pi i (-1)^k \binom{s-1}{|k|} e^{-2i\theta \min(0,k)} {}_2F_1(s+|k|, s; |k|+1; e^{2i\theta}) \right), & \tau = 1, \\ e^{i\theta s} \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1 - e^{2i\theta}), & \tau = -1, \end{cases}$$

falls die rechte Seite definierbar ist.

BEWEIS. 1) Mit der Substitution $t = b\tau$ ist

$$\int_0^b \frac{t^{s-1}}{\sqrt{(t-a)(b-t)}} dt = \frac{b^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{-a}} \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{a}\tau\right)^{-\frac{1}{2}} d\tau = \frac{b^{s-\frac{1}{2}} \sqrt{\pi} \Gamma(s)}{\sqrt{-a} \Gamma(s+\frac{1}{2})} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, s; s+\frac{1}{2}; \frac{b}{a}\right).$$

2) Mit der Substitution

$$t = a - (a - b + 0i \operatorname{sign} a) u, \quad u = \frac{t-a}{b-a} > 0, \quad b-t = (b-a)(1-u) > 0,$$

d.h.

$$\arg(t) = 0 \vee \pi, \quad \arg(a-t) = \pi \operatorname{sign} a,$$

erhält man ein hypergeometrisches Integral:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{t^{s-1}}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} dt &= i \operatorname{sign} a \int_a^b t^{s-1} (a-t)^{-\frac{1}{2}} (b-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= i \operatorname{sign} a (a - 0i \operatorname{sign} a)^{s-1} (a - b + 0i \operatorname{sign} a)^{-\frac{1}{2}} (b-a)^{-\frac{1}{2}} (b-a) \int_0^1 \left(1 - \left(1 - \frac{b}{a} + 0i\right) u\right)^{s-1} u^{-\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &\stackrel{[\text{AS}, 15.3.1]}{=} (a - 0i \operatorname{sign} a)^{s-1} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1-s; 1; 1 - \frac{b}{a} + 0i\right) \\ &\stackrel{[\text{AS}, 15.3.3]}{=} \pi (a - 0i \operatorname{sign} a)^{s-1} \left(\frac{b}{a} - 0i\right)^{s-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, s; 1; 1 - \frac{b}{a} + 0i\right). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich, dass die Argumente in den drei Fällen $a < b < 0$, $a < 0 < b$, $0 < a < b$ mit der Behauptung übereinstimmen, d.h. $t^s := e^{\pi i s} |t|^s$ für $t < 0$. Unter der Annahme $\operatorname{Re} s > 0$ hat die hypergeometrische Funktion ${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, s; 1; z\right)$ i.a. eine logarithmische Singularität bei $z = 1$, während sie holomorph in $\operatorname{Re} z < 1$ ist.

3) Der Fall $\theta = \frac{\pi}{2}$ ist [GR, 3.197.1].

Wir wollen das Integral $\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{(1+e^{i\theta t})^{s+k}(1+e^{-i\theta t})^{s-k}} dt$ auswerten. Die Substitution $u = e^{i(\pi-\theta)t}$ führt auf

$$e^{i(\theta-\pi)s} \int_0^{e^{(\pi-\theta)i}\infty} u^{s-1} (1-u)^{-s+k} (1-e^{2i\theta}u)^{-s-k} du.$$

Falls $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, kann man den Integrationsweg zu $[-\infty, 0]$ deformieren, ohne die Singularität bei $e^{-2i\theta}$ zu treffen. Der Integrand ist für $|u| > R$ von der Größenordnung R^{-s-1} . Der Beitrag des Integrals über ein Kreisbogenstück mit Radius R verschwindet also für $\operatorname{Re} s > 0$. Setze

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\tau}{1-\tau}, & du &= -\frac{d\tau}{(1-\tau)^2}, \\ 1-u &= \frac{1}{1-\tau}, & 1-e^{2i\theta}u &= \frac{1-(1-e^{2i\theta})\tau}{1-\tau}, \\ \arg u &= \pi, & u^{s-1} &= \left(\frac{\tau}{1-\tau}\right)^{s-1} e^{i\pi(s-1)}. \end{aligned}$$

Damit hat man ein hypergeometrisches Integral

$$\begin{aligned} &= e^{i(\theta-\pi)s} e^{i\pi s} \int_0^1 \tau^{s-1} (1-\tau)^{s-1} (1-(1-e^{2i\theta})\tau)^{-s-k} d\tau \\ &= e^{i\theta s} \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1-e^{2i\theta}), \quad \text{falls } \operatorname{Re} s > 0, |\theta| < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Falls $\frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$, $\operatorname{Re} s > 0$, erhält man durch Substitution $\delta = \theta - \pi$:

$$\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{(1-e^{i\theta t})^{s+k}(1-e^{-i\theta t})^{s-k}} dt = e^{i(\theta-\pi)s} \frac{\Gamma(s)^2}{\Gamma(2s)} {}_2F_1(s+k, s; 2s; 1-e^{2i\theta}).$$

Die linke Seite läßt sich analytisch auf $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ fortsetzen. Auf der rechten Seite gibt es i.a. eine logarithmische Singularität der hypergeometrischen Funktion ${}_2F_1(s+k, s; 2s; z)$ bei $z = 1$. Wir beweisen das folgende Verhalten am Verzweigungsschnitt $[1, \infty]$:¹

(D.1.3.3)

$${}_2F_1(s+k, s; 2s; r+0i) - {}_2F_1(s+k, s; 2s; r-i0) = \frac{2\pi i \Gamma(2s)(r-1)^{-k}}{\Gamma(s+k)\Gamma(s)\Gamma(1-k)} {}_2F_1(s-k, s; 1-k; 1-r-0i),$$

falls $k \notin \mathbb{N}$, $r > 1$, $\operatorname{Re} s > 0$. Mit der bekannten Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion ist:

$$\begin{aligned} &{}_2F_1(s+k, s; 2s; r+0i) - {}_2F_1(s+k, s; 2s; r-i0) \\ &= \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s)} \int_0^1 (t(1-t))^{s-1} \left\{ (1-t(r+0i))^{-s-k} - (1-t(r-i0))^{-s-k} \right\} dt \\ &= \left(1 - e^{2\pi i(-s-k)}\right) \frac{\Gamma(2s)}{\Gamma(s)} \int_{\frac{1}{r}}^1 (t(1-t))^{s-1} (1-t(r+0i))^{-s-k} dt, \end{aligned}$$

¹vgl. dlmf.nist.gov/15.2.E3

da $\arg(1 - t(r \pm 0i)) = \begin{cases} 0, & \text{für } 0 < t < \frac{1}{r}, \\ \mp\pi, & \text{für } \frac{1}{r} < t < 1. \end{cases}$ Durch die Substitution

$$\begin{aligned} t &= \frac{1 - (1 - r - 0i)u}{r + 0i}, & u &= \frac{rt - 1}{r - 1}, \\ 1 - t &= \frac{(r - 1)(1 - u)}{r}, & 1 - (r + 0i)t &= (1 - r - 0i)u, \end{aligned}$$

hat man ein hypergeometrisches Integral:

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{r}}^1 (t(1-t))^{s-1} (1-t(r+0i))^{-s-k} dt \\ &= (1-r)^{-s-k} (r-1)^{s-1} r^{2-2s} \frac{r-1}{r} \int_0^1 u^{-s-k} (1-u)^{s-1} (1-(1-r-0i)u)^{s-1} du \\ &\stackrel{[\mathbf{AS}, 15.3.1]}{=} e^{-\pi i(-s-k)} r^{1-2s} (r-1)^{-k} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s-k)}{\Gamma(1-k)} {}_2F_1(1-s, 1-s-k; 1-k; 1-r-0i), \text{ falls } \operatorname{Re}(k) < 1, \\ &\stackrel{[\mathbf{AS}, 15.3.3]}{=} e^{\pi i(s+k)} (r-1)^{-k} \frac{\Gamma(s)\Gamma(1-s-k)}{\Gamma(1-k)} {}_2F_1(s-k, s; 1-k; 1-r-0i). \end{aligned}$$

Aus $s+k \notin \mathbb{N}$ folgt $(1 - e^{2\pi i(-s-k)}) e^{\pi i(s+k)} \Gamma(1-s-k) = 2i \sin(\pi(s+k)) \Gamma(1-s-k) = \frac{2\pi i}{\Gamma(s+k)}$ und daraus Behauptung (D.1.3.3). Für $r = 2, k \in \mathbb{Z}^-$ folgt die Aussage des Hilfssatzes. Falls $k \in \mathbb{N}$, kann man den Grenzübergang [AS, 15.1.2] benutzen² und hat

(D.1.3.4)

$${}_2F_1(s+k, s; 2s; r+0i) - {}_2F_1(s+k, s; 2s; r-i0) = \frac{2\pi i (-1)^k \Gamma(2s)}{\Gamma(s-k)\Gamma(s)\Gamma(1+k)} {}_2F_1(s+k, s; 1+k; 1-r-0i).$$

Im ersten Quadranten wird das Integral durch ${}_2F_1(s+k, s; 2s; r+i0)$ gegeben. Die analytische Fortsetzung auf den 4. Quadranten ist wegen (D.1.3.3) und (D.1.3.4):

$${}_2F_1(s+k, s; 2s; r-i0) + \begin{cases} \frac{2\pi i (-1)^k \Gamma(2s)}{\Gamma(s-k)\Gamma(s)\Gamma(1+k)} {}_2F_1(s+k, s; 1+k; 1-r-0i), & k > 0, \\ \frac{2\pi i \Gamma(2s) (r-1)^{-k}}{\Gamma(s+k)\Gamma(s)\Gamma(1-k)} {}_2F_1(s-k, s; 1-k; 1-r-0i), & k < 0. \end{cases}$$

Mit $\binom{s-1}{|k|} = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s-|k|)\Gamma(1+|k|)}$ folgt die Beh.

□

Folgende Integrale wurden durch MATHEMATICA ausgewertet und in vielen Fällen überprüft:

$$(D.1.3.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{2\pi i ut - \pi t^2} dt = \begin{cases} \pi^{-\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{n+1}{2}; \frac{1}{2}; -\pi u^2\right), & n \text{ gerade,} \\ 2iu\pi^{-\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) {}_1F_1\left(\frac{n}{2} + 1; \frac{3}{2}; -\pi u^2\right), & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

$$(D.1.3.6) \quad \text{Für } n \in \mathbb{N}_0, n \leq 2k + 1: \int_{-\infty}^{\infty} t^n {}_1F_1\left(k + \frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\pi t^2\right) dt = 0.$$

²ähnlich für $s+k \in \mathbb{N}$

D.1.4. Besselfunktionen.

$$(D.1.4.1) \quad \int_0^{\frac{\sqrt{d}}{2a}} \frac{y^{s-1}}{\sqrt{d-4a^2y^2}} \cos \frac{\pi r \sqrt{d-4a^2y^2}}{a} dy = \frac{d^{\frac{s-1}{4}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\pi^{\frac{s-2}{2}} 2^{\frac{s+3}{2}} |a|^{\frac{s+1}{2}} |r|^{\frac{s-1}{2}}} J_{\frac{s-1}{2}} \left(\frac{\pi|r|\sqrt{d}}{|a|} \right) \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0$$

$$(D.1.4.2) \quad \int_0^1 t(1-t^2)^{u-1} \sin(ct) dt = \begin{cases} \operatorname{sign}(c) \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{|c|}\right)^{u-\frac{1}{2}} \Gamma(u) J_{u+\frac{1}{2}}(|c|), & c \in \mathbb{R}, \operatorname{Re} u > 0, \text{ [GR, 3.771.3]} \\ 0, & c = 0 \end{cases}$$

$$(D.1.4.3) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-c \cos \theta} \cos^{k-1} \theta \cos(c \sin \theta - k\theta) d\theta = \begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma(k) c^{\frac{1}{2}-k} J_{k-\frac{1}{2}}(c), & k > 0, c \neq 0 \\ \frac{B(k, \frac{1}{2})}{2^k}, & k > 0, c = 0 \end{cases}$$

$$(D.1.4.4) \quad \frac{2\pi x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{dn}} \int_0^{\infty} l_3(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) m_2(4\pi\sqrt{\frac{nt}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \begin{cases} 1, & 0 < n < x \\ \frac{1}{2}, & n = x \\ 0, & n > x \end{cases}$$

$$(D.1.4.5) \quad \int_0^{\infty} L_1(u) M_0(uy) du = \begin{cases} 1, & y < 1 \\ \frac{1}{2}, & y = 1 \\ 0, & y > 1 \end{cases}$$

vgl. [Wilton 1, (3.1)].

Hilfssatz D.1.4.1. (Hardy, Wilton): Für $A > 0$ und $J(y) := \int_{\tau}^{\infty} L_2(u) L_1(yu) du$ gilt:

$$J(y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}(y-1)}{\pi\sqrt{y}} \operatorname{si}(\tau|1-y|) + O\left(\frac{1}{\tau y^{\frac{3}{2}}}\right), & \tau > A, y > A, \\ O\left(\tau^{-1} y^{-\frac{3}{2}}\right), & \tau > A, y > 1+A, \\ O\left(\tau^{-1} y^{-\frac{1}{2}}\right), & 0 < y < 1-A, \tau y > A. \end{cases}$$

Dabei sind die Konstanten in den $O(\cdot)$ -Termen nur von A abhängig.

BEWEIS. s. [Wilton 1, 4, Lemma]

□

$$(D.1.4.6) \quad \int_0^{\infty} e^{-\pi y |t|(x + \frac{\operatorname{sign} t}{x})^2} \frac{dx}{x} = e^{-2\pi t y} K_0(2\pi |t| y)$$

D.1.5. Meijer G-Funktionen.

$$(D.1.5.1) \quad \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2}^{2k-1} M_0(4\pi\sqrt{\frac{tN}{d}}) dt = \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{2} x^{2k} G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 N^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,0;\frac{1}{2},-k}^- \right)$$

$$(D.1.5.2) \quad \int_0^x \sqrt{x^2 - t^2}^{2k-1} L_1(4\pi\sqrt{\frac{tN}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\pi \Gamma(k + \frac{1}{2}) \sqrt{N}}{2\sqrt{d}} x^{2k} G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 N^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,0;-\frac{1}{2},-k}^- \right)$$

$$(D.1.5.3) \quad \int_0^x \frac{L_2(4\pi\sqrt{\frac{st}{d}})}{\sqrt{x^2 - t^2}} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 s^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,1;-\frac{1}{2},0}^- \right)$$

$$(D.1.5.4) \quad \int_0^x \sqrt{t} (x^2 - t^2)^{k-\frac{1}{2}} M_1(4\pi\sqrt{\frac{st}{d}}) dt = \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2}) \sqrt{d}}{2\pi\sqrt{s}} x^{2k} G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 s^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,1;\frac{1}{2},-k}^- \right)$$

$$(D.1.5.5) \quad \int_0^x \operatorname{arcosh} \frac{x}{t} M_0(4\pi\sqrt{\frac{tN}{d}}) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4} x G_{04}^{20} \left(\frac{\pi^4 N^2 x^2}{d^2} \middle|_{0,0;0,\frac{1}{2}}^- \right)$$

$$(D.1.5.6) \quad \int_0^x \operatorname{arcosh} \frac{x}{t} L_1(4\pi \sqrt{\frac{tN}{d}}) \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{\sqrt{d}}{4\sqrt{\pi N}} G_{15}^{21} \left(\frac{\pi^4 N^2 x^2}{d^2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0 \right).$$

D.2. Regularisierung

Einige Male ist es nötig, nicht konvergenten Integralen $\int_M f(z, s_0) dz$ sinnvolle Werte zuzuweisen. Das allgemeine Prinzip ist das folgende: Man versucht, Funktionen $g_1(z, s), \dots, g_n(z, s)$ mit $f = g_1 + \dots + g_n$ zu finden, so dass die Integrale $\int_M g_j(z, s) dz$ in (verschiedenen) Umgebungen $s \in U_j$ gegen Funktionen $G_j(s)$ konvergieren. Dann setzt man G_j nach s_0 analytisch fort und definiert $\int_M f(z, s_0) dz = \sum_j G_j(s_0)$;

D.2.1. Borchers' Regularisierung. ursprünglich von [Harvey Moore], verallgemeinert von [Borchers 2, Theorem 7.1], vgl. auch [Bruinier Funke 2, 5.2 The singular theta lift].

Definition D.2.1.1. Sei F eine stetige $|\kern-0.25ex|\kern-0.25ex|_k \Gamma$ -invariante Funktion auf \mathcal{H} mit Fourierreihe $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(y) e(nx)$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und bei Null integrierbar. Die Funktionen F bzw. f heißen regularisierbar, falls

- $F(z) = O(y^{c_1})$ für $y \rightarrow 0$ und ein $c_1 \in \mathbb{R}$;
- $F(z) = O(y^{c_2})$ für $y \rightarrow \infty$ und ein $c_2 \in \mathbb{R}$;
- $f(y) = O(y^{c_3})$ für $y \rightarrow 0$ und ein $c_3 \in \mathbb{R}$;
- $f(y) = O(y^{c_4})$ für $y \rightarrow \infty$ und ein $c_4 \in \mathbb{R}$;

Falls folgende Integrale, erklärt für ein Intervall $t \in (a, b)$, eine analytische Fortsetzung auf $t = 0$ haben, sei:

- (1) $\mathbf{R.} \int_{\mathfrak{F}} F(z) d\mu := \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{\substack{\mathfrak{F} \\ y < T}} \frac{F(z)}{y^t} d\mu \Big|_{t=0},$
- (2) $\mathbf{R.} \int_{\gamma \mathfrak{F}} F(z) d\mu := \mathbf{R.} \int_{\mathfrak{F}} F(\gamma z) d\mu,$
entsprechend $\mathbf{R.} \int_{\Gamma' \backslash \mathcal{H}} F(z) d\mu$ für $|\Gamma : \Gamma'| < \infty,$
- (3) $\mathbf{R.} \int_0^\infty f(y) dy := \int_0^T y^t f(y) dy \Big|_{t=0} + \int_T^\infty \frac{f(y)}{y^t} dy \Big|_{t=0},$
 $\mathbf{R.} \int_0^a f(y) dy := \int_0^a y^t f(y) dy \Big|_{t=0},$
 $\mathbf{R.} \int_b^\infty f(y) dy := \int_b^\infty \frac{f(y)}{y^t} dy \Big|_{t=0},$
- (4) $\mathbf{R.} \int_{\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}} F(z) d\mu := \int_{\substack{\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H} \\ y < T_1}} y^t F(z) d\mu \Big|_{t=0} + \lim_{T_2 \rightarrow \infty} \int_{\substack{\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H} \\ T_1 < y < T_2}} \frac{F(z)}{y^t} d\mu \Big|_{t=0},$
- (5) $\mathbf{R.} \int_{\mathcal{H}} F(z) d\mu := \mathbf{R.} \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \int_{-\infty}^\infty F(x + iy) dx.$

D.2.2. Zyklenintegrale. Es ist notwendig, eine Regularisierung für Wegintegrale über unendlich lange Geodätische $(0, b, c)$ einzuführen.

Definition D.2.2.1. Für $d = b^2$, Λ_d die unendlich langen Geodätischen im Fundamentalbereich \mathfrak{F} und F regularisierbares vom Gewicht $2k$ sei

$$C_d(F) := \mathbf{R.} \int_{\Lambda_d} F(z) d\Lambda_{d,2k} z := \int_{\substack{\Lambda_d \\ y < T}} F(z) d\Lambda_{d,2k} z + \int_{\substack{\Lambda_d \\ y > T}} \frac{F(z)}{y^t} d\Lambda_{d,2k} z \Big|_{t=0}$$

definiert für $\operatorname{Re} t \gg 1$ und analytisch fortgesetzt auf $t = 0$.

Hilfssatz D.2.2.2. Für $d = \square$ und F regularisierbar vom Gewicht $2k, k \in 2\mathbb{Z}$ ist

$$C_d(F) = \mathbf{R} \int_{\mathfrak{F}} F(z) \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(z)} d\mu$$

BEWEIS.

$$\mathbf{R} \int_{\mathfrak{F}} F(z) \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(z)} d\mu = \int_{\substack{\mathfrak{F} \\ y < T}} F(z) \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(z)} d\mu + \int_{\substack{\mathfrak{F} \\ y > T}} \frac{F(z) \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(z)}}{y^t} d\mu \Big|_{t=0}$$

Nun ist

$$\int_{\substack{\Lambda_d \\ y < T}} F(z) d\Lambda_{d,2k} z = \int_{\substack{\mathfrak{F} \\ y < T}} F(z) \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(z)} d\mu.$$

Das folgt aus dem Beweis von Satz 1.5.1.2 und für $y > \sqrt{d}$ ist

$$y^{-t-2} \int_0^1 F(z) \overline{\mathfrak{D}_{d,2k}(z)} dx = y^{-t-2} \sum_{c=1}^{\sqrt{d}} (i \operatorname{sign} b)^k F\left(-\frac{c}{b} + iy\right)$$

Das ist für $t \gg 1$ über $y \in (\sqrt{d}, \infty)$ integrierbar und ergibt das Wegintegral

$$\int_{\substack{\Lambda_d \\ y > \sqrt{d}}} \frac{F(z)}{y^t} d\Lambda_{d,2k} z.$$

□

D.2.3. Regularisierung für Eichlerintegrale, Periodenfunktionen und L -Reihen. Wir wollen Eichlerintegrale \tilde{f} für schwach-holomorphe Modulformen f erklären. Dazu reichen die bisher besprochenen Regularisierungsverfahren nicht aus. Es ist nötig, sich etwas allgemeinere Gedanken zum Thema Regularisierung zu machen. Eichlerintegrale sind $(k-1)$ -fache Stammfunktionen von f :

$$D^{k-1} \tilde{f} = f \text{ bzw. } \frac{\partial^{k-1} \tilde{f}}{\partial \bar{z} \partial^{k-2} z}(z) = (-2\pi i)^{k-1} f(-\bar{z}),$$

$$\tilde{f}(z) \doteq \int_z^{i\infty} \int_{z_1}^{i\infty} \int_{z_2}^{i\infty} \cdots \int_{z_{k-2}}^{i\infty} f(z_{k-1}) dz_{k-1} dz_{k-2} \dots dz_1 = \frac{1}{\Gamma(k-1)} \int_z^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau$$

Die rechte Seite macht auch noch Sinn, falls das Gewicht k nicht ganzzahlig ist, s. fraktionale Integrale³. Da das für $k > 0$ vielleicht nicht definiert ist, sei k variabel < 0 und setze das Ergebnis analytisch fort. Aber für schwach-holomorphe Modulformen gibt es ein Problem, da f in den Spitzen wesentliche Singularitäten hat. Eine sinnvolle Regularisierung des Integrals besteht darin, mit einer Funktionsschar ungefähr gleichen Wachstums zu dämpfen und anschließend den Parameter der Funktionsschar so zu wählen, als ob die Dämpfungsfunktion nicht vorhanden wäre. Wir führen folgende Methode ein:

Definition D.2.3.1. Sei $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. f heißt regularisierbar, falls

- $f(z) = O(e^{c \operatorname{Im} z})$ für $\operatorname{Im} z \rightarrow \infty$ und ein $c \in \mathbb{R}^+$;

Falls folgendes Integral, erklärt für $\operatorname{Im} u \gg 1$, eine analytische Fortsetzung auf $u = 0$ hat, sei $z_0 \in \mathcal{H}$:

$$\mathbf{R} \int_{z_0}^{i\infty} f(z) dz := \int_{z_0}^{i\infty} e^{uz} f(z) dz \Big|_{u=0}.$$

³http://de.wikipedia.org/wiki/Fraktionale_Infinitesimalrechnung

Entsprechend definiert man Integrale in andere Spitzen $\gamma(i\infty)$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$:

$$\mathbf{R.} \int_{\gamma z_0}^{\frac{a}{c}} f(w) dw := \int_{z_0}^{i\infty} \frac{f(\gamma z)}{(cz+d)^2} dz.$$

Wie berechnet man z.B. Integrale $\int_i^{i\infty} e(n\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau$? Sie konvergieren für $n > 0$. Obige Definition läuft auf

dasselbe hinaus, als ob man das Ergebnis für $n > 0$ nimmt und nach $n < 0$ analytisch fortsetzt.

