

Quanten-Rabi Dynamik ultrakalter Atome im Bereich der tiefen starken Kopplung

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

von

Johannes Koch

aus

Hamm

Bonn, Februar 2022

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Martin Weitz
2. Gutachter: Prof. Dr. Sebastian Hofferberth

Tag der Promotion: 17.05.2022
Erscheinungsjahr: 2022

Zusammenfassung

Das Quanten-Rabi Modell ist eines der einfachsten quantenmechanischen Modelle zur Beschreibung der Wechselwirkung von Licht und Materie als Kopplung einer bosonischen Feldmode und eines Zwei-Niveau-Systems. Während das Jaynes-Cummings Modell als Näherung des Quanten-Rabi Modells für schwache Kopplungen von großer Bedeutung ist, erlauben aktuelle Experimente nun auch größere Kopplungsstärken zu untersuchen, womit das vollständige Quanten-Rabi Modell in den Vordergrund aktueller Untersuchungen rückt. Während Experimente der Resonator-Quantenelektrodynamik den Bereich der ultrastarken Kopplung erreichen, kann der Bereich der tiefen starken Kopplung, bei welcher die charakteristische Energie der Kopplung die restlichen Energien des Systems dominiert, in Quantensimulationen erreicht werden.

In der vorliegenden Arbeit wird die Realisierung einer analogen Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells mittels ultrakalter Rubidium-87 Atome in optischen Gitterpotentialen untersucht. Die Quantensimulation basiert auf der Definition eines Zwei-Niveau-Systems auf den untersten beiden Bändern in der Dispersionsrelation eines optischen Mehrphotonengitterpotentials im Blochbild und der Definition einer bosonischen Feldmode in den Bewegungsmoden der Atome in einem harmonischen Dipolfallenpotential. Das harmonische Dipolfallenpotential wird mit dem extrem weit von den atomaren Resonanzen verstimmt Licht eines CO₂-Lasers der Wellenlänge 10,6 μm realisiert, was zu langen Kohärenzzeiten führt. Durch Überlagerung des periodischen Gitterpotentials für die Atome mit dem harmonischen Fallenpotential kann ein extrem hoher Wert der Kopplungsstärke zwischen bosonischer Feldmode und dem in den Bloch-Bändern realisierten Zwei-Niveau-System erreicht werden, welcher weit im Bereich der tiefen starken Kopplung des Quanten-Rabi Modells liegt. Dabei wird mehr als der vierfache Wert der relativen Kopplungsstärke bisheriger Realisationen des Modells erreicht, so dass zum ersten Mal in einer analogen Quantensimulation eine deutliche Dominanz der Kopplung über die restlichen Energien beobachtet wird. Es können eine Reihe von theoretisch erwarteten Eigenschaften dieses extremen Parameterbereichs des Quanten-Rabi Modells experimentell untersucht werden, wie der rasche Anstieg der Feldmodenbesetzung bei anfänglicher Präparation des Systems im Vakuumzustand der Feldmode und der Zusammenbruch der in starker und ultrastarker Kopplung auftretenden Vakuum-Rabi-Oszillationen. Die im Experiment beobachtete gute Übereinstimmung der gemessenen Dynamiken der Erwartungswerte mit numerischen Simulationen des Quanten-Rabi Modells bestätigt das Erreichen der tiefen starken Kopplung bei gleichzeitigem Erhalt der Phasenkohärenz des Systems. Die Messungen zeigen, dass mit ultrakalten Atomen

in variablen Gitterpotentialen grundlegende Experimente zur Quantenphysik getriebener Systeme in zuvor unerreichten Parameterbereichen realisiert werden können. Perspektiven der Arbeit liegen in der Realisierung neuartiger Phasenübergänge des Spin-Boson Modells sowie in der Quanteninformationsverarbeitung.

Publikationsliste

Quantum Rabi model in the Brillouin zone with ultracold atoms

S. Felicetti, E. Rico, C. Sabin, T. Ockenfels, J. Koch, M. Leder, C. Grossert, M. Weitz und E. Solano

Phys. Rev A **95**, 013827 (2017)

<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.95.013827>

Quantum Rabi dynamics of trapped atoms far in the deep strong coupling regime

J. Koch, G. Hunanyan, T. Ockenfels, E. Rico, E. Solano und M. Weitz

Eingereicht zur Veröffentlichung (arXiv:2112.12488)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Ultrakalte atomare Bose-Gase	5
2.1	Bose-Einstein Kondensation	5
2.1.1	Kritische Temperatur	6
2.1.2	Bose-Einstein Kondensat mit atomarer Wechselwirkung	8
2.1.3	Magneto-optische Falle	10
2.1.4	Optische Dipolfalle	11
2.2	Periodische Gitterpotentiale	16
3	Simulation des Quanten-Rabi Modells	23
3.1	Quanten-Rabi Modell	23
3.1.1	Herleitung des Quanten-Rabi Hamiltonians und des Jaynes-Cummings Hamiltonians	24
3.1.2	Kopplungsbereiche des Quanten-Rabi Modells	26
3.2	Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells mit Atomen im Gitterpotential	33
4	Experimenteller Aufbau	41
4.1	Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats	41
4.1.1	Vakuumapparatur	41
4.1.2	Magneto-optische Falle	43
4.1.3	Dipolfalle	48
4.2	Optisches Gitter	50
4.3	Abbildungssystem	53
4.4	Experimenteller Ablauf	56
5	Experimentelle Resultate	61
5.1	Charakterisierung des harmonischen Fallenpotentials	61
5.2	Periodisches Gitterfallenpotential	64
5.3	Testmessungen zur Abbildung ultrakalter atomarer Ensembles	66
5.4	Präparation in Superpositionszuständen des Zwei-Niveau-Systems	70
5.4.1	Messungen im Ortsraum	71
5.4.2	Erwartungswert des Quasiimpulses \hat{q}	73

5.4.3	Erwartungswert des Inversionsoperators $\hat{\sigma}_x$	75
5.4.4	Grad der bosonischen Anregung	76
5.5	Präparation in reinen Zuständen des Zwei-Niveau-Systems	81
5.5.1	Zwei-Niveau-Besetzung	82
5.5.2	Grad der bosonische Anregung	84
6	Ausblick	89
A	Numerische Methoden	91
A.1	Numerische Simulation des Quanten-Rabi Hamiltonian	91
A.2	Numerische Simulation der Dynamik des Systems der kalten Atome im Lichtpotential	92
B	Anhang	93
B.1	Spulenüberwachung	93
	Literatur	95

Einleitung

Das Rabi Modell [1, 2] ist eines der einfachsten semiklassischen Modelle zur Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Materie und Licht als Kopplung zwischen einem Zwei-Niveau-System und einem klassischen elektromagnetischen Feld, welches erfolgreich den Effekt der Rabi-Oszillationen [3] sowie die sogenannte Bloch-Siegert Verschiebung der Energieniveaus des Zwei-Niveau-Systems für hohe Kopplungsstärken voraussagt [3–6]. Eine vollständig quantenmechanische Beschreibung mit einer quantisierten Feldmode erfolgte im Jahr 1963 durch Edwin Jaynes und Fred Cummings [7], mit welchem auch pure quantenmechanische Effekte untersucht werden konnten. Zu diesen gehört etwa die \sqrt{N} -Skalierung der Jaynes-Cummings Leiter [8], wobei N hier die Zahl der Photonen beschreibt, und das Auftreten von Zusammenbruch und Wiederaufleben der Rabi-Oszillationen [9, 10], welche nicht durch semiklassische Modelle erklärt werden können. Im Experiment sind die Bedingungen, welche durch das Jaynes-Cummings Modell beschrieben werden, in der Resonator-Quantenelektrodynamik oft gut erfüllt, so dass dieses den Grundstein für eine Vielzahl von Experimenten zur Materie-Licht-Kopplung bildet [11]. Ein Meilenstein dieser Untersuchungen war das Erreichen der sogenannten starken Kopplung, wobei in diesem Bereich die Kopplungsstärke größer als alle Dekohärenzeffekte im System ist und die Untersuchung kohärenter Effekte der Materie-Licht-Wechselwirkung erlaubt [11, 12].

Das von Jaynes und Cummings aufgestellte Modell ergibt sich nach vollständig quantenmechanischer Behandlung des Problems der Atom-Licht Wechselwirkung unter Anwendung der Drehwellennäherung, welche Prozesse, die mit der Anregung des Zwei-Niveau-Systems bei gleichzeitiger Erzeugung eines Photons in der Feldmode und der Abregung des Zwei-Niveau-Systems bei gleichzeitiger Vernichtung eines Photons aus der Feldmode einhergehen, vernachlässigt. Diese Effekte sind auch in dem als starke Kopplung bezeichneten Bereich noch von geringer Bedeutung [3]. Wird die Drehwellennäherung nicht durchgeführt, wird das Modell als Quanten-Rabi Modell bezeichnet [13]. Erst im Jahr 2011 wurde durch Daniel Braak auf Basis der \mathbb{Z}_2 -Symmetrie des Systems eine analytische Lösung des vollen Quanten-Rabi Modells gefunden [14]. Für Kopplungsstärken jenseits der starken Kopplung, welche als ultrastarke Kopplung bezeichnet werden, gewinnen die zuvor vernachlässigten

schnell rotierenden Terme stetig an Bedeutung für die Dynamik. Dieser Bereich konnte in den letzten 20 Jahren auch experimentell in verschiedenen Systemen realisiert werden [15–19]. Dominiert die Kopplungsstärke über die restlichen Terme des Quanten-Rabi Hamiltonians wird von der tiefen starken Kopplung (*Deep Strong Coupling*) gesprochen, deren Eigenschaften sich deutlich von der ultrastarken Kopplung unterscheiden [20]. So kommt es unter anderem zur Ausbildung von oszillierenden Wellenpaketen in der Feldmode mit hohen mittleren Besetzungszahlen, auch bei anfänglicher Präparation des Systems im Vakuumzustand [20]. Dieser extreme Parameterbereich konnte in den letzten Jahren in einigen Systemen experimentell untersucht werden [21–24]. Hier blieb die Kopplung jedoch unterhalb der Grenze zur sogenannten perturbativen tiefen starken Kopplung, die dann der Treiber der Systemdynamik ist [25].

Aufgrund der hohen Variabilität und Kontrollierbarkeit sind ultrakalte Atome in optischen Potentialen ein idealer Kandidat zur Implementation vieler quantenmechanischer Systeme. Auf die experimentelle Realisierung der ersten atomaren Bose-Einstein Kondensate [26, 27] folgten bald die ersten Quantensimulationen unterschiedlicher quantenmechanischer Systeme durch geschickte Manipulation der ultrakalten Atome, basierend auf einer Idee Richard Feynmans [28] experimentell schwer zugängliche quantenmechanische Systeme durch analoge, einfacher zugängliche Systeme zu simulieren. So wurden unter anderem Bloch-Oszillationen in optischen Gitterpotentialen [29], der Quantenphasenübergang zum Mott-Isolator [30], relativistische Effekte wie das Klein-Tunneln [31] oder die Veselago-Linse [32] und topologische Effekte [33] in ultrakalten Atomsystemen untersucht. Seit geraumer Zeit stehen, neben der stetig wachsenden Zahl verschiedener Atomspezies auch weitere Plattformen wie die photonischen Bose-Einstein Kondensate [34] zur Verfügung.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde Quanten-Rabi Dynamik mit einer Kopplungsstärke realisiert, die einen Faktor 6,5 mal so groß wie die Eigenfrequenz der treibenden bosonischen Mode ist, was anders als in früheren Arbeiten damit erstmals weit oberhalb aller anderen Energieskalen liegt. Damit werden die Untersuchungen weit in dem Bereich der tiefen starken Kopplung durchgeführt. Die gewählte experimentelle Basis sind ultrakalte Rubidium-87 Atome in optischen Dipol- und Gitterpotentialen, welche die Quantensimulation des Quanten-Rabi Hamiltonians in diesem extremen Parameterbereich ermöglicht. Die Realisierung des Zwei-Niveau-Systems erfolgt auf den Bändern der Dispersionsrelation eines optischen Vier-Photonen-Gitters [35], während die Feldmode als harmonisches Dipolfallenpotential eines zu den atomaren Übergängen sehr weit rot verstimmten Lasers im mittleren infraroten Spektralbereich realisiert wird. Die räumliche Überlagerung der beiden Potentiale erlaubt die Synthese eines geeigneten Potentials, welches eine enge Kopplung der atomaren harmonischen Bewegung und der Bewegung im periodischen Potential erlaubt. Dabei ermöglicht die Verwendung eines Lasers im mittleren Infrarotbereich die Nutzung tiefer harmonischer Fallenpotentiale mit sehr geringen Streuraten [36]. Die durch diese Methode realisierbaren Kopplungsstärken erreichen etwa den fünffachen Wert bisheriger analoger Realisationen des Quanten-Rabi Modells, gleichzeitig kann die Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems frei über vier Größenordnungen gewählt werden.

Die Beobachtung der Atomtrajektorien im Ortsraum wie auch im Impulsraum mittels Flug-

zeitabbildung ermöglicht die Messung der Dynamik des Erwartungswerts der bosonischen Anregungszahl, des Inversionsoperators, des mittleren Impulses und der mittleren Ortsauslenkung. Die Dynamik des Erwartungswerts des Zwei-Niveau-Zustands kann mittels adiabatischer Beschleunigung des optischen Gitters [37] ausgewertet werden. Dies erlaubt die Untersuchung wichtiger dynamischer Größen der tiefen starken Kopplung des Quanten-Rabi Modells bei Präparation des Systems im Vakuumzustand der Feldmode und nahezu beliebiger Wahl des Anfangszustands des Zwei-Niveau-Systems.

Struktur der Arbeit

Die Arbeit ist in fünf Abschnitte unterteilt. Nach einer Einleitung befasst sich das zweite Kapitel der Arbeit mit den theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein Kondensation von Rubidiumatomen, sowie einem kurzen theoretischen Abriss der zur Realisation des Kondensats verwendeten Techniken und des Einflusses optischer Mehrphotonengitterpotentiale auf die Kondensate.

Das dritte Kapitel erläutert die Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells mittels ultrakalter Atome in optischen Gitterpotentialen. Hierzu wird zunächst die tiefe starke Kopplung des Quanten-Rabi Modells, sowie die theoretischen Erwartungen an die Dynamik eines solchen Systems beschrieben. Danach wird die Äquivalenz des Hamiltonians für die kalten Atome in den kombinierten optischen Potentialen zum Quanten-Rabi Hamiltonian hergeleitet und Ausdrücke für die relative Kopplungsstärke des Systems und die Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems angegeben.

Im vierten Kapitel wird der experimentelle Aufbau beschrieben. Das Kapitel gliedert sich in die Beschreibung der Vakuumapparatur, des Aufbaus der magneto-optischen Falle, des Lasersystems für die optische Dipolfalle, des Aufbaus für das optische Gitter und des Abbildungssystems. Als letztes folgt eine Beschreibung des zeitlichen experimentellen Ablaufs.

Die Ergebnisse der Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells werden im fünften Kapitel präsentiert. Zunächst werden die Messungen zur Kalibration der Fallenfrequenzen der Dipolfalle und der Oszillationsfrequenz innerhalb des Gitterpotentials, aus welchen sich die relative Kopplung und die Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems bestimmen lässt, diskutiert. Es folgen Ergebnisse zur Bestimmung der Punktspreizfunktion der Abbildung. Diese erlauben im weiteren Verlauf des Kapitels die Messung der Dynamik der relevanten Erwartungswerte des Systems bei Präparation des Zwei-Niveau-Systems in einem Überlagerungszustand der beiden Niveaus und des Vakuumzustands der Feldmode. Insbesondere wird die zeitliche Entwicklung der Feldmodenbesetzung bestimmt, als klares Indiz für das Erreichen der tiefen starken Kopplung. Der letzte Abschnitt des Kapitels beschäftigt sich mit der Auswertung der Feldmodenbesetzung und der Zwei-Niveau-Besetzung bei Präparation des Systems im Vakuumzustand der Feldmode und des Grundzustands oder des angeregten Zustands des Zwei-Niveau-Systems.

Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem Ausblick auf mögliche zukünftige Messungen des Zusammenbruchs und des Wiederauflebens des Anfangszustands,

welches für das Quanten-Rabi Modell in tiefer starker Kopplung erwartet wird, sowie eines erwarteten Quantenphasenübergangs für sehr große Energieaufspaltungen des Zwei-Niveau-Systems.

Ultrakalte atomare Bose-Gase

In diesem Kapitel werden zunächst die Grundlagen der Bose-Einstein Kondensation behandelt. Nach der Diskussion des grundsätzlichen Effekts der Bose-Einstein Kondensation für ein wechselwirkungsfreies, ideales Bose-Gas soll kurz auf den Einfluss der Atom-Atom Wechselwirkung in der Näherung der Molekularfeldtheorie und der daraus folgenden Beschreibung des Bose-Einstein Kondensats mit Hilfe der Gross-Pitaevskii-Gleichung eingegangen werden. Die Herleitung orientiert sich dabei im Wesentlichen an [38]. Der restliche Teil dieses Kapitels dient der theoretischen Beschreibung des Einflusses der in der experimentellen Arbeit eingesetzten Methoden und Potentiale für die kalten Atome, um eine Grundlage für die Beschreibung der hier durchgeführten Quantensimulation zu bilden.

2.1 Bose-Einstein Kondensation

Teilchen lassen sich quantenmechanisch entlang ihres statistischen Verhaltens in Teilchen mit halbzahligen Spin (sogenannte Fermionen) und Teilchen mit ganzzahligen Spin (sogenannte Bosonen) unterteilen, wobei nach dem Spin-Statistik-Theorem Fermionen der Fermi-Dirac-Statistik folgen, während Bosonen der Bose-Einstein-Statistik folgen [39]. Während die Vielteilchenwellenfunktionen der Fermionen unter Vertauschung zweier Teilchen antisymmetrisch sind, sind sie symmetrisch für Bosonen. Dies hat aufgrund der Unterscheidbarkeit der Teilchen die direkte Konsequenz, dass keine zwei fermionischen Teilchen den gleichen quantenmechanischen Zustand besetzen können. Dies wird auch als das Paulische Ausschlussprinzip, nach Wolfgang Pauli, der dieses Prinzip 1925 zum ersten Mal formulierte, bezeichnet [40]. Im Gegensatz dazu erlaubt die unter Vertauschung zweier Teilchen symmetrische Wellenfunktion der Bosonen die Besetzung ein und desselben quantenmechanischen Zustands durch eine Vielzahl bosonischer Teilchen und in der weiteren Folge die Möglichkeit der makroskopischen Besetzung des quantenmechanischen Grundzustands unterhalb einer kritischen Temperatur [41, 42].

Zunächst soll hier die kritische Temperatur für einen solchen Phasenübergang für ein in drei Dimensionen harmonisch gefangenes System hergeleitet werden.

2.1.1 Kritische Temperatur

Wie in der Einleitung dieses Kapitels bereits beschrieben, findet hier zunächst eine Betrachtung idealer, d.h. wechselwirkungsfreier, atomarer Bose-Gase statt. Diese gehorchen im thermischen Gleichgewicht der Bose-Einstein Statistik:

$$\langle n(\epsilon_\nu) \rangle = \frac{1}{e^{(\epsilon_\nu - \mu)/(k_B T)} - 1} \quad (2.1)$$

mit der Energie des Einteilchenzustands innerhalb des gegebenen Fallenpotentials ϵ_ν , der Temperatur T , der Boltzmann-Konstante k_B und dem chemischen Potential μ , welches eine Funktion von Teilchenzahlen N , die der Summe über die gesamte Verteilung entspricht, und der Temperatur T ist. $\langle n(\epsilon_\nu) \rangle$ entspricht hierbei der mittleren Besetzung des Zustands mit der Energie ϵ_ν . Für hohe Temperaturen geht diese Verteilung in die klassische Boltzmann-Verteilung

$$\langle n(\epsilon_\nu) \rangle \approx e^{-(\epsilon_\nu - \mu)/(k_B T)} \quad (2.2)$$

über, was der Erwartung entspricht, dass der Quantencharakter der Teilchen erst für niedrige Temperaturen einen signifikanten Einfluss ausübt.

Die Zustandsdichte des Systems bei verschiedenen Temperaturen soll nun anhand des Beispiels des dreidimensionalen, anisotropen harmonischen Oszillatorpotentials

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2} m \left(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2 \right) \quad (2.3)$$

betrachtet werden. Nach Einführung der entsprechenden Quantenzahlen n_x , n_y und n_z ergeben sich die Energielevel als

$$\epsilon(n_x, n_y, n_z) = \left(n_x + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_x + \left(n_y + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_y + \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_z \quad (2.4)$$

mit $n_i \in \mathbb{N}_0$. Im Falle von Energien $E \gg \hbar \omega_i$ ist der Energienullpunkt hier unerheblich und die Quantenzahlen n_i kann als kontinuierlich betrachtet werden, so dass die Anzahl der Zustände mit Energien kleiner einer gegebenen Energie ϵ durch Integration bestimmt werden kann. Hierzu ist es nützlich, eine Variablentransformation in ein Koordinatensystem der Form $\epsilon_i = \hbar \omega_i n_i$ durchzuführen. So ergibt sich für die Anzahl der Zustände mit Energien kleiner als ϵ :

$$G(\epsilon) = \frac{1}{\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \int_0^\epsilon d\epsilon_x \int_0^{\epsilon - \epsilon_x} d\epsilon_y \int_0^{\epsilon - \epsilon_x - \epsilon_y} d\epsilon_z = \frac{\epsilon^3}{6 \hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}, \quad (2.5)$$

aus der sich die Zustandsdichte $g(\epsilon) = \frac{dG}{d\epsilon}$ zu

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^2}{2 \hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z} \quad (2.6)$$

bestimmen lässt.

