

# **Quantensimulation von relativistischen Effekten mit ultrakalten Atomen in variablen optischen Gitterpotentialen**

Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)  
der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von  
**Martin Leder**  
aus  
Köln

Bonn, Mai 2016

Angefertigt mit Genehmigung der  
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der  
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Martin Weitz  
2. Gutachter: Prof. Dr. Michael Köhl

Tag der Promotion: 21.07.2016  
Erscheinungsjahr: 2016

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn  
[http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss\\_online](http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online) elektronisch publiziert.

---

# Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit werden ultrakalte Rubidiumatome ( $^{87}\text{Rb}$ ) in variablen eindimensionalen Gitterpotentialen untersucht, was die Realisierung einer Veselago-Linse für Materiewellen sowie die direkte Beobachtung topologisch geschützter Randzustände erlaubt. Ausgehend vom Bloch-Ansatz lässt sich die Dynamik der Atome durch das Bändermodell beschreiben, und die Dispersionsrelation der Atome kann so eingestellt werden, dass diese sich wie relativistische Teilchen verhalten. In der Nähe der zweiten Bandkante folgt die Bewegung der Atome der 1+1D-Dirac-Gleichung, mit einer effektiven Masse und einer effektiven Lichtgeschwindigkeit, die für die Atome viele Größenordnungen kleiner als die reale Lichtgeschwindigkeit der Photonen ist. Dadurch lassen sich in diesem System relativistische Effekte untersuchen, die in anderen physikalischen Systemen schwer zu realisieren sind. Ein Beispiel hierfür ist negative Brechung, die an Grenzflächen zwischen Medien mit positivem und negativem Brechungsindex auftritt und mit der Abbildungen unterhalb des Beugungslimits möglich sein sollen. Im vorliegenden Experiment wird negative Brechung für ein Wellenpaket aus Atomen mit Hilfe eines Raman-Pulses erreicht, der die Atome im optischen Gitter zwischen verschiedenen Blochbändern transferiert. Hierdurch ist es möglich, das atomare Wellenpaket in Analogie zu einer Veselago-Linse für Licht auf ihre ursprüngliche Größe abzubilden, wenn das Gitterpotential so eingestellt ist, dass die effektive Masse der Atome verschwindet.

Des Weiteren werden in dieser Arbeit optische Vier-Photonen-Gitterpotentiale genutzt, um für Atome im magnetischen Gradientenfeld eine räumlich variierende effektive Masse zu realisieren. Im Speziellen lassen sich optische Gitter erzeugen, bei denen das Vorzeichen der effektiven Masse räumlich wechselt, so dass am Ort, an dem die effektive Masse verschwindet, lokalisierte Randzustände auftreten. Der Randzustand, der energetisch auf dem Kreuzungspunkt des ersten und zweiten Blochbandes liegt, wird durch eine Superposition der freien Zustände beschrieben und kann im Experiment mittels Bragg-Pulsen besetzt werden. Mittels eines optischen Mikroskops kann der Randzustand direkt räumlich aufgelöst werden. Die Ladedynamik der Atome in diesen Randzustand wird in Abhängigkeit der Phase der Superposition untersucht und daraus die für das System charakteristische Frequenz ermittelt. Zuletzt

wird durch Variation der Impulsbreite der Atome die Ladeeffizienz in den Randzustand bestimmt.

## **Publikationsliste**

### **Veselago lensing with ultracold atoms in an optical lattice**

M. Leder, C. Grossert und M. Weitz

Nat. Commun. **5**, 3327 (2014)

### **Phase dependent loading of Bloch bands and quantum simulation of relativistic wave equation predictions with ultracold atoms in variably shaped optical lattice potentials**

C. Grossert, M. Leder und M. Weitz

Im Druck bei Journal of Modern Optics (arXiv:1510.09050)

### **Experimental control of transport resonances in a coherent quantum rocking ratchet**

C. Grossert, M. Leder, S. Denisov, P. Hänggi und M. Weitz

Nat. Commun. **7**, 10440 (2016)

### **Real space imaging of a topological protected edge state with ultracold atoms in an amplitude-chirped optical lattice**

M. Leder, C. Grossert, L. Sitta, M. Genske, A. Rosch und M. Weitz

Eingereicht zur Veröffentlichung (arXiv:1604.02060)

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Ultrakalte atomare Bose-Gase in optischen und magnetischen Potentialen</b>	<b>5</b>
2.1	Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation . . . . .	5
2.2	Erzeugung atomarer Bose-Einstein-Kondensate . . . . .	11
2.3	Ultrakalte Atome in optischen Gitterpotentialen . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Quantensimulation der Dirac-Gleichung mit ultrakalten Atomen</b>	<b>29</b>
3.1	Eindimensionale spinlose Dirac-Gleichung . . . . .	30
3.2	Effektive Dirac-Gleichung im optischen Gitter . . . . .	31
3.3	Negative Brechung für atomare Wellenpakete . . . . .	38
3.4	Randzustände in variablen optischen Gitterpotentialen . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Experimenteller Aufbau</b>	<b>47</b>
4.1	Übersicht über den Ablauf des Experiments . . . . .	47
4.2	Vakuumsystem und Magnetfelder . . . . .	49
4.3	Lasersystem für die magneto-optische Falle . . . . .	54
4.4	Fernverstimmte optische Dipolfalle . . . . .	57
4.5	Eindimensionales optisches Gitter . . . . .	60
4.6	Abbildungssystem . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>67</b>
5.1	Phasenabhängiges Laden in Bloch-Zustände . . . . .	71
5.2	Veselago-Linse für atomare Wellenpakete . . . . .	77
5.3	Topologisch gebundener Zustand . . . . .	82
<b>6</b>	<b>Ausblick</b>	<b>89</b>
<b>A</b>	<b>Termschema Rubidium <sup>87</sup>Rb</b>	<b>91</b>
<b>B</b>	<b>Numerische Simulationen</b>	<b>93</b>



---

## Einleitung

---

In der Quantenmechanik beschreibt die Dirac-Gleichung die Dynamik von relativistischen Teilchen, also Teilchen mit einer hohen kinetischen Energie im Vergleich zu ihrer Ruhemasse [1]. Durch diese Gleichung lässt sich zum Beispiel die Lamb-Verschiebung im atomaren Termschema [2], und Teilchen-Antiteilchen-Effekte erklären, wie das Klein-Tunneln oder die Zitterbewegung [3, 4]. Einige solche Phänomene sind in der Natur schwer experimentell zu beobachten. Um beispielsweise relativistisches quantenmechanisches Tunneln von freien Elektronen zu beobachten wären elektrische Feldstärken  $> 10^{16}$  V/cm notwendig [5], da sich das Potential innerhalb der Compton-Wellenlänge  $\hbar/m_e c$  um die Ruhemasse der Elektronen  $m_e c^2$  ändern müsste. Um solche Effekte dennoch untersuchen zu können wurden in den letzten Jahren physikalische Systeme benutzt, bei denen die Bewegung der zu untersuchenden Teilchen der Dirac-Gleichung folgt, allerdings mit einer effektiven Masse und einer Lichtgeschwindigkeit, die typischerweise viele Größenordnungen unterhalb der von realen Teilchen liegt [6]. Hierdurch sind in solchen Systemen viel geringere Energien notwendig, um eine Beschleunigung auf quasirelativistische Geschwindigkeit zu erreichen. Die Idee einer solchen Quantensimulation, bei der ein schwer zugängliches quantenmechanisches System durch ein einfacher zugängliches System nachgeahmt wird, geht auf R. Feynman zurück [7]. Bekannte Beispiele von Systemen mit denen Quanteneffekte simuliert werden können sind neben ultrakalten Atomen in optischen Gitterpotentialen [8, 9] auch gefangene Ionen in Paul-Fallen [10, 11] oder Elektronen in Graphen [5, 12].

Ultrakalte Atome in optischen Gitterpotentialen, kurz optische Gitter, sind ein ideales System um Effekte auch aus anderen Bereichen zu untersuchen, da die Gitterpotentiale variabel und kontrollierbar sind. Insbesondere Effekte aus der Festkörperphysik lassen sich mit diesem System gut simulieren, wobei hier die Atome die Rolle der Elektronen im Festkörper einnehmen. Bereits ein Jahr nach der ersten Realisie-

rung eines atomaren Bose-Einstein-Kondensats [13, 14] wurden Bloch-Oszillationen mit kalten Atomen in optischen Gittern beobachtet [15]. Weitere Beispiele sind der Phasenübergang von einem Superfluid zu einem Mott-Isolator [16] oder die Erzeugung künstlicher Magnetfelder zur Untersuchung des Quanten-Hall Effekts [17]. Relativistische Effekte lassen sich mit Atomen im optischen Gitter untersuchen, indem ein sogenannter Dirac-Punkt realisiert wird, einem Punkt in der Dispersionsrelation, in dem sich zwei Bänder linear kreuzen [18, 19]. In der vorliegenden Arbeit werden quasirelativistische Atome im eindimensionalen optischen Gitter untersucht, wobei sich die Arbeit thematisch in zwei Hauptthemen aufteilen lässt.

Als erstes Hauptthema wird negative Brechung für ein atomares Wellenpaket untersucht. Ganz allgemein tritt negative Brechung für elektromagnetische Wellen an Grenzflächen zwischen Medien mit positivem und negativem Brechungsindex auf. V. G. Veselago konnte zeigen, dass Materialien mit negativer Permittivität und Permeabilität auch einen negativen Brechungsindex besitzen, also eine negative Antwort sowohl auf das äußere elektrische, als auch auf das magnetische Feld geben [20]. Mit Hilfe eines Materials mit negativem Brechungsindex lässt sich eine Linse konstruieren, die sogenannte Veselago-Linse, mit der Objekte grundsätzlich unterhalb des Beugungslimits abgebildet werden können [21]. Da allerdings in der Natur solche Materialien nicht vorkommen, werden heutzutage künstliche Materialien entwickelt, sogenannte Metamaterialien, die für bestimmte Wellenlängen einen negativen Brechungsindex besitzen [22] und mit denen auch eine erste Realisierung einer Veselago-Linse für elektromagnetische Wellen im infraroten Frequenzbereich gelang. Auch gibt es Vorschläge für die Realisierung einer Veselago-Linse für Materiewellen, z.B. mit quasirelativistischen Elektronen in Graphen [23] oder für kalte Atome in Dunkelzustands-Materialien [24]. In der vorliegenden Arbeit verhalten sich die Atome im optischen Gitter aufgrund der linearen Dispersionsrelation wie masselose Teilchen bzw. Photonen. Hierdurch ist es möglich, den Energiebändern einen Brechungsindex zuzuordnen. Mittels Lichtpulsen können die Atome zwischen den Bändern transferiert werden, so dass sie von einem Band mit positivem Brechungsindex zu einem mit negativem Brechungsindex wechseln können, wodurch die Atome negative Brechung erfahren. In Analogie zu einer Veselago-Linse für elektromagnetische Wellen lässt sich so das atomare Wellenpaket abbilden.

Im zweiten Hauptthema dieser Arbeit wird ein optisches Gitter mit zwei Bereichen unterschiedlicher topologischer Phase realisiert und untersucht. An der Grenze zwischen diesen Bereichen existieren topologisch geschützte Randzustände, wie sie auch an Grenzflächen zwischen topologischen und gewöhnlichen Isolatoren auftreten [25]. Bei Festkörpern ist die Leitfähigkeit entlang der Grenzfläche zwischen den Isolatoren aufgrund der Randzustände recht hoch. Beim ersten Experiment, bei dem die Existenz solcher Randzustände beobachtet werden konnte, wurde eine Verbindung aus Queck-



---

silbertellurid (HgTe) und Cadmiumtellurid (CdTe) erzeugt [26, 27]. Die beiden Materialien besitzen eine zueinander inverse innere Bandstruktur, so dass sich aufgrund der Stetigkeit der Bänder die Bandlücke zwischen Valenz- und Leitungsband an der Kontaktfläche schließt, wodurch die Leitfähigkeit hier steigt. Ebenso wie in Festkörpern lassen sich auch bei ultrakalten Atomen in optischen Gittern den Bloch-Bändern eine Topologie zuordnen. Diese lässt sich in einer Dimension über die Messung der Zak-Phase [28, 29] oder in zwei Dimensionen über die Berry-Phase bestimmen [30–32], aus der die Chernzahl als topologische Invariante bestimmt werden kann. Die ersten Beobachtungen von Randzuständen mit ultrakalten Atomen gelangen, indem die innere Struktur der Atome eine Dimension im Zustandsraum bildete [33, 34]. Im Gegensatz dazu werden im vorliegenden Experiment zwei räumlich benachbarte Bereiche mit unterschiedlicher topologischer Phase realisiert, indem zwei Vier-Photonen-Gitterpotentiale mit einem magnetischen Gradientenfeld überlagert werden [35]. Dieses System lässt sich näherungsweise durch eine eindimensionale Dirac-Gleichung mit räumlich variierender Masse beschreiben [36], wie sie auch im SSH-Modell als Ansatz genutzt wird [37, 38]. Die Randzustände, die am Ort auftreten, an dem die Masse verschwindet, werden im vorliegenden Experiment mit Atomen besetzt.

## **Struktur der Arbeit**

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Im folgenden, zweiten Kapitel werden die Grundlagen des Phasenübergangs zur Bose-Einstein-Kondensation beschrieben. Anschließend werden die Techniken erläutert, die im Experiment benutzt werden, um ein atomares Bose-Einstein Kondensat aus Rubidiumatomen ( $^{87}\text{Rb}$ ) herzustellen. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung von ultrakalten Atomen im optischen Gitterpotential, welches mit Zwei-Photonen und Vier-Photonen-Übergängen realisiert wird, ab.

Das dritte Kapitel befasst sich mit Quantensimulationen der eindimensionalen Dirac-Gleichung, die die Dynamik der Atome in der Nähe der zweiten Bandkante beschreibt. Es werden die Ausdrücke für die effektive Masse und Lichtgeschwindigkeit der Atome hergeleitet. Im Anschluss folgt eine detaillierte Beschreibung der negativen Brechung eines atomaren Wellenpakets, sowie die theoretische Beschreibung der lokalisierten Randzustände, die sich in einem optischen Gitterpotential mit räumlich abhängiger effektiver Masse ergeben.

Der experimentelle Aufbau wird in Kapitel 4 vorgestellt. Dabei wird zunächst der generelle Experimentablauf beschrieben und anschließend das verwendete Vakuum- und Magnetfeldspulensystem erläutert. Danach werden die Lasersysteme für die magneto-optische Falle, die optische Dipolfalle und das optische Gitterpotential, sowie das Abbildungssystem beschrieben.

In Kapitel 5 werden die experimentellen Ergebnisse vorgestellt. Das Kapitel beginnt mit einer Beschreibung des phasenabhängigen Ladens in einen Bloch-Zustand, einem

Eigenzustand im Gitter, der sich als Superposition von freien Eigenzuständen zusammensetzt. Anschließend werden die Messungen vorgestellt, bei denen das atomare Wellenpaket negativ gebrochen und in Analogie zu einer Veselago-Linse auf seine ursprüngliche Größe abgebildet wird. Im letzten Abschnitt wird das räumlich variable Gitter charakterisiert und das Ladeverhalten der Atome in den Randzustand untersucht. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf mögliche Erweiterungen des experimentellen Schemas auf mehrere Dimensionen oder der Untersuchung des Einflusses der interatomaren Wechselwirkung auf topologisch geschützte Randzustände ab.

# Ultrakalte atomare Bose-Gase in optischen und magnetischen Potentialen

---

Dieses Kapitel befasst sich mit ultrakalten atomaren Bose-Gasen in optischen und magnetischen Potentialen. Zunächst wird der Phasenübergang von einem idealen Bose-Gas zu einem Bose-Einstein-Kondensat beschrieben, der bei einer kritischen Temperatur einsetzt. Anschließend wird der Einfluss von interner Wechselwirkung in dünnen atomaren Kondensaten mit Hilfe eines Ansatzes aus der Molekularfeldtheorie (engl. mean field theory) erläutert. Dieser Ansatz führt zu einer nichtlinearen Bewegungsgleichung, der Gross-Pitaevskii Gleichung. Im Anschluss werden die für das Verständnis der Arbeit relevanten Techniken zur Erzeugung atomarer Bose-Einstein-Kondensate vorgestellt und erläutert. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschreibt die Dynamik eines ultrakalten atomaren Gases in periodischen optischen Gitterpotentialen.

## 2.1 Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation

Quantenmechanische Teilchen, wie beispielsweise Atome, lassen sich aufgrund ihres Spins in zwei Klassen einteilen. Teilchen mit ganzzahligem Spin ( $S=0,1,\dots$ ) werden Bosonen genannt und ihre Vielteilchenwellenfunktion ist symmetrisch unter Austausch zweier Teilchen. Im Gegensatz dazu gibt es Fermionen, Teilchen mit halbzahligem Spin ( $S=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\dots$ ), deren Wellenfunktion antisymmetrisch unter Teilchenaustausch ist. Aufgrund der Ununterscheidbarkeit solcher identischer Teilchen kann ein quantenmechanischer Zustand nicht von mehr als einem Fermion besetzt werden. Dieses Phänomen, auch Pauli-Prinzip genannt, wurde erstmals 1925 von W. Pauli [39]

im Zusammenhang mit der Besetzung von Elektronenschalen in Atomen beschrieben. Bei Bosonen hingegen können sich mehrere identische Teilchen in ein und denselben quantenmechanischen Zustand befinden. Diese Teilchen können ein Bose-Einstein-Kondensat bilden, bei dem sich eine makroskopische Anzahl von Bosonen im Grundzustand, dem energetisch niedrigsten Zustand, befindet. Der Phasenübergang von einem klassischen Gas zu einem Bose-Einstein-Kondensat kann bei gegebener Dichte unterhalb einer kritischen Temperatur beobachtet werden.

## Kritische Temperatur und Phasenraumdichte

Ein ideales Bose-Gas besteht aus freien, nicht wechselwirkenden Bosonen, dessen Eigenschaften S. N. Bose im Falle von Photonen darstellte [40]. A. Einstein erweiterte Boses Theorie und sagte für massive Bosonen einen Phasenübergang von einem thermischen Gas zu einem Bose-Einstein-Kondensat vorher [41]. Die folgenden Herleitungen orientieren sich an [42].

Bosonen im thermischen Gleichgewicht gehorchen der Bose-Einstein Statistik

$$\langle n(\epsilon_\nu) \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (2.1)$$

mit  $\epsilon_\nu > \mu$ , wobei  $\langle n(\epsilon_\nu) \rangle$  die mittlere Besetzungszahl des Zustands  $\nu$  mit Energie  $\epsilon_\nu$  bezeichnet. Hierbei steht  $k_B$  für die Boltzmann-Konstante und  $\mu$  für das chemische Potential, welches im Allgemeinen eine Funktion der Teilchenzahl  $N$  und der Temperatur  $T$  ist. Die Teilchenzahl ist gleich der Summe der Besetzung aller Zustände

$$N = \sum_\nu \langle n(\epsilon_\nu) \rangle. \quad (2.2)$$

Da das chemische Potential immer kleiner ist als die Energie des niedrigsten möglichen Zustandes, geht die mittlere Besetzungszahl für hohe Temperaturen in die Boltzmann-Verteilung, dem klassischen Grenzfall, über

$$\langle n(\epsilon_\nu) \rangle = e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/k_B T}, \quad (2.3)$$

wobei die mittlere Besetzung eines Zustandes viel kleiner als 1 wird.

Im Folgenden wird die Zustandsdichte in einem dreidimensionalen harmonischen Potential berechnet, um daraus die kritische Phasenraumdichte sowie die kritische Temperatur beim Phasenübergang zu einem Bose-Einstein-Kondensat zu ermitteln. Nimmt man ein Wellenpaket in einem dreidimensionalen harmonischen Oszillatorpotential an

$$V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2), \quad (2.4)$$

mit  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  und  $\omega_{x,y,z}$  den Fallenfrequenzen in den drei Raumrichtungen, so ergeben sich die Energieniveaus

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \hbar\omega_x \left(n_x + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y \left(n_y + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2}\right), \quad (2.5)$$

mit den Quantenzahlen  $n_{x,y,z} \in \mathbb{N}_0$  und dem Planckschen Wirkungsquantum  $\hbar = h/2\pi$ . Für große Energien kann man die Nullpunktenergie vernachlässigen und die Anzahl der Zustände  $G(\epsilon)$  mit Energien kleiner als  $\epsilon$  lässt sich über das Integral

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_0^\epsilon d\epsilon_x \int_0^{\epsilon - \epsilon_x} d\epsilon_y \int_0^{\epsilon - \epsilon_x - \epsilon_y} d\epsilon_z = \frac{\epsilon^3}{6\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \quad (2.6)$$

bestimmen, wobei hier  $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z = \sum_{i=x,y,z} \hbar\omega_i n_i$  gilt. Die Zustandsdichte

$$g(\epsilon) = \frac{dG(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \quad (2.7)$$

ist über die Ableitung gegeben und somit proportional zu  $\epsilon^2$ . Die Anzahl der Teilchen, die sich in angeregten Zuständen befinden, ist gegeben durch

$$N_{\text{ex}} = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \langle n(\epsilon) \rangle \quad (2.8)$$

und wird maximal, wenn das chemische Potential verschwindet. In diesem Fall bestimmt die kritische Temperatur  $T_c$  den Punkt, an dem noch keine makroskopische Besetzung des Grundzustandes auftritt

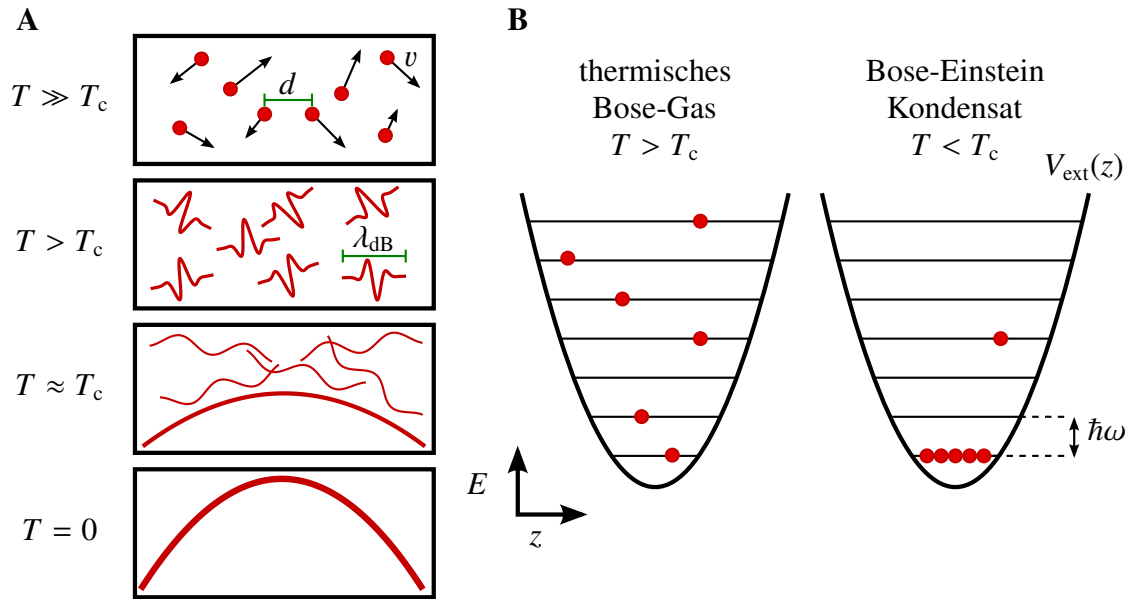
$$N = N_{\text{ex}}(T_c, \mu = 0) \stackrel{(2.1)}{=} \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T_c} - 1}. \quad (2.9)$$

Unterhalb der kritischen Temperatur wird  $N_{\text{ex}} < N$ , sodass sich dann eine makroskopische Anzahl von Teilchen  $N_0 = N - N_{\text{ex}}$  im Grundzustand befindet. Das Integral kann mit Hilfe von

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \quad (2.10)$$

und der Substitution  $x = \epsilon/k_B T_c$  gelöst werden, wobei  $\Gamma(\alpha)$  die Gammafunktion und  $\zeta(\alpha)$  die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnen. In dem betrachteten Fall eines dreidimensionalen harmonischen Oszillatorpotentials nimmt  $\alpha = 3$  an, wodurch sich  $\Gamma(3) = 2$  und die Apéry-Konstante  $\zeta(3) = 1.202$  ergeben. Für die kritische Temperatur gilt schließlich

$$T_c = \frac{\hbar}{k_B} \left( \frac{\omega_x \omega_y \omega_z N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \approx 0.94 \hbar \bar{\omega} k_B^{-1} N^{1/3}. \quad (2.11)$$



**Abbildung 2.1:** Übergang vom thermischen Gas zum Bose-Einstein-Kondensat. **A:** Für hohe Temperaturen  $T \gg T_c$  verhalten sich die Atome wie klassische Billardkugeln. Der mittlere Abstand und die thermische Geschwindigkeit der Atome sind relativ groß. Für kleinere Temperaturen wird die thermische De-Broglie-Wellenlänge größer, so dass die Wellenfunktionen der Atome überlappen. Bei  $T = T_c$  tritt eine makroskopische Besetzung des Grundzustandes auf. Im idealisierten Fall  $T = 0$  wird das ganze Ensemble durch eine Wellenfunktion beschrieben. (Illustration nach [43]) **B:** Besetzung der Energieniveaus in einem harmonischen Potential im Falle eines thermischen Gases (links) und eines Bose-Einstein-Kondensats (rechts).

Bei typischen Werten, bei denen man einen Phasenübergang zu einem Bose-Einstein-Kondensat beobachtet, liegt die mittlere Fallenfrequenz bei  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3} = 2\pi \cdot 75$  Hz und die Teilchenzahl bei etwa  $5 \cdot 10^4$  Atomen, so dass sich eine kritische Temperatur von  $T_{c,\text{typ}} = 125$  nK ergibt. Abbildung 2.1 zeigt schematisch den Phasenübergang von einem thermischen Gas zu einem Bose-Einstein-Kondensat. Für Temperaturen kleiner als die kritische Temperatur, ist der Anteil an Teilchen im Grundzustand gegeben durch [44]

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3. \quad (2.12)$$

Die kritische Phasenraumdicke, oberhalb der die Kondensation eintritt, ergibt sich aus dem Vergleich der mittleren freien Weglänge  $l \propto n^{-1/3}$ , welche über die Teilchendichte  $n$  gegeben ist, und der thermischen De-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_{\text{dB}} = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\text{B}}T} \right)^{1/2}. \quad (2.13)$$

Mit der Annahme einer konstanten Teilchendichte in einem würfelförmigen Volumen mit Kantenlänge  $\lambda_{\text{dB}}$  ergibt sich eine kritische Phasenraumdicke von

$$\rho_{\text{c}} = n\lambda_{\text{dB}}^3 \approx 2.612. \quad (2.14)$$

### Einfluss von atomarer Wechselwirkung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die Wechselwirkung zwischen den Teilchen im Kondensat zunächst vernachlässigt. Bei atomaren Bose-Einstein-Kondensaten beobachtet man jedoch trotz geringer Teilchendichten von  $n \approx 10^{14} \text{ cm}^{-3}$  Wechselwirkungseffekte. Im Falle eines Kondensats aus Alkaliatomen ist der mittlere Abstand der Atome groß gegenüber den relativen Streulängen, wodurch man sich auf Stöße zwischen zwei Atomen beschränken kann. Auch ist die verbleibende thermische Energie so gering, dass sich die Wechselwirkung auf die s-Wellenstreuung reduziert [45]. Die s-Wellenstreuung stellt Stöße zwischen Atomen dar, bei denen kein Drehimpuls übertragen wird und somit keine inneratomare Anregung stattfindet. Sie ist durch die atomspezifische Streulänge  $a_{\text{s}}$  charakterisiert, die im Falle von repulsiver Wechselwirkung positive und bei attraktiver Wechselwirkung negative Werte annimmt. Das in dieser Arbeit verwendete Rubidiumisotop ( $^{87}\text{Rb}$ ) besitzt eine Streulänge von  $a_{\text{s}} = 5,77 \text{ nm}$  [46]. Das Zwei-Teilchen Wechselwirkungspotential lässt sich in Bornscher Näherung als Deltapotential annehmen

$$V_{\text{St}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a_{\text{s}}}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (2.15)$$

mit dem Kopplungsparameter  $g$  und der Teilchenmasse  $m$  [47, 48]. Der Vielteilchen-Hamiltonoperator in zweiter Quantisierung, der  $N$  wechselwirkende Bosonen in einem externen zeitlich konstanten Potential  $V_{\text{ext}}$  beschreibt, lautet

$$\hat{H} = \int d\mathbf{r} \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right] \hat{\Psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}') V_{\text{St}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}), \quad (2.16)$$

mit den Feldoperatoren  $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r})$  und  $\hat{\Psi}(\mathbf{r})$ , die Teilchen am Ort  $\mathbf{r}$  erzeugen bzw. vernichten. Mit Hilfe der Heisenbergschen Bewegungsgleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}, \hat{H}] \quad (2.17)$$

und der Molekularfeldnäherung von Bogoliubov  $\Phi(\mathbf{r}, t) \approx \langle \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) \rangle$ , wonach die Kondensat-Wellenfunktion als der Erwartungswert des Feldoperators angenommen wird, und mit der Normierung  $N_0(t) = \int d\mathbf{r} |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2$  erhält man die Bewegungsgleichung der Kondensat-Wellenfunktion

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, t) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g |\Phi(\mathbf{r}, t)|^2 \right) \Phi(\mathbf{r}, t). \quad (2.18)$$

Diese nichtlineare Bewegungsgleichung, auch als Gross-Pitaevskii-Gleichung bekannt, wurde von E.P. Gross und L. P. Pitaevskii unter der Annahme aufgestellt, dass die Teilchenzahl im Kondensat  $N_0 \gg 1$  ist [49–51]. Mit dem Ansatz  $\Phi(\mathbf{r}, t) = \phi(\mathbf{r}) \exp(-i\mu t/\hbar)$  folgt die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii Gleichung

$$\mu \phi(\mathbf{r}) = \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) + g |\phi(\mathbf{r})|^2 \right) \phi(\mathbf{r}), \quad (2.19)$$

die aufgrund des nichtlinearen Terms  $g |\phi(\mathbf{r})|^2$  im Allgemeinen nur numerisch gelöst werden kann.

## Thomas-Fermi-Näherung

Die Thomas-Fermi Näherung beschreibt den Fall, in dem die Wechselwirkungsenergie groß ist im Vergleich zur verbleibenden kinetischen Energie

$$\frac{E_{\text{int}}}{E_{\text{kin}}} \propto \frac{N_0 |a_s|}{r_{\text{ho}}}, \quad (2.20)$$

mit  $r_{\text{ho}} = (\hbar/m\bar{\omega})^{1/2}$  dem Radius eines wechselwirkungsfreien Wellenpakets im Grundzustand eines harmonischen Oszillatorpotentials [48]. Der Quotient nimmt bei Alkaliatomen mit repulsiver Wechselwirkung typischerweise Werte zwischen 10 und  $10^4$  an. In dieser Näherung kann der kinetische Term in der Gross-Pitaevskii Gleichung vernachlässigt werden, wodurch die Teilchendichte in einem harmonischen Fallpotential eine parabelförmige Verteilung annimmt

$$n(\mathbf{r}) = |\phi(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} [\mu - V_{\text{ext}}(\mathbf{r})] g^{-1} & , \mu > V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \\ 0 & , \mu \leq V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \end{cases}. \quad (2.21)$$



Die maximale Teilchendichte im Zentrum des Kondensats beträgt

$$n_0 = \mu g^{-1} = \frac{r_{\text{TF}}^2}{2g} m \bar{\omega}^2, \quad (2.22)$$

mit dem Thomas-Fermi Radius  $r_{\text{TF}}$ , der über den Punkt definiert ist, an dem das chemische und das externe Potential gleich groß sind  $\mu = V_{\text{ext}}(r_{\text{TF}})$  [48]. Er wächst mit zunehmender Teilchenzahl  $N_0 = \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r})$  im Kondensat

$$r_{\text{TF}} = r_{\text{ho}} \left( \frac{15N_0 a_s}{r_{\text{ho}}} \right)^{1/5}. \quad (2.23)$$

Da zu den Rändern des Kondensats die kinetische Energie jedoch nicht zu vernachlässigen ist, beschreibt die Thomas-Fermi Näherung die Dichteverteilung hier nur bedingt.

## 2.2 Erzeugung atomarer Bose-Einstein-Kondensate

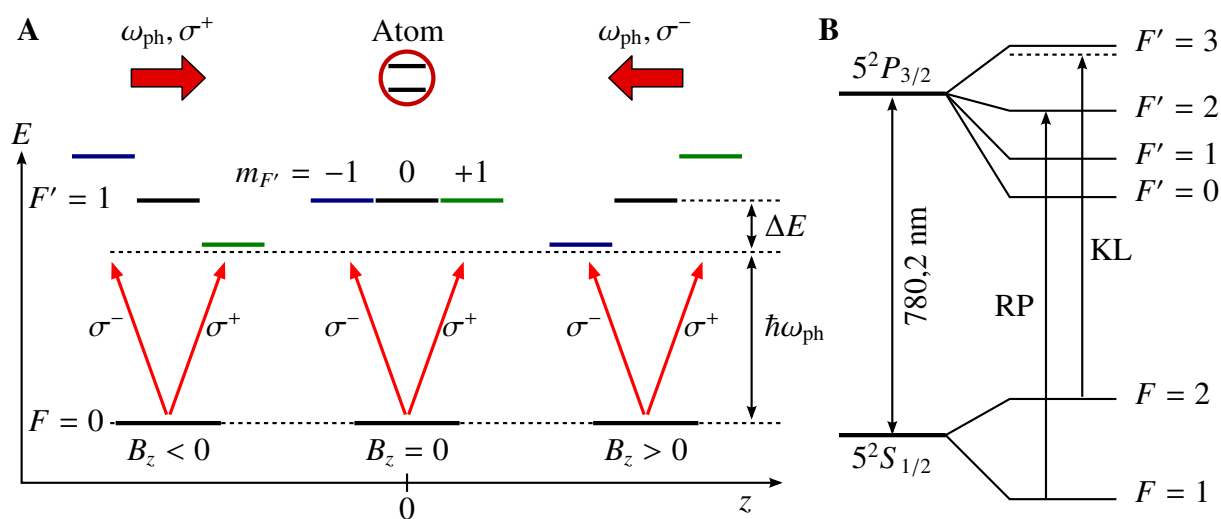
In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen zum Fangen und Kühlen von atomaren Gasen vorgestellt, und die Konzepte, die im Rahmen dieser Arbeit benutzt werden, um ein Bose-Einstein-Kondensat zu erzeugen. Ausgangspunkt bei der Erzeugung atomarer Bose-Einstein-Kondensate ist das Vorkühlen von Atomen in einer magneto-optischen Falle (MOT). In diese können Atome aus dem Hintergrundgas oder aus einem thermischen Atomstrahl gefangen und in einen Temperaturbereich von wenigen Mikrokkelvin gebracht werden, wodurch es möglich wird, die Atome anschließend in konservativen Fallen, wie beispielsweise in einer optischen Dipolfalle oder einer Magnetfalle, zu fangen. Damit sich die gefangenen Atome nicht durch Stöße mit thermischen Atomen aus dem Hintergrundgas wieder aufheizen, finden die Experimente in einem Ultrahochvakuumssystem statt. Das vorgekühlte Ensemble von Atomen kann in der konservativen Falle mittels Verdampfungskühlung weiter abgekühlt werden, um die kritische Phasenraumdichte zu erreichen. Im Folgenden werden die Funktionsweisen einer magneto-optischen Falle, einer quasi-elektrostatischen Dipolfalle und einer Magnetfalle erklärt und anschließend das Prinzip des evaporativen Kühlens erläutert, mit dem eine Bose-Einstein-Kondensation der Atome erreicht werden kann.

## Magneto-optische Falle für Rubidium

Die erste magneto-optische Falle wurde erstmals 1987 von Chu, Pritchard *et al.* realisiert [52] und beruht auf dem Prinzip der Laserkühlung [53]. Hierbei wird Atomen in einem rotverstimmten Lichtfeld aufgrund der Photonenstreuung kinetische Energie entzogen. Ein Atom mit zwei internen Zuständen  $|g\rangle$  und  $|a\rangle$  und den zugehörigen Energien  $E_g$  und  $E_a$  nimmt durch Absorption eines Photons mit Energie  $E_{\text{ph}} = \hbar\omega_{\text{ph}} = E_a - E_g$  den Impuls des Photons  $\hbar\mathbf{k}$  auf und geht dabei vom Grundzustand in den angeregten Zustand über. Der Betrag des Wellenvektors ist über  $|\mathbf{k}| = k = \hbar\omega_{\text{ph}}/c$  mit der Lichtgeschwindigkeit  $c$  gegeben. Kommt es anschließend zur spontanen Emission, so wird ein Photon in eine zufällige Raumrichtung emittiert und das Atom relaxiert in den Grundzustand. Aufgrund dieser Isotropie findet im Mittel über viele Absorptions- und Emissionsprozesse nur bei der Absorption ein Impulsübertrag statt. Ist das Lichtfeld zusätzlich gegenüber dem atomaren Übergang rotverstimmt, d.h.  $E_{\text{ph}} < E_a - E_g$ , so kommen aufgrund der Doppler-Verschiebung nur Atome in Resonanz, die sich auf die Lichtquelle zubewegen. Diese werden aufgrund des Impulsübertrags verlangsamt, wodurch sie kinetische Energie verlieren. Mit diesem Prinzip lässt sich eine sogenannte optische Melasse realisieren, die aus drei orthogonal zueinander stehenden Paaren von gegenläufigen Laserstrahlen besteht, und somit atomare Gase zwar kühlen, aber nicht räumlich fangen kann [54].

Um die Atome in einer magneto-optischen Falle auch räumlich zu lokalisieren, werden die Laserstrahlen zirkular polarisiert und zusätzlich ein inhomogenes Magnetfeld angelegt. Zur Realisierung eines inhomogenen Magnetfeldes wird oftmals ein Spulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration benutzt, welches ein Quadrupolfeld erzeugt, mit einem konstanten magnetischen Gradienten (s. Abb. 2.4). Das absolute Magnetfeld verschwindet im Zentrum zwischen den Spulen, in dem sich die sechs Laserstrahlen kreuzen. Das Magnetfeld bewirkt eine positionsabhängige Zeeman-Aufspaltung der atomaren Zustände. Abbildung 2.2 zeigt das Funktionsprinzip der magneto-optischen Falle in einer Dimension, wobei der angeregte Zustand in diesem Beispiel einen Gesamtdrehimpuls von  $F' = 1$  besitzt und somit in drei Zeeman-Zustände aufspaltet. Im positiven Bereich der  $z$ -Achse wird der Zustand  $m_F = -1$  energetisch nach unten verschoben und kommt somit mit dem aus positiver  $z$ -Richtung kommenden  $\sigma^-$  Licht in Resonanz, welches den Übergang  $\Delta m_F = -1$  treibt. Hierdurch entsteht eine Rückstellkraft in Richtung des Fallenzentrums. Ebenso kommen im Bereich negativer  $z$ -Richtung Atome in Resonanz mit dem gegenläufigen  $\sigma^+$ -polarisierten Licht, wodurch auch hier eine effektive Kraft entsteht, die zum Zentrum der Falle gerichtet ist.