Dieses Verfahren ist nicht das einzig mögliche. Man kann $k-1$ Integrationskonstanten frei wählen.⁴ Der Weg in die Spitze spielt für den Wert des Integrals i.a. keine Rolle. Durch die Regularisierung verschwindet der Beitrag in der Spitze. Ein wesentlicher Punkt bei dieser Definition ist, dass das Resultat T -invariant ist: $\tilde{f}|T = \tilde{f}$. Borchers' Regularisierung unterscheidet sich für ganzzahliges Gewicht k davon, wenn man den konstanten Term a_0 integriert:

$$\begin{aligned} \int_z^\infty a_0 \tau^s (\tau - z)^{k-2} d\tau \Big|_{s=0} &= a_0 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} (-z)^{k-2-i} \int_z^\infty \tau^{s+i} d\tau = -a_0 \sum_{i=0}^{k-2} \binom{k-2}{i} (-z)^{k-2-i} \frac{z^{s+i+1}}{s+i+1} \Big|_{s=0} \\ &= a_0 (-z)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-2} (-1)^i \frac{\binom{k-2}{i}}{i+1} = -a_0 \frac{(-z)^{k-1}}{k-1} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} = a_0 \frac{(-z)^{k-1}}{k-1}. \end{aligned}$$

Das ist z.B. nicht T -invariant, aber

$$\int_z^\infty a_0 (\tau - z)^{s-2} d\tau \Big|_{s=k} = a_0 \left[\frac{(\tau - z)^{s-1}}{s-1} \right]_z^\infty \Big|_{s=k} = 0.$$

Wichtiger als der Entstehungsprozeß ist, dass die Ergebnisse eine $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Gruppenaktion zulassen. Als nächstes spielt der modulare Defekt $\psi := \tilde{f} - \tilde{f}|S$ eine Rolle. Ziel ist, dass ψ die üblichen Periodenrelationen

$$\begin{aligned} \psi + \psi|S &= 0 \\ \psi + \psi|U + \psi|U^2 &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt, die sich aus der T -Invarianz von \tilde{f} und der Definition von ψ ergeben.

L -Reihen spielen eine Rolle für das asymptotische Randverhalten der Eichlerintegrale. Es ist naheliegend, die Definition als Integraltransformierte und die gleiche Regularisierung der definierenden Integrale wie für die Eichlerintegrale zu verwenden.

⁴Heute weiß man, dass es $(k-1)$ -fache Stammfunktionen gibt, die modular sind (Mock-Modulformen).

ANHANG E

Computer-Programme

E.1. Geodätische (MATHEMATICA)

MATHEMATICA-Programm zur Reduktion von indefiniten quadratischen Formen, Klassenzahlen, Lösungen der PELL-Gleichung, Grundeinheiten, L-Reihen, Zeichnen von Geodätischen...

Geo[12012]

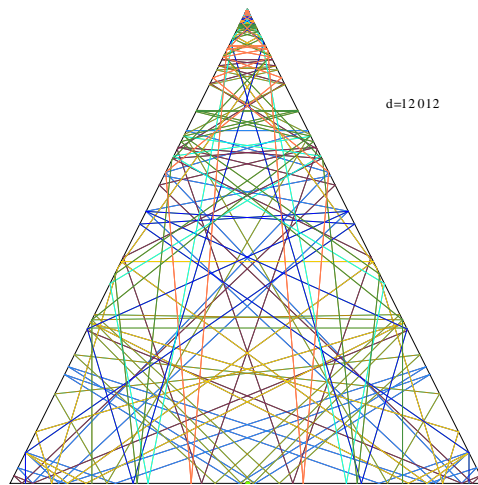


ABBILDUNG E.1.0.1. d=12012

Geo[Union[Range[1, 100, 4], Range[4, 100, 4]], 10, Black]

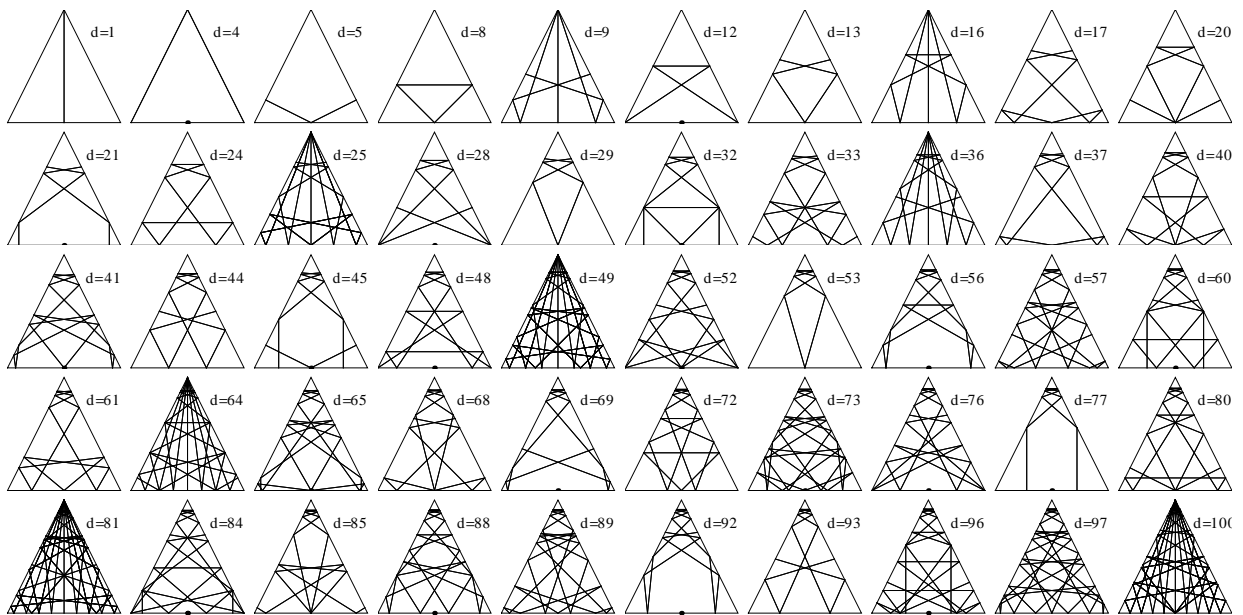


ABBILDUNG E.1.0.2. d=1...100


```

BeginPackage["geodesic`","Graphics`Colors`"]

Bilder::usage = "Optionen"

F::usage = "F[d,a] ist die Anzahl aller Ideale der Norm a in Q (Sqrt[d]), d Fund.diskr."

Formen::usage = "reduzierte inäquivalente Formen der Diskriminante d>0"

Formenzykel::usage = "alle reduzierten Formen der Diskriminante d>0,angeordnet in
  Zykeln äquivalenter Formen"

GenusG::usage = "GenusG[d] berechnet die Anzahl der Geschlechter von primitiven
  quadratischen Formen der Diskriminante d."

Geo::usage = "Geo[d] zeichnet die Geodätischen zu allen reduzierten quadratischen
  Formen der Diskriminante d>0."

Geo::usage = "Geo[liste,m] in Zeilen zu n Bildern pro Zeile"

GrundzahlQ::usage = "GrundzahlQ[d] ist wahr für Fundamentaldiskriminanten d."

GrundzahlPart::usage = "GrundzahlPart[n] ... in 4n enthaltene Grundzahl"

Grundeinheit::usage = "Grundeinheit von Formen der Diskriminante d>0"

hDist::usage = "hDist[a,b,c,d] hyperbolischer Abstand der Punkte (a,b) und (c,d)"

HurwitzKroneckerH::usage = "Hurwitz-Kronecker Klassenzahl H[n], n>=0"

Klassenzahl::usage = "Anzahl der Äquivalenzklassen im engeren Sinne von primitiven
  (indefiniten) quadratischen Formen der Diskriminanten d"

Kr::usage = "Kr[a,b,c] zeichnet die Geodätischen zur Form [a,b,c]"

L::usage = "L[s,D] ist der Wert der Dirichlet-L-Reihe für Fundamentaldiskriminanten D>0
  an der Stelle s, verallgemeinert auf alle Diskriminanten."

N::usage = "N[D,a] ist die Anzahl der inaequivalenten primitiven Darstellungen der Zahl
  a durch quadratische Formen der Diskriminante D."

Opt::usage = "Optionen "

Pell::usage = "Pell[d] findet die kleinste Lösung {t,u} von t^2-d u^2=4"

Pell::bad = "Argument `1` sollte natürliche Zahl, keine Quadratzahl sein "

Rahmen::usage = "Rahmen zeichnet den Standardfundamentalebenebereich zu S1_2(Z)"

Schnittpunkt::usage = "Schnittpunkt[a,b,c,d,e,f,g,h] Schnittpunkt der Gerade {(a,b),(c,d)} und {(e,f),(g,h)}"

SquarePart::usage = "SquarePart[n] groesste in n enthaltene Quadratzahl"

Zykel::usage = "Zykel äquivalenter reduzierter Formen, d>0"

```

```

Begin["`Private`"]

Farben={2,4,5,13,16,17,18,19,24,27,33,35,32,37,38,39,40,41,45,48,51,
53,55,56,59,61,69,70,73,74,77,78,83,86,92,95,97,
101,109,114,117,128,131,136,144,152,163,164,167,173,176,177,181,182,179}

Opt={PlotRange->{{-.5004,.5004},{-.0004,1.0004}},
      AspectRatio->Automatic, Axes -> False, LabelStyle->{"NewTimesRoman",7}}

Rahmen := Module [
  {q,r,s},
  q={-.5,0};
  r={.5,0};
  s={0,1};
  Graphics [Line [{q,r,s,q}]
]

GrundzahlQ[n_Integer] :=
(SquareFreeQ[n] && Mod[n,4]==1) || (SquareFreeQ[n/4] && (Mod[n/4,4]==2 || Mod[n/4,4]==3))

SquarePart [n_Integer] := Times@@(Power@@@Replace [FactorInteger [n], {x_,y_} -> {x, 2Floor [y/2]}, 1])

GrundzahlPart [d_Integer] := Module [{d0}, d0=d/SquarePart [d]; If [Not [GrundzahlQ[d0]], d0*=4]; d0]

Grundeinheit [d_Integer?Positive /; Not [IntegerQ[Sqrt [d]]]] := Module [{d0=If [Mod[d,4]==0,d/4,d]},
e0=Pell[d0]; (e0[[1]]+Sqrt [d0] e0[[2]])/2]

Grundeinheit [d_Integer?Positive /; IntegerQ[Sqrt [d]]] := 1

Pell [d_Integer?Positive /; Not [IntegerQ[Sqrt [d]]]] := Module [
{a,w,q,q0,q1,m,m1,sign,u,u0,u1,v,v0,v1},
If [d==5, Return[{3,1}]];
w=Floor [Sqrt [d]]; q=d-w; q0=1; m=w; u0=1; u=m; v0=0; v=1; sign=-1;
While [q!=4 && q!=1,
a=Quotient [m+w,q]; m1=a q-m; q1=q0+a (m-m1); u1=a u+u0; v1=a v+v0;
m=m1; q0=q; q=q1; u0=u; u=u1; v0=v; v=v1; sign=-sign];
If [q==1, If [sign==1, {2u,2v}, {2(u^2+v^2d), 4u v}], If [sign==1, {u,v}, {(u^2+v^2d)/2, u v}]]
]

Pell [d_] := Message [Pell::bad,d]

N[Dis_/; (Mod[Dis,4]==2 || Mod[Dis,4]==3), n_] := 0;

N[Dis_, 1] := 1;

N[Dis_, n_] := Module [{d,f,b,Res,l,p,beta,alpha},
d=GrundzahlPart [Dis]; f=Sqrt [Dis/d]; l=FactorInteger [n] [[All,1]];
If [GCD[f,n]==1, b=Divisors [n]; Return [KroneckerSymbol [d,#] &/@b.Abs [MoebiusMu [Reverse [b]]]]];
If [Length[l]>1, Return [Product [N[d p^(2IntegerExponent [f,p]), p^IntegerExponent [n,p]], {p,l}]]];
p=l[[1]]; beta=IntegerExponent [n,p]; alpha=IntegerExponent [f,p];
Return [Which [beta<=2alpha, p^Floor [beta/2], beta==2alpha+1, p^alpha (1+KroneckerSymbol [d,p]),
True, p^alpha KroneckerSymbol [d,p] (1+KroneckerSymbol [d,p])] ]

F [d_?GrundzahlQ, n_] := Plus@@(KroneckerSymbol [d,#] &/@Divisors [n])

w[d_?Negative] = Which [d== -3, 3, d== -4, 2, d<0, 1]

nu[d0_?Positive, r_Integer] := Module [{n=1},
While [Mod[4Part [Grundeinheit [d0]^n // Expand // FullForm, 1, 2]^2, d0 r^2] != 0, n++]; n]

```

```

L[s_,0]:=Zeta[2s-1]

L[s_,1]:=Zeta[s]

L[s_,d_/;(Mod[d,4]==2|Mod[d,4]==3)]:=0

L[0,d_?GrundzahlQ]:=If[d>0,0,Klassenzahl[d]/w[d]]

L[1,d_?GrundzahlQ]:=If[d>0,
(Klassenzahl[d]*Log[Grundeinheit[d]])/Sqrt[d],Pi Klassenzahl[d]/w[d]/Sqrt[-d]]

L[a_Integer?Positive/;EvenQ[a],d_?GrundzahlQ/d>1]:=
(-1)^(a/2-1)2^(a-1)Pi^a/a!/Sqrt[d]Sum[KroneckerSymbol[d,n]*BernoulliB[a,n/d],{n,d-1}]

L[a_Integer?Positive/;OddQ[a],d_?GrundzahlQ/d<0]:=
(-1)^((a+1)/2)2^(a-1)Pi^a/Sqrt[-d]/a!Sum[KroneckerSymbol[d,n]BernoulliB[a,-n/d],{n,-d-1}]

L[a_Integer?Negative,d_?GrundzahlQ]:=
Total[KroneckerSymbol[d,#]BernoulliB[1-a,#/Abs[d]]&[Range[Abs[d]-1]]/Abs[d]^a/(a-1)

L[s_,d_?GrundzahlQ]:=Total[KroneckerSymbol[d,#]Zeta[s,#/Abs[d]]&@Range[Abs[d]-1]/Abs[d]^s

L[s_,d_Integer]:=Module[
{d0,f},
d0=GrundzahlPart[d];f=Sqrt[d/d0];
L[s,d0]Total[MoebiusMu[#]KroneckerSymbol[d0,#]/#^s DivisorSigma[1-2s,f/#]&[Divisors[f]]]

HurwitzKroneckerH[n_Integer/;n>=0]:=L[0,-n]

Klassenzahl[d_?GrundzahlQ/d>0]:=
NumberFieldClassNumber[Sqrt[d]]*
If[AlgebraicNumberNorm[NumberFieldFundamentalUnits[Sqrt[d]]][[1]]<0,1,2] /;
(Mod[d,4]==0|Mod[d,4]==1)&&Not[IntegerQ[Sqrt[d]]]

Klassenzahl[d_Integer/;(Mod[d,4]==2|Mod[d,4]==3)]:=0

Klassenzahl[d_] := EulerPhi[Sqrt[d]] /;IntegerQ[Sqrt[d]]

Klassenzahl[d_?GrundzahlQ/d<0]:=NumberFieldClassNumber[Sqrt[d]]

Klassenzahl[n_Integer]:=Module[
{d0,r,primes},
d0=n/SquarePart[n];If[Not[GrundzahlQ[d0]],d0*=4];r=Sqrt[n/d0];
If[r>1,primes=Replace[FactorInteger[r],{x_,y_}->x,1];r/If[n>0,nu[d0,r],w[d0]]
Times@@(1-KroneckerSymbol[d0,primes]/primes)Klassenzahl[d0],Klassenzahl[d0]]
]

```

```

GenusG[d_;/Mod[d,4]==1]:=Module[{res=2^(PrimeNu[d]-1)},If[IntegerQ[Sqrt[d]],2res,res]]

GenusG[d_/(Mod[d,4]==0^Mod[d,32]!=0)]:=
Module[{res=If[Mod[d/4,4]==1,2^(PrimeNu[d]-2),2^(PrimeNu[d]-1)]},If[IntegerQ[Sqrt[d]],2res,res]]

GenusG[d_/(d!=0&&Mod[d,32]==0)]:=Module[{res=2^PrimeNu[d]},If[IntegerQ[Sqrt[d]],2res,res]]

f[z_] := With[{k=Abs[z]^2+1},{2Re[z]/k,1-2/k}]

Fun[z_Complex] := Block[{k=z-Round[Re[z]]},
While[Abs[k]<1, k=-1/k;k=k-Round[Re[k]]];k]

Punkt[w1_,w2_,p_] := Point[f[Fun[(w2 I p+w1)/(I p+1)]]]

Schnittpunkt[a_,b_,c_,d_,e_,f_,g_,h_] := {(-(b c e) + a d e + b c g - a d g + a f g - c f g
- a e h + c e h)/(-(b e) + d e + a f - c f + b g - d g - a h + c h),
(-(b c f) + a d f + b f g - d f g + b c h - a d h - b e h + d e h)/
(-(b e) + d e + a f - c f + b g - d g - a h + c h)}

hDist[a0_,b0_,a1_,b1_] := ArcTanh[Sqrt[a0^2 - 2 a0 a1 + a1^2 + b0^2 -
a1^2 b0^2 - 2 b0 b1 + 2 a0 a1 b0 b1 + b1^2 - a0^2 b1^2] /
(1-a0 a1-b0 b1)]

Kr[{0,b_,c_}] := Line[{{-c/b,0},{0,1}}]

Kr[{a_,b_,c_}/; a (a-b/2+c)<0 && a (a+b/2+c)<0] :=
Line[{{-2a/(2a+b-2c),(-2a+b-2c)/(2a+b-2c)},{2a/(2a-b-2c),(-2a-b-2c)/(2a-b-2c)}}]

Kr[{a_,b_,c_}/; a (a-b/2+c)<0 && 2Abs[a+c]<=Abs[b]] :=
Line[{{-2a/(2a+b-2c),(-2a+b-2c)/(2a+b-2c)},{-(a+c)/b,0}}]

Kr[{a_,b_,c_}/; 2Abs[a+c]<=Abs[b] && a (a+b/2+c)<0] :=
Line[{{-(a+c)/b,0},{2a/(2a-b-2c),(-2a-b-2c)/(2a-b-2c)}}]

Kr[{a_,b_,c_}] := Point[{0,0}]

redFormen[d_] := Flatten[Function[x,Prepend[{x,(x x-d)/4/#},#]&/@
Union[#, -#]&[Select[Divisors[(d-x x)/4],
(Sqrt[d//N]-x)/2<#<(Sqrt[d//N]+x)/2&]]]/@Range[Mod[d,2],Sqrt[d//N],2],1]

kurzerZykel[{a_Integer,b_Integer,c_Integer}] := Module[
{d=Sqrt[b b-4a c//N],A=a,B=b,C=c,form0={a,b,c},form,liste={},del},
While[form != form0,
del=Floor[(d+B)/2/C+.5-Sign[C]/2];
form={A,B,C} = {C,-B+2 C del,A-B del+C del^2}; AppendTo[list,form]
];liste
]

kurzerZykel[{}]:={}

```

```

Zykel[{a_Integer,b_Integer,c_Integer}] := Module[
{d=b b-4a c,liste={},A=a,B=b,C=c,form={a,b,c}, n},
While[!MemberQ[liste,form],AppendTo[liste,form];
Which[A (A+B/2 Sign[A]+C)<0,form={A,B,C}={A,2Abs[A]+B,A+B Sign[A]+C},
A!=0 && A+B/2 Sign[A]+C==0 && Abs[A]-B/2+C Sign[A]<0,
form={A,B,C}={A+B Sign[A]+C,B+2C Sign[A],C},
A==0 && B<0,form={A,B,C}={0,-B,C},
2Abs[A+C]<B || Round[B/2/A]==0,form={A,B,C}={C,-B,A},
0==0,n=Round[-B/2/A];form={A,B,C}={A,B+2A n,A n n+B n+C};liste={}
]
]; liste
]

Unprotect[Last];Last[{}]={};Protect[Last]

fpl[d_] := FixedPointList[Complement[#,kurzerZykel[Last[#]]]&,redFormen[d]]

Formen[d_Integer;/; (Mod[d,4]==0|Mod[d,4]==1)&&Not[IntegerQ[Sqrt[d]]]] :=
Last/@Drop[fpl[d],-2]

Formen[d_Integer;/; IntegerQ[Sqrt[d]] && d!=4] :=
With[{b=Sqrt[d]},({0,b,#}&/@Range[-Floor[b/2-.1],b/2-.1])]

Formen[4] := {{0,2,1}}

Formenzykel[d_Integer;/; d!=4] := Zykel /@ Formen[d]

Formenzykel[4]:={{0,2,1},{1,0,-1},{0,-2,1}}

desic[d_Integer?Positive;/; (Mod[d,4]==0|Mod[d,4]==1),f_:1] :=
If[f===1,Show[Rahmen,
Graphics[Flatten[{ToExpression[AllColors[
Farben[[Random[Integer,{1,55}]]]]],Kr/@#]}&/@Formenzykel[d]],
Graphics[Text[Style[Row[{"d=",d}],10],{.35,.8}],Opt,DisplayFunction->Identity],
Show[Rahmen,Graphics[Flatten[{ToExpression[ToString[f]],Kr/@#]}&/@Formenzykel[d]],
Graphics[Text[Style[Row[{"d=",d}],10],{.35,.8}],Opt,DisplayFunction->Identity]]

desic[d_,f_:1]=Null

Geo[d_Integer?Positive;/; (Mod[d,4]==0|Mod[d,4]==1),f_:1] :=
Show[desic[d,f],DisplayFunction->${DisplayFunction}]

Geo[l_List,n_,f_:1] :=
Show[GraphicsArray[Partition[desic[l,f],n]],DisplayFunction->${DisplayFunction}]

SetAttributes[{desic,Klassenzahl,HurwitzKroneckerH,Pell,Grundeinheit,Punkt},Listable]

End[]

EndPackage[]

```

Der Algorithmus für die Lösung der Pell'schen Gleichung kommt von [Forster 2, 25].

E.2. Poincaréreihen, Eisensteinreihen (PARI)

E.2.1. Gerades Gewicht zu $SL_2(\mathbb{Z})$. Halbgerades Gewicht im Kohnen-Plus-Raum. Das Programm berechnet:

Werte von L -Reihen $L(s, d)$ für $s \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{D}$.