Aus Gleichung 2.1 und 2.6 kann für große N unter Vernachlässigung der Nullpunktsenergie die Anzahl der angeregten Teilchen zu

$$N_{\text{ang}}(T, \mu) = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \langle n(\epsilon) \rangle \quad (2.7)$$

bestimmt werden, welche für den Fall eines verschwindenden chemischen Potentials $\mu = 0$ ihr Maximum annimmt. Nach der vorhergehenden Betrachtung erscheint es sinnvoll, eine kritische Temperatur T_c zu bestimmen, bei der die Teilchen noch vollständig auf die angeregten Zustände verteilt werden können:

$$N = N_{\text{ang}}(T_c, \mu = 0) = \int_0^{\infty} d\epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{\epsilon/(k_B T_c)} - 1}. \quad (2.8)$$

Anders formuliert bedeutet dies, dass für ein Ensemble unterhalb der kritischen Temperatur T_c eine makroskopische Anzahl von Teilchen den Grundzustand des Systems besetzen müssen, da die Energie nicht ausreicht, alle Teilchen auf die angeregten Zustände des Systems zu verteilen:

$$N_0(T) = N - N_{\text{ang}}(T). \quad (2.9)$$

Dieser Prozess ist schematisch in Abbildung 2.1 dargestellt. Gleichung 2.8 kann durch die Einführung einer dimensionslosen Variable $x = \epsilon/(k_B T)$ gelöst werden. Verallgemeinert auf n Dimensionen, kann Gleichung 2.6 als

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon^{n-1}}{(n-1)! \prod_i \hbar \omega_i} = C_\alpha \epsilon^{\alpha-1} \quad (2.10)$$

geschrieben werden, wobei C_α eine Konstante ist. Für den hier betrachteten Fall des dreidimensionalen harmonischen Oszillators gilt offensichtlich $\alpha = 3$ und $C_3 = \frac{1}{2\hbar^3 \omega_x \omega_y \omega_z}$. Somit ergibt sich für Gleichung 2.8:

$$k_B T_c = \left(\frac{N}{C_\alpha \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha)} \right)^{1/\alpha}, \quad (2.11)$$

mit der Gammafunktion $\Gamma(\alpha)$ und der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(\alpha)$. Durch Einsetzen von $\alpha = 3$ und C_3 erhalten wir:

$$k_B T_c = \frac{\hbar (N \omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}}{\zeta(3)^{1/3}} \approx 0.94 \hbar (N \omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}. \quad (2.12)$$

Unterhalb der so gefundenen kritischen Temperatur T_c kommt es somit zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustands, wobei der Anteil der Atome im Grundzustand durch

Gleichung 2.8 zu

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^3 \quad (2.13)$$

bestimmt werden kann.

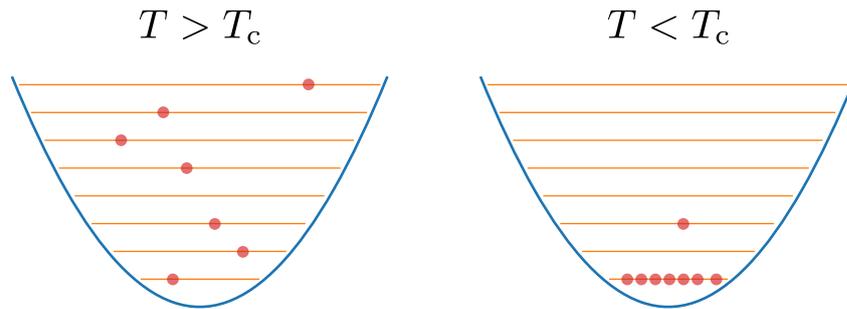


Abbildung 2.1: Schematische Besetzungsverteilung der Energieniveaus in einem harmonischen Potential für ein Bose-Gas oberhalb und unterhalb der kritischen Temperatur T_c . Während oberhalb der kritischen Temperatur der überwiegende Anteil der Atome in angeregten Zuständen verweilt, kommt es unterhalb der kritischen Temperatur zu einer makroskopischen Besetzung des Grundzustands.

2.1.2 Bose-Einstein Kondensat mit atomarer Wechselwirkung

Die bisherige Betrachtung erfolgte unter vollständiger Vernachlässigung von Atom-Atom Wechselwirkungsprozessen, obwohl wir für die in dieser Arbeit verwendeten Alkaliatome eine solche erwarten können. Um den Zustand des entstehenden Bose-Einstein Kondensats und seine Dynamik unter externen Potentialen verstehen zu können, soll hier zunächst die relevante Atom-Atom Wechselwirkung beschrieben werden, sowie die Gross-Pitaevskii-Gleichung als Beschreibung für die zeitliche Dynamik eines solchen Kondensats eingeführt werden.

Die Atomzahldichte eines Bose-Einstein Kondensats aus Alkaliatomen ist mit typischerweise $1 \cdot 10^{13} - 1 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ [38] gering verglichen mit Gasen bei Atmosphärendruck (typischerweise $2,5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$). Die geringe Dichte in Kombination mit den tiefen Temperaturen des Kondensats erlaubt es, einige Vereinfachungen bei der Betrachtung der Wechselwirkungsprozesse durchzuführen, da die effektive Streulänge a , verglichen mit den Atom-Atom Abständen innerhalb des Kondensats, gering ist und die geringen auftretenden Energien eine Beschränkung auf elastische s-Wellenstreuung erlaubt. Unter diesen Bedingungen kann das effektive Wechselwirkungspotential als Kontaktwechselwirkung der Form

$$U_{\text{int}}(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.14)$$

geschrieben werden, wobei a die Streulänge und m die Masse der Atome bezeichnet. Mittels der Hartree-Fock-Methode kann nun aus dem Wechselwirkungspotential die Energie der Vielteilchenzustände bestimmt werden. Da in einem Bose-Einstein Kondensat alle Atome den Grundzustand besetzen und somit den gleichen Einzelteilchenzustand einnehmen, kann die Gesamtwellenfunktion als Produkt der Einteilchenwellenfunktionen geschrieben werden

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \prod_{i=1}^N \varphi(\vec{r}_i). \quad (2.15)$$

Um die Wechselwirkung der Atome zu berücksichtigen, verwenden wir das Wechselwirkungspotential aus Gleichung 2.14 zur Aufstellung des effektiven Hamiltonians

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(\vec{r}_i) \right) + U_0 \sum_{i < j} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (2.16)$$

mit $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ und einem externen Potential $V(\vec{r})$. Die Energie der zuvor aufgestellten Vielteilchenwellenfunktion lautet dann

$$E = N \int d\vec{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \varphi(\vec{r})|^2 + V(\vec{r}) |\varphi(\vec{r})|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\varphi(\vec{r})|^4 \right) \quad (2.17)$$

$$\approx \int d\vec{r} \left(\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi(\vec{r})|^2 + V(\vec{r}) |\psi(\vec{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi(\vec{r})|^4 \right) \quad (2.18)$$

mit $\psi(\vec{r}) = \sqrt{N} \varphi(\vec{r})$, wobei in der zweiten Zeile Terme der Ordnung $\frac{1}{N}$ vernachlässigt wurden. Durch Variationsrechnung kann nun die Energie in Gleichung 2.18 unter der Nebenbedingung des Erhalts der Gesamtteilchenzahl bestimmt werden, was zur zeitunabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung führt. Hierzu wird das chemische Potential μ als Lagrange-Multiplikator eingeführt, welcher die Erhaltung der Gesamtteilchenzahl sicherstellt.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) + U_0 |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) = \mu \psi(\vec{r}) \quad (2.19)$$

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung entspricht somit der Schrödingergleichung mit einem zusätzlichen nichtlinearen Potential, welches die Wechselwirkung in Molekularfeldnäherung berücksichtigt. Somit ergibt sich für die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung, welche im weiteren Verlauf der Arbeit von Bedeutung für die Untersuchung der Systemdynamik ist,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t) + U_0 |\psi(\vec{r}, t)|^2 \psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.20)$$

Auch hier ist es einfach zu sehen, dass Gleichung 2.20 für zu vernachlässigende Atom-Atom

Wechselwirkung der regulären Schrödingergleichung entspricht. Dies legitimiert im Weiteren die Verwendung der Schrödingergleichung zur Untersuchung der Systemdynamik bei geringen Kondensatatomzahlen.

2.1.3 Magneto-optische Falle

Wie sich aus Gleichung 2.12 zeigt, werden für die Bose-Einstein Kondensation von Atomen tiefe Temperaturen benötigt, die in üblichen Fallenpotentialen und bei üblichen Atomzahlen typischerweise im Nanokelvinbereich liegen. Dass solche Temperaturen mit herkömmlichen Kühlmethoden kaum erreicht werden (so ist in Helium-Mischungskryostaten nur eine Temperatur von etwa 50 mK erreichbar [43]), dürfte der Hauptgrund für die lange Dauer zwischen der theoretischen Beschreibung des Bose-Einstein Kondensats und der tatsächlichen Realisierung gewesen sein. Erst die Entwicklung der Laserkühlung hat die Möglichkeiten zur Herstellung solcher ultrakalten Atomensembles eröffnet. Typischerweise kommt hierzu ein mehrstufiges Kühlverfahren zum Einsatz, dessen erste Stufe oft die magneto-optische Falle ist. Diese Kombination aus Laserkühlung und Atomfalle wurde zum ersten Mal im Jahr 1987 mit Natriumatomen demonstriert, wobei eine Temperatur von etwa 600 μK erreicht wurde [44]. Das zugrundeliegende Prinzip ist hierbei die sogenannte Dopplerkühlung, welche auf der Absorption von rotverstimten Photonen basiert, ein Konzept, das bereits im Jahr 1975 vorgeschlagen wurde [45]. Der eigentlich quantenmechanische Effekt kann auch in einem klassischen Modell gut verstanden werden. So werden die Atome einem, zu einem Übergang rot verstimten, Laserstrahl ausgesetzt. Aufgrund des Dopplereffekts erscheint das Licht somit für Atome, welche sich auf die Laserquelle zubewegen, näherresonant, was eine erhöhte Absorptionsrate zur Folge hat. Jedes der absorbierten Photonen überträgt somit den Impuls von

$$\vec{p}_{\text{Photon}} = \hbar \vec{k} \quad (2.21)$$

auf das absorbierende Atom, wobei die Richtung des Impulsübertrags durch die Ausbreitungsrichtung des Laserstrahls gegeben ist. Im Vergleich dazu erfolgt die spontane Emission eines Photons isotrop in alle Raumrichtungen, womit über viele Zyklen von Absorption und Reemission von Photonen eine Nettokraft auf die Atome wirkt. Werden zwei Laserstrahlen aus beiden Raumrichtungen verwendet, ergibt sich eine mittlere Kraft von

$$F_{\text{Doppler}} \approx \frac{8\hbar k^2 \delta (I/I_{\text{sat}}) \vec{v}}{\gamma \left(1 + I/I_{\text{sat}} + (2\delta/\gamma)^2\right)^2} \quad (2.22)$$

mit der Sättigungsintensität I_{sat} , der Verstimmung δ und der natürlichen Linienbreite γ , wobei Terme von $(kv/\gamma)^4$ und höhere Terme vernachlässigt wurden [46]. Es entsteht somit eine gerichtete Kraft, welche die Atome in beiden Richtungen abbremst. Jede spontane Emission eines Photons sorgt hingegen für eine Beschleunigung des emittierenden Atoms, so dass eine untere Geschwindigkeitsgrenze für diese Kühlmethode an dem Punkt gegeben ist, an dem die Kraft F_{Doppler} und die heizende Kraft gleich stark werden. Die sich hieraus ergebende

Temperatur des Atomensembles wird auch als *Dopplertemperatur* T_D bezeichnet:

$$T_D = \frac{\hbar\gamma}{2k_B} \quad (2.23)$$

mit der Boltzmann-Konstante k_B [46]. Für das in dieser Arbeit verwendete Rubidiumisotop Rubidium-87 ergibt sich für den verwendeten Kühlübergang eine Dopplertemperatur von $T_{D, \text{Rb87}} \simeq 146 \mu\text{K}$ [47].

Durch Erweiterung dieses Schemas auf drei Dimensionen mit insgesamt sechs Laserstrahlen erhält man eine sogenannte *optische Melasse*, da die Atome zwar im Zentrum der Laserstrahlen gebremst werden, aufgrund fehlender rückstellender Kräfte zur Mitte der Laserregion kommt es jedoch zu langsamer Diffusion der Atome aus der Kühlregion heraus. Eine elegante Möglichkeit zur Herstellung einer solchen rückstellenden Kraft und somit der Konstruktion einer Atomfalle ist die magneto-optische Falle. Hierzu werden die Kühlaserstrahlen zirkular polarisiert und es wird ein geeignetes inhomogenes Magnetfeld angelegt. Abbildung 2.2 zeigt die daraus resultierenden Energieniveaus in Abhängigkeit der Position in einer Dimension. Aufgrund des Vorzeichenwechsels der magnetischen Flussdichte und der unterschiedlichen zirkularen Polarisation der Lichtstrahlen ändert sich die Nähe zur Resonanz nicht nur wegen der Dopplerverschiebung, sondern auch durch die Position im Raum, so dass eine rückstellende Kraft entsteht. Diese Kombination aus optischer Kühlung und opto-magnetischer Falle kommt aufgrund ihrer vergleichsweise hohen Fanggeschwindigkeit und des einfachen Aufbaus sehr oft als erste Kühlstufe zum Einsatz. Die Maxwell-Boltzmann Verteilung der Atome des thermischen Hintergrundgases enthält dabei genügend langsame Atome, so dass häufig ein effizientes Laden aus dem Hintergrundgas ohne vorherige Verlangsamung, wie beispielsweise mit einem zusätzlichen Zeeman-Kühler [48], möglich ist, was die Komplexität des Gesamtaufbaus auf Kosten der Ladezeit der Falle reduzieren kann.

Da die gefangenen Atome am Rand der Falle Licht von den Atomen im Zentrum der Falle abschirmen, was zu einer Kompression der Atomwolke führt, gleichzeitig aber gestreute Photonen aus dem Zentrum der Falle eine expandierende Kraft auf die Atome ausüben, kommt es in einer solchen magneto-optischen Falle zu einem komplexen Ladeverhalten. Während die Dichte im Zentrum der Falle zunächst ansteigt, erreicht diese bei der Ansammlung einiger zehntausend Atome ein Plateau, ab welchem die Atomwolke in der Hauptsache expandiert. Die Dichteverteilung in einer solchen Fallenkonfiguration entspricht einer Top-Hat Verteilung. Bei Erreichen einer Fallengröße, bei der die meisten Photonen mehrfach in der Atomwolke gestreut werden, erhöht sich die expandierende Kraft auf die Atomwolke, was zu einer Reduktion der Dichte führt [49].

2.1.4 Optische Dipolfalle

Wie im vorhergehenden Abschnitt bereits aufgezeigt, ist die minimale Temperatur der Atome in einer magneto-optischen Falle in der Hauptsache durch die Photonenstreuung an den Atomen begrenzt, so dass die kritische Temperatur zum Übergang in ein Bose-Einstein

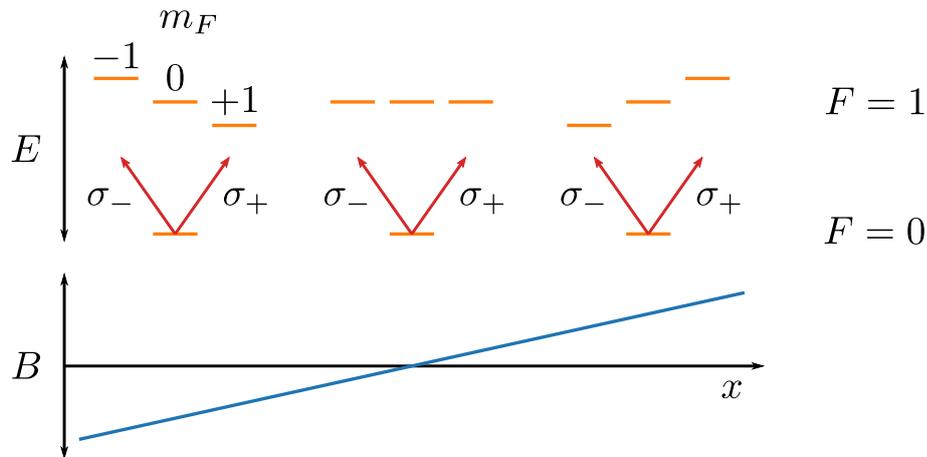


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung des Prinzips der magneto-optischen Falle. Die m_F Zustände des oberen Niveaus $F = 1$ erfahren aufgrund des Zeeman-Effekts innerhalb des Magnetfeldgradienten eine Energieverschiebung, welche durch den Vorzeichenwechsel des B -Feldes eine räumliche Abhängigkeit erlangt. Da von einer Seite rotverstimmt Laserlicht mit σ_+ Polarisation und von der anderen Seite rotverstimmt Laserlicht mit σ_- Polarisation eingestrahlt wird, kommt es zu einer effektiven Rückstellkraft auf die Atome zum Nullpunkt des Magnetfeldgradienten.

Kondensat nicht erreicht werden kann. Zur Realisation eines solchen wird somit ein weiterer Schritt der Kühlung nötig. Hierzu werden die Atome in ein weiteres Fallenpotential umgeladen, wobei neben der hier verwendeten und beschriebenen optischen Dipolfalle auch magnetische Fallenpotentiale Verwendung finden [50].

Die Basis für ein optisches Dipolfallenpotential bietet die Wechselwirkung zwischen dem Lichtfeld des Fallenlasers und dem induzierten Dipolmoment der in ihr gefangenen Atome [46], welche zum sogenannten AC-Stark-Effekt führt [51]. Eine solche Dipolfalle, im einfachsten Fall nur durch das Fokussieren eines einzelnen Laserstrahls realisiert, erlaubt bei weiter Verstimmung das Fangen und Halten von neutralen Atomen bei sehr niedrigen Photonenstreuraten, was die Realisierung der Bose-Einstein Kondensation durch sogenanntes evaporatives Abkühlen des Atomensembles erlaubt. Die theoretische Beschreibung optischer Dipolfallen orientiert sich an [52], wobei zunächst eine semiklassische Beschreibung des Effekts anhand eines einfachen klassischen Oszillatormodells erfolgt und im Anschluss die quantenmechanische Betrachtung des Effekts für die hier verwendeten Alkaliatome folgt.

Befindet sich ein Atom im Lichtfeld eines Laserstrahls, so induziert das elektrische Feld des Laserstrahls ein Dipolmoment \vec{p} im Atom, welches mit der Frequenz des Lichtfeldes ω oszilliert. Die Amplitude des Dipolmoments kann dabei als

$$p = \alpha E \quad (2.24)$$

geschrieben werden, wobei α als die komplexe Polarisierbarkeit bezeichnet wird, welche im Allgemeinen von der Frequenz des Lichtfeldes abhängt. Das Wechselwirkungspotential

dieses induzierten Dipolmoments mit dem Feld ergibt sich dabei als

$$U_{\text{dip}} = -\frac{1}{2} \langle \vec{p} \vec{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \Re(\alpha) I. \quad (2.25)$$

ϵ_0 bezeichnet hier die elektrische Feldkonstante und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Der Faktor $1/2$ ist dem induzierten Charakter des Dipols geschuldet. Somit hängt die Tiefe des Potentials U_{dip} von der Intensität des eingestrahnten Lichtfelds und dem phasengleichen Anteil der Polarisierbarkeit $\Re(\alpha)$ ab. Die Dipolfallenkraft ist eine konservative Kraft, welche als Gradient des Dipolfallenpotentials aus Gleichung 2.25 geschrieben werden kann:

$$\vec{F}_{\text{dip}} = -\nabla U_{\text{dip}} = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \Re(\alpha) \nabla I. \quad (2.26)$$

Die absorbierte Leistung des Oszillators kann entsprechend als

$$P_{\text{abs}} = \langle \dot{\vec{p}} \vec{E} \rangle = 2\omega \Im(pE^*) = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \Im(\alpha) I \quad (2.27)$$

geschrieben werden und ist somit proportional zum gegenphasigen Anteil der Polarisierbarkeit $\Im(\alpha)$. Entsprechend der Energie eines einzelnen gestreuten Photons $\hbar\omega$, kann Gleichung 2.27 als Anzahl gestreuter Photonen, der sogenannten Streurrate, interpretiert werden:

$$\Gamma_{\text{streu}} = \frac{P_{\text{abs}}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \Im(\alpha) I. \quad (2.28)$$

Gleichungen 2.26 und 2.28 geben somit Aufschluss über die beiden wichtigen Parameter der Fallenkraft und der Photonenstreurrate, wobei sich die eigentliche Komplexität des Problems in der Polarisierbarkeit α versteckt. Als klassische Näherung kann diese nun Anhand des Lorentz Modells betrachtet werden, in welchem ein Elektron mit Masse m_e mit einer Eigenfrequenz von ω_0 , welche der Frequenz der optischen Resonanz des verwendeten Atoms entspricht, elastisch an den Atomkern gebunden ist. Die Schwingungen dieses Elektrons sorgen durch radiativen Verlust für die Dämpfung des Systems [53]:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c} \left(\frac{\dot{v}}{c}\right)^2 \sin^2(\Theta). \quad (2.29)$$

mit dem Raumwinkel Ω , der Ladung des Elektrons e , der Vakuumlichtgeschwindigkeit c , der Geschwindigkeit v und dem Winkel zur Beobachtungsrichtung Θ . Integriert über den gesamten Raumwinkel ergibt sich somit:

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c}. \quad (2.30)$$

Zur Bestimmung von α , wird die Bewegungsgleichung der getriebenen Oszillation des Elektrons

$$\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE(t)}{m_e} \quad (2.31)$$

mit der sich aus Gleichung 2.30 ergebenden Dämpfungsrate

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi \epsilon_0 m_e c^3} \quad (2.32)$$

gelöst und es ergibt sich für die Polarisierbarkeit:

$$\alpha = 6\pi \epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (2.33)$$

mit der Dämpfungsrate $\Gamma = (\frac{\omega_0}{\omega})^2 \Gamma_\omega$.