Entgegen der bisherigen Betrachtung besitzen Atome im Allgemeinen ein komplexeres Termschema. Bei dem hier verwendete Rubidiumisotop ( $^{87}\text{Rb}$ ) spaltet sich der  $5^2S_{1/2}$ -Grundzustand in der Hyperfeinstruktur in zwei Niveaus auf ( $F = 1$  und  $F = 2$ ),



**Abbildung 2.2:** Funktionsprinzip einer magneto-optischen Falle. **A** Der Zustand  $|F' = 1, m_{F'} = -1\rangle$  wird in positiver  $z$ -Richtung aufgrund des Zeeman-Effekts energetisch abgesenkt, so dass hier das aus positiver  $z$ -Richtung kommende  $\sigma^-$ -polarisierte Licht resonant wird. Entsprechendes gilt für den Zustand  $|F' = 1, m_{F'} = +1\rangle$  im negativen Bereich der  $z$ -Achse und dem aus negativer  $z$ -Richtung kommenden  $\sigma^+$ -polarisiertem Licht. Hierdurch entsteht eine effektive Kraft auf die Atome, die ins Zentrum bei  $z = 0$  gerichtet ist. **B** Das Niveauschema der D<sub>2</sub>-Linie von Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ) mit Hyperfeinstrukturaufspaltung zeigt die verwendeten Übergänge für Kühl- (KL) und Rückpumplaser (RP).

wodurch der Einsatz von zwei Lichtfrequenzen notwendig wird (s. Abb. 2.2). Die Frequenz des sogenannten Kühllasers ist leicht rotverstimmt zum optischen Übergang  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ . Durch dieses Licht angeregte Atome können teilweise in den  $F=1$  Grundzustand relaxieren und werden daraufhin nicht mehr mit der Frequenz des Kühllasers angeregt. Diese Atome würden also nicht mehr am Kühlprozess teilnehmen und könnten die Falle verlassen. Um dies zu verhindern, kommt ein weiterer Laser, der sogenannte Rückpumplaser, zum Einsatz, dessen Licht die Atome aus diesem Dunkelzustand anregt und somit wieder in den Kühlprozess integriert. Ein Maß für die erreichbare Temperatur der Atomwolke in der magneto-optischen Falle bietet die Doppler-Temperatur  $T_D = \hbar/(2k_B\tau)$ , die von der Lebensdauer  $\tau$  des angeregten Zustandes abhängt. Die Doppler-Temperatur für den im Experiment verwendeten Kühlübergang der D<sub>2</sub>-Linie von Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ) beträgt  $T_D = 145,57 \mu\text{K}$  [55]. Da in magneto-optischen Fallen die kritische Temperatur bzw. Phasenraumdichte eines Bose-Einstein-Kondensats nicht erreicht wird, werden andere Fallen- und Kühltechniken benötigt. Beispiele hierfür sind die im Experiment verwendete fernverstimmte optische Dipolfalle und das evaporative Kühlen, die im Folgenden genauer beschrieben werden.

## Fernverstimmte optische Dipolfalle

Es gibt hauptsächlich zwei Arten von konservativen Fallen für neutral geladene Atome. Zum einen gibt es Magnetfallen, die auf der zustandsabhängigen Kraft des magnetischen Dipolmoments der Atome beruhen. Zum anderen existieren optische Dipolfallen, die auf der Wechselwirkung des induzierten elektrischen Dipolmoments mit einem Lichtfeld basieren. Im Folgenden wird diese Wechselwirkung zwischen Atom und Lichtfeld, und das daraus folgende optische Dipolpotential, mittels eines klassischen Ansatzes beschrieben. Eine ausführlichere Darstellung ist in [56] zu finden.

Das Atom wird im Lorentz-Modell als klassischer Oszillator betrachtet, bei dem ein Elektron mit der Masse  $m_e$  und der Elementarladung  $e$  elastisch an den Atomkern gebunden ist. Die Eigenfrequenz der Oszillation ist dann durch  $\omega_0$  gegeben und entspricht der Frequenz des optischen Übergangs des Atoms. Angetrieben wird die Oszillation durch das Lichtfeld, welches durch das elektrische Feld  $E(t) = E_0 \cos(\omega t)$  gegeben ist. Die Magnetfeldkomponente des Lichts kann aufgrund der relativ geringen Kopplung an das magnetische Dipolmoment der Atome vernachlässigt werden. Die Bewegungsgleichung des Elektrons

$$\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e}{m_e} E(t) \quad (2.24)$$

enthält einen Dämpfungsterm  $\Gamma_\omega \ll \omega_0$ , der die abgestrahlte Leistung der beschleunigten Ladungen berücksichtigt. Über die Larmor-Formel ergibt sich eine Dämpfung von

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3}, \quad (2.25)$$

mit der elektrischen Feldkonstante  $\epsilon_0$  und der Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Mit dem Lösungsansatz  $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi)$  erhält man für das elektrische Dipolmoment des Atoms

$$p(t) = -e \cdot x(t) = \frac{e^2}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} \cdot E(t) = \alpha \cdot E(t). \quad (2.26)$$

Hierbei ist die atomare Polarisierbarkeit  $\alpha$  gegeben durch

$$\alpha \equiv \alpha(\omega) = \frac{e^2}{m_e} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} = 6\pi \epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (2.27)$$

mit der Dämpfungsrate auf der atomaren Resonanz  $\Gamma \equiv \Gamma_{\omega_0} = (\omega_0^2/\omega^2)\Gamma_\omega$ . Gleichung (2.26) zeigt, dass das elektrische Dipolmoment des Atoms dem äußeren Feld folgt, wobei der Realteil der komplexen Polarisierbarkeit  $\alpha$  die dispersiven und der Imaginärteil die absorptiven Eigenschaften des Teilchens beschreibt. Erweitert man diese

Betrachtung für ein isotropes Medium auf drei Dimensionen, so sind das elektrische Feld und das Dipolmoment gegeben durch

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}E(\mathbf{r})E(t) \quad (2.28)$$

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \hat{\mathbf{e}}p(\mathbf{r})p(t), \quad (2.29)$$

mit dem Polarisationsvektor  $\hat{\mathbf{e}}$  des Lichtfeldes und der Beziehung

$$\mathbf{p}(\mathbf{r},t) = \alpha \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t). \quad (2.30)$$

Das optische Dipolpotential, welches die Wechselwirkung zwischen induziertem Dipolmoment und elektrischem Feld beschreibt, ist proportional zum Realteil von  $\alpha$

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbf{p} \mathbf{E} \rangle_t = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\mathbf{r}), \quad (2.31)$$

mit der Intensität des Lichtfeldes  $I(\mathbf{r}) = \epsilon_0 c / 2 \cdot |E(\mathbf{r})|^2$ . Der Vorfaktor 1/2 in Gleichung (2.31) berücksichtigt, dass es sich hierbei um ein induziertes und nicht permanentes Dipolmoment des Atoms handelt. Die eckigen Klammern stellen eine zeitliche Mittelung über schnell oszillierende Terme dar.

Der Imaginärteil von  $\alpha$  beschreibt die gegenphasig schwingende Komponente der Oszillation und ist somit für die absorbierte Leistung  $P_{\text{abs}}$  und die damit zusammenhängende Photonenstreurate verantwortlich

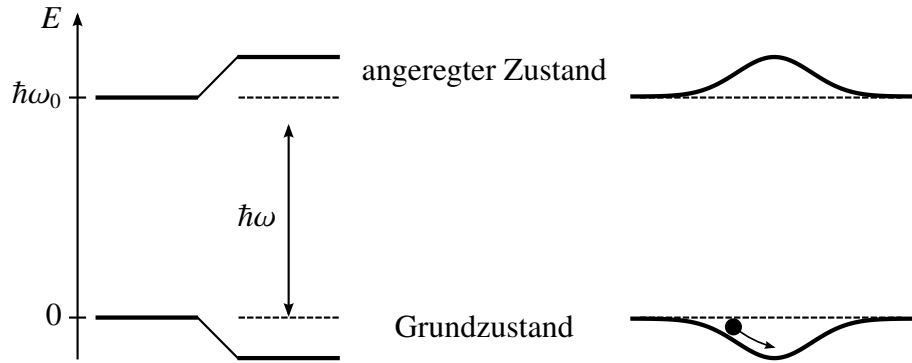
$$\Gamma_{\text{St}}(\mathbf{r}) = \frac{P_{\text{abs}}}{\hbar\omega} = \frac{\langle \dot{\mathbf{p}} \mathbf{E} \rangle_t}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (2.32)$$

Setzt man die in Gleichung (2.27) hergeleitete atomare Polarisierbarkeit in die Gleichungen (2.31) und (2.32) ein, so ergibt sich für das Dipolpotential und die Streurate

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} \right) I(\mathbf{r}) \quad (2.33)$$

$$\Gamma_{\text{St}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left( \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (2.34)$$

Sind Lichtfrequenz und Frequenz des optischen Übergangs des Atoms vergleichbar ( $\omega_0 \approx \omega$ ), das heißt  $|\Delta| \ll \omega_0$  mit der Verstimmung  $\Delta = \omega - \omega_0$ , können die Terme



**Abbildung 2.3:** Licht verschiebt die Energieniveaus eines Atoms, hier dargestellt durch einen Grundzustand und ein angeregtes Niveau. Bei rotverstimmtter Lichtfrequenz  $\omega < \omega_0$  wird der Grundzustand energetisch abgesenkt und der angeregte Zustand angehoben (links). Ein Gauß-förmiges Intensitätsprofil erzeugt so ein Potentialminimum für Atome im Grundzustand, in dem diese gefangen werden können (rechts). (Illustration nach [56])

mit  $\omega_0 + \omega$  im Nenner vernachlässigt werden. Mit dieser sogenannten Drehwellen-näherung und  $\omega/\omega_0 \approx 1$  erhält man

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\mathbf{r}) \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{\text{st}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (2.36)$$

Für rotverstimmtes Licht ( $\Delta < 0$ ) ist das Dipolpotential attraktiv, wodurch es möglich wird, Teilchen in einem fokussierten Laserstrahl zu fangen (siehe Abb. 2.3). Im Falle von blauverstimmttem Licht ( $\Delta > 0$ ) ist das Potential repulsiv, das heißt, dass Atome vom Intensitätsmaxima wegbeschleunigt werden. Das Dipolpotential skaliert mit  $I/\Delta$  und die Streurrate mit  $I/\Delta^2$ , weshalb für Dipolfallen oft sowohl Verstimmung als auch Intensität groß gewählt werden, um bei gleichbleibender Potentialtiefe Verluste durch Photonenstreuung zu minimieren. Im Gegensatz zur magneto-optischen Falle gibt es in einer optischen Dipolfalle keine dissipativen Kühlkräfte. Zur Verringerung der Temperatur des in einer Dipolfalle gefangenen Ensembles von Atomen kommt das Prinzip des evaporativen Kühlens zum Einsatz.

## Zustandsabhängige magnetische Kraft

Ein weiterer Fallentyp für neutrale Atome stellt die Magnetfalle dar, die auf der zustandsabhängigen magnetischen Kraft (auch Stern-Gerlach Kraft) beruht. Diese Kraft wurde erstmals 1922 von O. Stern und W. Gerlach entdeckt, geht von einem inhomogenen Magnetfeld aus und wirkt auf das permanente magnetische Dipolmoment von Teilchen [57]. Die Stern-Gerlach-Kraft ist gegeben durch

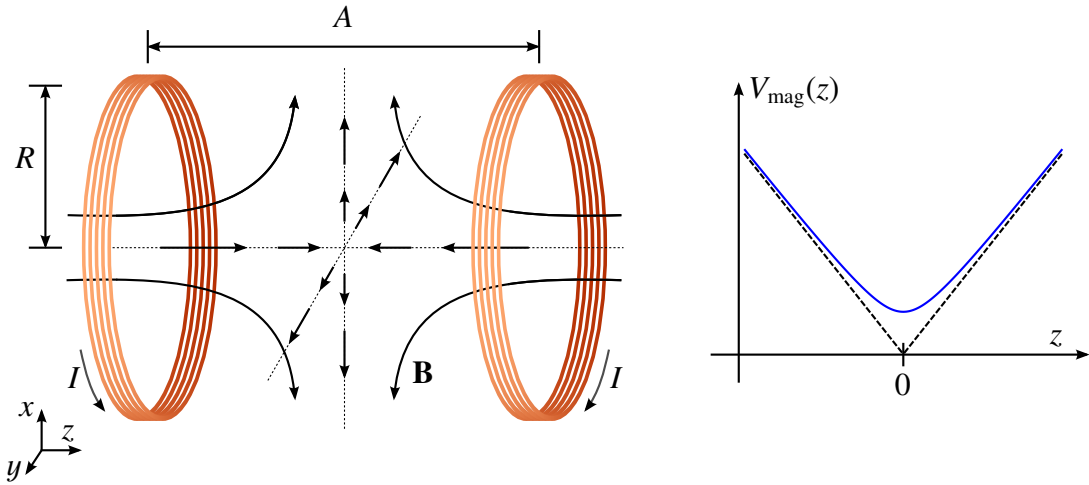
$$\mathbf{F}_{\text{SG}}(\mathbf{r}) = -m_F g_F \mu_B \cdot \vec{\nabla} |\mathbf{B}(\mathbf{r})|, \quad (2.37)$$

mit der magnetischen Quantenzahl  $m_F$ , dem Landé Faktor  $g_F$  und dem Bohrschen Magneton  $\mu_B$ . Teilchen mit positivem magnetischem Moment ( $m_F g_F > 0$ ) werden „Schwachfeld“-Sucher genannt, da sie aufgrund der Kraft zu geringeren Magnetfeldern hin beschleunigt werden. Dem gegenüber stehen sogenannte „Starkfeld“-Sucher, die aufgrund ihres negativen magnetischen Moments ( $m_F g_F < 0$ ) zu stärkeren Magnetfeldern hin beschleunigt werden. Da sich gemäß der Maxwell-Gleichungen mit statischen Magnetfeldern nur Magnetfeldminima, aber keine Maxima erzeugen lassen, sind Magnetfallen nur für Atome in Zuständen mit positivem magnetischen Moment denkbar. Ein Magnetfeldminimum stellt für diese Atome ein attraktives Potential dar.

Die erste Magnetfalle zum Fangen von neutralen Atomen wurde 1985 mittels einer sogenannten Quadrupolfalle realisiert [58]. Das Magnetfeld einer Quadrupolfalle wird, wie auch bei dem Magnetfeld einer magneto-optischen Falle, durch ein Spulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration erzeugt, jedoch werden hierbei höhere Feldstärken benötigt, da die Atome rein mit magnetischen Kräften gefangen werden. Ein Spulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration ist gegeben aus zwei identischen kreisförmigen Spulen, die parallel zueinander im Abstand  $A$  entlang der Symmetrieachse  $z$  zueinander angeordnet sind und mit elektrischem Strom  $I$  in entgegengesetzter Richtung durchflossen werden (siehe Abb. 2.4). Das magnetische Feld eines solchen Spulenpaares mit den Spulenradien  $R$  ist entlang der Symmetrieachse gegeben durch

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 N I}{2} \left[ \frac{R^2}{\left(R^2 + \left(z - \frac{A}{2}\right)^2\right)^{3/2}} - \frac{R^2}{\left(R^2 + \left(z + \frac{A}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right], \quad (2.38)$$

wobei  $\mu_0$  die magnetische Feldkonstante und  $N$  die Windungszahl bezeichnen. Aus Symmetriegründen verschwinden die radialen Anteile  $B_x(0,0,z) = B_y(0,0,z) = 0$  entlang der Symmetrieachse  $z$ . In Anti-Helmholtz-Konfiguration beträgt das Verhältnis aus Abstand und Spulenradien  $A/R = \sqrt{3}$ . Hierdurch verschwinden bei einer Taylor-Entwicklung von Gleichung (2.38) um  $z = 0$  die dritte Ableitung sowie alle ganzzahli-



**Abbildung 2.4:** Schematischer Aufbau einer Quadrupolfalle (links). Zwei Spulen in Anti-Helmholtz-Konfiguration erzeugen ein inhomogenes magnetisches Feld, das im Zentrum verschwindet. Das magnetische Potential (rechts) ist attraktiv für Atome im magnetisch fangbaren Zuständen. Die schwarze gestrichelte Linie zeigt das Potential entlang der Symmetrieachse ( $x^2 + y^2 = 0$ ) und die blaue Linie das Potential mit einem Versatz parallel zur Symmetrieachse ( $x^2 + y^2 > 0$ ).

gen Ordnungen von  $z$ . Das resultierende Feld kann bis zur vierten Ordnung als linear angesehen werden

$$B_z(0,0,z) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \frac{48}{49} \frac{\mu_0 N I}{R^2} \cdot z + O(z^5) \approx b \cdot z \quad (2.39)$$

mit dem Magnetfeldgradient  $b = \partial_z B_z$  in axialer Richtung. In radialer Richtung ist der Gradient etwa halb so groß [59], so dass das gesamte Magnetfeld durch

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\frac{b}{2}(x\hat{\mathbf{e}}_x + y\hat{\mathbf{e}}_y) + bz\hat{\mathbf{e}}_z \quad (2.40)$$

$$|\mathbf{B}(\mathbf{r})| = \frac{b}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2} \quad (2.41)$$

beschrieben wird. Im Zentrum bei  $\mathbf{r}_0 = (0,0,0)$  verschwindet das absolute Magnetfeld und steigt in alle Raumrichtungen linear an. Das magnetische Potential (s. Abb. 2.4), welches sich für neutrale Atome mit magnetischem Moment  $\vec{\mu}$  in dieser Quadrupolfalle ergibt, ist gegeben durch

$$V_{\text{mag}}(\mathbf{r}) = -\vec{\mu}\mathbf{B}(\mathbf{r}) = m_F g_F \mu_B \frac{b}{2} \sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}. \quad (2.42)$$



In einer solchen Quadrupolfalle lassen sich neutrale Atome fangen, aber eine Bose-Einstein-Kondensation durch evaporative Kühlung ist hier nicht möglich, da das absolute Magnetfeld im Fallenzentrum und damit auch die Zeeman-Aufspaltung verschwindet. Für Atome, die diese Position passieren, kann der Spin der Atome dem äußeren Feld nicht mehr adiabatisch folgen, da hier die Larmor-Frequenz  $\omega_L = \frac{g_F \mu_B}{\hbar} |\mathbf{B}|$  stark abnimmt. Dies hat zur Folge, dass sich der magnetische Zustand der Atome beim Nulldurchgang ändern kann, wodurch es möglich wird, die Falle zu verlassen [60]. Da diese Verluste das Erreichen der kritischen Phasenraumdichte zur Bose-Einstein-Kondensation in Quadrupolfallen verhindern, wurden Magnetfallen mit nicht-verschwindendem Magnetfeld im Zentrum entwickelt, in denen Bose-Einstein-Kondensation möglich ist, wie beispielsweise eine Ioffe-Prichard-Falle [59]. Dennoch kommt im Rahmen des beschriebenen Experiments eine abgewandelte Form der Quadrupolfalle zum Einsatz, um mit Hilfe der Stern-Gerlach Kraft die Gravitationskraft für Atome im Kondensat auszugleichen.

## Evaporatives Kühlen

Um in einer konservativen Falle, wie beispielsweise der optischen Dipolfalle oder der Magnetfalle, ein atomares Gas abzukühlen, wird das Prinzip des evaporativen Kühlens, auch Verdampfungskühlung genannt, angewendet. Es wurde erstmals 1987 mit Wasserstoffatomen in einer Magnetfalle [61] und etwa zehn Jahre später mit Natriumatomen in einer optischen Dipolfalle angewendet [62] und legte den Grundstein zur Erzeugung eines atomaren Bose-Einstein-Kondensats.

Bei diesem Verfahren werden die schnellsten bzw. heißesten Atome aus der Falle entfernt, so dass die mittlere kinetische Energie der noch gefangenen Atome sinkt. Durch elastische Stöße der verbleibenden Atome rethermalisiert das Gas und es stellt sich eine tiefere Temperatur ein. Das evaporative Kühlen unterscheidet sich je nach Fallentyp. In einer Magnetfalle werden die heißesten Atome mittels Radiofrequenzen in andere Zeeman-Zustände gebracht, so dass diese Atome nicht mehr von der Magnetfalle gefangen werden und die Falle verlassen. Bei der Dipolfalle hingegen nutzt man die Tatsache, dass die Fallentiefe von der Intensität des Lichtfeldes abhängig ist. Eine stetige Reduzierung der Lichtleistung der Dipolfalle verringert die Fallentiefe, wodurch nur noch die langsamsten Atome in der Falle bleiben. Damit die Evaporation effizient abläuft, ist eine schnelle Rethermalisierung des Ensembles nötig. Die damit verbundene hohe Stoßrate bzw. hohe Teilchendichte wird dadurch erreicht, dass man einen stark fokussierten Laserstrahl als Dipolfalle verwendet. Im Rahmen der Dissertation von G. Cennini wurde das evaporative Kühlen von Rubidiumatomen in der im vorliegenden Experiment verwendete mit einem CO<sub>2</sub>-Laserstrahl ( $\lambda_{\text{CO}_2} = 10,6\mu\text{m}$ ) realisierte Dipolfalle untersucht [63].

## 2.3 Ultrakalte Atome in optischen Gitterpotentialen

Bei der Überlagerung von gegenläufigen Laserstrahlen gleicher Frequenz bildet sich aufgrund der Interferenz eine optische Stehwelle aus. Das optische Dipolpotential (vgl. Gl. (2.35)) bewirkt, dass Atome im rotverstimmten Lichtfeld die dabei entstandenen Intensitätsmaxima als attraktive Potentialtöpfe wahrnehmen und von diesen angezogen werden.

Dieser Abschnitt beschreibt die Erzeugung von optischen Gittern, die eine Periodizität von einer halben bzw. einer viertel Wellenlänge des verwendeten Lichts besitzen. Für Letztere wird im vorliegenden Experiment die inneratomare Struktur ausgenutzt. Anschließend wird die Dynamik der Atome im optischen Gitterpotential beschrieben, die sich mit Hilfe des Bloch-Theorems herleiten lässt.

### Konventionelle optische Gitter

Zwei gegenläufige Laserstrahlen gleicher Frequenz  $\nu = \omega/2\pi$  und linearer Polarisation erzeugen eine Stehwelle aus Licht. Die einzelnen Lichtfelder werden als ebene Wellen angenommen und durch

$$\mathbf{E}_1(z,t) = E_1 \hat{\mathbf{e}}_1 \cos(\omega t - kz + \varphi_1) \quad (2.43)$$

$$\mathbf{E}_2(z,t) = E_2 \hat{\mathbf{e}}_2 \cos(\omega t + kz + \varphi_2) \quad (2.44)$$

beschrieben, wobei der Wellenvektor  $k = 2\pi/\lambda$  über die Wellenlänge des Lichtes  $\lambda = c/\nu$  gegeben ist. Die Phasen der Wellen sind mit  $\varphi_{1/2}$  bezeichnet. Bei der Überlagerung der beiden Lichtfelder entsteht eine Stehwelle mit Bereichen minimaler und maximaler Intensität. Die Gesamtintensität ist über das zeitliche Mittel gegeben

$$\begin{aligned} I(z) &= c\epsilon_0 \langle \mathbf{E}_{\text{ges}}^2 \rangle_t = c\epsilon_0 \langle (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \rangle_t \\ &= c\epsilon_0 \langle \mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2 + 2\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle_t \\ &= I_1 + I_2 + I_{\text{int}}(z), \end{aligned} \quad (2.45)$$

wobei  $I_{1/2} = \frac{1}{2}c\epsilon_0 E_{1/2}^2$  die Intensitäten der einzelnen Lichtfelder sind. Der Interferenzterm  $I_{\text{int}}(z)$  hängt vom Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Polarisationsvektoren  $\hat{\mathbf{e}}_{1/2}$  ab

$$I_{\text{int}}(z) = 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2kz + \varphi) \cdot \cos(\alpha) \quad (2.46)$$

$$\cos(\alpha) = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2, \quad (2.47)$$

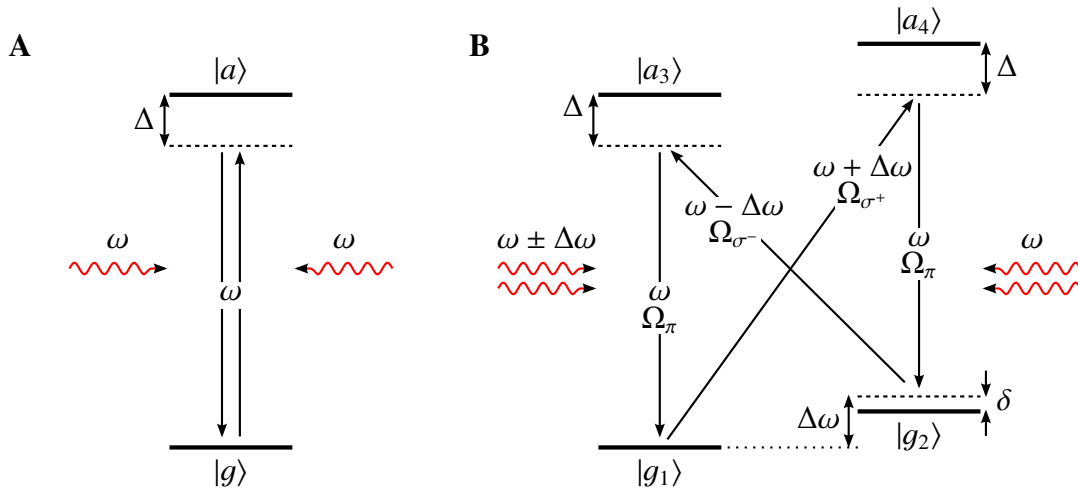
mit dem Phasenunterschied  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ . Bei parallelen Polarisationsrichtungen  $\hat{\mathbf{e}}_1 \parallel \hat{\mathbf{e}}_2$  wird der Interferenzterm maximal, während er für senkrecht zueinander stehende Polarisation  $\hat{\mathbf{e}}_1 \perp \hat{\mathbf{e}}_2$  verschwindet. Die Intensitätsmaxima (bei  $\cos(2kz + \varphi) = 1$ ) treten mit

einer räumlichen Periodizität von  $\lambda/2$  auf. Bei rotverstimmter Lichtfrequenz bezüglich des atomaren Übergangs wirken diese Intensitätsmaxima wie attraktive Potentialtöpfe für Atome in diesem Lichtfeld (vgl. Gl. (2.35)). Im Falle paralleler Polarisationsvektoren ergibt sich das optische Gitterpotential zu

$$V_{\lambda/2}(z) = \frac{V_2}{2} \cos(2kz + \varphi) + \text{const}, \quad (2.48)$$

mit der Potentialtiefe  $V_2 \propto \sqrt{I_1 I_2}$ . Die Stehwelle aus Licht lässt sich über die Phase  $\varphi$  räumlich verschieben.

Im alternativen Teilchenbild kann die Wechselwirkung zwischen Atomen und Lichtfeld auch aus einer Reihe von Absorptions- und anschließenden stimulierten Emissionsprozessen verstanden werden (s. Abb. 2.5A). Das Atom absorbiert ein Photon des einen Lichtfeldes und wird von einem Photon des anderen Lichtfeldes stimuliert wieder abgeregt. Durch diesen Prozess ändert sich der Impuls des Atoms um  $\Delta p = \pm 2\hbar k$ , je nach Richtung des absorbierten Photons. Mittels dieser Diskretisierung des Impulsübertrags lässt sich ebenfalls auf ein Gitter mit einer räumlichen Periodizität von  $\Delta z = 2\pi\hbar/\Delta p = \lambda/2$  schließen, an dem die Atome gebeugt werden. Ein solches Gitter wird oft auch als Zwei-Photonen-Gitter bezeichnet.



**Abbildung 2.5:** Schema zur Erzeugung von optischen Gittern mit den Periode  $\lambda/2$  (A) und  $\lambda/4$  (B). **A** Das Atom im Grundzustand erfährt durch die zyklische Abfolge von Absorption und stimulierter Emission von Photonen der Frequenz  $\omega$  ein effektives periodisches Potential mit der Periodizität von  $\lambda/2$ . Die Ein-Photonen-Verstimmung zum optischen Übergang ist durch  $\Delta$  gegeben. **B** Das Atom wird hierbei durch zwei Grund- und zwei angeregte Energieniveaus beschrieben. Das Licht mit den Frequenzen  $\omega$  aus einer Richtung und  $\omega \pm \Delta\omega$  aus der anderen Richtung bewirkt, dass das Atom im Grundzustand  $|g_1\rangle$  zwei Absorptions- und stimulierte Emissionsprozesse vollzieht. Dadurch wird ein Impuls von  $4\hbar k$  an das Atom übertragen, was zu einem effektiven optischen Potential mit einer Periode von  $\lambda/4$  führt. Die Zwei-Photonen-Verstimmung zum Zustand  $|g_2\rangle$  ist  $\delta$  und die Rabi-Frequenzen sind  $\Omega_{\pi, \sigma^\pm}$ .

## Multiphotonen-Gitter

Optische Gitter mit einer kürzeren räumlichen Periode lassen sich einerseits durch Verwendung von Lichtfeldern mit kürzerer Wellenlänge [64], oder andererseits durch Prozesse höherer Ordnung erreichen, bei denen mehr als nur zwei Photonen beteiligt sind [65]. Bei einem Absorptions- und Emissionszyklus, an dem  $2n$ -Photonen teilnehmen, kann ein Impuls von bis zu  $2n\hbar k$  an das Atom übertragen werden, was zu einem Gitterpotential mit einer Periodizität von  $\lambda/2n$  führt. Um hierbei Prozesse niedriger Ordnung zu unterdrücken, können Lichtfelder mit unterschiedlichen Frequenzen und Polarisierungen genutzt werden.

Das im Experiment angewandte Schema ist in Abbildung 2.5B dargestellt und ist ein Beispiel für ein Vier-Photonen-Gitter, bei dem Zwei-Photonen-Prozesse unterdrückt sind. Das Niveauschema des Atoms wird durch zwei Grundzustände  $|g_1\rangle$  und  $|g_2\rangle$ , und durch zwei angeregte Niveaus  $|a_3\rangle$  und  $|a_4\rangle$  repräsentiert. Das Atom wird mit Licht der Frequenz  $\omega$  aus einer Richtung und Licht der Frequenzen  $\omega \pm \Delta\omega$  aus der entgegengesetzten Richtung beleuchtet. Wie in Abbildung 2.5 gezeigt, kann ein Atom im Grundzustand  $|g_1\rangle$  aufgrund der gewählten Lichtfrequenzen eine Abfolge von zwei Absorptions- und Emissionsprozessen durchlaufen, ohne einen der anderen Zustände zu besetzen. Im Doppler-sensitiven Fall nimmt das Atom dabei einen Impuls von  $4\hbar k$  auf, was zu einem Gitter mit einer Periodizität von  $\lambda/4$  führt. Dieser Vier-Photonen-Prozess wird im Folgenden mittels der zeitabhängigen Störungstheorie genauer betrachtet, wobei sich die Beschreibung an [66] orientiert.

Es wird die Lösung für die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t |\psi(z,t)\rangle = [\hat{H}_0 + \hat{W}(z,t)] |\psi(z,t)\rangle, \quad (2.49)$$

gesucht, wobei die Eigenwerte des ungestörten Hamilton-Operator  $\hat{H}_0$  bekannt seien. In Matrixform lässt der Hamilton-Operator sich in der Basis der ungestörten Lösungen  $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |a_3\rangle, |a_4\rangle\}$  durch

$$\hat{H}_0 = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta\omega - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega + \Delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega + \Delta \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

ausdrücken. Hierbei geht die Annahme ein, dass  $\delta < \Delta\omega \ll \Delta \ll \omega$ , wodurch für  $H_{4,4} = \omega + \Delta + \Delta\omega - \delta \approx \omega + \Delta$  vereinfacht angenommen wurde. Die zeitabhängige Störung wird durch die Wechselwirkung des induzierten Dipolmoments  $\mathbf{p}_{\text{ind}}$  des

Atoms mit der elektrischen Komponente des Lichtfeldes  $\mathbf{E}(z,t)$  beschrieben. Die nicht-verschwindenden Einträge der Wechselwirkungsmatrix  $\hat{W}(z,t)$  sind

$$\begin{aligned} W_{1,3} = W_{3,1}^* &= \langle g_1 | \mathbf{p}_{\text{ind}} \mathbf{E}(z,t) | a_3 \rangle \\ &= \hbar \Omega_\pi \cos(\omega t + kz) \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$W_{1,4} = W_{4,1}^* = \hbar \Omega_{\sigma^+} \cos((\omega + \Delta\omega)t - kz) \quad (2.52)$$

$$W_{2,3} = W_{3,2}^* = \hbar \Omega_{\sigma^-} \cos((\omega - \Delta\omega)t - kz) \quad (2.53)$$

$$W_{2,4} = W_{4,2}^* = \hbar \Omega_\pi \cos(\omega t + kz), \quad (2.54)$$

wobei  $\Omega_\pi$  und  $\Omega_{\sigma^\pm}$  die Rabi-Frequenzen der jeweiligen  $\pi$ - und  $\sigma^\pm$ -Übergänge darstellen. Zur Vereinfachung wurde hier angenommen, dass sich die Wellenzahlen nur marginal unterscheiden  $k \equiv k(\omega) \approx k(\omega + \Delta\omega) \approx k(\omega - \Delta\omega)$ . Setzt man den Lösungsansatz

$$|\psi(z,t)\rangle = \begin{pmatrix} c_1(z,t) \\ e^{-i(\Delta\omega - \delta)t} \cdot c_2(z,t) \\ e^{-i(\omega + \Delta)t} \cdot c_3(z,t) \\ e^{-i(\omega + \Delta)t} \cdot c_4(z,t) \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

in Gleichung (2.49) ein, ergeben sich vier gekoppelte Differenzialgleichungen für die Koeffizienten  $c_i$ :

$$\dot{c}_1 = -\frac{i}{2} \left( \Omega_\pi e^{-i\Delta t + ikz} \cdot c_3 + \Omega_{\sigma^+} e^{-i\Delta t - ikz} \cdot c_4 \right) \quad (2.56)$$

$$\dot{c}_2 = -\frac{i}{2} \left( \Omega_{\sigma^-} e^{-i(\Delta + \delta)t - ikz} \cdot c_3 + \Omega_\pi e^{-i(\Delta + \delta)t + ikz} \cdot c_4 \right) \quad (2.57)$$

$$\dot{c}_3 = -\frac{i}{2} \left( \Omega_\pi^* e^{i\Delta t - ikz} \cdot c_1 + \Omega_{\sigma^-}^* e^{i(\Delta + \delta)t + ikz} \cdot c_2 \right) \quad (2.58)$$

$$\dot{c}_4 = -\frac{i}{2} \left( \Omega_{\sigma^+}^* e^{i\Delta t + ikz} \cdot c_1 + \Omega_\pi^* e^{i(\Delta + \delta)t - ikz} \cdot c_2 \right). \quad (2.59)$$

Hierbei wurde die Drehwellennäherung berücksichtigt, bei der schnell oszillierende Terme vernachlässigt werden. Unter der Annahme, dass sich die Koeffizienten  $c_1$  und  $c_2$ , und damit die Besetzungen der beiden Grundzustände, nur langsam ändern, lassen sich die Gleichungen (2.58) und (2.59) zeitlich integrieren. Die hieraus gewonnenen Ausdrücke für  $c_3$  und  $c_4$  lassen sich in die Gleichungen (2.56) und (2.57) einsetzen und man erhält ein effektives Zwei-Niveau-System, das den Differenzialgleichungen

$$\dot{c}_1 = \frac{i}{2} \left[ \frac{|\Omega_\pi|^2 + |\Omega_{\sigma^+}|^2}{2\Delta} c_1 + e^{i\delta t} \left( \Omega_{\text{eff},-}^* e^{i2kz} + \Omega_{\text{eff},+} e^{-i2kz} \right) c_2 \right] \quad (2.60)$$

$$\dot{c}_2 = \frac{i}{2} \left[ e^{-i\delta t} \left( \Omega_{\text{eff},-} e^{-i2kz} + \Omega_{\text{eff},+}^* e^{i2kz} \right) c_1 + \frac{|\Omega_\pi|^2 + |\Omega_{\sigma^-}|^2}{2\Delta} c_2 \right] \quad (2.61)$$

folgt, wobei  $\Omega_{\text{eff},\pm} = \Omega_{\sigma^\pm}\Omega_\pi^*/2\Delta$  benutzt wurde. Geht man des Weiteren davon aus, dass sich die Besetzung anfänglich im Zustand  $|g_1\rangle$  befindet, also  $c_1 \gg c_2$ , und die Verstimmung  $\delta$  groß genug ist, kann auch die Gleichung (2.61) integriert werden und somit der Grundzustand  $|g_2\rangle$  adiabatisch eliminiert wird. Setzt man diese Lösung für  $c_2$  in Gleichung (2.60) ein, so ergibt sich

$$\dot{c}_1 = i \left[ \frac{|\Omega_\pi|^2 + |\Omega_{\sigma^+}|^2}{4\Delta} - \frac{|\Omega_{\text{eff},+}|^2 + |\Omega_{\text{eff},-}|^2}{4\delta} - \frac{|\Omega_{\text{eff},+}\Omega_{\text{eff},-}|}{2\delta} \cos(4kz + \varphi_{\lambda/4}) \right] c_1 \quad (2.62)$$

Dieses Ergebnis kann als effektive Energieverschiebung des Grundzustandes verstanden werden, wobei der erste Term eine positionsunabhängige Verschiebung aufgrund von Zwei-Photonen-Prozessen angibt. Der zweite und dritte Summand beschreiben die Prozesse vierter Ordnung und beinhalten im dritten Term die erwartete räumliche Periodizität von  $\lambda/4$ , wobei die Phase  $\varphi_{\lambda/4}$  gegeben ist über  $\Omega_{\text{eff},+}\Omega_{\text{eff},-} = |\Omega_{\text{eff},+}\Omega_{\text{eff},-}| e^{i\varphi_{\lambda/4}}$ . Das resultierende effektive Potential ist demnach gegeben durch

$$V_{\lambda/4}(z) = \frac{V_4}{2} \cos(4kz + \varphi_{\lambda/4}) + \text{const}, \quad (2.63)$$

mit der Potentialtiefe  $V_4 \propto I_\pi I_\sigma / \delta$ , die antiproportional zur Zwei-Photonen-Verstimmung  $\delta$  ist. Aufgrund der Abhängigkeit der Potentialtiefe von der Zwei-Photonen-Verstimmung ist es möglich, ortsabhängige Potentialtiefen in inhomogenen Magnetfeldern zu realisieren (s. Kap. 3.4). Im Allgemeinen kann das Vier-Photonen-Gitterpotential auch über die Phase  $\varphi_{\lambda/4}$  räumlich verschoben werden, wie es auch beim Zwei-Photonen-Gitterpotential der Fall ist (vgl. Gl. (2.48)).