Kloostermansummen $K(m, n; c), k \in 2\mathbb{Z}$ zur Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$: $K1(k, m, n, c)$

und $S_{k, \infty, \infty}(m, n; c), k$ halbganz, zur Gruppe $\Gamma_0(4)$: $K(k, m, n, c)$

Die Fourierkoeffizienten der Poincaréreihen $F_k(m, z), k \in 2\mathbb{Z}$ zu $SL_2(\mathbb{Z})$: $F(k, m, n),$

und $F_k(m, z), k$ halbganz, zu $\Gamma_0(4)$: $Fplus(k, m, n), m \in \mathbb{Z};$

Eisensteinreihen $E_k(z)$ zu $SL_2(\mathbb{Z})$ für $m = 0$: $F1(k, 0, n),$

und zu $\Gamma_0(4)$: $Fplus(k, 0, n),$

ebenso der Spitzenformen $P_k(m, z)$: $P1(k, a, b, m, n)$ und $Pplus(k, a, b, m, n).$

```
delta(m,n)=if(m==n,1,0)
```

```
e(v)=if(v%4==1,1,I)
```

```
L(s,d)={local(f,D);
  if(d==0,return(zeta(2*s-1)));
  if(d%4==2||d%4==3,return(0));f=coredisc(d,1)[2];D=coredisc(d);
  if(D==1,return(zeta(s)*sumdiv(f,t,moebius(t)*t^(-s)*
sumdiv(f/t,u,u^(1-2*s)))));
  if(s==1,
    if(d>0,
      return(2*qfbclassno(d)*quadregulator(d)/sqrt(d)),
      return(Pi*qfbclassno(d)/if(d==-3,3,if(d==-4,2,1))/
sqrt(-d)));
  if(s>1||s==0,
    return(zetak(zetakinit(x^2-D),s)/zeta(s)*sumdiv(f,t,moebius(t)*
kronecker(D,t)*t^(-s)*sumdiv(f/t,u,u^(1-2*s))))),
    return(2^s*abs(D)^(1/2-s)*Pi^(s-1)*if(D>0,sin(Pi*s/2),cos(Pi*s/2))*
gamma(1-s)*zetak(zetakinit(x^2-D),1-s)/zeta(1-s)*
sumdiv(f,t,moebius(t)*kronecker(D,t)/t^s*sumdiv(f/t,u,u^(1-2*s))))
)
```

```
}
K(k,m,n,c)={local(v,s=0); \\ Kloostermansumme, k halbganz
  forstep(v=1,c-1,2,
    if(gcd(v,c)==1,
      s+=(kronecker(c,v)*e(v))^(2*k)*exp(2*Pi*I*(m/v%c+n*v)/c)
    )
  );s}
```

```
K1(m,n,c)={local(v,s=0); \\ Kloostermansumme, k gerade
  if(c==1,s=1,
    for(v=1,c-1,
      if(gcd(v,c)==1,s+=exp(2*Pi*I*(m/v%c+n*v)/c)
    )
  );s}
```

```

F1(k,m,n,lim=100)={
  if(m>0,
    if(n>0,
      return(2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
        sum(c=1,lim,K1(-m,n,c)/c*
          besseli(abs(1-k),4*Pi/c*sqrt(m*n)))));
    if(n==0,
      if(k<0,
        return(2*(2-k)*sumdiv(m,t,t^(1-k))/bernreal(2-k)),
        return(0)));
    if(k>0,return(0),
      return(-delta(m,-n)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(-n/m)^((k-1)/2)*
        sum(c=1,lim,K1(-m,n,c)/c*besselj(1-k,
          4*Pi/c*sqrt(-m*n)))));
  if(m==0, \\ Eisensteinreihen
    if(k>0,
      if(n>0,return(-2*k/bernreal(k)*sigma(n,k-1)));
      if(n==0,if(k==2,return([1,-3/Pi,y,-1]),return(1)));
      return(0));
    if(k<0,
      if(n>0,return(sigma(n,k-1)/zeta(1-k)));
      if(n==0,return([1,(-4)^(-k/2)*zeta(2-k)/Pi/
        zeta(1-k),y,1-k]));
      return(sigma(abs(n),k-1)/zeta(1-k)));
  if(m<0, \\ nicht-holomorphe Explosion
    if(n<0,
      return((2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
        sum(c=1,lim,K1(-m,n,c)/c*
          besseli(abs(1-k),4*Pi/c*sqrt(m*n)))));
    if(n==0,
      if(k<0,
        return(2*(2-k)*sumdiv(m,t,t^(1-k))/bernreal(2-k)),
        return(0)));
    return(delta(m,-n)*sign(k)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(-n/m)^((k-1)/2)*
      sum(c=1,lim,K1(-m,n,c)/c*besselj(abs(1-k),
        4*Pi/c*sqrt(-m*n))),
    return(P1(k,-m,n,lim))
  }

P1(k,m,n,lim=100) = {delta(m,n)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
  sum(c=1,lim,K1(m,n,c)/c*besselj(k-1,4*Pi/c*sqrt(m*n))}

Fplus(k,m,n,lim=100) = {local(ad=0);
  if((( -1)^floor(k)*m)%4==1||((-1)^floor(k)*m)%4==2,
  return("es_ist_nicht_(-1)^[k]m=0,3(4)");
  if((( -1)^floor(k)*n)%4==2||((-1)^floor(k)*n)%4==3,return(0));
  if(m>0,
    if(n>0,
      if(k==3/2,ad=24*issquare(m)*L(0,-n));
      if(k==1/2,ad=-24*issquare(n)*L(0,-m));
      return(ad+Pi/2/I^k*(n/m)^((k-1)/2)*sum(c=1,lim,(1+c%2)*
        K(k,-m,n,4*c)/c*besseli(abs(1-k),Pi/c*sqrt(m*n))));
    if(n==0,
      if(k<0,return(-L(k-1/2,(-1)^(k+1/2)*m)/zeta(2*k-2)));
      if(k==3/2,return(-2*issquare(m)));
      return(0));
  }

```

```

if(k>0,return(0), \\ n<0
  return(-delta(m,-n)+Pi/2/I^k*(-n/m)^((k-1)/2)*sum(c=1,lim,
    (1+c%2)*K(k,-m,n,4*c)/c*besselj(abs(1-k),Pi/c*sqrt(-m*n)))));
if(m==0, \\ Eisensteinreihen
  if(n>0,return(L(3/2-k,(-1)^floor(k)*n)/zeta(2-2*k)));
  if(n==0,if(k>2,return(1),
    return([1,(-1)^floor((k+1)/2)*2^(5/2-3*k)*
      zeta(3-2*k)/Pi/zeta(2-2*k),y,1-k]));
  if(k<2,return(L(3/2-k,(-1)^floor(k)*n)/zeta(2-2*k)),return(0)));
if(m<0, \\ nicht-holomorphe Explosion
  if(k<1,
    if(n>0,return(sign(k)*delta(-m,n)*I^(2*k)+Pi/2/I^k*
      (-n/m)^((k-1)/2)*sum(c=1,lim,(1+c%2)*
        K(k,-m,n,4*c)/c*besselj(abs(1-k),Pi/c*sqrt(-m*n)))));
    if(n==0,return((Pi/2)^(2-k)*(-m)^(1-k)/I^k/gamma(2-k)*
      sum(c=1,lim,(1+c%2)*K(k,-m,0,4*c)/c^(2-k)));
    return(Pi/2/I^k*(n/m)^((k-1)/2)*sum(c=1,lim,
      (1+c%2)*K(k,-m,n,4*c)/c*besseli(abs(1-k),Pi/c*sqrt(m*n))),
  return(Pplus(k,-m,n,lim)))
}

Pplus(k,m,n,lim=100) = {
  if((( -1)^floor(k)*m)%4==2|(( -1)^floor(k)*m)%4==3,
  return("es_ist_nicht_(-1)^[k]m=0,1(4)");
  if((( -1)^floor(k)*n)%4==2|(( -1)^floor(k)*n)%4==3,return(0));
  return(delta(m,n)+Pi/2/I^k*(n/m)^((k-1)/2)*sum(c=1,lim,(3-(-1)^c)/2*
    K(k,m,n,4*c)/c*besselj(k-1,Pi/c*sqrt(m*n))))}

./Programme/Shimura.gp

```

E.2.2. Gruppe $\Gamma_0(4)$, Spitze \mathfrak{a} , entwickelt um \mathfrak{b} , $2k \in \mathbb{Z}$. Das Programm berechnet:

Hurwitz-Klassenzahlen $H(d)$ für $d \in \mathbb{N}_0$.

Werte von L -Reihen $L(s, d)$ für $s \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{D}$.

$m \in \mathbb{Z}$:

Kloostersummen $c_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} S_{k,\mathfrak{a},\mathfrak{b}}(m, n; c): \mathcal{S}(k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, m, n, c)$.

Die Fourierkoeffizienten der Poincaréreihen $F_{k,\mathfrak{a}}(m, \cdot)|_{k\tau_{\mathfrak{b}}}$ zu $\Gamma_0(4): \mathcal{F}(k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, m, n)$.

Funktionswerte der Poincaréreihen $F_{k,\mathfrak{a}}(m, \cdot)|_{k\tau_{\mathfrak{b}}}$: $\mathcal{Fwert}(k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, z, m)$

Eisensteinreihen $E_{k,\mathfrak{a}}(z)$ für $m = 0: \mathcal{F}(k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, 0, n)$,

ebenso der Spitzenformen $P_{k,\mathfrak{a}}(m, \cdot)|_{k\tau_{\mathfrak{b}}}$ für $m \in \mathbb{N}: \mathcal{P}(k, \mathfrak{a}, \mathfrak{b}, m, n)$

Die Spitzen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ werden kodiert eingegeben:

Spitze	∞	0	$\frac{1}{2}$
Code	8	0	2


```

global(th, e82)

delta(m,n)=if(m==n,1,0)

kappa(k,a)={if(a==2,((2*k)%4)/4,0)}

e(v)=if(v%4==1,1,I)

euler(k)=if(k%2==0,I^k*k!*polcoeff(Ser(1/cos(x)),k),0)

istriangle(n)={local(m=floor(sqrt(2*n+.3)));if(m^2+m==2*n,1,0)}

isodd(n)=n%2

th=sum(n=-32,32,q^(n^2))+O(q^1001);  \\ theta_3

th2=sum(n=-32,32,q^(n^2+n))+O(q^1001);  \\ theta_2

e82=4+4*q+12*q^2+8*q^3+12*q^4+12*q^5+16*q^6+12*q^7+24*q^8+16*q^9+\
12*q^10+20*q^11+24*q^12+16*q^13+36*q^14+20*q^15+12*q^16+\
28*q^17+28*q^18+20*q^19+36*q^20+24*q^21+24*q^22+32*q^23+\
36*q^24+20*q^25+36*q^26+32*q^27+24*q^28+O(q^29);  \\ E_8|tau_1/2

H(d)={local(f,D);  \\ Hurwitz Klassenzahl
      if(d==0,return(-1/12));
      if(d%4==1||d%4==2,return(0));
      f=coredisc(-d,1)[2];D=coredisc(-d);
      return(sum(a=1,-D,kronecker(D,a)*a)/D*sumdiv(f,t,moebius(t)*
      kronecker(D,t)*sigma(abs(f/t))))
}

S(k,A,B,m,n,c)={  \\ Kloostermansumme
  local(s=0,a,b);
  if(A==8,
    if(B==8,
      forstep(d=1,c,2,
        if(gcd(c,d)==1,
          a=1/d%c;
          s+=(kronecker(c,d)*e(d))^(2*k)*
          exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c)));
      if(B==0,
        forstep(d=2,c,2,
          if(gcd(c/2,d)==1,
            a=1/d%(c/2)-c/2;if(a%2==1,a=-c/2);
            s+=(kronecker(-2*d,c/2)*e(c/2))^(2*k)*
            exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c));s*=I^k);
          if(B==2,
            forstep(d=2,c,2,
              if(gcd(c/2,d)==1,
                a=1/d%(c/2)-c/2;if(a%2==0,a=-c/2);
                s+=(kronecker(-2*d,c/2+d)*e(c/2+d))^(
                2*k)*exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c));
                s*=I^k));
          if(A==0,
            if(B==8,
              forstep(d=2,c,2,
                if(gcd(c/2,d)==1,

```

```

a=1/d%(c/2)-c/2; if(a%2==1,a=-c/2);
b=(a*d-1)/c;
s+=(kronecker(2*a,2*b)*e(2*b))^(2*k)*
exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c)); s*=I^(3*k));
if(B==0,
forstep(d=1,c,2,
  if(gcd(c,d)==1,
    a=1/d%c-c;
    b=(a*d-1)/c;
    s+=(kronecker(-4*b,a)*e(a))^(2*k)*
    exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c)));
  if(B==2,
forstep(d=1,c,2,
  if(gcd(c,d)==1,
    a=1/d%c-c;
    b=(a*d-1)/c;
    s+=(kronecker(-4*b,a+2*b)*e(a+2*b))^
    (2*k)*exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c))));
if(A==2,
  if(B==8,
forstep(d=1,c,2,
  if(gcd(c/2,d)==1,
    a=2*(1/(2*d)%c/2)-c/2; b=(a*d-1)/c;
    s+=(kronecker(2*a,2*b)*e(2*b))^(2*k)*
    exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c)); s*=I^(3*k));
  if(B==0,
forstep(d=1,c,2,
  if(gcd(c,d)==1,
    a=1/d%c-c;
    b=(a*d-1)/c;
    s+=(kronecker(-4*b,a)*e(a))^(2*k)*
    exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c)));
  if(B==2,
forstep(d=1,c,2,
  if(gcd(c,d)==1,
    a=1/d%c-c;
    b=(a*d-1)/c;
    s+=(kronecker(-4*b,a+2*b)*e(a+2*b))^
    (2*k)*exp(2*Pi*I*(m*a+n*d)/c))));
return(s)}

```

```

L(s,d)={local(f,D);
  if(d==0,return(zeta(2*s-1)));
  if(d%4==2||d%4==3,return(0)); f=coredisc(d,1)[2]; D=coredisc(d);
  if(D==1,return(zeta(s)*sumdiv(f,t,moebius(t)*t^(-s)*
    sumdiv(f/t,u,u^(1-2*s))));
  if(s==1,
  if(d>0,
    return(2*qfbclassno(d)*quadregulator(d)/sqrt(d)),
    return(Pi*qfbclassno(d)/if(d==-3,3,
      if(d==-4,2,1))/sqrt(-d)));
  if(s>1||s==0,
    return(zetak(zetakinit(x^2-D),s)/zeta(s)*sumdiv(f,t,moebius(t)*
      kronecker(D,t)*t^(-s)*sumdiv(f/t,u,u^(1-2*s))));
    return(2^s*abs(D)^(1/2-s)*Pi^(s-1)*if(D>0,sin(Pi*s/2),cos(Pi*s/2))*
      gamma(1-s)*zetak(zetakinit(x^2-D),1-s)/zeta(1-s)*
      sumdiv(f,t,moebius(t)*kronecker(D,t)/t^s*sumdiv(f/t,u,u^(1-2*s))));

```

```

)
}

fund(n)={local(d,f,alpha);
  d=coredisc(round(n));f=round(sqrt(4*n/d));while(f%2==0,f/=2);
  alpha=n/d/f^2;[d,f,alpha]}

F(k,a,b,m,n,lim=100)={ \\ Fourierkoeffizienten zu den Spitzen
  local(cs=2-2*(a==b),ad=0,s=0,n1,a12,eps=1e-20); \\ unendlich(8),0(0),1/2(2)
  if(m>0,
    if(k==3/2,
      if(a==8,
        if(b==8,
          ad=-2*issquare(m)*(polcoeff(th^3,n)/3-8*H(n)));
        if(b==0,
          ad=-2*issquare(m)*(2*polcoeff(th^3,n)/3+8*H(n)));
        if(b==2,
          ad=-2*issquare(m)*polcoeff(e82,n)
        );
        if(a==0,
          if(b==8,
            ad=-2*issquare(m)*(2*polcoeff(th^3,n)/3+8*H(n)));
          if(b==0,
            ad=-2*issquare(m)*(polcoeff(th^3,n)/3-8*H(n)));
          if(b==2,
            ad=-2*(-1)^n*issquare(m)*polcoeff(e82,n)
          );
          if(a==2,
            if(b==8,
              ad=-istriangle((m-1)/2)*(polcoeff(th^3,n)/3+16*H(n)));
            if(b==0,
              ad=istriangle((m-1)/2)*(polcoeff(th^3,n)/3+16*H(n)));
            if(b==2,
              ad=2*isodd(n)*istriangle((m-1)/2)*polcoeff(e82,n)
            )
          );
        if(k==1/2,
          if(a==8,
            if(b==8,
              ad=2*issquare(n)*(polcoeff(th^3,m)/3-8*H(m)));
            if(b==0,
              ad=2*issquare(n)*(polcoeff(th^3,m)/3-8*H(m)));
            if(b==2,
              ad=2*istriangle(n/2)*(polcoeff(th^3,m)/3-8*H(m))
            );
            if(a==0,
              if(b==8,
                ad=2*issquare(n)*(polcoeff(th^3,m)/3-8*H(m)));
              if(b==0,
                ad=2*issquare(n)*(polcoeff(th^3,m)/3-8*H(m)));
              if(b==2,
                ad=2*istriangle(n/2)*(polcoeff(th^3,m)/3-8*H(m))
              );
              if(a==2,
                if(b==8,
                  ad=-2*isodd(m-1)*issquare(n)*polcoeff(e82,m-1));
                if(b==0,

```

```

        ad=-2*isodd(m-1)*issquare(n)*polcoeff(e82,m-1);
    if(b==2,
        ad=-2*isodd(m-1)*istriangle(n/2)*polcoeff(e82,m-1)
    )
);
if(n+kappa(k,b)>0,
    return(ad+2*Pi/I^k*((n+kappa(k,b))/(m-kappa(k,a)))^((k-1)/2)*
sum(c=1,lim,S(k,a,b,kappa(k,a)-m,kappa(k,b)+
n,4*c-cs)/(4*c-cs)*besseli(abs(1-k),4*Pi/(4*c-cs)*
sqrt((m-kappa(k,a))*(n+kappa(k,b))))));
if(n<0,
    return(-delta(m,-n)*delta(a,b)+2*Pi/I^k*(abs(n+kappa(k,b))/
(m-kappa(k,a)))^((k-1)/2)*sum(c=1,lim,S(k,a,b,kappa(k,a)
-m,kappa(k,b)+n,4*c-cs)/(4*c-cs)*besselj(abs(1-k),4*Pi/
(4*c-cs)*sqrt((m-kappa(k,a))*abs(n+kappa(k,b))))));
if(n+kappa(k,b)==0 && k==1,
    return(Pi/I*sum(c=1,lim,
S(1,a,b,kappa(1,a)-m,0,4*c-cs)/(4*c-cs)));
if(n+kappa(k,b)==0 && k<1,
    return(ad/2+(2*Pi)^(2-k)*(m-kappa(k,a))^
(1-k)/I^k/gamma(2-k)*sum(c=1,lim,
S(k,a,b,kappa(k,a)-m,0,4*c-cs)*(4*c-cs)^(k-2))),
    return(ad));

if(m-kappa(k,a)==0, \\ Eisensteinreihen
if(a==2, \\ Eisensteinreihe zur Spitze 1/2
if(k%2==0,n1=n; if(n!=0, while(n1%2==0,n1/=2); a12=n/n1);
if(k>0,
    if(n>0,
        return(2*k/(2^k-1)/abs(bernfrac(k))*(-1)^n*
n^(k-1)*sigma(n1,1-k));
    if(n==0,return([0,delta(k,2)/2/Pi,y,-1]));
    return(0));
if(k<0,
    if(n>0,
        return(I^k/(2^k-1)/zeta(1-k)*(-1)^n*n^(k-1)*
sigma(n1,1-k));
    if(n<0,
        return(I^k/(2^k-1)/zeta(1-k)*(-1)^n*n^(k-1)*
sigma(abs(n1),1-k));
    return([0,(1-2^(1-k))*Pi^(1-k)*abs(bernfrac(2-k))/2^
(3*k-2)/(1-2^(-k))/(2-k)!/zeta(1-k),y,1-k]));
if(a==0, \\ Eisensteinreihe zur Spitze 0
if((2*k)%4==2, \\ k ungerade
if(k>0,
    if(n>0,
        return(sumdiv(n,t,kronecker(-4,t)*t^(1-k))/n^(1-k)*
2^(k+1)/abs(euler(k-1)));
    if(n==0,return(delta(k,1)));
    return(0));
if(k<0,
    if(n>0,return(sumdiv(n,t,kronecker(-4,t)*t^(1-k))/
n^(1-k)*(-1)^((k-1)/2)*2^(k-1)/L(1-k,-4));
    if(n==0,return([0,Pi^(1-k)*abs(euler(1-k))/2^k/(1-k)!/
L(1-k,-4),y,1-k]));
    return(sumdiv(n,t,kronecker(-4,t)*t^(1-k))/n^(1-k)*
(-1)^((k-1)/2)*2^(k-1)/L(1-k,-4)));

```

```

if((2*k)%4==0,n1=n;
if(n!=0,while(n1%2==0,n1/=2);al2=n/n1); \\ k gerade
  if(k>0,
    if(n>0,
      return(2*k/(2^k-1)/abs(bernfrac(k))*n^(k-1)*
        sigma(n1,1-k));
    if(n==0,return([0,delta(k,2)/2/Pi,y,-1]));
    return(0));
  if(k<0,
    if(n>0,
      return(I^k/(2^k-1)/zeta(1-k)*n^(k-1)*
        sigma(n1,1-k));
    if(n<0,
      return(I^k/(2^k-1)/zeta(1-k)*n^(k-1)*
        sigma(abs(n1),1-k));
      return([0,(1-2^(1-k))*Pi^(1-k)*abs(bernfrac(2-k))/
        2^(3*k-2)/(1-2^(-k))/(2-k)!/zeta(1-k),y,1-k]));
if(k==1/2,k+=eps); \\ Sonderfall k=1/2
if(n>0,a=fund((-1)^floor(k)*n); \\ k halbganz
  return((-1)^floor((k+1)/2)*2^(k-3/2)/(1-2^(1-2*k))/
    zeta(2-2*k)*(1-2^(1/2-k))*kronecker(a[1],2))*
    a[3]^(k-1)*L(3/2-k,a[1]*a[2]^2));
if(n==0,
  return([0,2^(1-2*k)*(1-4^(1-k))*zeta(3-2*k)/Pi/
    (1-2^(1-2*k))/zeta(2-2*k),y,1-k]));
if(n<0,b=fund((-1)^floor(k)*n);
  return((-1)^floor((k+1)/2)*2^(k-3/2)/(1-2^(1-2*k))/
    zeta(2-2*k)*(1-2^(1/2-k))*kronecker(b[1],2))*
    b[3]^(k-1)*L(3/2-k,b[1]*b[2]^2));
if(a==8, \\ Eisensteinreihe zur Spitze unendlich
if((2*k)%4==2, \\ k ungerade
  if(k>0,
    if(n>0,return(sumdiv(n,t,kronecker(-4,t)*t^(k-1))*
      4/euler(k-1)));
    if(n==0,return(1));
    return(0));
  if(k<0,
    if(n>0,return(sumdiv(n,t,kronecker(-4,t)*t^(k-1))/
      L(1-k,-4)));
    if(n==0,return(1));
    return(sumdiv(n,t,kronecker(-4,t)*t^(k-1))/L(1-k,-4)));
if((2*k)%4==0,n1=n; if(n!=0,while(n1%2==0,n1/=2);al2=n/n1); \\ k gerade
  if(k>0,
    if(n>0,if(n%2==0,
      return(-2*k/(1-2^(k-1))/bernfrac(k)*(1-al2^(k-1)/
        (2^k-1))*sigma(n1,k-1),
      return(0)));
    if(n==0,return([1,-delta(k,2)/2/Pi,y,-1]));
    return(0));
  if(k<0,
    if(n>0,if(n%2==0,
      return(1/(1-2^(k-1))/zeta(1-k)*
        (1-al2^(k-1)/(2^k-1/
          gamma(1-k))*sigma(n1,k-1)),
      return(0)));
    if(n<0,
      return(1/(1-2^(k-1))/zeta(1-k)*(1-al2^(k-1)/

```

```

    (2^k-1))*sigma(abs(n1),k-1));
    return([1,2^(3-4*k)*Pi^(1-k)*bernfrac(2-k)/(1-2^(-k))/
    (2-k)!/zeta(1-k),y,1-k]));
if(k==1/2,k+=eps); \\ k=1/2
if(n>0,f=fund((-1)^floor(k)*n); \\ k halbganz
    return((L(3/2-k,(-1)^floor(k)*n)*(1-2^(1-2*k))-
    (1-2^(1/2-k))*kronecker(f[1],2))*f[3]^(k-1)/2*
    L(3/2-k,f[1]*f[2]^2))/(1-2^(1-2*k))/zeta(2-2*k));
if(n==0,
    return([1,(-1)^floor((k+1)/2)*2^(3/2-3*k)*zeta(3-2*k)/Pi/
    (1-2^(1-2*k))/zeta(2-2*k),y,1-k]));
if(n<0,f=fund((-1)^floor(k)*n);
    return((L(3/2-k,(-1)^floor(k)*n)-(1-2^(1/2-k))*
    kronecker(f[1],2))*f[3]^(k-1)/2*L(3/2-k,f[1]*
    f[2]^2)/(1-2^(1-2*k))/zeta(2-2*k))););

if(m-kappa(k,a)<0, \\ nicht-holomorphe Explosion
    if(n+kappa(k,b)>0,
        return(2*Pi/I^k*((n+kappa(k,b))/(kappa(k,a)-m))^(k-1)/2)*
        sum(c=1,lim,S(k,a,b,kappa(k,a)-m,kappa(k,b)+n,4*c-cs)/
        (4*c-cs)*besselj(abs(1-k),4*Pi/(4*c-cs)*
        sqrt((kappa(k,a)-m)*(n+kappa(k,b))))));
        if(n<0,
            return(2*Pi/I^k*((n+kappa(k,b))/
            (m-kappa(k,a)))^(k-1)/2)*sum(c=1,lim,
            S(k,a,b,kappa(k,a)-m,kappa(k,b)+n,4*c-cs)/
            (4*c-cs)*besseli(abs(1-k),4*Pi/(4*c-cs)*
            sqrt((m-kappa(k,a))*(n+kappa(k,b))))));
        if(n+kappa(k,b)==0,
            return((2*Pi)^(2-k)*(-m+kappa(k,a))^(1-k)/I^k/gamma(2-k)*
            sum(c=1,lim,S(k,a,b,kappa(k,a)-m,0,4*c-cs)*(4*c-cs)
            ^k-2)))));
}

P(k,a,b,m,n,lim=100)={ \\ Fourierkoeffizienten zu den
    local(cs=2-2*(a==b)); \\ Spitzen unendlich(8),0(0),1/2(2)
    return(delta(m,n)*delta(a,b)+2*Pi/I^k*((n+kappa(k,b))
    /(m+kappa(k,a)))^(k-1)/2)*sum(c=1,lim,S(k,a,b,kappa(k,a)
    +m,kappa(k,b)+n,4*c-cs)/(4*c-cs)*besselj(k-1,4*Pi/(4*c-cs)*
    sqrt((m+kappa(k,a))*(n+kappa(k,b))))));
}

Fwert(k,a,b,z,m,p=100)={
    local(q=exp(2*Pi*I*z),s=0,y=imag(z)); \\ Modularitaet fuer m<0
    s=-I^(2*k)*delta(a,b)*(1-incgam(1-k,4*Pi*(m-kappa(k,a))*y)/
    gamma(1-k))*q^(kappa(k,a)-m);
    s+=F(k,a,b,m,0,p);
    for(n=1,p,s+=F(k,a,b,m,n,p)*q^(n+kappa(k,b)));
    for(n=1,p,s+=F(k,a,b,m,-n,p)*q^(kappa(k,b)-n)*incgam(1-k,4*Pi*
    (n-kappa(k,b))*y));
    return(s)
}

```

./Programme/Poincare.gp

E.2.3. Ganzes Gewicht zu $\Gamma_0(p)$. Das Programm berechnet:

Kloostersummen $K(m, n; c)$, $k \in 2\mathbb{Z}$ zur Gruppe $SL_2(\mathbb{Z})$: $K1(k, m, n, c)$
 und $K_{k,\chi}(m, n; c)$, k ungerade: $K1chi(k, m, n, c)$