Eine alternative Betrachtungsweise ist die semiklassische Betrachtung des Atoms als Zwei-Niveau-System, welches sich in einem klassischen Lichtfeld befindet. Diese Betrachtung führt, solange keine nennenswerten Sättigungseffekte auftreten, zu identischen Ergebnissen wie die oben gezeigte Betrachtung, mit nun folgendem expliziten Ausdruck für die Dämpfungsrate

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3} |\langle e|\mu|g\rangle|^2. \quad (2.34)$$

Das Einsetzen der Polarisierbarkeit aus Gleichung 2.33 in die Gleichungen 2.25 und 2.28 führt zu Termen für das optische Fallenpotential und der Streurrate von

$$U_{\text{dip}} = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I \quad (2.35)$$

und

$$\Gamma_{\text{streu}} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar \omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I. \quad (2.36)$$

Obgleich wir hier an fernverstimmtten optischen Dipolfallenpotentialen interessiert sind, um die Streurrate Γ_{streu} niedrig zu halten, ist die Verstimmung von der Atomresonanz klein im Vergleich zu den optischen Frequenzen ω_0 , so dass die Gleichungen 2.35 und 2.36 durch Anwendung der *Rotating Wave Approximation* und Einführung der Verstimmung $\Delta = \omega - \omega_0$ weiter vereinfacht werden können:

$$U_{\text{dip}} = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta} \right) I \quad (2.37)$$

$$\Gamma_{\text{streu}} = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I. \quad (2.38)$$

Aus diesen beiden Formeln können die fundamentalen Erkenntnisse über optische Dipolfallen trivial abgelesen werden. So sorgt eine Blauverstimmung des Lichts ($\Delta > 0$) für abstoßende Potentiale, während Rotverstimmung ($\Delta < 0$) zu attraktiven Potentialen führt. Weiterhin skaliert die Tiefe des Dipolfallenpotentials mit der Lichtintensität und reziprok mit der Verstimmung Δ , während die Photonenstreurate mit der Lichtintensität und reziprok mit der quadratischen Verstimmung Δ^2 skaliert. Hieraus kann für die Erzeugung einer attraktiven Dipolfalle mit möglichst geringer Photonenstreuung abgeleitet werden, dass idealerweise ein weit rotverstimmtter Laserstrahl von hoher Intensität zum Einsatz kommen sollte. Im hier durchgeführten Experiment wurde dies durch die Verwendung eines CO_2 -Lasers, mit einer Wellenlänge von $\lambda_{\text{CO}_2} \approx 10,6 \mu\text{m}$ und einer Leistung von etwa $P_{\text{max}} = 30 \text{ W}$ realisiert. Hierbei gilt es zu beachten, dass bei diesen hohen Wellenlängen die vollen Ausdrücke aus Gleichung 2.35 und Gleichung 2.36 genutzt werden müssen, da die Rotating Wave Approximation hier nicht ausreichend erfüllt wird.

Obwohl die Ergebnisse aus der oben besprochenen semiklassischen Betrachtung für die hier verwendeten Alkaliatome bereits zu guten Übereinstimmungen mit experimentellen Beobachtungen führen, soll hier noch eine kurze quantenmechanische Betrachtung erfolgen. Für weit von der Resonanz verstimmtes Laserlicht kann der Einfluss des Lichtfeldes auf die Atome als quasistatische Störung angesehen werden. Mit einem Wechselwirkungshamiltonian der Form $H_i = -\mu E$ ergibt sich im Falle eines Zwei-Niveau-Systems mit Störungstheorie zweiter Ordnung eine Verschiebung der Energielevel von

$$\Delta E_i = \sum_{j \neq i} \frac{|\langle j | H_i | i \rangle|^2}{\epsilon_i - \epsilon_j} \quad (2.39)$$

mit den ungestörten Energieniveaus ϵ_i und ϵ_j . Das Einsetzen des Wechselwirkungshamiltonians führt dann zu

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle \uparrow | \mu | \downarrow \rangle|^2}{\Delta} |E|^2 = \pm \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} I \quad (2.40)$$

mit den beiden Niveaus $|\downarrow\rangle$ und $|\uparrow\rangle$ des Zwei-Niveau-Systems und der Dämpfungsrate aus Gleichung 2.34. Diese Verschiebung der Energieniveaus wird als AC-Stark-Effekt oder auch als optischer Stark-Effekt bezeichnet. Die Verschiebung des unteren Niveaus des Zwei-Niveau-Systems entspricht genau dem in Gleichung 2.35 semiklassisch bestimmten Dipolpotential. Aufgrund der weiten Verstimmung des Lasers und der folgenden niedrigen Sättigung des Übergangs befindet sich das System zumeist im Grundzustand, so dass dessen Energieverschiebung als Ursache für die wirkende Kraft interpretiert werden kann.

Für Mehrniveausysteme, deren Betrachtung für das Dipolfallenpotential für Atome im Allgemeinen nötig ist, müssen die Beiträge der einzelnen angeregten Niveaus für die Verschiebung des Grundzustands mit einbezogen werden. Eine detaillierte Aufarbeitung

findet sich in [52], auf deren Wiedergabe an dieser Stelle verzichtet wird, da die entstehenden Korrekturen für die hier experimentell verwendeten Rubidiumatome mit dem Verhältnis von Feinstrukturaufspaltung und Lichtverstimmung skalieren. Die Frequenz des verwendeten CO_2 -Lasers zur Erzeugung des Dipolfallenpotentials ist dabei sehr weit zu den atomaren Übergängen verstimmt, weshalb die entstehende Korrektur für ein solches System vernachlässigbar wird.

Evaporationskühlung

Wie aus der bisherigen Betrachtung des optischen Dipolfallenpotentials ersichtlich wurde, handelt es sich bei der Dipolfallenkraft um eine konservative Kraft, die im Vergleich zur magneto-optischen Falle keine aktive Kühlung des Atomensembles erlaubt. Ein Ausweg, welcher eine weitere Absenkung der Ensembletemperatur zum Erreichen der kritischen Temperatur ermöglicht, ist die sogenannte Evaporations- oder auch Verdampfungskühlung. Wie der Name bereits impliziert, basiert dieses Kühlverfahren, ähnlich dem Abkühlen heißer Flüssigkeiten, auf der Kombination des Entferns der schnellsten Atome des Ensembles und anschließender Rethermalisierung.

Im konkreten Fall der optischen Dipolfalle findet ein geringer natürlicher Verlust der schnellsten Atome des Ensembles aufgrund der beschränkten Potentialtiefe statt. Da diese sogenannte natürliche Evaporation nicht für das Erreichen von T_c ausreicht, wird eine forcierte Evaporation durch stetiges Absenken der Laserleistung herbeigeführt, was zu einer stetigen Verringerung der Falltiefe führt. Eine schnelle Rethermalisierung wird dabei durch hohe Teilchendichten erreicht, welche zum einen durch das anfängliche Laden einer hohen Atomzahl begünstigt wird, was aufgrund der hohen Verluste bei der Evaporationskühlung sowieso unabdingbar ist, sowie zum anderen durch die starke Einschnürung der Atome durch einen engen Fokus des erzeugenden Dipolfallenlaserstrahls [54, 55]. Aus theoretischen Überlegungen kann gezeigt werden, dass eine optimale Kühlung für ein festes Verhältnis zwischen thermischer Energie und Falltiefe erreicht wird [56]. Im hier durchgeführten Experiment wurde die zeitliche Abschwächung des Fallenpotentials jedoch experimentell ermittelt, was zu hinreichend guten Kühlleistungen führt.

Experimentell wurde die Verdampfungskühlung zum ersten mal 1987 in magnetischen Fallen demonstriert [57]. Eine Demonstration in optischen Dipolfallenpotentialen folgte in der Mitte der 1990er Jahre [49, 58]. Mittels der Kombination aus Vorkühlung durch eine magneto-optische Falle und der Evaporationskühlung war es im Rahmen dieser Arbeit regelmäßig möglich ein atomares Bose-Einstein Kondensat von typischerweise etwa 30 000 Atomen zu präparieren.

2.2 Periodische Gitterpotentiale

Optische Gitterpotentiale sind ein wichtiger Baustein zur Realisierung unterschiedlichster Systeme mit ultrakalten Atomen. Da sie auch zur Realisation des Quanten-Rabi Modells, wie in dieser Arbeit durchgeführt, eine wichtige Rolle spielen, soll hier nun noch auf die

zugrundeliegenden theoretischen Mechanismen eines eindimensionalen optischen Gitters eingegangen werden. Des Weiteren wird ein Schema zur Erstellung von Mehrphotonengittern beschrieben, welches die Realisierung von optischen Gittern höherer Periodizität im Vergleich zu dem mit einem üblichen Stehwelligitter realisierten periodischen Potentials bei Verwendung des gleichen Gitterlasersystems von identischer Wellenlänge ermöglicht [35].

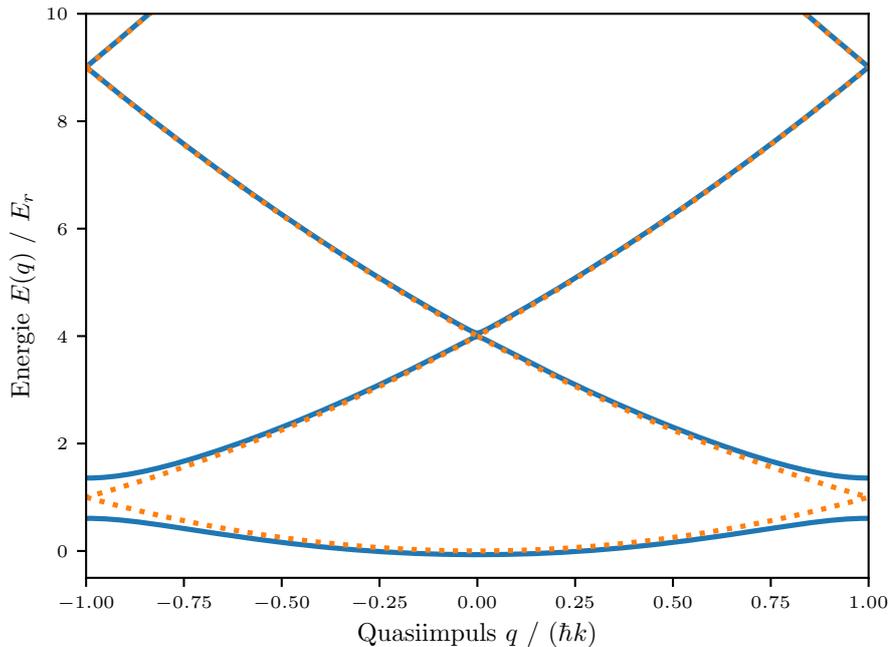


Abbildung 2.3: Dispersionsrelation kalter Atome in einem Zwei-Photonen-Gitter. Die durchgezogene blaue Linie zeigt die Dispersionsrelation unter dem Einfluss des Gitters, während die gestrichelte orange Linie die Dispersionsrelation für die freien Atome ohne Einfluss des Gitterpotentials zeigt. An die Stelle der Kreuzung der Energiebänder bei $q = \pm 1$ tritt durch die Kopplung des Gitters eine vermiedene Kreuzung.

Zwei-Photonen-Gitter

Zunächst soll hier der einfachste Fall eines Zwei-Photonen-Gitters besprochen werden, welches durch die Überlagerung zweier Laserstrahlen mit gleicher Frequenz ω_L und paralleler Polarisation erzeugt werden kann [59]. Dies ist die übliche Realisierung eines periodischen Potentials für Atome in verstimmtten, optischen Stehwelligfeldern. Für die weitere Betrachtung wird die Annahme getroffen, dass die Ausdehnung der Laserstrahlen groß genug ist, dass sie für die Potentiale am Ort der Atome näherungsweise von zwei homogenen ebenen Wellen beschrieben werden können:

$$\vec{E}_{\pm}(x, t) = E_{\pm} \vec{e}_{\pm} \cos(\omega t \pm kx) \quad (2.41)$$

mit dem Wellenvektor $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ der verwendeten Laserstrahlen. Aufgrund des Superpositionsprinzips überlagern sich die Felder der beiden Strahlen als Summe, was zu einer Modulation der Intensität im zeitlichen Mittel führt:

$$\begin{aligned} I(x) &= c\epsilon_0 \left\langle \left(\vec{E}_+ + \vec{E}_- \right)^2 \right\rangle_t = c\epsilon_0 \left\langle \vec{E}_+^2 + \vec{E}_-^2 + 2\vec{E}_+ \vec{E}_- \right\rangle_t \\ &= I_+ + I_- + 2\vec{e}_+ \vec{e}_- \sqrt{I_+ I_-} \cos^2(kx). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Es entsteht somit durch Interferenz der beiden Strahlen eine Stehwelle mit einer Periode von $\frac{\lambda}{2}$. Entsprechend der Beschreibung im vorhergehenden Abschnitt, sorgt ein von einem atomaren Übergang rot verstimmt Laser aufgrund der Dipolkraft für attraktive Potentialtöpfe an den Stellen hoher Lichtintensität, was für die Atome ein räumlich moduliertes Gitterpotential der Form

$$V(x) = \frac{\sqrt{I_+ I_-}}{2} \cos(2kx) = \frac{V_0}{2} \cos(2kx) = \frac{V_0}{4} \left(e^{2ikx} + e^{-2ikx} \right) \quad (2.43)$$

zur Folge hat. Typischerweise wird die Tiefe eines solchen Gitters in Rückstoßenergien

$$E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (2.44)$$

angegeben [60].

Die Bezeichnung als Zwei-Photonen-Gitter wird insbesondere klar, wenn der Wechselwirkungsprozess zwischen Lichtfeld und Atomen im Teilchenbild betrachtet wird, in welchem die Beugung an einem solchen optischen Gitter als virtueller Zwei-Photonen-Prozess interpretiert wird. Dabei wird ein Photon aus einem der Strahlen absorbiert und durch stimulierte Emission in den anderen Strahl abgegeben, was einen Rückstoß des Atoms um zwei Photonimpulse zur Folge hat [61].

Die Dynamik eines Bose-Einstein Kondensats im Einfluss eines solchen eindimensionalen periodischen Gitters kann anhand Gleichung 2.19 unter dem Einfluss des Potentials aus Gleichung 2.43 bestimmt werden, wobei im Folgenden die interatomare Wechselwirkung vernachlässigt wird, so dass sich das Problem auf die Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung reduziert:

$$E\psi(x) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \right) \psi(x). \quad (2.45)$$

Das periodische Potential legt die Verwendung des Blochansatzes [62] nahe:

$$\psi(x) = e^{i\frac{qx}{\hbar}} u_n(x) \quad (2.46)$$

mit dem Quasiimpuls q und einer periodischen Funktion $u_n(x)$ mit identischer Periode zur Periodizität von $V(x)$ und dem Bandindex n . Nach dem Einsetzen dieses Ansatzes in die

Gleichung 2.45 kann $u_n(x)$ in seine Fourierkomponenten der Form

$$u_n(x) = \sum_l a_l e^{2ilkx} \quad (2.47)$$

zerlegt werden, mit den Fourierkoeffizienten a_l . Eingesetzt in Gleichung 2.45 findet sich ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem

$$i\hbar \dot{a}_l = \frac{1}{2m} (2l\hbar k + q)^2 a_l + \frac{V}{4} (a_{l-1} + a_{l+1}). \quad (2.48)$$

Es ist zweckmäßig, die Gleichung in Matrixform darzustellen

$$E(q) |\psi\rangle = H |\psi\rangle, \quad (2.49)$$

wobei die Koeffizienten aus Gleichung 2.48 abgelesen werden können:

$$H_{l,l} = \frac{(2l\hbar k + q)^2}{2m} \quad (2.50)$$

$$H_{l,l+1} = \frac{V}{4} \quad (2.51)$$

und allen restlichen Einträgen 0 in der Basis $\{|2l\hbar k\rangle\}$ mit $l = -N, \dots, N$.

Die stationären Lösungen dieser Gleichung bezeichnet man als die Dispersionsrelation. Abbildung 2.3 zeigt beispielhaft die Dispersionsrelation eines solchen Zwei-Photonen-Gitters sowie der freien Atome ohne periodisches Gitterpotential. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Gitterpotential an der Stelle der Kreuzung der beiden Parabeln der freien Atome zu einer vermiedenen Kreuzung führt, deren Energieaufspaltung von der Tiefe des Potentials V abhängt. Die gewählte Darstellung zeigt nur eine einzelne Brillouin-Zone der Dispersionsrelation und wird als reduziertes Zonenschema bezeichnet [63].

Entsprechend der Behandlung des statischen Falles kann auch die Dynamik des Systems anhand der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung bestimmt werden (Gleichung 2.20). Auch hier reduziert sich das Problem im Falle vernachlässigbarer Atom-Atom Wechselwirkung auf die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung und erlaubt somit die Anwendung des Bloch-Theorems, wie es schon zuvor verwendet wurde. Es ergibt sich also, wie schon in Gleichung 2.49, in Matrixdarstellung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (2.52)$$

Unter der Annahme, dass die Energieaufspaltung an der vermiedenen Kreuzung ΔE klein ist, gegenüber den Abständen zu den nächsthöheren Bändern, kann die Dynamik auf die Dynamik der ersten beiden Energiebänder reduziert werden. Diese entspricht dabei der Dynamik eines

gekoppelten Zwei-Niveau-Systems der Form:

$$H_{\text{Qubit}} = \begin{pmatrix} E & V/4 \\ V/4 & E \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

mit dem in Gleichung 2.44 definierten Photonenrückstoß. Analog zu den von Rabi in [2] angestellten Überlegungen folgt für ein Zwei-Niveau-System dieser Art eine harmonische Zeitentwicklung, deren Frequenz, die sogenannte Rabi-Frequenz ω_{Rabi} , über die Energieaufspaltung an der vermiedenen Kreuzung ΔE gegeben ist:

$$\omega_{\text{Rabi}} = \frac{\Delta E}{\hbar}. \quad (2.54)$$

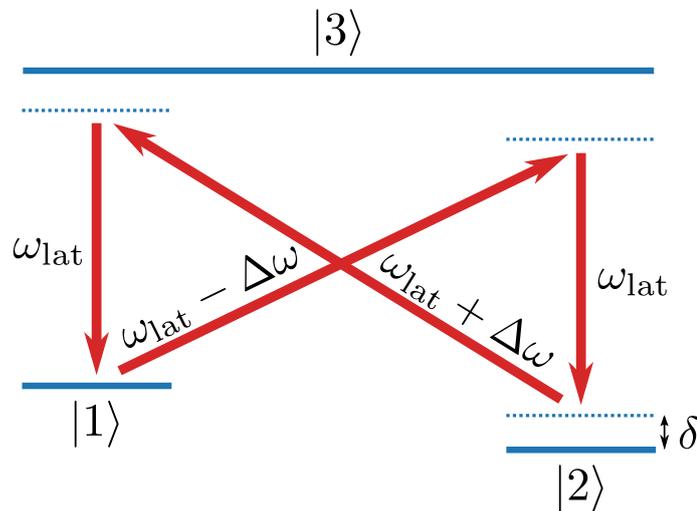


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung zur Erzeugung eines Vier-Photonen-Gitters mit der Periode $\frac{\lambda}{4}$ mittels verstimmt virtueller Übergänge. Die Atome werden von einer Seite mit einem Laserstrahl der Frequenz ω_{lat} beschienen. Von der anderen Seite werden zwei überlagerte Strahlen der Frequenzen $\omega_{\text{lat}} \pm \Delta\omega$ eingestrahlt. Auf diese Weise wird ein geschlossener Zyklus von zwei Absorptions- und zwei stimulierten Emissionsprozessen erzeugt, der aufgrund der großen Verstimnungen zu einer starken Unterdrückung der Zwei-Photonen-Prozesse führt.