## Bloch-Bändermodell

Die Dynamik von Atomen im eindimensionalen optischen Gitter lässt sich durch die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.18) beschreiben, wobei für geringe Teilchendichten der interatomare Wechselwirkungsterm vernachlässigt werden kann. Somit ergibt sich die Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Phi(z,t) = \left( \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_{\text{ext}}(z) \right) \Phi(z,t), \quad (2.64)$$

mit dem Impulsoperator  $\hat{p} = i\hbar\partial_z$ . Das externe Potential setzt sich im Experiment aus einer Summe aus Zwei- und Vier-Photonen-Gitter Potential zusammen (vgl. Gl. (2.48) und (2.63))

$$\begin{aligned} V_{\text{ext}}(z) &= V_{\lambda/2}(z) + V_{\lambda/4}(z) \\ &= \frac{V_2}{4} (e^{i2kz} + e^{-i2kz}) + \frac{V_4}{4} (e^{i(4kz+\varphi)} + e^{-i(4kz+\varphi)}). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Da das externe Potential räumlich periodisch ist ( $V_{\text{ext}}(z) = V_{\text{ext}}(z + L)$ , mit  $L = \lambda/2$ ), besitzt die Wellenfunktion nach dem Theorem von F. Bloch ebenfalls Anteile mit dieser Periodizität [67]. Die Wellenfunktion lässt sich mit dem sogenannten Bloch-Ansatz

$$\Phi(z,t) = e^{iqz/\hbar} u_q(z,t) \quad (2.66)$$

als eine ebene Welle mit einer periodisch variierenden Amplitude  $u_q(z,t) = u_q(z + L,t)$  schreiben. Der Quasiimpuls  $q$  gibt den relativen Impuls der Atome zum Gitter an. Setzt man den Bloch-Ansatz in Gleichung (2.64) ein, folgt

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u_q(z,t) = \left( \frac{(\hat{p} + q)^2}{2m} + V_{\text{ext}}(z) \right) u_q(z,t). \quad (2.67)$$

Die periodische Funktion  $u_q(z,t)$  lässt sich als diskrete Fourier-Summe schreiben

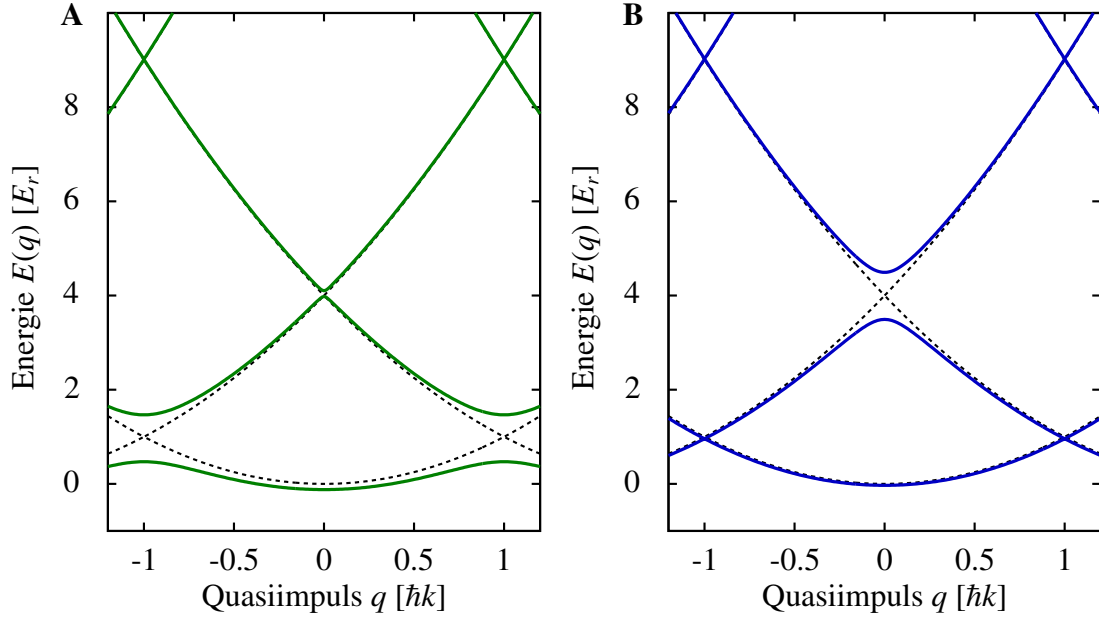
$$u_q(z,t) = \sum_l c_{q,l}(t) e^{i2lkz} \quad (2.68)$$

mit  $l \in \mathbb{Z}$ . Setzt man diese Summe und das externe Potential (2.65) in Gleichung (2.67) ein, ergeben sich für die Koeffizienten  $c_{q,l}(t)$  gekoppelte Differenzialgleichung der Form

$$i\hbar \dot{c}_{q,l} = \frac{(2l\hbar k + q)^2}{2m} c_{q,l} + \frac{V_2}{4} (c_{q,l-1} + c_{q,l+1}) + \frac{V_4}{4} (e^{+i\varphi} c_{q,l-2} + e^{-i\varphi} c_{q,l+2}). \quad (2.69)$$

Das Gleichungssystem lässt sich in Matrixdarstellung in Form einer Schrödinger-gleichung schreiben

$$i\hbar \partial_t |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (2.70)$$



**Abbildung 2.6:** Dispersionsrelation der Atome im optischen Gitter im Falle eines Zwei-Photonen-Gitters (links, grün) und eines Vier-Photonen-Gitters (rechts, blau). **A** An der ersten Bandkante bei  $q = \pm 1\hbar k$  zeigt sich die Wechselwirkung der Atome mit einem Zwei-Photonen-Gitter ( $V_2 = 2E_r$ ). Im Unterschied zur Dispersion eines freien Teilchens (gestrichelt) wird an dieser Stelle die Entartung der Energiebänder aufgehoben und es kommt zu einer vermiedenen Kreuzung. **B** Bei einem Vier-Photonen-Gitter ( $V_4 = 2E_r$ ) zeigt sich die Wechselwirkung erst an der zweiten Bandkante bei  $q = 0\hbar k$  und  $E = 4E_r$ , wo sich das erste und zweite angeregte Band kreuzen.

mit  $|\psi\rangle = \sum_l c_{q,l} |2l\hbar k + q\rangle = (\dots, c_{q,l-1}, c_{q,l}, c_{q,l+1}, \dots)^T$ , wobei die nicht-verschwindenden Einträge des Hamiltonoperators gegeben sind durch

$$H_{l,l} = \frac{(2l\hbar k + q)^2}{2m} \quad (2.71)$$

$$H_{l,l+1} = H_{l+1,l}^* = \frac{V_2}{4} \quad (2.72)$$

$$H_{l,l+2} = H_{l+2,l}^* = \frac{V_4}{4} e^{+i\varphi}. \quad (2.73)$$

Auf der Diagonalen (2.71) sind die Eigenenergien des freien Atoms mit Impuls  $p = 2l\hbar k + q$  zu finden, die der kinetischen Energie der Atome entsprechen. Die ersten Nebendiagonaleinträge (2.72) beschreiben den Einfluss des Zwei-Photonen-Gitters und auf der zweiten Nebendiagonalen (2.73) kommt die Wechselwirkung des Vier-Photonen-Gitters ins Spiel.

Die stationären Lösungen  $E(q)$ , mit  $H|\psi\rangle = E(q)|\psi\rangle$ , werden als Dispersionsrelation bezeichnet. Abbildung 2.6 zeigt die Dispersionsrelation der energetisch tiefsten Bänder



für ein Zwei- (grün) und ein Vier-Photonen-Gitter (blau). In beiden Fällen ist das gleiche reduzierte Bandschema ( $q = [-\hbar k, +\hbar k]$ ) gewählt. Die Energie wird üblicherweise in Einheiten der Rückstoßenergie aufgetragen  $E_r = (\hbar k)^2/2m$ , der kinetischen Energie, die ein Atom in Ruhe durch den Impulsübertrag eines Photons erhält. Im Falle von verschwindenden Potentialtiefen ist die Dispersionsrelation äquivalent zu der eines freier Teilchens (schwarz, gestrichelt). Kommt die Wechselwirkung mit den optischen Gittern hinzu, so wird die Entartung an Stellen, an den sich die Parabeln kreuzen, aufgehoben und es entstehen sogenannte vermiedene Kreuzungen, deren Energielücke mit steigender Potentialtiefe wächst. Durch die Überlagerung von Zwei- und Vier-Photonen-Gittern kann die Aufspaltung nahe der zweiten Bandkante bei  $E \approx 4E_r$  weitestgehend variiert werden. In Analogie zur Dispersionsrelation von Elektronen in Festkörperkristallen spricht man hier auch von einer Bandstruktur.



---

# Quantensimulation der Dirac-Gleichung mit ultrakalten Atomen

---

Freie massebehaftete Teilchen besitzen eine Energiedispersion, die quadratisch vom Impuls des Teilchens abhängt. Teilchen mit kleiner Masse, wie beispielsweise Elektronen, können leicht auf hohe Geschwindigkeiten gebracht werden, so dass relativistische Effekte eine Rolle spielen. Bei masselosen Teilchen, wie Photonen, ist die Energie proportional zum Impuls des Teilchens. Für Atome im optischen Gitter, nahe der Kreuzung zwischen dem ersten und zweiten angeregten Blochband, kann die Dispersion der Teilchen durch das Gitter so verändert werden, dass sich die Atome verhalten, als ob sie eine effektive Masse besitzen, die kleiner ist als ihre Ruhemasse. Mit geeignet gewählten Gitterparametern lässt sich diese effektive Masse sogar, im Rahmen der Messgenauigkeiten, auf null reduzieren. Hierdurch verhalten sich die Atome wie ultrarelativistische Teilchen. Auch bei im Vergleich zur Rückstoßenergie kleinen Aufspaltungen verhalten sich die Teilchen in guter Näherung wie relativistische Teilchen und folgen der spinlosen Dirac-Gleichung, wobei die effektive Lichtgeschwindigkeit der Atome nur wenige Zentimeter pro Sekunde beträgt. Mit dieser Anordnung lassen sich Quantensimulationen von Effekten relativistischer Wellengleichungen durchführen. Allgemein zeigen solche Quantensimulationen Effekte, die aus anderen quantenmechanischen Systemen bekannt oder vorhergesagt, dort aber schwierig zu untersuchen sind. Beispiele hierfür sind das in früheren Arbeiten gezeigte Klein-Tunneln [8] und die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Experimente zum negativen Brechungsindex. Im Folgenden wird die effektive Bewegungsgleichung der Atome im Gitter nahe der zweiten Bandkante hergeleitet [68]. Eine ähnliche Herleitung mit zusätzlich langsam veränderlichem Potential ist in [18] veröffentlicht. Anschließend wird die Quantensimulation des negativen Brechungsindex mit Atomen im optischen Gitter vorgestellt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden

die Grundlagen über Randzustände in räumlich variablen optischen Gitterpotentialen beschrieben.

### 3.1 Eindimensionale spinlose Dirac-Gleichung

Da die Schrödinger-Gleichung wegen der unterschiedlichen Ordnungen der zeitlichen und räumlichen Ableitungen nicht Lorentz-kovariant ist, wurde zunächst 1926 von E. Schrödinger [69], W. Gordon [70] und O. Klein [71] mittels des Korrespondenzprinzips eine relativistische skalare Wellengleichung aufgestellt, die die Bewegung von Teilchen mit der Masse  $m$  beschreibt. Die als Klein-Gordon-Gleichung bekannte Gleichung lautet

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi = 0, \quad (3.1)$$

wobei  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ , mit  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ , und über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. Diese Gleichung beschreibt nach der Interpretation von W. Pauli und V. Weisskopf Teilchen mit Spin Null [72], wie beispielsweise  $\pi$ -Mesonen. Wegen der zu meist als unphysikalisch eingestuften Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung mit negativer Wahrscheinlichkeitsdichte wurde durch P. Dirac ein weiterer Ansatz zur Aufstellung einer relativistischen Wellengleichung verfolgt. Die nach ihm benannte Dirac-Gleichung lautet

$$i\hbar\partial_t\psi = \left(\frac{\hbar c}{i}\alpha^k\partial_k + mc^2\beta\right)\psi \equiv H\psi, \quad (3.2)$$

die im Vergleich zur Klein-Gordon-Gleichung eine lineare Form besitzt, wie eine Schrödinger-Gleichung. Die Variablen  $\alpha^k$  und  $\beta$  stellen im Allgemeinen Matrizen dar, die so gewählt werden, dass die relativistische Energie-Impuls Beziehung  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$  erfüllt wird. Hieraus ergeben sich die Bedingungen

$$\alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{i,j}\mathbb{1}, \quad (3.3)$$

$$\alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0, \quad (3.4)$$

$$\alpha^2 = \beta^2 = \mathbb{1}. \quad (3.5)$$

In drei Dimensionen, mit  $k = (x, y, z)$ , lassen sich die Bedingungen nur mit mindestens  $4 \times 4$ -Matrizen lösen. Beschränkt man sich hingegen auf nur in eine Dimension, also  $k = z$ , genügen schon die Pauli-Matrizen  $\sigma_{x,y,z}$  mit der Größe  $2 \times 2$ . Hierdurch wird die Dirac-Gleichung zu

$$H\psi = \left(\hat{p}_z c \sigma_z + mc^2 \beta\right)\psi, \quad (3.6)$$

wobei  $\alpha^z = \sigma_z$  gewählt wurde und  $\beta$  eine Linearkombination  $\beta = \cos(\zeta)\sigma_x + \sin(\zeta)\sigma_y$  aus den beiden anderen Pauli-Matrizen darstellt, mit dem frei wählbaren Mischungswinkel  $\zeta$  und dem Impulsoperator  $\hat{p}_z = -i\hbar\partial_z$ . Mit dieser Wahl sind die Bedingungen (3.3), (3.4) und (3.5) erfüllt.

Die stationären Lösungen der Dirac-Gleichung lassen sich finden, indem  $H^2$  berechnet wird, wodurch eine Diagonalmatrix entsteht. Die Eigenenergien von  $H$  ergeben sich aus der Wurzel der Diagonaleinträge zu  $E_{1,2} = \pm \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ . Der Zustand mit positiver Eigenenergie beschreibt ein Teilchen mit Ruheenergie  $mc^2$  und Impuls  $p$ . Die Lösung mit negativer Energie sind physikalisch gesehen bedenklich, da die Energien nach unten nicht beschränkt sind. Eine Möglichkeit zur Interpretation hierzu wurde 1930 von P. A. M. Dirac vorgeschlagen, wonach im Vakuum alle Zustände mit negativen Energien besetzt sind. In diesem sogenannten „Dirac-See“ können Teilchen mit positiver Energie aufgrund des Pauli-Verbots nicht übergehen. Ein Problem dieser Interpretation ist allerdings, dass somit der Vakuumzustand unendlich hohe, negative Energie besitzt. Einen Ausweg liefert die Feynman-Stückelberg-Interpretation, nach der die Dirac-Gleichung sowohl Teilchen, als auch Antiteilchen beschreibt (s. z.B. [73]). Die Lösungen negativer Energie können hiernach durch zeitlich rückwärts laufende Teilchen erklärt werden, die als zeitlich vorwärts propagierende Antiteilchen verstanden werden können. Die Verallgemeinerung dieser Interpretation ist im CPT-Theorem zusammengefasst, wonach die Dirac-Gleichung invariant unter der Kombination aus Ladungs- (C, engl. charge), Paritäts- (P, engl. parity) und Zeitumkehr (T, engl. time) ist.

## 3.2 Effektive Dirac-Gleichung im optischen Gitter

In diesem Abschnitt wird die Dispersion auf den Kreuzungspunkt des ersten und zweiten angeregten Blochbandes beschränkt und es wird gezeigt, dass die Dynamik der Atome der eines quasirelativistischen Teilchens gleicht. Anschließend werden die grundlegenden Messmethoden vorgestellt, die zur Charakterisierung der optischen Gitter dienen, wie eine Rabi-Oszillation zwischen Impulszuständen und das Landau-Zener Tunneln.

Beschränkt man sich auf die drei energetisch niedrigsten Blochbänder, d.h. Grundband sowie erstes und zweites angeregtes Band, so lässt sich der Hamiltonoperator aus Gleichung (2.70) schreiben als

$$H = \begin{pmatrix} \frac{(-2\hbar k + q)^2}{2m} & \frac{V_2}{4} & \frac{V_4}{4} e^{-i\varphi} \\ \frac{V_2}{4} & \frac{q^2}{2m} & \frac{V_2}{4} \\ \frac{V_4}{4} e^{i\varphi} & \frac{V_2}{4} & \frac{(2\hbar k + q)^2}{2m} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Die Basis der Matrix ist die der ungestörten Impulszustände  $\{|-2\hbar k + q\rangle, |q\rangle, |2\hbar k + q\rangle\}$ . Für kleine Quasiimpulse  $q \ll \hbar k$  können die quadratischen Terme in  $q$  vernachlässigt werden, wodurch sich der Hamiltonoperator vereinfacht zu

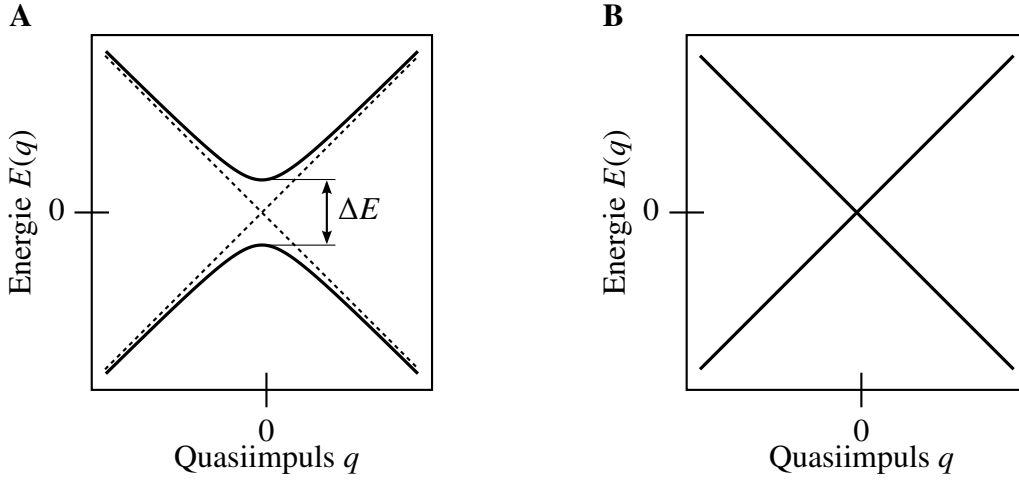
$$H \simeq \begin{pmatrix} -q \frac{2\hbar k}{m} + 4E_r & \frac{V_2}{4} & \frac{V_4}{4} e^{-i\varphi} \\ \frac{V_2}{4} & 0 & \frac{V_2}{4} \\ \frac{V_4}{4} e^{i\varphi} & \frac{V_2}{4} & q \frac{2\hbar k}{m} + 4E_r \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Eine Energieverschiebung um  $4E_r$  liefert  $H' = H - 4E_r \cdot \mathbb{1}$ , wodurch der neue Energienullpunkt auf Höhe der Kreuzung zwischen dem ersten und zweiten angeregten Blochband liegt (vgl. Abb. 2.6). Um die Eigenenergien des gekoppelten Systems zu finden, kann mittels der linearen Transformation  $H'' = U^\dagger H' U$  und der Transformationsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{V_2}{16E_r} & 1 & \frac{V_2}{16E_r} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

das System umgeformt werden, wodurch man ein System mit nur noch zwei gekoppelten Bändern und dem kopplungsfreien Grundband erhält.

$$H'' = \begin{pmatrix} -q \frac{2\hbar k}{m} + \frac{V_2^2}{64E_r} & 0 & \frac{V_2^2}{64E_r} + \frac{V_4}{4} e^{-i\varphi} \\ 0 & -4E_r & 0 \\ \frac{V_2^2}{64E_r} + \frac{V_4}{4} e^{i\varphi} & 0 & q \frac{2\hbar k}{m} + \frac{V_2^2}{64E_r} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$



**Abbildung 3.1:** Dispersionsrelation am Kreuzungspunkt zwischen den ersten beiden angeregten Bändern. **A** Eine Kopplung durch das optische Gitter erzeugt eine vermiedene Kreuzung mit Energieabstand  $\Delta E = 2 |m_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2|$  zwischen den Bändern. **B** Die Dispersion der Atome im Falle einer verschwindenden effektiven Masse gleicht der eines Photons, da die Energie proportional zum (Quasi-)Impuls ist.

Die neue Basis, die sich durch die Transformation ergibt, lautet  $\{|-2\hbar k + q\rangle, |q\rangle + \epsilon, |2\hbar k + q\rangle\}$ , wobei  $\epsilon = V_2/16E_r(|-2\hbar k + q\rangle + |2\hbar k + q\rangle)$ . An dieser Stelle sei angemerkt, dass es sich hierbei nicht um eine unitäre Transformation handelt, da  $U^\dagger U \neq \mathbb{1}$ , und deshalb nur für kleine Werte der Zwei-Photonen-Gitter Potentialtiefe  $V_2 \ll 16E_r$  vertretbar ist. Da nun die Einträge auf der ersten Nebendiagonalen verschwinden, lässt sich das System in der reduzierten Basis  $\{|-2\hbar k + q\rangle, |2\hbar k + q\rangle\}$  schreiben als

$$H_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} -q \frac{2\hbar k}{m} & \frac{V_2^2}{64E_r} + \frac{V_4}{4} e^{-i\varphi} \\ \frac{V_2^2}{64E_r} + \frac{V_4}{4} e^{i\varphi} & q \frac{2\hbar k}{m} \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

wobei hier die Nullpunktenergie um  $V_2^2/64E_r$  im Vergleich zu Gleichung (3.10) verschoben wurde. Definiert wird nun eine effektive Lichtgeschwindigkeit mit  $c_{\text{eff}} = 2\hbar k/m$  und eine effektive Masse mit

$$m_{\text{eff}}(V_2, V_4, \varphi) = \left( \frac{V_2^2}{64E_r} + \frac{V_4}{4} e^{-i\varphi} \right) / c_{\text{eff}}^2. \quad (3.12)$$

Damit erhält man aus (3.11) für den effektiven Hamilton-Operator

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}} &= \begin{pmatrix} -qc_{\text{eff}} & m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2 \\ m_{\text{eff}}^*c_{\text{eff}}^2 & qc_{\text{eff}} \end{pmatrix} \\
 &= \text{Re}(m_{\text{eff}})c_{\text{eff}}^2\sigma_x + \text{Im}(m_{\text{eff}})c_{\text{eff}}^2\sigma_y - qc_{\text{eff}}\sigma_z,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

mit den drei Pauli-Matrizen  $\sigma_i$  die Form der eindimensionalen Dirac-Gleichung (vgl. Gl. (3.6)).

### Eigenzustände und Rabi-Oszillation

Für die folgende Betrachtung sei die effektive Masse real und  $m_{\text{eff}} > 0$ . Hierdurch verschwindet in Gleichung (3.13) der Term proportional zu  $\sigma_y$ . Die Eigenenergien dieses Systems sind nun gegeben durch

$$\begin{aligned}
 E_{\pm} &= \pm \sqrt{(qc_{\text{eff}})^2 + (m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2)^2} \\
 &\approx \pm \left( m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2 + \frac{q^2}{2m_{\text{eff}}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

mit den Eigenzuständen

$$|+\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+2\hbar k + q\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-2\hbar k + q\rangle \tag{3.15}$$

$$|-\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+2\hbar k + q\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-2\hbar k + q\rangle, \tag{3.16}$$

wobei  $\tan(\theta) = -m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}/q$  mit  $0 \leq \theta < \pi$  [74]. Ebenso lassen sich die ungestörten Eigenzustände  $|\pm 2\hbar k + q\rangle$  in der neuen Basis  $|\pm\rangle$  ausdrücken

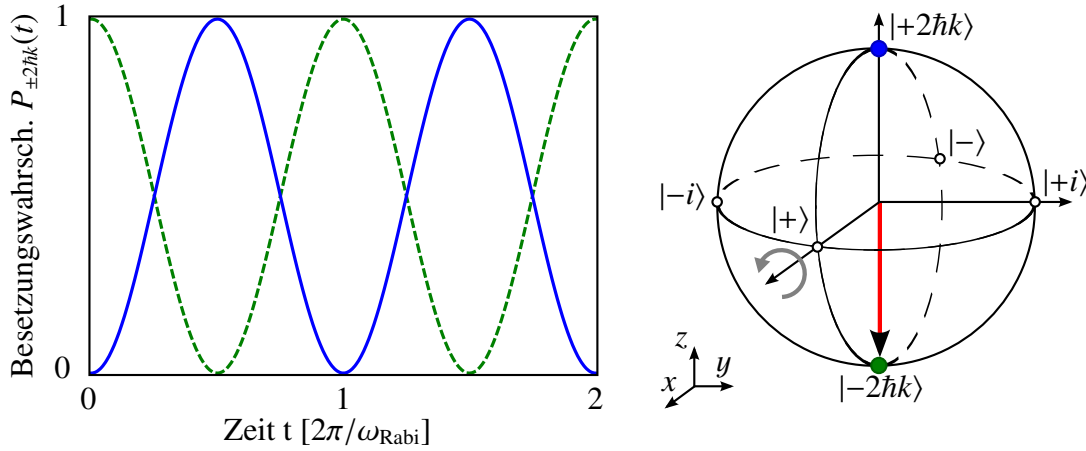
$$|-2\hbar k + q\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle \tag{3.17}$$

$$|+2\hbar k + q\rangle = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|-\rangle. \tag{3.18}$$

Nimmt man an, dass zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  sich das System bei einem Quasiimpuls von  $q_0 = 0$  in einem der ungestörten Zustände befinde, beispielsweise in  $|\psi(t_0)\rangle = |-2\hbar k\rangle$ , so ist die zeitliche Entwicklung des Ausgangszustandes gegeben über

$$\begin{aligned}
 |\psi(t)\rangle &= \hat{U}(t)|\psi(t_0)\rangle \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( e^{-iE_+t/\hbar} |+\rangle - e^{-iE_-t/\hbar} |-\rangle \right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$





**Abbildung 3.2:** Rabi-Oszillation der gekoppelten Impulszustände  $|\pm 2\hbar k\rangle$ . Zum Zeitpunkt  $t = 0$  befinden sich die Atome im Zustand  $|-2\hbar k\rangle$ . Durch die Kopplung mit dem Gitter, mit  $\text{Re}(m_{\text{eff}}) > 0$  und  $\text{Im}(m_{\text{eff}}) = 0$ , ändert sich die Wahrscheinlichkeit die Atome im Ausgangszustand ( $P_{-2\hbar k}$ , grün gestrichelt) oder im Zustand  $|+2\hbar k\rangle$  zu finden ( $P_{+2\hbar k}$ , blau) oszillatorisch. Betrachtet man diese Entwicklung auf einer Blochkugel, so entspricht diese Oszillation einer Drehung des Bloch-Vektors (rot) um die  $x$ -Achse.

mit dem Zeitentwicklungsoperator  $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System nach der Zeit  $t$  im Zustand  $|+2\hbar k\rangle$  befindet, ist

$$\begin{aligned}
 P_{+2\hbar k}(t) &= |\langle +2\hbar k | \psi(t) \rangle|^2 \\
 &= \sin^2 \left( \frac{E_+ - E_-}{2\hbar} \cdot t \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( 2 \frac{m_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2}{\hbar} \cdot t \right) \right]. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung der Besetzungswahrscheinlichkeit des Zustandes  $|-2\hbar k\rangle$  liefert  $P_{-2\hbar k}(t) = \cos^2(m_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2 / \hbar \cdot t)$ . Es kommt demnach zu einer Oszillation der Besetzung der beiden ungestörten Eigenzustände, wobei die Gesamtwahrscheinlichkeit das System in einem von beiden Zuständen zu finden  $P_{+2\hbar k}(t) + P_{-2\hbar k}(t) = 1$  ist. Dieses Verhalten wird auch als Rabi-Oszillation bezeichnet. Aus der Messung der Oszillationsfrequenz

$$\omega_{\text{Rabi}} = 2m_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2 / \hbar \tag{3.21}$$

lässt sich der Wert für die effektiven Masse und damit auch die Potentialtiefe der optischen Gitter bestimmen (vgl. Gl. (3.12)). Abbildung 3.2 zeigt die Rabi-Oszillation sowie eine äquivalente Betrachtung anhand einer Bloch-Kugel. Jeder Punkt auf der

Oberfläche der Bloch-Kugel entspricht einem Zustand. Dieser kann als Superposition der Impulszustände geschrieben werden

$$|\psi\rangle = e^{i\phi} \sin \frac{\Theta}{2} |+2\hbar k\rangle + \cos \frac{\Theta}{2} |-2\hbar k\rangle, \quad (3.22)$$

mit  $0 < \Theta < \pi$  und  $0 < \phi < 2\pi$ . Die mit  $|\pm i\rangle$  bezeichneten Zustände liegen bei  $\Theta = \pi/2$  und  $e^{i\phi} = \pm i$ .

## Landau-Zener Tunneln

Klassisch hat eine externe Kraft auf ein Objekt eine Impulsänderung zur Folge. F. Bloch konnte zeigen, dass sich der Quasiimpuls von Elektronen in einer periodischen Kristallstruktur ebenso verändert, wenn eine schwache äußere Kraft auf diese wirkt [67]. Der Quasiimpuls erhält somit eine zeitliche Abhängigkeit

$$q(t) = q_0 + F \cdot t, \quad (3.23)$$

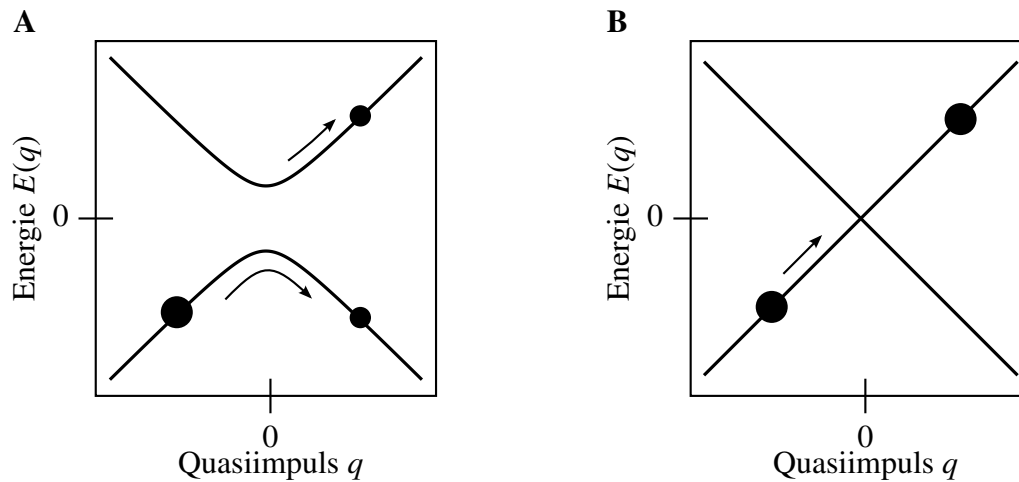
mit dem Quasiimpuls  $q_0$  zum Zeitpunkt  $t = 0$  und der konstanten Kraft  $F = m \cdot a$ . Durch die Änderung des Quasiimpulses verschiebt sich die Position der Atome in der Dispersionsrelation. Abbildung 3.3 zeigt ein Szenario, in dem die Atome über eine vermiedene (A) und eine echte Kreuzung (B) beschleunigt werden. Die theoretische Beschreibung dieses Prozesses geht auf L. Landau und C. Zener zurück, die namensgebend für diesen Effekt sind und ihn unabhängig voneinander entdeckt haben [75, 76]. Die Atome haben, abhängig von der Größe der Bandlücke  $\Delta E$  eine Wahrscheinlichkeit in höhere Bänder zu tunneln bzw. in ihrem Band zu bleiben. Die Tunnelwahrscheinlichkeit hängt dabei von der Beschleunigung  $a$  und der Energielücke zwischen den Bändern  $\Delta E = |2m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2|$  ab

$$\Gamma(a, \Delta E) = e^{-a_{\text{krit}}/a}, \quad (3.24)$$

mit der kritischen Beschleunigung

$$a_{\text{krit}} = \frac{\pi \Delta E^2}{4\hbar^2 k}. \quad (3.25)$$

Bei einer gegebenen Energielücke und einer langsamen Beschleunigung  $a \ll a_{\text{krit}}$  verschwindet die Tunnelwahrscheinlichkeit, so dass die Atome dem Band adiabatisch folgen können. Für hohe Beschleunigungen  $a \gg a_{\text{krit}}$  dominiert hingegen die Wahrscheinlichkeit zu tunneln, so dass die Atome ihr Band wechseln. Bei einer festen Beschleunigung lässt sich mit Hilfe des Landau-Zener-Tunnelrate, dem Verhältnis aus getunnelten zu reflektierten Atomen, die Energieaufspaltung der Bänder ermitteln. Im



**Abbildung 3.3:** Landau-Zener Tunneln an einer Bandkante. Die Atome mit Quasiimpuls  $q < 0$  werden mit Hilfe einer externen Kraft über eine Bandkante zu  $q > 0$  hin beschleunigt. **A** Ein Teil der Atome werden an der Bandkante reflektiert, d. h. sie bleiben in ihrem Band. Der andere Teil der Atome tunnelt in das energetisch höhere Band. **B** Verschwindet die Bandlücke zwischen den Bändern, so wird die Wahrscheinlichkeit die Atome im höheren Band zu finden eins.

Falle der Bandlücke zwischen erstem und zweiten angeregtem Blochband verschwindet die Energielücke für (vgl. Gl. (3.12))

$$V_4 = -V_2^2/16E_r \cdot e^{i\varphi}, \quad (3.26)$$

so dass hier die Tunnelwahrscheinlichkeit unabhängig von der Beschleunigung gleich 1 wird. Das Verfahren des Landau-Zener-Tunnelns bietet somit eine Möglichkeit, die beiden Potentialtiefen  $V_2$  und  $V_4$ , sowie die Phase  $\varphi$  so einzustellen, so dass die beiden Bänder sich bei  $E = 0$  kreuzen. Ein solcher Kreuzungspunkt von zwei Zweigen entgegengesetzt linearer Dispersion wird oft auch als Dirac-Punkt bezeichnet, da sich die Atome hier wie masselose Teilchen verhalten, die sich mit ihrer effektiven Lichtgeschwindigkeit bewegen.

### 3.3 Negative Brechung für atomare Wellenpakete

Optische Lichtbrechung tritt an Materialoberflächen auf, an denen sich der materialspezifische Brechungsindex der beiden berührenden Materialien unterscheidet. Der Brechungsindex ist im Allgemeinen eine komplexe Zahl, wobei der Realteil die Dispersion und der Imaginärteil die Absorption von Licht im Medium beschreibt. Der Brechungsindex ist gegeben über

$$n^2 = \epsilon\mu \quad (3.27)$$

$$n = \pm \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (3.28)$$

In der Natur vorkommende Materialien besitzen in der Regel einen positiven Brechungsindex. Jedoch konnte V. G. Veselago 1964 mit Hilfe der Maxwell-Gleichungen folgern, dass Materialien mit negativer Permittivität  $\epsilon$  und negativer Permeabilität  $\mu$  einen negativen Brechungsindex  $n$  besitzen müssen [20], auch wenn damals keine Materialien mit negativem Brechungsindex bekannt waren. Die theoretische Beschreibung solcher Materialien zeigt, dass diese ungewöhnliche optische Eigenschaften besitzen, insbesondere an den Grenzflächen zu Materialien mit positivem Brechungsindex. Die Lichtbrechung an einer Oberfläche wird durch das Snelliussche Brechungsgesetz beschrieben

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2, \quad (3.29)$$

wobei  $n_1$  und  $n_2$  die Brechungsindizes der beiden Materialien darstellen. Hierbei bezeichnen  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  die Winkel des einfallenden und des ausgehenden Lichtstrahls bezüglich des Lots zur Oberfläche (s. Abb. 3.4). An der Grenzfläche mit einem Material mit positivem Brechungsindex  $n_1 > 0$  und einem mit negativem Brechungsindex  $n_2 < 0$  kommt es zur negativen Lichtbrechung, da der Winkel  $\alpha_2$  negativ wird und somit sowohl der einfallende, sowie der ausgehende Lichtstrahl auf der selben Seite des Lots liegen. Die Wellenvektoren  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{k}'$  des einfallenden Lichtstrahls und des ausgehenden Lichtstrahls stehen in der Beziehung

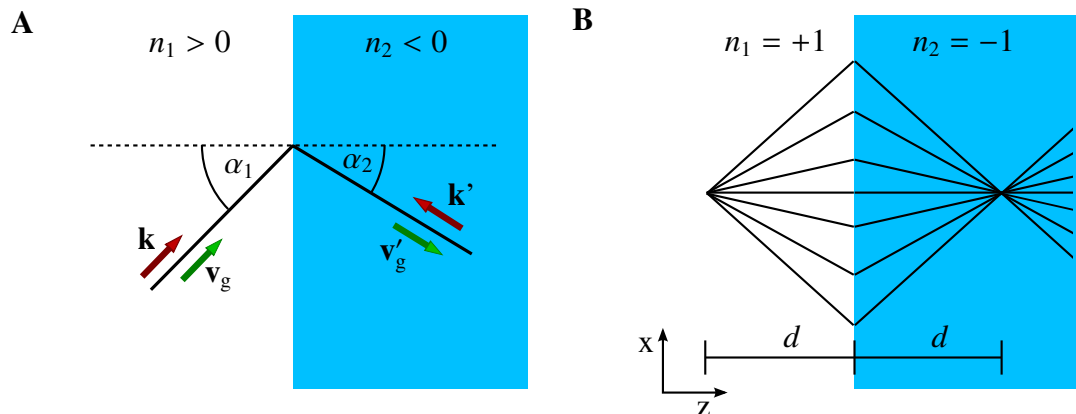
$$\frac{|\mathbf{k}|}{n_1} = \frac{|\mathbf{k}'|}{n_2} \quad (3.30)$$

$$k'_x = k_x \quad (3.31)$$

$$k'_y = k_y = 0 \quad (3.32)$$

$$k'_z = k_z \cdot n_2 \cos \alpha_2 / n_1 \cos \alpha_1 \quad (3.33)$$

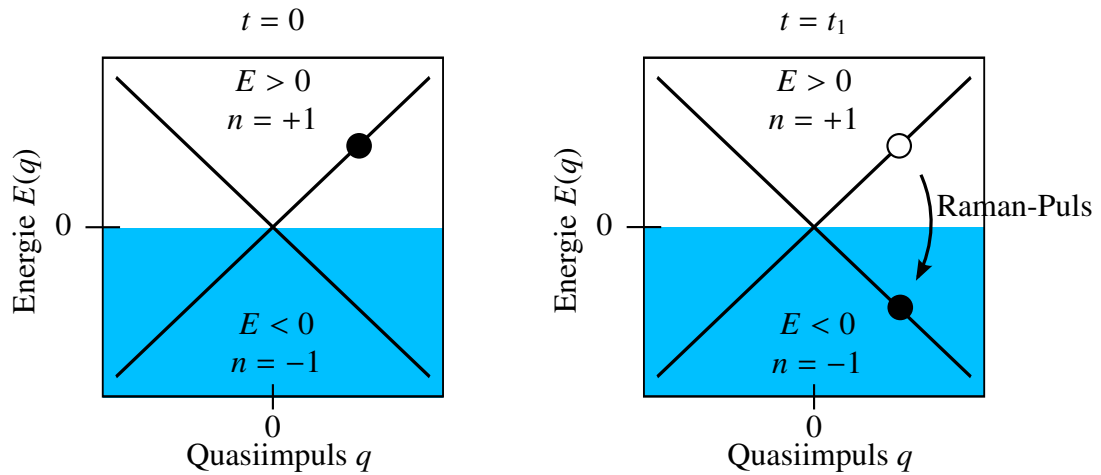
und zeigen beide in Richtung der Grenzfläche. Hierbei findet die Brechung des Lichtstrahls in der  $x$ - $z$ -Ebene statt, so dass die  $y$ -Komponenten der beiden Wellenvektoren verschwinden. Der Poynting-Vektor  $\mathbf{S}$ , der den Energiefluss angibt, zeigt in beiden



**Abbildung 3.4:** Negative Brechung. **A** An der Oberfläche zwischen einem Medium mit positivem und einem mit negativem Brechungsindex kommt es zur negativen Brechung, d. h. der gebrochene Strahl propagiert auf der gleichen Seite des Lots (gestrichelt). Hierbei sind im Medium mit positivem (negativen) Brechungsindex der Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und die Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_g$  parallel (antiparallel). **B** Divergentes Licht einer Punktquelle wird durch eine Veselago-Linse fokussiert und innerhalb des Mediums mit negativem Brechungsindex auf einen Punkt abgebildet. Die Abstände zwischen Objekt und Grenzschicht, sowie zwischen Grenzschicht und Bildebene sind identisch.

Materialien in Vorwärtsrichtung. Der Effekt der negativen Brechung konnte erstmals mit künstlichen Materialien (Metamaterialien) im Frequenzbereich von Mikrowellen gezeigt werden [77].

Mit seiner Kenntnis entwarf V. G. Veselago eine „Linse“ aus Material mit negativem Brechungsindex und planaren Oberflächen (s. Abb. 3.4). Diese Veselago-Linse bildet divergente Strahlen einer Punktquelle wieder auf einen Punkt ab. Hingegen werden parallel einfallende Strahlen im Gegensatz zu herkömmlichen Linsen durch die Veselago-Linse nicht fokussiert. J. B. Pendry konnte zeigen, dass eine solche Veselago-Linse mit  $n_1 = 1$  und  $n_2 = -1$  eine nicht durch das Beugungslimit begrenzte Auflösung besitzt [21]. Da in Medien mit negativem Brechungsindex evaneszente Wellen verstärkt werden, können auch Strukturen aufgelöst werden, die kleiner sind als die Wellenlänge des verwendeten Lichts. Zunächst im infraroten Frequenzbereich [22] und später ultravioletten Frequenzbereich [78, 79] konnten Veselago-Linse realisiert werden, wobei jeweils ein Auflösungsvermögen unterhalb des Beugungslimits beobachtet wurde. Für quasirelativistische Elektronen in Graphen wurde ebenfalls der Effekt der negativen Brechung vorhergesagt [23], der am Übergang von p- und n-dotiertem Graphen auftreten soll. Im Bereich der ultrakalten Atome in Dunkelzuständen gibt es analoge Vorhersagen [24].



**Abbildung 3.5:** Der Übergang zwischen dem Band mit positiver Energie, wo Gruppengeschwindigkeit und Quasiimpuls das selbe Vorzeichen besitzen, zu einem Band mit negativer Energie, in dem Quasiimpuls und Gruppengeschwindigkeit entgegengesetzte Vorzeichen haben, wird durch einen Vier-Photonen Raman-Puls realisiert und entspricht dem Eintritt des Wellenpakets in ein Medium mit negativem Brechungsindex.