Die Fourierkoeffizienten der Poincaréreihen $F_{k,\infty}^{(p)}(m, z)$, $k \in 2\mathbb{Z}$ zu $SL_2(\mathbb{Z})$: $Fp(p, k, m, n)$,
 k ungerade: $Fpchi(p, k, m, n)$,

zur Spitze Null $F_{k,0}^{(p)}(m, z)$, $k \in 2\mathbb{Z}$ zu $SL_2(\mathbb{Z})$: $Fp0(p, k, m, n)$,

ebenso der Spitzenformen $P_k^{(p)}(m, z)$: $Pp(p, k, m, n)$, $Pp0(p, k, m, n)$,
 bzw. $Ppchi(p, k, m, n)$.

```
delta(m,n)=if(m==n,1,0)
```

```
K1(m,n,c) = {local(d,s=0);    \\ Kloostersumme, k gerade
  if(c==1,s=1,
    for(d=1,c-1,
      if(gcd(d,c)==1,s+=exp(2*Pi*I*(m/d%c+n*d)/c)
    )
  );s}
```

```
K1chi(p,m,n,c) = {local(d,s=0);    \\ Kloostersumme, k ungerade
  if(c==1,s=1,
    for(d=1,c-1,
      if(gcd(d,c)==1,s+=kronecker(d,p)*exp(2*Pi*I*(m/d%c+n*d)/c)
    )
  );s}
```

```
K10(p,m,n,c) = K1(m/p%c,n,c)
```

```
Fp(p,k,m,n,lim=100)={
  if(m>0,
    if(n>0,
      return(2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
        sum(c=1,lim,K1(-m,n,p*c)/p/c*
          besseli(abs(1-k),4*Pi/p/c*sqrt(m*n))));
    if(n==0,
      if(k<=0,
        return(2*(2-k)*(sigma(m,1-k)-if(m%p==0,p^(2-k)*sigma(m/p,1-k),0))/(1-p^(2-k))/
          bernreal(2-k)),
        return(0));
      if(k>0,return(0), \\ n<0
        return(-delta(m,-n)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(-n/m)^((k-1)/2)*
          sum(c=1,lim,K1(-m,n,p*c)/p/c*besselj(1-k,4*Pi/p/c*sqrt(-m*n))));
      if(m==0, \\ Eisensteinreihen
        if(k>0,
```

```

    if (n>0, return (2*k/(p^k-1)/bernreal(k)*(sigma(n, k-1)-if(n%p==0, p^k*sigma(n/p, k-1), 0)))
    );
    if (n==0, if (k==2, return ([1, -3/Pi/(p+1)/y]), return (1)));
    return (0));
if (k<0,
    if (n>0, return ((sigma(n, k-1)-if(n%p==0, p^k*sigma(n/p, k-1), 0))/(1-p^k)/zeta(1-k)));
    if (n==0, return ([1, (-4)^(-k/2)*zeta(2-k)/Pi/zeta(1-k)*(1-p)/(1-p^k)*y^(1-k)]));
    return ((sigma(abs(n), k-1)-if(n%p==0, p^k*sigma(abs(n)/p, k-1), 0))/(1-p^k)/zeta(1-k)));
return (delta(n, 0))      \\ k=0
);
\\
    if (m<0, \\ nicht-holomorphe Explosion
\\
    if (n<0,
\\
    return ((2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
\\
    sum(c=1, lim, K1(-m, n, c)/c*
\\
    besseli(abs(1-k), 4*Pi/c*sqrt(m*n)))));
\\
    if (n==0,
\\
    if (k<0,
\\
    return (2*(2-k)*sumdiv(m, t, t^(1-k))/bernreal(2-k)),
\\
    return (0));
\\
    return (delta(m, -n)*sign(k)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(-n/m)^((k-1)/2)*
\\
    sum(c=1, lim, K1(-m, n, c)/c*besselj(abs(1-k),
\\
    4*Pi/c*sqrt(-m*n))))),
\\
    return (P1(k, -m, n, lim)))
}

```

```

Fp0(p, k, m, n, lim=100)={
    if (m>0,
        if (n>0,
            return (2*Pi*(-1)^(k/2)/sqrt(p)*(n/m)^((k-1)/2)*
                sum(c=1, lim, if(c%p==0, 0, K10(p, -m, n, c)/c*
                    besseli(abs(1-k), 4*Pi/c*sqrt(m*n/p)))));
            if (n==0,
                if (k<=0,
                    return ((-1)^(k/2)*(2*Pi/sqrt(p))^(2-k)*m^(1-k)/(1-k)!*sum(c=1, lim, if(c%p
                        ==0, 0, 1/c^(2-k)*sumdiv(gcd(c, m), d, d*moebius(c/d))))),
                    return (0));
                if (k>0, return (0), \\ n<0
                    return (2*Pi*(-1)^(k/2)*(-n/m)^((k-1)/2)/sqrt(p)*
                        sum(c=1, lim, if(c%p==0, 0, K10(p, -m, n, c)/c*besselj(1-k, 4*Pi/c*sqrt(-m*n/p)))));
                if (m==0, \\ Eisensteinreihen ???
                    if (k>0,
                        if (n>0, return (2*k/(p^k-1)/bernreal(k)*(sigma(n, k-1)-if(n%p==0, p^k*sigma(n/p, k-1), 0)))
                        );
                        if (n==0, if (k==2, return ([1, -3/Pi/(p+1)/y]), return (1)));
                        return (0));
                    if (k<0,
                        if (n>0, return ((sigma(n, k-1)-if(n%p==0, p^k*sigma(n/p, k-1), 0))/(1-p^k)/zeta(1-k)));
                        if (n==0, return ([1, (-4)^(-k/2)*zeta(2-k)/Pi/zeta(1-k)*(1-p)/(1-p^k)*y^(1-k)]));
                        return ((sigma(abs(n), k-1)-if(n%p==0, p^k*sigma(abs(n)/p, k-1), 0))/(1-p^k)/zeta(1-k)));
                    return (delta(n, 0))      \\ k=0
                );
            }
}

```

$$Pp(p, k, m, n, \text{lim}=100) = \{ \text{delta}(m, n) + 2\pi(-1)^{k/2} (n/m)^{((k-1)/2)} \sum_{c=1}^{\text{lim}} K_1(m, n, p*c) / p / c * \text{besselj}(k-1, 4\pi/p/c * \sqrt{m*n}) \}$$

$$Pp0(p, k, m, n, \text{lim}=100) = \{ 2\pi(-1)^{k/2} / \sqrt{p} * (n/m)^{((k-1)/2)} *$$


```

sum(c=1,lim , if (c%p==0,0,K10(p,m,n,c)/c*besselj(k-1,4*Pi/c*sqrt(m*n/p))))}

Fpchi(p,k,m,n,lim=100)={
  if(m>0,
    if(n>0,
      return(2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
        sum(c=1,lim , K1chi(p,-m,n,p*c)/p/c*
          besseli(abs(1-k),4*Pi/p/c*sqrt(m*n)))));
    if(n==0,
      if(k<=0,
        return(2*(2-k)*(sigma(m,1-k)-if(n%p==0,p^(2-k)*sigma(m/p,1-k),0))/(1-p^(2-k))/
          bernreal(2-k)),
        return(0)));
      if(k>0,return(0), \ \ n<0
        return(-delta(m,-n)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(-n/m)^((k-1)/2)*
          sum(c=1,lim , K1chi(p,-m,n,p*c)/p/c*besselj(1-k,4*Pi/p/c*sqrt(-m*n)))));
      if(m==0, \ \ Eisensteinreihen
    if(k>0,
      if(n>0,return(2*k/(p^k-1)/bernreal(k)*(sigma(n,k-1)-if(n%p==0,p^k*sigma(n/p,k-1),0)))
        );
      if(n==0,if(k==2,return([1,-3/Pi/(p+1)/y]),return(1)));
      return(0));
    if(k<0,
      if(n>0,return((sigma(n,k-1)-if(n%p==0,p^k*sigma(n/p,k-1),0))/(1-p^k)/zeta(1-k)));
      if(n==0,return([1,(-4)^(-k/2)*zeta(2-k)/Pi/zeta(1-k)*(1-p)/(1-p^k)*y^(1-k)]));
      return((sigma(abs(n),k-1)-if(n%p==0,p^k*sigma(abs(n)/p,k-1),0))/(1-p^k)/zeta(1-k)));
    return(delta(n,0)) \ \ k=0
  );
}

```

```

Fpchi(p,k,m,n,lim=100) = {delta(m,n)+2*Pi*(-1)^(k/2)*(n/m)^((k-1)/2)*
  sum(c=1,lim , K1chi(p,m,n,p*c)/p/c*besselj(k-1,4*Pi/p/c*sqrt(m*n))}
. ./Programme/Gamma0p.gp

```

E.3. p-Ordnungen (SAGE)

E.3.1. Geschlecht Null. Gruppe $\Gamma_0(N)$ mit Nebentyp χ , paarweise verschiedene T_p -Eigenwerte. Die Koeffizienten der Modulformen liegen im Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_{\varphi(\text{cond}(\chi))})$, d.i. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}[i]$ oder $\mathbb{Q}[\zeta_3]$. Ausgegeben werden die p -Ordnungen der Anfangswerte $\text{ord}_p \tau_{p^j}^{\{N\}}, \text{ord}_p \overline{e(p^n)}, \text{ord}_p \overline{h_{p^j}(p^n)}$ und die Newtonsteigungen und zu passendem α_i das entsprechende $g_i = \text{ord}_p \sum_{t=0}^{\infty} \tau_i(p^t) \overline{h_{p^t}}$:

$$\alpha_{i, \text{ord}_p} \sum_{j=0}^m h_{p^j} \tau_i(p^j)$$

Das wird für $m = n, n+1, n+2, \dots$ wiederholt, bis man nachweislich Konvergenz hat. Das Programm berücksichtigt nur schwache Neufurmen. Falls Altformen existieren, muss man noch einmal auf der kleineren Stufe rechnen.

```

# N=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,16,18,25
#
# statt unendlich wird 888 ausgegeben
#
# sage: load "Gamma0N.sage"
# sage: pord(5,5,2)
#

def pord(N,k,p):
    if N==1 or N==2:
        chi=N;c=1
    else:
#
# Eingabe !!!
#
        chi=DirichletGroup(N).0^2 # hier chi eingeben !!!
#
#
#
        chi=chi^(-1);c=chi(p)
    if c==1 or c==-1: S=QQ
    else: S=c.parent()
    if N==1: M=CuspForms(1,k)
    else: M=CuspForms(chi,k).new_subspace()
    n=M.dimension();
    u=n-1;test=1
    while test > 0:
        test=0
        u+=1
        m=p^n+p^u+100;limax=n
        R = PowerSeriesRing(QQ, 'q');q=R.0
        if N==1:
            j=ModularForms(1,4).gen(0).q_expansion(prec=m)^3/delta_qexp(prec=m)
        else:
            et=qexp_eta(R,m)
            if is_prime(N) or N==4 or N==9 or N==25:
                j=(et/(et(q^N)+O(q^m)))^(24/(N-1))/q
            elif N==6:
                j=et^5*et(q^3)/(et(q^2)+O(q^m))/(et(q^6)+O(q^m))^5/q
            elif N==8:
                j=et(q^4)^12/(et(q^2)+O(q^m))^4/(et(q^8)+O(q^m))^8/q
            elif N==10:
                g4=EisensteinForms(10,4).eisenstein_series()
                j=et(q^2)^4*et(q^5)^10/(et^2+O(q^m))/(et(q^10)^20+O(q^m))*(g4[2].qexp(prec=m)-g4
                    [3].qexp(prec=m))/q^6
            elif N==12:
                j=et(q^4)^4*et(q^6)^2/(et(q^2)+O(q^m))^2/(et(q^12)+O(q^m))^4/q
            elif N==16:
                j=et^2*et(q^8)/(et(q^2)+O(q^m))/(et(q^16)+O(q^m))^2/q
            elif N==18:
                j=et(q^6)*et(q^9)^3/(et(q^3)+O(q^m))/(et(q^18)+O(q^m))^3/q
            else: return "X_0(N)_hat_Geschlecht_>_0"
        jN=j.base_extend(S)
        top=M.gen(n-1).q_expansion(prec=m)
        pw=n+1+p^u
        Ko=matrix(S,pw,pw-n+limax+1,0)

```

```

topi=top
for r in range(pw):
    for i in range(pw-n+limax+1):
        index=i-pw+n+1
        if i>=pw-n:
            index=p^(index-1)
        Ko[r,i]=topi[index]
    topi*=jN
Ko=Ko.rref()
if S==QQ:
    P=[p]
else:
    P=S.primes_above(p)
for Pr in P:
    if S==QQ: e=1
    else: e=Pr.absolute_ramification_index()
    Exponenten=matrix(S,n+u+2,limax+1-n,0)
    for i in range(n+u+2):
        if i<n:
            Exponenten[i]=[min(Ko[pw-n+i,r+pw].ord(Pr)/e,888) for r in range(limax+1-n)]
        elif i>n:
            Exponenten[i]=[min(Ko[pw-n-1-p^(i-n-1),r+pw].ord(Pr)/e,888) for r in range(limax+1-n)]
        else:
            Exponenten[n]=[min(Ko[pw-n-1,r+pw].ord(Pr)/e,888) for r in range(limax+1-n)]
# print Pr
# print Exponenten
x= polygen(QQ, 'x')
PR=PolynomialRing(S, 'x')
f=M.hecke_polynomial(p)
print "Newtonsteigungen",PR(f).newton_slopes(p)
f=f.factor()
for j in range(len(f)):
    if f[j][1]>1:
        print "mehrfache_Heckeeigenwerte"
        return
for F in f:
    g=PR(F[0]);
    K.<bet>=S.extension(g)
    P=K.primes_above(p)
    Anfang=vector(K,[Ko[pw-n-1-p^(i-n-1),pw] for i in range(n+1,n+u+2)])
    def tau(m):
        if m==0: return(1)
        if m==1: return(x)
        return (x*tau(m-1)-c*p^(k-1)*tau(m-2))
    Tau=vector(K,[tau(i) for i in range(u+1)])
    for Pr in P:
        e=Pr.absolute_ramification_index()
        alpha=(K(x/c)).ord(Pr)/e
        if alpha==0: return("gewoehnliche_Primzahl")
        if alpha==+Infinity: alpha=(k-1)/2
        g=(Anfang[:u+1]*Tau[:u+1]).ord(Pr)/e
        if g<(u+1)*alpha:
            print "alpha_i:",alpha," ,g=" ,g
            test=0
            break
    else:

```

test=1

./Programme/Gamma0N.sage

E.3.2. Höheres Geschlecht (MATHEMATICA).

ALGORITHMUS: Sei p eine ungewöhnliche Primzahl, $p \nmid N$, $\tau_i(p)$ paarweise verschieden;

- (1) (a) $S_k^!(\Gamma_0(N))$, N quadratfrei:
Suche irgendeine schwach-holomorphe Modulform $f' \in S_k^!(\Gamma_0(N))$, die nicht aus $D^{k-1}M_{2-k}^!(\Gamma_0(N)) + S_k(\Gamma_0(N))$ kommt, mit Polen kleiner Ordnung in den Spitzen, (versuchsweise)

$$f' := \frac{E_{k+k'}}{\eta_{k'}} + \sum_{t|N} c_t E_k | w_t,$$

dabei ist $\eta_{k'}(z) = \left(\prod_{t|N} \eta(tz) \right)^{\frac{2k'}{d(N)}} \in S_{k'}(\Gamma_0(N))$ ein Eta-Produkt vom Gewicht

$$k' = \text{kgV} \left(2, \frac{12d(N)}{\text{ggT}(24, \sigma(N))} \right),$$

E_k die $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ -Eisensteinreihe und w_t die [Atkin Lehner]-Involutionsen. Man kann das Transformationsverhalten von f' unter den Atkin-Lehner Involutionsen leicht berechnen¹, und erhält als Bedingung für jede Spitze eine Linearform in den c_t , die Null sein muss, damit $f' \in S_k^!(\Gamma_0(N))$. Das ergibt eindeutig c_t .

- (b) $S_k^!(N, \left(\frac{\cdot}{N}\right))$, N Primzahl, $N \neq p$: Wähle

$$f' := \frac{G_{k+k',\infty}}{\eta_{k'}} + c_1 G_{k,\infty} + c_2 G_{k,0} \text{ so, dass } f' \in S_k^!(N, \chi)$$

mit den beiden Eisensteinreihen

$$G_{k,\infty} := -\frac{B_{k,\chi}}{2k} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{t|j} \chi(t) t^{k-1} \right) q^j, \quad G_{k,0} := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{t|j} \chi\left(\frac{j}{t}\right) t^{k-1} \right) q^j, \quad \chi = \left(\frac{\cdot}{N}\right),$$

die folgendes Transformationsverhalten unter der Fricke-Involution haben:²

$$G_{k,\infty}|w_N = -\varepsilon_N p^{\frac{k-1}{2}} G_{k,0}, \quad G_{k,0}|w_N = -\varepsilon_N p^{\frac{1-k}{2}} G_{k,\infty}, \quad \varepsilon_N = \begin{cases} 1, & N \equiv 1 \pmod{4}, \\ i, & N \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

- (2) Berechne d so, dass

$$D^{k-1}d := \prod_{i=1}^s (\mathbb{T}_p f' - \tau_i(p) f') = p_{\mathbb{T}_p}(\mathbb{T}_p)(f').$$

- (3) Falls d ganzzahlige Koeffizienten hat (Sturmschranke) und Ungleichung (5.5.1) für alle i gilt, z.B. wenn $\dim S_k(N, \chi) = 1$, $\tau_1(p) = 0$, $\text{ggT}(\tau_1'(p), p) = 1$ gibt es keine Mock-Modulformen mit ganzzahligen Koeffizienten.

¹für das Eta-Produkt vgl. [Chan Lang, Cor. 2.2] und $E_k | w_t | w_{t'} = E_k | w_{\frac{tt'}{\text{ggT}(t,t')}}}$ für $t, t' | N$

²[Hida 4, §5.1 Classical Eisenstein series of $\text{GL}(2)/\mathbb{Q}$. Proposition 2]

BEWEIS. Nach Folgerung 5.3.8.5 kann man schwache Neuf Formen galoiskonjugiert mit gleichem Heckedefekt als $\prod_{j=1}^s (T_p - \tau_j(p)) f'$ wählen, falls $f' \notin D^{k-1} M_{2-k}^!(N, \chi) + S_k(N, \chi)$. Mit Hilfssatz 5.4.2 ist f' unter der Voraussetzung (3) nicht trivial. Falls p ungewöhnlich ist, sind die p^m -ten Fourierkoeffizienten der Heckeformen alle durch p teilbar. Die Heckedefekte d haben ganzzahlige Koeffizienten und

$$\sum_{j=0}^{\infty} d|_{p^j} \overline{\tau_1(p^j)} \equiv \tau_1'(p) \pmod{p}$$

eine p -adische Einheit, d.h. nicht Null, vgl. auch [Bri Guer Ka, Theorem 1.3]. Damit sind die Voraussetzungen von Satz 5.5.1 erfüllt. \square

Nachfolgend 2 MATHEMATICA-Notebooks, die diesen Algorithmus implementieren, das erste für $S_k^!(\Gamma_0(N))$, N quadratfrei, das zweite für $S_k^!(N, (\frac{\cdot}{N}))$, N prim.

Die Eingabe erfolgt jeweils in die schraffierten Felder.

```

NN = 11; k = 4; imax = 1000; p = 2; ptp = x^2 - 2 * x - 2;

k1 = LCM[2,  $\frac{12 \text{DivisorSigma}[0, NN]}{\text{GCD}[24, \text{DivisorSigma}[1, NN]]}$ ];
corev = CoefficientList[ptp, x] // Reverse;

et[m_: 1] :=  $\sum_{i=-\text{Floor}[\sqrt{\text{imax}}]}^{\text{Floor}[\sqrt{\text{imax}}]} (-1)^i q^{\frac{i m (3i-1)}{2}} + O[q]^{\text{imax}}$ ; Eis[k2_, m_: 1] =
Series[ $1 - \frac{2 k_2}{\text{BernoulliB}[k_2]} \sum_{n=1}^{\text{imax}} \text{DivisorSigma}[k_2 - 1, n] q^{m n}$ , {q, 0, imax}];

s2 = Series[ $q^{\frac{\text{DivisorSigma}[1, NN] k_1}{12 \text{DivisorSigma}[0, NN]}}$  (Product[et[t], {t, Divisors[NN]})  $\frac{2 k_1}{\text{DivisorSigma}[0, NN]}$ ,
{q, 0, imax}];

U[F_, m_] := SeriesData[q, 0,
Take[F[[3]], {m Ceiling[F[[4]] / m] - F[[4]] + 1, Length[F[[3]]], m}],
Ceiling[F[[4]] / m], m Ceiling[F[[5]] / m], 1];
T[F_, p_, k2_] := U[F, p] + pk2-1 (Normal[F] /. {q → qp})

M[t_, Q_] := Module[{δ = GCD[Q, t]},  $\left( \begin{array}{cc} \delta & y t / \delta \\ \text{NN } \delta / Q / t & Q x / \delta \end{array} \right) /.$ 
Flatten[Solve[Q2 x - NN y = Q, {x, y}, Integers] /. {C[1] -> 0}];
vet[A_] := With[{a = A[[1, 1]], b = A[[1, 2]], c = A[[2, 1]], d = A[[2, 2]]},
Exp[ $2 \text{Pi I} \left( \frac{a+d-3c}{24c} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{j}{c} \left( \frac{d j}{c} - \text{Floor}\left[\frac{d j}{c}\right] - \frac{1}{2} \right) \right)$ ];

f[Q_] := Coefficient[ $(Q^{(k+k1)/2} \text{Eis}[k+k1, Q]) /$ 
(Product[vet[M[t, Q]], {t, Divisors[NN]})  $\frac{2 k_1}{\text{DivisorSigma}[0, NN]}$  s2] +
Sum[c[t]  $\left( \frac{Q t}{\text{GCD}[Q, t]^2} \right)^{\frac{k}{2}} \text{Eis}\left[k, \frac{Q t}{\text{GCD}[Q, t]^2}\right]$ , {t, Divisors[NN]}], q, 0];

sol = Solve[f[#] == 0 & /@Divisors[NN]] // Flatten

f1 = Series[ $\frac{\text{Eis}[k+k1, 1]}{s_2} +$ 
Sum[c[t]  $(t)^{\frac{k}{2}} \text{Eis}[k, t]$ , {t, Divisors[NN]}], {q, 0, imax}] /. sol;

d = f1; Do[d = T[d, p, k] + corev[[i+1]] f1, {i, Exponent[ptp, x]};
d = Nest[Integrate[#/q, q] &, d, k-1];

x[0] = 1; x[1] = x; x[m_] := x x[m-1] - pk-1 x[m-2];
Do[Print[j, " ",
PolynomialMod[Sum[x[i] Coefficient[d, q, pi], {i, 0, j}], {p4, ptp}]], {j, 0, 7}]

```

```

NN = 37; k = 2; imax = 1000; p = 2; ptp = x^2 + 4;

corev = CoefficientList [ptp, x] // Reverse;

U[F_, m_] :=
  SeriesData[q, 0, Take[F[[3]], {m Ceiling[F[[4]]/m] - F[[4]] + 1, Length[F[[3]]], m}],
  Ceiling[F[[4]]/m], m Ceiling[F[[5]]/m], 1];
T[F_, p_, k2_] := U[F, p] + JacobiSymbol[p, NN] p^{k2-1} (Normal[F] /. {q -> q^p})

B[M_, k_] := M^{k-1} \sum_{a=1}^M JacobiSymbol[a, M] BernoulliB[k, \frac{a}{M}]; eps = If[Mod[NN, 4] == 1, 1, -i];

Goo[k_] := -\frac{B[NN, k]}{2 k} + \sum_{n=1}^{imax} (\text{Divisors}[n]^{k-1} \cdot \text{JacobiSymbol}[\text{Divisors}[n], NN]) q^n

G0[k_] := \sum_{n=1}^{imax} n^{k-1} (\text{Divisors}[n]^{1-k} \cdot \text{JacobiSymbol}[\text{Divisors}[n], NN]) q^n

et [m_: 1] := \sum_{i=-\text{Floor}[\sqrt{imax}]}^{\text{Floor}[\sqrt{imax}]} (-1)^i q^{\frac{i m (3i-1)}{2}} + O[q]^{imax};

Eis[k2_, m_: 1] = Series[1 - \frac{2 k2}{\text{BernoulliB}[k2]} \sum_{n=1}^{imax} \text{DivisorSigma}[k2-1, n] q^{m n}, {q, 0, imax}];

k1 = LCM[2, \frac{24}{\text{GCD}[24, 1+NN]}]; s2 = Series[q^{\frac{(1+NN)k1}{24}} (et[] et[NN])^{k1}, {q, 0, imax}];

M[t_, Q_] :=
  Module[{delta = GCD[Q, t], sol}, sol = Reduce[Q^2 x - NN y == Q, {x, y}, Integers] /. {C[1] -> 0};
  (\frac{\delta}{NN \delta/Q/t} \frac{y t / \delta}{Q x / \delta}) /. {x -> sol[[1, 2]], y -> sol[[2, 2]]};

vet [A_] := With[{a = A[[1, 1]], c = A[[2, 1]], d = A[[2, 2]]},
  Exp[2 Pi I (\frac{a+d-3c}{24 c} - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{c-1} \frac{j}{c} (\frac{d j}{c} - \text{Floor}[\frac{d j}{c}] - \frac{1}{2}))]];

f := Coefficient[\frac{Goo[k+k1]}{s2} + c0 Goo[k] + c0 G0[k], q, 0];

f0 :=
  Coefficient[\frac{\text{eps NN}^{\frac{k+k1-1}{2}} G0[k+k1]}{(\text{vet}[M[1, NN]] \text{vet}[M[NN, NN]])^{k1} s2} + \text{eps} (\text{NN}^{\frac{k-1}{2}} c0 G0[k] + \text{NN}^{\frac{1-k}{2}} c0 Goo[k]), q, 0];

sol = Solve[{f == 0, f0 == 0}] // Flatten
{c0 -> \frac{10 286 851 366 213 308 198 971 581 207 264}{5}, c0 -> -\frac{1 691 147 940 898 919 200 749 116 315 924}{5}}

f1 = Series[\frac{Goo[k+k1]}{s2} + c0 Goo[k] + c0 G0[k], {q, 0, imax}] /. sol;

d = f1; Do[d = T[d, p, k] + corev[[i+1]] f1, {i, Exponent[ptp, x]};
d = Nest[Integrate[#/q, q] &, d, k-1];

Series[8 x 9 x 5 x 7 x 11 x 13 x 17 x 19 d, {q, 0, 10}]

x[0] = 1;
x[1] = x;
x[m_] := x x[m-1] - JacobiSymbol[p, NN] p^{k-1} x[m-2]
Do[Print[j, " ", PolynomialMod[2 Sum[x[i] Coefficient[d, q, p^i], {i, 0, j}], {ptp, p^4}],
{j, 0, 15}]