Vier-Photonen-Gitter

Um optische Gitter von kürzerer räumlicher Periode herzustellen, ist neben der Verwendung einer anderen Lichtwellenlänge zur Erzeugung des Potentials auch ein virtueller Prozess höherer Ordnung denkbar [35]. Ein solcher Prozess erlaubt somit nicht nur die Verwendung des gleichen optischen Aufbaus zur Erzeugung eines Gitters von geringerer räumlicher Periode,

sondern erlaubt auch die sehr einfache Überlagerung und Kontrolle beider Gittersysteme im gleichen Experiment. Entlang der vorhergehenden Beschreibung des Beugungsprozesses am Zwei-Photonen-Gitter besteht der virtuelle Prozess hier aus der Absorption zweier Photonen aus einem der Laserstrahlen und der stimulierten Emission von zwei Photonen in den anderen Strahl, was zu einem Impulsübertrag von vier Photonen führt und damit um einen Faktor zwei oberhalb des entsprechenden Prozesses in einem üblichen Stehwellengitter. Mit solch einem Lichtfeld wird ein periodisches Lichtpotential der Periode $\frac{\lambda}{4}$ für die Atome realisiert. Um einen solchen Prozess effektiv nutzen zu können, bedarf es jedoch der Unterdrückung der sonst überwiegenden Zwei-Photonen-Prozesse.

Der hier verwendete Prozess ist in Abbildung 2.4 gezeigt. Durch die Verwendung dreier unterschiedlicher Laserwellenlängen ist es möglich einen geschlossenen Vier-Photonen-Prozess auf der Basis von Ramanübergängen zu erzeugen, deren Verstimmungen zu den einzelnen Niveaus zur effektiven Unterdrückung der Zwei-Photonen-Prozesse führt und das Atom im ursprünglichen Zustand zurücklässt.

Eine detaillierte theoretische Betrachtung des verwendeten Prozesses ist unter anderem in [64] anhand der Wechselwirkung der ultrakalten Atome unter Vernachlässigung der Atom-Atom Wechselwirkung dargelegt und führt unter Analyse in zeitabhängiger Störungstheorie zu dem bereits oben postulierten Gitter der räumlichen Periode $\frac{\lambda}{4}$.

Im hier durchgeführten Experiment kommt es zu keiner Mischung des Zwei- und des Vier-Photonen-Gitters, so dass die Beschreibung in Abschnitt 2.2 für die Betrachtung eines Gitters der Form $\frac{\lambda}{4}$ analog gilt. Die sich ergebende Dispersionsrelation ist in Abbildung 2.5 wieder im reduzierten Zonenschema dargestellt. Die vermiedene Kreuzung tritt in diesem Fall entsprechend den Erwartungen im Vergleich zum Zwei-Photonen-Gitter für die nächsthöheren Bänder auf, so dass die vermiedene Kreuzung bei einem Quasiimpuls von $q = 0$ entsteht. Im hier durchgeführten Experiment werden nur Quasiimpulszustände mit einem Quasiimpuls von $\pm 2\hbar k$ präpariert, so dass das reduzierte Zonenschema vereinfacht nur für die auftretenden Energiebänder über die gesamte für das Experiment relevante Brillouin-Zone dargestellt wurde. Die Verwendung eines solchen Vier-Photonen-Gitters erlaubt die einfache Präparation der Atome an der vermiedenen Kreuzung mittels zwei-photonischer Prozesse.

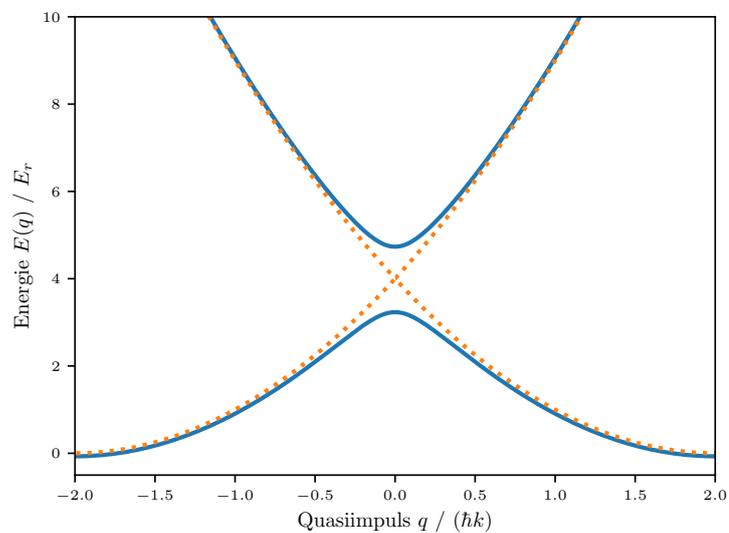


Abbildung 2.5: Dispersionsrelation kalter Atome in einem Vier-Photonen-Gitterpotential, reduziert auf die im Experiment relevanten Energiebänder. Die durchgezogene blaue Linie zeigt die Dispersionsrelation unter dem Einfluss des Gitters, während die gestrichelte orange Linie die Dispersionsrelation für die freien Atome ohne Einfluss des Gitterpotentials zeigt. Die vermiedene Kreuzung tritt bei einem Quasiimpuls von $q = 0$ auf.

Simulation des Quanten-Rabi Modells

In diesem Kapitel werden die theoretischen Grundlagen des Quanten-Rabi Modells, speziell mit Bezug auf die zu erwartende Dynamik in tiefer starker Kopplung behandelt. Im Anschluss wird eine mögliche Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells in tiefer starker Kopplung anhand des Hamiltonians des für die Experimente hier zur Verfügung stehenden atomaren Systems hergeleitet und Terme für die Energieaufspaltung des in der Simulation realisierten Zwei-Niveau-Systems und der Kopplungsstärke aufgestellt.

3.1 Quanten-Rabi Modell

Das Rabi Modell [1] ist eines der einfachsten möglichen Modelle, welches die Wechselwirkung eines Zwei-Niveau-Systems mit einem klassischen Lichtfeld beschreibt. Im Jahr 1963 beschrieben Jaynes und Cummings eine Variante dieses Modells, welches nun die Wechselwirkung des Zwei-Niveau-Systems mit einem quantifizierten Lichtfeld beschreibt [7], jedoch unter der Einschränkung der Drehwellennäherung, welche die auf den ersten Blick nicht energieerhaltenden, schnelldrehenden Wechselwirkungen aus dem Modell entfernt:

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^\dagger) \quad (3.1)$$

mit den Leiteroperatoren des elektromagnetischen Feldes \hat{a} und \hat{a}^\dagger , den Auf- und Absteigeoperatoren des Zwei-Niveau-Systems $\hat{\sigma}_+$ und $\hat{\sigma}_-$, der Frequenz des Lichtfelds ω , der Zwei-Niveau-Übergangsfrequenz ω_q , der Paulimatrix $\hat{\sigma}_z$ und der Kopplung g . Hierbei ist zu erkennen, dass die einzigen möglichen Übergänge des Systems die Anregung des Zwei-Niveau-Systems bei gleichzeitiger Abregung des Lichtfelds und der umgekehrte Prozess sind. Trotz der Einfachheit des Modells lassen sich eine Vielzahl von Effekten, wie die Rabi-Oszillationen und der Zusammenbruch und das Wiederaufleben (englisch *Collapse and Revival*) eines gegebenen Zustands, mit dessen Hilfe erklären.

Das vollständige Modell, vor Anwendung der Drehwellennäherung, wird oft als das Quanten-

Rabi Modell (*QRM*) bezeichnet, fristete aber im Vergleich zum in Gleichung 3.1 gezeigten Jaynes-Cummings Modell lange ein Nischendasein, nicht zuletzt, da die für die Drehwellen-näherung benötigte Näherung $g \ll \omega$ in den meisten physikalischen Systemen gut erfüllt ist. Weiterhin galt das vollständige Quanten-Rabi Modell für lange Zeit als nicht integrierbar [65]. Im Jahr 2011 konnte jedoch eine analytische Lösung des vollständigen Modells auf der Basis der \mathbb{Z}_2 -Symmetrie des Systems aufgrund der Paritätserhaltung des Modells aufgezeigt werden [14]. Bereits kurze Zeit später wurden weitere analytische Lösungsansätze des Modells gefunden [66, 67]. Der vollständige Quanten-Rabi Hamiltonian lautet dabei

$$\hat{H}_{\text{QRM}} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar g\hat{\sigma}_x(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.2)$$

wobei $\hat{\sigma}_x$ hier die entsprechende Paulimatrix bezeichnet. Solange die Näherung kleiner Kopplungsstärken eingehalten ist, ist auch Gleichung 3.1 eine gute Näherung für Gleichung 3.2. Bei steigender Kopplungsstärke nimmt jedoch der Einfluss der vernachlässigten Terme zu, so dass das vollständige Quanten-Rabi Modell betrachtet werden muss.

3.1.1 Herleitung des Quanten-Rabi Hamiltonians und des Jaynes-Cummings Hamiltonians

Eine vollständige Herleitung von Gleichungen 3.1 und 3.2 kann unter anderem in [68] gefunden werden und soll hier in verkürzter Form wiedergegeben werden.

Als Grundannahme dient die Wechselwirkung eines Zwei-Niveau-Systems mit einer einzelnen Feldmode, wie sie beispielsweise in Mikroresonatoren im Labor erzeugt werden könnte. Somit ergibt sich für das elektrische Feld dieser Mode

$$\hat{E} = \vec{e} \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \sin(kz) \quad (3.3)$$

hierbei bezeichnet \vec{e} den Vektor der Polarisationsrichtung, ω die Frequenz der Mode, V das effektive Volumen des Resonators, und k den Wellenvektor. Zur Untersuchung der Wechselwirkung des Zwei-Niveau-Systems mit diesem Feld bietet es sich an, in die Dirac-Darstellung zu wechseln, deren Wechselwirkungsterm mittels des Dipoloperators \hat{d} geschrieben werden kann:

$$\hat{H}_1 = -\hat{d} \cdot \hat{E} = \hat{d}\kappa (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.4)$$

mit

$$\kappa = - \left(\frac{\hbar\omega}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \sin(kz) \quad (3.5)$$

und

$$\hat{d} = \hat{d} \cdot \vec{e}. \quad (3.6)$$

Mit den bereits erwähnten Auf- und Absteigeoperatoren des Zwei-Niveau-Systems $\hat{\sigma}_+ = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ und $\hat{\sigma}_- = |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$, sowie dem Inversionsoperator $\sigma_z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$.

Aus Paritätsüberlegungen ist zu sehen, dass die Hauptdiagonalelemente des Dipoloperators \hat{d} verschwinden müssen, so dass dieser in Form der atomaren Auf- und Absteigeoperatoren geschrieben werden kann:

$$\hat{d} = d (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (3.7)$$

Somit können wir den Wechselwirkungsteil des Hamiltonians (Gleichung 3.4) umschreiben zu

$$\hat{H}_1 = \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.8)$$

mit $g = \frac{d\omega}{\hbar}$. Der Anteil des Zwei-Niveau-Systems am freien Hamiltonian $\hat{H}_0 = \hat{H}_{\text{Feld}} + \hat{H}_{\text{Atom}}$ kann geschrieben werden als

$$\hat{H}_{\text{Atom}} = \frac{1}{2} \hbar \omega_q \sigma_z \quad (3.9)$$

mit der Gesamtenergieaufspaltung $\hbar \omega_q$. Der Anteil des Feldes am freien Hamiltonian kann geschrieben werden als

$$\hat{H}_{\text{Feld}} = \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}. \quad (3.10)$$

Somit ergibt sich der gesamte Hamiltonian zu

$$\hat{H}_{\text{QRM}} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (3.11)$$

$$= \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar \omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.12)$$

$$= \hbar \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar \omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g \hat{\sigma}_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.13)$$

was dem Quanten-Rabi Hamiltonian wie in Gleichung 3.2 gezeigt entspricht, wobei die Paulimatrix $\hat{\sigma}_x = (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$ eingeführt wurde.

Um aus Gleichung 3.13 den Jaynes-Cummings Hamiltonian abzuleiten, muss nur noch die Drehwellennäherung durchgeführt werden. Hierzu ist es von Nutzen sich die Zeitentwicklung der Operatoren \hat{a} , \hat{a}^\dagger , $\hat{\sigma}_+$ und $\hat{\sigma}_-$ anzuschauen:

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0) e^{-i\omega t} \quad (3.14)$$

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0) e^{i\omega t} \quad (3.15)$$

$$\hat{\sigma}_+(t) = \hat{\sigma}_+(0) e^{i\omega_q t} \quad (3.16)$$

$$\hat{\sigma}_-(t) = \hat{\sigma}_-(0) e^{-i\omega_q t}. \quad (3.17)$$

Daraus ergeben sich für die in Gleichung 3.13 auftretenden Terme folgende zeitlichen

Abhängigkeiten:

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a} \propto e^{i(\omega_q - \omega)t} \quad (3.18)$$

$$\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger \propto e^{i(\omega_q + \omega)t} \quad (3.19)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a} \propto e^{-i(\omega_q + \omega)t} \quad (3.20)$$

$$\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \propto e^{-i(\omega_q - \omega)t}. \quad (3.21)$$

Wir finden somit zwei langsam variierende und zwei schnell variierende Terme vor, welche den nicht energieerhaltenden Termen $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ und $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ entsprechen. Durch Vernachlässigung dieser schnell rotierenden Terme erhalten wir somit den bereits oben dargestellten Jaynes-Cummings Hamiltonian:

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + \hbar g \left(\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger \right). \quad (3.22)$$

3.1.2 Kopplungsbereiche des Quanten-Rabi Modells

Sehr weit ab der Resonanzbedingung und im Fall von sehr starker Kopplung ist die Näherung des Jaynes-Cummings Hamiltonians nicht erfüllt, so dass immer stärkere Abweichungen in den Observablen zwischen Gleichung 3.1 und Gleichung 3.2 deutlich werden. Dies soll nun anhand einiger Beispiele demonstriert werden. Ab Kopplungsstärken $g > \frac{\omega}{10}$ wird häufig von ultrastarker Kopplung gesprochen, während Kopplungsstärken $g \geq \omega$ als tiefe starke Kopplung oder auch *Deep Strong Coupling* bezeichnet werden. Dieser Kopplungsbereich, welcher im weiteren Verlauf der Arbeit experimentell erreicht werden soll, wird nun beleuchtet.

Starke und ultrastarke Kopplung

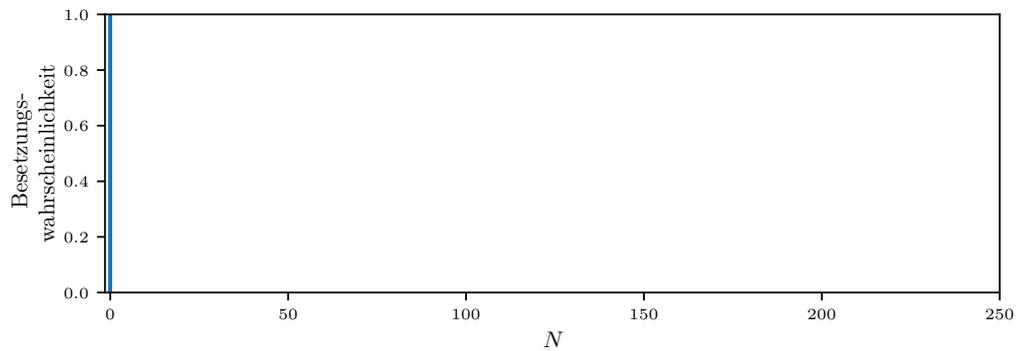
Zunächst stellt sich die Frage nach der Klassifizierung einzelner Kopplungsbereiche, wie sie im vorherigen Absatz proklamiert wurden. Reguläre Licht-Materie-Kopplung findet normalerweise bei schwacher Kopplung statt, bei der die Näherung des Jaynes-Cummings Modells sehr gut erfüllt ist und die Verluste über die Kopplungsstärke dominieren. Der erste mit einer eigenen Bezeichnung versehene Kopplungsbereich oberhalb der schwachen Kopplung ist die sogenannte starke Kopplung, deren Grenze durch das Erreichen von Kopplungsstärken, welche über die Dekohärenzeffekte hinausgehen, erreicht ist. Im Vergleich zur schwachen Kopplung kommt es nun zu einem periodischen Austausch zwischen Zwei-Niveau-System und der Feldmode mit einer durch die Kopplungsstärke bestimmten Oszillationsfrequenz, welcher als Vakuum-Rabi-Oszillation bezeichnet wird [69].

Bei weiterer Erhöhung der Kopplungsstärke erlangen die schnell rotierenden Terme des Quanten-Rabi Hamiltonians zusehends an Bedeutung, so dass ein solches System nicht mehr adäquat mittels des Jaynes-Cummings Modells beschrieben werden kann. Dieser Bereich wird zumeist als ultrastarke Kopplung bezeichnet; als untere Grenze wird hier für die relative Kopplungsstärke $\frac{g}{\omega}$ zumeist $\frac{g}{\omega} \geq 0.1$ genannt, wobei der Übergang zwischen starker Kopplung und ultrastarker Kopplung kontinuierlich verläuft [69]. An der unteren Grenze der ultrastarken

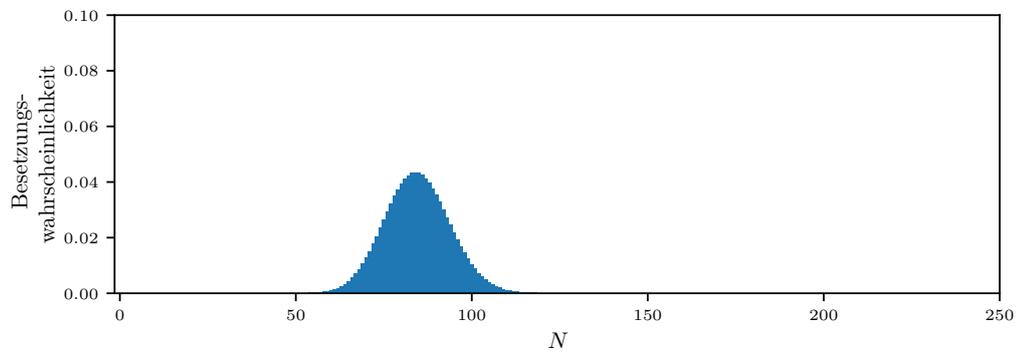
Kopplung können diese Effekte noch mittels Störungstheorie behandelt werden (dieser Bereich wird auch als *perturbative Ultra Strong Coupling*, bezeichnet). Diese Behandlung führt zum sogenannten Bloch-Siegert Hamiltonian, welcher die entstehende Bloch-Siegert Verschiebung berücksichtigt [19, 25]. Als Grenze in den nicht mehr durch Störungstheorie beschriebenen Bereich der ultrastarken Kopplung gibt [25] die ersten Kreuzungspunkte im Eigenenergiespektrum des Quanten-Rabi Hamiltonian an, welche auch als erste Judd'sche Punkte bezeichnet werden.

Tiefe starke Kopplung

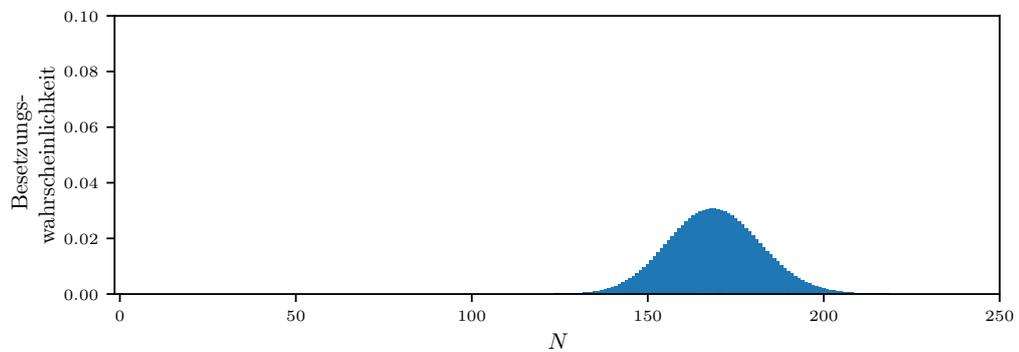
Im Gegensatz zur ultrastarken Kopplung findet sich für die so bezeichnete tiefe starke Kopplung ähnlich wie schon bei der starken Kopplung eine natürliche Grenze. Diese ist erreicht, sobald die Kopplungsstärke über die anderen Energieterme dominiert und damit die Triebfeder der Systemdynamik bildet. Für die relative Kopplungsstärke gilt demnach $\frac{g}{\omega} > 1$. Auch in diesem Bereich kann wieder unterschieden werden in einen nicht-perturbativen und einen perturbativen Bereich. Dabei muss jedoch beachtet werden, dass die Störung hier nicht die Kopplung ist, sondern im genauen Gegenteil der Energieterm des Zwei-Niveau-Systems nur noch eine Störung der Kopplungsenergie darstellt. Somit schließt sich die nicht-perturbative tiefe starke Kopplung an die nicht-perturbative ultrastarke Kopplung an. Auch hier ist der Übergang zwischen den Bereichen fließend, während der Übergang in die perturbative tiefe starke Kopplung durch seine entarteten Eigenzustände gekennzeichnet ist. Die im Rahmen der Arbeit durchgeführten Experimente fanden für relative Kopplungsstärken $\frac{g}{\omega} > 4$ statt, so dass alle gezeigten Ergebnisse im Bereich der perturbativen tiefen starken Kopplung liegen. Das charakteristischste Merkmal neben dem Auftreten entarteter Eigenzustände ist das Auftreten oszillierender Wellenpakete in den Nummernzuständen der Feldmode, die selbst für anfängliche Zustände mit einer Vakuumfeldmode und dem Grundzustand des Zwei-Niveau-Systems ($|N = 0, \downarrow\rangle$) auftauchen. Die zeitliche Entwicklung der Besetzungswahrscheinlichkeit der Nummernzustände ist beispielhaft für ein System in perturbativer tiefer starker Kopplung und anfänglichem Zustand $|N = 0, \downarrow\rangle$ in Abbildung 3.1 gezeigt. Es kommt zu einem beobachtbaren, steilen Anstieg der gemessenen Anregung des Feldes $\langle \hat{N} \rangle$. Zusätzlich sorgt dieser oszillative Charakter für den Zusammenbruch und das Wiederaufleben des anfänglichen Zustands, der im Gegensatz zur starken Kopplung ein inhärentes Merkmal des Kopplungsbereichs ist und keiner großen kohärenten anfänglichen Besetzung der Feldmode bedarf [25]. Abbildung 3.2 zeigt die erwartete zeitliche Entwicklung der mittleren bosonischen Anregung $\langle \hat{N} \rangle$ für ein System, welches im Zustand $|N = 0, \downarrow\rangle$ präpariert wurde. Wie bereits aus Abbildung 3.1 ersichtlich ist, kommt es zu dem beschriebenen steilen Anstieg der mittleren Feldbesetzung, welche durch die extreme Kopplung getrieben ist.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 3.1: Erwartete Besetzungswahrscheinlichkeiten der Nummernzustände der Feldmode in der zeitlichen Entwicklung. Das System ist anfänglich im Zustand $|N = 0, \downarrow\rangle$ präpariert, bei einer Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 0$ Hz und einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6.5$. Nach (a) $t = 0$, (b) $t = \frac{\pi}{2\omega}$ und (c) $t = \frac{\pi}{\omega}$. In der perturbativen tiefen starken Kopplung des Quanten-Rabi Modells kommt es zum Aufbau charakteristischer oszillierender Wellenpakete in den Nummernzuständen.