In der in Abschnitt 3.2 beschriebenen quasirelativistischen Dynamik der ultrakalten Atome im optischen Gitterpotential lässt sich ebenfalls der Effekt der negativen Brechung zeigen [80]. Für den Fall einer verschwindenden effektiven Masse (s. Gl. (3.26)) verhalten sich die Atome lichtartig, d.h. sie bewegen sich wie masselose Teilchen. Allerdings ist man durch das im Experiment verwendete eindimensionale Gitter auf eine Dimension beschränkt, weshalb die Bewegung der Atome nur in der  $x$ -Achse betrachtet wird, so dass  $q \equiv \hbar k_x$  (s. Abb. 3.4 und vgl. Gl. (3.31)). Die Ausbreitung in Richtung der  $z$ -Achse wird durch die zeitliche Entwicklung der Atome im Gitter ersetzt. In einer Dimension ergeben sich somit zwei Teilstrahlen, einer in positiver und der andere in negativer  $x$ -Richtung. Die Gruppengeschwindigkeit der Atome in der Nähe des Dirac-Punktes ist gegeben durch

$$v_g(q) = \left. \frac{\partial E(\tilde{q})}{\partial \tilde{q}} \right|_q = \pm c_{\text{eff}}. \quad (3.34)$$

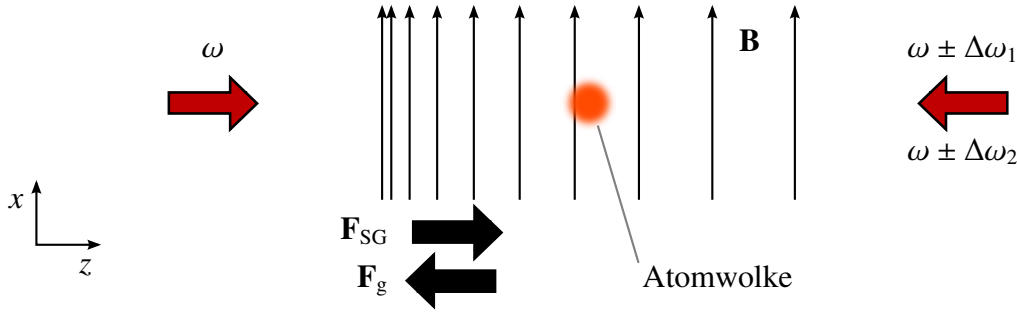
Somit ist die Geschwindigkeit der Atome in erster Ordnung unabhängig von ihrem Quasiimpuls. Für Atome mit Energie  $E > 0$  hat die Gruppengeschwindigkeit und der Quasiimpuls das gleiche Vorzeichen, so dass die Bewegung der Atome der Ausbreitung von Licht durch ein Medium mit positivem Brechungsindex  $n_1 = 1$  gleicht. Im Gegensatz dazu haben bei Atomen mit Energien  $E < 0$  die Gruppengeschwindigkeit und der Quasiimpuls entgegengesetzte Vorzeichen, so dass man hier den Vergleich zur Propagation von Licht in einem Medium mit negativem Brechungsindex  $n_2 = -1$

ziehen kann. Der Wechsel von einem Wellenpaket mit positiver Energie zu einem mit negativer Energie bei gleich bleibendem Quasiimpuls entspricht nach dieser Interpretation also einem Eintritt von Licht in ein Medium mit negativem Brechungsindex. Im Experiment kann dies durch einen Vier-Photonen Raman- $\pi$ -Puls umgesetzt werden [80, 81], der die Zustände  $|+2\hbar k + q\rangle$  und  $|-2\hbar k + q\rangle$  genau solange koppelt, bis die Besetzungen der beiden Zustände getauscht haben. Eine Veselago-Linse lässt sich mit diesen Mitteln konstruieren, indem Atome zunächst in den beiden Dispersionszweigen mit positiver Energie präpariert werden und sich dort aufgrund ihrer unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten von einander separieren. Nach einer gewissen Propagationsdauer  $t_1$  folgt der Raman- $\pi$ -Puls, der die Atome in die Bänder mit negativer Energie transferiert, wodurch sich die Gruppengeschwindigkeit der Atome umkehrt und sie sich im idealisierten System nach der Zeit  $t_2 = 2t_1$  wieder am Ursprungspunkt treffen.

### 3.4 Randzustände in variablen optischen Gitterpotentialen

Ein topologischer Isolator besitzt, wie auch ein gewöhnlicher Isolator, eine große Bandlücke zwischen ihrem Valenz- und Leitungsband. Bringt man einen topologischen und einen gewöhnlichen Isolator zusammen, so müssen sich die Energiebänder kontinuierlich verbinden. Allerdings ist die Bandstruktur eines topologischen Isolators (teilweise) zu der des gewöhnlichen Isolators invertiert, was bedeutet, dass sich das Valenzband des einen Isolators mit dem Leitungsband des anderen verbindet und umgekehrt. An der Grenzfläche treten so durch die Zeit-Umkehr-Symmetrie geschützte Randzustände auf, da sich die Bandlücke dort schließt [25]. Diese Randzustände bewirken eine hohe Leitfähigkeit an der Grenzfläche. Die Existenz solcher Randzustände wurde 2006 erstmals experimentell beobachtet, mit Hilfe eines Quantentopfs bestehend aus einer Verbindung aus Quecksilbertellurid (HgTe) und Cadmitellurid (CdTe) [26, 27].

Die Beschreibung von Randzuständen in unserem System geht auf die Untersuchung der eindimensionalen Feldtheorie von R. Jackiw und C. Rebbi [36] zurück und von einer spinlosen Dirac-Gleichung mit räumlich varrierender Masse aus. Das Vorzeichen der Masse wechselt dabei von negativ für Positionen  $z < 0$  nach positiv für  $z > 0$ . Ein solcher Ansatz wird auch im SSH-Modell (Su, Schrieffer und Heeger) benutzt, welches ursprünglich mobile Defekte in Polyacetylen-Ketten beschreiben sollte [37, 38]. Im vorliegenden Experiment kann mit Hilfe eines magnetischen Gradientenfeldes eine räumlich abhängige Potentialtiefe des Vier-Photonen-Gitters erzeugt werden. Hieraus lässt sich eine positionsabhängige effektive Masse  $m_{\text{eff}} \equiv m_{\text{eff}}(z) \propto a \cdot z$  realisieren, die bei  $z_0 = 0$  verschwindet, analog zum SSH-Modell. Die theoretische Be-



**Abbildung 3.6:** Ein um  $90^\circ$  im Uhrzeigersinn gedrehtes experimentelles Schema. Die Atome befinden sich in einem magnetischen Gradientenfeld, wobei die Feldlinien des B-Feldes senkrecht auf der Achse des optischen Gitters bzw. der Gravitationsrichtung stehen. Die optischen Frequenzen  $\omega$ ,  $\omega \pm \Delta\omega_1$  und  $\omega \pm \Delta\omega_2$  erzeugen zwei überlagerte Gitter mit Periodizität  $\lambda/4$  und räumlich variabler Amplitude. Die Stern-Gerlach-Kraft und die Gravitationskraft gleichen sich aus, so dass keine äußere Kraft auf die Atome wirkt.

schreibung unseres Systems wurde in Zusammenarbeit mit A. Rosch und M. Genske der Universität von Köln ausgearbeitet [35]. Als Lösungen ergeben sich räumlich lokalisierte Randzustände, die alle bis auf einen paarweise auftreten. Der einzige Singlettzustand liegt bei der Energie  $E = 0$  und ist bei  $z_0$  lokalisiert. Dieser Zustand ist topologischer Natur, seine soll nun genauer beschrieben werden.

Für die folgende Betrachtung befinden sich die Atome zusätzlich zum optischen Gitterpotential in einem linearen magnetischen Gradientenfeld mit  $|\mathbf{B}| = B_0 + bz$  und  $b = \text{grad}(\mathbf{B})_z$ , wobei die  $z$ -Achse mit der Richtung des optischen Gitters übereinstimmt (siehe Abb. 3.6). Das Magnetfeld bewirkt eine positionsabhängige Zeeman-Aufspaltung der Atome und erzeugt die Stern-Gerlach-Kraft entlang der  $z$ -Achse

$$F_{SG,z} = m_F g_F \mu_B b. \quad (3.35)$$

Diese Kraft soll die gleiche Stärke wie die Gravitationskraft  $F_G = mg$  mit der Erdbeschleunigung  $g$  besitzen, allerdings dieser entgegengesetzt sein, so dass keine äußere Kraft mehr auf die Atome wirkt. Die Atome befinden sich im optischen Gitter, das aus einer Überlagerung von zwei Vier-Photonen-Gittern realisiert wird. Dabei hat das eine Vier-Photonen-Gitter eine positive Zwei-Photonen-Verstimmung  $\delta_1 > 0$  und das andere Gitter eine negative Verstimmung  $\delta_2 < 0$  am Ort der Atome. Ein Zwei-Photonen-Gitter ist bei dieser Betrachtung nicht vorhanden, d. h.  $V_2 = 0$ . Die verbleibende positionsabhängige Zeeman-Aufspaltung hat Einfluss auf die Potentialtiefe der beiden Vier-Photonen-Gitter, da die Zwei-Photonen-Verstimmungen ebenfalls positi-



onsabhängig werden (vgl. Gl. (2.63) und Abb. 2.5). Die Verstimmungen und die Potentialtiefen lassen sich schreiben als

$$\delta_i(z) = \pm\delta_i + (m_F g_F \mu_B b / \hbar) \cdot z \quad (3.36)$$

$$V_{4,i}(z) = \hbar \frac{|\Omega_{\text{eff}}|^2}{\delta_i(z)}, \quad (3.37)$$

mit  $i = \{1,2\}$ . Berücksichtigt man nur den konstanten und linearen Anteil einer Taylor-Entwicklung der Potentialtiefen  $V_{4,i}$  um die Position  $z_0 = 0$ , so ergeben sich

$$V_{4,i}(z) = \pm V_0 + 2a \cdot z + O(z^2), \quad (3.38)$$

mit  $V_0 = \hbar |\Omega_{\text{eff}}|^2 / 2\delta_0$  und  $a = -V_0 m_F g_F \mu_B b / (2\hbar\delta_0)$ , wobei  $\delta_0 \equiv \delta_1 = -\delta_2$  gelten soll. Für die gesamte Potentialtiefe (vgl. Gl. (2.63)) der beiden Vier-Photonen-Gitter ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} V_{\lambda/4}(z) &= V_{4,1}(z)/2 \cos(4kz) + V_{4,2}(z)/2 \cos(4kz + \varphi) \\ &\stackrel{\varphi=0}{=} 2a \cdot z \cos(4kz), \end{aligned} \quad (3.39)$$

für den Fall, dass die Phasenverschiebung zwischen den Gittern  $\varphi = 0$  beträgt. Für den Kopplungsterm in der eindimensionalen Dirac-Gleichung (3.13) ergibt sich nun mit Gleichung (3.12)

$$m_{\text{eff}} c_{\text{eff}}^2 = a \cdot z, \quad (3.40)$$

wodurch der effektive Hamiltonoperator zu

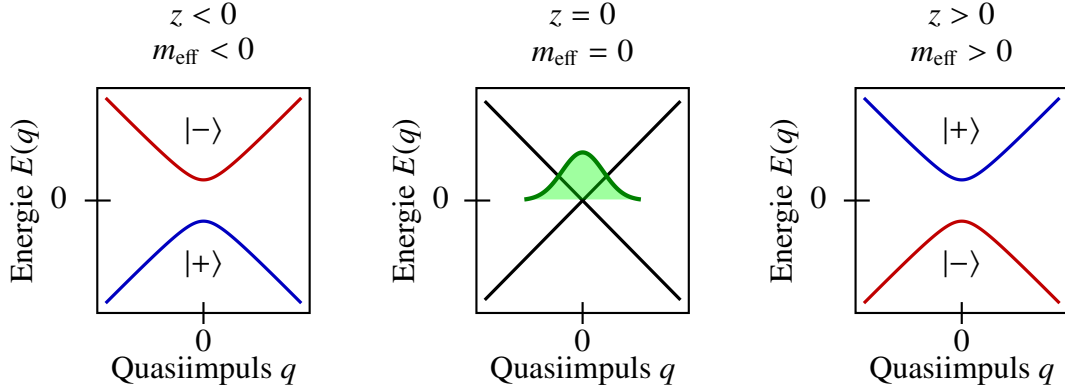
$$H_{\text{eff}} = a z \sigma_x - q c_{\text{eff}} \sigma_z \quad (3.41)$$

wird. Da der Hamiltonoperator nun sowohl vom Ort als auch vom Impuls abhängt, sind die Lösungen keine ebenen Wellen mehr, wie es beim Bloch-Ansatz noch der Fall war. Die Lösungen sind vielmehr Funktionen, die sowohl von Ort wie auch vom Impuls abhängen, ähnlich den Lösungen eines quantenmechanischen harmonischen Oszillators.

Um die Eigenenergien des Systems zu bestimmen, wird zunächst  $H_{\text{eff}}^2$  berechnet, wobei der Quasiimpuls durch  $q = -i\hbar\partial_z$  ersetzt wird. Der quadrierte Hamiltonoperator ist gegeben durch

$$H_{\text{eff}}^2 = (\hbar^2 c_{\text{eff}}^2 \partial_z^2 + (a z)^2) \mathbb{1} + a \hbar c_{\text{eff}} [z, \partial_z] \sigma_y, \quad (3.42)$$

wobei der Kommutator  $[z, \partial_z] = -1$  ist. Der erste Term besitzt die Form eines quantenmechanischen harmonischen Oszillatorpotentials, so dass hier ein Ansatz mit



**Abbildung 3.7:** Anschauliche Darstellung der räumlich variierenden Bandstruktur. Für Positionen  $z > 0$  sind die effektive Masse und damit auch der Kopplungsterm ebenfalls positiv, so dass eine „normale“ Bandstruktur vorliegt. Im Gegensatz dazu haben die Bänder für Positionen  $z < 0$  eine andere topologische Phase. Hier ist die effektive Masse negativ, so dass der Zustand  $|+\rangle$  ( $|-\rangle$ ) eine negative (positive) Eigenenergie besitzt und die Bandstruktur daher „invertiert“ erscheint. Im Zentrum, bei  $z = 0$ , wo die Kopplung der Bänder verschwindet, existiert ein Randzustand zwischen den beiden unterschiedlichen topologischen Phasen mit Eigenenergie null (grün).

Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren  $A^\dagger$  bzw.  $A$  nahelegt. Diese werden definiert durch

$$A^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2a\hbar c_{\text{eff}}}} (-\hbar c_{\text{eff}} \partial_z + a z) \quad (3.43)$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2a\hbar c_{\text{eff}}}} (\hbar c_{\text{eff}} \partial_z + a z), \quad (3.44)$$

und erfüllen somit die Kommutatorrelation  $[A, A^\dagger] = 1$ . Der quadrierte Hamiltonoperator vereinfacht sich dann zu

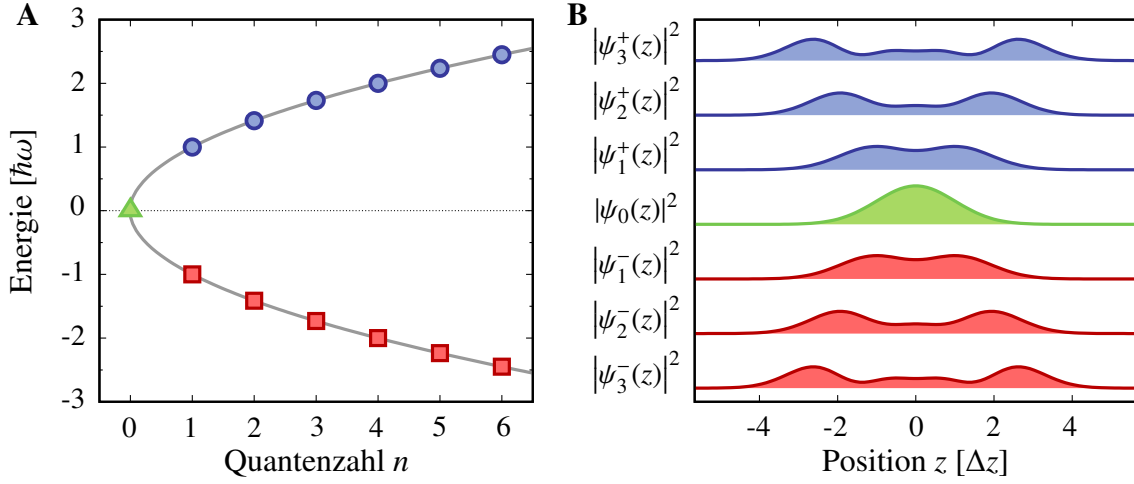
$$H_{\text{eff}}^2 = \hbar^2 \omega^2 \left( A^\dagger A + \frac{1}{2} \right) \mathbb{1} - \frac{\hbar^2 \omega^2}{2} \sigma_y, \quad (3.45)$$

mit der Frequenz  $\omega = \sqrt{2ac_{\text{eff}}/\hbar}$ . Die Diagonalisierung dieser Matrix liefert

$$H_{\text{eff}}^2 = \begin{pmatrix} \hbar^2 \omega^2 \hat{n} & 0 \\ 0 & \hbar^2 \omega^2 (\hat{n} + 1) \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

wobei  $\hat{n} = A^\dagger A$  der Besetzungszahloperator (Anregungsoperator) ist, mit

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle. \quad (3.47)$$



**Abbildung 3.8:** **A** Energiespektrum der Eigenzustände um  $z = 0$ . Bei Quantenzahlen  $n > 0$  existieren jeweils ein Zustand mit positiver Energie (blau) und einer mit negativer Energie (rot). Lediglich bei  $n = 0$  existiert nur ein Zustand mit Energie  $E = 0$  (grün). **B** Das Betragsquadrat der Wellenfunktionen mit Quantenzahlen  $n \leq 3$  im Ortsraum.

Da die Matrix in Gleichung (3.46) eine Diagonalform besitzt, können die Eigenenergien  $E_n$  zum Zustand mit Quantenzahl  $n$  des effektiven Hamiltonoperators aus der Wurzel der Diagonalelemente errechnet werden. Die Eigenenergien sind demnach

$$E_n = \begin{cases} 0, & \text{wenn } n = 0 \\ \pm \hbar\omega \sqrt{n}, & \text{wenn } n \geq 1 \end{cases} . \quad (3.48)$$

Für Quantenzahlen  $n > 0$  gibt es jeweils eine Lösung mit positiver und eine Lösung mit negativer Energie. Bei  $n = 0$  gibt es jedoch nur einen Zustand, welcher bei  $E = 0$  liegt (s. Abb. 3.8A). Der Eigenzustand zu  $n = 0$  ist in Ortsdarstellung gegeben durch

$$\langle z|\psi_0\rangle = \psi_0(z) = C_1 \exp\left(-C_2 \int_0^z a z' dz'\right) \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

$$= \left(\frac{a}{4\pi\hbar c_{\text{eff}}}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a z^2}{2\hbar c_{\text{eff}}}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

wobei sich die Konstanten  $C_i$  durch das Einsetzen in

$$H_{\text{eff}} |\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(z)|^2 dz = 1 \quad (3.52)$$

ergeben. Der Eigenzustand ist demnach eine Gauß-förmige Welle, die sich als Superposition aus den Impulszuständen  $|-2\hbar k\rangle$  und  $|2\hbar k\rangle$  mit Phasenwinkel  $\phi = \pi/2$  zusammensetzt. Der  $1/\sqrt{e}$ -Radius des Wellenpakets beträgt  $\Delta z = \sqrt{\hbar c_{\text{eff}}/2a}$ . Die Wellenfunktionen der Randzustände mit Quantenzahl  $n > 0$  und positiver (+) und negativer Eigenenergie (-) sind von der Form [82]

$$\langle z|\psi_n^\pm\rangle = \psi_n^\pm(z) = \frac{1}{\sqrt{4}} \left[ \varphi_{n-1}(z) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \pm \varphi_n(z) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right] \quad (3.53)$$

mit

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{a}{\pi \hbar c_{\text{eff}}} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{a z^2}{2 \hbar c_{\text{eff}}}\right) H_n(\sqrt{a/\hbar c_{\text{eff}}} z), \quad (3.54)$$

wobei  $H_n$  die hermiteschen Polynome sind. Das Betragsquadrat der Wellenfunktion der Zustände mit  $n \leq 3$  ist in Abbildung 3.8B dargestellt.

---

# Experimenteller Aufbau

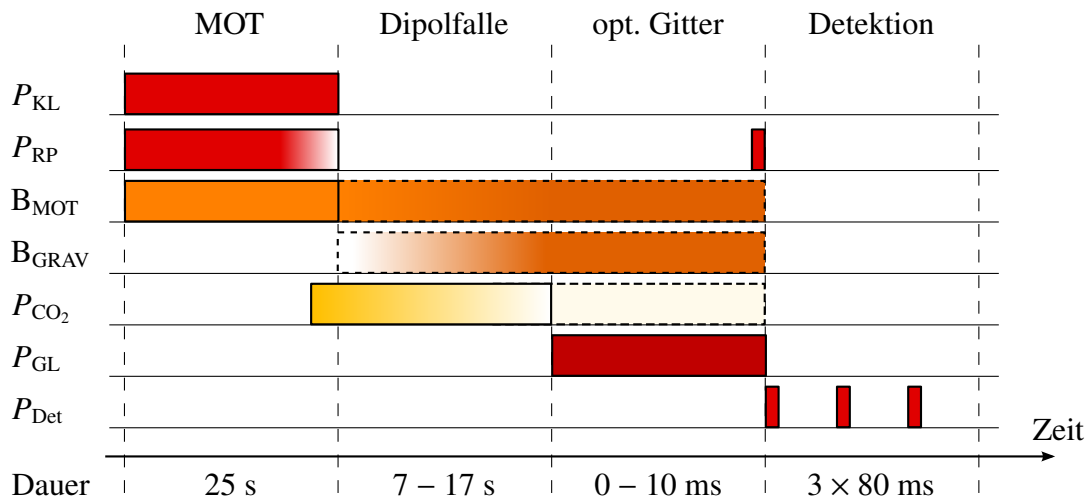
---

Dieses Kapitel beschreibt den generellen experimentellen Aufbau zur Untersuchung von ultrakalten Rubidiumatomen in optischen Gittern. Dabei wird auf die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Veränderungen gegenüber früherer Arbeiten [63, 66, 83–85] näher eingegangen. Zunächst wird ein Überblick über den experimentellen Ablauf gegeben. Anschließend werden das Vakuumkammersystem und die Anordnung der Magnetfeldspulen beschrieben. Danach werden die Lasersysteme für die magneto-optische Falle, die optische Dipolfalle und das optische Gitter vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung des Abbildungssystems ab.

## 4.1 Übersicht über den Ablauf des Experiments

Da das Bose-Einstein-Kondensat nach der Wechselwirkung mit dem optischen Gitter durch die Detektion mit nahresonantem Licht vernichtet wird, findet das Experiment zyklisch statt. Der Experimentzyklus ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt und lässt sich grob in vier Phasen aufteilen: MOT-, Dipolfallen-, optische Gitter-, Detektionsphase.

Während der MOT-Phase gelangen Rubidiumatome aus einem erhitzten Rubidiumdispenser ins Hintergrundgas der Vakuumkammer. Ein Teil der frei gewordenen Atome werden dann in der magneto-optischen Falle gekühlt und im Zentrum der Kammer gefangen. Am Ende dieser Phase werden die vorgekühlten Atome in die optische Dipolfalle umgeladen. Die Dipolfalle wird durch einen fokussierten  $\text{CO}_2$ -Laserstrahl mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$  realisiert, der etwa eine Sekunde vor Ende der MOT-Phase eingeschaltet wird. Während der zweiten Phase befinden sich die Atome in der optischen Dipolfalle und das nahresonante Licht der Laserstrahlen für die MOT ist ausgeschaltet. Nach einer kurzen natürlichen Evaporation setzt die forcierte Evaporation ein, was erreicht wird indem die Intensität des  $\text{CO}_2$ -Laserstrahls herab-



**Abbildung 4.1:** Experimentelle Sequenz. Der experimentelle Zyklus kann grob in vier logische Phasen aufgeteilt werden. Während der ersten Phase sind Kühlaserstrahl (KL), Rückpumpplaserstrahl (RP) und die MOT-Spulen aktiv. Am Ende dieser Phase wird der Dipolfallenlaserstrahl eingeschaltet und der Rückpumpplaserstrahl abgeschwächt. In der zweiten Phase befinden sich die Atome in einer Dipolfalle, die durch einen  $CO_2$ -Laserstrahl erzeugt wird und deren Potentialtiefe kontinuierlich heruntergefahren wird. Wahlweise werden während dieser Phase die MOT- und GRAV-Spulen zusätzlich hochgefahren, um ein magnetisches Gradientenfeld zu erzeugen, so dass die zustandsabhängige Stern-Gerlach-Kraft auf die Atome wirkt. Am Ende dieser Phase ist das Bose-Einstein-Kondensat erzeugt, das anschließend in der dritten Phase mit dem optischen Gitter wechselwirkt (GL: Gitterlaser). Die optische Dipolfalle stellt gegebenenfalls währenddessen ein zusätzliches externes Potential dar. In der letzten Phase wird die Atomwolke mit einer Absorptionsabbildung detektiert.

gesenkt wird. Die Kühlung wird fortgesetzt bis die Rubidiumatome kondensieren. Das in der Dipolfalle erzeugte Kondensat kommt in der nächsten Phase in Wechselwirkung mit dem periodischen optischen Gitter. Zusätzlich dazu können sich die Atome noch in einem externen Potential wie beispielsweise dem Dipolfallenpotential des  $CO_2$ -Laserstrahls oder einem magnetischen Potential befinden. Nach der Wechselwirkung mit dem optischen Gitter werden die Atome durch eine Absorptionsabbildung detektiert.

Gesteuert wird der Experimentzyklus durch einen Mikroprozessor (Jäger Computer-gesteuerte Messtechnik, *ADwin-Pro*), der über verschiedene analoge (-10V...+10V, Auflösung 16 bit) und digitale (TTL) Ausgangskanäle verfügt, deren Ausgangsspannungen mikrosekundengenau variiert werden können. Diese Ausgangsspannungen dienen als Steuerspannung oder als Triggersignal für jegliche Netzteile, Radiofrequenz-Verstärker, mechanische Lichtverschlüsse, Funktionsgeneratoren etc.. Der zeitliche Ablauf dieser Ausgangssignale kann mit einem grafischen Steuerpro-

gamm<sup>1</sup> am PC festgelegt werden, der mit dem Mikroprozessor über die Netzwerkschnittstelle kommuniziert. Das Programm wurde im Rahmen dieser Arbeit dahingegen erweitert, dass in jedem Durchlauf die Experimentphase des optischen Gitters immer zur gleichen Phase der Netzspannung anfängt, um Magnetfeldvariationen von Zyklus zu Zyklus zu vermeiden.

## 4.2 Vakuumsystem und Magnetfelder

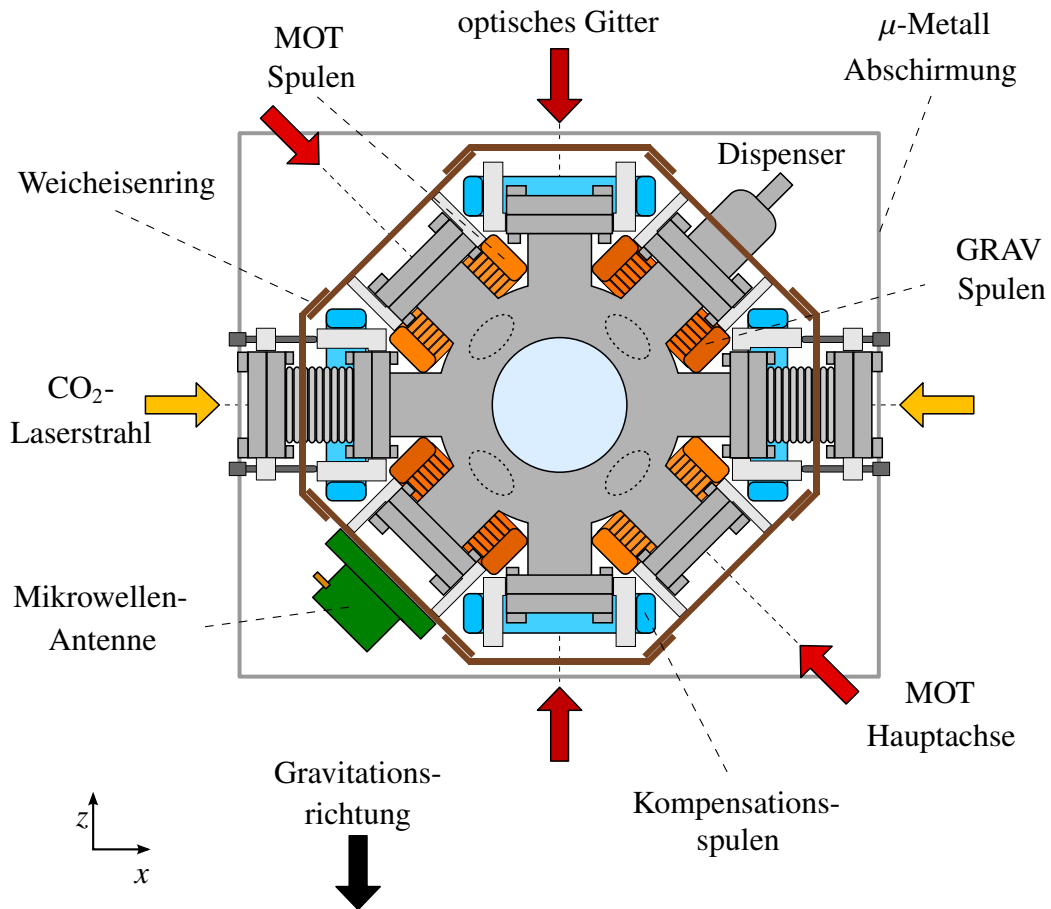
Die Lebensdauer der in der Dipolfalle gefangenen Atome ist unter anderem durch Stöße mit thermischen Atomen aus dem Hintergrundgas beschränkt. Um diese Stoßrate so gering wie möglich zu halten ist es nötig, dass das Experiment in einem Ultrahochvakuum stattfindet. Das Vakuumsystem besteht im vorliegenden Experiment aus zwei verbundenen Edelstahlkammern, einer sphärischen Hauptkammer und einer zylindrischen Vorkammer (s. Abb. 4.2 und 4.9). An der Vorkammer befinden sich die Vakuumpumpen und ein Drucksensor (Leybold, TR 211). Als Vakuumpumpen kommen eine Ionen-Getter-Pumpe (Meca2000, VTS 25l/s) und eine Titan-Sublimationspumpe (Riber, TSP2) zum Einsatz.<sup>2</sup> Der Druck in den Kammern beträgt etwa  $3 \cdot 10^{-10}$  mbar.

Die Vorkammer ist mit einem CF-63-Flansch mit der Hauptkammer verbunden und hat auf der gegenüberliegenden Seite ein 70 mm großes Quarzfenster. Die Hauptkammer hat einen Durchmesser von 162 mm und verfügt über ein 90 mm großes Hauptfenster gegenüber der Verbindung zur Vorkammer. Die Frontalansicht der Hauptkammer in Abbildung 4.2 zeigt vier symmetrisch angeordnete Flanschpaare (CF-38). Mit Ausnahme der horizontalen Achse und dem Flansch, an dem sich der Dispenser befindet, sind alle Flansche mit einem 40 mm großen Quarzfenster ausgestattet, die für nahinfrarotes Licht antireflexionsbeschichtet sind. Hinzu kommen vier kleinere Flanschpaare, deren Positionen der Übersichtlichkeit halber nur gepunktet angedeutet sind. Diese verfügen ebenfalls über optische Zugänge und besitzen einen Durchmesser von 20 mm.

Auf der  $x$ -Achse verläuft der CO<sub>2</sub>-Laserstrahl (gelb), der das Dipolfallenpotential erzeugt, horizontal durch die Hauptkammer. An den beiden Flanschen auf dieser Achse befinden sich Fenster aus Zinkselenid (ZnSe), da diese für die infrarote Strahlung des CO<sub>2</sub>-Lasers transparent sind. Mit Hilfe von drei Justageschrauben an den beiden Flanschen kann das vakuumseitige Teleskop, bestehend aus zwei ZnSe-Linsen mit Brennweite  $f = 38,1$  mm, eingestellt werden. Die Eingangslinse des Teleskops fokus-

<sup>1</sup> programmiert von C. Geckeler in der Programmiersprache python

<sup>2</sup> Da der Betrieb dieser beiden Pumpen ein Hochvakuum voraussetzt, wurde das Kammer-System zunächst bei etwa 120°C ausgeheizt und mit einer an die Vorkammer vorübergehend angeschlossene Turbomolekularpumpe sowie einer vorgeschalteten Drehschieberpumpe evakuiert.



**Abbildung 4.2:** Schematischer Aufbau der Hauptkammer (Frontansicht). Die Verwendung der optischen Zugänge der sphärischen Hauptkammer (dunkelgrau) werden durch farbige Pfeile gezeigt (CO<sub>2</sub>-Laserstrahl: gelb, Kühl- und Rückpumpulaserstrahl (MOT): rot, optische Gitterstrahlen: dunkelrot). Das Spulenpaar auf der MOT-Hauptachse werden als MOT-Spulen (orange) und orthogonal dazu als GRAV-Spulen (braun) bezeichnet. Auf dieser Diagonalen befinden sich die Dispenser und die Mikrowellenantenne (grün). In blau sind die Kompensationsspulenpaare in  $x$ - und  $z$ -Richtung dargestellt. Umgeben wird die Vakuumkammer durch einen achteckigen Weicheisenring (dunkelbraun) und eine quaderförmige Magnetfeldabschirmung aus  $\mu$ -Metall (grau). In hellgrau sind Aluminiumhalterungen dargestellt.

siert den CO<sub>2</sub>-Laserstrahl ins Zentrum der Hauptkammer, so dass hier ein attraktives harmonisches Dipolpotential für die kalten Atome entsteht.

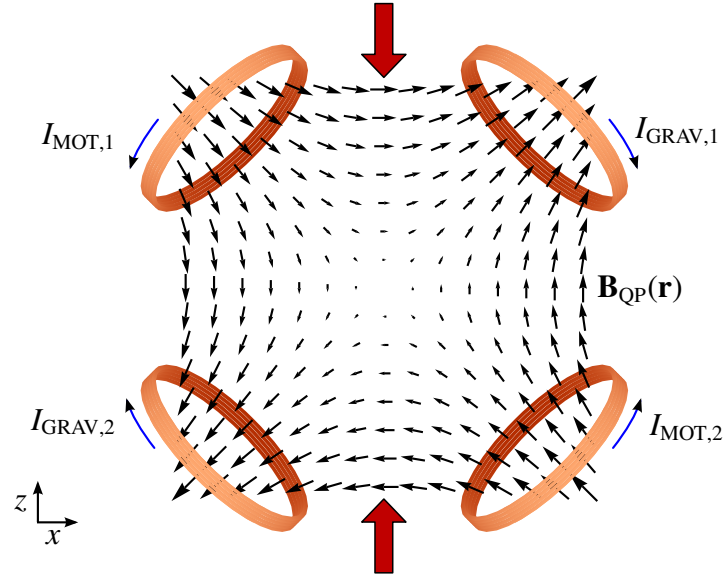
Auf der MOT-Hauptachse ( $-45^\circ$ ) befindet sich das Spulenpaar (orange) für die magneto-optischen Falle, das im Folgenden mit MOT-Spulen bezeichnet wird. Diese Spulen wurden im Rahmen dieser Arbeit selbst entworfen, gewickelt und getestet. Die Spulen bestehen aus runden isolierten Kupferröhrchen mit je 28 Wicklungen, die zur Kühlung wasserdurchflossen sind. Die Kupferröhrchen haben einen Außendurch-



messer von 4 mm und eine Wandstärke von 0,5 mm. Die Spulen haben einen mittleren Radius von  $R = 43,1$  mm und einen mittleren Abstand zueinander von  $A = 91,5$  mm. Somit ist das Verhältnis von Abstand zu Radius  $A/R \approx 2,1 > \sqrt{3}$  leicht größer als das für ein Spulenpaar in perfekter Anti-Helmholtz-Konfiguration (vgl. Kap. 2.2). Hierdurch kommt in Gleichung (2.39) ein Term proportional zu  $z^3$  hinzu, der aber für kleine Abstände vom Zentrum vernachlässigt werden kann. Die beiden Spulen sind in Reihe geschaltet, wobei die Stromrichtungen entgegengesetzt sind, so dass sie ein Quadrupolfeld erzeugen. Für den MOT-Betrieb fließt ein Strom von 70 A, welcher einem magnetischen Gradienten von etwa  $b = 11,6$  Gs/cm im Zentrum der Kammer entspricht. Am Netzteil (Agilent, 6691A), welches beide Spulen versorgt, fallen währenddessen ca. 10 V Spannung ab. Die Wasserkühlung der Spulen wurde im Dauerbetrieb getestet und reicht für Ströme bis zu 200 A und einer Verlustleistung von 3 kW je Spule aus [86]. Die anderen beiden Strahlenachsen für die magneto-optische Falle sind orthogonal zur Hauptachse und verlaufen durch die kleineren Flansche.

In der  $x,z$ -Ebene und orthogonal zur MOT-Hauptachse ( $+45^\circ$ ) befindet sich am oberen Flansch eine elektrische Durchführung zu den drei in der Hauptkammer befindlichen Rubidiumdispensern. Diese bestehen aus mit Rubidiumchromat ( $\text{Rb}_2\text{CrO}_4$ ) beschichteten Metallstreifen (SAES Getters, RB/NF3.4). Ein Rubidiumdispenser wird während der MOT-Phase mit einem Strom von ca. 4 A durchflossen, so dass sich das Metall erhitzt und Rubidiumatome durch eine chemische Reaktion frei gesetzt werden. Auf dem gegenüberliegenden Flansch auf dieser Achse ist ein SMA-auf-Hohlleiter-Adapter (Flann, 14094-SF40) fest installiert, der als Mikrowellenantenne dient. Mikrowellenpulse mit einer Frequenz von etwa 6.8 GHz kommen bei der Abbildung der Atome zum Einsatz und können dazu verwendet werden, nur Atome in bestimmten Zeeman-Zuständen abzubilden (s. Kap. 4.6).

Auf dieser Diagonalen befindet sich ein weiteres Spulenpaar (braun), welches als GRAV-Spulen bezeichnet ist. Diese Spulen sind baugleich zu den MOT-Spulen, werden aber durch ein separates Netzteil des gleichen Typs (Agilent, 6691A) mit Strom versorgt. Die Stromrichtung in den beiden Spulen ist entgegengesetzt, so dass auch dieses Spulenpaar ein magnetisches Quadrupolfeld erzeugt, allerdings mit anderer Orientierung gegenüber den MOT-Spulen (s. Abb. 4.3). Diese Spulen können zusätzlich zu den MOT-Spulen eingeschaltet werden, um so für Atome in Zuständen mit magnetischem Moment (z.B.  $m_F = -1$ ) während der Dipolfallen- und optischen Git-



**Abbildung 4.3:** Effektives zweidimensionales Quadrupolfeld erzeugt durch zwei Spulenpaaren in Anti-Helmholtz-Konfiguration. Auf der Mittelsenkrechten stehen die Feldlinien (schwarze Pfeile) orthogonal zur Achse des optischen Gitters (rote Pfeile). Die Stromrichtung durch die Spulen ist mit blauen Pfeilen dargestellt.

terphase mittels der Stern-Gerlach-Kraft die Gravitationskraft zu kompensieren. Das Magnetfeld beider Spulenpaare lässt sich mit

$$\mathbf{B}_{\text{MOT}}(\mathbf{r}) = R_y(-\pi/4) \cdot \begin{pmatrix} b/2 & 0 & 0 \\ 0 & b/2 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \cdot R_y(\pi/4) \cdot \mathbf{r} = \frac{b}{4} \cdot \begin{pmatrix} -x + 3z \\ 2y \\ 3x - z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{B}_{\text{GRAV}}(\mathbf{r}) = R_y(\pi/4) \cdot \begin{pmatrix} -b/2 & 0 & 0 \\ 0 & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} \cdot R_y(-\pi/4) \cdot \mathbf{r} = \frac{b}{4} \cdot \begin{pmatrix} x + 3z \\ -2y \\ 3x + z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

angeben, wobei durch die Drehmatrixen  $R_y(\alpha)$  berücksichtigt wird, dass die Spulenpaare um die Winkel  $\alpha = \pm\pi/4$  um die  $y$ -Achse gedreht sind, im Vergleich zu Gleichung (2.39). Das resultierende Feld ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\text{QP}}(\mathbf{r}) &= \mathbf{B}_{\text{MOT}}(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_{\text{GRAV}}(\mathbf{r}) \\ &= \frac{3b}{2}(x\hat{\mathbf{e}}_z + z\hat{\mathbf{e}}_x) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$|\mathbf{B}_{\text{QP}}|(\mathbf{r}) = \frac{3b}{2} \sqrt{x^2 + z^2} \quad (4.4)$$

Es wird also effektiv ein zweidimensionales Quadrupolfeld in  $x$ - $z$ -Richtung erzeugt, wobei die  $y$ -Komponente verschwindet. Abbildung 4.3 zeigt das erzeugte Magnetfeld mit den jeweiligen Stromrichtungen der vier Gradientenspulen. Damit die Stern-Gerlach-Kraft (Gl. (2.37)) für Atome im Zeeman-Zustand  $|F = 1, m_F = -1\rangle$  mit  $g_F = -0.5$  genau so groß ist wie die Gravitationskraft, wird ein magnetischer Gradient von etwa  $3b/2 = 30,5$  Gs/cm benötigt, der mit einem elektrischen Strom durch die Spulen von etwa 120 A erreicht wird. Die Ströme durch die Spulen sind aufgrund des 16-bit Digital-Analog-Wandlers des ADwin-Systems auf eine minimale Schrittweite von 3,4 mA beschränkt und besitzen ein relatives Rauschen von etwa  $\Delta I_{\text{rms}}/I = 6 \cdot 10^{-5}$ , gemessen im Bereich von DC bis 1kHz.