```

Bezeichnungen und Definitionen

$$\begin{aligned}
 B_n &= B_n(0), \text{ Bernoullische Zahl;} \\
 &B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}, B_3 = B_5 = B_7 = \dots = 0, \dots \\
 B_n(x) &\text{ Bernoullisches Polynom, definiert durch } \frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k(x)}{k!} t^k, (|t| < 2\pi); \\
 &B_0(x) = 1, B_1(x) = x - \frac{1}{2}, B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}x, \dots \\
 B_{n,\chi} &\text{ verallgemeinerte Bernoullische Zahl zum Charakter } \chi \pmod{N}: \\
 &\sum_{a=1}^N \frac{\chi(a) te^{at}}{e^{Nt} - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k,\chi}}{k!} t^k, \left(|t| < \frac{2\pi}{N} \right); \\
 B(a, b) &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \text{ Betafunktion} \\
 \beta(y) = \beta_0(y) &= \begin{cases} \int_1^{\infty} t^{-\frac{3}{2}} e^{-yt} dt = 2e^{-y} - 2\sqrt{\pi y} \operatorname{erfc}(\sqrt{y}) \sim \frac{1}{ye^y}, & \text{für } y \geq 0 \\ \sqrt{y} \Gamma\left(-\frac{1}{2}, y\right), & \text{alle } y \neq 0, 0 \leq \arg(y) \leq \pi \\ 2, & y = 0 \end{cases} \\
 \beta_k(y) &= \begin{cases} \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2}, y)}{y^{k - \frac{1}{2}}}, & y > 0, \text{ analytisch fortgesetzt auf } 0 \leq \arg(y) \leq \pi, y \neq 0 \\ \frac{2}{1-2k}, & y = 0 \end{cases}, k \in \mathbb{N}_0 \\
 \beta_k(4\pi ny) q^{-n} &= \frac{\Gamma(k - \frac{1}{2})! Q_{\frac{3}{2}-k}^{(n)}}{(4\pi y)^{k - \frac{1}{2}}} \\
 C_m &= \frac{1}{m+1} \binom{2m}{m}, \text{ Catalan-Zahlen} \\
 C(x) &= \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt, \text{ Fresnelintegral} \\
 C_k(\tau, z) &= \int_{\tau}^{\infty} \frac{\cos zu}{u^{k+\frac{1}{2}}} du \\
 C_d(f) &= \begin{cases} \int_{\Lambda_d} f(z) d_{Q,2k}z, & d > 0 \\ \sum_{Q, |Q|=d} \frac{c_{-k}}{w_Q}, & d < 0 \end{cases} \\
 &\text{für automorph transformierende Funktionen vom Gewicht } 2k, \\
 &\text{für } d < 0 \text{ ist } c_{-k} \text{ ein Fourierkoeffizient zum inneren Punkt } z_Q \\
 C_d^+(f) &= \sum_{\substack{\text{CM-Punkte } z_Q \\ Q \text{ pos. definit, } |Q|=d}} \frac{c_{-k}}{w_Q}, \text{ falls } d < 0, \text{ dann ist } C_d(f) = 2C_d^+(f) \\
 \mathfrak{C}_Q &= \text{Geodätische } \left\{ z \in \mathcal{H} \mid a|z|^2 + b \operatorname{Re} z + c = 0 \right\}
 \end{aligned}$$

$\mathfrak{C}_{Q,\theta}$	Hyperzykel $\{z \in \mathcal{H} \mid a z ^2 + b \operatorname{Re} z + c = \sqrt{d}y \cot \theta\}$
$\mathcal{C}^k(M)$	$\{k \text{ mal stetig differenzierbare Funktionen } f : M \rightarrow \mathbb{C}\}, k = 1, 2, 3, \dots, \infty$
$\operatorname{Ci}(x)$	$-\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt \sim \frac{\sin x}{x}$
$\operatorname{cond}(\chi)$	Führer des Dirichletcharakters χ
$\chi_d(n)$	$= \begin{cases} \left(\frac{d_0}{n}\right), & \operatorname{ggT}(n, f) = 1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad d = d_0 f^2, d_0 \in \mathbb{D},$ induziert vom primitiven reellen Dirichletschen Charakter $\pmod{d_0}$
$\chi(d, x, N)$	$= \frac{2\pi x}{\sqrt{d}} \int_N^\infty \frac{\Delta_d(t)}{t} L_2(4\pi\sqrt{\frac{xt}{d}}) dt, \text{ Fehlerterm aus Satz B.3.2.1}$
$d(n)$	$\{t \in \mathbb{N} \mid t \mid n\}$, Anzahl der Teiler von n
$d_Q z$	$-\frac{\sqrt{d}}{Q(z, 1)} dz$, Bogenlängeelement auf der Geodätischen \mathfrak{C}_Q
$d_{Q,2k} z$	$\frac{Q(z, 1)^k}{ Q(z, 1) ^k} d_Q z$, dasselbe für Funktionen vom Gewicht $2k$
$d_M z$	Bogenlängeelement auf der Kurve M
$d_{M,2k} z$	$\frac{Q(z, 1)^k}{ Q(z, 1) ^k} d_M z$, dasselbe für Funktionen vom Gewicht $2k$
$d\mu$	$\frac{dx dy}{y^2}$, Flächenelement in \mathcal{H}
Df	$\frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial z}$, Differenzialoperator
\mathbb{D}	$\{z \in \mathbb{C} \mid z \leq 1\}$ Poincarésches Kreismodell
\mathcal{D}_k^2	$\{f \in \mathcal{C}^2(\mathfrak{F}) \cap L_2(\mathfrak{F}), \Delta_k f \in L_2(\mathfrak{F}), f(\gamma z) = e^{ik \arg(cz+d)} f(z)\}$
\mathfrak{D}_d	Distribution: $f \mapsto C_d(f)$ für Diskriminanten $d \in \mathbb{D}^0$ und $\operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})$ -invariante Funktionen f
$\mathfrak{D}_{d,2k}$	Distribution: $f \mapsto C_d(f)$ für Diskriminanten $d \in \mathbb{D}^0$ und automorph vom Gewicht $2k$ transformierende Funktionen f
$\mathfrak{D}_{\mathcal{A},2k}[f(z)]$	$= \int_{\Gamma_Q \setminus \mathfrak{C}_Q} \frac{f(z) Q^k(z, 1)}{(\sqrt{d}y)^k} d_Q z \quad \text{für } 0 < d \in \mathbb{D}, Q \in \mathcal{A}, Q = d$
\mathbb{D}	Grundzahlen oder Fundamentaldiskriminanten, vgl. [Zagier 7, §5]
\mathbb{D}^+	$\mathbb{D} \cap \mathbb{N}$
\mathbb{D}^-	$\mathbb{D} \cap \mathbb{Z}^-$
\mathbb{D}^0	$\{d \in \mathbb{Z} \mid d \equiv 0 \vee 1 \pmod{4}\} \setminus \{0\}$ Diskriminanten quadratischer Formen
$\mathbb{D}^{0+}, \mathbb{D}^{0-}$	positive bzw. negative Diskriminanten
Δ_k	$= -y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + iky \frac{\partial}{\partial x}$
$\Delta(z)$	$= q \prod_{n=1}^\infty (1 - q^n)^{24}, \quad q = e^{2\pi iz}, \text{ Diskriminantenfunktion}$
$\Delta_d(x)$	$= \sum'_{n \leq x} f_d(n) - \mathcal{L}_d(1)x \text{ für } d \in \mathbb{D}$
$\tilde{\Delta}_d(x)$	$= \int_0^x \Delta_d(t) dt = \sum_{n < x} (x - n) f_d(n) - \frac{\mathcal{L}_d(1)}{2} x^2 \text{ für } d \in \mathbb{D}$

$$\begin{aligned} \partial_k f &= \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{k}{4\pi y} f, \text{ erh\u00f6ht das Gewicht einer Modulform um } 2 \\ \delta_{m,n} &= \begin{cases} 1 & \text{f\u00fcr } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \text{ Kroneckerdelta} \\ \delta_{\square,m} &:= \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \\ 1, & m \text{ ist Quadratzahl } > 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \delta_{2\Delta,m} &:= \begin{cases} \frac{1}{2}, & m = 0 \\ 1, & m = n(n+1) \text{ f\u00fcr ein } n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ \delta_{\text{ungerade},c} &:= \begin{cases} 1, & c \text{ ist ungerade} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ e(x) &= e^{2\pi i x} \\ e_m(nx) &= e^{\frac{2\pi i n x}{m}} \\ \operatorname{erf}(z) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \text{ Fehlerfunktion} \\ \operatorname{erfc}(z) &= 1 - \operatorname{erf}(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi} z e^{z^2}}, \text{ komplement\u00e4re Fehlerfunktion} \\ E_n & \text{ Euler-Zahl, definiert durch } \frac{1}{\cos t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E_{2n} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \left(|t| < \frac{\pi}{2} \right) \\ & E_0 = 1, E_2 = -1, E_4 = 5, E_6 = -61, E_8 = 1385, \dots, E_{2n+1} = 0 \\ E_k(z) &= y^{-\frac{k}{2}} E_k\left(z, \frac{k}{2}\right), \text{ Eisensteinreihe zu } \Gamma \text{ oder im Kohnen-Plus-Raum} \\ E_{k,\infty}(z) &= y^{-\frac{k}{2}} E_{k,\infty}\left(z, \frac{k}{2}\right), \Gamma_0(4)\text{-Eisensteinreihe zur Spitze } \infty \\ E_{k,0}(z) &= i^k y^{-\frac{k}{2}} E_{k,0}\left(z, \frac{k}{2}\right), \Gamma_0(4)\text{-Eisensteinreihe zur Spitze Null} \\ E(z,s) &= E_0(z,s) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} \operatorname{Im}^s(\gamma z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ggT}(c,d)=1}} \frac{y^s}{|cz+d|^{2s}} \\ E_{2k}(z,s) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z})} y^s |_{2k} \gamma(z) = \frac{1}{2} \sum_{\operatorname{ggT}(c,d)=1} \frac{y^s}{(cz+d)^{s+k} (\bar{c}z+d)^{s-k}} \\ E_{2k}^*(z,s) &= \pi^{-s} \Gamma(s+|k|) \zeta(2s) E_{2k}(z,s) \\ E_{k,\infty}(z,s) &= \sum_{\gamma \in \Gamma_{\infty} \backslash \Gamma_0(4)} \operatorname{Im}^s z |_{k} \gamma(z), \Gamma_0(4)\text{-Ma\u00dfform zur Spitze } \infty \\ E_{k,0}(z,s) &= \left(\frac{|z|}{z}\right)^k E_{k,\infty}\left(-\frac{1}{4z}, s\right), \Gamma_0(4)\text{-Ma\u00dfform zur Spitze Null} \\ E_k^+ &= 4iy\partial_z + k* = 2iy\partial_x + 2y\partial_y + k*, \text{ Maa\u00dfoperator} \\ E_k^- &= -4iy\partial_{\bar{z}} - k* = -2iy\partial_x + 2y\partial_y - k*, \text{ Maa\u00dfoperator} \\ \varepsilon_0 &= \frac{t+u\sqrt{d}}{2} > 1, \text{ Grundeinheit von } \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \text{ mit } t^2 - du^2 = 4 \\ \varepsilon_{0,2} &= \frac{t+u\sqrt{d}}{2} > 1, \text{ Grundeinheit mit } t^2 - du^2 = \pm 4 \\ \varepsilon_d &= \left(\frac{-4}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1, & d \equiv 1 \pmod{4} \\ i, & d \equiv 3 \pmod{4} \end{cases} \end{aligned}$$

- \mathfrak{F} Standardfundamentalbereich für $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{H}$
- $\mathfrak{F}_0(4)$ = $\Gamma_0(4) \setminus \mathcal{H}$, Fundamentalbereich
- ${}_2F_1(a, b; c; z)$ = $1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots$, Gauß' hypergeometrische Funktion
- ${}_1F_1(a; b; z)$ = $1 + \frac{a}{b}z + \frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots$, Kummer Funktion
- ${}_pF_q(\mathbf{a}; \mathbf{b}; z)$ = $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}$, verallgemeinerte hypergeometrische Funktion
- $f_d(n)$ = Anzahl der inäquivalenten Darstellungen von n durch primitive Formen der Disk. d ,
 = $\sum_{t|n} \chi_d(t)$ für Fundamentaldiskriminanten d , Anzahl aller Ideale in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ mit Norm n
- $F_d(x)$ = $\sum'_{k \leq x} f_d(k) = \sum'_{k \leq x} \chi_d(k) \left[\frac{x}{k} \right]$
- $F_k(m, z), F_{k,a}(m, z)$ = Poincaréreihen, s. Abschnitt C.3.3
- $G_{2k}(z)$ = $\frac{1}{2} \zeta(1-2k) E_{2k}(z)$
- G_{pq}^{mn} Meijer G -Funktionen
- $G_k(z), G_{k,a}(z)$ = Eisensteinreihen zur Spitze \mathbf{a}
- γ = 0,5772156649..., Euler-Mascheroni-Konstante
- γ_Q = $\begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit kleinster positiver Lösung von $t^2 - du^2 = 4$,
 Erzeugendes der Automorphismengruppe im engeren Sinn von
 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$
- $\gamma_{Q,1}$ = $\begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & cu \\ au & -\frac{t+bu}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ mit kleinster positiver Lösung von $t^2 - du^2 = -4$,
 bildet Q auf $Q^* = (-a, b, -c)$ ab.
- $\gamma_{Q,2}$ = $\begin{pmatrix} \frac{t-bu}{2} & -cu \\ au & \frac{t+bu}{2} \end{pmatrix}$ mit kleinster positiver Lösung von $t^2 - du^2 = \pm 4$,
 Erzeugendes der Automorphismengruppe im weiteren Sinn von
 $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$
- $\gamma(a, z)$ = $\int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt$
- Γ = meist die Modulgruppe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, manchmal $\Gamma_0(4)$
- $\Gamma(a, x)$ = $\int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$, unvollständige Gamma-Funktion
- Γ_Q = $\{\pm \gamma_Q^n | n \in \mathbb{Z}\}$ für $d = |Q| > 0$, allgemein
 Automorphismengruppe im engeren Sinn von $Q(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$
- $\hat{\Gamma}_Q$ = $\Gamma_Q / \{\pm \mathrm{Id}\}$
- $\Gamma_{Q,2}$ = $\{\pm \gamma_{Q,2}^n | n \in \mathbb{Z}\}$, Automorphismengruppe im weiteren Sinn
- Γ_{∞} = $\left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$, Stabilisator der Spitze ∞

- $H(n) = \sum_{Q \in \mathbb{Q}_{-n}^+ / \Gamma} \frac{1}{w_Q} = L(0, -n) = \frac{h(d)}{w_d} \sum_{t|f} \mu(t) \left(\frac{d}{t}\right) \sigma_1\left(\frac{f}{t}\right), -n = df^2, d \in \mathbb{D}^-,$
 Hurwitz-Kronecker Klassenzahl
 $h(d)$ Klassenzahl im engeren Sinn
 $\text{He}_n(x) = (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$ Hermite-Polynome
 $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z > 0\},$ die obere (Poincaré-) Halbebene
 $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \cup \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$
 $\mathcal{H}^- = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z < 0\},$ untere Halbebene
 $\text{Im } z$ Imaginärteil der komplexen Zahl z
 $I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$ modifizierte Besselfunktion erster Art
 $j(\gamma, z) = \left(\frac{c}{d}\right) \varepsilon_d^{-1} e^{\frac{i}{2} \arg(cz+d)},$ Automorphiefaktor der $\Gamma_0(4)$ -Maaßformen
 $J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)},$ Besselfunktion erster Art
 $K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin(\nu\pi)},$ modifizierte Besselfunktion zweiter Art
 $K(f(z)) = \overline{f(-\bar{z})},$ konjugiert die Fourierkoeffizienten für Modulformen f
 $\mathcal{L}(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$
 $\mathcal{L}_d(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_d(n)}{n^s}, \mathcal{L}_1(s) = \zeta(s)$
 $L(s, d) = \begin{cases} 0, & d \equiv 2, 3 \pmod{4}, \\ \zeta(2s-1), & d = 0, \\ \zeta(s), & d = 1, \\ \mathcal{L}_{d_0}(s) \sum_{t|f} \mu(t) \left(\frac{d_0}{ts}\right) \sigma_{1-2s}\left(\frac{f}{t}\right), & d \equiv 0, 1 \pmod{4}, d \neq 0, d = d_0 f^2, d_0 \in \mathbb{D} \end{cases}$
 $L_\nu(z) = -Y_\nu(z) - \frac{2}{\pi} K_\nu(z),$ nicht zu verwechseln mit L -Reihen
 $l_0(z) = L_0(z) - \frac{1}{\pi} z^2 \log z$
 $l_1(z) = L_1(z) + \frac{2z}{\pi} \log \frac{z}{2}$
 $l_2(z) = L_2(z) - \frac{2}{\pi}$
 $l_3(z) = L_3(z) - \frac{4}{\pi z}$
 Λ_d geschlossene Geodätische zu allen Äquivalenzklassen reduzierter quadratischer Formen der Grundzahlen $\frac{d}{n^2}, n \in \mathbb{N}$
 $\Lambda_{d,\theta}$ geschlossene Hyperzykel zu allen Äquivalenzklassen reduzierter quadratischer Formen der Grundzahl $\frac{d}{n^2}, n \in \mathbb{N},$ mit Peripheriewinkel θ
 $M_k = M_k(\Gamma)$ oder $M_k(\Gamma_0(4)),$ für $\Gamma_0(4)$ mit θ_3 -Multiplikator
 $M_k^+ = M_k(\Gamma)$ bzw. $M_k(\Gamma_0(4)) \cap$ Kohnen-Plus-Raum

$M_k^!$	Modulformen zu Γ mit Polen in den Spitzen
$M_k^{!+}$	Modulformen aus $M_k^!$ im Kohnen-Plus-Raum
$M_{k\mathfrak{a}}^!$	Modulformen zu Γ mit Polen nur in der Spitze \mathfrak{a}
\mathbb{M}_k	$= \mathbb{M}_k(\Gamma)$ oder $\mathbb{M}_k(\Gamma_0(4))$, Mock-Modulformen, deren nicht-holomorpher Schatten in den Spitzen höchstens polynomial wächst
\mathbb{M}_k^+	$= \mathbb{M}_k(\Gamma)$ bzw. $\mathbb{M}_k(\Gamma_0(4)) \cap$ Kohnen-Plus-Raum
$\mathbb{M}_k^!$	Mock-Modulformen zu Γ , deren nicht-holomorpher Schatten in den Spitzen höchstens exponentiell wächst
$\mathbb{M}_k^{!+}$	Mock-Modulformen aus $\mathbb{M}_k^!$ im Kohnen-Plus-Raum
$\mathbb{M}_{k\mathfrak{a}}^!$	Mock-Modulformen zu Γ mit Hauptteil nur in der Spitze \mathfrak{a}
$\widehat{\mathbb{M}}_k$	$= \widehat{\mathbb{M}}_k(\Gamma)$ oder $\widehat{\mathbb{M}}_k(\Gamma_0(4))$, harmonische schwache Maaßformen, deren nicht-holomorpher Anteil in den Spitzen höchstens polynomial wächst
$\widehat{\mathbb{M}}_k^+$	$= \widehat{\mathbb{M}}_k(\Gamma)$ bzw. $\widehat{\mathbb{M}}_k(\Gamma_0(4)) \cap$ Kohnen-Plus-Raum
$\widehat{\mathbb{M}}_k^!$	harmonische schwache Maaßformen zu Γ
$\widehat{\mathbb{M}}_k^{!+}$	harmonische schwache Maaßformen aus $\widehat{\mathbb{M}}_k^!$ im Kohnen-Plus-Raum
$\widehat{\mathbb{M}}_{k\mathfrak{a}}^!$	harmonische schwache Maaßformen zu Γ mit Polen nur in der Spitze \mathfrak{a}
$\mathfrak{M}_k^!$	$=$ schwach-holomorphe vektorwertige Modulformen zur Gruppe $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$
$\widehat{\mathfrak{M}}_k^!$	$=$ schwach-holomorphe vektorwertige Modulformen zur Gruppe $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$
$\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$	$=$ metaplektische Gruppe, zweifache Überlagerung von $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$
$M_\nu(z)$	$= -Y_\nu(z) + \frac{2}{\pi}K_\nu(z)$
$m_0(z)$	$= M_0(z) + \frac{4}{\pi}(\log z + \gamma - \log 2)$
$m_1(z)$	$= M_1(z) - \frac{4}{\pi z}$
$m_2(z)$	$= M_2(z) - \frac{8}{\pi z^2}$
$m_3(z)$	$= M_3(z) - \frac{32}{\pi z^3}$
$\mu(n)$	$= \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ ein Quadrat enthält,} \\ (-1)^k, & \text{falls } n = p_1 \cdots p_k, p_1 < \cdots < p_k, \end{cases}$ (Möbiusfunktion)
$N(\mathfrak{a})$	$=$ Idealnorm
$N(\beta)$	$=$ Norm einer algebraischen Zahl
$N_d(a)$	$=$ Anzahl der inäquivalenten primitiven Darstellungen von a durch Formen der Disk. d ; $= \#\{b \mid -a < b \leq a \wedge b^2 \equiv d \pmod{4a}\}$ für $a \neq 0$, Anzahl der Geodätischen $(a, *, *)$ zur Diskriminante d in $\Gamma_\infty \backslash \mathcal{H}$; für $d \in \mathbb{D}$ Anzahl aller ganzen primitiven Ideale der Norm a in $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$
$N_d(0)$	$= \begin{cases} \sqrt{d}, & d = \square \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
ν	(meistens) Spektralparameter, $\Delta f = \left(\frac{1}{2} + \nu\right)\left(\frac{1}{2} - \nu\right)f$
$f(x) = O(g(x))$	$\Leftrightarrow \exists (c > 0) \forall x : f(x) < cg(x)$, Landaus Notation
$f(x) = o(g(x))$	$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
$f(x) = \Omega(g(x))$	$\Leftrightarrow \exists (c > 0) \forall x : f(x) > cg(x)$
$P_k(m, z)$,	