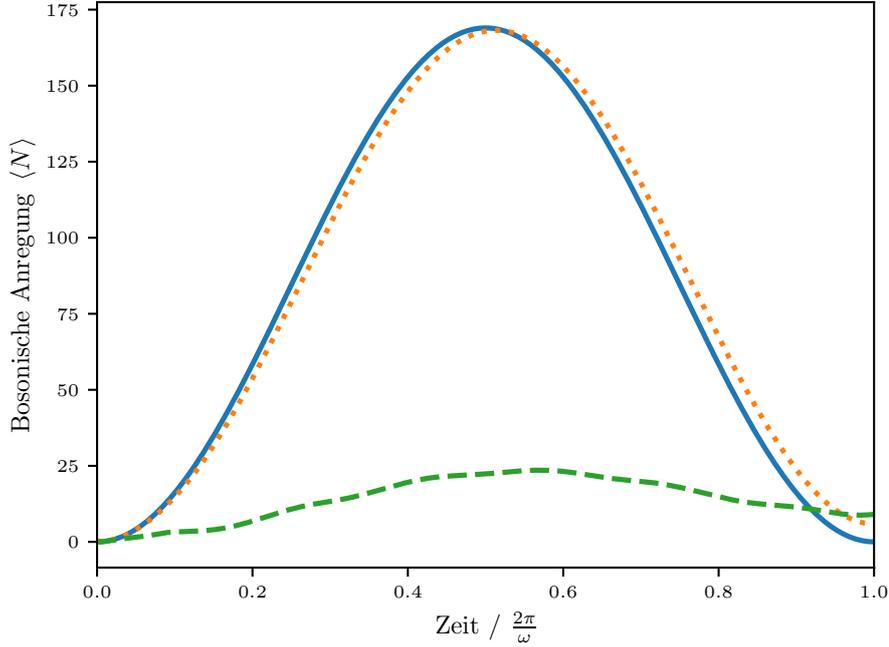


Abbildung 3.2: Erwartete Dynamik der mittleren bosonischen Anregung $\langle \hat{N} \rangle$. Das System ist anfänglich im Zustand $|N = 0, \downarrow\rangle$ präpariert bei einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6.5$. Die blaue, durchgezogene Linie entspricht einer Zwei-Niveau-Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 0$ Hz, die gepunktete, orange Linie einer Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 1\,000$ Hz und die gestrichelte grüne Linie einer Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 5\,000$ Hz. Der rasche Anstieg der bosonischen Anregungszahl ist ein typisches Merkmal der perturbativen tiefen starken Kopplung. Weiterhin ist zu erkennen, dass die mittlere Anregungszahl im Bereich der dispersiven tiefen starken Kopplung zwar weiterhin weit über den Erwartungswert des Systems in starker Kopplung hinausgeht, jedoch zu einem deutlich weniger steilen Anstieg führt.

Entsprechend der zuvor erwähnten \mathbb{Z}_2 -Symmetrie des Systems zerfällt die Dynamik des Systems bei anfänglicher Präparation eines Zustands mit fixer Parität $\langle \Pi \rangle$ in zwei vollständig getrennte Bereiche des Hilbertraums, sogenannte Paritätsketten,

$$|N = 0, \downarrow\rangle \leftrightarrow |N = 1, \uparrow\rangle \leftrightarrow |N = 2, \downarrow\rangle \leftrightarrow |N = 3, \uparrow\rangle \leftrightarrow \dots \quad (3.23)$$

$$|N = 0, \uparrow\rangle \leftrightarrow |N = 1, \downarrow\rangle \leftrightarrow |N = 2, \uparrow\rangle \leftrightarrow |N = 3, \downarrow\rangle \leftrightarrow \dots \quad (3.24)$$

wobei jeweils zwei Zustände durch die co- und counterrotierenden Terme der Kopplung miteinander verbunden sind [20].

Zur weiteren Klassifizierung des untersuchten Parameterraums wird zunächst der Fall kleiner Zwei-Niveau-Aufspaltungen untersucht, was für Situationen in denen $\frac{g}{\omega_q} \gg 1$ gilt gerechtfertigt scheint. Eine anschauliche Beschreibung lässt sich in diesem Fall durch die hier mögliche sogenannte *slow-qubit Näherung* erreichen, für welche von einem entarteten Zwei-Niveau-System der Form $\omega_q \rightarrow 0$ ausgegangen wird. Diese Näherung erscheint gerechtfertigt,

da der rapide Anstieg der Nummernzustände in diesem Fall den deutlich größten Anteil an der Dynamik des Systems erwarten lässt. Für den Quanten-Rabi Hamiltonian ergibt sich

$$\hat{H}_{\omega_q=0} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a}) + \hbar g \hat{\sigma}_x (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.25)$$

$$= \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger + \frac{g \hat{\sigma}_x}{\omega} \right) \left(\hat{a} + \frac{g \hat{\sigma}_x}{\omega} \right) + \hbar \left(\frac{\omega}{2} - \frac{g^2}{\omega} \right). \quad (3.26)$$

Aus der zweiten Zeile ist ersichtlich, dass der Hamiltonian durch die Einführung von Verschiebungsoperatoren der Form

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}} \quad (3.27)$$

diagonalisiert werden kann, da er diagonal unter den verschobenen Feldoperatoren

$$b = a + \frac{g \hat{\sigma}_x}{\omega} = a + \alpha \quad (3.28)$$

ist. Es ist somit zu sehen, dass die Dynamik des Systems unter den gegebenen Bedingungen durch die Dynamik zweier verschobener harmonischer Oszillatoren beschrieben werden kann. Aus dieser Beschreibung heraus ist es nun auf einfachem Wege möglich, die zeitliche Entwicklung der mittleren Besetzung der Feldmode bei anfänglicher Präparation im Vakuumzustand $|N=0\rangle = |0\rangle$ zu berechnen. Hierzu führen wir die Bezeichnung $\hat{H}(\alpha)$ für einen durch die soeben eingeführten Verschiebungsoperatoren verschobenen Hamiltonian ein.

$$e^{i\hat{H}(\alpha)t/\hbar} |0\rangle = \hat{D}(-\alpha) e^{i\hat{H}(0)t/\hbar} \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (3.29)$$

$$= e^{\frac{i\omega t}{2}} e^{\frac{ig^2 t}{\omega}} \hat{D}(-\alpha) |e^{-i\omega t} \alpha\rangle \quad (3.30)$$

$$= e^{\frac{i\omega t}{2}} e^{\frac{ig^2 t}{\omega}} e^{\Im(|\alpha|^2 e^{i\omega t})} \hat{D}(\alpha(e^{-i\omega t} - 1)) |0\rangle. \quad (3.31)$$

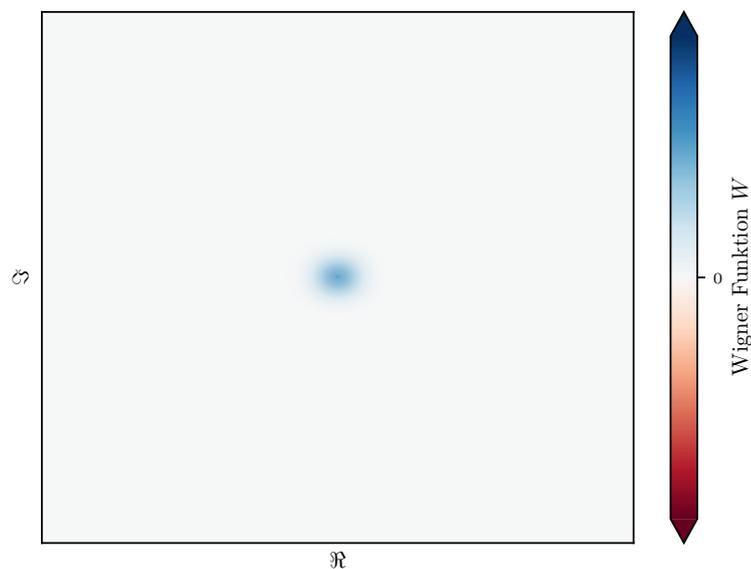
Als Erwartungswert für die mittlere Besetzung der Feldmode $\langle \hat{N} \rangle$ ergibt sich somit

$$\langle \hat{N} \rangle = |\alpha(t)|^2 = 4 |\alpha|^2 \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right) \quad (3.32)$$

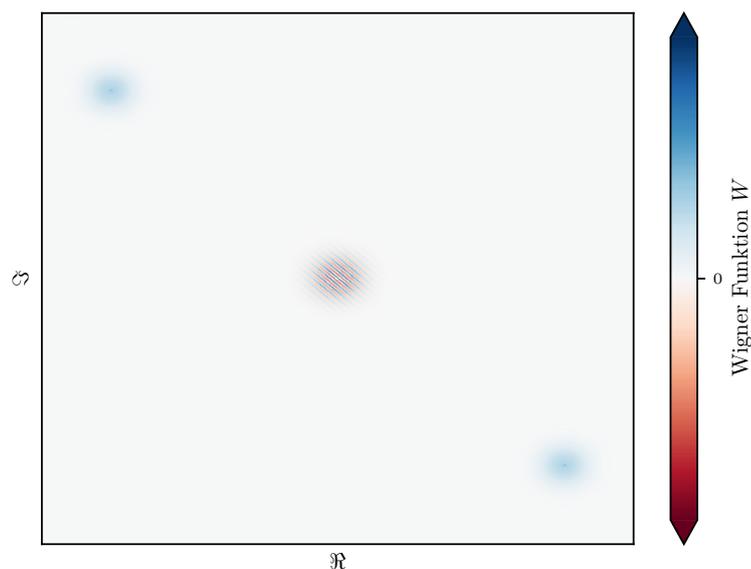
mit $\alpha = \frac{g}{\omega}$. Dies erlaubt es uns, direkt die maximale mittlere Besetzung der Feldmode zu bestimmen

$$N_{\max} = 4 |\alpha|^2 = \frac{4g^2}{\omega^2}. \quad (3.33)$$

Diese Ergebnisse geben einen direkten Einblick in die Dynamik des Systems, dessen Energie hier in der Hauptsache nicht mehr durch den anfänglichen Systemzustand, sondern fast ausschließlich durch die extreme Kopplung gegeben ist.



(a)



(b)

Abbildung 3.3: Wignerfunktionen der zeitlichen Entwicklung des Zustands $|\psi\rangle = |N=0, \downarrow\rangle$ nach Projektion auf den unteren Zustand des Zwei-Niveau-Systems $\langle \downarrow | \psi(t) \rangle$, (a) direkt nach der Präparation des Systems und (b) nach einer Zeitentwicklung von $t = \frac{\pi}{2\omega}$ bei einer relativen Kopplung von $\frac{g}{\omega} = 6.5$ und einer Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems von $\frac{\omega_a}{2\pi} = 0$ Hz. Es ist zu erkennen, dass sich nach der Zeitentwicklung ein Schrödinger Katzenzustand entwickelt hat. Die negativen Anteile an der Wignerfunktion machen deutlich, dass es sich um einen nichtklassischen Zustand handeln muss.

Die Diagonalisierung des Systems durch verschobene harmonische Oszillatoren zeigt zugleich anschaulich das Auftreten von Schrödinger Katzenzuständen als Eigenzustände des Quanten-Rabi Modells in der tiefen starken Kopplung für die slow-qubit Näherung [25]. Die zeitliche Entwicklung in der tiefen starken Kopplung eines Zustands $|\psi\rangle = |N=0, \downarrow\rangle$ ist als Wignerfunktion in Abbildung 3.3 zu sehen und zeigt das Auftreten eines Schrödinger Katzenzustands im Bereich der perturbativen tiefen starken Kopplung.

Wird die Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems jedoch deutlich erhöht, so dass die Näherung $\frac{g}{\omega_q} \gg 1$ nicht mehr ausreichend erfüllt wird, ist eine Diagonalisierung wie in Gleichung 3.26 nicht möglich. Der Bereich, in welchem die Zwei-Niveau-Aufspaltung von vergleichbarer Größe oder größer als die Kopplungsenergie ist, wird im weiteren Verlauf als dispersive tiefe starke Kopplung (*dispersive Deep Strong Coupling, dDSC*) bezeichnet. Hier ist die Dynamik durch ein komplexes Zusammenspiel des Energieaustauschs zwischen den in der Feldmode entstehenden Wellenpaketen und dem Zwei-Niveau-System gekennzeichnet.

Neben der bereits besprochenen Dynamik in der Besetzungszahl der Feldmode können weitere Merkmale der Dynamik der tiefen starken Kopplung in der Zeitentwicklung des Zwei-Niveau-Operators $\hat{\sigma}_z$ und des Inversionsoperators $\hat{\sigma}_x$ gefunden werden. Im Fall des Zwei-Niveau-Operators findet man unterhalb der tiefen starken Kopplung, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, Rabioszillationen vor, welche durch den periodischen Austausch von Energie zwischen dem Zwei-Niveau-System und der Feldmode getrieben werden. Im Gegensatz dazu tritt im Bereich der tiefen starken Kopplung ein rapider Zerfall des gemessenen Kontrasts auf, mit einem darauf folgenden lang anhaltenden Plateau des Erwartungswerts $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ bei 0, was einer gleichmäßigen Aufenthaltswahrscheinlichkeit in beiden Niveaus des Zwei-Niveau-Systems entspricht. Nach einer vollständigen Oszillationsperiode der Feldmode kommt es zu einem Wiederaufleben des ursprünglichen Erwartungswerts des Zwei-Niveau-Operators. Somit kann der rasche Zusammenbruch des Erwartungswerts des Zwei-Niveau-Zustands sowie sein späteres Wiederaufleben als Marker der tiefen starken Kopplung gesehen werden [70]. Abbildung 3.4 zeigt die zu erwartende Dynamik für ein System in perturbativer tiefer starker Kopplung für verschiedene Energieaufspaltungen des Zwei-Niveau-Systems.

Die berechnete zeitliche Entwicklung des Erwartungswerts des Inversionsoperators $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ folgt hingegen bei schwacher Kopplung der Frequenz der Feldmode, entkoppelt sich jedoch bei stärker werdender Kopplung von dieser Frequenz, da die Oszillationsfrequenz durch die Energiedifferenz der Eigenfunktionen unterschiedlicher Parität bestimmt wird, welche im Bereich der perturbativen tiefen starken Kopplung entartet sind. Entsprechend kommt es für den Fall der tiefen starken Kopplung zunächst zu einer Plateaubildung und für extreme Kopplungen bei Präparation des Systems in einer Superposition zweier Schrödinger Katzenzustände zu einem vollständigen Erliegen der Dynamik [70]. Solange die Kopplung im Vergleich zur Zwei-Niveau-Aufspaltung groß bleibt, kommt es somit zu einem dynamischen Schutz des Zustands. Präparation, zeitliche Entwicklung und Detektion sind in diesem Fall alle diagonal in der Basis des Inversionsoperators $\hat{\sigma}_x$. Für größere Zwei-Niveau-Aufspaltungen treten zusätzliche Oszillationen höherer Frequenz auf, die auf die Oszillationsperiode zwischen den beiden Niveaus zurückzuführen sind, wobei es im Gegensatz zu schwächeren

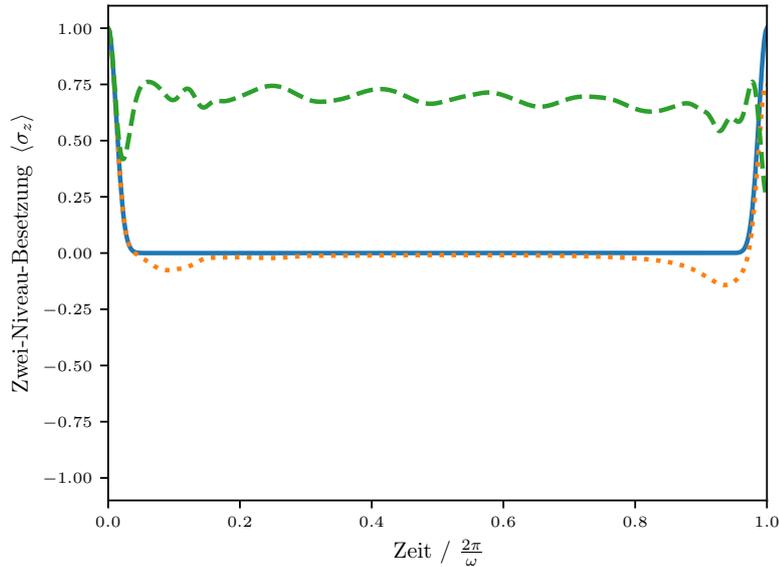


Abbildung 3.4: Dynamik des Erwartungswerts $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$. Das System ist anfänglich im Zustand $|N = 0, \downarrow\rangle$ präpariert bei einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6.5$. Die blaue, durchgezogene Linie entspricht einer Zwei-Niveau-Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 0$ Hz, die gepunktete, orange Linie einer Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 1000$ Hz und die gestrichelte grüne Linie einer Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 5000$ Hz. Für die perturbative tiefe starke Kopplung ist das Erliegen von Rabi-Oszillationen gut zu erkennen, wie auch das spätere Wiederaufleben des Ursprungszustands. In dispersiver tiefer starker Kopplung kommt es zu einem komplexen Austausch von Energie zwischen der Feldmode und dem Zwei-Niveau-System, aber auch hier ist nur eine gedämpfte Oszillation erkennbar.

Kopplungen nur zu stark gedämpften Oszillationen kommt. Die Dynamik kann hier als Folge der Mischung der beiden Paritätsketten angesehen werden. Die Plateaubildung in der Dynamik des Erwartungswerts ist somit ein Indikator für das Erreichen der tiefen starken Kopplung, während das deutliche Auftreten gedämpfter Oszillationen als Indiz für das Erreichen der dispersiven tiefen starken Kopplung verstanden werden kann [70]. Dies ist beispielhaft für ein System, welches im Zustand $|N = 0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)$ präpariert wurde in Abbildung 3.5 dargestellt. Die deutlich unterschiedliche Dynamik kann hier auch als Legitimation für die Einführung des Begriffs der dispersiven tiefen starken Kopplung interpretiert werden.