Damit das Magnetfeld am Ort der Atome bei  $\mathbf{r} = (0,0,0)$  nicht verschwindet, kann mit Hilfe von Kompensationsspulen (s. Abb. 4.2, blau) ein zusätzliches homogenes Magnetfeld (Offset-Feld) erzeugt werden. Hierfür ist in jeder Raumrichtung ein Spulenpaar in nahezu Helmholtz-Konfiguration angebracht, deren Magnetfeldstärke bis zu 5 Gs beträgt. Durch die Überlagerung des Quadrupolfeldes  $\mathbf{B}_{\text{QP}}$  mit einem homogenes Magnetfeld  $-B_0 \hat{\mathbf{e}}_x$  entlang der  $x$ -Achse ergibt das gesamttes Magnetfeld

$$\mathbf{B}_{\text{ges}}(\mathbf{r}) = \frac{3b}{2}(x\hat{\mathbf{e}}_z + z\hat{\mathbf{e}}_x) - B_0\hat{\mathbf{e}}_x \quad (4.5)$$

$$|\mathbf{B}_{\text{ges}}|(\mathbf{r}) \stackrel{x \approx 0, z \approx 0}{\approx} B_0 - \frac{3b}{2}z + \frac{9b^2}{8B_0}x^2. \quad (4.6)$$

Die Kombination aus magnetischem Potential für Atome im Zustand  $m_F = -1$  und Gravitationspotential  $V_g(\mathbf{r}) = m_{\text{Rb}}gz$  hat schließlich die Form

$$\begin{aligned} V_{\text{ges}}(\mathbf{r}) &= V_{\text{mag}}(\mathbf{r}) + V_g(\mathbf{r}) \\ &\approx m_F g_F \mu_B \left( B_0 + \frac{9b^2}{8B_0} x^2 \right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

wobei  $m_F g_F \mu_B 3b/2 = -m_{\text{Rb}}g$  ist. Der konstante Anteil des Potentials entspricht der Energieverschiebung durch den Zeeman-Effekt und der zweite Summand stellt ein harmonisches Potential entlang der  $x$ -Achse dar.

Die Hauptkammer ist umgeben von einer magnetischen Abschirmung aus  $\mu$ -Metall, die Streufelder am Ort der Atome unterdrücken soll. Die quaderförmige Abschirmung hat eine Wandstärke von 1 mm und besitzt optische Zugänge auf den MOT-Achsen, sowie für den  $\text{CO}_2$ -Laserstrahl, die Gitterstrahlen und zur Detektion. In einem separaten Aufbau wurde die Effizienz der Abschirmung mittels einer auf eine Spule gegebene Störfrequenz außerhalb und eines rauscharmen Magnetfeldsensors (Stefan Mayer Instruments, *FLC 100*) innerhalb der Abschirmung untersucht. Im Frequenzbereich der typischen Fallenfrequenzen (DC bis 500 Hz) wurde hierbei eine Verringerung der Amplitude am Sensor von 20 bis 15 dB gegenüber einer Messung ohne

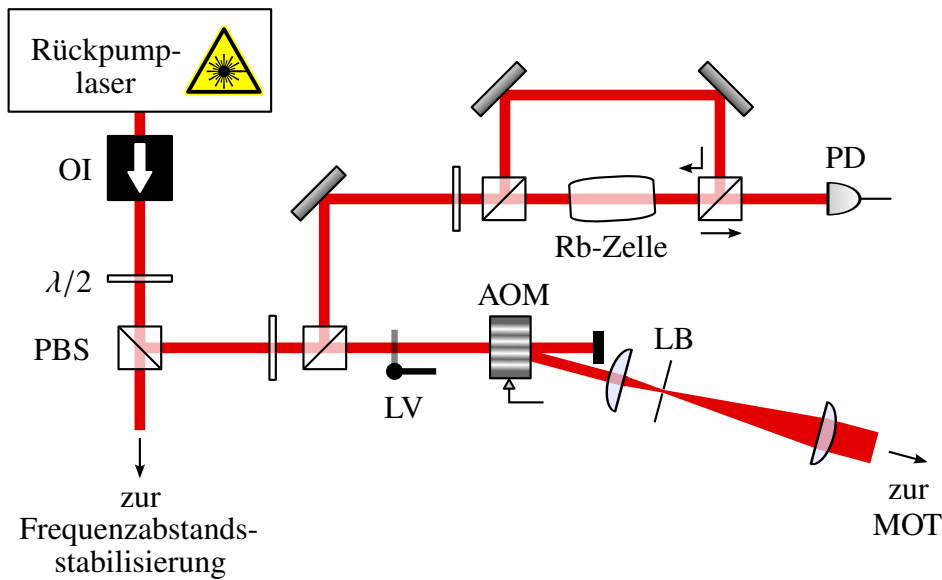
Abschirmung festgestellt. Da die im Inneren der Abschirmung verwendeten Gradientenspulen ein Magnetfeld erzeugen, welches das  $\mu$ -Metall sättigen und somit die Abschirmwirkung aufheben würde, umgibt ein segmentierter achteckiger Weicheisenring die Spulen (s. Abb. 4.2). Der Weicheisenring hat eine Stärke von 4 mm und bewirkt, dass sich ein Großteil der Feldlinien der Spulen außerhalb der Hauptkammer in ihm schließen und damit der magnetische Fluss durch die  $\mu$ -Metall reduziert wird.

### 4.3 Lasersystem für die magneto-optische Falle

Wie bereits in Kapitel 2.2 beschrieben werden für einen magneto-optische Falle für Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ) ein Kühl- und ein Rückpumpulaser benötigt. Das chemische Element Rubidium gehört zu den Alkalimetallen. Das hier verwendete Rubidiumisotop  $^{87}\text{Rb}$  kommt in der Natur mit einer relativen Häufigkeit von etwa 28 % vor und besitzt eine Masse von  $m_{\text{Rb}87} \approx 1,44 \cdot 10^{-25}$  kg. Der Spin des Elektrons auf der äußersten Schale koppelt mit dem Kernspin  $I = 3/2$ , so dass sich der  $5^2S_{1/2}$ -Grundzustand in zwei Hyperfeingrundzustände aufspaltet ( $F = 1$  und  $F = 2$ ). Die Energiedifferenz der beiden Grundzustände von  $\hbar\omega_{\text{HF}} \approx 2\pi \cdot 6,835$  GHz liegt im Mikrowellenbereich. Der angeregte Zustand  $5^2P_{3/2}$  spaltet aufgrund der Hyperfeinstruktur in vier Niveaus auf ( $F' = 0, 1, 2, 3$ ), deren Energiedifferenzen im Megahertz-Bereich liegen. Die Linienbreite der angeregten Zustände beträgt etwa  $\Gamma = 2\pi \cdot 6$  MHz. Die im Experiment verwendeten optischen Übergänge ( $\lambda \approx 780,24$  nm) für Kühl- und Rückpumpulaser sind in Abbildung 2.2 dargestellt (s. auch Abb. A.1 im Anhang).

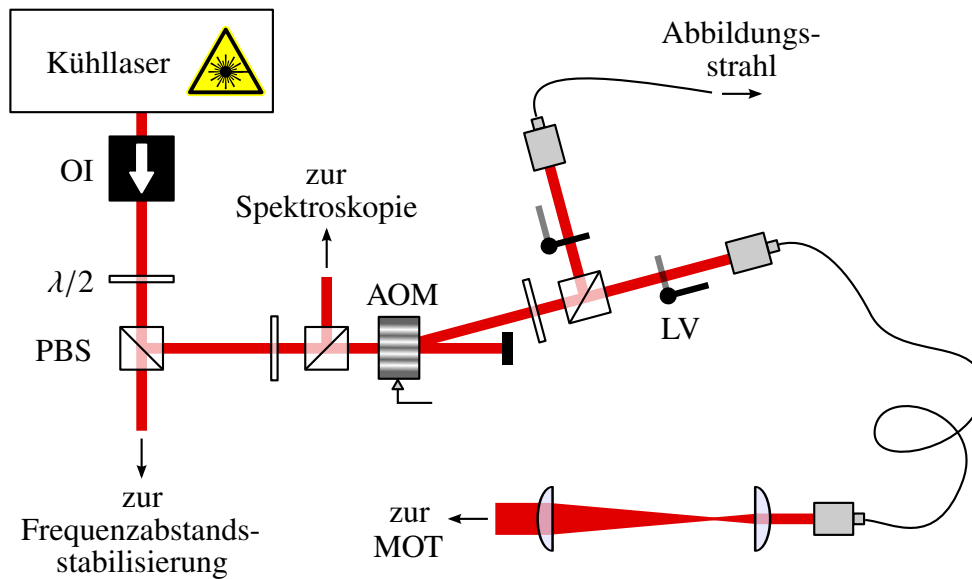
Der sogenannte Rückpumpulaser (s. Abschnitt 2.2) ist auf den optischen Übergang  $|F = 1\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$  stabilisiert. Er besteht aus einem selbstgebauten gitterstabilisierten Dipodenlaser in Littrow-Konfiguration. Die verwendete Laserdiode (eagleyard photonics, *EYP-RWE-0780*) ist antireflexionsbeschichtet, so dass sich die emittierte Wellenlänge des Laserlichts über die Position des Reflexionsgitters kontrollieren lässt. Die Abbildung 4.4 skizziert den Strahlengang des Rückpumpulasers, dessen Ausgangsleistung etwa 35 mW beträgt. Der Laser wird durch einen optischen Isolator vor Rückreflexionen geschützt. Mit Hilfe der Kombination aus  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte und Polarisationsstrahlteilerwürfel wird der Laserstrahl aufgeteilt. Ein Teilstrahl mit geringer Leistung wird für die Doppler-freie Frequenzmodulationsspektroskopie an einer Rubidium-Zelle verwendet, um den Laser auf den gewünschten Übergang zu stabilisieren [66].

Der Hauptteil des Laserlichts passiert zunächst einen mechanischen Lichtverschluss (Melles Griot, *04LSC001*), der zur MOT-Phase geöffnet und in Dipol- und optischen Gitterphase geschlossen ist, damit während der letzteren beiden Phasen kein resonantes Licht zu den Atomen gelangt. Üblicherweise stehen in diesem Experiment



**Abbildung 4.4:** Strahlengang des Rückpump-lasers. Verwendete Abkürzungen: OI: optischer Isolator,  $\lambda/2$ :  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte, PBS: Polarisationsstrahlteilerwürfel, LV: mechanischer Lichtverschluss, AOM: Akusto-optischer Modulator, LB: Lochblende, PD: Photodiode.

alle Lichtverschlüsse im Fokus eines 1:1 Teleskops, um möglichst kurze Schaltzeiten zu erreichen. Dahinter durchläuft der Strahl einen akusto-optischen Modulator (kurz: AOM, Isomet, 1205C-1) um den Laserstrahl schnell schalten zu können, sowie die Lichtleistung dahinter zu kontrollieren. Der Laserstrahl in der ersten Beugungsordnung des AOM wird durch ein Teleskop aufgeweitet. Zur räumlichen Filterung des Strahlprofils befindet sich eine Lochblende ( $d = 50 \mu\text{m}$ ) im Fokus des Teleskops. Das Licht besitzt am Ausgang des Teleskops eine Leistung von etwa 20 mW und wird anschließend für die magneto-optische Falle mit dem Licht des Kühllasers überlagert. Als Kühllaser kommt ein trapezverstärkter Diodenlaser (Toptica, DLX 110) mit einer Ausgangsleistung von etwa 400 mW zum Einsatz. Abbildung 4.5 zeigt schematisch den Strahlengang des Kühllasers. Der Strahl passiert einen optischen Isolator, der den Kühllaser vor Rückreflexen schützt, und wird mit Hilfe der Kombination aus  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatten und Polarisationsstrahlteilerwürfeln in Teilstrahlen aufgeteilt. Die Wellenlänge des Kühllasers kann mit Hilfe von Dopplerfreier-Sättigungsspektroskopie über die Position des Reflexionsgitters im Laser auf den optischen Übergang  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  justiert werden. Zur genauen Stabilisierung wird ein Teil des Kühllaserlichts dazu verwendet, den Frequenzabstand zur Rückpump-laserfrequenz zu messen und konstant zu halten. Dafür wird der Teilstrahl des Kühllasers mit Licht des Rückpump-lasers an einem Polarisationsstrahlteilerwürfel überlagert. Hinter der Überlagerung steht ein Polarisator, der die Polarisations-



**Abbildung 4.5:** Strahlengang des Kühllasers. Verwendete Abkürzungen: OI: optischer Isolator,  $\lambda/2$ :  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte, PBS: Polarisationsstrahlteilerwürfel, AOM: Akustooptischer Modulator, LV: mechanischer Lichtverschluss

richtung beider Strahlen auf die selbe Achse projiziert. Im Anschluss detektiert eine schnelle Photodiode (Alphas, *UPD-50-SP*) das Schwingungssignal mit der Frequenz  $\omega_{RP} - \omega_{KL} \approx 6,57$  GHz. Das Signal der Photodiode wird mit einer Referenzfrequenz von 5,71 GHz eines Signalgenerators (Rohde & Schwarz, *SMT 06*) herunter gemischt. Das Signal wird anschließend mit Hilfe eines Frequenz-Spannungswandlers zu einem schwebungsfrequenzabhängigen Fehlersignal für die Regelelektronik, dessen Ausgangsspannung die Wellenlänge des Kühllasers über einen Piezokristall am Reflexionsgitter steuert. An der Regelelektronik kann eine zusätzliche Offset-Spannung auf den Piezokristall gegeben werden, um die Laserfrequenz manuell zu verstimmen. Eine detailliertere Beschreibung der Frequenzabstandsstabilisierung ist in [66] zu finden.

Der Hauptstrahl des Kühllasers durchläuft einen AOM (Crystal Technology Inc., *3080-122*), um die Lichtleistung in der ersten Beugungsordnung schnell schalten zu können. Anschließend wird ein Teil des Lichts für die Absorptionsabbildung in der Detektionsphase abgezweigt. Das Detektionslicht wird durch einen mechanischen Lichtverschluss geschaltet und gelangt über eine Glasfaser zur Vakuumkammer (s. Abb 4.9). Das Kühllaserlicht für die MOT wird ebenfalls durch einen mechanischen Lichtverschluss geschaltet und mit Hilfe einer kurzen Glasfaser räumlich gefiltert. Zusätzlich dient die Faser zur Entkopplung der Strahlengänge für die MOT von dem bisherigen

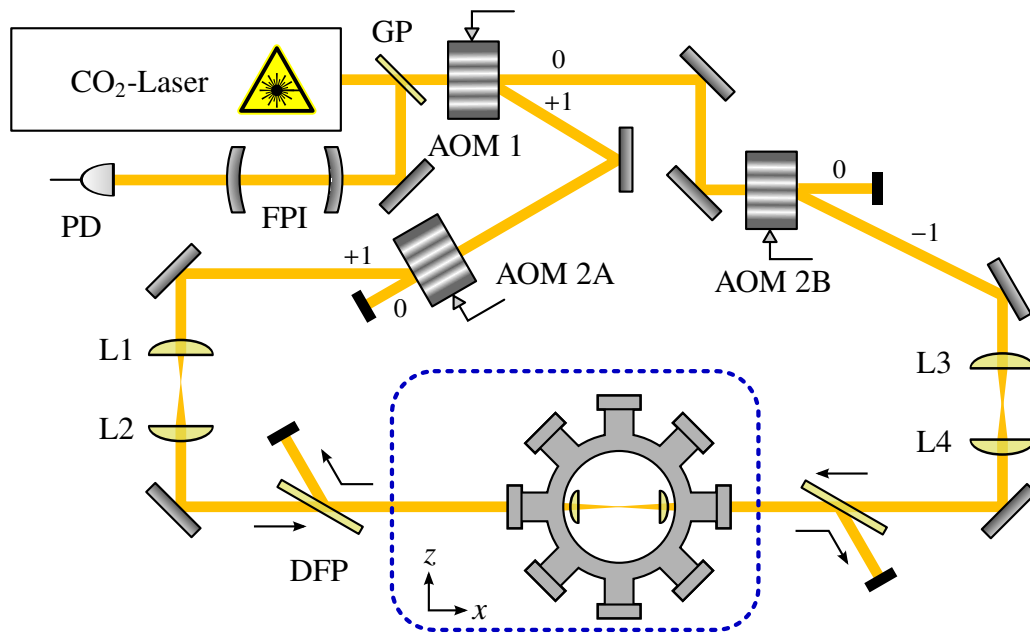
Strahlengang. Der Laserstrahl wird hinter dem Faserauskoppler durch ein Teleskop aufgeweitet und besitzt eine Lichtleistung von etwa 100 mW.

Im Anschluss werden die beiden aufgeweiteten Hauptstrahlen des Kühl- und des Rückpumpasers überlagert und auf drei Teilstrahlen mit etwa gleicher Lichtleistung aufgeteilt. Die drei Strahlen durchlaufen jeweils  $\lambda/4$ -Verzögerungsplatten, um das Licht zirkular zu polarisieren, und werden anschließend senkrecht zueinander durch die Hauptkammer geschickt, wobei sie sich im Zentrum der Kammer kreuzen. Hinter den Ausgangsfenstern befinden sich jeweils eine  $\lambda/4$ -Verzögerungsplatte und ein Spiegel, um die Strahlen in sich zurück zu reflektieren und so die erforderliche Konfiguration aus gegenläufigem  $\sigma^+$ - und  $\sigma^-$ -polarisiertem Licht zu realisieren (vgl. Abb. 2.2).

Während der MOT-Phase ist der Kühllaser etwa drei Linienbreiten gegenüber dem atomaren Übergang  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  rotverstimmt. Nach etwa 25 Sekunden befinden sich in der magneto-optischen Falle etwa  $5 \cdot 10^8$  Atome, die eine Temperatur von wenigen 100  $\mu\text{K}$  besitzen. Für die Umladesequenz in die Dipolfalle wird die Intensität des Rückpumpasers verringert, um die Atome mit Hilfe des Kühllaserübergangs optisch in den Hyperfeingrundzustand  $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle$  zu pumpen. Gleichzeitig wird innerhalb von 120 ms die Laserfrequenz des Kühllasers weiter gegenüber dem atomaren Übergang rotverstimmt (etwa 30 Linienbreiten), um die AC-Stark-Verschiebung des atomaren Übergangs durch das  $\text{CO}_2$ -Laserlicht auszugleichen. Dadurch, dass die Atome währenddessen auch weniger Photonen streuen, wird das Ensemble kälter und dichter. Diese sogenannte zeitliche Dark-MOT wurde in vergangenen Arbeiten genauer untersucht [83, 87]. Die räumliche Überlagerung der beiden Fallentypen (MOT und Dipolfalle) wird mit Hilfe eines homogenen Magnetfeldes erreicht, mit dem die Position der magneto-optischen Falle variiert werden kann. Die Umladeeffizienz ist durch den geometrischen Größenunterschied der beiden Fallentypen beschränkt und beträgt typischerweise ca. 2%. Nach dem Umladen werden der Kühl- und Rückpumpaserstrahl durch ihre AOMs und Lichtverschlüsse abgeschaltet.

## 4.4 Fernverstimmte optische Dipolfalle

Die optische Dipolfalle wird durch einen fokussierten Strahl eines  $\text{CO}_2$ -Lasers (Coherent, GEM-50S) realisiert. Das Licht dieses Lasers hat eine Wellenlänge von 10,6  $\mu\text{m}$  und ist damit weit gegenüber den optischen Übergängen von Rubidium rotverstimmt, so dass Teilchenverluste in der Dipolfalle durch Photonenstreuung keine Rolle spielen. Abbildung 4.6 zeigt schematisch den Strahlengang des  $\text{CO}_2$ -Lasers, dessen Ausgangsleistung etwa  $P_{\text{max}} = 50 \text{ W}$  beträgt. Am Ausgang wird ein sehr geringer Teil des Licht an einer Glasplatte aus Zinkselenid ( $\text{ZnSe}$ ) reflektiert und zur Überwachung des Modenspektrums des Lasers durch ein Fabry-Pérot-Interferometer (FPI) geschickt,



**Abbildung 4.6:** Strahlengang des CO<sub>2</sub>-Lasers. Die Zahlen an den Strahlen hinter den AOMs stellen die Beugungsordnung dar und der blau markierte Bereich zeigt den Strahlengang durch die Hauptkammer in  $x$ - $z$ -Ebene. Verwendete Abkürzungen: GP: ZnSe-Glasplatte, AOM: Akusto-optischer Modulator, FPI: Fabry-Pérot-Interferometer, PD: Photodiode, L1-L4: ZnSe-Linsen, DFP: Dünnschichtpolarisator

wobei der Spiegelabstand des FPI periodisch durch einen Piezokristall variiert wird. Im Hauptstrahl hinter der Glasplatte befindet sich ein erster akusto-optischer Modulator (Gooch & Housego, 37040-8-10.6). Die verwendeten AOMs werden mit einer Radiofrequenz von 40 MHz betrieben und sind wegen ihrer hohen Radiofrequenz-Eingangleistung von bis zu 100 W wassergekühlt. Ein geringer Anteil des einlaufenden Lichts wird am Kristall eines AOMs isotrop gestreut, wodurch die Lichtleistung in der ersten Ordnung selbst bei verschwindender Radiofrequenzleistung endlich bleibt ( $\gtrsim 10^{-4} \cdot P_{\max}$ ) und damit auch die Falltiefe in der optischen Dipolfalle. Um dennoch sehr geringe Falltiefen am Ende der Evaporation zu erreichen, befindet sich im Strahlengang ein weiterer AOM (2A), der den Anteil des isotrop gestreuten Lichts weiter unterdrückt. Der infrarote Laserstrahl besitzt hinter dem AOM 2A eine maximale Lichtleistung von etwa 28 W, wird durch ein verstellbares Teleskop mit ZnSe-Linsen der Brennweiten  $f_{L1} = 63,5$  mm und  $f_{L2} = 127$  mm aufgeweitet und durchläuft danach die Hauptkammer horizontal in  $x$ -Richtung. Im Fokus des vakuumseitigen Teleskops beträgt der Radius des Gauß-förmigen Strahlprofils etwa  $w_0 = 21,5$   $\mu\text{m}$ , so dass die Potentialtiefe der optischen Dipolfalle bei voller Leistung etwa  $V_{\max} = 3$  mK beträgt. Das Eingangssignal von AOM 2A wird frequenzmoduliert, so dass die Position des Strahlfokus in der Kammer vertikal periodisch oszilliert. Da die Modulations-



frequenz von 50 kHz groß ist, im Vergleich zu den Fallenfrequenzen von typischerweise  $\bar{\omega} < 2$  kHz, nehmen die Atome ein zeitlich gemitteltes Potential wahr. Somit ist die Dipolfalle effektiv breiter und etwas flacher, als im unmodulierten Fall, wodurch die Umladeeffizienz der in der MOT gefangenen Atome steigt [83, 87].

Die Modulationsamplitude wird während der Evaporation in der Dipolfallen-Phase heruntergefahren, um die Teilchendichte und damit die Stoßrate zu erhöhen. Gleichzeitig wird die Lichtleistung der Dipolfalle durch Reduzieren der Radiofrequenzleistungen an AOM 1 und 2A heruntergefahren, so dass eine forcierte Evaporation stattfindet. Während dieser Zeit können gezielt Atome in bestimmten Zeeman-Zuständen ( $m_F = -1, 0$  oder  $+1$ ) mit Hilfe eines magnetischen Gradientenfeldes aus der Falle entfernt werden, da die Stern-Gerlach-Kraft je nach Zustand in unterschiedliche Richtungen zeigt (vgl. Gl. (2.37)). Mit dieser Technik lässt sich ein spinpolarisiertes Bose-Einstein-Kondensat von etwa dreißigtausend Atomen erzeugen, bei dem sich in guter Näherung alle Atome im selben Zeeman-Zustand befinden. Die Dauer der Evaporation beträgt etwa 7 Sekunden.

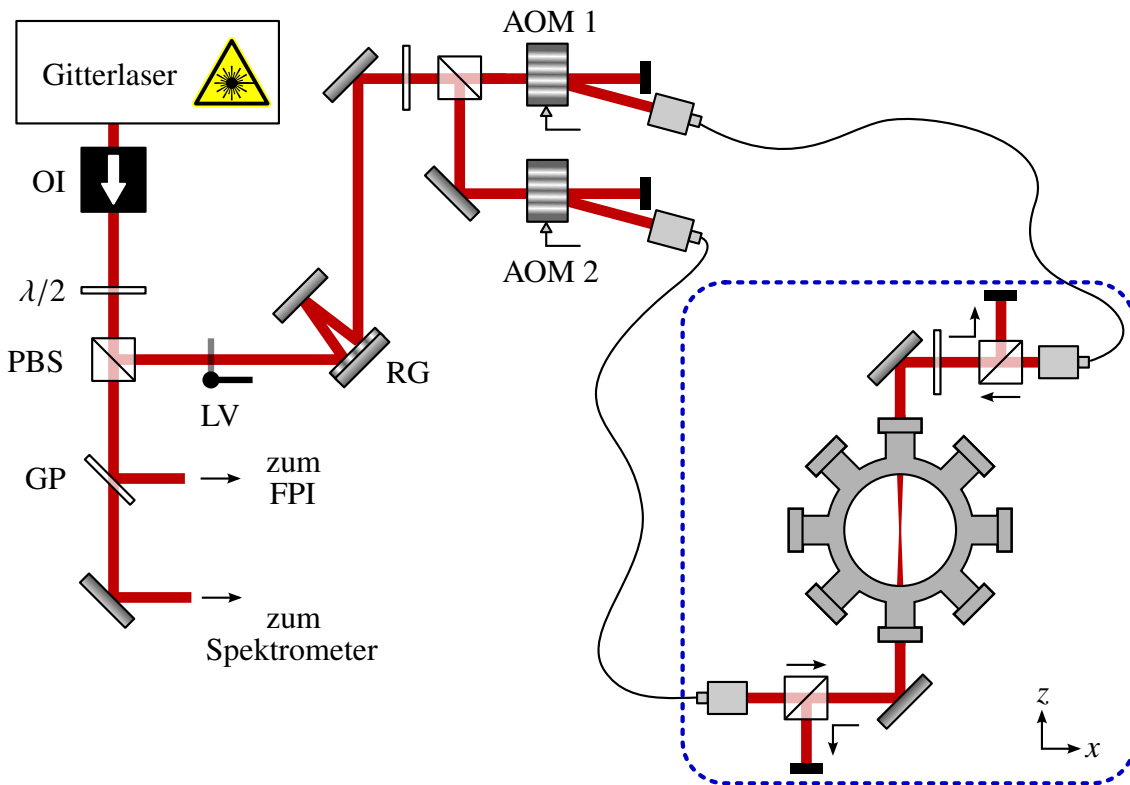
Die Atome im Kondensat besitzen aufgrund der Unschärferelation und der endlichen Ausdehnung der Atomwolke eine endlich schmale Impulsverteilung. Die Impulsverteilung entlang der Achsen  $i = x, y, z$  ist näherungsweise Gauß-förmig, wobei die  $1/\sqrt{2}$ -Breite der Verteilung  $\Delta p_i = \sqrt{21/8}\hbar/r_{TF,i}$  beträgt, mit dem Thomas-Fermi Radius  $r_{TF,i}$  entlang der jeweiligen Achse [88] (vgl. Abschnitt 2.1). Einige im späteren Verlauf der Arbeit gezeigten Messungen setzen eine Atomwolke mit einer sehr schmalen Impulsverteilung entlang der Achse des optischen Gitters voraus (s. Abschnitt 5.3). Um dies zu erreichen wird nach der eigentlichen Evaporation das Dipolfallenpotential langsam weiter abgesenkt und zusätzlich durch gleichzeitige Frequenzmodulation am AOM 2A das Potential entlang der  $z$ -Achse aufgeweitet. Hierdurch sinkt der räumliche Einschluss des Potentials, wodurch die räumliche Ausdehnung der Atomwolke zu- und die Impulsbreite abnimmt. Während dieser Expansion des Fallenpotentials erzeugt ein magnetisches Gradientenfeld eine Stern-Gerlach Kraft entgegen gerichtet zur Gravitationskraft, so dass die Atome nicht aus der Falle herausfallen. Ebenfalls essenziell ist, dass diese Veränderung des Fallenpotentials auf Zeitskalen statt findet, die langsamer als die momentane Fallenfrequenz sind, damit die Atome dem Grundzustand adiabatisch folgen können und es zu keiner Anregung kommt. Mit diesem Verfahren konnte die Fallenfrequenz in vertikaler Richtung innerhalb von 10 Sekunden von typ. 250 Hz auf etwa 4 Hz herabgesenkt werden, wodurch auch die Teilchendichte und die damit verbundene inneratomare Wechselwirkungsenergie des Ensembles abnimmt.

Der  $\text{CO}_2$ -Laserstrahl in der nullten Ordnung des AOM 1 wird mit einem weiteren AOM (2B in Abb. 4.6) geschaltet und propagiert anschließend in entgegengesetzter Richtung durch die Vakuumkammer. Hiermit lässt sich während der optischen Git-

terphase ein zusätzliches externes Potential für die Atome erzeugen. Die Fokusse der beiden Dipolfallenstrahlen sind mit Hilfe der vakuumseitigen Teleskoplinsen in Überlagerung gebracht. Der Strahlradius im Fokus des zweiten Dipollaserstrahls beträgt Berechnungen zufolge etwa  $w_0 \approx 700 \mu\text{m}$  und kann durch das externe Teleskop ( $f_{L3} = f_{L4} = 63,5 \text{ mm}$ ) variiert werden. Somit lassen sich harmonische Potentiale mit geringer Fallenfrequenz realisieren. Um den  $\text{CO}_2$ -Laser vor Rückkopplung zu schützen befinden sich zwei Dünnpolarisatoren (II-VI Deutschland) im Strahlengang, die das infrarote Licht je nach Polarisation reflektieren oder transmittieren. Die Polarisation der beiden gegenläufigen Strahlen stehen aufgrund einer entsprechenden Spiegelanordnung senkrecht aufeinander, so dass beide Strahlen hinter der Kammer durch die Dünnpolarisatoren in Strahlabsorber reflektiert werden.

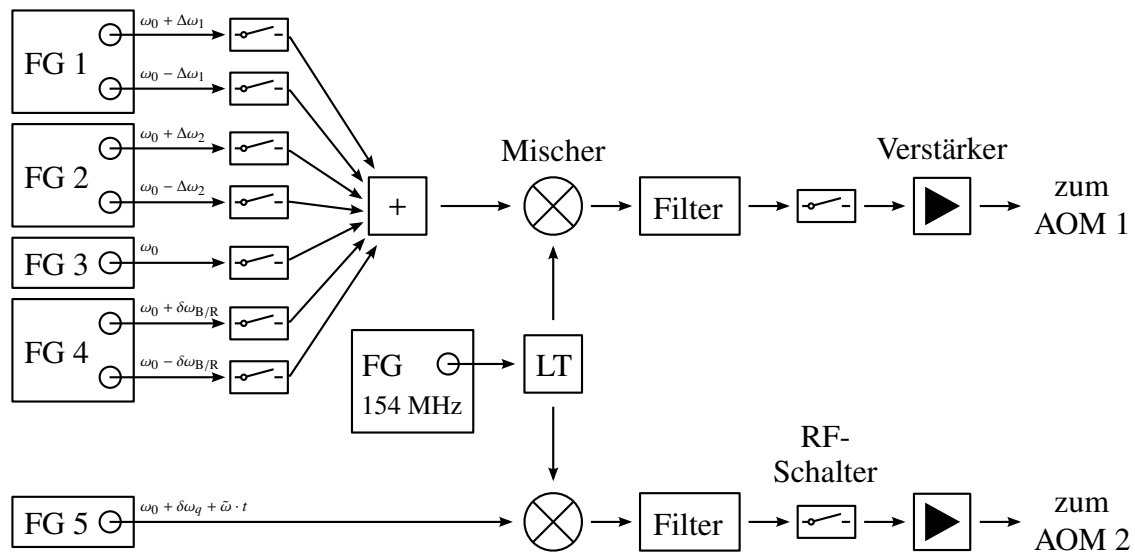
### 4.5 Eindimensionales optisches Gitter

Für das eindimensionale optische Gitter werden zwei Lichtstrahlen benötigt, die eine bestimmte Frequenz- und Phasenbeziehung zueinander haben. Im Experiment wird dies durch eine einzelne Lichtquelle realisiert, deren Licht auf beide Pfade aufgeteilt wird. Die Lichtquelle für das eindimensionale optische Gitter ist ein trapezverstärkter gitterstabilisierter Diodenlaser (Toptica, *DLX 110*) mit einer Ausgangsleistung von 800 mW. Abbildung 4.7 zeigt schematisch den Strahlengang des Gitterlasers. Der Strahl geht durch einen optischen Isolator, um den Laser vor Rückreflexen zu schützen und wird dahinter mittels  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte und Polarisationsstrahlteilerwürfel oder einer Glasplatte aufgeteilt. Ein kleiner Teil des Lichts geht in ein Fabry-Pérot-Interferometer, um das Modenspektrum des Lasers zu überprüfen und sicherzustellen, dass der Laser im Ein-Moden-Betrieb läuft. Ebenso geht etwas Lichtleistung in ein Spektrometer (High Finesse, *Anstrom WS6*), mit dem die Wellenlänge des Laserlichts bestimmt werden kann. Diese wurde über die Position des Reflexionsgitters im Inneren des Lasers auf  $\lambda = 783,5 \text{ nm}$  eingestellt. Der Teilstrahl mit dem Hauptteil der Lichtleistung wird mit einem mechanischen Lichtverschluss geschaltet und wird anschließend an einem holographisch hergestellten Reflexionsgitter (Ondax Inc, *PLR808-92.5-13-17.5-1.5*) zweimal reflektiert, um das Licht des Lasers zusätzlich spektral zu filtern. Im Laser spontan emittierte Photonen, die nicht die Wellenlänge der Laserphotonen besitzen, werden so herausgefiltert. Hinter dem Reflexionsgitter wird der Strahl in zwei Teilstrahlen mit etwa gleicher Leistung aufgeteilt. Diese beiden Strahlen durchlaufen jeweils einen AOM (Crystal Technology, *3200-121*), um die Frequenz und die Leistung des Lichts dahinter zu kontrollieren. Das Licht der ersten Ordnungen hinter den AOMs gelangt über polarisationserhaltende Glasfasern (Schäfter + Kirchhoff) zur Hauptkammer. Der blau markierte Bereich von Abbildung 4.7 zeigt den Strahlengang durch die Hauptkammer in der  $x$ - $z$ -Ebene. Die beiden Teilstrahlen werden



**Abbildung 4.7:** Strahlengang des Lasers für das optische Gitter. Der blau markierte Bereich zeigt den Strahlengang durch die Hauptkammer in  $x$ - $z$ -Ebene. Verwendete Abkürzungen: OI: optischer Isolator,  $\lambda/2$ :  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte, PBS: Polarisationsstrahlteilerwürfel, LV: mechanischer Lichtverschluss, AOM: Akusto-optischer Modulator, GP: Glasplatte, FPI: Fabry-Pérot-Interferometer, RG: Reflexionsgitter.

oberhalb und unterhalb der Hauptkammer ausgekoppelt und verlaufen gegenläufig in vertikaler Richtung durch die Kammer. Beide Strahlen werden durch die an den Faserauskopplern (Schäfter + Kirchhoff, 60FC-4-M8-10) befindlichen Linsen auf die Position der Atome im Kammerzentrum fokussiert, so dass der Strahlradius dort etwa  $170 \mu\text{m}$  beträgt, wodurch die Rayleighlänge etwa  $116 \text{ mm}$  beträgt. Die Polarisationsrichtung des oberen Laserstrahls kann mit Hilfe einer  $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte eingestellt werden. Bei paralleler Ausrichtung zur Polarisationsrichtung des unteren Strahls würde die Potentialtiefe des Zwei-Photonen-Gitters maximal. Im Rahmen der durchgeführten experimentellen Untersuchungen standen die beiden Polarisationsachsen jedoch nahezu senkrecht zueinander. Der Grund hierfür ist, dass dadurch im Licht sowohl  $\sigma^+$ ,  $\sigma^-$  als auch  $\pi$ -polarisierte Anteile vorhanden sind, wenn die Quantisierungsachse (Richtung der magnetischen Feldlinien am Ort der Atome) nicht mit der  $z$ -Achse zusammenfällt (s. z.B. [89]), wodurch es möglich wird, die beschriebenen Vier-Photonen-Prozesse zu nutzen.



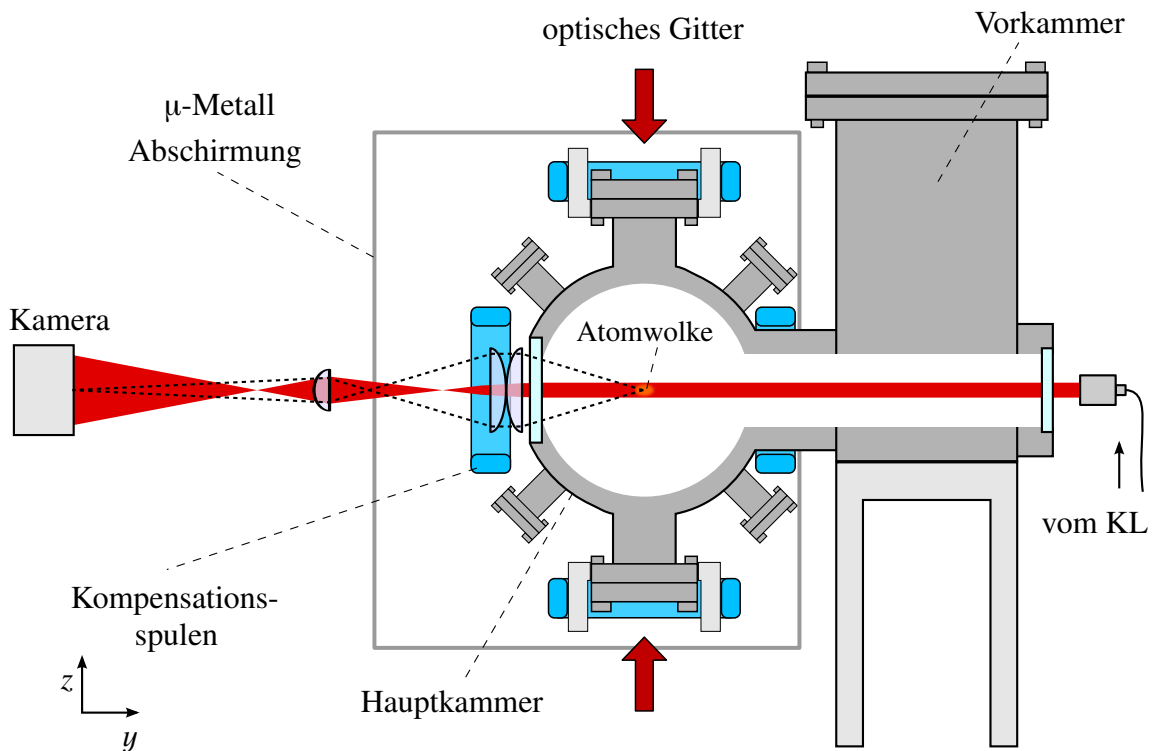
**Abbildung 4.8:** Schaltskizze der Radiofrequenzschaltung für die akusto-optischen Modulatoren des optischen Gitters. Die Funktionsgeneratoren FG 1 bis FG 5 erzeugen unterschiedliche Frequenzen im Bereich von  $\omega_0 = 47$  MHz. Diese Signale werden durch Radiofrequenzmischer auf  $\approx 201$  MHz hochgemischt und anschließend durch Hoch- und Tiefpässe gefiltert. Nach einem Radiofrequenzverstärker gehen die Signale auf die beiden AOMs. Verwendete Abkürzungen: FG: Funktionsgenerator, LT: RF-Leistungsteiler, +: RF-Kombinierer, AOM: Akusto-optischer Modulator.