$P_{k,a}(m, z)$	Poincaréreihen, Abschnitt C.3.3
$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$	$= \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) / \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$Q^{(n)} = Q_k^{(n)}$	$= \begin{cases} -\frac{(4\pi y)^{1-k}}{\Gamma(2-k)}, & n = 0 \\ \frac{(4\pi y)^{1-k}}{\Gamma(1-k)} \beta_{\frac{3}{2}-k}(4\pi n y) q^{-n}, & k \leq \frac{3}{2}, \text{ halbzahlig} \\ \frac{\Gamma(1-k, 4\pi n y)}{n^{1-k} \Gamma(1-k)} q^{-n}, & n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, k \notin \mathbb{N} \\ n^{k-1} q^{-n}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$
$Q(x, y)$	$= ax^2 + bxy + cy^2$
$q(z)$	$= a z ^2 + bx + c, q(z) = 0$ beschreibt \mathfrak{C}_Q
$ Q $	Diskriminante $d = b^2 - 4ac$ der quadratischen Form $Q = ax^2 + bxy + cy^2$
$[Q]$	Äquivalenzklasse von quadratischen Formen im engeren Sinne
\mathcal{Q}_d	$= \{ \text{quadratische Formen } Q = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ der Diskriminante } d \}$
\mathcal{Q}_d^+	$= \{ \text{positiv definite quadratische Formen } Q = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ der Diskriminante } d < 0 \}$
$R\{q\}$	$= R[[q]] \left[\frac{1}{q} \right]$, Laurentreihen mit Koeffizienten aus einem Ring R , höchstens mit Pol
$\mathrm{Re} z$	Realteil der komplexen Zahl z
$\mathbf{R.} \int$	regularisiertes Integral
ρ	meist Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion
S_k	$= S_k(\Gamma)$ oder $S_k(\Gamma_0(4))$
$S_k(N, \chi)$	$= S_k(\Gamma_0(N), \chi) = \left\{ f \mid \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) : f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z) \right\}$
S_k^+	$= S_k(\Gamma_0(4)) \cap \text{Kohnen-Plus-Raum}$
$S_k^!$	Modulformen zu Γ mit Polen in den Spitzen und alle konst. Koeff. = 0
$S_k^{!+}$	Modulform aus $S_k^!(\Gamma_0(4))$ im Kohnen-Plus-Raum
$S_{k\mathfrak{a}}^!$	Modulformen aus $S_k^!$ mit Polen nur in der Spitze \mathfrak{a}
\mathbb{S}_k	$= \mathbb{S}_k(\Gamma)$, Mock-Modulform, holomorpher Anteil einer harmonischen schwachen Maaßform, deren „Schatten“ Spitzenform ist
\mathbb{S}_k^+	$= \mathbb{S}_k(\Gamma_0(4)) \cap \text{Kohnen-Plus-Raum}$
$\widehat{\mathbb{S}}_k$	$= \widehat{\mathbb{S}}_k(\Gamma)$, nicht-holomorphe Modulformen, deren nicht-holomorpher Anteil in den Spitzen exponentiell verschwindet
$\widehat{\mathbb{S}}_k^+$	$= \widehat{\mathbb{S}}_k(\Gamma_0(4)) \cap \text{Kohnen-Plus-Raum}$
$S(x)$	$= \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) dt$, Fresnelintegral
$S_a(r, d)$	$= \sum_{\substack{b \pmod{2a} \\ b^2 \equiv d \pmod{4a}}} \cos \frac{\pi r b}{a}$ für $d \neq 0$, Exponentialsumme
$S_0(r, d)$	$= \begin{cases} \sqrt{d}, & \text{falls } d = \square, \sqrt{d} \mid r \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$\mathrm{Si}(x)$	$= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\cos x}{x}$

$$\begin{aligned} \operatorname{si}(x) &= \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt \sim \frac{\cos x}{x} \\ \operatorname{SL}_2(\mathbb{Z}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}, \text{ Modulgruppe} \\ S_{r,d}(z) &= \sum_{a=1}^\infty \frac{S_a(r,d)}{a^z}, \text{ analytische fortgesetzt von } \operatorname{Re} z > 1 \\ \sum' & \text{ s. Abschnitt A.2 „Partielle Summation“} \\ \Sigma(d, x, N) &= \Delta_d(x) - \sum'_{n \leq N} \sqrt{\frac{x}{n}} f_d(n) L_1(4\pi \sqrt{\frac{xn}{d}}), \text{ Fehlerterm, s. Satz B.3.2.1} \\ \sigma_s(n) &= \sum_{\substack{t|n \\ t > 0}} t^s \\ \sigma_{s,\chi}(n) &= \sum_{\substack{t|n \\ t > 0}} \chi(t) t^s \\ \theta_2(z) &= q^{\frac{1}{4}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n(n+1)}, q = e^{2\pi iz} \\ \theta_3(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \\ \theta_4(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-q)^{n^2} \\ \Theta f(z) &= \frac{(4\pi y)^{-k}}{(-k)!} (\partial_{-2-k} \circ \dots \circ \partial_{k+2} \circ \partial_k f)(-\bar{z}), k \in \mathbb{Z}^- \\ T_n f &= \sum_{t|n} t^{k-1} V_t \circ U_{\frac{n}{t}} f, \text{ Heckeoperator einer Modulform vom Gewicht } k \\ T_n(\cos \theta) &= \cos n\theta, \quad \text{Tschebyscheff-Polynom erster Art} \\ \tau_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{N}} \\ \sqrt{N} & 0 \end{pmatrix}, \text{ Skalierungsmatrix f\u00fcr die Spitze } 0 \text{ von } \Gamma_0(N) \setminus \mathcal{H}, \\ \tau_{\frac{1}{2}} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \text{ Skalierungsmatrix f\u00fcr die Spitze } \frac{1}{2} \text{ von } \Gamma_0(4) \\ U_n f(z) &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{z+j}{n}\right), \text{ Heckeoperator} \\ U_n(\cos \theta) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \text{ Tschebyscheff-Polynom zweiter Art} \\ V_n f(z) &= f(nz) \\ V_a^b g(t) &= \sup_{a < x_0 < x_1 < \dots < x_n < b} \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)|, \text{ Totalschwankung \u00fcber } (a, b) \\ V_a^{b-0} g(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_a^{b-\varepsilon} g(t) \\ W_{\kappa,\mu}(z) &= \frac{z^{\mu+\frac{1}{2}} e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2} - \kappa)} \int_0^\infty e^{-z\tau} \tau^{\mu-\kappa-\frac{1}{2}} (1+\tau)^{\mu+\kappa-\frac{1}{2}} d\tau \\ & \text{ f\u00fcr } \operatorname{Re}\left(\mu + \frac{1}{2} - \kappa\right) > 0, |\arg z| < \pi, \text{ Whittakerfunktion} \\ w_Q &= \left| \hat{\Gamma}_Q \right|, d = |Q| < 0, \text{ f\u00fcr primitives } Q \text{ ist } w_Q = w_d = \begin{cases} 3 & \text{f\u00fcr } d = -3 \\ 2 & \text{f\u00fcr } d = -4 \\ 1 & \text{f\u00fcr } d < -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Im 5.ten Kapitel sind das [Atkin Lehner]-Involutionsen.

- $\xi_k f = 2iy^k \frac{\partial}{\partial z} \bar{f}$, liftet harmonische schwache Maaßformen vom Gewicht k auf $2 - k$
 $Y_k(z) = \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$, Besselfunktion zweiter Art
 $\zeta(s, d) = \sum_{Q \in \Gamma \backslash \mathcal{Q}_d} \sum_{\substack{(m,n) \in \mathbb{Z}^2 / \text{Aut}(Q) \\ Q(m,n) > 0}} \frac{1}{Q(m,n)^s} = \zeta(s) L(s, d) = \zeta(2s) \sum_{a=1}^{\infty} \frac{N_d(a)}{a^s}$
 $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})}(s) = \zeta(s, d) = \zeta(s) \mathcal{L}_d(s)$ für Fundamentaldisk. $d \in \mathbb{D}$, Dedekindsche Zetafunktion
 $x \gg y \iff \exists c > 0 : x > cy$
 $(f, g) = \int_{\mathfrak{F}} f(z) \overline{g(z)} \frac{dx dy}{y^2}$ für automorphe Funktionen f, g von gleichem Gewicht
 $\langle f, g \rangle_{\Gamma'} = \frac{1}{[\Gamma : \Gamma']} \int_{\Gamma' \backslash \mathcal{H}} f(z) \overline{g(z)} y^k \frac{dx dy}{y^2}$ für Γ' -Modulformen vom Gewicht k
 $(s)_m = s(s+1)(s+2) \cdots (s+m-1)$, Pochhammer-Symbol
 $a \mid b$ a teilt b
 $a \nmid b$ a teilt b nicht
 $a^n \parallel b$ $a^n \mid b \wedge a^{n+1} \nmid b$
 \doteq proportional, gleich bis auf einen konstanten Faktor
 \sim asymptotisch gleich, d.h. der Quotient geht gegen 1
 \asymp asymptotische Reihenentwicklung mit Fehler o (letzter Term)
 \asymp $x \gg y$ und $y \gg x$
 \square Quadratzahl, m^2
 \triangle Dreieckszahl, $\frac{m^2 + m}{2}$
 $F|_k \gamma(z) = e^{-ik \arg(cz+d)} F(\gamma z)$ für $\gamma \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \vee \Gamma_0(p)$, F Maaßform, $2k \in \mathbb{Z}$
 $f|_k \tau_0(z) = \begin{cases} (\sqrt{p}z)^{-k} f\left(-\frac{1}{pz}\right), & f \text{ ist } \Gamma_0(p) \text{ - Modulform} \\ (-2iz)^{-k} f\left(-\frac{1}{4z}\right), & f \text{ ist } \Gamma_0(4) \text{ - Modulform} \\ \left(\frac{z}{|z|}\right)^{-k} f\left(-\frac{1}{4z}\right), & f \text{ ist } \Gamma_0(4) \text{ - Maaßform} \end{cases}$
 $f|_k \tau_{\frac{1}{2}}(z) = \begin{cases} (-2iz)^{-k} f\left(-\frac{1}{4z} + \frac{1}{2}\right), & f \text{ Modulform} \\ \left(\frac{z}{|z|}\right)^{-k} f\left(-\frac{1}{4z} + \frac{1}{2}\right), & f \text{ Maaßform} \end{cases}$
 $\left(\frac{c}{d}\right) = \begin{cases} \text{Jacobisymbol } \left(\frac{c}{d}\right), & d > 0 \text{ ungerade} \\ \frac{c}{|c|} \left(\frac{c}{-d}\right), & c \neq 0 \\ 1, & c = 0, d = \pm 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad ; \text{ Kroneckersymbol}$
EICHLERINTEGRALE FÜR MODULFORMEN VOM GEWICHT k :
 $\tilde{f}(z) = \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \mathbf{R}. \int_z^{i\infty} f(\tau) (\tau - z)^{k-2} d\tau$
 $\tilde{\tilde{f}}(z) = \frac{(-2\pi i)^{k-1}}{\Gamma(k-1)} \mathbf{R}. \int_{-\bar{z}}^{i\infty} f(\tau) (\tau + z)^{k-2} d\tau$

Literaturverzeichnis

- [ABL] Ahlgren Sc., Bringmann K., Lovejoy J.: »l-adic properties of smallest parts functions«, *Advances in Math.* **228**, 2011.
- [Aitken] Aitken A.C.: »Determinanten und Matrizen«, *Bibliographisches Institut Hochschultaschenbücher-Verlag* Mannheim 1969.
- [Andrews] Andrews G.: »The number of smallest parts in the partitions of n «, *J. Reine Angew. Math.* **624** 2008.
- [Apostol 1] Apostol T.M.: »Introduction to Analytic Number Theory«, *Springer*, New York Heidelberg Berlin, 1976.
- [Apostol 2] Apostol T.M.: »Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory«, *Springer*, New York Heidelberg Berlin, 1976.
- [AS] Abramowitz M., Stegun I.A.: »Handbook of mathematical functions«, *Dover Publications, Inc.*, New York, 1970.
- [Asai] Asai T.: »On the Fourier coefficients of automorphic forms at various cusps and some applications to Rankin's convolution«, *Journal of the Math. Soc. of Japan* **28**, 1976.
- [As Ka Ni] Asai T., Kaneko M., Ninomiya H.: »Zeros of certain modular functions and an application«, *Comment. Math. Univ. St. Paul* **46**, 1997.
- [Atkin] Atkin A.O.L.: »Congruence Hecke operators«, *Proc. Symp. Pure Math.* **12**, AMS, Providence, 1969.
- [Atkin Lehner] Atkin A.O.L., Lehner J.: »Hecke Operators on $\Gamma_0(m)$ «, *Math. Ann.* **185**, 1970.
- [Atkin Li] Atkin A.O.L., Li W.-C.W.: »Twists of Newforms and Pseudo-Eigenvalues of W -Operators«, *Invent. math.* **48**, 1978.
- [Axe] Axer :»Über einige Grenzwertsätze«, *Kaiserl. Akad. d. Wiss. Wien, math.-naturwiss. Klasse.* Bd. CXX, Abt. IIa, 1911.
- [Balslev Venkov] Balslev E., Venkov A.: »Spectral Theory of Laplacians for Hecke Groups with Primitive Character«, *Acta Math.* **186**, 2001.
- [Blex] Blex C.: »Eine explizite Version der Jaquet-Langlands-Korrespondenz für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum«, Dissertation, 2003.
- [Bol] Bol G.: »Invarianten linearer Differentialgleichungen«, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **16**, 1949.
- [Borcherds 1] Borcherds R.E.: »Automorphic forms on $O_{s+2,2}(\mathbb{R})$ and infinite products«, *Invent. Math.* **120**, 1995.
- [Borcherds 2] Borcherds R.E.: »Automorphic forms with singularities on Grassmannians«, *Invent. Math.* **132**, 1998.
- [Boylan 1] Boylan M.: »Swinnerton-Dyer Type Congruences for certain Eisenstein series«, *Ramanujan Journal* **5**, 2001.
- [Boylan 2] Boylan M.: »2-adic properties of Hecke traces of singular moduli«, *Mathematics Research Letters* textbf12, 2005.
- [Bri Dia Ra] Bringmann K., Diamantis N., Raum M.: »Mock period functions, sesquiharmonic Maass forms, and non-critical values of L -functions«, *submitted for publication*, 2011.
- [Bri Fri Ke] Bringmann K., Fricke K.-H., Kent Z.A.: »Special L -values and periods of weakly holomorphic modular forms«, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [Bri Guer Ka] Bringmann K., Guerzhoy P., Kane B.: »Mock modular forms as p -adic modular forms«, *Transactions of the AMS*, accepted for publication, 2010.
- [Bri Gu Ke On] Bringmann K., Guerzhoy P., Kent Z., and Ono K.: »Eichler-Shimura theory for mock modular forms«, *Submitted for publication*, 2011.
- [Bri Ka Koh] Bringmann K., Kane B., Kohnen W.: »On the boundary behavior of automorphic forms«, *International Journal of Number Theory* **2**, 2006.
- [Bri Ka Rho] Bringmann K., Kane B., Rhoades R.C.: »Duality and Differential operators for harmonic weak Maass forms«, aus »From Fourier Analysis and Number Theory to Radon Transforms and Geometry (Developments in Mathematics)«, Bd. **28**, *Springer*, New York, 2013.
- [Bri O 1] Bringmann K., Ono K.: »Identities for traces of singular moduli«, *Acta Arithmetica* **119**, 2005.
- [Bri O 2] Bringmann K., Ono K.: »The $f(q)$ Mock theta function conjecture and partition ranks«, *Inventiones Mathematicae* **165**, 2006.
- [Bri O 3] Bringmann K., Ono K.: »Arithmetic properties of coefficients of half-integral weight Maass-Poincaré series«, *Mathematische Annalen* **337**, 2007.
- [Bri O 4] Bringmann K., Ono K.: »Lifting Elliptic Cusp Forms to Maass Forms with an Application to Partitions«, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **104**, Nr.10, 2007.
- [Bri O 5] Bringmann K., Ono K.: »Coefficients of harmonic Maass forms« in K.Alladi, F.Garvan: „Partitions, Q-series, and Modular Forms“, *Springer*, New York 2011.
- [Bri Ri] Bringmann K., Richter O.: »Zagier-type dualities and lifting maps for harmonic weak Maass-Jacobi form«, *Advances of Math.* **225**, 2010.
- [Bruggeman 1] Bruggeman R.W.: »Notes on automorphic forms«, online script, Universiteit Utrecht, 2002.
- [Bruggeman 2] Bruggeman R.W.: »Remarks on Mock modular forms«, *mockremarks4.tex*, privat, 2010.

- [Bruinier 1] Bruinier J.H.: »Borchers products on $O(2,1)$ and Chern classes of Heegner divisors«, Lecture Notes in Mathematics No. **1780**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 2002.
- [Bruinier 2] Bruinier J.H.: »Traces of CM values of modular functions and related topics«, In: Proceedings of the Conference on »Automorphic Forms and Automorphic L-Functions«, *RIMS Kokyuroku* **1468**, Kyoto, 2006.
- [Bruinier Funke 1] Bruinier J.H., Funke J.: »Traces of CM values of modular functions«, *J. Reine Angew. Math.* **594**, 2006.
- [Bruinier Funke 2] Bruinier J.H., Funke J.: »On two geometric theta lifts«, *Duke Math. J.* **125**, 2004.
- [Br Jen On] Bruinier J.H., Jenkins P., Ono K.: »Hilbert class polynomials and traces of singular moduli«, *Math. Ann.* **334**, 2006.
- [Bruinier Kühn] Bruinier J.H., Kühn U.: »Integrals of automorphic Green's functions associated to Heegner divisors«, *Int. Math. Res. Not.* **31**, 2003.
- [Bruinier Kuß] Bruinier J.H., Kuß M.: »Eisenstein series attached to lattices and modular forms on orthogonal groups«, *manuscripta math.* **106**, 2001.
- [Bruinier Ono 1] Bruinier J.H., Ono K.: »Heegner divisors, L -functions and harmonic weak Maass forms«, *Annals of Mathematics* **172**, 2010.
- [Bruinier Ono 2] Bruinier J.H., Ono K.: »Algebraic Formulas for the coefficients of half-integral weight harmonic weak Maass Forms«, *preprint*, 2011.
- [Br On Rh] Bruinier J.H., Ono K., Rhoades R.C.: »Differential operators for harmonic weak Maass forms and the vanishing of Hecke eigenvalues«, *Mathematische Annalen* **342**, 2008.
- [Buch Voll] Buchmann J., Vollmer U.: »Binary Quadratic Forms - An Algorithmic Approach«, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
- [Buell] Buell D.A.: »Binary Quadratic Forms - Classical Theory and Modern Computations«, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1989.
- [Bump] Bump D.: »Automorphic forms and Representations«, Cambridge University Press, 1997.
- [Bump Choie] Bump D., Choie Y.J.: »Derivatives of Modular Forms of Negative Weight«, *Pure and Applied Math. Quarterly* **2** No. 1, 2006.
- [Bundschuh] Bundschuh M.: »Über die Endlichkeit der Klassenzahl gerader Gitter der Signatur $(2, n)$ mit einfachem Kontrollraum«, Dissertation, Heidelberg, 2001.
- [Buzzard 1] Buzzard K.: »On the eigenvalues of the Hecke operator T_2 «, *Journal of Number Theory* **57**, 1996.
- [Buzzard 2] Buzzard K.: »Families of modular forms«, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **13**, 2001.
- [Buzzard 3] Buzzard K.: »Questions about slopes of modular forms«, *Astérisque* **298**, 2005.
- [Buzzard Calegari] Buzzard K., Calegari F.: »Slopes of overconvergent 2-adic modular forms«, *Compositio Math.* **141**, 2005.
- [Cassels] Cassels : »Rational Quadratic Forms«,
- [Chan Lang] Chan H.H., Lang M.L.: »Ramanujan's modular equations and Atkin-Lehner involutions«, *Israel Journal of Math.* vol. **103**, 1998.
- [Chandra 1] Chandrasekharan K., Raghavan Narasimhan: »Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions«, *Acta Arithmetica* **VI**, 1961.
- [Chandra 2] Chandrasekharan K., Raghavan Narasimhan: »Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions«, *Ann. Math.* **76**, 1962.
- [Chandra 3] Chandrasekharan K., Raghavan Narasimhan: »An Approximate Reciprocity Formula«, *Commentarii Helveticae* **43**, 1968.
- [Chi] Chi Mingjing: »On Kaneko congruences«, *thesis*, 2012.
- [Choi 1] Choi D.: »Spaces of modular forms generated by eta-quotients«, *Ramanujan Journal* **14**, 2007.
- [Choi 2] Choi D.: »Exact formulas for traces of singular moduli of higher level modular functions«, *Journal of Number Theory* **128** (3), 2008.
- [Choi Kim] Choi S.Y., Kim C.H.: »Congruences for Hecke eigenvalues in higher level cases«, *Journal of Number Theory*, **131** issue 11, 2011.
- [Choie 1] Choie Y.J.: »Half integral weight Jacobi forms and periods of modular forms«, *manuscripta math.* **104**, 2001.
- [Choie Kohnen Ono] Choie Y.J., Kohnen W., Ono K.: »Linear relations between modular forms coefficients and non-ordinary primes«, *Bull. of the London Math. Society* **6**, 1997.
- [Choie Kohnen] Choie Y.J., Kohnen W.: »Diagonalizing "bad" Hecke operators on spaces of cusp forms«, aus »Number Theory: Tradition and Modernization (Developments in Mathematics)«, Bd. **15**, Springer, New York, 2006.
- [Choie Lim 1] Choie Y.J., Lim S.: »The heat operator and mock Jacobi forms«, *Ramanujan Journal* **22**, 2010.
- [Choie Lim 2] Choie Y.J., Lim S.: »Theta liftings on weak Maass forms«, *preprint*, 2011.
- [Choie Zagier] Choie Y.J., Zagier D.: »Rational period functions for $PSL_2(\mathbb{Z})$ «, A tribute to Emil Grosswald: number theory and related analysis, *Contemp. Math.* **143**, AMS, Providence, RI, 1993.
- [Cipra] Cipra B.A.: »On the Niwa-Shintani Theta-kernel lifting of modular forms«, *Nagoya Math.J.* **91**, 1983.
- [Cohen] Cohen H.: »Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters«, *Math. Ann.* **217**, 1975.
- [Cohen Oesterlé] Cohen H., Oesterlé J.: »Dimensions des espaces de formes modulaires« *Lecture Notes in Math.* **627**, 1977.
- [Co Gou Joch] Coleman R.F., Gouvêa F.Q., Jochnowitz N.: » E_2, Θ , and Overconvergence«, *Internat. Math. Res. Notices* **1**, 1995.
- [Cohn] Cohn H.: »Advanced Number Theory«, Dover Publications, Inc., New York, 1962.
- [Coleman 1] Coleman R.F.: »Classical and Overconvergent Modular Forms«, *Invent. Math.* **124**, 1996.
- [Coleman 2] Coleman R.F.: »p-adic Banach Spaces and families of modular forms«, *Invent.Math.* **127**, 1997.
- [Co Ste Tei] Coleman R., Stevens G., Teitelbaum J.: »Numerical experiments on families of p-adic modular forms«, in *Computational Perspectives on Number Theory, Proceedings of a conference in Honor of A.O.L. Atkin*, Chicago, Illinois, 1995, (AMS, Providence, RI, 1998)

- [Conrey Farmer] Conrey J.B., Farmer D.W.: »Hecke operators and the nonvanishing of L -functions«, Topics in number theory (University Park, PA, 1997), Math. Appl., **467**, *Kluwer Acad. Publ.*, Dordrecht, 1999.
- [Cooper Hirsch] Cooper S., Hirschhorn M.: »On the number of primitive representations of integers as sums of squares«, *Ramanujan Journal* **13**, 2007.
- [Deligne] Deligne P.: »La conjecture de Weil I«, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **43**, 1974.
- [Dewar 1] Dewar M.P.: »Congruences in Modular, Jacobi, Siegel, and Mock Modular Forms with Applications«, *thesis*, Urbana, Illinois, 2010.
- [Dewar 2] Dewar M.P.: »The image and kernel of Atkin's U_p operator modulo p «, *Proc. Amer. Math. Soc.* **140**, 2012.
- [Diamond Shur] Diamond F., Shurman J.: »A First Course in Modular Forms«, *Springer*, 2005.
- [Dickhut] Dickhut B.: »Thetalifts von Poincaré- und Eisensteinreihen und zugehörige Zetafunktionen auf dem dreidimensionalen hyperbolischen Raum«, Dissertation, 2003.
- [Dou Jen] Doud D., Jenkins P.: » p -adic Properties of Coefficients of Weakly Holomorphic Modular Forms«, *International Mathematics Research Notices* **1**, 2010.
- [Dou Jen Lo] Doud D., Jenkins P. and Lopez J.: »Two-divisibility of the coefficients of certain weakly holomorphic modular forms«, *Ramanujan Journal* **28**, 2012.
- [Duke 1] Duke W.: »Hyperbolic distribution Problems and half-integral weight Maass forms«, *Invent. math.* **92**, 1988.
- [Duke 2] Duke W.: »Modular functions and the uniform distribution of CM points«, *Math. Ann.* **334**, 2006.
- [Duke 3] Duke W.: »An Introduction to the Linnik problems« aus »Equidistribution in Number Theory«, Ed.: A. Granville, Z. Rudnick, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Equidistribution in Number Theory, Montreal, Canada 11-22 July 2005. *Springer* Dordrecht, Netherlands 2007.
- [DFI] Duke W., Friedlander J.B., Iwaniec H.: »The subconvexity problem for Artin L-functions«, *Invent. math.* **149**, 2002.
- [DIT 1] Duke W., Imamoglu Ö., Tóth Á.: »Rational period functions and cycle integrals«, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **80** Nr.2, 2010.
- [DIT 2] Duke W., Imamoglu Ö., Tóth Á.: »Real quadratic analogues of traces of singular invariants«, *Int. Math. Res. Not.* **13**, 2011.
- [DIT 3] Duke W., Imamoglu Ö., Tóth Á.: »Cycle integrals of the j -function and mock modular forms«, *Annals of Mathematics* **173**, 2011.
- [Duke Jen 1] Duke W., Jenkins P.: »On the zeros and coefficients of certain weakly holomorphic modular forms«, *Pure and Applied Mathematics Quarterly* **4**, 2008.
- [Duke Jen 2] Duke W., Jenkins P.: »Integral traces of singular values of weak Maass forms«, *Algebra and Number Theory* **2**, 2008.
- [R.E.Edwards] Edwards R.E.: »Fourier Series, A Modern Introduction Vol. I & II«, *Holt Rinehart and Winston Inc.*, New York, 1967.
- [H.M.Edwards] Edwards H.M.: »Galois Theory«, *Springer*, New York Heidelberg Berlin 1984.
- [Eichler Zagier] Eichler M., Zagier D.: »The Theory of Jacobi Forms«, *Progress in Math.* **55**, Birkhäuser-Verlag, Boston-Basel-Stuttgart, 1985.
- [Elkies] Elkies N.: »Exponential sums II: the Kuzmin and Montgomery-Vaughan estimates« aus »Math 259: Introduction to Analytic Number Theory«, <http://www.math.harvard.edu/~elkies/M259.98/kmv.ps>, 1998.
- [Emerton] Emerton M.J.: »2-adic Modular Forms of Minimal Slope«, PhD-thesis *Harvard University Cambridge*, Massachusetts, 1998.
- [ET] Erdélyi, Magnus, Oberhettinger, Tricomi: »Table of Integral Transforms«, *McGraw-Hill*, New York, Toronto London, 1954.
- [Farmer James] Farmer D.W., James K.: »The Irreducibility of Some Level 1 Hecke Polynomials«, *Math. of Computation* **71** No.239, 2002.
- [Fay] Fay J.: »Fourier coefficients of the resolvent for a Fuchsian group«, *J. Reine Angew. Math.* **293-294**, 1977.
- [Fischer Lieb] Fischer W., Lieb I.: »Funktionentheorie«, *vieweg*, Braunschweig Wiesbaden, 1981.
- [Flicker] Flicker Y.Z.: »Automorphic Forms on Covering Groups of $GL(2)$ «, *Invent. math.* **57**, 1980.
- [Folsom Kent Ono] Folsom A., Kent Z.A., Ono K.: » l -adic properties of the Partition function«, *Advances in Mathematics* **229**, 2012.
- [Forster 1] Forster O.: »Analysis 3«, *vieweg*, Braunschweig Wiesbaden, 1981.
- [Forster 2] Forster O.: »Algorithmische Zahlentheorie«, *vieweg*, Braunschweig Wiesbaden, 1996.
- [Fricke] Fricke K-H.: »Reduktionstheorie für $\Gamma_0^*(p)$ und Anwendungen auf Modulformen«, Diplomarbeit, Bonn, 1989.
- [Fricke Klein] Fricke R., Klein F.: »Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I«, Leipzig, 1897.
- [Frö Tay] Fröhlich A., Taylor M.J.: »Algebraic Number Theory«, *Cambridge University Press*, New York, Sydney, 1991.
- [Funke] Funke J.: »Heegner Divisors and Nonholomorphic Modular Forms«, *Comp. Math.* **133**, 2002.
- [Gangl Zagier] Gangl H., Zagier D.: »Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-Series« in: The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., **548**, *Kluwer Acad. Publ.*, Dordrecht, 2000.
- [Ga Penn] Garthwaite S., Penniston D.: » p -adic properties of Maass forms arising from theta series«, *Mathematical Research Letters* **15**, no. 3, 2008.
- [Gelbart 1] Gelbart S.: »Automorphic Forms on Adele Groups«, *Princeton University Press*, Princeton, 1975.
- [Gelbart 2] Gelbart S.: »Weil's Representation and the Spectrum of the Metaplectic Group«, Lecture Notes in Mathematics No. **530**, *Springer*, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [Gelbart 3] Gelbart S.: »An elementary introduction to the Langlands program«, *Bull. of the AMS* **10**, No.2, 1984.
- [Gel'fand-Shilov] Gel'fand-Shilov G.E. : »Verallgemeinerte Funktionen (Distributionen) I«, *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, Berlin, 1967.