3.2 Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells mit Atomen im Gitterpotential

Die hier im Experiment durchgeführte Simulation des Quanten-Rabi Modells mit Hilfe von ultrakalten Alkaliatomen basiert auf der Kombination eines harmonischen und eines periodischen Potentials [71]. Dabei kommt eine durch einen fokussierten CO_2 -Laserstrahl

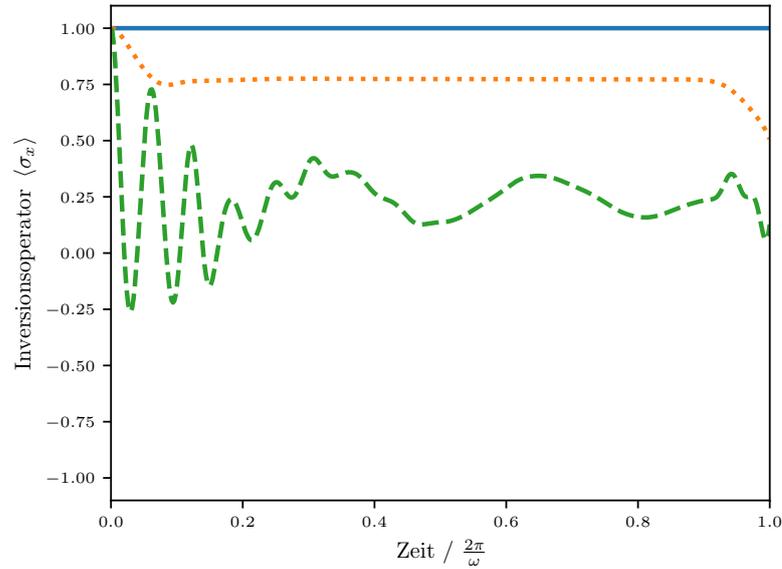


Abbildung 3.5: Dynamik des Erwartungswerts $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$. Das System ist anfänglich im Zustand $|N=0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle)$ präpariert bei einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6.5$. Die blaue, durchgezogene Linie entspricht einer Zwei-Niveau-Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 0$ Hz, die gepunktete, orange Linie einer Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 1000$ Hz und die gestrichelte grüne Linie einer Aufspaltung von $\frac{\omega_q}{2\pi} = 5000$ Hz. Für das entartete Zwei-Niveau-System kommt es zu einem vollständigen Erliegen der beobachtbaren Dynamik. In der perturbativen tiefen starken Kopplung kommt es auch für größere Energieaufspaltungen des Zwei-Niveau-Systems zu einer Plateaubildung, welche auf die beinahe entarteten Eigenzustände des Systems zurückzuführen sind. Erst in der dispersiven tiefen starken Kopplung kommt es zu einem gedämpften oszillativen Verhalten des Erwartungswerts.

verursachte Dipolfalle als harmonisches Potential und ein mittels eines Vier-Photonen-Gitters realisiertes periodisches Potential zum Einsatz. Das harmonische Potential entspricht für nicht zu große Auslenkungen der Atome näherungsweise der Form

$$\hat{H}_{\text{harm}} = \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2 \quad (3.34)$$

mit der Fallenfrequenz ω und der Atommasse m , während das periodische Potential die Form

$$\hat{H}_{\text{peri}} = \frac{V}{2} \cos(4k\hat{x}) \quad (3.35)$$

mit der Falltiefe V und dem Wellenvektor $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ hat.

Der Systemhamiltonian lässt sich somit schreiben als

$$\hat{H}_{\text{KA}} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 + \frac{V}{2}\cos(4k\hat{x}) \quad (3.36)$$

mit dem Impulsoperator $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$.

Unter der Annahme eines auf der Längenskala des periodischen Potentials langsam variierenden harmonischen Potentials erscheint es somit sinnvoll, das System mittels des Blochansatzes zu beschreiben, mit der Basis

$$\langle x|\phi_{n_b}(q)\rangle = \phi_{n_b}(q, x) = e^{i\frac{qx}{\hbar}} u_{n_b}(x) \quad (3.37)$$

mit dem Quasiimpuls q , dem Bandindex n_b und einer periodischen Funktion $u_{n_b}(x)$, deren Periode dem periodischen Gitterpotential entspricht. Aufgrund der experimentellen Gegebenheiten wird diese so gewählt, dass sich als Brillouin-Zone $q \in (-2\hbar k, 2\hbar k]$ ergibt:

$$u_{n_b}(x) = e^{-2ikx} e^{4in_b kx}. \quad (3.38)$$

Da diese Blochfunktionen einen kontinuierlichen Anteil des Quasiimpulses q und einen diskreten Anteil des Bandindex n_b enthalten, ist es hilfreich, diese als

$$|\phi_{n_b}(q)\rangle = |q\rangle |n_b\rangle \quad (3.39)$$

zu schreiben.

Zunächst soll nun der Einfluss des periodischen Anteils der Gleichung 3.36 $\hat{H}_p = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{V}{2}\cos(4k\hat{x})$ untersucht werden.

$$\hat{H}_p |q\rangle |n_b\rangle = \frac{1}{2m} [q + (2n_b - 1)(2\hbar k)]^2 |q\rangle |n_b\rangle + \frac{V}{4} [|q\rangle |n_b + 1\rangle + |q\rangle |n_b - 1\rangle]. \quad (3.40)$$

Dabei wird deutlich, dass das Gitterpotential entsprechend der Erwartung zu einer Kopplung zwischen benachbarten Bändern des Systems führt, was die Verwendung des Blochansatzes nochmals rechtfertigt.

Weniger offensichtlich ist jedoch der Einfluss des quadratischen Terms des Hamiltonians. Angewendet auf die Wellenfunktion in der gegebenen Blochbasis ergibt sich

$$\langle q', n'_b | \hat{x}^2 | q, n_b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{i\left[4(n_b - n'_b)kx + \frac{(q - q')x}{\hbar}\right]}. \quad (3.41)$$

Um den Einfluss des Operators besser zu verstehen, hilft es, diesen zunächst auf den Fall diagonalen Bandindizes zu beschränken, d.h. nur Terme mit $n'_b = n_b$ zu betrachten. Für diese

ist einfach einzusehen, dass

$$\langle q', n_b | \hat{x}^2 | q, n_b \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{i \frac{(q-q')}{\hbar} x} \quad (3.42)$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\partial^2}{\partial q^2} e^{i \frac{(q-q')}{\hbar} x} \quad (3.43)$$

$$= -\hbar^2 \langle q', n_b | \frac{\partial^2}{\partial q^2} | q, n_b \rangle \quad (3.44)$$

gilt. Dies bedeutet, dass das harmonische Potential somit einen diagonalen Operator der Form

$$\hat{x} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \quad (3.45)$$

eingeführt, welcher zusammen mit dem Quasiimpulsoperator der kanonischen Vertauschungsrelation gehorcht. Der Einfluss im Fall nichtdiagonaler Bandindizes ist hingegen weniger leicht zu sehen. Gleichung 3.44 wird maximiert für einen verschwindenden Exponenten, somit für

$$\frac{q' - q}{\hbar} = 4 (n_b - n'_b) k. \quad (3.46)$$

Dies entspricht der Erwartung, dass ein Gitterpotential der Form $\cos(4k\hat{x})$ Atome mit Impulsunterschieden von vier Rückstoßenergien koppelt, was nach Definition der Länge der Brillouin-Zone entspricht, so dass sich demnach eine Kopplung benachbarter Bänder der Form $|2\hbar k, n_b\rangle \langle -2\hbar k, n_b + 1| + |-2\hbar k, n_b + 1\rangle \langle 2\hbar k, n_b|$ ergibt. Verschwindet der Exponent in Gleichung 3.44 nicht, ergibt sich ein schnell oszillierendes Integral mit entsprechend vernachlässigbarem Beitrag zu diesem Matrixelement.

Für die weitere Betrachtung wird die Dynamik des Systems auf die beiden tiefsten Energiebänder $n_b = 0$ und $n_b = 1$ beschränkt, welche als Definition des Zwei-Niveau-Systems dienen, womit \hat{H}_p in Matrixform geschrieben werden kann als

$$\hat{H}_p = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} q^2 + 4\hbar k q + 4\hbar^2 k^2 & 0 \\ 0 & q^2 - 4\hbar k q + 4\hbar^2 k^2 \end{pmatrix} + \frac{V}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Diese Einschränkung ist valide, solange das System innerhalb dieser Energiegrenzen präpariert wurde. Die Verschiebung der Energieniveaus um $4\hbar^2 k^2$ ist für die Dynamik des Systems nicht von Belang, womit sich die Gleichung zu

$$\hat{H}_p = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} q^2 + 4\hbar k q & 0 \\ 0 & q^2 - 4\hbar k q \end{pmatrix} + \frac{V}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.48)$$

vereinfacht.

Genauso lässt sich der Operator \hat{x}^2 nun schreiben als

$$\hat{x}^2 = -\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial q^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta (|2\hbar k, n_b\rangle \langle -2\hbar k, n_b + 1| + |-2\hbar k, n_b + 1\rangle \langle 2\hbar k, n_b|) \quad (3.49)$$

mit $\delta = \langle -2\hbar k, 1 | \hat{x}^2 | 2\hbar k, 0 \rangle$. Der mit δ skalierende Term entspricht einem Umklappprozess, dessen Einfluss für Zustände ohne Überlapp mit Quasiimpulszuständen von $q = \pm 2\hbar k$ verschwindet. Dies entspricht der Forderung, dass der Zustand des Systems vollständig innerhalb der ersten Brillouin-Zone liegt, was nur für Zustände mit $|\langle \hat{q} \rangle| < 2\hbar k$ erfüllt werden kann.

Der vollständige Systemhamiltonian (Gleichung 3.36) lautet dann

$$\hat{H} = \left(\frac{q^2}{2m} - \frac{\hbar^2 m \omega^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \right) \mathbb{1}_2 + \frac{V}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{2\hbar k q}{m} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.50)$$

Mit der Definition der Vernichtungs- und Erzeugungsoperatoren

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\omega} q \right) \quad (3.51)$$

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\omega} q \right) \quad (3.52)$$

$$(3.53)$$

und den Definitionen

$$\omega_q = \frac{V}{2} \quad (3.54)$$

$$g = 2k \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2m}} \quad (3.55)$$

ergibt sich somit aus Gleichung 3.50

$$\hat{H} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} \mathbb{1}_2 + \frac{\hbar\omega_q}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + i\hbar g (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.56)$$

Hier wird bereits die Ähnlichkeit zum Quanten-Rabi Hamiltonian deutlich. Um zur Standardform des Quanten-Rabi Hamiltonians zu gelangen wird die Basis des Zwei-Niveau-Systems in einer unter dem unitären Operator

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

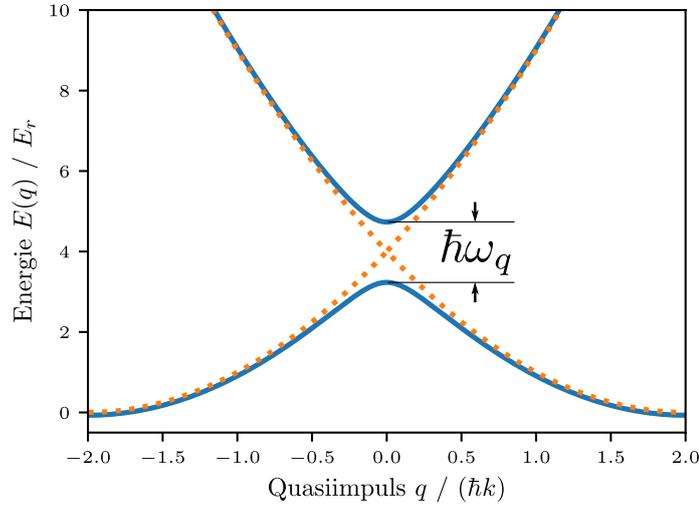


Abbildung 3.6: Darstellung der Dispersionsrelation des Vier-Photonen-Gitters, über welches das Zwei-Niveau-System in der hier durchgeführten Quantensimulation definiert wird. Die Aufspaltung an der vermiedenen Kreuzung entspricht der Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems.

gedrehten Basis definiert, so dass die Paulimatrizen in der gedrehten Basis als

$$\hat{\sigma}_x = |n_b = 0\rangle \langle n_b = 0| - |n_b = 1\rangle \langle n_b = 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

$$\hat{\sigma}_z = |n_b = 1\rangle \langle n_b = 0| + |n_b = 0\rangle \langle n_b = 1| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

geschrieben werden können.

In dieser Basis ergibt sich aus Gleichung 3.56

$$\hat{H}_{\text{QRM}} = \hbar\omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_q}{2} \hat{\sigma}_z + i\hbar g \hat{\sigma}_x (\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \quad (3.60)$$

Verglichen mit der in Gleichung 3.2 gezeigten Variante des Quanten-Rabi Hamiltonians fällt auf, dass die Kopplung hier über den Impulsoperator und nicht den Ortsoperator erfolgt. Dies führt lediglich zu einem globalen Phasenversatz [71], was keinerlei Änderung der beobachtbaren Dynamik verursacht.

Wie in Gleichung 3.49 deutlich wurde, ist die Äquivalenz der beiden Systeme nur garantiert, solange der mit δ skalierende Umklappterm vernachlässigt werden kann, was die beobachtbare

Dynamik für anfängliche Zustände ψ_0 mit $\langle \psi_0 | \hat{q} | \psi_0 \rangle = 0$ effektiv auf eine Zeit von

$$t_{\max} = \frac{\pi}{2\omega} \quad (3.61)$$

einschränkt. Außerhalb dieser Region kommt die Periodizität des Quasiimpulses zum Tragen, so dass das simulierte System nicht mehr dem eigentlichen Quanten-Rabi Modell entspricht, sondern eine periodische Variante des Modells beschreibt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Fokus auf die Simulation des Quanten-Rabi Modells gelegt, so dass entsprechende Anfangszustände gewählt und Messungen nur bis zur Grenze der Validität des Modells durchgeführt wurden.

Experimenteller Aufbau

Im Rahmen des folgenden Kapitels soll auf den experimentellen Aufbau zur Erzeugung des verwendeten Rubidium Bose-Einstein Kondensats und der Manipulation des Selbigen zur Simulation des Quanten-Rabi Modells eingegangen werden. Zunächst wird auf die verwendete Vakuumapparatur und die verwendeten Lasersysteme eingegangen und darauf folgend die Methode zur Erzeugung des benötigten harmonischen und periodischen Potentials erläutert. Die im Vergleich zu vergangenen Arbeiten [55, 64, 72–74] veränderten Methoden zur Erzeugung der optischen Gitterpotentiale sowie die neu entworfene Absorptionsabbildung werden dabei in größerer Ausführlichkeit behandelt.

4.1 Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats

4.1.1 Vakuumapparatur

Um eine ausreichend geringe Stoßrate und somit niedrige erreichbare Temperatur des Atomensembles zu gewährleisten, werden alle Versuche innerhalb einer Ultrahochvakuumapparatur durchgeführt. Die verwendete Vakuumkammer ist zusammengesetzt aus einer sphärischen Hauptkammer mit entsprechenden optischen Zugängen und mechanischen Manipulatoren zur Justage der Dipolfallenoptiken und einer zylindrischen Vorkammer, die neben einem weiteren optischen Zugang die Vakuumpumpen und ein Ionisations-Vakuummeter enthält. Zur Erzeugung des Ultrahochvakuums kommt eine Ionengetterpumpe (*Meca2000 VTS 25l/s*) in Verbindung mit einer Titan-Sublimationspumpe (*Riber TSP2*) zum Einsatz, welche nach Erreichen eines Hochvakuums durch eine mechanische Turbomolekularpumpe in Verbindung mit einem Ausheizen der gesamten Apparatur in Betrieb genommen wurden. Der auf diese Weise erreichte Vakuumdruck von typisch $3 \cdot 10^{-10}$ mbar wird kontinuierlich mittels eines Ionisations-Vakuummeters (*Leybold Thermovac TR 211*) überwacht. Der Druck ist ausreichend, um Störungen durch das thermische Hintergrundgas zu vermeiden und wird allein mittels der eingesetzten Ionengetterpumpe aufrechterhalten. Das Aufdampfen einer frischen Titan-Getter Schicht wird in regelmäßigen Abständen von mehreren Monaten

durchgeführt, um von der Ionengetterpumpe schlecht zu bindende Gasbestandteile zu fangen. Die zylindrische Vorkammer ist mittels eines CF DN63 Flansches mit der Hauptkammer verbunden und bietet auf der diesem Flansch gegenüberliegenden Seite einen optischen Zugang von 70 mm Größe mittels eines Quarzglasfensters, welches mit einer für den verwendeten Wellenlängenbereich von 780 nm optimierten Antireflexschicht versehen ist. Die Hauptkammer ist in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt. Es handelt sich hierbei um eine sphärische Kammer mit einem Durchmesser von 162 mm, welche Entlang der Verbindungsachse zur Vorkammer ebenfalls mit einem antireflexbeschichteten Quarzglasfenster von 90 mm Durchmesser abgeschlossen ist. Wie in der Abbildung zu sehen, befinden sich an der Kammer acht symmetrisch angeordnete CF DN40 Flansche, sowie acht weitere CF DN16 Flansche. Mit Ausnahme eines DN40 Flansches, der zur Aufnahme der Rubidiumdispensoren dient, und der horizontalen Achse, entlang derer der Dipolfallenlaserstrahl geführt wird, sind auch die restlichen Flansche mit optischen Zugängen mittels antireflexbeschichteten Quarzglasfenstern versehen.

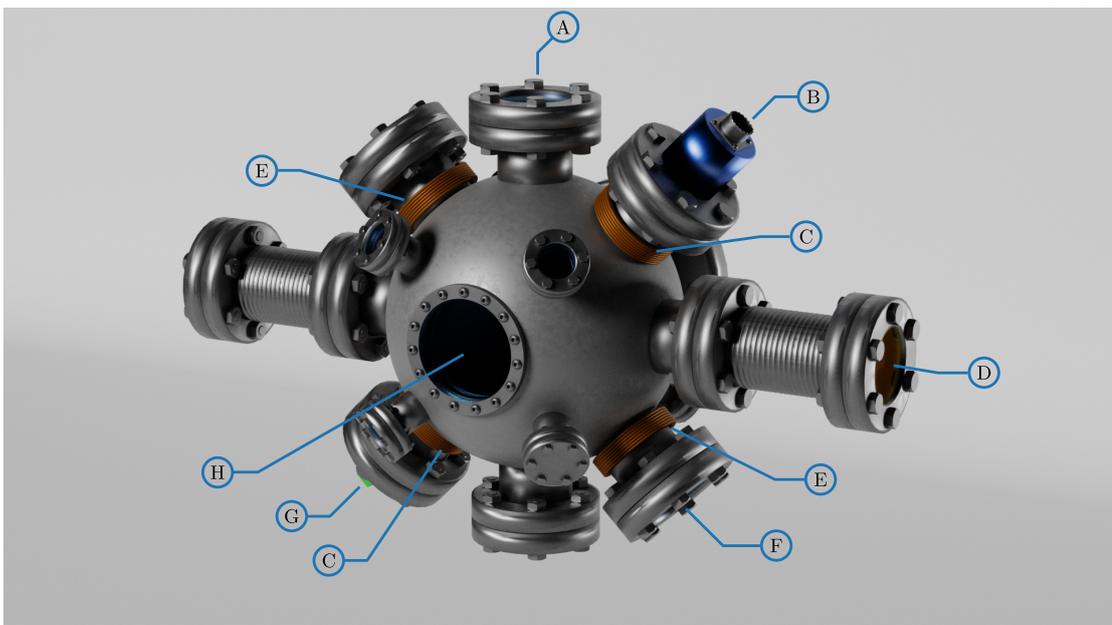


Abbildung 4.1: Schematische Abbildung der sphärischen Vakuumapparatur. Die für das Experiment wichtigsten Elemente und Achsen sind markiert: A - Achse der Gitterlaserstrahlen. B - Rubidiumdispenser. C - Gravitationskompensationsspulenpaar. D - Achse des Dipolfallenlaserstrahls. E - MOT-Spulenpaar. F - Hauptachse der MOT. G - Mikrowellenantenne. H - Optischer Zugang für die Absorptionsabbildung.

Da in diesem Aufbau die Rubidiumatome aus dem thermischen Hintergrundgas gefangen werden, sind in einem der CF DN40 Flansche drei Rubidiumdispenser (*SAES Getters RB/NF3.4*) verbaut. Es handelt sich bei diesen um Rubidiumchromat (Rb_2CrO_4), welches

sich zusammen mit einer Zirconium-Aluminium Legierung, die als chemischer Fangstoff dient, in einem Mantel aus einer Nickel-Chrom-Legierung befindet. Durch den hohen spezifischen Widerstand der verwendeten Nickel-Chrom-Legierung kann der Dispenser mit einem externen Strom von etwa 4,2 A auf die benötigte Betriebstemperatur von ca. 550 °C erhitzt werden, was zur Reduktion des Rubidiumchromats und der daraus folgenden Freisetzung von atomarem Rubidium in die Vakuumkammer führt. Auf diese Weise kann durch Modulation des durchfließenden Stroms eine genau dosierte Menge Rubidium in das Hintergrundgas abgegeben werden, während der beigesetzte Fangstoff eine zu starke Verunreinigung der Kammer durch die Freigabe unerwünschter Gase verhindert.

4.1.2 Magneto-optische Falle

Die durch die Rubidiumdispenser thermischen Rubidiumatome werden im weiteren Verlauf des Experiments mittels einer magneto-optischen Falle gekühlt und im Zentrum der sphärischen Kammer gehalten. In diesem Experiment findet das schwach radioaktive Isotop ^{87}Rb Verwendung, welches in natürlichen Rubidiumproben mit einer relativen Häufigkeit von 27,835 % auftritt [76]. Dieses zerfällt durch Betazerfall in ^{87}Sr unter Freiwerden von 0,283 MeV [47], kann aber aufgrund der sehr langen Halbwertszeit von etwa 49.6 Milliarden Jahren [77] für unsere Zwecke als stabiles Isotop angesehen werden.