Für das Zwei- und Vier-Photonen-Gitter sowie für Bragg- bzw. Raman- $\pi$ -Pulse werden gleichzeitig unterschiedliche Lichtfrequenzen auf den beiden Pfaden benötigt. Hierfür werden die akusto-optischen Modulatoren mit gleichzeitig mehreren Radiofrequenzen betrieben, da sich die Lichtfrequenzen in der ersten Beugungsordnung um die Treiberfrequenzen der AOMs erhöhen. Abbildung 4.8 zeigt die elektrische Schaltung zur Erzeugung der benötigten Radiofrequenzen. Die benutzten Funktionsgeneratoren (FG 1 bis FG 5) sind phasenstabilisiert und laufen im sogenannten *Burst*-Modus. Der Funktionsgenerator FG 5 (Tabor, WW2571) erzeugt eine konstante Frequenz  $\omega_0 = 47$  MHz. Das Signal wird mit einer Radiofrequenz von 154 MHz eines Funktionsgenerators (Hameg, HM8134-2) auf 201 MHz hochgemischt. Die ungewollten Mischfrequenzen, die hierbei entstehen, werden mit einer Kombination aus Hoch- und Tiefpässen herausgefiltert [66]. Hinter den Frequenzfiltern befindet sich ein Radiofrequenz-Schalter (RF-Schalter), der mit einem TTL-Signal geschaltet wird. Das anschließend verstärkte Signal geht zu AOM 2. Statt nur die konstante Frequenz  $\omega_0$  auszugeben, kann der FG 5 auch einen zusätzlichen Frequenzoffset  $\delta\omega_q$  haben oder durch eine lineare Frequenzrampe  $\tilde{\omega} \cdot t$  zeitlich variiert werden, so dass ein bewegtes bzw. beschleunigtes Gitter am Ort der Atome entsteht [85].

Das kombinierte Signal für AOM 1 kommt von den Funktionsgeneratoren FG 1 bis 4 (Tektronix, AFG3102 bzw. AFG3101), deren Einzelsignale mikrosekundengenau und unabhängig voneinander mit RF-Schaltern an oder ausgeschaltet werden können. Die Funktionsgeneratoren FG 1 und FG 2 besitzen jeweils zwei Ausgänge und stellen die Frequenzen  $\omega_0 \pm \Delta\omega_1$  bzw.  $\omega_0 \pm \Delta\omega_2$  für je ein Vier-Photonen-Gitter bereit. Mit der Frequenz  $\omega_0$  am Ausgang von FG 3 kann ein Zwei-Photonen-Gitter realisiert werden. Um die Atome mit Bragg- oder Raman- $\pi$ -Pulse in angeregte Zustände zu befördern, können die Ausgänge an FG 4 mit den Frequenzen  $\omega_0 \pm \delta\omega_{B/R}$  benutzt werden. Bei dem hier verwendeten Bragg-Puls wird ein Impuls von  $\pm 2\hbar k$  durch Absorption und stimulierte Emission von Photonen auf ruhende Atome übertragen. Dabei entspricht die Frequenzverschiebung eines Bragg-Pulses von  $\delta\omega_B = (2\hbar k)^2 / 2m_{\text{Rb}}\hbar \approx 2\pi \cdot 14,9$  kHz der kinetischen Energie eines Atoms mit Impuls von  $\pm 2\hbar k$ . Bei einem Raman-Puls wird zusätzlich zum Impulsübertrag der magnetische Zustand der Atome um  $\Delta m_F = \pm 1$  geändert, so dass in der Frequenzverschiebung für diesen Puls  $\delta\omega_R = \pm\delta\omega_B \pm \Delta\omega_Z$  die Zeeman-Aufspaltung  $\Delta\omega_Z$  eingeht. Die Signale der Funktionsgeneratoren (FG 1 bis 4) werden mit einem Radiofrequenz-Kombinierer vereint, so dass keine Mischfrequenzen entstehen. Hinter dem RF-Kombinierer werden die Signale ebenfalls hochgemischt und durch einen Bandpass gefiltert. Der anschließende RF-Schalter wird zeitgleich zum RF-Schalter für AOM 2 während der optischen Gitter-Phase geöffnet, wodurch das Signal verstärkt zum AOM 1 gelangt.

## 4.6 Abbildungssystem

Die letzte Phase in jedem Zyklus stellt die Detektionsphase dar, bei der Atome durch eine Absorptionsabbildung detektiert werden. Die optischen Potentiale sind während dieser Phase ausgeschaltet. Da das Abbildungslicht des Kühllasers resonant mit dem nahezu geschlossenen Übergang  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  ist, werden nur Atome im Hyperfeinzustand  $|F = 2\rangle$  detektiert. Da sich die Atome im Hyperfeingrundzustand  $|F = 1\rangle$  befinden, werden die Atome zunächst mit einem etwa 300  $\mu\text{s}$  kurzen Lichtpuls des Rückpumplasers auf den MOT-Achsen optisch in den energetisch höheren Zustand  $|F = 2\rangle$  gepumpt. Statt des Rückpumplaserlichts kann alternativ ein etwa 50  $\mu\text{s}$  langer Mikrowellen- $\pi$ -Puls mit einer Frequenz von  $\omega_{\text{MW}} = \omega_{\text{HF}} + l \cdot \Delta\omega_Z$  gezielt die Übergänge  $|F = 1, m_F\rangle \rightarrow |F = 2, m_F + \Delta m_F\rangle$  zwischen den Hyperfeinniveaus treiben, wobei  $\Delta m_F = 0$  oder  $\pm 1$  und  $\omega_{\text{HF}} = 6,835$  GHz (s. auch A.1). Durch Verwendung der Mikrowelle lassen sich so gezielt nur Atome in bestimmten magnetischen Zuständen  $m_F$  abbilden. Anschließend werden die Atome mit dem resonanten Licht des Kühllasers beleuchtet (s. Abb. 4.9). Durch Absorption und isotrope Reemission des Kühllaserlichts durch die Atome entsteht ein Schatten am Ort der Atome, der mit einem Linsensystem auf eine Kamera abgebildet wird. Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine neue Kame-



**Abbildung 4.9:** Seitenansicht des Vakuumsystems und Strahlengang für die Absorptionsabbildung. Ein Teil des Lichts des Kühllasers (KL) wird zur Absorptionsabbildung verwendet. Senkrecht zum optischen Gitter und zur optischen Dipolfallenachse geht der Strahl durch Vor- und Hauptkammer, wo er die Atome trifft. Das von den Atomen gestreute Licht (schwarz gestrichelt) wird mit einer Kombination aus drei Linsen auf einer Kamera abgebildet. In blau sind die Kompensationsspulenpaare in  $y$ - und  $z$ -Richtung dargestellt.

ra (Andor, *Zyla 5.5 sCMOS*) im Experiment eingesetzt, sowie ein neues Linsensystem entworfen und aufgebaut.

Der Abbildungsstrahl und das gestreute Licht werden über drei achromatische Linsen (Thorlabs,  $2 \times AC508-100-B$  und  $AC254-030-B$ ) auf die Kamera abgebildet. Das Linsensystem bildet Objekte mit einer Vergrößerung von etwa 6 ab, so dass die Höhe bzw. Breite eines Pixel auf dem Bild  $0,985 \mu\text{m}$  in der Objektebene entsprechen. Die numerische Apertur ist durch die Größe der ersten Linse und des Abstandes zum Objekt begrenzt und liegt bei etwa 0.24, so dass theoretisch aufgrund des Beugungslimits nur Objekte mit einem Abstand von  $d > 2,0 \mu\text{m}$  aufgelöst werden können. Die aus den Aufnahmen bestimmte Auflösung liegt jedoch bei etwa  $4,8 \mu\text{m}$ . Ein möglicher Grund hierfür könnten sphärische Linsenfehler sein.

Da die Intensität dieses Abbildungsstrahls deutlich kleiner ist als die Sättigungintensität, kann das Lambert-Beersche Gesetz benutzt werden, um die optische Dichte  $D(x,z)$  zu bestimmen

$$I(x,z) = I_0(x,z) e^{-D(x,z)} \quad (4.8)$$

$$D(x,z) = \ln\left(\frac{I_0(x,z)}{I(x,z)}\right) = \sigma_0 \int_y n(x,y,z) dy, \quad (4.9)$$

mit der Teilchendichte  $n(x,y,z)$ . Der Photonenabsorptionsquerschnitt  $\sigma_0$  für resonantes Licht des verwendeten optischen Übergangs ist gegeben durch [55]

$$\sigma_0 = \frac{7}{15} \frac{3\lambda^2}{2\pi} \approx 1.356 \cdot 10^{-9} \text{cm}^2. \quad (4.10)$$

Um das Intensitätsverhältnis  $I_0/I$  und damit die optische Dichte zu bestimmen, werden drei aufeinanderfolgende Bilder mit der Kamera aufgezeichnet. Das erste Bild detektiert, wie zuvor beschrieben, den Schatten der Atomwolke mit einer Belichtungszeit von  $80 \mu\text{s}$ . Das Bild ( $I_1 = I + I_{\text{Streu}}$ ) beinhaltet die Information über den Schatten, sowie Streulicht aus der Umgebung, das während der Belichtungszeit auf den Detektor fällt. Das zweite Bild ( $I_2 = I_0 + I_{\text{Streu}}$ ) wird  $80 \text{ms}$  später aufgezeichnet, wobei die Atome in der Zwischenzeit den Aufnahmebereich aufgrund der Photonenstreuung des ersten Bildes verlassen haben. Nach weiteren  $80 \text{ms}$  wird das Streulicht  $I_{\text{Streu}}$  ohne Abbildungsstrahl detektiert, das als Referenz für die anderen beiden aufgenommenen Bilder dient, um die optische Dichte und die über die  $y$ -Achse integrierte Teilchendichte  $n_{\text{int}}(x,z) = \int n(x,y,z) dy$  zu berechnen.





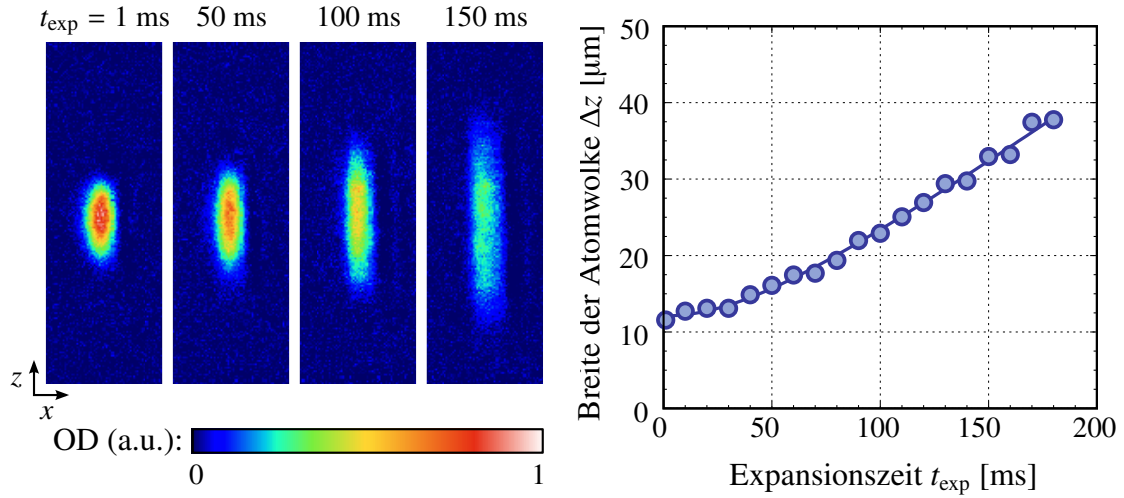
# Ergebnisse

---

In diesem Kapitel sind die im Rahmen dieser Arbeit erzielten experimentellen Ergebnisse zusammengestellt. Zunächst wird die Impulsbreite eines atomaren Wellenpaketes mit Hilfe von Flugzeitaufnahmen und Bragg-Spektroskopie bestimmt, um die anfängliche Form des Wellenpaketes für die folgenden Messungen zu ermitteln und um die späteren Ergebnisse mit numerischen Simulationen vergleichen zu können. Anschließend wird eine Methode vorgestellt, um die Bandkante zwischen erstem und zweitem angeregten Blochband im optischen Gitter mit Atomen zu besetzen. Im zweiten Abschnitt werden Messungen zur Simulation einer Veselago-Linse für Materiewellen aus ultrakalten Atomen im optischen Gitter dargestellt. Das Kapitel schließt ab mit einer Beschreibung der Beobachtung von Randzuständen in einem variablen optischen Gitterpotential.

### **Bestimmung der Impulsbreite einer Atomwolke**

Um die Breite der Impulsverteilung eines atomaren Wellenpaketes zu bestimmen werden zwei unterschiedliche Methoden angewendet. Zum einen kann die Impulsbreite eines Ensembles von Atomen über Flugzeitaufnahmen bestimmt werden, bei denen das Fallenpotential, gegeben durch die  $\text{CO}_2$ -Dipolfalle, instantan ausgeschaltet wird und sich die Atomwolke im kräftefreien Raum anschließend über die Zeit ausdehnt. Während der Expansion wird die inneratomare Wechselwirkungsenergie in kinetische Energie konvertiert, so dass mit dieser Methode immer die Summe aus Wechselwirkungsenergie des Kondensats in der Falle und anfänglicher kinetischer Energie bestimmt wird. Zum anderen kann mit Hilfe von Bragg-Pulsen des optischen Gitterpotentials die Impulsverteilung auch für kurze Expansionszeiten bestimmt werden, was eine Abschätzung der Wechselwirkungsenergie erlaubt. Die folgenden Messungen sind bei der experimentellen Sequenz durchgeführt, bei der das magnetische Qua-



**Abbildung 5.1:** Flugzeitaufnahmen zur Bestimmung der Impulsbreite der Atomwolke. Für verschieden lange Expansionszeiten  $t_{\text{exp}}$  werden die Atome mit Absorptionenaufnahmen detektiert, um daraus die Größe des Ensembles zu bestimmen. Aus der Ausbreitungsgeschwindigkeit kann die Impulsverteilung und für ein thermisches Ensemble auch die Temperatur berechnet werden. Die Aufnahmen zeigen die relative optische Dichte (OD), die für einen besseren Kontrast mit Falschfarben dargestellt wird.

drupolfeld die Atome in Schwebe hält und das Potential der Dipolfalle nach der Evaporation adiabatisch expandiert wurde (vgl. Abschnitt 4.4).

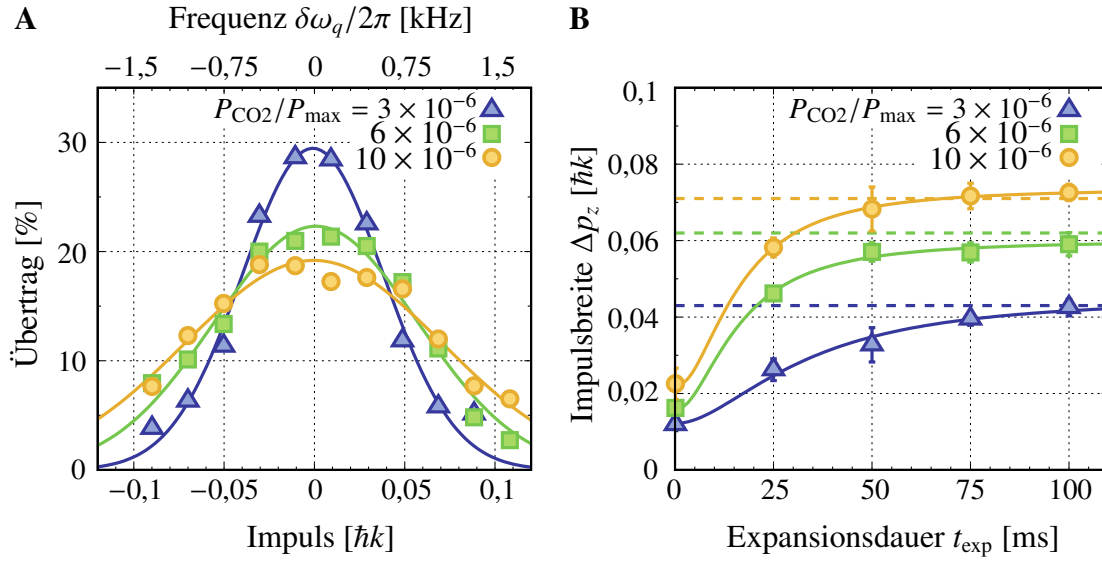
Abbildung 5.1 zeigt die Ausdehnung des atomaren Ensembles in Flugzeitaufnahmen. In den Bildern ist die (über  $y$ ) integrierte Teilchendichte  $n(x,z)$  in Falschfarben für verschieden lange Expansionszeiten  $t_{\text{exp}}$  dargestellt. Die Atomwolke breitet sich bei dieser Messung nur entlang der  $z$ -Achse kräftefrei aus, da ein angelegtes magnetisches Potential (s. Gl. (4.7)) die Atome in  $x$ -Richtung hält, so dass bei dieser Messung keine Achsenumkehr [14, 48] zu erwarten ist. Die Größe des Kondensats  $\Delta z$  entlang der vertikalen Achse wird durch eine Anpassung einer Gauß-förmigen Kurve der Form  $f(z) \propto \exp(-(z - z_0)^2/2\Delta z^2)$  an die integrierte Teilchendichteverteilung  $n(z) = \int_x n(x,z)dx$  bestimmt, die sich aus den Absorptionsabbildungen berechnen lässt. Die gesamte Teilchenzahl ist gegeben durch  $N_{\text{ges}} = \int_z n(z)dz$  und beträgt etwa  $10^4$ . Das rechte Diagramm zeigt die gemessene Breite der Atomwolke für verschiedene Expansionszeiten  $t_{\text{exp}}$ , wobei für lange Expansionszeiten ein linearer Anstieg der Breite sichtbar ist. Hieraus lässt sich die Impulsbreite  $\Delta p_z(\infty) \equiv \Delta p_\infty = m_{\text{Rb}} \cdot \lim_{t_{\text{exp}} \rightarrow \infty} \Delta z(t_{\text{exp}})/t_{\text{exp}}$  ermitteln. Die aus den gezeigten Daten errechnete Impulsbreite beträgt  $\Delta p_z = 0,034 \hbar k$ . Für ein thermisches Ensemble würde dies einer Temperatur von nur  $T = \Delta p_z^2/mk_B \approx 415$  pK entsprechen.

## Bragg-Spektroskopie am atomaren Wellenpaket

Direkt nach dem Ausschalten des Fallenpotentials, also für kurze Expansionszeiten, ist die Teilchendichte noch so groß, dass ein Teil der Energie in Wechselwirkungsenergie gespeichert ist. Diese Energie wird erst im Laufe der Expansion in kinetische Energie umgewandelt, so dass die bei einer Flugzeitaufnahme gemessene Energie der Summe aus kinetischer und innerer Energie entspricht. Im Thomas-Fermi Grenzfall, der bei atomaren Bose-Einstein Kondensaten üblicherweise deutlich erreicht ist, dominiert dabei die Wechselwirkungsenergie. Aus der mittleren Fallenfrequenz und der Teilchenzahl ( $N_{\text{ges}} \approx 10000$ ) lassen sich der Thomas-Fermi Radius und die Teilchendichte im Zentrum der Atomwolke abschätzen (vgl. Abschnitt 2.1). Die mittlere Fallenfrequenz<sup>3</sup> in dem kombinierten Potential aus Dipolfallen- und magnetischem Potential (s. Gl. (4.7)) beträgt etwa  $\bar{\omega} \approx 2\pi \cdot 10,4$  Hz, so dass sich in der Thomas-Fermi Näherung nach Gleichung (2.22) eine Teilchendichte von  $n_0 \approx 9 \cdot 10^{17}$  Atome/m<sup>3</sup> ergibt. Der Thomas-Fermi Radius entlang der für die Impulsbreitenbestimmung interessante z-Achse beträgt  $r_{\text{TF},z} \approx 16$   $\mu\text{m}$ .

Bei der durchgeführten Bragg-Spektroskopie wird Licht mit den Frequenzen  $\omega + \delta\omega_q$  und  $\omega + \delta\omega_B$  gegenläufig auf der Achse des optischen Gitters eingestrahlt (mit  $\delta\omega_B$  aus Abschnitt 4.5), wodurch die anfänglich ruhenden Atome mit einem mittleren Impuls von  $0\hbar k$  durch Absorption und stimulierter Emission einen Impulsübertrag von  $2\hbar k$  erfahren. Dieser sogenannte Bragg- $\pi$ -Puls koppelt die Impulszustände  $|0\hbar k + q\rangle$  und  $|2\hbar k + q\rangle$  über einen 2-Photonen-Prozess miteinander, wobei die Pulsdauer  $t_{\text{puls}}$  und Stärke der Kopplung so gewählt werden, dass auf der Zwei-Photonen-Resonanz eine halbe Rabi-Oszillation stattfindet. Die Atome mit Impuls  $2\hbar k$  besitzen nach dem Puls eine Geschwindigkeit von  $c_{\text{eff}} \approx 11$  mm/s, die größer ist als die kritische Geschwindigkeit des Superfluids [91]. Anschließend wird der relative Anteil an Atomen mit dem Impuls  $2\hbar k$  gemessen. Die Bestimmung der Anteile von Atomen mit verschiedenen Impulsen wird im folgenden Kapitel noch genauer erläutert. Über eine Variation der Frequenzverschiebung  $\delta\omega_q$  lässt sich die Breite der Zwei-Photonen-Resonanz bestimmen. Die Bragg-Puls Resonanz ist bedingt durch die endliche Größe des Kondensats Dopplerverbreitert  $\Delta\omega_D = \sqrt{21/8}c_{\text{eff}}/r_{\text{TF},z} = c_{\text{eff}}\Delta p_z/\hbar$ . Zusätzlich kann die Resonanz durch die inneratomare Wechselwirkung  $\Delta\omega_{\text{int}} = \sqrt{8/147}n_0g/\hbar$  oder durch die endliche Bragg-Pulslänge  $\Delta\omega_{\text{puls}} \approx \pi/t_{\text{puls}}$  verbreitert sein. Die gemessene Breite der Bragg-Resonanz ist gegeben durch  $\Delta\omega_{\text{Bragg}} = \sqrt{\Delta\omega_D^2 + \Delta\omega_{\text{int}}^2 + \Delta\omega_{\text{puls}}^2}$  [88]. Mit der oben abgeschätzten Teilchendichte und dem Thomas-Fermi Radius folgt, dass die erwartete Verbreiterung der Resonanz durch die inneratomare Wechselwirkung  $\Delta\omega_{\text{int}} \approx 2\pi \cdot 11$  Hz  $\ll$   $\Delta\omega_D \approx 2\pi \cdot 185$  Hz deutlich kleiner als die erwartete Dopplerverbrei-

<sup>3</sup> Bestimmt wurden die Fallenfrequenzen ( $\omega_x \approx 2\pi \cdot 28$  Hz,  $\omega_y \approx 2\pi \cdot 10$  Hz,  $\omega_z \approx 2\pi \cdot 4$  Hz bei  $P_{\text{CO}_2} = 3 \cdot 10^{-6} P_{\text{max}}$ ) durch Modulation des Dipolfallen- und des magnetischen Potentials und parametrischer Anregung der Atome (s. z.B. [90]).



**Abbildung 5.2:** Messung der Impulsverteilung mittels Bragg-Spektroskopie. **A** Resonanz des Doppler-sensitiver Bragg-Pulses für drei verschiedene Leistungen der  $\text{CO}_2$ -Laser Dipolfalle und einer festen Expansionszeit von  $t_{\text{exp}} = 75$  ms. Über die angepassten Gauß-förmigen Kurven an die Datenpunkte wird die Breite der Resonanzen  $\Delta\omega_{\text{Bragg}}$  ermittelt, die proportional zur Impulsbreite der Atome ist. **B** Die durch Bragg-Spektroskopie gemessene Impulsbreite für verschieden lange freie Expansionsdauern nähert sich der über Flugzeitaufnahmen ermittelte Impulsbreite (gestrichelt) an.

terung und damit zu vernachlässigen ist. Ebenso wird die Pulsdauer  $t_{\text{puls}}$  so groß gewählt, dass auch die Verbreiterung  $\Delta\omega_{\text{puls}}$  klein gegenüber der Dopplerverbreiterung wird. Dadurch ist die Breite der Bragg-Resonanz in guter Näherung  $\Delta\omega_{\text{Bragg}} = c_{\text{eff}}\Delta p_z/\hbar$  direkt proportional zur Impulsbreite der Atomwolke.

Abbildung 5.2A zeigt die Bragg-Resonanz für drei Atomwolken, die aus der  $\text{CO}_2$ -Laser Dipolfalle mit unterschiedlichen Lichtleistungen  $P_{\text{CO}_2}$  am Ende der adiabatischen Expansion stammen. Das atomare Ensemble konnte bei diesen Messungen nach dem Ausschalten der Falle für  $t_{\text{exp}} = 75$  ms frei expandieren, bevor der Bragg-Puls mit einer Einstrahldauer von  $t_{\text{puls}} = 2,5$  ms eingestrahlt wurde. Für schwächere Dipolfallenpotentiale ist die Impulsverteilung der in der Falle gefangenen Atome schmäler und der gemessene maximale Übertrag durch den Bragg-Puls höher wird. Über eine Anpassung einer Gauß-förmigen Kurve an die Messpunkte lässt sich die Impulsbreite  $\Delta p_z(t_{\text{exp}})$  bestimmen, die in Abbildung 5.2B für verschieden lange Expansionszeiten aufgetragen ist. Für kurze Expansionszeiten wurde eine Bragg-Pulsdauer auf bis zu  $t_{\text{puls}} = 10$  ms erhöht, damit die Energieunschärfe des Pulses weiterhin deutlich schmäler bleibt, als die kinetische Energieverteilung der Atome. Die eingezeichneten gestrichelten Linien entsprechen den Impulsbreiten, die bei gleichen Einstellungen über Flugzeitaufnahmen bestimmt wurden. Die Messungen zeigen, dass sich die Impuls-

breite der Atomwolken mit steigender Expansionszeit dem Wert der Flugzeitmessung nähert und erst bei etwa  $t_{\text{exp}} \approx 100$  ms diesen erreicht. Nach dieser Expansionszeit hat sich die innere Wechselwirkungsenergie vollständig in kinetische Energie umgewandelt. Die an die Daten angepassten Kurven haben die Form [88]

$$\Delta p_z(t) = \sqrt{(\Delta p_0)^2 + (\Delta p_\infty \omega_x t)^2} / \sqrt{1 + (\omega_x t)^2}, \quad (5.1)$$

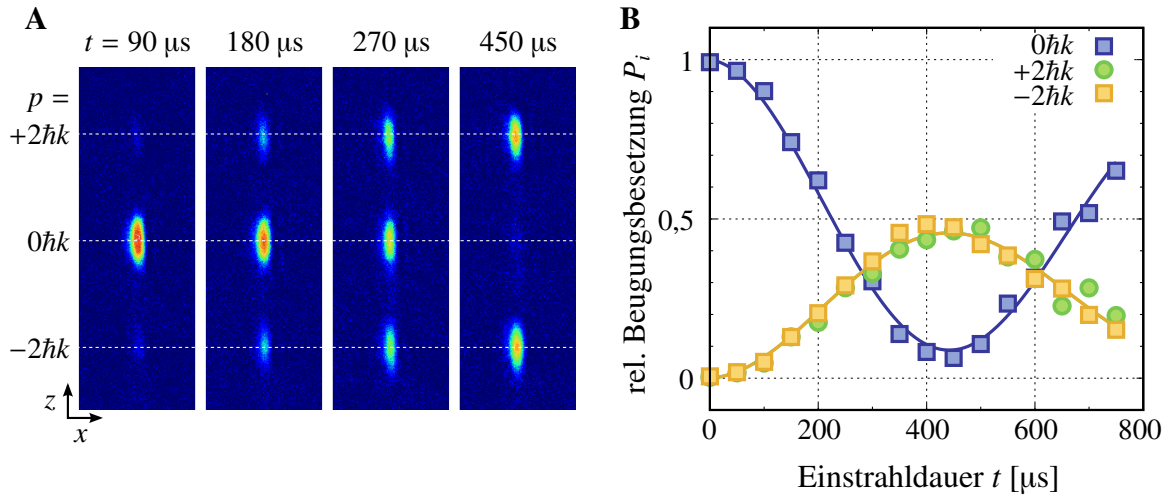
wobei  $\Delta p_0$  und  $\Delta p_\infty$  die Impulsbreiten zum Zeitpunkt  $t = 0$  bzw.  $t \rightarrow \infty$  darstellen. Da die im Folgenden vorgestellten Messungen mit Atomen im optischen Gitterpotential auf einer Zeitskala kleiner als 5 ms stattfinden, spielt die Impulsbreite  $\Delta p_0$  für kurze Expansionszeiten eine entscheidendere Rolle. Die kleinste im Experiment realisierte Impulsbreite einer Atomwolke liegt bei etwa  $\Delta p_z(0) = 0,012\hbar k$  und ist im Einklang mit dem über die Thomas-Fermi Näherung erwarteten Wert  $\Delta p_z = \sqrt{21/8}\hbar/r_{\text{TF},z} \approx 0.012\hbar k$ .

## 5.1 Phasenabhängiges Laden in Bloch-Zustände

In diesem Abschnitt wird zunächst beschrieben, wie sich die Besetzung von Bloch-Bändern im optischen Gitterpotential bestimmen lässt. Anschließend wird erläutert, wie die anfänglich ruhenden Atome mittels Lichtpulsen in einen Bloch-Zustand (s. Gl. (3.22)), der sich als Superposition von freien Impulszuständen schreiben lässt, transferiert werden können und wie insbesondere die Phase  $\phi$  bestimmt werden kann.

### Besetzung von Bloch-Zuständen

Zunächst wird angenommen, dass Atome mit Quasimoment  $|q| \ll \hbar k$  nur die ersten drei Blochbänder im periodischen Gitter, also das Grundband und die beiden nächsten höheren Bänder  $|-\rangle$  und  $|+\rangle$  besetzen. Durch schnelles Ausschalten des periodischen Potentials wird die Wellenfunktion auf die freien Impulseigenzustände  $|0\hbar k + q\rangle$  und  $|\pm 2\hbar k + q\rangle$  projiziert. Die Besetzung des Grundbandes ist nahezu äquivalent zum freien Eigenzustand  $|0\hbar k + q\rangle$ . Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, sind die beiden angeregten Bänder  $|\pm\rangle$  durch eine Superposition der Impulszustände  $|\pm 2\hbar k + q\rangle$  gegeben (vgl. Gl. (3.15) und (3.16)), so dass für die Ermittlung der Besetzung der Bänder sowohl der Mischungswinkel  $\Theta$  als auch die Relativphase  $\phi$  zwischen  $|\pm 2\hbar k + q\rangle$  bestimmt werden müssen (s. Gl. (3.22)). Nach dem Ausschalten des periodischen optischen Gitters und einer freien Expansionszeit von typischerweise 10 bis 15 ms trennen sich die Atome in den drei freien Eigenzuständen  $| -2\hbar k + q\rangle$ ,  $|0\hbar k + q\rangle$  und  $|+2\hbar k + q\rangle$  aufgrund ihrer unterschiedlichen Impulse räumlich voneinander. In der so erzeugten Impulsdarstellung können die Beugungsordnungen durch  $\langle p|p_0 + q\rangle = \psi_{p_0+q}(p) \approx \exp\left[-(p - (p_0 + q))^2/4\Delta p_z^2\right]$  beschrieben werden, als Wellen mit mittlerem Impuls  $p_0 = \{0\hbar k, \pm 2\hbar k\}$  und Impulsbreite  $\Delta p_z$ . Die Atomzahlen in den



**Abbildung 5.3:** Beugung der Atome am optischen Gitter. **A** Nach der Wechselwirkung mit dem optischen Gitterpotential mit der Einstrahldauer  $t$  können die Atome frei expandieren, so dass die Beugungsordnungen sichtbar werden. Aus den Aufnahmen kann so die relative Besetzung der Zustände bestimmt werden. **B** Mit dem Präparationspuls werden die Atome aus dem Ausgangszustand  $|0\hbar k\rangle$  durch zwei gleichzeitig durchgeführte Bragg-Pulse in die Impulszustände  $|\pm 2\hbar k\rangle$  transferiert. Bei einer Einstrahldauer von  $450\mu\text{s}$  sind nahezu alle Atome übertragen. Ein Puls mit dieser Dauer stellt das Analogon eines  $\pi$ -Pulses dar.

so entstehenden Beugungsordnungen  $N_{0,\pm 2} = \iint n(x,z) dx dz$  können über Integration der Teilchendichte um die Region der Beugungsordnung berechnet werden. Der Mischungswinkel  $\Theta = 2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{N_{+2\hbar k}}}{(N_{+2\hbar k} + N_{-2\hbar k})}\right)$  ergibt sich aus den Teilchenzahlen der Beugungsordnung. Die Phase  $\phi$  ist bei dieser Messung allerdings noch unbestimmt, kann aber durch andere Analysemethoden verifiziert werden, die im späteren Verlauf dieser Arbeit vorgestellt werden.

Abbildung 5.3A zeigt eine Serie von Absorptionsabbildungen mit verschiedenen Besetzungen der drei Beugungsordnungen. Die horizontal gestrichelten Linien zeigen die Schwerpunkte der Beugungsordnungen mit Impuls  $p$  an. Für die folgenden Experimente zur Simulation der Dirac-Gleichung sollen sich möglichst alle Atome in der Nähe der Bandkante zwischen erstem und zweitem angeregtem Blochband bei  $q = 0$  befinden. Dazu wird zunächst ein Präparationspuls benutzt, um die Atome aus ihrem Ausgangszustand  $|0\hbar k\rangle$  in einen Superpositionszustand

$$|\psi(\Theta, \phi)\rangle = e^{i\phi} \sin\frac{\Theta}{2} | +2\hbar k\rangle + \cos\frac{\Theta}{2} | -2\hbar k\rangle \quad (5.2)$$

zu transferieren (vgl. Gl. (3.22)). Hierfür werden durch das Licht des optischen Gitters zwei Bragg-Pulse simultan eingestrahlt, in dem die Lichtfrequenzen  $\omega$  und  $\omega \pm \delta\omega_B$  verwendet werden. Das Diagramm in Abbildung 5.3B zeigt die gemessenen relativen

Beugungsbesetzung  $P_i = N_i/N_{\text{ges}}$  für verschieden lange Einstrahldauern der beiden Bragg-Pulse. Die Besetzung des Ausgangszustandes nimmt über die Zeit ab, während die Besetzung der beiden Beugungsordnung  $|\pm 2\hbar k\rangle$  simultan zunehmen. Bei einer Einstrahldauer von etwa  $450 \mu\text{s}$  wird ein Maximum von knapp 50 % Beugungsbesetzung in  $|\pm 2\hbar k\rangle$  erreicht, so dass man hier den gewünschten Superpositionszustand  $|\psi(\Theta, \phi)\rangle$  mit einem Mischungswinkel von etwa  $\Theta = \pi/2$  erzielt.

In einer theoretischen Betrachtung kann dieser Präparationspuls durch die gleichzeitige Kopplung der drei Zustände  $|-2\hbar k + q\rangle$ ,  $|0\hbar k + q\rangle$  und  $|+2\hbar k + q\rangle$  beschrieben werden, die durch den Hamiltonoperator in Matrixform ausdrücken wird

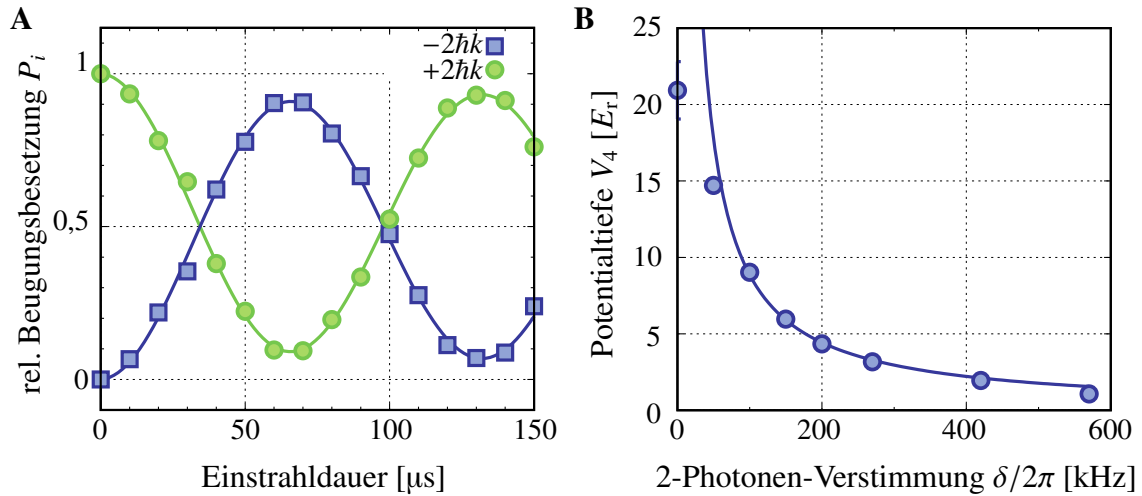
$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -c_{\text{eff}}q & W_- & 0 \\ W_-^* & 0 & W_+ \\ 0 & W_+^* & c_{\text{eff}}q \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

wobei  $W_{\pm}$  die Wechselwirkungsstärke der beiden einzelnen Bragg-Pulse angibt, die analog zur Potentialtiefe  $V_2$  eines Zwei-Photonen-Gitters von der Lichtleistung abhängt. Die Besetzungen zum Zeitpunkt  $t$  ergeben sich über das Anwenden des Zeitentwicklungsoperators  $U(t) = \exp(-i\hat{H}/\hbar \cdot t)$  auf den Anfangszustand  $(0, 1, 0)$ . In der gezeigten Messung sind die Wechselwirkungsstärken  $|W_+| \approx |W_-|$  vom Betrag her annähernd gleich groß, so dass beide Zustände  $|\pm 2\hbar k\rangle$  gleichmäßig besetzt werden. Der erzeugte Zustand entspricht im Bild der Blochkugel einem Bloch-Vektor, der zum Äquator in der  $x$ - $y$ -Ebene zeigt (vgl. Abb. 3.2). Die anschließende Messung der Besetzung der beiden Impulszustände  $|\pm 2\hbar k\rangle$  entspricht einer Projektion des Bloch-Vektors auf die  $z$ -Achse und ergibt daher unabhängig vom Azimutwinkel  $\phi$  immer gleichmäßige Besetzung.

## Bestimmung der Potentialtiefe

Um die Potentialtiefe des optischen Gitterpotentials und somit auch die effektive Masse der Atome an der Bandkante zwischen dem ersten und zweiten angeregten Blochband zu bestimmen, werden die Atome durch einen Bragg- $\pi$ -Puls in den Zustand  $|+2\hbar k\rangle$  transferiert (also  $\Theta = \pi$ ). Anschließend werden nur die Lichtfelder zur Erzeugung eines Vier-Photonen-Gitterpotential  $V_4$  eingeschaltet, d.h.  $V_2 = 0$ . Da der Zustand  $|+2\hbar k\rangle$ , in dem sich die Atome befinden, mit Gitterpotential kein Eigenzustand des Systems ist, kommt es bei schnellem Einschalten des Gitters zu der wie in Abschnitt 3.2 beschriebenen Rabi-Oszillation, wodurch sich die Besetzungswahrscheinlichkeit von  $|+2\hbar k\rangle$  und  $|-2\hbar k\rangle$  periodisch ändern.

Abbildung 5.4A zeigt den zeitlichen Verlauf der relativen Beugungsbesetzung der beiden Impulszustände für verschiedene Einstrahldauern des Vier-Photonen-Gitters. Die Oszillationsfrequenz, die sich aus dieser Messung ergibt beträgt  $\omega_{\text{Rabi}} \approx 2\pi \cdot 7,6 \text{ kHz}$ .



**Abbildung 5.4:** Rabi-Oszillation an der Bandkante zwischen den ersten beiden angeregten Blochbändern und Vier-Photonen-Gitter Potentialtiefe. **A** Die Besetzungswahrscheinlichkeit der durch das optische Gitter gekoppelte Impulszustände ändert sich periodisch, wobei die Oszillationsfrequenz mit der Potentialtiefe zusammenhängt. **B** Die Potentialtiefe des Vier-Photonen-Gitters ist invers von der Zwei-Photonen-Verstimmung  $\delta$  abhängig.