- [Goldfeld Hoffstein] Goldfeld D., Hoffstein J.: »Eisenstein series of $\frac{1}{2}$ -integral weight and the mean value of real Dirichlet L-series«, *Invent. math.* **80**, 1985.
- [GPS] Gelbart S., Piatetski-Shapiro I.: »On Shimura's correspondence for modular forms of half-integral weight« aus »Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic«, *Tata Institute*, Bombay, 1979.
- [Gouvêa 1] Gouvêa F.Q.: »Arithmetic of p-adic Modular Forms«, *Lecture Notes in Mathematics* No. **1304**, Springer, 1988.
- [Gouvêa 2] Gouvêa F.Q.: »Where the slopes are«, *Journal of the Ramanujan Mathematical Society* **16**, 2001.
- [Gouvêa 3] Gouvêa F.Q.: »Non-Ordinary Primes: A Story«, *Experimental Mathematics* **6**, 1997.
- [Gouvêa Mazur] Gouvêa F.Q., Mazur B.: »Searching for p-adic eigenfunctions«, *Math. Res. Lett.* **2**, 1995.
- [GR] Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M.: »Tables of Integrals, Series and Products«, *Academic Press*, 6th edition, New York, 2000.
- [Grauert Fischer] Grauert H., Fischer W.: »Differential- und Integralrechnung II«, *Springer*, Berlin Heidelberg New York, 1978.
- [Grauert Lieb] Grauert H., Lieb I.: »Differential- und Integralrechnung III«, *Springer*, Berlin Heidelberg New York, 1978.
- [Grube] Grube F.: »Ueber einige Eulersche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen«, *Zeitschrift für Mathematik und Physik* **19**, 1874.
- [Guertzhoj 1] Guertzhoj P.: »An approach to the p-adic theory of Jacobi forms«, *Int. Math. Research Notices* **1**, 1994.
- [Guertzhoj 2] Guertzhoj P.: »On a conjecture of Atkin for the primes 13, 17, 19, and 23«, *Math. Res. Lett.* **13**, 2006.
- [Guertzhoj 3] Guertzhoj P.: »Some congruences for traces of singular moduli«, *Journal of Number Theory* **122**, 2007.
- [Guertzhoj 4] Guertzhoj P.: »On weak harmonic Maass-modular grids of even integral weight«, *Math. Res. Lett.* **15**, 2008.
- [Guertzhoj 5] Guertzhoj P.: »Hecke operators for weakly holomorphic modular forms and supersingular congruences«, *Proc. of the AMS* **136**, 2008.
- [Guertzhoj 6] Guertzhoj P.: »On a conjecture of Atkin«, *J. Reine Angew. Math.* **639**, 2010.
- [Guertzhoj 7] Guertzhoj P.: »On the Honda-Kaneko congruences«, aus »From Fourier Analysis and Number Theory to Radon Transforms and Geometry (Developments in Mathematics)«, Bd. **28**, Springer, New York, 2013.
- [Guer Kent Ono] Guertzhoj P., Kent Z.A., Ono K.: »p-adic coupling of mock modular forms and shadows«, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Proceedings of the National Academy of Sciences, USA, **107** no. 14, 2010.
- [Hartman] Hartman S., Mikusiński J.: »The Theory of Lebesgue Measure and Integration«, *Pergamon Press*, Oxford, 1961.
- [Harvey Moore] Harvey J., Moore G.: »Algebras, BPS states, and strings«, *Nuclear Phys. B* **463**, 1996.
- [Heath-Brown] Heath-Brown D.R.: »Hybrid Bounds for Dirichlet L-Functions«, *Inventiones math.* **47**, 1978.
- [Hecke] Hecke E.: »Über die Kroneckersche Grenzformel für reelle quadratische Körper und die Klassenzahl relativ-abelscher Körper«, *Verhandl. d. Naturforschenden Ges. i. Basel*, Bd. **28**, 1917.
- [Hecke 2] Hecke E.: »Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Erste Mitteilung«, *Math. Zeitschrift* **1**, 1918.
- [Hecke 3] Hecke E.: »Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen. Zweite Mitteilung«, *Math. Zeitschrift* **6**, 1920.
- [Hecke 4] Hecke E.: »Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendungen auf Funktionentheorie und Arithmetik«, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **5**, 1959.
- [Hejhal 1] Hejhal D.: »The Selberg Trace formula for $PSL(2, \mathbb{R})$, Vol. II«, *Lecture Notes in Mathematics* No. **1001**, Springer, 1976.
- [Hejhal 2] Hejhal D.: »Some Dirichlet Series with Coefficients Related to Periods of Automorphic Eigenforms I«, *Proc. Japan Acad.* **58**, Ser. A, 1982.
- [Hida 1] Hida H.: »Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms«, *Invent. Math.* **85**, 1986.
- [Hida 2] Hida H.: »Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms«, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **19**, 1986.
- [Hida 3] Hida H.: »Theory of p-adic Hecke algebras and Galois representations«, *Sugaku Expositions* **2**, 1989.
- [Hida 4] Hida H.: »Elementary Theory of L-functions and Eisenstein Series«, *London Math. Soc. Stud. Texts* **26**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.
- [Hida Maeda] Hida H., Maeda Y.: »Non-abelian base change for totally real fields«, *Olga Taussky-Todt: in memoriam. Pacific Journal of Mathematics* **181**, 1997, Sonderausgabe.
- [Hikami] Hikami K.: »Mock (false) theta functions as quantum invariants«, *Regular and Chaotic dynamics* **10**, 2005.
- [Hirzebruch] Hirzebruch F.: »Infinitesimalrechnung III«, *Vorlesungsmanuskript*, Bonn, 1985.
- [Hirzebruch Zagier] Hirzebruch F., Zagier D.: »Intersection numbers of curves on Hilbert modular surfaces and modular forms of Nebentypus«, *Inventiones Math.* **36**, 1976.
- [Honda Kaneko] Honda Y., Kaneko M.: »On Fourier coefficients of some meromorphic modular forms«, *Bull. of the Korean Math. Soc.* **49**, 2012.
- [Hooley 1] Hooley Chr.: »On the Representation of a Number as the Sum of a Square and a Product«, *Math. Zeitschrift* **69**, 1957.
- [Hooley 2] Hooley Chr.: »On the Number of Divisors of Quadratic Polynomials«, *Acta mathematica* **110**, 1963.
- [Howe] Howe R.: » θ -series and invariant theory«, *Proc. Symp. Pure Math.* **XXXIII** Part I, AMS, 1979.
- [Huxley] Huxley M.N.: »Area, Lattice Points and Exponential Sums«, *Clarendon Press*, Oxford, 1996.
- [Huxley Watt] Huxley M.N., Watt N.: »The number of ideals in a quadratic field«, *Proceedings of the Indian Academy of Science* **104** Nr.1, 1994.
- [Ibukiyama Saito] Ibukiyama T., Saito H.: »On zeta functions associated to symmetric matrices, II: Functional equations and special values«, *Nagoya Math. J.* **208**, 2012.
- [Iwaniec 1] Iwaniec H.: »Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight«, *Inventiones math.* **87**, 1987.
- [Iwaniec 2] Iwaniec H.: »Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms«, *Revista Matemática Iberoamericana*, 1995.

- [Iwaniec 3] Iwaniec H.: »Topics in classical automorphic forms«, Graduate studies in mathematics **17**, AMS, 1997.
- [Iwaniec Kowalski] Iwaniec H., Kowalski E.: »Analytic Number Theory«, Colloquium Publications **53**, AMS, 2004.
- [Ivić] Ivić A.: »The Riemann Zeta-function«, *John Wiley & Sons, Inc.*, New York..., 1985.
- [Jacquet Langlands] Jacquet H., Langlands R.: »Automorphic Forms on $GL(2)$ «, Lecture notes in Mathematics **114**, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1970.
- [Jenkins 1] Jenkins P.: » p -adic properties for traces of singular moduli«, International Journal of Number Theory **1**, 2005.
- [Jenkins 2] Jenkins P.: »Traces of singular moduli, modular forms, and Maass forms«, *dissertation*, University of Wisconsin-Madison, 2006.
- [Jen Ono] Jenkins P., Ono K.: »Divisibility criteria for class numbers of imaginary quadratic fields«, *Acta Arithmetica* **125**, 2006.
- [Karatsuba] Karatsuba A.A.: »Basic Analytic Number Theory«, Springer, Berlin Heidelberg, 1993.
- [Kara Voronin] Karatsuba A.A., Voronin S.M.: »The Riemann Zeta-Function«, *de Gruyter*, Berlin - New York, 1992.
- [Kassaei] Kassaei P.L.: »The Eigencurve: A Brief Survey«, *Seminar des mathematischen Instituts der Universität Göttingen* 2005, pp.65–73.
- [Katok] Katok S.: »Closed geodesics, periods and arithmetic of modular forms«, *Inventiones math.* **80**, 1985.
- [Katok Sarnak] Katok S., Sarnak P.: »Heegner points, cycles and Maass forms«, *Israel Journal of Math.* **84**, 1993.
- [Katz] Katz N.M.: » p -adic properties of modular schemes and modular forms«, in: »Modular Functions of One Variable III« (Proceedings International Summer School University of Antwerp, RUCA July 17–August 3, 1972), Lecture Notes in Mathematics No. **350**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [Kent] Kent Z.A.: » p -adic analysis and Mock modular forms«, *dissertation*, Hawaii university 2010.
- [Kilford 1] Kilford L.J.P.: »Slopes of overconvergent modular forms«, *PhD thesis*, Imperial College of Science, Technology and Medicine, October 2002.
- [Kilford 2] Kilford L.J.P.: »Generating spaces of modular forms with η -quotients«, *JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications* **8** (2), 2007.
- [Kilford 3] Kilford L.J.P.: »On the U_p operator acting on p -adic overconvergent modular forms when $X_0(p)$ has genus 1«, <http://arxiv.org/abs/arXiv:0810.4788>; 2008.
- [Kilford 4] Kilford L.J.P.: »On the slopes of the U_5 operator acting on overconvergent modular forms«, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux* **20**, 2008.
- [Kim] Kim C.H.: »Traces of singular values and Borcherds products«, *Bull. London Math. Soc.* **38**, 2006.
- [Kleinerman] Kleinerman S.: »Some Computations in Support of Maeda's Conjecture«, http://www.wstein.org/edu/Fall2003/252/final_project/seth/252paper.pdf, 2004.
- [Knopp] Knopp M.: »Rational period functions of the modular group«, *Duke Math. J.* **45**, 1978.
- [Koblitz] Koblitz N.: »Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms«, Springer, New York Heidelberg Berlin, 1984.
- [Koch] Koch H.: »Zahlentheorie. Algebraische Zahlen und Funktionen«, *vieweg*, 1997.
- [Kohnen 1] Kohnen W.: »Modular Forms of Half-Integral Weight on $\Gamma_0(4)$ «, *Math. Ann.* **248**, 1980.
- [Kohnen 2] Kohnen W.: »Beziehungen zwischen Modulformen halbganzen Gewichts und Modulformen ganzen Gewichts«, *Dissertation, Bonn. Math. Schr.* **131**, 1981.
- [Kohnen 3] Kohnen W.: »Fourier Coefficients of Modular Forms of Half-Integral Weight«, *Math. Ann.* **271**, 1985.
- [Kohnen Zagier 1] Kohnen W., Zagier D.B.: »Values of L-series of Modular Forms at the Center of the Critical Strip«, *Invent. math.* **64**, 1981.
- [Kohnen Zagier 2] Kohnen W., Zagier D.B.: »Modular forms with rational periods«, In: »Modular forms«, ed. R.A.Rankin, *Ellis Horwood Limited Publishers*, Chichester, 1984.
- [Koike] Koike M.: »On some p -adic properties of the Eichler-Selberg trace formula«, *Nagoya Math. J.* **56**, 1976.
- [Kojima] Kojima H.: »Shimura correspondence of Maass wave forms of half integral weight«, *Acta arithmetica* **69**,4, 1995.
- [Krieg 1] Krieg A.: »Modular Forms on the Fricke Group«, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **65**, 1995.
- [Krieg 2] Krieg A.: »The Hecke algebras for the Fricke groups«, *Result. Math.* **34**, 1998.
- [Kubota] Kubota T.: »Elementary theory of Eisenstein series«, *Kodansha Ltd.*, Tokyo, 1973.
- [Kudla] Kudla S.: »Relations between automorphic forms produced by theta-functions« in »Modular Functions of one variable IV«, Lecture Notes in Mathematics No. **627**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1977.
- [Kudla Millson] Kudla S., Millson J.: »The Theta Correspondence and Harmonic Forms. I«, *Math. Ann.* **274**, 1986.
- [Landau] Landau E.: »Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen«, *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, Math.-phys. Kl., Heft 6. 1912.
- [Lang] Lang S.: »Introduction to Modular Forms«, Grundlehren der math. Wiss. Bd. 222, Springer, Berlin and New York, 1976.
- [Lawrence Zagier] Lawrence R., Zagier D.: »Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds«, *Asian J. Math.* **3** No. 1, 1999.
- [Lehmer] Lehmer D.H.: »The Vanishing of Ramanujan's Function $\tau(n)$ «, *Duke Math. J.* **14**, 1947.
- [Lehner] Lehner J.: »Discontinuous groups and automorphic functions«, *Math. surveys no.* **8**, AMS, 1964.
- [Lewis Zagier] Lewis J., Zagier D.: »Period functions for Maass waveforms I«, *Ann. Math.* **153**, 2001.
- [Li] Li W.: »Newforms and functional equations« *Math. Ann.* **212**, 1975.
- [Lieb Loss] Lieb E.H., Loss M.: »Analysis«, *Graduate studies in mathematics*, vol. **14**, American Mathematical Society, 1997.
- [Loeffler] Loeffler, D.: »Spectral Expansions of Overconvergent Modular Functions«, *International Mathematics Research Notices*, 2007.

- [Ly Ro] Lygeros, N., Rozier O.: »A New Solution to the Equation $\tau(p) \equiv 0 \pmod{p}$ «, *Journal of Integer Sequences* **13**, Article 10.7.4, 2010.
- [Maaß 1] Maaß H.: »Über eine neue Art von nichtanalytischen automorphen Funktionen und die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen«, *Math. Ann.* **121**, 1949.
- [Maaß 2] Maaß H.: »Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulformen«, *Math. Ann.* **125**, 1953.
- [Maaß 3] Maaß H.: »Über die räumliche Verteilung der Punkte in Gittern mit indefiniter Metrik«, *Math. Ann.* **138**, 1959.
- [Maaß 4] Maaß H.: »Lectures on modular functions of one complex variable«, *Tata Institute*, Bombay, 1964.
- [Maeda] Maeda Y.: »Table of characteristic polynomials for the Hecke operator $T(2)$ on $S_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$ «, *Hokkaido University Sapporo*, Japan, 1980.
- [Magnus Ober] Magnus W., Oberhettinger F.: »Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik«, *Springer*, Berlin, 1943.
- [Mani Rama] Manickam M., Ramakrishnan B.: »An Eichler-Zagier map for Jacobi forms of half-integral weight«, *Pacific Journal of Math.* **227**, 2006.
- [Manin 1] Manin J.: »Parabolic points and zeta functions of modular curves«, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. Mat. **36**, 1972.
- [Manin 2] Manin J.: »Periods of cusp forms, and p -adic Hecke series«, *Mat. Sb. (N.S.)* **92** (134), 1973.
- [Meijer] Meijer C.S.: »On the G-Function. I.-VIII.«, *Proc. Nederl. Akad. Wetensch.* **49**, 1946.
- [Messiah] Messiah A.: »Quantenmechanik, Band 1«, *de Gruyter*, Berlin, New York, 1976.
- [Miyake] Miyake T.: »Modular Forms«, *Springer*, Berlin Heidelberg NewYork, 1989.
- [Mollin] Mollin R.A.: »Fundamental Number Theory with Applications«, *Chapman & Hall/CRC*, 2008.
- [Naganuma] Naganuma H.: »On the coincidence of two Dirichlet series«, *Inventiones math.* **9**, 1969.
- [Narkiewicz] Narkiewicz W.: »Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers«, *Springer*, Berlin Heidelberg, 1990.
- [Neukirch] Neukirch J.: »Algebraische Zahlentheorie«, *Springer* Berlin, Heidelberg, 2007.
- [Neunhöffer] Neunhöffer H.: »Über die analytische Fortsetzung von Poincaréreihen«, *Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss.*, Math.-naturwiss. Kl., 1973.
- [Niebur] Niebur D.: »A class of nonanalytic automorphic functions«, *Nagoya Math. J.* **52**, 1973.
- [Niwa 1] Niwa S.: »Modular forms of half-integral weight and the integral of certain theta functions«, *Nagoya Math. J.* **56**, 1974.
- [Niwa 2] Niwa S.: »On Shimura's trace formula«, *Nagoya Math. J.* **66**, 1977.
- [Nörlund] Nörlund N.E.: »Differenzenrechnung«, *Chelsea Publ.Comp.*, New York, 1954.
- [Oda] Oda T.: »On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature $(2, n - 2)$ «, *Math. Ann.* **231**, 1977.
- [Ogg 1] Ogg A.: »Modular Forms and Dirichlet Series«, *W.A.Benjamin, Inc.* New York, 1969.
- [Ogg 2] Ogg A.: »On the Eigenvalues of Hecke Operators«, *Math. Annalen* **179**, 1969.
- [Ono 1] Ono K.: »Singular moduli generating functions for modular curves and surfaces«, *The Proceedings of the Gauss-Dirichlet Conference*, *Clay Mathematics Proceedings* **7**, AMS, 2007.
- [Ono 2] Ono K.: »A Mock Theta function for the Delta-function«, *Combinatorial Number Theory: Proceedings of the 2007 Integers Conference*, *de Gruyter*, Berlin, 2009.
- [Ono 3] Ono K.: »Unearthing the Visions of a Master: Harmonic Maass Forms and Number Theory« in: *Current Developments in Mathematics 2008*, Hrsg. D.Jerison, B.Mazur, T.Mrowka, W.Schmid, R.Stanley, S.-T.Yau, *International Press*, Somerville, Mass. 2009.
- [Pasol Popa] Pasol V., Popa A.A.: »Modular Forms and Period Polynomials«, *Proc. of the London Math. Soc.* **2**, 2013.
- [Paule Schorn] Paule P., Schorn M.: »A Mathematica Version of Zeilberger's Algorithm for Proving Binomial Coefficient Identities«, *J. Symbolic Comput.* **20**, 1995.
- [Petersson 1] Petersson H.: »Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art Poincaréscher Reihen«, *Math. Annalen* **103**, 1930.
- [Petersson 2] Petersson H.: »Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeller Dimension zur Modulgruppe«, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **12**, 1938.
- [PWZ] Petkovšek M., Wilf H.S., Zeilberger D.: »A=B«, *A K Peters Ltd*, Wellesley, 1996.
<http://www.cis.upenn.edu/~wilf/AeqB.html>
- [Postnikov] Postnikov A.G.: »Introduction to Analytic Number Theory«, *Am. Math. Soc.*, 1987.
- [Prasad] Prasad D.: »Weil Representation, Howe Duality, and the Theta correspondence«, *Tata Institute of Fundamental Research Colaba*, Bombay, India, 2004.
- [Rademacher] Rademacher H.: »Topics in Analytic Number Theory«, *Springer*, Berlin Heidelberg NewYork, 1973.
- [Ramanujan] Ramanujan S.: »The lost notebook and other unpublished papers«, *Narosa Publishing House*, New Delhi, 1987.
- [Rankin] Rankin R.A.: »Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions I., II.«, *Proc. Cam. Phil. Soc.* **35**, 1939.
- [Rallis 1] Rallis S.: »On a relation between SL_2 cusp forms and automorphic forms on orthogonal groups«, *Proc. Symp. Pure Math.* **XXXIII**, **1**, AMS, 1979.
- [Rallis 2] Rallis S.: »Langlands' functoriality and the Weil representation«, *Am. Journal of Math.* **104**, 1982.
- [Rallis Schiffmann] Rallis S., Schiffmann G.: »Automorphic forms constructed from the Weil representation: Holomorphic case«, *Am. Journal of Math.* **100**, No. 5, 1978.
- [Rallis Schiffmann 2] Rallis S., Schiffmann G.: »On a relation between SL_2 cusp forms and cusp forms on tube domains associated to orthogonal groups«, *Trans. AMS* **263**, 1981.