Die im Experiment für die optische Kühlung des Rubidium-87 verwendeten Übergänge sind in Abbildung 4.2 schematisch dargestellt. Der Übergang $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 3\rangle$ hat eine natürliche Linienbreite von $(6,0666 \pm 0,0018)$ MHz [47] und dient hier der optischen Kühlung. Im weiteren Verlauf wird der diesen Übergang treibende Laser als *Kühlaser* bezeichnet. Einige Atome können nicht-resonant in den $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ Zustand gepumpt werden und wären nach der Abregung in den $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ Zustand für den Kühlzyklus verloren. Obgleich dies nur einen geringen Anteil der Anregungen ausmacht, würde dies aufgrund der hohen Anzahl an nötigen Stößen zur Kühlung des Atomensembles zu große Verluste bedeuten, so dass ein weiterer Laser (im Weiteren als *Rückpumplaser* bezeichnet) zum Treiben des $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ Übergangs zum Einsatz kommt, um die Atome in den Kühlzyklus zurückzuführen.

Rückpumplaser

Da in diesem Experiment der Kühlaser auf einen Frequenzabstand zum Rückpumplaser stabilisiert wird, soll hier mit der Beschreibung des Rückpumplasersystems begonnen werden. Der Aufbau und Strahlverlauf des Rückpumplasersystems ist in Abbildung 4.3 schematisch dargestellt. Bei dem verwendeten Laser handelt es sich um einen gitterstabilisierten Diodenlaser in Littrow-Konfiguration, welcher nach dem Vorbild in [78] aufgebaut wurde. Die verwendete antireflexbeschichtete Laserdiode (*TOPTICA eagleyard, EYP-RWE-0780*) erreicht bei einem Pumpstrom von etwa 130 mA die im Experiment benötigte Lichtleistung von 35 mW. Um die Laserfrequenz auf den gewählten $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ Übergang zu stabilisieren, wird zunächst ein Teilstrahl von wenigen Milliwatt Leistung abgetrennt

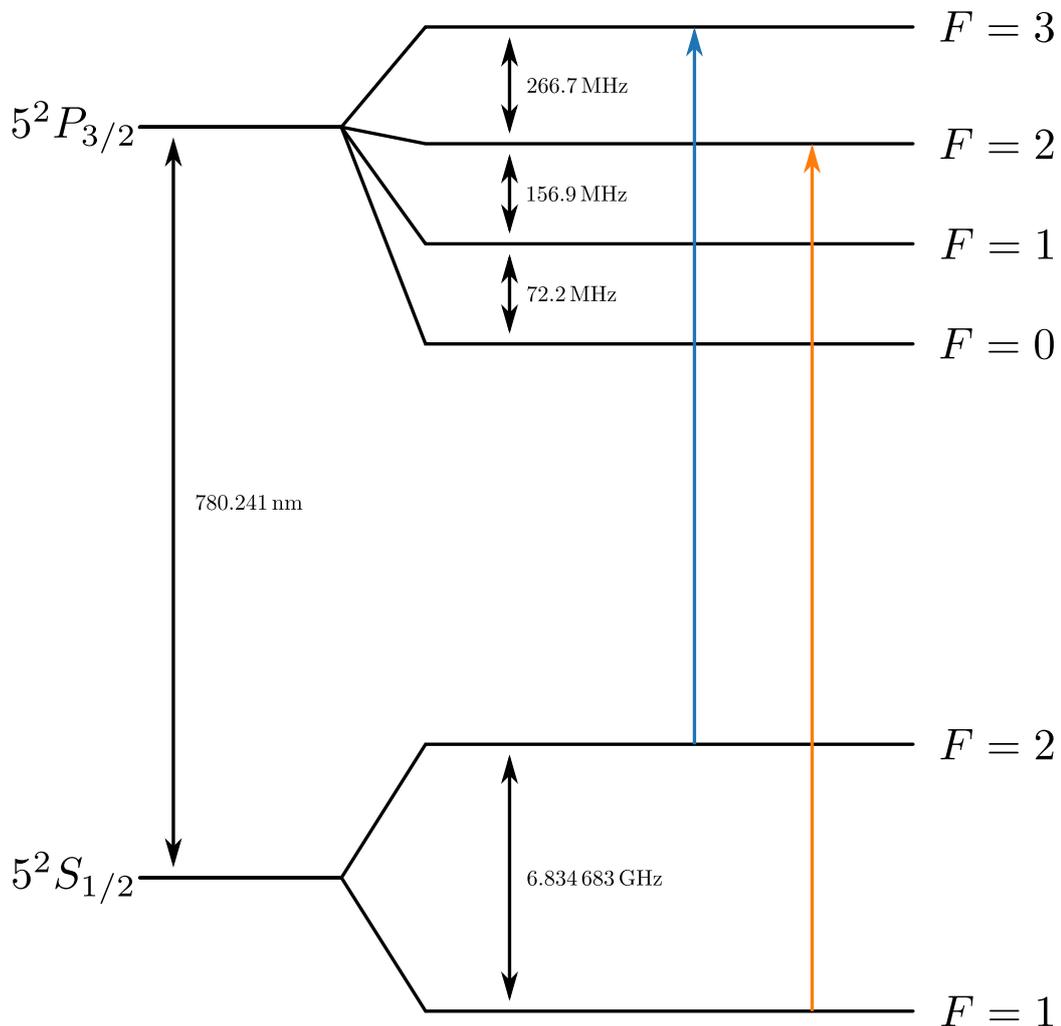


Abbildung 4.2: Rubidium-87 $D2$ -Übergang (nach [47]). Der Übergang des Kühllasers $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 3\rangle$ ist in Blau, der Übergang des Rückpumpasers $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ in Orange markiert.

und für eine dopplerfreie Sättigungsspektroskopie [79] verwendet. Durch Modulation des Injektionsstroms mit einer Frequenz von etwa 25 MHz werden dem Licht Seitenbänder aufmoduliert, um ein geeignetes Fehlersignal für die Frequenzstabilisierung des Lasers zu erzeugen [80]. Eine genaue Beschreibung des Stabilisierungsschemas findet sich in [64]. Ein weiterer Teilstrahl von wenigen Milliwatt Leistung des frequenzstabilisierten Laserlichts wird abgespalten, um eine Frequenzabstandsstabilisierung des Kühllasers zu realisieren, auf welche in Abschnitt 4.1.2 - Kühllaser genauer eingegangen wird. Der Hauptstrahl des

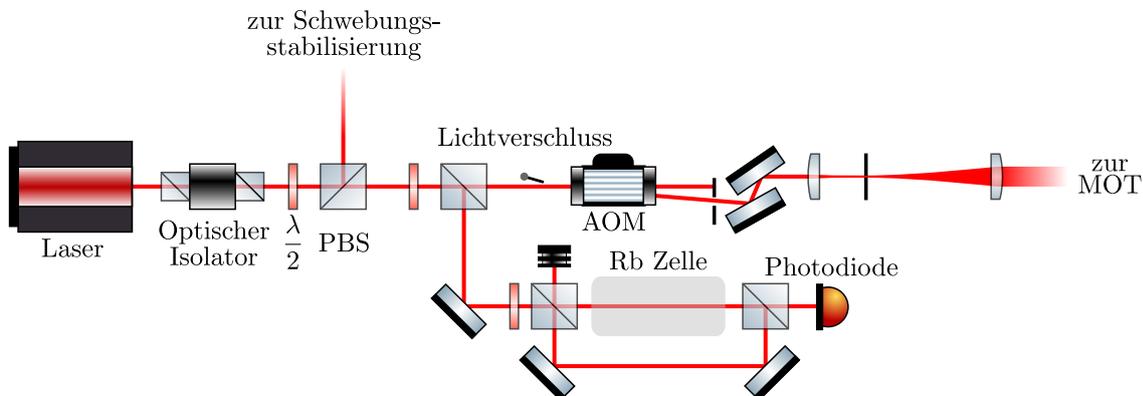


Abbildung 4.3: Aufbau und Strahlengang des Rückpumpasers. Das Licht des gitterstabilisierten Diodenlasers wird mittels dopplerfreier Sättigungsspektroskopie auf den $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 2\rangle$ Übergang von ^{87}Rb stabilisiert. Ein Teilstrahl des Lasers dient der Schwabungsstabilisierung des Kühllasers, während der Hauptanteil des Lichts einen akustooptischen Modulator zur Leistungssteuerung passiert und nach der Aufweitung sowie Modenfilterung mittels einer Lochblende im Fokus des Teleskopaufbaus in Richtung Vakuumkammer weiterläuft. Ein mechanischer Lichtverschluss verhindert, dass Streulicht des AOM in kritischen Phasen des Experiments zur Aufheizung des Atomensembles führt. Verwendete Abkürzungen: AOM - akustooptischer Modulator, $\lambda/2$ - $\lambda/2$ Verzögerungsplatte, PBS - polarisierender Strahlteilerwürfel.

Rückpumpasers passiert einen mechanischen Lichtverschluss (*Melles Griot SafeClose*), um Streulicht des Lasers in kritischen Phasen des Experiments nicht bis zur Apparatur vordringen zu lassen. Alle im Experiment verwendeten mechanischen Lichtverschlüsse befinden sich im Fokus eines 1:1 Teleskopaufbaus, um möglichst kurze Schaltzeiten des Lichts zu erreichen. Im Anschluss passiert der Laserstrahl einen AOM (*Isomet 1205C-1*), welcher der Laserleistungssteuerung und dem schnellen Schalten des Lichts im Experiment dient. Die erste Ordnung des Laserstrahls wird am Ausgang des AOMs mittels einer Lochblende selektiert und durch einen Teleskopaufbau für die magneto-optische Falle aufgeweitet. Eine Lochblende mit einem Durchmesser von $50\ \mu\text{m}$ im Fokus des Teleskops dient der Modenfilterung des Diodenlaserlichts, um ein möglichst gaußförmiges transversales Strahlprofil zu erzeugen. Das so geformte und stabilisierte Laserlicht wird in einem polarisierenden Strahlteilerwürfel mit dem Licht des Kühllasers überlagert und auf die drei Arme der MOT aufgeteilt.

Kühllaser

Der verwendete Kühllaser ist ein kommerzieller gitterstabilisierter Diodenlaser (*Toptica DLX110*), welcher mit einer Trapezlaserdiode mit mittlerer Wellenlänge von $780\ \text{nm}$ bei einer maximalen Ausgangsleistung von $1\ \text{W}$ ausgestattet ist. Der Aufbau und Strahlverlauf des Kühllasers ist in Abbildung 4.4 schematisch dargestellt. Der Laser wird im Experiment mit

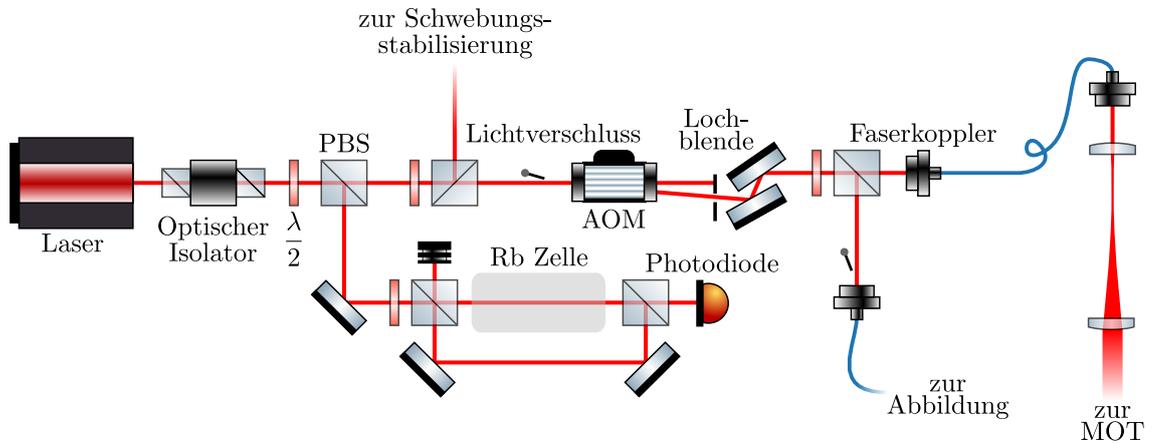


Abbildung 4.4: Aufbau und Strahlengang des Kühllasers. Das Licht des gitterstabilisierten Diodenlasers wird mittels Schwebungsstabilisierung auf einen Frequenzabstand $\Delta\nu$ zum Rückpumplaser stabilisiert. Eine dopplerfreie Sättigungsspektroskopie dient dabei der Grobjustage. Das Licht des Lasers wird mittels eines akustooptischen Modulators in seiner Leistung gesteuert und in Teilstrahlen von wenigen Milliwatt Leistung für die Schattenabbildung der Atome und den Hauptstrahl für die magneto-optische Falle aufgeteilt, wobei letzterer zunächst ein kurzes Stück polarisationserhaltender Einmodenfaser zur Modenfilterung passiert. Nach dem Aufweiten des Strahls läuft dieser in Richtung der Vakuumkammer weiter. Mechanische Lichtverschlüsse verhindern, dass Streulicht des AOM in kritischen Phasen des Experiments zur Vakuumkammer durchdringen kann. Verwendete Abkürzungen: *AOM* - akustooptischer Modulator, $\lambda/2$ - $\lambda/2$ Verzögerungsplatte, *PBS* - polarisierender Strahlteilerwürfel.

einer Ausgangsleistung von etwa 400 mW betrieben. Zum Schutz der Diode vor Rückreflexen passiert der Strahl zunächst einen optischen Isolator, bevor er in einen Hauptstrahl und zwei Nebenstrahlen von jeweils wenigen Milliwatt Ausgangsleistung aufgespalten wird. Einer der Nebenstrahlen dient dem Betrieb einer dopplerfreien Sättigungsspektroskopie, welche, im Gegensatz zum Rückpumplaser, nur als Referenz zur groben Justage des Lasers dient. Der zweite Nebenstrahl wird in einer optischen Einmodenfaser mit dem Licht des Rückpumplasers überlagert. Eine schnelle Photodiode mit einer Bandbreite von über 7 GHz (*Alphas UPD-50-SP*) detektiert das entstehende Schwebungssignal zwischen den beiden Lasern von 6,568 GHz, welches zwecks einfacherer Verarbeitung mit einem 5,7 GHz Signal eines Signalgenerators (*Rohde & Schwarz SMT06*) heruntergemischt und mittels eines Frequenz-Spannungs-Umsetzers in ein Steuersignal zur Stabilisierung der Laserfrequenz umgewandelt wird (siehe auch [64] für eine detailliertere Beschreibung des Stabilisierungsschemas). Diese Frequenzabstandsstabilisierung erlaubt somit im Vergleich zur direkten Stabilisierung weite Verstimmungen der Laserfrequenz von mehreren hundert Megahertz, welche im experimentellen Ablauf unter anderem während der sogenannten Dunkel-MOT Phasen zum Einsatz kommt.

Der Hauptstrahl des frequenzstabilisierten Lasers passiert, wie bereits der Rückpumplaser-

strahl, einen mechanischen Lichtverschluss (*Melles Griot SafeClose*) und einen akustooptischen Modulator, welcher auch hier zum schnellen Schalten und zur Laserleistungssteuerung eingesetzt wird. Die gesteuerte erste Beugungsordnung des AOMs passiert einen weiteren Strahlteiler, an welchem ein geringer Teil von einigen Milliwatt Leistung für die Absorptionsabbildung in eine Einmodenfaser eingekoppelt wird. Diese transportiert den Strahl zur Vakuumkammer, während der Hauptstrahl mit einer Leistung von etwa 150 mW eine kurze Einmodenfaser zur transversalen Modenfilterung passiert. Ein Teleskop weitet den Strahl auf einen Durchmesser von 20 mm auf, wonach er in einem polarisierenden Strahlteilerwürfel mit dem Licht des Rückpumpasers überlagert und auf die Arme der MOT aufgeteilt wird.

Magnetfelder

Zur Erzeugung des benötigten magnetischen Gradienten im Zentrum der Vakuumapparatur befindet sich an den Flanschen der MOT-Hauptachse ein Spulenpaar (siehe auch Abbildung 4.1), bestehend aus jeweils 28 Windungen weichgeglühten Kupferrohrs (Durchmesser 4 mm, *RS Pro 846-503*), welche mit Hochtemperatur Polyimidklebeband (*Multicomp 051-0004*) isoliert wurden. Der mittlere Durchmesser der Spulen beträgt 86 mm, bei einem Abstand von etwa 184 mm. Die Spulen sind dabei als Antihelmholtzspulenpaar verschaltet. Zur Erhöhung der mechanischen Stabilität sind die Spulen in Epoxydharz vergossen. Eine detaillierte Beschreibung der Spulen zur Erzeugung der Gradientenfelder findet sich in [74] und [81]. Aufgrund der hohen Verlustleistung von etwa 3 kW bei maximalem Stromfluss von 200 A werden die Spulen intern von Kühlwasser durchflossen, bei typischen Durchflussmengen von $1\ 100\ \text{mL}\ \text{min}^{-1}$. Zur Erhöhung der Betriebssicherheit wurden in die neu gewickelten Spulen Temperatursensoren (*Maxim Integrated DS18S20*) eingearbeitet, welche eine Überwachung der Spulentemperaturen ermöglichen. Zur schnellen Erfassung von Betriebszuständen mit verminderter Kühlleistung wird der Kühlmitteldurchfluss am Ausgang der Spulen mit einem Turbinen-Durchflussmesser (*B.I.O-TECH e.K. FCH-midi-POM*) überwacht. Ein Mikrocontroller (*Microchip Technology ATmega 328p*) überwacht die Einhaltung der Betriebsparameter kontinuierlich und erlaubt die Abschaltung der verwendeten Netzgeräte (*Keysight 6691A*) durch deren integrierte Interlockschaltung. Der Aufbau dieser Schaltung ist in Abbildung B.1 zu sehen. Um auch eine Notfallabschaltung bei vollständigem Ausfall des Mikrocontrollers zu gewährleisten, wurden zur weiteren Absicherung Bimetalltemperaturschalter mit einem Schmelzpunkt von $75\ ^\circ\text{C}$ an der Außenseite der Spulen angebracht (*Honeywell 2455R 82-712 F75C*). Die Spulen werden von einer spannungsgesteuerten Stromquelle (*Keysight 6691A*) versorgt, welche durch das Echtzeitsystem während des experimentellen Zyklus gesteuert wird. Aufgrund der großen Distanz und der auftretenden hohen Ströme werden hierzu die unsymmetrischen Steuersignale zunächst symmetriert und als differenzielles Signal ohne direkten Massebezug zur Stromquelle geleitet.

Während der MOT Phase des Experiments werden die Spulen von einem Strom von 80 A durchflossen, was zu einem Magnetfeldgradienten von etwa $13,3\ \text{Gs}\ \text{cm}^{-1}$ an der Position der MOT führt.

Ein baugleiches Spulenpaar befindet sich um 90° gedreht auf den weiteren Flanschen (siehe

Abbildung 4.1, hier als Gravitationskompensationsspulen bezeichnet), welches in Kombination mit den MOT-Spulen zur Erzeugung eines effektiv zweidimensionalen Quadrupolfeldes dient, mit dessen Hilfe die Gravitationskraft, welche auf die Atome einwirkt, für Atome im $|F = 1, m_F = -1\rangle$ Zustand durch die entstehende Stern-Gerlach Kraft kompensiert werden kann. Der hierzu nötige Gradient von etwa $30,5 \text{ Gs cm}^{-1}$ wird bei Spulenströmen von ca. 120 A erreicht [74], wobei die exakten Ströme aufgrund leichter geometrischer Unterschiede zwischen den Spulen experimentell um wenige Ampere vom berechneten Wert abweichen können.

Entlang der Abbildungsachse, der Achse des Gitters und der Dipolfallenachse befinden sich weiterhin jeweils Spulenpaare in Helmholtzkonfiguration, welche im weiteren Verlauf als *Offsetspulen* bezeichnet werden, zur Erzeugung homogener Magnetfelder.