Hieraus ergibt sich nach den Gleichungen (3.21) und (3.12) eine effektive Masse von  $m_{\text{eff}} \approx 0.126 \cdot m_{\text{Rb87}}$  bzw. eine Potentialtiefe von  $V_4 \approx 4,0E_r$ . Die leichte Dämpfung der Oszillation lässt sich mit der endlichen Impulsbreite der atomaren Wolke erklären, da Atome mit Quasiimpuls  $|q| > 0$  nicht resonant an der Rabi-Oszillation teilnehmen. Abbildung 5.4B zeigt die auf gleiche Weise gemessene Vier-Photonen-Potentialtiefe  $V_4$  für verschieden eingestellte Zwei-Photonen-Verstimmungen  $\delta$ . Hierbei bleibt die verwendete optische Lichtleistung und die Zeeman-Aufspaltung am Ort der Atome von  $\Delta\omega_Z \approx 2\pi \cdot 700$  kHz zwischen den Einzelmessungen unverändert. Für Verstimmungen von mehr als  $\delta/2\pi = 100$  kHz ist der erwartete  $1/\delta$ -Verlauf der Potentialtiefe deutlich zu erkennen (vgl. Gl. (2.62)). Bei kleineren Verstimmungen weichen die Messpunkte von der angepassten Kurve ab, da hier die Verstimmung so klein ist, dass es zu Raman-Übergängen in den benachbarten Zeeman-Zustand  $m_F = 0$  kommt. Somit verliert die adiabatische Eliminierung dieses Zustandes (vgl. Gl. (2.60) bis (2.62)) ihre Gültigkeit. In den folgenden Experimenten werden deshalb Zwei-Photonen-Verstimmungen von etwa  $\delta/2\pi = 300$  kHz verwendet, damit diese Raman-Übergänge unterdrückt werden.

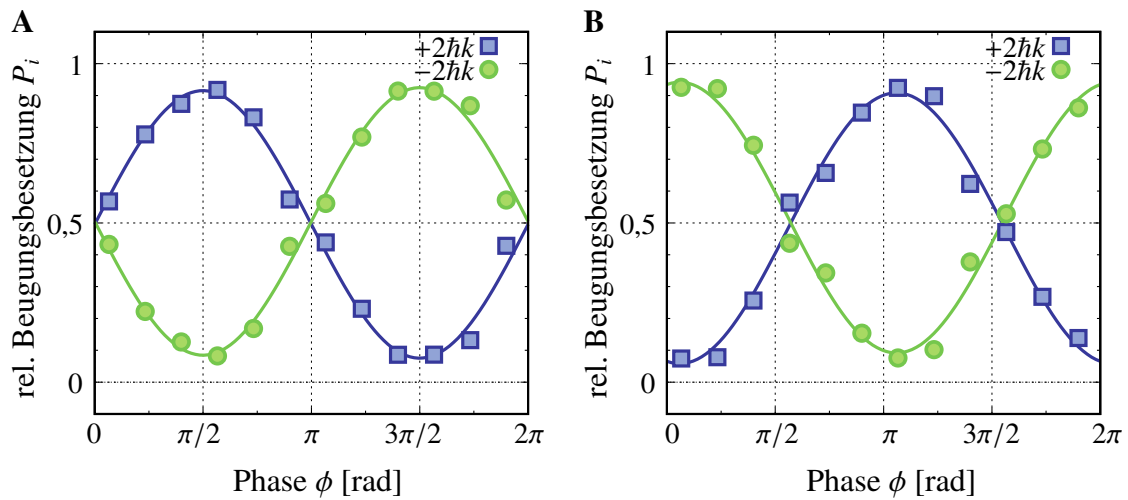


## Phasenabhängigkeit

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie sich die Phase  $\phi$  des Superpositionszustandes  $|\psi\rangle$  messen und einstellen lässt. Dazu wird der oben beschriebene, aus zwei überlagerten Bragg-Pulsen bestehende Präparationspuls verwendet, um den Ausgangszustand  $|\psi(\Theta = \pi/2, \phi)\rangle$  zu erzeugen. Um die Phase  $\phi$  zu bestimmen, wird anschließend das Vier-Photonen-Gitterpotential eingeschaltet, wobei die Potentialtiefe bzw. die damit verknüpfte Rabi-Oszillationsfrequenz aus vorangehenden Messungen (Abb. 5.4A) bekannt ist. Durch das Vier-Photonen-Gitter kommt es zur Kopplung der Impulszustände  $|\pm 2\hbar k\rangle$ . Das periodische Potential wird für eine Dauer von  $t = \pi/(2\omega_{\text{Rabi}}) = 30\mu\text{s}$  eingestrahlt, was einem  $\pi/2$ -Puls bzw. einer viertel Rotation des Bloch-Vektors um die  $x$ -Achse entspricht. Im Anschluss an den Vier-Photonen-Gitterpuls, der auch als Analysepuls verstanden werden kann, wird die relative Besetzung  $P_{\pm 2\hbar k} = N_{\pm 2\hbar k}/(N_{+2\hbar k} + N_{-2\hbar k})$  der beiden Impulszustände gemessen. Zu erwarten ist, dass die relativen Besetzungen  $P_{\pm 2\hbar k} = (1 \pm \sin(\phi))/2$  von der Phase des Ausgangszustandes abhängen. Experimentell kann die Phase  $\phi$  des Ausgangszustandes über die Phasendifferenz der Lichtfrequenzen  $\omega + \delta\omega_{\text{B}}$  und  $\omega - \delta\omega_{\text{B}}$  der beiden Bragg-Pulse eingestellt werden, da sich die Lichtphasen auf die komplexen Phasen der Wechselwirkung  $W_{\pm}$  übertragen und damit auch auf die Relativphase zwischen den Zuständen  $|\pm 2\hbar k\rangle$  festgelegt wird. Die Lichtphasen können über die Phase der Radiofrequenz an den Frequenzgeneratoren für das optische Gitter eingestellt werden, jedoch kann es durch Verwendung unterschiedlicher elektrischer Bauteile und unterschiedlicher Kabellängen vor dem Kombinierer zu einem zusätzlichen Phasenversatz kommen. Deshalb dient die folgende Messung als Kalibration dieser Phase bezüglich der am Frequenzgenerator eingestellten Phase.

Abbildung 5.5A zeigt die Messung der relativen Beugungsbesetzung nach dem  $\pi/2$ -Puls. Zeigt der Bloch-Vektor nach dem Präparationspuls entlang bzw. entgegen der  $x$ -Achse ( $\phi = 0$  bzw.  $\pi$ ), so befinden sich die Atome in den Eigenzuständen  $|+\rangle$  bzw.  $|-\rangle$  des Vier-Photonen-Gitters. Demnach bleibt ein solcher Zustand durch den  $\pi/2$ -Puls unverändert und es wird eine Gleichverteilung detektiert. Im Gegensatz dazu werden die Ausgangszustände  $|+i\rangle$  und  $|-i\rangle$  ( $\phi = \pi/2$  bzw.  $3\pi/2$ ) durch den  $\pi/2$ -Puls auf die freien Zustände  $|+2\hbar k\rangle$  und  $|-2\hbar k\rangle$  projiziert, wodurch die gemessene relative Besetzung der jeweiligen Beugungsordnung steigt.

Zusätzlich zu dieser Phasenmessung gibt es eine weitere Methode, mit der sich die Phase  $\phi$  des Superpositionszustandes bestimmen lässt. Dazu wird ebenfalls das Vier-Photonen-Gitter nach dem Präparationspuls eingeschaltet, diesmal aber mit einer längeren Einstrahldauer. Zusätzlich wird mit einer linearen Frequenzrampe am Funktionsgenerator FG 5 das Gitter beschleunigt. Im Beobachtungssystem des beschleunigten Gitters verändert sich so effektiv der Quasiimpuls  $q$  der Atome. Die benutzte Frequenzrampe ändert den Quasiimpuls von ursprünglich  $0\hbar k$  auf  $0,5\hbar k$ , so



**Abbildung 5.5:** Messungen zur Bestimmung der Phasenabhängigkeit des Blochzustandes. Mit Hilfe eines  $\pi/2$ -Pulses (A) oder adiabatischem Beschleunigen des Gitterpotentials (B) nach der Präparation des Superpositionszustandes  $|\psi(\Theta = \pi/2, \phi)\rangle$  (s. Gl. (5.2)) lässt sich die Phase  $\phi$  bestimmen.

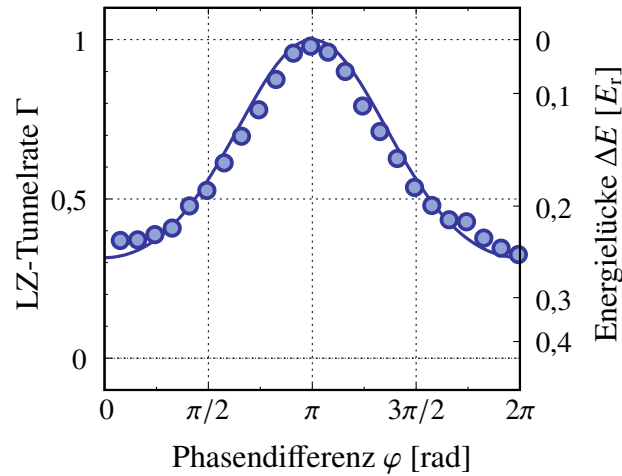
dass sich die Atome nach der Rampe nicht mehr an der Bandkante befinden. Die Einstrahldauer des Vier-Photonen-Gitters ist mit  $t = 1$  ms deutlich länger als die Periodendauer einer Rabi-Oszillation, so dass die Atome den Blochbändern adiabatisch folgen können. Da sich die Energiebänder im optischen Gitter und die freien Lösungen bei  $q = 0,5\hbar k$  nur wenig unterscheiden (vgl. Abb. 2.6), entsprechen hier die Besetzungen der beiden Blochbänder  $|\pm\rangle$  denen der freien Zustände  $|\mp 2\hbar k\rangle$  nach dem Ausschalten des Gitters. Im Bild der Blochkugel kann das adiabatische Beschleunigen des Gitters als eine langsame viertel Rotation des Bloch-Vektors um die  $y$ -Achse verstanden werden. Die erwarteten relativen Besetzungen  $P_{\pm 2\hbar k} = (1 \mp \cos(\phi))/2$  nach Ausschalten des Gitters sind ebenfalls nur von der Phase  $\phi$  des Ausgangszustandes abhängig, aber im Vergleich zur ersten Analysemethode um  $\pi/2$  verschoben. Abbildung 5.5B zeigt die entsprechende Messung der relativen Besetzung der Beugungsordnungen nach dieser Sequenz in Abhängigkeit der Präparationsphase  $\phi$ . Die angepasste Cosinuskurve hat einen kleinen Phasenversatz von  $0,13\pi$  im Vergleich zum erwarteten Verlauf. Dieser Phasenversatz spiegelt die Unsicherheit in der Bestimmung der Phase wider.

## 5.2 Veselago-Linse für atomare Wellenpakete

In diesem Abschnitt werden die Ergebnisse vorgestellt, bei denen sich die Atome im optischen Gitter nahe der zweiten Bandkante verhalten wie Photonen in Material mit positivem oder negativem Brechungsindex. Durch Raman-Pulse können die Atome zwischen diesen Bereichen transferiert werden, so dass es möglich wird, dass ein atomares Wellenpaket negative Brechung erfährt und refokussiert wird, analog zu einer Veselago-Linse. Dabei werden anhand der Messungen mögliche Abbildungsfehler in Abhängigkeit der effektiven Masse der Atome diskutiert.

### Masselose Dirac-Teilchen

Damit sich die Atome im Gitter wie masselose Dirac-Teilchen ( $m_{\text{eff}} = 0$ ) verhalten, wird zunächst die Landau-Zener-Tunnelrate an der zweiten Bandkante gemessen und die Phase sowie die Amplitude der Gitterpotentiale so eingestellt, dass die Energielücke zwischen den ersten beiden angeregten Blochbändern verschwindet. Das optische Gitter setzt sich im hier gezeigten Fall aus einer Kombination eines Zwei- und eines Vier-Photonen-Gitters zusammen, so dass die Energielücke verschwindet, wenn Gleichung (3.26) erfüllt ist. Um die Landau-Zener-Tunnelrate zu messen, wird mit einer linearen Frequenzrampe am Funktionsgenerator FG 5 das optische Gitter beschleunigt. Im Beobachtungssystem des Gitters befinden sich die Atome im ersten angeregten Blochband bei  $q = -0,2\hbar k$  und diese werden durch die Frequenzrampe innerhalb von  $800 \mu\text{s}$  über die Bandkante zu  $q = 0,2\hbar k$  hin beschleunigt. Ein Teil der Atome wird an der Bandkante bei  $q = 0\hbar k$  Bragg-reflektiert und bleibt im unteren Band, die anderen können durch die Energielücke tunneln und befinden sich hinterher im zweiten angeregten Blochband. Die Tunnelwahrscheinlichkeit  $\Gamma = N_{\text{T}}/N_{\text{ges}}$  ist äquivalent zur relativen Anzahl an getunnelten Atomen. Die Besetzung der beiden Bänder lässt sich durch eine nachfolgende freie Expansion ermitteln, da sich die Atome dann nicht mehr in der Nähe einer Bandkante befinden und so die Blochbänder nahezu äquivalent zu den entsprechenden freien Zuständen sind. Abbildung 5.6A zeigt eine typische Messung der Landau-Zener-Tunnelrate in Abhängigkeit der Phasendifferenz  $\varphi$  der beiden Gitterpotentiale. Die Tunnelrate nimmt für eine Phase von  $\varphi = \pi$  den Maximalwert von etwa 1 an, da die Potentialtiefen  $V_2 \approx 2E_{\text{r}}$  und  $V_4 \approx 0,25E_{\text{r}}$  durch eine separate Messung so eingestellt sind, dass die Energielücke für diesen Phasenwinkel verschwindet. An diesem Punkt kommt es zur destruktiven Interferenz zwischen Bragg-Streuung erster Ordnung des Vier-Photonen-Gitters und Bragg-Streuung zweiter Ordnung des Zwei-Photonen-Gitters. Für eine Phase von  $\varphi = 0$  ist die Tunnelrate mit etwa 0,38 minimal, wobei dieser Wert einer Bandlücke von  $\Delta E \approx 0,25E_{\text{r}}$  bzw. einer effektiven Masse von  $m_{\text{eff}} \approx 0,016 \cdot m_{\text{Rb87}}$  entspricht (vgl. Gl. (3.24) und (3.25)). Für die folgenden Experimente wird die Phase auf  $\varphi = \pi$  gesetzt, damit sich die Atome



**Abbildung 5.6:** Messung der Landau-Zener Tunnelrate in Abhängigkeit der Phasendifferenz  $\varphi$  zwischen einem Zwei- und einem Vier-Photonen Gitterpotential. Die Tunnelrate wird bei einer Phasendifferenz von  $\pi$  maximal, so dass hier die Energielücke zwischen den Blochbändern bzw. die effektive Masse der Atome verschwindet. Die eingezeichnete Kurve entspricht dem theoretischen Verlauf nach Gleichung (3.24) mit den verwendeten Potentialtiefen  $V_2 = 2E_r$  und  $V_4 = 0,25E_r$  und der verwendeten Beschleunigung von  $a = 0,4\hbar k/800\mu\text{s}/m_{\text{Rb}87} \approx 2,9 \text{ m/s}^2$ .

wie masselose Teilchen verhalten, die sich in erster Ordnung unabhängig von ihrem Quasiimpuls mit ihrer effektiven Lichtgeschwindigkeit bewegen.

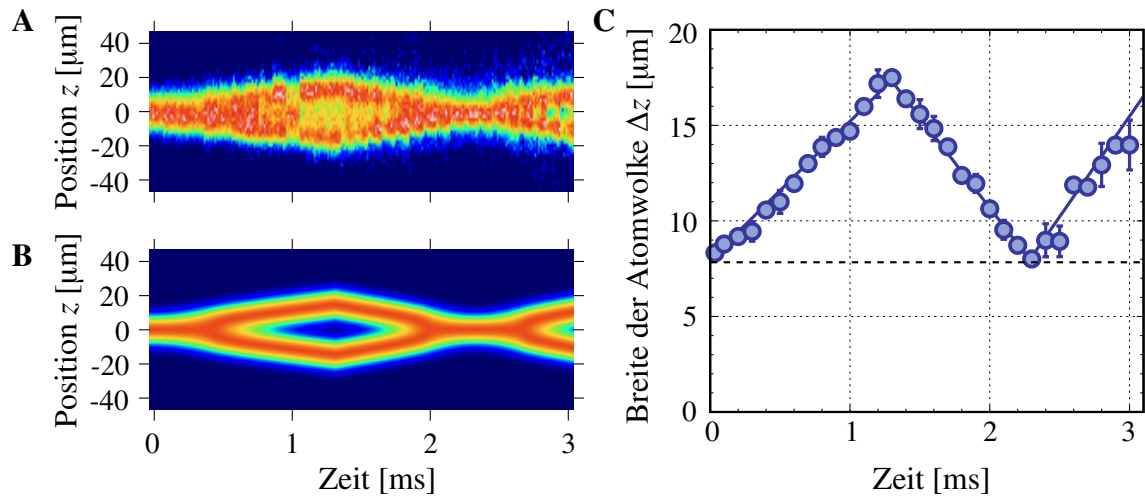
## Experimentablauf

Der Ausgangspunkt für die Experimente zum negativen Brechungsindex und zur Veselago-Linse für eine atomare Materiewelle ist ein Bose-Einstein-Kondensat im Hyperfein-Zeeman-Zustand  $|F = 1, m_F = 0\rangle$ . Das Kondensat wird in der Dipolfalle erzeugt, indem während der Evaporation ein kleiner magnetischer Gradient angelegt wird, der eine Kraft auf Atome in den beiden anderen Zeeman-Zuständen  $|m_F = \pm 1\rangle$  ausübt und diese somit aus der Falle entfernt. Nach dem Erzeugen des Kondensats werden die Atome aus der ursprünglichen Dipolfalle in die Dipolfalle umgeladen, die durch den  $\text{CO}_2$ -Laserstrahl aus der entgegenkommenden Richtung erzeugt wird (s. Abb. 4.6), da dieser einen größeren Strahlradius und dessen Fallenpotential eine geringere Fallenfrequenz besitzt. Der Umladeprozess geschieht, indem das Fallenpotential der ersten Dipolfalle linear reduziert und das Potential der zweiten Falle gleichzeitig erhöht wird. Die Umladezeit ist mit etwa 400 ms lang im Vergleich zu den inversen radialen Fallenfrequenzen ( $\omega_{1/2}/2\pi \approx 250\text{Hz}$  bzw. 70 Hz) der beiden Fallen, so dass der Umladeprozess nahezu adiabatisch stattfindet. Zudem kommt es hierbei auf eine genaue räumliche Überlagerung der beiden Fallen an, da die Atome

sonst zum Minimum der zweiten Falle hinbeschleunigt werden und so an kinetischer Energie gewinnen. Der räumliche Einschluss der Atome im Fallenpotential der zweiten Dipolfalle ist so gering, dass Wechselwirkungseffekte zwischen den Atome näherungsweise hier vernachlässigt werden können. Die Impulsbreite der umgeladenen Atome beträgt etwa  $\Delta p_z = 0,7\hbar k$ .

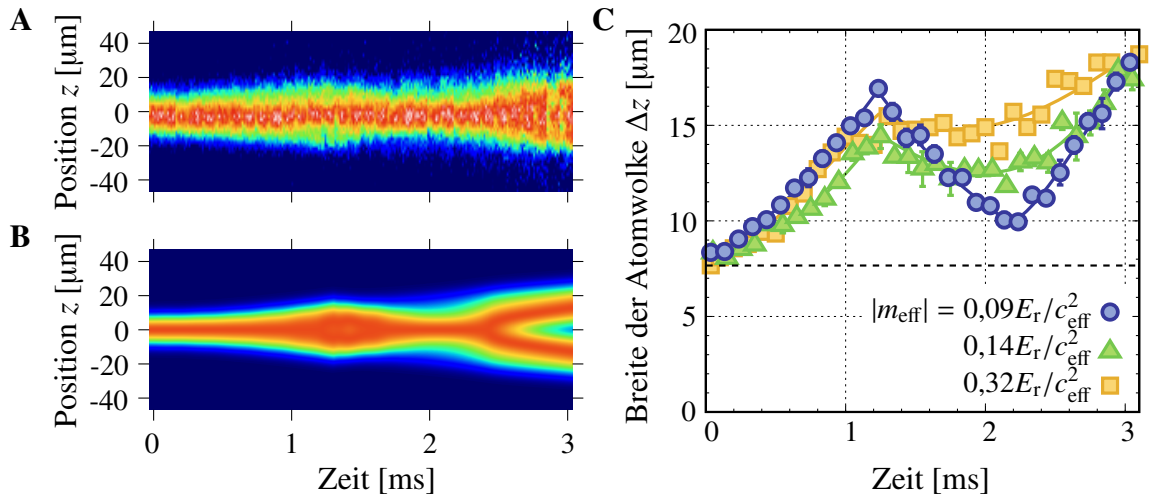
Als nächstes werden die Atome mit zwei simultan eingestrahnten Raman-Pulsen in die Nähe der zweiten Bandkante gebracht. Dazu wird Licht des Gitterlasers mit den Frequenzen  $\omega$  und  $\omega \pm \delta\omega_R = \omega \pm (\Delta\omega_Z + \delta\omega_B)$  aus entgegengerichteten Richtungen auf die Atome eingestrahlt. Das Licht dieser Raman-Pulse hat die gleiche Funktion wie der Präparationspuls aus Abschnitt 5.1, ändern aber zusätzlich noch den Zeeman-Zustand der Atome, so dass hiermit die Übergänge  $|m_F = 0, 0\hbar k\rangle \rightarrow |m_F = -1, \pm 2\hbar k\rangle$  getrieben werden. Bei diesen induzierten Raman-Übergängen wird eine Pulsfläche von  $\pi$  bei einer Einstrahldauer von 20  $\mu\text{s}$  erreicht, bei der nahezu alle Atome übertragen sind. Direkt im Anschluss wird das optische Gitter, das aus einem überlagerten Zwei- und Vier-Photonen-Gitter besteht, eingeschaltet, wobei die zweite Dipolfalle weiterhin für ein schwaches harmonisches Potential sorgt. Die Atome laufen im Gitter aufgrund ihrer unterschiedlichen Gruppengeschwindigkeiten von  $\pm c_{\text{eff}}$  auseinander und verhalten sich so analog zu Photonen in einem Medium mit positivem Brechungsindex. Nach einer Propagationszeit von 1,3 ms im optischen Gitter wird durch einen erneuten Raman-Puls der Eintritt in ein Medium mit negativem Brechungsindex simuliert. Für diesen Raman-Puls werden die selben Frequenzen wie zuvor verwendet, die die drei Zustände  $|m_F = -1, -2\hbar k\rangle \leftrightarrow |m_F = 0, 0\hbar k\rangle \leftrightarrow |m_F = -1, +2\hbar k\rangle$  koppeln. Mit einer etwas höheren Lichtleistung als der erste Puls und mit einer Länge von 22  $\mu\text{s}$  ist dieser Puls so gewählt, dass die Besetzungen in den beiden Impulszuständen  $|\pm 2\hbar k\rangle$  im  $m_F = -1$  Zeeman-Zustand genau ausgetauscht werden. Dieser Raman-Puls stellt das Analogon zu einem  $\pi$ -Puls dar. Anstatt eines längeren Pulses mit geringer Lichtleistung wurde hier ein kurzer Lichtpuls mit höherer Lichtleistung verwendet, damit aufgrund der Energie-Zeit-Unschärferelation auch Atome, die in der Zwischenzeit einen kleinen Quasiimpuls aufgenommen haben transferiert werden. Anschließend propagieren die Atome weiter mit der durch das optische Gitter vorgeschriebenen Dispersion. Zur Detektion der Atome wird ein Mikrowellenpuls verwendet, der den Übergang  $|F = 1, m_F = -1\rangle \rightarrow |F = 2, m_F = -1\rangle$  treibt, so dass nur Atome abgebildet werden, die sich im Zeeman-Zustand  $m_F = -1$  befinden. Atome, die durch die Raman-Pulse nicht oder nur teilweise transferiert werden und sich noch im Zustand  $m_F = 0$  befinden, werden mit dieser Abbildungsmethode daher nicht detektiert.

Abbildung 5.7A zeigt eine Serie von Absorptionsabbildungen von den Atomen im Gitter für den Fall, dass die effektive Masse der Atome verschwindet. Die anfänglich kompakte Atomwolke teilt sich zunächst in zwei divergent auseinander laufende Wellen auf. Nach 1,3 ms wird die Geschwindigkeit aller Atome durch den zwei-



**Abbildung 5.7:** Eindimensionale Veselago-Linse für den Fall  $m_{\text{eff}} = 0$ . **A** Serie von Absorptionsabbildungen von Atomen im Gitter, die zu verschiedenen Zeitpunkten mit einer Schrittweite von  $100 \mu\text{s}$  aufgenommen wurden. **B** Numerische Simulation mit den im Experiment verwendeten Parametern. **C** Die Breite der Atomwolke ist aus den Einzelbildern extrahiert und zeigt, dass bei 2,3 ms die anfängliche Breite wieder erreicht wird.

ten Raman-Pulses umgekehrt, wodurch die Atome eine effektive negative Brechung erfahren. Anschließend bewegen sich die Atome zu ihrem Ausgangspunkt zurück und bilden einen Fokus innerhalb des „Mediums“ mit negativem Brechungsindex. Im weiteren Verlauf gehen die beiden Teilstrahlen der atomaren Welle wieder auseinander. Die Messung ist in guter qualitativer Übereinstimmung mit der in Abbildung 5.7B gezeigten numerischen Simulation (Details zu den Simulationen befinden sich im Anhang B). Für eine quantitative Analyse ist die vertikale Breite der Atomwolke  $\Delta z$  aus den einzelnen Absorptionsabbildungen bestimmt und in Abbildung 5.7C gegen die Zeit im optischen Gitter aufgetragen. Die Auswertung zeigt, dass die anfängliche Größe des Wellenpakets im Fokus nach 2,3 ms wieder erreicht wird, also das Wellenpaket durch diese Veselago-Linse scharf abgebildet wird. Allerdings würde man bei einer Veselago-Linse für Licht mit den Brechungsindex  $n_{1/2} = \pm 1$  erwarten, dass der Fokus im gleichen Abstand zur Grenzfläche erscheint wie das Objekt. Da sich der Quasiimpuls der Atome im Laufe ihrer Bewegung aufgrund des überlagerten Dipolpotential des  $\text{CO}_2$ -Laserstrahls leicht ändert, entsteht der Fokus bei der hier gezeigten Veselago-Linse schon nach 2,3 ms, statt den erwarteten 2,6 ms. Die unvermeidbare Nichtlinearität der Blochbänder resultiert in einer leichten Abhängigkeit der Gruppengeschwindigkeit vom Quasiimpuls der Atome, die im Modell durch die Vernachlässigung der Terme mit  $q^2$  ab Gleichung (3.8) nicht berücksichtigt ist. Dieser Effekt kann auch dadurch interpretiert werden, dass der effektive Brechungsindex der Blochbänder nicht exakt  $n_{1/2} = \pm 1$  beträgt.



**Abbildung 5.8:** Eindimensionale Veselago-Linse für den Fall  $|m_{\text{eff}}| > 0$ . **A** Serie von Absorptionsabbildungen von Atomen im Gitter, die zu verschiedenen Zeitpunkten mit einer Schrittweite von  $100 \mu\text{m}$  aufgenommen wurden. **B** Numerische Simulation mit den im Experiment verwendeten Parametern. **C** Die Breite der Atomwolke erreicht in diesen Fällen nicht mehr den ursprünglichen Wert.

In Abbildung 5.8A ist eine Serie von Absorptionsabbildungen von Atomen im Gitter gezeigt, bei der die effektive Masse der Atome endlich ist. Im Gegensatz zu der vorherigen Messung teilt sich die Atomwolke hier nicht in zwei Teile auf. Aufgrund der Krümmung der Blochbänder an der Bandkante ist nun die Gruppengeschwindigkeit von dem Quasiimpuls der Atome stark abhängig. Das hat zur Folge, dass es wegen der endlichen Impulsbreite der Atomwolke zu einer Dispersion der Welle kommt und dass Gruppengeschwindigkeiten im Bereich von  $-c_{\text{eff}}$  bis  $+c_{\text{eff}}$  kontinuierlich vorhanden sind. Der Umkehrpuls bei  $1,3 \text{ ms}$  invertiert zwar die Gruppengeschwindigkeit aller Atome, aber eine starke Fokussierung ist in den Messungen sowie in den Simulationen (Abb. 5.8B) nicht zu erkennen. Der zeitliche Verlauf der Breite der Atomwolke ist in Abbildung 5.8C für drei verschiedene effektive Massen gezeigt. Die Größe der Atomwolke im Fokus nimmt mit steigender effektiver Masse zu, wobei sich zusätzlich die Zeitspanne zwischen Raman-Puls und Fokus verkürzt. Die ursprüngliche Größe der Wolke wird in diesen Fällen nicht mehr erreicht. Eine mögliche Interpretation hierfür ist, dass Atome mit unterschiedlichem Quasiimpuls unterschiedliche Gruppengeschwindigkeiten besitzen und damit auch verschieden lange Zeiten benötigen, um ihren Ursprungspunkt zu erreichen. Es kommt also zu einer Art chromatischen Aberration, die mit steigender effektiver Masse zunimmt.

### 5.3 Topologisch gebundener Zustand

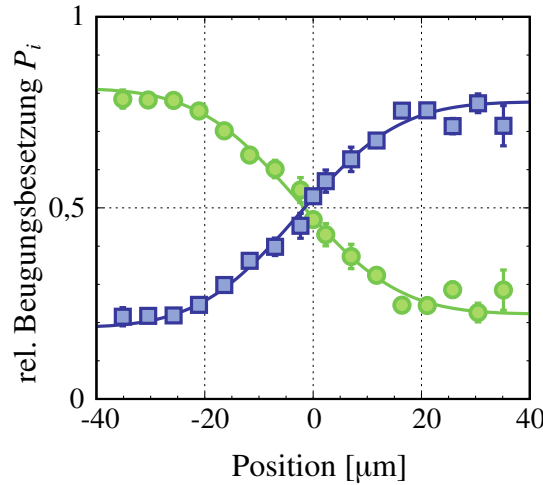
Im Folgenden werden die Ergebnisse vorgestellt, bei denen, mit Hilfe der Kombination aus zwei Vier-Photonen-Gittern und einem magnetischen Gradientenfeld, die effektive Masse der Atome räumlich variiert wird, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben. Zunächst wird das optische Gitter charakterisiert und anschließend werden Atome mit Hilfe des Präparationspulses in den Randzustand bei  $E = 0$  befördert. Zuletzt wird die Ladeeffizienz in den Randzustand in Abhängigkeit der Impulsbreite der Atomwolke untersucht.

#### Charakterisierung des Gitters

Für diese Experimentreihe wird ein Bose-Einstein-Kondensat im Zeeman-Zustand  $m_F = -1$  in der Dipolfalle erzeugt. Der Strom durch die Gradientenspulen (MOT- und GRAV-Spulen) wird während der Evaporationsrampe gleichmäßig auf etwa 120 Ampere erhöht, so dass ein magnetischer Gradient von 30,5 Gs/cm entlang der  $z$ -Achse erreicht wird. Das homogene Magnetfeld der Kompensationsspulen ist so eingestellt, dass sich der Magnetfeldnullpunkt des Quadrupolfeldes etwas oberhalb der Atome befindet. Das absolute Magnetfeld  $B_0$  am Ort der Atome kann über Mikrowellenspektroskopie ermittelt werden und beträgt etwa 1 Gs. Durch den magnetischen Gradienten wird eine Kraft auf die Atome ausgeübt, die gerade die Gravitationskraft kompensiert. Dadurch ist es möglich, die Falltiefe der  $\text{CO}_2$ -Dipolfalle nach der eigentlichen Evaporation weiter zu reduzieren, ohne dass die Atome aufgrund von äußeren Kräften die Falle verlassen. Durch eine Reduktion der Lichtleistung des  $\text{CO}_2$ -Laserstrahls innerhalb von 10 s und einer gleichzeitigen effektiven Aufweitung des Strahls durch Modulation der Treiberfrequenz an AOM 2A wird das Fallenpotential flacher und breiter. Das Wellenpaket im Grundzustand der Falle wird durch diese adiabatische Expansion des Potentials räumlich größer und gleichzeitig schmaler in der Impulsverteilung. Am Ende dieser Phase beträgt die abgebildete Breite der Atomwolke  $\Delta z \approx 10 \mu\text{m}$  und die über Bragg-Spektroskopie ermittelte Impulsbreite etwa  $\Delta p_z \approx 0,01\hbar k$  (vgl. Abb. 5.2).

Das optische Gitter wird aus zwei überlagerten Vier-Photonen-Gittern realisiert, wobei die Frequenzverschiebungen  $\Delta\omega_1 = 935 \text{ kHz}$  und  $\Delta\omega_2 = 535 \text{ kHz}$  betragen, so dass die Zwei-Photonen-Verstimmung am Ort der Atome etwa  $\delta_0 = 200 \text{ kHz}$  ist. Der konstante Anteil der Potentialtiefen beider Gitter von  $V_0 = 0,35E_r$  kann für jedes Gitter einzeln durch Rabi-Oszillationen bestimmt werden. Hieraus ergibt sich für den positionsabhängigen Term in Gleichung (3.38) ein Wert von etwa  $a = 18,7E_r/\text{cm}$ . Um sicherzustellen, dass die effektive Masse am Ort der Atome (bei  $z = 0$ ) verschwindet, wird die Landau-Zener Tunnelrate in Abhängigkeit der Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen den Gittern gemessen. Für eine Phase  $\varphi = 0$  heben sich die konstanten Anteile

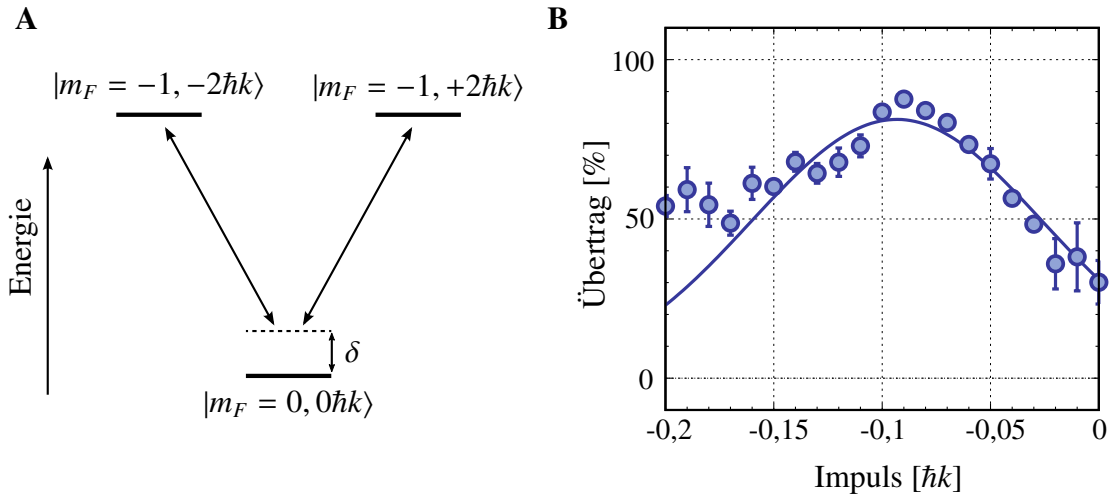




**Abbildung 5.9:** Messung zur Verifizierung der räumliche Änderung der Bandstruktur. Die Atome werden am Ort  $z_0$  im Zustand  $|+\rangle$  präpariert. Nach einer anschließenden Beschleunigung des Gitters befinden sich die Atome abhängig von ihrer effektiven Masse bzw. der Bandstruktur entweder im oberen (blaue Quadrate) oder unteren (grüne Kreise) Blochband, deren Population nach einer freien Expansionsphase gemessen wird.

der Potentialtiefen genau auf (vgl. Gl. (3.39)), so dass die Tunnelrate für diese Phase den Wert 1 annimmt.

Zunächst wird das optische Gitter charakterisiert. Es ist erwartet, dass die effektive Masse der Atome positionsabhängig ist und für  $z < 0$  das umgekehrte Vorzeichen besitzt als für  $z > 0$ . Um das Vorzeichen der effektiven Masse festzustellen, werden die Atome zunächst in dem Superpositionszustand  $|+\rangle = 1/\sqrt{2}(|+2\hbar k\rangle + |-2\hbar k\rangle)$  präpariert. Abhängig von der Position der Atome und der Bandstruktur befinden sich die Atome damit im oberen oder unteren Blochband (vgl. Abb. 3.7). Um die Besetzungen in den beiden Blochzuständen zu bestimmen, wird das optische Gitter anschließend innerhalb von 5 ms adiabatisch beschleunigt, so dass sich der Quasiimpuls der Atome von  $q = 0\hbar k$  auf  $q = 0,5\hbar k$  ändert. Da sich die Atome nun an einem Punkt in der Bandstruktur befinden, an dem die Energiebänder nahezu identisch zu den freien Energielösungen sind, lässt sich über die Messung der Beugungsbesetzungen die Besetzung der Blochbänder messen. Durch die adiabatische Beschleunigung werden also, ähnlich wie schon bei der Messung in Abbildung 5.5B, die Blochzustände auf die freien Zustände projiziert, d.h.  $|+\rangle \rightarrow |-2\hbar k + q\rangle$  für  $m_{\text{eff}} > 0$  und  $|+\rangle \rightarrow |+2\hbar k + q\rangle$  für  $m_{\text{eff}} < 0$  (vgl. Gl. (3.15)). Für das in Abbildung 5.9 gezeigte Diagramm wurde die Besetzung der beiden Beugungsordnungen gemessen, für verschiedene anfängliche Positionen  $z_0$  der Atomwolke, bezüglich des Ortes, an dem die effektive Masse im Gitter verschwindet ( $z = 0$ ). Dabei wurde nicht die Position der Atome geändert, sondern durch eine Änderung der Zwei-Photonen-Verstimmen  $\delta_{1/2} = \pm\delta_0 \pm \delta_{z_0}$  beider Vier-Photonen-Gitter in



**Abbildung 5.10:** Effektives magnetisches Moment der Atome im Vier-Photonen-Gitter. **A** Effektives Kopplungsschema. Durch die Kopplung der Atome durch das Gitter mit dem benachbarten Zeeman-Zustand ändert sich das magnetische Moment der neuen Eigenzustände. **B** Dadurch ist die Stern-Gerlach-Kraft auf die Atome bei unverändertem Wert des Gradientenfeldes schwächer als die Erdbeschleunigung, wodurch die Atome innerhalb von 3 ms im optischen Gitter einen Impuls von etwa  $-0,1\hbar k$  aufnehmen.

entgegengesetzte Richtung um  $\delta_{z_0} = m_F g_F \mu_B b / \hbar \cdot z_0$  eine effektive Positionsänderung um  $z_0$  bewirkt. Die Messung zeigt, dass bei  $z_0 > 0$  mehr Atome im Zustand  $|-2\hbar k\rangle$  detektiert werden, so dass sich die Atome durch die Präparation im oberen Blochband befunden haben müssen, und somit die effektive Masse der Atome an dieser Position positiv ist. Im Gegensatz dazu werden für  $z_0 < 0$  mehr Atome im Zustand  $|+2\hbar k\rangle$  detektiert, so dass die Atome sich in der Bandstruktur im unteren Band befunden haben müssen und die effektive Masse negativ ist. In der Mitte bei  $z_0 = 0$  (s. Abb. 5.9), der Stelle an der die effektive Masse verschwindet, werden beide Bänder zum gleichen Teil besetzt. Diese Messung ist eine experimentelle Bestätigung dafür, dass die Bandstruktur in diesem optischen Gitter, und damit das Vorzeichen der effektiven Masse der Atome, von der einen Seite zur anderen Seite invertiert wird.