- [Ramsey] Ramsey N.: »Geometric and p-adic modular forms of half-integral weight«, *Ann. Inst. Fourier* **56**, no. 3, Grenoble, 2006.
- [Rhoades] Rhoades C.R.: »Linear relations among Poincaré series«, eprint arXiv:0810.2112, 2008.
- [Rhoa Wald] Rhoades R.C., Waldherr M.: »A Maass Lifting of Theta cubed and Class Numbers of Real and Imaginary Quadratic Fields«, *Mathematical Research Letters* **18** No. 5, 2011.
- [Ribet] Ribet K.: »Galois representations attached to eigenforms with nebentypus«, in „Modular Functions of one Variable V“, Lecture Notes in Mathematics No. **601**, Springer, 1977.
- [Richert] Richert H.-E.: »Ein Gitterpunktproblem«, *Mathematische Annalen* **125**, 1953.
- [Robert] Robert A.M.: »A Course in p-adic Analysis«, Graduate Texts in Math., vol. **198**, Springer, New York, 2000.
- [Robertson] Robertson J.: »Computing in Quadratic Orders«, <http://www.jpr2718.org/quad.pdf>, 2009.
- [Roelcke 1] Roelcke W.: »Über die Wellengleichung bei Grenzkreisgruppen erster Art«, *Sitzungsber. d. Heidelberger Ak. d. Wiss., Math.-naturwiss. Kl.*, 1955.
- [Roelcke 2] Roelcke W.: »Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene I/II«, *Math. Annalen*, **167/168**, 1966/1967.
- [Sage] Stein, W.: »Sage: Open Source Mathematical Software (Version 3.1.4)«, *The Sage Group*, 2008, <http://www.sagemath.org>
- [Sarnak 1] Sarnak P.: »Class numbers of indefinite binary quadratic forms«, *J. Number Theory* **15**, 1982.
- [Sarnak 2] Sarnak P.: »Additive number theory and Maassforms«, In: Chudnovsky D.V., Chudnovsky G.V., Cohn H., Nathanson M.B. (eds.): *Number Theory Proceedings*, New York 1982, Lecture Notes in Mathematics No. **1052**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982.
- [Sarnak 3] Sarnak P.: »Letter to J. Davis About Reciprocal Geodesics«, June, 2005.
- [Schwartz] Schwartz L.: »Théorie des distributions«, *Hermann*, Paris, 1950/1951.
- [Selberg 1] Selberg A.: »Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series«, *J. Indian Math. Soc.* **20**, 1956.
- [Selberg 2] Selberg A.: »On the estimation of Fourier coefficients of modular forms«, *Proc. Symp. Pure Math.* **VIII**, AMS, 1965.
- [Serre 1] Serre J-P.: »Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques«, in »Modular Functions of one variable III«, Lecture Notes in Mathematics No. **350**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [Serre 2] Serre J-P.: »Divisibilité des coefficients des formes modulaires de poids entier«, *C.R.Acad.Sci.(Paris)*, Sér A **279**, 1974.
- [Serre 3] Serre J-P.: »Local Fields«, *Graduate Texts in Math.* vol. **67**, Springer, New York, 1980.
- [She Tre Wall] Shemanske T., Treener S., Walling L.: »Constructing simultaneous Hecke Eigenforms«, *Int. J. Number Theory* **06**, 2010.
- [Shimura 1] Shimura G.: »Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions«, Princeton University Press 1971.
- [Shimura 2] Shimura G.: »On modular forms of half-integral weight«, *Ann. Math.*, II Ser. **97**, 1973.
- [Shimura 3] Shimura G.: »On the Holomorphy of certain Dirichlet Series«, *Proc. London Math. Soc.* **31**, 1975.
- [Shintani] Shintani T.: »On construction of holomorphic cusp forms of half-integral weight«, *Nagoya Math. J.* **58**, 1975.
- [Siegel 1] Siegel C.L.: »Über die analytische Theorie der quadratischen Formen«, *Annals of Math.* **36**, 1935.
- [Siegel 2] Siegel C.L.: »Über die analytische Theorie der quadratischen Formen II«, *Annals of Math.* **37**, 1936.
- [Siegel 3] Siegel C.L.: »Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I.«, *Mathematische Annalen* **124**, 1951.
- [Siegel 4] Siegel C.L.: »Quadratische Formen«, *Vorlesungsmanuskript* SS 1955, Göttingen.
- [Siegel 5] Siegel C.L.: »Lectures on Quadratic Forms«, notes by K.G.Ramanathan, *Tata Institute*, Bombay, 1955-56.
- [Siegel 6] Siegel C.L.: »Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen«, *Math. Zeitschrift* **63**, 1956.
- [Siegel 7] Siegel C.L.: »Lectures on advanced analytic number theory«, *Tata Institute*, Bombay, 1961.
- [Skoruppa] Skoruppa N.-P.: »Developments in the Theory of Jacobi Forms«, in *Automorphic functions and Applications*, Khabarovsk, Acad. Sci. USSR, Inst. Appl. Math., 1990.
- [Sofer] Sofer A.: »p-adic interpolation of half-integral weight modular forms«, *Contemp. Math.* **174**, 1994.
- [Spiwak] Spiwak M.: »Calculus«, *Publish or Perish Inc.*, Berkeley, 1967.
- [Stein] Stein W.A.: »Modular Forms, A Computational Approach«, *AMS*, 2007.
- [Sturm 1] Sturm J.: »Special values of zeta functions, and Eisenstein series of half integral weight«, *Amer. J. Math.* **102**, 1980.
- [Sturm 2] Sturm J.: »On the congruence of modular forms«, in »Number Theory«, Lecture Notes in Mathematics No. **1240**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1987.
- [Swinnerton-Dyer] Swinnerton-Dyer P.: »on l-adic representations and congruences for coefficients of modular forms«, in »Modular Functions of one variable III«, Lecture Notes in Mathematics No. **350**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1973.
- [Tanigawa] Tanigawa Y.: »Modular descent of Siegel modular forms of half integral weight and an analogy of the Maass relation«, *Nagoya Math.J.* **102**, 1986.
- [Temple] Temple G.: »The Structure of Lebesgue Integration Theory«, *At the Clarendon Press*, Oxford, 1971.
- [Titchmarsh 1] Titchmarsh E.C.: »The Zeta-Function of Riemann«, *Cambridge*, 1930.
- [Titchmarsh 2] Titchmarsh E.C.: »On van der Corput's method and the Zeta-function of Riemann«, *Quarterly Journal of Math.*, Vol. **2**, 1931.
- [Titchmarsh 3] Titchmarsh E.C.: »The Theory of Functions«, *Oxford University Press*, Oxford, 1932.
- [Voronoi 1] Voronoi G.F.: »Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques«, *J. reine angew. Math.* **126**, 1903.
- [Voronoi 2] Voronoi G.F.: »Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries«, *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup.* **21**(3) 1904.
- [Waldspurger] Waldspurger J.L.: »Correspondence de Shimura«, *J. Math. Pures et Appl.* **59**, 1980.

- [Walfisz] Walfisz A.: »Über die summatorische Funktion einiger Dirichletscher Reihen«, Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1922.
- [Weil] Weil A.: »Sur certain groupes d'opérateurs unitaires«, *Acta Math.* **111**, 1964.
- [Wilton 1] Wilton J.R.: »On Dirichlet's Divisor Problem«, *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford)* **2**, 1931.
- [Wilton 2] Wilton J.R.: »Voronoi's summation formula«, *Quarterly Journal of Mathematics (Oxford)* **3**, 1932.
- [Yokoi] Yokoi K.: »A certain relation between Jacobi forms of half integral weight and Siegel modular forms of integral weight«, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **71**, 2001.
- [Zagier 1] Zagier D.: »Modular forms associated to real quadratic fields«, *Invent. Math.* **30**, 1975.
- [Zagier 2] Zagier D.: »Nombres de classes et formes modulaires de poids $\frac{3}{2}$ «, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A B* **281**, 1975.
- [Zagier 3] Zagier D.: »A Kronecker Limit Formula for Real Quadratic Fields«, *Math. Ann.* **213**, 1975.
- [Zagier 4] Zagier D.: »On the values at negative integers of the zeta-function of a real quadratic field«, *Enseig. Math.* **22**, 1976.
- [Zagier 5] Zagier D.: »Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic forms« in »Modular Functions of one variable IV«, Lecture Notes in Mathematics No. **627**, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1977.
- [Zagier 6] Zagier D.: »Eisenstein series and the Riemann zeta-function« aus »Automorphic Forms, Representation Theory and Arithmetic«, *Tata Institute*, Bombay, 1979.
- [Zagier 7] Zagier D.: »Zetafunktionen und quadratische Körper«, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1981.
- [Zagier 8] Zagier D.: »The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay«, *J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo Sect. IA.* **28**, 1981.
- [Zagier 9] Zagier D.: »Periods of modular forms and Jacobi theta functions«, *Invent. Math.* **104**, 1991.
- [Zagier 10] Zagier D.: »Introduction to modular forms« aus »From Number Theory to Physics«, Lectures held at the Centre de Physique Les Houches, France, 1989, Hrsg. M. Waldschmidt, P. Moussa, Springer, Berlin, 1992.
- [Zagier 11] Zagier D.: »Vassiliev invariants and a strange identity related to the Dedekind eta-function«, *Topology* **40**, 2001.
- [Zagier 12] Zagier D.: »Formes modulaires et opérateurs différentiels (suite)«, *résumés des cours*, Collège de France, 2001/2.
- [Zagier 13] Zagier D.: »Traces of Singular Moduli«, in: »Motives, Polylogarithms and Hodge Theory (Part I)«, Eds.: F. Bogomolov, L. Katzarkov, *International Press*, Somerville, 2002.
- [Zagier 14] Zagier D.: »Half-derivatives of modular forms and invariants of 3-manifolds«, *MPI-preprint*, 1999.
- [Zagier 15] Zagier D.: »Ramanujan's Mock Theta functions and their Applications (d'après Zwegers and Bringmann-Ono)«, *Seminaire Bourbaki* no. 986, 2006-2007.
- [Zeidler] Zeidler E.: »Quantum Field Theory I: Basics in Mathematics and Physics«, Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Zuckerman] Zuckerman H.S.: »On the coefficients of certain modular forms belonging to subgroups of the modular group«, *Trans. AMS* **45**, 1939.
- [Zwegers 1] Zwegers S.: »Mock Theta Functions«, Dissertation, Utrecht, 2002.
- [Zwegers 2] Zwegers S.: »Mock ϑ -Functions and Real Analytic Modular Forms«, *Contemporary Math.* **291**, 2001.

Index

- Äquivalenzklasse, 15, 25, 29, 35, 37, 53, 67, 284, 286
- Adel, 133–135
- antiholomorph, 61, 62
- automorphe Form, 3, 4, 17–19, 21, 29, 46, 55, 56, 59–62, 64, 65, 69, 72–74, 76–78, 83, 86, 89, 144, 145, 280, 281, 288–296
- Automorphismengruppe, 14, 24, 67, 283
- beschränkte Nenner, 120–123, 126, 170, 171, 173, 235
- beschränkte Schwankung, 4, 163, 287
- Besselfunktion, 7, 56, 149, 150, 162, 163, 284, 288
- Bogenlänge, 2, 3, 15, 16, 24, 26, 27, 29, 31, 33, 52, 161, 167, 281
- Bol's Identität, 215, 289
- charakteristisches Polynom, 7, 115, 141, 234, 294
- CM-Punkte, 21, 60, 61, 65, 68, 77, 280, 290, 291
- Determinante, 289
- Dirichlet
- ~ reihe, 72
 - ~ reihe, 3, 4, 7, 50, 56, 99, 100, 158, 162, 182, 201, 289, 292–295
 - ~ sche L-reihe, 161, 194, 261, 264, 291, 292
 - ~ scher Charakter, 281
 - ~ sches Schubfachprinzip, 34
 - ~ sches Teilerproblem, 162, 163, 168, 169, 295
- Diskriminante, 2, 3, 7, 10, 19, 33–35, 37, 50, 52, 54, 55, 67, 71, 110, 140, 157, 158, 162, 180, 281, 283, 285, 286
- Fundamental ~, 26, 49, 52, 71–73, 84, 86, 87, 90, 162, 163
- Distribution, 4, 7, 14, 15, 22, 28, 40, 144, 148, 167–169, 281
- Diracsche δ -~, 3, 7, 67, 148
- Kern ~, 3, 4, 10, 17, 18, 21, 24, 28, 38
- Eichler-Integral, 6, 92–94, 101, 106, 107, 110, 193, 194, 209, 288
- Eigenfunktion, 55, 59, 61, 62, 64, 73, 83, 87, 106, 146, 183, 193, 203, 217, 292
- Eigenwert, 42, 47, 54, 56, 62, 68, 69, 71, 73, 75, 78, 83, 84, 89, 93, 114–116, 139, 144, 172, 183, 189, 226, 290, 295
- Einheit, 31, 32, 34, 52, 53
- ~ engruppe, 4, 24, 31, 34, 50, 52, 54, 58
 - ~ skreis, 24
 - Grund ~, 36, 282
- Eisensteinreihe, 3, 30, 34–36, 38, 39, 42–44, 46, 48, 65, 77, 83, 89, 90, 92, 93, 178–181, 184, 193, 219, 290, 291, 293, 295, 296
- elementarsymmetrisch, 139, 174
- Exponentialsumme, 145, 162, 169, 292
- Fortsetzung
- analytische ~, 3, 36, 41–46, 48, 56, 99, 145, 146, 178, 181–183, 253, 254, 287, 294
- Fourier
- ~ reihe, 65
 - ~ -Stieltjes Reihe, 3, 4, 14, 15, 19, 167
 - ~ koeffizient, 2–4, 15, 17, 20, 25, 27, 33, 36, 41, 48, 55, 56, 61, 62, 64, 65, 68, 71–73, 76, 83–87, 89, 90, 99, 145, 167, 169, 179, 182, 183, 280, 292, 293, 295, 296
 - ~ reihe, 3, 15, 33, 52, 55, 61, 62, 65, 76, 77, 85, 89, 93, 147, 178, 181–184, 219, 253, 291
- Fundamental
- ~ bereich, 29
 - ~ bereich, 3, 24, 27, 31, 34, 53, 54, 58, 145, 193, 197, 253, 283
 - Standard ~ bereich, 2, 3, 7, 18, 24, 26, 55, 77, 283
- Funktion
- erzeugende ~, 29, 58
 - erzeugende ~, 5, 74, 214
- Funktional, 148
- ~ gleichung, 29
 - ~ gleichung, 4, 43, 44, 48, 50, 89, 96, 99, 100, 156, 162, 181–183, 191, 290, 293, 295
- G-Funktion, 153, 168, 294
- Galois
- ~ -darstellung, 115, 292, 294
 - ~ -erweiterung, 117, 118, 142
 - ~ -gruppe, 117
 - ~ -konjugiert, 117, 118, 121, 129, 130, 132, 277
 - ~ -theorie, 291
- ganzalgebraisch, 9, 119–124, 126, 129, 130, 133–135, 140–142, 172, 174, 177, 228, 229, 234, 276, 277
- Geodätische, 2, 3, 7, 9–11, 15, 17–21, 23, 25, 29, 31, 33–37, 50, 52–55, 58, 60, 66, 67, 158, 161, 167, 253, 256, 280, 281, 284, 285, 293
- Gibbs-Phänomen, 167
- Größencharakter, 31–35, 50, 51, 54
- Grundzahl, 52, 53, 161, 281, 284
- halbganz, 2, 4, 69, 89, 95, 99, 103, 145, 180, 187, 189, 190, 193, 194, 201, 209–211, 216, 217, 262, 264, 291–295
- halbstetig, 148
- Hauptmodul, 171, 174, 227
- Hauptteil, 5, 85, 87, 96, 113, 119, 120, 123, 124, 129, 134, 170, 175, 177, 192, 193, 197, 203, 209, 210, 224, 285
- Hecke, 4, 31, 32, 50, 52, 87, 289, 290, 292
- ~ -defekt, 9, 118, 120, 122, 123, 125–127, 130, 132–134, 232, 234–236, 245, 277
 - ~ -Eigenform, 7, 72, 75, 87, 113, 116, 125, 140, 173, 194, 294
 - schwache ~~, 118–132, 134, 139, 228, 232, 235, 245, 277
 - ~ -Multiplikativität, 69, 120, 232
 - ~ -normalisiert, 71, 72, 84, 86, 87
 - ~ -polynom, 113, 115, 130, 131, 174, 291
 - ~ operator, 7, 69–71, 73, 83, 87, 141, 222, 287, 289, 290, 292, 294
 - ~ sche Integralformel, 3, 4, 31, 33, 38, 52
- hyperbolische Geometrie, 2, 3, 6, 18, 27, 29, 31, 33, 53, 92, 94, 289, 291, 295

- hypergeometrische Funktion, 37, 151, 152, 283
- Idealklasse, 33, 37, 50–52
- Integral
 ~ kern, 81
 Stokesscher ~ satz, 29
- Integration
 ~ stheorie, 292, 295
 Partielle ~, 165
- Involution
 Atkin-Lehner- ~, 185, 276, 287, 290
 Fricke- ~, 112
- Jacobiform, 111, 135–137
- Körper, 50, 295
 Henselscher ~, 142
 quadratischer ~, 292, 296
 reell-quadratischer ~, 34
 reell-quadratischer ~, 3, 4, 50, 52, 162, 295, 296
 total reeller ~, 292
 Zahl- ~, 141, 142
 Zerfallungs- ~, 234
 Zwischen- ~, 143
- Kernfunktion, 4, 19, 23, 24, 27, 29, 59, 61, 65, 68, 69, 77, 79, 82, 87, 89
- Klassenzahl, 32, 256, 264, 284, 290, 292, 295
- Kloostersumme, 108, 182, 197, 199–202, 204, 209, 226, 262, 264, 271
- Kohnen-Plus-Raum, 73, 87, 106, 107, 109, 180, 181, 189, 193, 194, 210, 211, 261, 282, 284–286
- Kongruenz
 ~ -untergruppe, 6, 54, 92, 93, 95, 98, 183, 192, 197
 Kaneko- ~, 124, 128
 Ramanujan- ~, 111
 Ramanujan- ~, 115, 116, 120, 124, 135, 136, 226, 232
- konjugiert, 47, 59, 76, 77, 107, 180–182, 187, 220
- Konvergenz, 12, 16, 42, 46, 55, 60, 78, 79, 81, 85, 89, 147, 167–169, 253
 ~ gleichmäßige, 32
 ~ gleichmäßige, 12, 42, 46, 58, 89, 92, 147, 148, 182, 183
 ~ satz von Lebesgue, 164
- Korrespondenz, 4, 5, 29, 53, 55, 61, 70–73, 76–79, 81, 83, 84, 87, 89, 90
 Kudla-Millson ~, 290
 Langlands ~, 289
 Maaß-Shimura ~, 58, 65, 74, 84, 86, 87
 Niwa ~, 73, 86
 Shimura ~, 71, 73, 74, 83, 84, 86, 87, 291, 295
 Shintani ~, 29
 Shintani ~, 56, 66, 74, 76
 Theta ~, 58, 78, 293, 294
- Kroneckersche Grenzformel, 292, 295
- Kurvenintegral, 29
- L-Funktion, 71, 99, 100, 161, 183, 191, 256, 290–292
- Lindelöf-Hypothese, 161
- Möbiussche Umkehrformeln, 75, 86, 157, 223, 224
- Maaß
 ~ form, 29, 74, 282
 harmonische schwache ~ form, 76, 92, 285, 288
- Maaß, 4, 69, 293, 294
 ~ ableitung, 216, 220
 ~ form, 4, 17, 18, 33, 42, 46, 47, 50, 52–56, 60, 61, 65, 69–71, 73, 74, 87, 93, 146–148, 178, 179, 181, 183, 192, 217, 288, 289, 291, 293–295
 ~ operator, 47, 61–64, 73, 76–79, 86, 87, 90, 152, 178, 181–183, 217, 282
- harmonische schwache ~ form, 5, 6, 61, 62, 78, 85, 87, 89, 92, 93, 106, 107, 109, 119, 179, 183, 184, 190, 192, 193, 195, 206, 207, 211, 215, 216, 218, 224, 289, 290, 292
- Hecke - ~ form, 71–73, 83, 84, 87, 90
- Majoranten
 ~ einer Form, 31, 52, 55, 58, 60
 ~ kriterium, 147
 ~ raum, 31, 50, 52, 53, 55, 58
 konvergente ~, 12, 46, 164
- Manin-Relation, 98, 99
- Mellin
 ~ transformation, 29
 ~ Inversion, 51
 ~ transformation, 41, 50, 51, 53
- metaplektisch, 69, 89, 95, 97, 98, 180
- Mock
 ~ -Modulform, 111
 ~ -Thetafunktion, 92
 ~ -Korrespondenz, 5, 92
 ~ -Modulform, 5–7, 9, 92, 106, 107, 109, 110, 124, 129, 130, 132, 134–136, 170, 183, 188, 193, 194, 224, 226, 228, 229, 234, 255, 276, 285, 286, 289, 292
 ~ -Thetafunktion, 106, 129, 289, 296
- Modul
 ~ form, 29
 nicht-holomorphe ~~, 76, 92
 schwach-holomorphe ~~, 58, 92, 111
 ~ ares Gitter, 176
 ~ form, 2–4, 18, 58, 61, 62, 69, 71–74, 92–94, 98, 102, 106, 107, 113, 125, 129, 134, 145, 180, 185, 187, 189, 192, 193, 207, 209–211, 216, 217, 219, 221, 224, 285–288, 290–296
 CM- ~~, 112, 125, 128, 226
 nicht-holomorphe ~~, 85, 87, 106, 107, 109, 179, 183, 184, 192, 193, 195, 206, 207, 211, 216, 224, 285, 286
 overkonvergente ~~, 8, 113, 125, 136, 137, 226–229, 232, 234, 236, 239, 290, 293
 p-adische ~~, 290, 291
 schwach-holomorphe ~~, 5–9, 77–79, 81, 84–87, 92, 95, 97, 99, 102, 103, 106, 107, 112, 116, 118, 119, 121, 122, 124, 125, 128, 129, 136, 170, 171, 173–177, 183, 193, 195, 197, 204, 205, 210, 216, 224, 226, 228, 229, 233, 234, 236, 240, 242, 254, 276, 285, 291
 vektorwertige ~~, 95–97, 99, 108, 109, 180, 285
 ~ funktion, 289–291, 293–296
 ~ gruppe, 35, 65, 99, 178, 222, 283
- Newton
 ~ -steigung, 133
 ~ -Girard Formel, 139
 ~ -Polygon, 113, 141, 142
 ~ -steigung, 116, 141, 144, 174
- nicht-holomorph, 3, 5, 29, 35, 42, 43, 46, 56, 61, 68, 69, 76, 77, 106–108, 110, 145, 180, 184, 187, 188, 192–196, 198, 203, 207, 209, 212, 213, 217, 221, 291, 293
- p-adisch, 114, 125, 289–292, 294, 295
- p-Ordnung, 113, 118, 125
- p-Teil, 8, 113, 115, 118, 123, 124, 128, 136, 172–175, 228, 233, 234, 240, 242
- Perioden, 18, 29, 99, 292–294, 296
 ~ funktion, 6, 93, 97, 98, 101, 290, 291, 293
 ~ integral, 3, 4, 69
 ~ polynom, 93
- Perron-Formel, 159
- Phragmén-Lindelöf, 159
- Poincaré
 ~ halbebene, 29
 ~ reihe, 92, 214

- ~ halbebene, 2–4, 16, 18, 22, 24, 27, 31, 50, 52, 55, 58, 61, 145, 284, 295
- ~ kreismodell, 22, 281
- ~ reihe, 13, 41, 42, 46, 108, 110, 129, 145, 192, 193, 195–199, 203, 207–209, 212, 214, 225, 261, 262, 264, 271, 291, 294
- Primideal, 141–143, 234
 - ~ -zerlegung, 142, 143
- quadrat
 - ~ ische Form, 29
 - ~ integrierbar, 42, 46, 73
 - ~ ische Form, 2, 3, 10, 14, 20, 24, 31–35, 37, 52, 53, 55, 58, 60, 67, 95, 109, 157, 180, 256, 281, 284, 286, 290, 295, 296
 - ~ ischer Modul, 180, 182
 - ~ ischer Raum, 95, 180
 - reell- ~ isch, 4, 292
- Randverhalten, 6, 92–94, 101, 107, 289
- Rankin-Selberg Methode, 3, 4, 28, 38, 39, 45, 48, 52, 85, 144, 296
- reell-analytisch, 42, 94, 101, 145, 147, 215
- Regularisierung, 38, 45, 48, 89, 99, 248, 253, 254, 286
 - ~ Borchers', 5, 90, 253
- Schwartzfunktion, 3, 78
- Signatur, 55, 180, 182, 290, 294
- Skalarprodukt, 3, 24, 29
- Skalierungsmatrix, 197, 287
- Spektral
 - ~ parameter, 42, 55, 56, 61, 65, 76, 78, 86, 89, 148, 178, 180, 285
 - ~ zerlegung, 42, 47, 89, 289, 291, 292
- Spur, 290, 292, 294, 296
- Summation
 - Abel ~, 26, 140, 287
 - Poisson ~, 59, 82
 - Voronoi ~, 4, 162, 163, 167, 168, 295
- Summenformel, 3, 166, 168, 169, 295
- Teilbarkeit, 7, 113, 116, 125, 129, 162, 163, 168, 169, 172, 292, 295
- Theta
 - ~ reihen, 29
 - ~ funktion, 55, 58–60, 77, 293, 294, 296
 - ~ kern, 4, 78, 89
 - ~ lift, 55, 65, 68, 73, 290, 291
 - ~ multiplikator, 59
 - ~ reihen, 4, 31, 49, 50, 52, 54, 55, 292
- total positiv, 32, 34–36, 50, 54
- Vandermondesche Determinanten, 172
- Verteilung, 3, 7, 16, 17, 26, 55, 167, 291–293
- Voronoi-formel, 4, 162, 163, 167, 168, 295
 - trankierte ~, 162, 163, 167
- Weil-Darstellung, 95, 108, 180, 181, 291, 294
- Zagier-Lift, 58, 75, 85–87
- Zetafunktion, 29, 31, 34, 50, 53, 156, 191, 291, 292, 294–296
 - Riemannsche ~, 56, 146, 178, 181, 286, 292, 293, 295, 296
- Zykel
 - Geodätischen ~, 19
 - Horo ~, 2
 - Hyper ~, 3, 23, 24, 26, 27, 38, 281, 284
 - Zyklusintegral, 3, 4, 17–19, 29, 33–35, 38, 48, 50, 53–56, 64, 68, 76, 77, 253, 293