Da die Lichtfelder der Vier-Photonen-Gitter die Atome in  $m_F = -1$  mit dem benachbarten Zeeman-Zustand  $m_F = 0$  koppeln ändert sich effektiv das magnetische Moment der Atome (s. Abb. 5.10A). Das effektive magnetische Moment der Atome wird durch die Kopplung  $m_{F,\text{eff}} > -1$  etwas größer. Hierdurch wird die Erdbeschleunigung für diese Atome nicht mehr durch das magnetische Gradientenfeld vollständig kompensiert und die Atome erfahren eine Kraft in Richtung negativer  $z$ -Achse. Diese Kraft ist ausreichend, um die Atome, die die Randzustände besetzen, heraus zu beschleunigen und muss deswegen kompensiert werden. Durch die Messung des mittleren Impulses der Atome nach einer bestimmten Zeit im optischen Gitter kann die aus

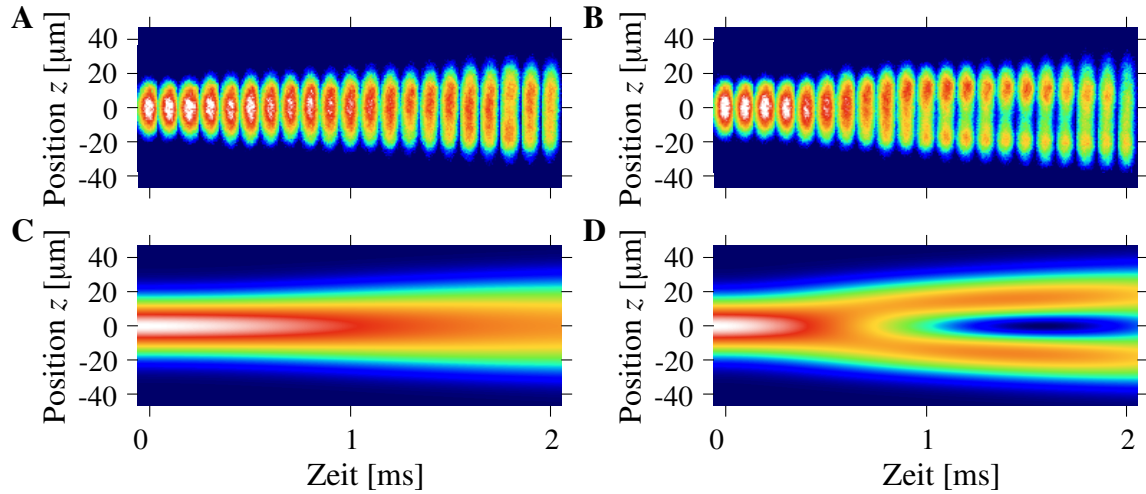
der Kraft resultierende Beschleunigung der Atome ermittelt werden. Abbildung 5.10B zeigt eine Messung der Impulsverteilung der Atome über Bragg-Spektroskopie nach einer Einstrahldauer des Gitters von 3 ms, wobei die Atome einen mittleren Impuls von etwa  $-0,1\hbar k$  aufnehmen. Die effektive Beschleunigung, die auf die Atome wirkt, beträgt somit etwa  $0,195 \text{ m/s}^2$ , was ungefähr 2% der Erdbeschleunigung entspricht. Um nun diesen Effekt auszugleichen müssten die Ströme durch die Gradientenspulen (MOT, GRAV-Spulen) beim Einschalten des Gitters instantan erhöht werden, damit auch im Gitter die Gravitation kompensiert ist. Da dies aber nur auf Kosten von größerem Stromrauschen durch die Spulen (und großem technischen Aufwand) möglich ist, ist in den folgenden Messungen dieser Effekt nicht auf diese Weise kompensiert. Stattdessen wird, soweit nicht anders beschrieben, ein mit der gleichen Beschleunigung wie die Atome bewegtes Gitter verwendet, das durch eine Frequenzrampe am Funktionsgenerator FG 5 realisiert wird.

### Besetzung des Randzustandes

Um den Randzustand  $|\psi_0(z)\rangle$  bei  $E = 0$  zu besetzen, werden die Atome bei  $z = 0$  zunächst durch den Präparationspuls in den Superpositionszustand  $|\psi(\Theta, \phi)\rangle$  (s. Gl. (5.2)) mit einem Mischungswinkel von  $\Theta = \pi/2$  gebracht. Die präparierte Phasendifferenz zwischen den beiden Impulszuständen beträgt  $\phi = \pi/2$ , der Phase, bei der der Randzustand zu erwarten ist (vgl. Gl. (3.50)). Direkt im Anschluss werden die beiden überlagerten Vier-Photonen-Gitter angeschaltet. Abbildung 5.11A zeigt eine Serie von Absorptionsabbildungen nach verschiedenen Haltezeiten im optischen Gitter. Die Atomwolke bleibt für die Messdauer bis 2 ms relativ kompakt im Zentrum, so dass man davon ausgehen kann, dass einige Atome den bei  $z = 0$  lokalisierten Randzustand besetzen. Im Gegensatz dazu ist bei einer anfänglich präparierten Phase von  $\phi = -\pi/2$  eine Aufspaltung der Atomwolke in zwei voneinander divergierende Anteile zu erkennen (s. Abb. 5.11B). Von der theoretischen Seite ist ein solches Verhalten auch zu erwarten, da der Superpositionszustand mit einem Phasenversatz von  $\pi$  gegenüber dem Randzustand  $|\psi_0\rangle$  keinen Überlapp mit diesem Zustand besitzt. Vielmehr kann gezeigt werden, dass der Zustand mit Phasendifferenz  $\phi = -\pi/2$  eine Überlagerung der beiden Randzustände mit Quantenzahl  $n = 1$  darstellt [82] (vgl. Gl. (3.53))

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1^+(z) + \psi_1^-(z)] = \frac{i}{\sqrt{2}} \varphi_0(z) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Da diese beiden Randzustände eine Energiedifferenz von  $2\hbar\omega$  zueinander besitzen (vgl. Gl. (3.48)), erwartet man für diesen Fall ein oszillatorisches Verhalten. Für Haltezeiten im Bereich von 2 ms ist ein Ansatz einer solchen Oszillation zurück zum Zentrum zu erkennen. Aus der beobachteten Oszillationsperiode von etwa



**Abbildung 5.11:** Zeitliche Entwicklung der atomaren Teilchendichte im Gitter mit räumlich variierender effektiver Masse. Serien von Absorptionsabbildungen für die anfänglichen Phasen  $\phi = \pi/2$  (A) und  $\phi = -\pi/2$  (B). C und D zeigen numerische Simulationen mit den im Experiment verwendeten Parametern.

$T = 3,16(32)$  ms lässt sich die für das Energiespektrum typische Frequenz von  $\omega/2\pi = 1/2T = 158(18)$  Hz bestimmen, die in guter Übereinstimmung mit dem aus den verwendeten Potentialtiefen erwarteten Wert von etwa 160 Hz liegt. Für längere Haltezeiten im optischen Gitter nimmt der Unterschied in den beiden Messreihen ab, da sich die Atomwolke vermutlich durch Photonenstreuung des Gitterlichtfeldes aufheizt. Die sichtbare Ausbreitung der Atomwolke im Falle von  $\phi = \pi/2$  kann durch eine nicht perfekte Modenanpassung der atomaren Wellenfunktion mit dem Randzustand bei  $E = 0$  erklärt werden. Einen kleinen Effekt hat beispielsweise, dass das atomare Wellenpaket durch den Thomas-Fermi Ansatz gut beschrieben wird, der Randzustand  $\psi_0(z)$  aber Gauß-förmiger Natur ist. Diese Anpassungsungenauigkeit resultiert darin, dass die Atome sogar bei richtig eingestellter Phase  $\phi$  Zustände mit Quantenzahl  $n > 0$  besetzen, die ein räumlich größeres Volumen einnehmen. Dieser Effekt ist ebenfalls in den numerischen Simulationen (s. Abb. 5.11C bzw. D) sichtbar, wobei hier für einen qualitativen Vergleich Gauß-förmige Wellenpakete mit einer anfänglichen Breite von  $10 \mu\text{m}$  angenommen wurden.

## Phasenabhängigkeit

Im Folgenden wird die Phasenabhängigkeit beim Laden in den Randzustand bei  $E = 0$  genauer untersucht und durch Variation der anfänglichen Impulsbreite der Atomwolke wird die Ladeeffizienz in diesen Zustand bestimmt. Hierfür werden die Atome im Superpositionszustand  $|\psi(\pi/2, \phi)\rangle$  präpariert und nach einer festen Haltezeit im Gitter

von 1,7 ms für verschiedene Relativphasen  $\phi$  zwischen den Impulszuständen detektiert. Aus den Einzelmessungen wird die gesamte Breite der Atomwolke entlang der  $z$ -Achse über

$$\Delta z = \left( \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 \right)^{1/2} \quad (5.5)$$

bestimmt, wobei gilt

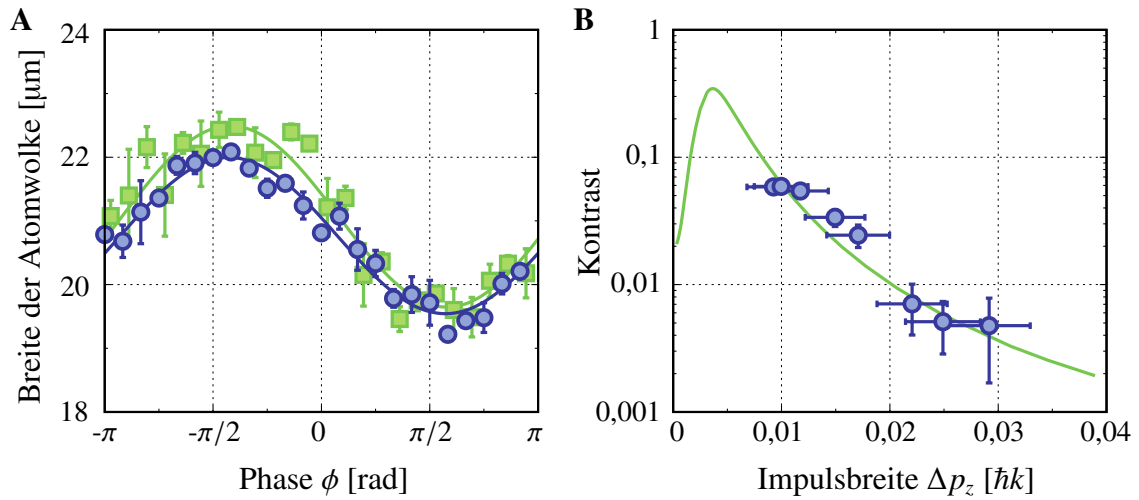
$$\langle z^i \rangle = \int_z z^i \cdot n(z) dz / N_{\text{ges}}. \quad (5.6)$$

Die gesamte Breite der Atomwolke ist in Abbildung 5.12A gegen die Phase  $\phi$  für zwei Messreihen aufgetragen. Hierbei ist bei der ersten Messreihe (blaue Punkte) ein mitbewegtes Gitter verwendet worden, um das effektive magnetische Moment der Atome im Randzustand zu berücksichtigen. Die zweite Messreihe (grüne Quadrate) wurde aufgenommen, indem der Strom durch die MOT-Spulen während des Präparationspulses innerhalb von 100  $\mu\text{s}$  um etwa 10 Ampere erhöht wurde, um so die wegen des effektiven magnetischen Moments der Atome veränderte Stern-Gerlach Kraft wieder auf die Gravitationskraft anzupassen. In beiden Messreihen ist die kleinste gemessene Breite bei einer Phase von etwa  $\phi = \pi/2$  zu beobachten. Im Gegensatz dazu spaltet sich die Atomwolke für eine Phase von  $\phi = -\pi/2$  in zwei Anteile auf und man misst somit eine größere gesamte Breite. Im Zwischenbereich zwischen diesen beiden Extremwerten ist ein kontinuierlicher sinusförmiger Verlauf der Breite der Atomwolke zu erkennen. Beide Messreihen sind in guter Übereinstimmung zueinander, jedoch sind die relativen Fehler bei der zweiten Messreihe deutlich größer, was auf ein technisch bedingtes größeres Stromrauschen durch die MOT-Spulen zurück zu führen sein könnte.

Aus dieser Messung lässt sich ein Kontrast  $K$  definieren, als

$$K = [\Delta z(-\pi/2) - \Delta z(\pi/2)] / [\Delta z(-\pi/2) + \Delta z(\pi/2)]. \quad (5.7)$$

Der Kontrast einer Messung wird aus dem Quotient von Amplitude zu Mittelwert der angepassten Sinuskurve ermittelt. Um die Ladeeffizienz in den Randzustand bei  $E = 0$  zu bestimmen, wird die anfängliche Impulsbreite  $\Delta p_z$  der Atome variiert und jeweils der Kontrast bestimmt. Beeinflusst werden kann die Impulsbreite der Atome beispielsweise über den Endpunkt der adiabatischen Expansion des Kondensats in der Dipolfalle, d.h. die Lichtleistung des  $\text{CO}_2$ -Laserstrahls am Ende dieser Phase kann erhöht werden, um die Atomwolke räumlich schmaler und die Impulsbreite damit größer zu machen (vgl. Abb. 5.2) Abbildung 5.12B zeigt den Kontrast in Abhängigkeit von der über Bragg-Spektroskopie ermittelten Impulsbreite der Atomwolke. Für größere Impulsbreiten nimmt der Kontrast ab und die Phasenabhängigkeit verschwindet.



**Abbildung 5.12:** Abhängigkeit von der Phase und Impulsbreite des anfänglichen Zustandes. **A** Die Breite der Atomwolke  $\Delta z$  nach 1,7 ms im optischen Gitter variiert mit der anfänglich präparierten Phase  $\phi$ . **B** Der Kontrast (s.Gl. (5.7)) in Abhängigkeit der Impulsbreite der Atomwolke.

Grund hierfür ist, dass mit größerer Impulsbreite mehr Randzustände mit Quantenzahl  $n > 0$  besetzt werden, welche Dubletts darstellen, und die Dynamik weniger abhängig von der anfänglichen Phase wird. Die grüne Linie zeigt den aus numerischen Simulationen erwarteten Verlauf des Kontrasts, der in guter Übereinstimmung mit den Messungen ist. Die ideale Impulsbreite, um ausschließlich den Randzustand bei  $E = 0$  zu besetzen, kann über eine Fouriertransformation von Gleichung (3.50) berechnet werden und würde bei den verwendeten Parametern etwa  $\Delta p_z = 0,005\hbar k$  betragen. Die im Experiment erreichte kleinste Impulsbreite ist mit  $\Delta p_0 = 0,01\hbar k$  etwa doppelt so groß. Die gemessene Impulsbreite würde bei einem thermischen Ensemble von Atomen einer Temperatur von gerade einmal  $T = \Delta p_0^2/mk_B = 36$  pK entsprechen und liegt damit an der unteren Grenze von bisher erzielten Temperaturen von atomaren Gasen [92]. Dennoch lässt sich aus dem Vergleich von Theorie und Experiment auf eine Ladeeffizienz in den Randzustand von bis zu 80% im Falle der schmalsten erreichten Impulsbreite schließen [35].

---

## Ausblick

---

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden ultrakalte Atome in periodischen optischen Gitterpotentialen untersucht, wobei sich die Dynamik der Atome nahe der zweiten Bandkante durch die eindimensionale Dirac-Gleichung beschreiben lässt. Zunächst wurde das diabatische Laden in die Blochzustände an der zweiten Bandkante mit Hilfe von Bragg-Pulsen realisiert. Dabei konnte gezeigt werden, dass eine Superposition zwischen den freien Zuständen mit einer beliebigen Phasendifferenz eingestellt und gemessen werden konnte. Des Weiteren wurde durch einen Raman- $\pi$ -Puls negative Brechung für quasirelativistische Atome im optischen Gitterpotential simuliert, wodurch es möglich wurde eine Veselago-Linse für ein atomares Wellenpaket in einem harmonischen Potential zu realisieren. Die Abbildung der Veselago-Linse wurde in Abhängigkeit der effektiven Masse der Atome untersucht, wobei nur im Falle verschwindender Masse eine Fokussierung auf die ursprüngliche Größe der Atomwolke erreicht wurde. Für die Zukunft wäre eine Realisierung einer Veselago-Linse in einem mehrdimensionalen System mit einer quasirelativistischen Dispersion [19, 93] von Interesse, da erst dann Effekte wie die Möglichkeit eine Abbildung unterhalb des Beugungslimits relevant werden können.

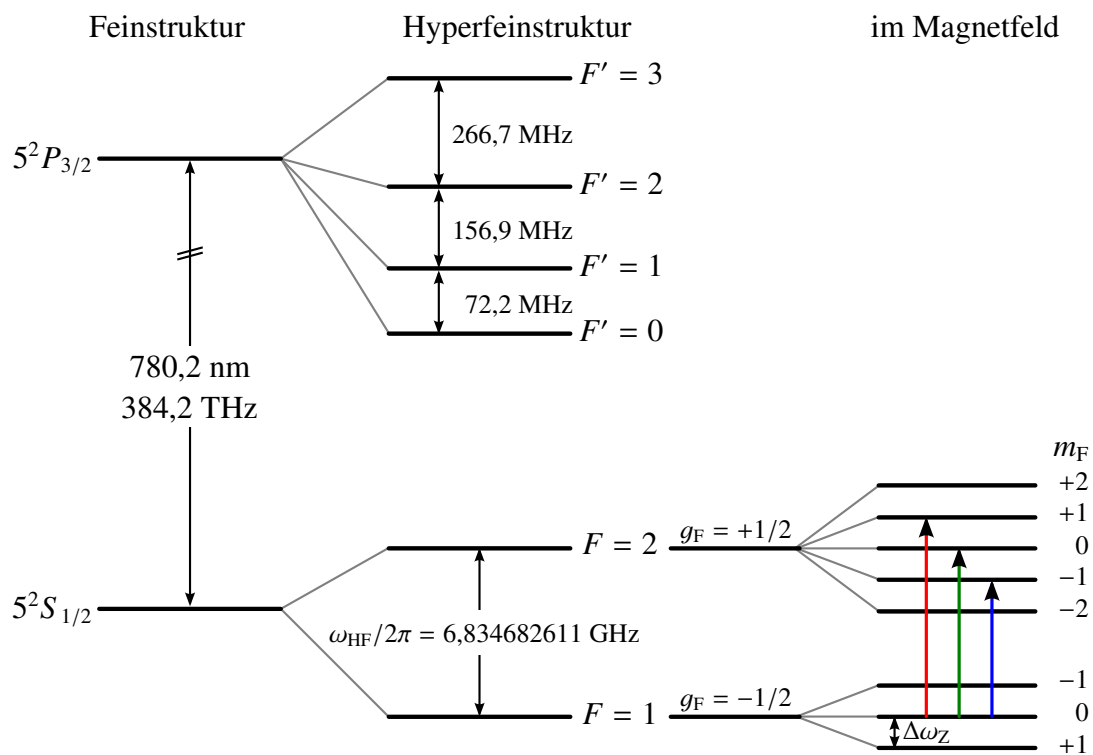
In nachfolgenden Experimenten wurde mit einer Kombination aus Vier-Photonen-Gittern und magnetischem Gradientenfeld die effektive Masse der Atome positionsabhängig, wodurch es möglich war, Randzustände zwischen zwei Bereichen mit unterschiedlicher topologischer Phase zu besetzen und diese Randzustände direkt räumlich abzubilden. Hierbei wurde die Ladeeffizienz der Atome in den Randzustand bei  $E = 0$  in Abhängigkeit der Phase und der Impulsbreite der Atome untersucht. Zukünftig ist der Einfluss von interner Wechselwirkung der Atomwolke auf die Randzustände ein interessanter Aspekt [94], der möglicherweise Aufschluss über wechselwirkende topologische Quantenmaterie geben könnte [95]. Eine solche Wechselwirkung könnte beispielsweise durch Erhöhung der Teilchenzahl oder eine Hinzunahme von

Feshbach-Resonanzen implementiert werden [96]. Auch könnte statt Rubidium die Verwendung anderer atomarer Spezies, wie beispielsweise Erbium oder Dysprosium, zu längeren Kohärenzzeiten im Vier-Photonen-Gitterpotential führen [97], wodurch es möglich sein könnte, topologische Berry-Phase Effekte im Phasenraum zu untersuchen [98].

Das Quanten-Rabi-Modell beschreibt die Wechselwirkung eines Zweiniveaumatoms mit einem äußeren Lichtfeld [99]. Ist die Kopplungsstärke des Lichtfeldes an das Atom klein gegenüber des Energieabstandes der beiden atomaren Niveaus, so geht das Quanten-Rabi-Modell mit Hilfe der Drehwellennäherung in das Jaynes-Cummings-Modell über [100]. Ist die Kopplungsstärke allerdings in der Größenordnung des Energieabstandes der beiden Niveaus, so kann die Drehwellennäherung nicht angewendet werden [101]. Dieser Bereich der starken Kopplung erreicht man mit üblichen Atomen im Lichtfeldern nicht. Allerdings ließe sich dieser Bereich in einer Quantensimulation mit ultrakalter Atome in einer Kombination aus optischem Vier-Photonen-Gitter und zusätzlichem externem harmonischem Potential untersuchen [102].



# Termschema Rubidium $^{87}\text{Rb}$



**Abbildung A.1:** Optischer D2-Übergang von Rubidium ( $^{87}\text{Rb}$ ) mit Hyperfeinaufspaltung [55]. Im Magnetfeld spalten die Hyperfeingrundzustände  $|F=1\rangle$  und  $|F=2\rangle$  in ihre drei bzw. fünf Zeeman-Zustände mit Quantenzahlen  $m_F$  auf, mit  $\Delta\omega_Z \propto |B|$ . Mögliche Mikrowellenübergänge für den Zustand  $|F=1, m_F=0\rangle$  sind in rot ( $\Delta m_F = +1, \omega_{\text{HF}} + \Delta\omega_Z$ ), grün ( $\Delta m_F = 0, \omega_{\text{HF}}$ ) und blau ( $\Delta m_F = -1, \omega_{\text{HF}} - \Delta\omega_Z$ ) dargestellt. Die Zeeman-Level der angeregten Niveaus sind nicht dargestellt.



## Numerische Simulationen

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die numerischen Simulation aus Kapitel 5.2 und 5.3 durchgeführt sind. Dazu dient als Ausgangspunkt der effektive Hamiltonoperator aus Gleichung (3.13) ohne innere Wechselwirkung, aber mit zusätzlichem harmonischen Potential  $V_{\text{ext}}(z)$  (nur bei Abb. 5.7 und 5.8 mit  $\omega = 2\pi \times 70$  Hz) und mit Berücksichtigung der Terme  $\propto q^2$  in Matrixform

$$H_{\text{ges}} = \begin{pmatrix} -qc_{\text{eff}} & m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2 \\ m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2 & qc_{\text{eff}} \end{pmatrix} + \frac{q^2}{2m} \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \cdot \mathbb{1}, \quad (\text{B.1})$$

wobei  $m_{\text{eff}}$  die effektive Masse und  $m$  die Rubidiummasse darstellen. Da der Hamiltonoperator sowohl vom Ort-, als auch vom Impulsoperator abhängt und diese nicht vertauschen, wurde für die Zeitentwicklung der Wellenfunktion ein Split-Step-Methode benutzt (s. z.B. [103]). Das Prinzip ist das Folgende. Die Wellenfunktion sei zum Zeitpunkt  $t_0$  bekannt. Um die Wellenfunktion zum Zeitpunkt  $t_0 + \Delta t$  zu berechnen wird die Wellenfunktion zunächst im Ortsraum um  $\Delta t/2$  und anschließend im Impulsraum um  $\Delta t$  entwickelt. Zuletzt folgt nochmals ein halber Zeitschritt ( $\Delta t/2$ ) im Ortsraum. Um die Zeitentwicklungsoperatoren im Orts- und Impulsraum zu bestimmen wird der Hamiltonoperator in die Anteile für Ort und Impuls aufteilen

$$H_{\text{ges}} = H_q + H_z = \begin{pmatrix} -qc_{\text{eff}} + \frac{q^2}{2m} & 0 \\ 0 & qc_{\text{eff}} + \frac{q^2}{2m} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 & m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2 \\ m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2 & \frac{1}{2}m\omega^2 z^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Mit der Annahme, dass ein Zeitschritt  $\Delta t$  klein genug ist, lässt sich der Zeitentwicklungsoperator  $U(\Delta t)$  schreiben als

$$U(\Delta t) = \exp\left(i\frac{H_{\text{ges}}}{\hbar}\Delta t\right) \quad (\text{B.3})$$

$$\approx U_z(\Delta t/2)U_q(\Delta t)U_z(\Delta t/2) = \exp\left(i\frac{H_z}{\hbar}\Delta t/2\right) \cdot \exp\left(i\frac{H_q}{\hbar}\Delta t\right) \cdot \exp\left(i\frac{H_z}{\hbar}\Delta t/2\right). \quad (\text{B.4})$$

Die Zeitentwicklungsoperatoren lassen sich vereinfachen zu

$$U_z(\Delta t) = \left[ \cos\left(\frac{m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2}{\hbar}\Delta t\right) \mathbb{1} + i \sin\left(\frac{m_{\text{eff}}c_{\text{eff}}^2}{\hbar}\Delta t\right) \sigma_x \right] \cdot \left[ \exp\left(i\frac{m\omega^2 z^2}{2\hbar}\Delta t\right) \mathbb{1} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$U_q(\Delta t) = \left[ \cos\left(\frac{qc_{\text{eff}}}{\hbar}\Delta t\right) \mathbb{1} - i \sin\left(\frac{qc_{\text{eff}}}{\hbar}\Delta t\right) \sigma_z \right] \cdot \left[ \exp\left(i\frac{q^2}{2m\hbar}\Delta t\right) \mathbb{1} \right], \quad (\text{B.6})$$

mit den Pauli-Matrizen  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$ . Somit ist die Wellenfunktion zum Zeitpunkt  $t_0 + \Delta t$

$$\psi(z, t_0 + \Delta t) = U(\Delta t) \cdot \psi(z, t_0) \approx U_z(\Delta t/2) \cdot \mathcal{F}_{q \rightarrow z} \left[ U_q(\Delta t) \cdot \mathcal{F}_{z \rightarrow q} \left[ U_z(\Delta t/2) \cdot \psi(z, t_0) \right] \right], \quad (\text{B.7})$$

wobei  $\mathcal{F}_{z \rightarrow q}$  und  $\mathcal{F}_{q \rightarrow z}$  die Fourier-Transformation der Wellenfunktion vom Orts- in den Impulsraum bzw. die Rücktransformation darstellen. Die anfängliche Wellenfunktion bei  $t_0 = 0$  im Ortsraum  $|\phi_{\text{ini}}(z)\rangle$  lässt sich schreiben als

$$\psi_{\text{ini}}(z) = \frac{1}{\sqrt{\Delta z} \sqrt[4]{2\pi}} e^{(z-z_0)^2/(4\Delta z^2)} \cdot \begin{pmatrix} c_{-2\hbar k} \\ c_{+2\hbar k} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

mit der Normierung

$$\int_z dz |\psi(z)|^2 = \underbrace{\int_z dz \frac{1}{\Delta z \sqrt{2\pi}} e^{(z-z_0)^2/(2\Delta z^2)}}_{=1} \cdot (|c_{-2\hbar k}|^2 + |c_{+2\hbar k}|^2) = 1. \quad (\text{B.9})$$

Das Betragsquadrat der beiden komplexen Koeffizienten  $c_{\pm 2\hbar k}$  stellt die Besetzungen der beiden Impulszustände  $|\pm 2\hbar k\rangle$  dar. Für eine gleich starke Besetzung der Zustände zum Zeitpunkt  $t_0$  unterscheiden sich die Koeffizienten nur um die Phase  $\phi$  (vgl. Gl. (3.22))

$$c_{-2\hbar k} = c_{+2\hbar k} \cdot e^{i\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.10})$$

---

# Literatur

---

- [1] P. A. Dirac, *The quantum theory of the electron*, Proc. Roy. Soc. **117** 610–624 (1928).
- [2] W. E. Lamb Jr und R. C. Retherford, *Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method*, Phys. Rev. **72** 241 (1947).
- [3] O. Klein, *Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac*, Z.Phys. **53** 157–165 (1929).
- [4] E. Schrödinger, *Über die kräftefreie Bewegung in der relativistischen Quantenmechanik*, SBPAW 418–428 (1930).
- [5] M. Katsnelson, K. Novoselov und A. Geim, *Chiral tunnelling and the Klein paradox in graphene*, Nat. Phys. **2** 620–625 (2006).
- [6] R. Gerritsma *et al.*, *Quantum simulation of the Dirac equation*, Nat. **463** 68–71 (2010).
- [7] R. P. Feynman, *Simulating physics with computers*, Int. J. Theor. Phys. **21** 467–488 (1982).
- [8] T. Salger *et al.*, *Klein tunneling of a quasirelativistic Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, Phys. Rev. Lett. **107** 240401 (2011).
- [9] J. Struck *et al.*, *Quantum simulation of frustrated classical magnetism in triangular optical lattices*, Science **333** 996–999 (2011).
- [10] L. Lamata *et al.*, *Dirac equation and quantum relativistic effects in a single trapped ion*, Phys. Rev. Lett. **98** 253005 (2007).
- [11] J. Casanova *et al.*, *Klein tunneling and Dirac potentials in trapped ions*, Phys. Rev. A **82** 020101 (2010).
- [12] Y. Zhang *et al.*, *Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene*, Nat. **438** 201–204 (2005).
- [13] K. B. Davis *et al.*, *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Phys. Rev. Lett. **75** 3969 (1995).
- [14] M. H. Anderson *et al.*, *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science **269** 198–201 (1995).
- [15] M. B. Dahan *et al.*, *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76** 4508 (1996).

- [16] M. Greiner *et al.*, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nat. **415** 39–44 (2002).
- [17] J. Dalibard *et al.*, *Colloquium: Artificial gauge potentials for neutral atoms*, Rev. Mod. Phys. **83** 1523 (2011).
- [18] D. Witthaut *et al.*, *Effective Dirac dynamics of ultracold atoms in bichromatic optical lattices*, Phys. Rev. A **84** 3601 (2011).
- [19] L. Tarruell *et al.*, *Creating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice*, Nat. **483** 302–305 (2012).
- [20] V. G. Veselago, *The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$* , Phys. Usp. **10** 509–514 (1968).
- [21] J. B. Pendry, *Negative refraction makes a perfect lens*, Phys. Rev. Lett. **85** 3966 (2000).
- [22] D. R. Smith, J. B. Pendry und M. C. Wiltshire, *Metamaterials and negative refractive index*, Science **305** 788–792 (2004).
- [23] V. V. Cheianov, V. Fal’ko und B. Altshuler, *The focusing of electron flow and a Veselago lens in graphene pn junctions*, Science **315** 1252–1255 (2007).
- [24] G. Juzeliunas *et al.*, *Quasirelativistic behavior of cold atoms in light fields*, Phys. Rev. A **77** 011802 (2008).
- [25] M. Z. Hasan und C. L. Kane, *Colloquium: topological insulators*, Rev. Mod. Phys. **82** 3045 (2010).
- [26] B. A. Bernevig, T. L. Hughes und S.-C. Zhang, *Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells*, Science **314** 1757–1761 (2006).
- [27] M. König *et al.*, *Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells*, Science **318** 766–770 (2007).
- [28] J. Zak, *Berry’s phase for energy bands in solids*, Phys. Rev. Lett. **62** 2747 (1989).
- [29] M. Atala *et al.*, *Direct measurement of the Zak phase in topological Bloch bands*, Nat. Phys. **9** 795–800 (2013).
- [30] M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. Roy. Soc. **392** 45–57 (1984).
- [31] G. Jotzu *et al.*, *Experimental realization of the topological Haldane model with ultracold fermions*, Nat. **515** 237–240 (2014).
- [32] L. Duca *et al.*, *An Aharonov-Bohm interferometer for determining Bloch band topology*, Science **347** 288–292 (2015).
- [33] M. Mancini *et al.*, *Observation of chiral edge states with neutral fermions in synthetic Hall ribbons*, Science **349** 1510–1513 (2015).
- [34] B. Stuhl *et al.*, *Visualizing edge states with an atomic Bose gas in the quantum Hall regime*, Science **349** 1514–1518 (2015).

- 
- [35] M. Leder *et al.*, *Real-space imaging of a topological protected edge state with ultracold atoms in an amplitude-chirped optical lattice*, arXiv preprint arXiv:1604.02060 (2016).
- [36] R. Jackiw und C. Rebbi, *Solitons with fermion number 1/2*, Phys. Rev. D **13** 3398 (1976).
- [37] W. Su, J. Schrieffer und A. J. Heeger, *Solitons in polyacetylene*, Phys. Rev. Lett. **42** 1698 (1979).
- [38] A. J. Heeger *et al.*, *Solitons in conducting polymers*, Rev. Mod. Phys. **60** 781 (1988).
- [39] W. Pauli, *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren*, Z.Phys. **31** 765–783 (1925).
- [40] S. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Z.Phys. **26** 178–181 (1924).
- [41] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases - Zweite Abhandlung*, SBPAW 3–10 (1925).
- [42] C. Pethick und H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2. Aufl., CUP, 2008.
- [43] W. Ketterle, *When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*, Le Prix Nobel 2001 118–154 (2002).
- [44] J. Ensher *et al.*, *Bose-Einstein condensation in a dilute gas: Measurement of energy and ground-state occupation*, Phys. Rev. Lett. **77** 4984 (1996).
- [45] A. J. Leggett, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*, Rev. Mod. Phys. **73** 307–356 (2001).
- [46] H. Boesten *et al.*, *Observation of a shape resonance in the collision of two cold Rb 87 atoms*, Phys. Rev. A **55** 636 (1997).
- [47] M. Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Z.Phys. **37** 863–867 (1926).
- [48] F. Dalfovo *et al.*, *Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases*, Rev. Mod. Phys. **71** 463–512 (1999).
- [49] E. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, Nuovo Cimento **20** 454–477 (1961).
- [50] E. Gross, *Hydrodynamics of a superfluid condensate*, J.Math.Phys. **4** 195–207 (1963).
- [51] L. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, Sov. Phys. JETP **13** 451–454 (1961).
- [52] E. Raab *et al.*, *Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **59** 2631 (1987).
- [53] T. W. Hänsch und A. L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Commun. **13** 68–69 (1975).
- [54] S. Chu *et al.*, *Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **55** 0048 (1985).

- [55] D. A. Steck, *Rubidium 87 D line data*, steck.us/alkalidata/, 2001.
- [56] R. Grimm, M. Weidemüller und Y. B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, Adv. At., Mol., Opt. Phys. **42** 95–170 (2000).
- [57] W. Gerlach und O. Stern, *Der experimentelle Nachweis des magnetischen Moments des Silberatoms*, Z.Phys. **8** 110–111 (1922).
- [58] A. L. Migdall *et al.*, *First observation of magnetically trapped neutral atoms*, Phys. Rev. Lett. **54** 2596 (1985).
- [59] T. Bergeman, G. Erez und H. J. Metcalf, *Magnetostatic trapping fields for neutral atoms*, Phys. Rev. A **35** 1535 (1987).
- [60] W. Petrich *et al.*, *Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms*, Phys. Rev. Lett. **74** 3352 (1995).
- [61] H. F. Hess *et al.*, *Magnetic trapping of spin-polarized atomic hydrogen*, Phys. Rev. Lett. **59** 0672 (1987).
- [62] C. Adams und E. Riis, *Laser cooling and trapping of neutral atoms*, Prog. Quant. Electron. **21** 1–79 (1997).
- [63] G. Cennini, *Field-insensitive Bose-Einstein condensates and an all-optical atom laser*, Dissertation, Universität Tübingen, 2004.
- [64] S. Fölling *et al.*, *Direct observation of second-order atom tunnelling*, Nat. **448** 1029–1032 (2007).
- [65] M. Weitz *et al.*, *Optical multiphoton lattices*, Phys. Rev. A **70**, 04 3414 (2004).
- [66] G. Ritt, *Fourier-Synthese von asymmetrischen optischen Potentialen für Atome*, Dissertation, Universität Tübingen, 2007.
- [67] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Z.Phys. **52** 555–600 (1929).
- [68] T. Salger *et al.*, *Atomic Landau-Zener tunneling in Fourier-synthesized optical lattices*, Phys. Rev. Lett. **99** 0405 (2007).
- [69] E. Schrödinger, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, Annalen der Physik **385** 437–490 (1926).
- [70] W. Gordon, *Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie*, Z.Phys. **40** 117–133 (1926).
- [71] O. Klein, *Elektrodynamik und Wellenmechanik vom Standpunkt des Korrespondenzprinzips*, Z.Phys. **41** 407–442 (1927).
- [72] W. Pauli und V. F. Weisskopf, *Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung*, Helv. Phys. Acta **7** 709–731 (1934).
- [73] J. D. Bjorken und S. D. Drell, *Relativistic quantum mechanics*, Mc Graw-Hill, New York (1964).
- [74] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu und F. Laloë, *Quantenmechanik*, Bd. 1, Walter de Gruyter, 2009.



- 
- [75] L. D. Landau, *Zur Theorie der Energieübertragung II*, Phys. Z. d. Sowjetunion **2** 46–51 (1932).
- [76] C. Zener, *Non-adiabatic crossing of energy levels*, Proc. Roy. Soc. A 696–702 (1932).
- [77] R. A. Shelby, D. R. Smith und S. Schultz, *Experimental verification of a negative index of refraction*, Science **292** 77–79 (2001).
- [78] N. Fang *et al.*, *Sub-diffraction-limited optical imaging with a silver superlens*, Science **308** 534–537 (2005).
- [79] T. Xu *et al.*, *All-angle negative refraction and active flat lensing of ultraviolet light*, Nat. **497** 470–474 (2013).
- [80] M. Leder, C. Grossert und M. Weitz, *Veselago lensing with ultracold atoms in an optical lattice*, Nat. Commun. **5** 3327 (2014).
- [81] M. Kasevich *et al.*, *Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions*, Phys. Rev. Lett. **66** 2297 (1991).
- [82] M. Genske, Universität Köln, *Private Mitteilungen*. 2015.
- [83] T. Salger, *Quantentransport ultrakalter Atome in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2010.
- [84] S. Kling, *Landau-Zener-Stückelberg Interferometrie mit ultrakalten Atomen in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2011.
- [85] C. Grossert, *Atomarer Transport und die Kontrolle von Transportresonanzen in optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2015.
- [86] L. Sitta, *Observation of an edge state in ultra cold atoms with spatially variable optical lattice potentials*, Masterarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2015.
- [87] J. Plumhof, *Bose-Einstein-Kondensation von Rubidiumatomen in variablen optischen Gittern*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008.
- [88] J. Stenger *et al.*, *Bragg spectroscopy of a Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. Lett. **82** 4569 (1999).
- [89] H. Haken und H. C. Wolf, *Atom- und Quantenphysik*, Springer, 1980.
- [90] S. Friebe *et al.*, *CO<sub>2</sub>-laser optical lattice with cold rubidium atoms*, Phys. Rev. A **57** R20 (1998).
- [91] C. Raman *et al.*, *Evidence for a critical velocity in a Bose-Einstein condensed gas*, Phys. Rev. Lett. **83** 2502 (1999).
- [92] T. Kovachy *et al.*, *Matter wave lensing to picokelvin temperatures*, Phys. Rev. Lett. **114** 143004 (2015).

- [93] K. L. Lee *et al.*, *Ultracold fermions in a graphene-type optical lattice*, Phys. Rev. A **80** 043411 (2009).
- [94] J. I. Cirac, P. Maraner und J. K. Pachos, *Cold atom simulation of interacting relativistic quantum field theories*, Phys. Rev. Lett. **105** 0403 (2010).
- [95] X. Chen, Z.-C. Gu und X.-G. Wen, *Local unitary transformation, long-range quantum entanglement, wave function renormalization, and topological order*, Phys. Rev. B **82** 155138 (2010).
- [96] H. Feshbach, *A unified theory of nuclear reactions. II*, Annals of Physics **19** 287–313 (1962).
- [97] X. Cui *et al.*, *Synthetic gauge field with highly magnetic lanthanide atoms*, Phys. Rev. A **88** 011601 (2013).
- [98] D. Xiao, M.-C. Chang und Q. Niu, *Berry phase effects on electronic properties*, Rev. Mod. Phys. **82** 1959 (2010).
- [99] I. Rabi, *On the process of space quantization*, Phys. Rev. **49** 324 (1936).
- [100] E. T. Jaynes und F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51** 89–109 (1963).
- [101] J. Casanova *et al.*, *Deep strong coupling regime of the Jaynes-Cummings model*, Phys. Rev. Lett. **105** 263603 (2010).
- [102] S. Felicetti *et al.*, *Towards an experimental realization of a periodic quantum Rabi model with ultracold atoms*, DPG Frühjahrstagung Hannover Q27.12 (2016).
- [103] J. Javanainen und J. Ruostekoski, *Symbolic calculation in development of algorithms: split-step methods for the Gross–Pitaevskii equation*, J.Phys. A **39** L179 (2006).