4.1.3 Dipolfalle

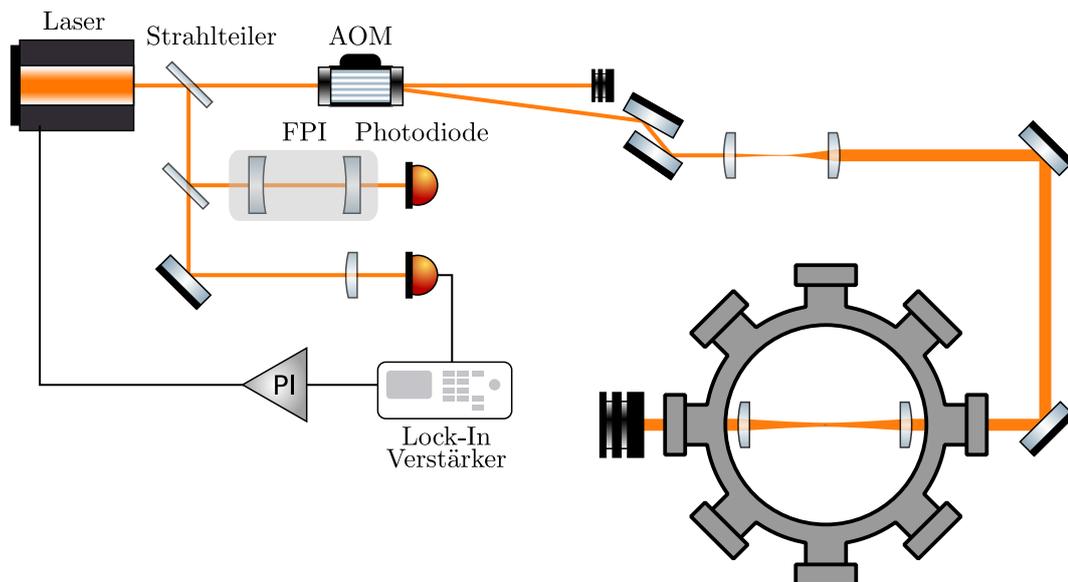


Abbildung 4.5: Aufbau und Strahlengang des Dipolfallenlasers. Das Licht des CO_2 -Lasers wird mittels zweier Strahlteiler in einen Hauptstrahl und zwei Nebenstrahlen von wenigen Milliwatt Leistung aufgeteilt. Einer der Nebenstrahlen passiert ein Fabry-Pérot-Interferometer zur Kontrolle des Einzelmodenbetriebs des Lasers, ein weiterer Nebenstrahl trifft auf eine Photodiode, deren Signal mit Hilfe eines Lock-In Verstärkers zur Leistungsstabilisierung verwendet wird. Der Hauptstrahl passiert einen akustooptischen Modulator zur Leistungssteuerung und wird nach Aufweitung des Strahls durch optische Zugänge in die Vakuumkammer eingestrahlt. Im Inneren der Vakuumkammer wird der Laser mittels einer Linse im Bereich der magneto-optischen Falle fokussiert und induziert auf diese Weise das atomare Dipolfallenpotential für den weiteren experimentellen Ablauf. Verwendete Abkürzungen: *AOM* - akustooptischer Modulator, *FPI* - Fabry-Pérot-Interferometer.

Das zur Erzeugung des Bose-Einstein Kondensats verwendete konservative Fallenpotential wird in diesem Experiment von einem einzelnen Laserstrahl erzeugt. Der hierzu verwendete CO₂-Laser (*Coherent GEM-50S*) hat eine optische Leistung von maximal 50 W, bei einer Wellenlänge von 10,6 μm. Aufgrund dieser sehr großen Rotverstimmung gegenüber der atomaren Übergänge erlaubt ein solcher Laser die Erzeugung einer quasistatischen Dipolfalle mit sehr geringer Photonenstreureate (bei maximaler Falltiefe im Experiment werden bei einer Laserstrahlleistung von 32 W Streuraten von unter 0,006 s⁻¹ erreicht), was eine effektive evaporative Kühlung erlaubt.

Der Strahlengang ist schematisch in Abbildung 4.5 dargestellt. Der Laserstrahl passiert zunächst einen Zinkselenid (*ZnSe*) Strahlteiler, mit welchem wenige Milliwatt vom Hauptstrahl in einen Nebenstrahl abgespalten werden, welcher mit einem weiteren ZnSe 50:50 Strahlteiler in zwei Nebenstrahlen aufgeteilt wird. Einer dieser Nebenstrahlen dient der Kontrolle des Einmodenbetriebs des Lasers, mittels eines Fabry-Pérot-Interferometers, dessen Länge kontinuierlich über einen Piezoaktuators verändert wird.

Der zweite Nebenstrahl dient der Stabilisierung der Laserleistung. Hierzu wird das Licht auf einen Quecksilber-Cadmium-Tellurid Photodetektor (*Vigo System PC-10.6*) fokussiert. Aufgrund des Photodetektoren dieser Wellenlängenklasse inhärenten starken Rauschens wegen der geringen Photonenenergie von $E = \frac{hc}{\lambda_{\text{CO}_2}} \approx 0,117 \text{ eV}$, wird ein Lock-In-Verstärker zur Verbesserung des Signal-zu-Rauschen Verhältnisses eingesetzt. Die für den Lock-In-Verstärker benötigte Modulation wird durch langsames Modulieren der Lasercavity mittels eines in den Laser integrierten Piezoaktuators erreicht, wobei die langsame Modulationsrate von 23 Hz hauptsächlich der hohen Masse des Resonatorspiegels geschuldet ist. Die periodische Längenänderung des Laserresonators wird so gering gehalten, dass es in der Regel nicht zu Modensprüngen während des Abtastens kommt. Die Stabilisierung der Laserausgangsleistung kann nun durch Minimierung des Ausgangssignals des Lock-In-Verstärkers vorgenommen werden, was durch Regelung einer DC-Offsetspannung für den Piezoaktor mittels eines PI-Reglers realisiert wurde. Eine detaillierte Beschreibung dieses Verfahrens findet sich in der Masterarbeit von S. Z. Hassan [82].

Der Hauptpfad des Lichts durchläuft einen akustooptischen Modulator (*IntraAction AGM-406B1*) zur Steuerung der Laserleistung und örtlicher Modulation am Ort des Dipolfallenpotentials. Wegen der Laserwellenlänge im mittleren Infrarotbereich kommt in diesem AOM ein Einkristall aus Germanium zum Einsatz, welcher bei ausreichender Transparenz bei 10,6 μm eine hohe Leistungszahl aufweist ($M_{2,\text{Ge}} = 840 \cdot 10^{-18} \text{ s}^3/\text{g}$ [83]). Trotz der hohen Leistungszahl wird aufgrund der invers-quadratischen Abhängigkeit der Beugungseffizienz eine vergleichsweise hohe Radiofrequenzleistung von bis zu 30 W benötigt, was eine aktive Kühlung des Kristalls mittels Wasser nötig macht. Die nullte Ordnung wird in einen luftgekühlten Strahlblocker geleitet, während die erste Ordnung mit einem Teleskop aus ZnSe Linsen aufgeweitet wird, um im Anschluss durch einen optischen Zugang in die Vakuumkammer geleitet zu werden. Innerhalb der Vakuumkammer befindet sich ein weiteres Teleskop, dessen Linsen mechanisch mit Mikrometerschrauben außerhalb der Kammer feinjustiert werden können. Im Fokus der ersten Linse entsteht so eine Strahltaile von etwa $w_0 = 21 \text{ μm}$ bei

maximaler Lichtleistung der ersten Beugungsordnung von 32 W, was zu einer maximalen Falltiefe von etwa $U_{\text{dip}} = 3,3 \text{ mK}$ führt.

Zur Verbesserung der Umladeeffizienz von der magneto-optischen- in die Dipolfalle, wird die Dipolfalle während des Umladeprozesses durch Frequenzmodulation der Radiofrequenz des AOMs räumlich aufgeweitet. Die Modulationsfrequenz wird mit 50 kHz so hoch gewählt, dass das effektive Potential für die gefangenen Atome dem zeitlichen Mittel des modulierten Potentials entspricht. Eine detaillierte Analyse für die Wahl geeigneter Frequenzen und Modulationstiefen findet sich in [84]. Um eine höhere Langzeitstabilität zu erreichen, wurde auf die Verwendung der in der Vergangenheit genutzten unstabilisierten spannungsgesteuerten Oszillatoren zugunsten eines intern frequenz- und amplitudenmodulierbaren Signalgenerators (*Rohde & Schwarz SMT06*) verzichtet, dessen Ausgangssignal danach nur noch einen TTL gesteuerten RF Schalter (*Mini-Circuits ZYSW-2-50DR+*) und einen RF Leistungsverstärker passiert (*Empower SKU 1057*).

4.2 Optisches Gitter

Optischer Aufbau

Zur weiteren Manipulation der Atome kommt im Experiment ein eindimensionales optisches Gitter zum Einsatz, welches durch zwei rotverstimmte Laserstrahlen realisiert wird. Beide Laserstrahlen werden vom gleichen Laser erzeugt, dessen Licht im weiteren Verlauf in zwei Einzelstrahlen aufgeteilt wird. Der schematische optische Aufbau ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Als Laser kommt auch für das optische Gitter ein Diodenlaser mit Trapezdiode (*Toptica DLX110*) zum Einsatz. Das Licht passiert zunächst einen optischen Isolator zum Schutz des Lasers vor Rückreflektionen. Daraufhin werden zwei Nebenstrahlen von jeweils wenigen Milliwatt Leistung abgeteilt, von denen einer in ein Fabry-Pérot-Interferometer eingekoppelt wird, um den Einzelmodenbetrieb des Lasers zu prüfen. Der zweite Nebenstrahl wird in eine Einmodenfaser eingekoppelt und dient der periodischen Kontrolle der Lichtwellenlänge, welche auf 783,5 nm justiert wurde. Aufgrund der vergleichsweise großen Rotverstimmung zur ^{87}Rb D2-Linie wird auf eine, über die interne Temperaturstabilisierung der Laserdiode hinausgehende, Frequenzstabilisierung des Lasers verzichtet. Da im experimentellen Verlauf vergleichsweise hohe Lichtleistungen von bis zu 50 mW pro Strahl am Ort der kalten Atome auftreten, ist es von besonderer Wichtigkeit, keine nahresonanten Photonen an den Atomen zu streuen. Da gerade Trapezlaserdioden in den Randbereichen zu erhöhter Spontanemission neigen können, wird eine weitere spektrale Filterung des Laserstrahls vorgenommen. Hierzu kommt ein weiteres externes holographisches Reflexionsgitter (*Ondax PLR808-92.5-12-17.5-1.5*) zum Einsatz, welches vom Lichtstrahl zweimal passiert wird. Durch Justage des Gitterwinkels auf maximale Emission bei 783,5 nm in die später folgenden Fasern werden etwaige spontan emittierte Photonen weiter unterdrückt. Nach Anpassung des Strahldurchmessers wird der Strahl in zwei Teilstrahlen gleicher Leistung geteilt. Diese passieren jeweils einen akustooptischen Modulator (*Crystal Technology 3200-121*), deren

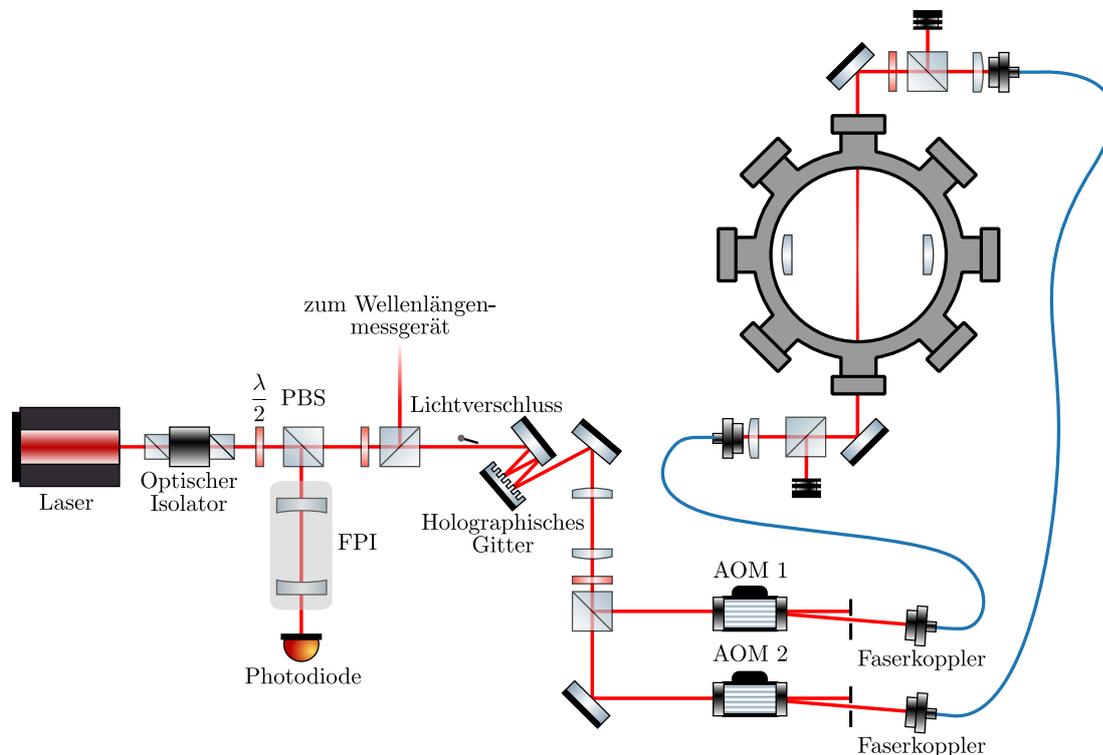


Abbildung 4.6: Aufbau und Strahlengang des Gitterlasers. Das Licht des gitterstabilisierten Diodenlasers wird in zwei Nebenstrahlen und einen Hauptstrahl aufgeteilt. Einer der Nebenstrahlen passiert ein Fabry-Pérot-Interferometer, zur Kontrolle des Einmodenbetriebs des Lasers, ein weiterer wird in ein Wellenlängenmessgerät gekoppelt und dient der Kontrolle der Laserwellenlänge. Der Hauptstrahl passiert zweimal ein holographisches Reflexionsgitter, welches der Wellenlängenfilterung dient. In Folge dessen wird der Strahl in zwei Teilstrahlen zerlegt, welche beide jeweils einen akustooptischen Modulator passieren, durch welche die Frequenzmodulation des Gitters erreicht wird. Das Licht beider Strahlen wird jeweils in eine polarisationserhaltende Einmodenfaser eingekoppelt und mit mikrofokussierenden Linsen durch optische Zugänge in die Vakuumapparatur geleitet, wo die Strahlen sich gegenläufig im Bereich der Dipolfallenposition treffen. Ein mechanischer Lichtverschluss verhindert das Eintreffen von Streulicht am Ort der Atome in der Vakuumapparatur solange kein optisches Gitter benötigt wird. Verwendete Abkürzungen: *AOM* - akustooptischer Modulator, *FPI* - Fabry-Pérot-Interferometer, $\lambda/2$ - $\lambda/2$ Verzögerungsplatte, *PBS* - polarisierender Strahlteilerwürfel.

erste Beugungsordnungen in polarisationserhaltende Einmodenfasern eingekoppelt werden. Die beiden Fasern werden zur Unterdrückung von mechanischen und thermischen Einflüssen in gedämmten Kabelkanälen zur Vakuumkammer geführt, wo sie mittels zweier Faserauskoppler (*Schäfter + Kirchhoff 60FC-4-M8-10*) mit direkt montierten mikrofokussierenden Linsen (*Schäfter + Kirchhoff 5M-S150-08-S*) in die Kammer an den Ort der Dipolfalle fokussiert werden. Mittels dieses Aufbaus wird ein Strahldurchmesser im Fokus von etwa $170\ \mu\text{m}$ erreicht.

Für die hier genutzten Vier-Photonen-Gitter wird Laserlicht mit π , σ_+ und σ_- Polarisation benötigt, weshalb die Polarisation der beiden Strahlen am Ort der Atome beinahe senkrecht gewählt wurde. Durch das Anlegen eines magnetischen Offsetfeldes, welches nicht in Richtung der Strahlachsen zeigt, kann die Quantisierungsachse der Atome so gewählt werden, dass auf diese Weise alle experimentell benötigten Polarisierungen des Gitterlichts auftreten [74, 85].

Radiofrequenz Aufbau

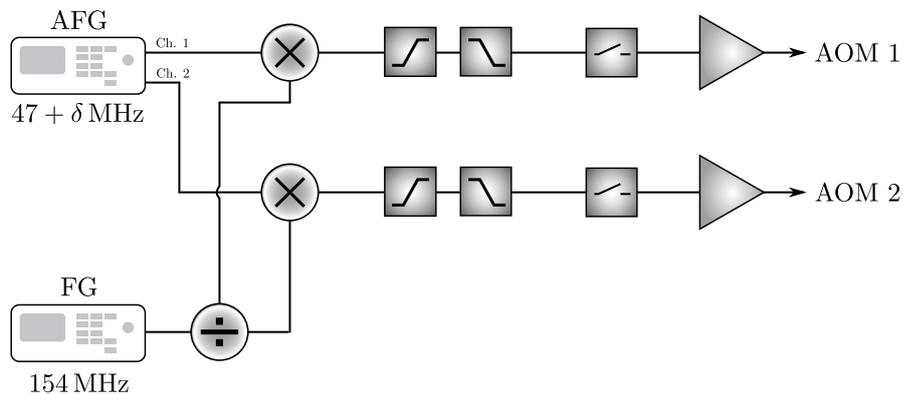


Abbildung 4.7: Schematischer Aufbau der Signalerzeugung für die akustooptischen Modulatoren (AOM) zur Erzeugung der Gitterlaserstrahlen. Die Signale werden zunächst als Arbiträrfunktionen an den Arbiträr-funktionsgenerator (AFG) übermittelt und mit einem 154 MHz Signal eines weiteren Funktionsgenerators (FG) mittels Doppelgegentaktmischer auf die Mittenfrequenz der akustooptischen Modulatoren hochgemischt. Nach Filterung des Signals passieren diese je einen Radiofrequenzschalter und einen Leistungsverstärker.

Die für die Experimente benötigten Frequenzen des optischen Gitters zur Manipulation der Atome können dem Licht dank der akustooptischen Modulatoren durch entsprechende Modulation der Mittenfrequenz der selbigen aufgeprägt werden. Der hier verwendete Aufbau basiert auf der Verwendung eines Arbiträr-funktionsgenerators mit hoher Speichertiefe (*Keysight 33612A*), welcher mit einer Speichertiefe von bis zu 64 Megapunkten die vollständig digitale Synthese der verwendeten Signale für beide AOMs ermöglicht.

Da die Achse des Gitters mit der Gravitationsachse übereinstimmt, wird für Experimente, in denen die Atome nicht mittels der Dipolfalle oder mittels magnetischer Felder entgegen der Gravitationskraft gehalten werden, ein frequenzmoduliertes Gitter erzeugt. Die Frequenzmodulation muss hierbei so gewählt werden, dass das Gitter aus dem atomaren Bezugssystem in Ruhe erscheint:

$$f_{\text{Lattice}} = f_c - \frac{2g}{\lambda_{\text{Laser}}}t \quad (4.1)$$

mit der Mittenfrequenz der AOMs f_c , der Erdbeschleunigung g und der Laserwellenlänge des

Gitterlasers λ_{Laser} [73]. Diese lineare Frequenzmodulation wird im Experiment auf das von oberhalb der Kammer eintreffende Licht aufmoduliert. Zusätzliche Frequenzverschiebungen und Frequenzmodulationen für den gleichen Laserstrahl können zum Einsatz kommen, um mittels bewegter Gitter verschiedene Impulsklassen von Atomen zu adressieren oder um beschleunigte Gitter zu erzeugen [59].

Während für den von oben kommenden Laserstrahl somit im regulären Ablauf nur Frequenzrampen abgefahren werden, werden die eingesetzten Pulse zur Beeinflussung der Atome hier auf den von unten in die Kammer eintreffenden Laserstrahl aufmoduliert. Auf diese Weise können die Atome bewusst mittels Bragg- oder Raman-Pulsen Impulsänderungen erfahren und es können ihnen Phaseninformationen eingeprägt werden [59].

Aufgrund der beschränkten Bandbreite und der rasch anwachsenden Anzahl nötiger Abtastpunkte bei der direkten Synthese von Signalen entlang der Mittenfrequenz der AOMs von $f_c = 201$ MHz, wird die eigentliche Signalsynthese stattdessen bei einer Mittenfrequenz von $f_{\text{AFG}} = 47$ MHz durchgeführt und die entstehenden Signale mittels eines Doppelgegentaktmischers (*Mini-Circuits ZAD-1-1+*) auf die benötigte Frequenz hochgesetzt. Das hierfür benötigte Oszillatorsignal von $f_{\text{LO}} = 154$ MHz wird mit Hilfe eines Signalgenerators (*Hameg HM8134-2*) erzeugt, welcher zeitgleich der Erzeugung des 10 MHz Signals für die Phasenregelschleife des Arbiträrfunctionsgenerators dient. Die so erzeugten modulierten Radiofrequenzsignale passieren jeweils einen Tiefpass- (*Mini-Circuits BLP-250+*) und einen Hochpassfilter (*Mini-Circuits BHP-175+*), um unerwünschte Frequenzen, welche bei der Frequenzhochsetzung auftreten, zu unterdrücken. Außerdem passieren sie einen TTL gesteuerten RF-Schalter (*Mini-Circuits ZYSWA-2-50DR+*), welcher sowohl zur stärkeren RF-Signalunterdrückung in experimentellen Phasen ohne optische Gitterpotentiale dient, als auch das Anschneiden der RF-Signale durch das Echtzeitkontrollsystem ermöglicht, welches aus technischen Gründen nicht auf dasselbe 10 MHz Signal der Signalgeneratoren phasenstabilisiert werden kann. Dies erlaubt je nach Situation die Erzeugung von jitterarmen Signalen in Situationen, in denen alle relevanten Pulse rein durch Modulation der RF-Signale erzeugt werden können, sowie das Anschneiden der Signale zur Jitterreduktion in Situationen, in denen RF-Signale mit anderen Steuersignalen des Echtzeitsystems kombiniert werden müssen. Zuletzt erreichen die aufbereiteten Radiofrequenzsignale jeweils einen 2 W Leistungsverstärker (*Mini-Circuits ZHL-1-2W+*), um genügend Radiofrequenzleistung zur Ansteuerung der AOMs bereitzustellen. Der Aufbau ist schematisch in Abbildung 4.7 dargestellt.

4.3 Abbildungssystem

Zur Detektion der Atome nach Ablauf des experimentellen Zyklusses dient eine Absorptionsabbildung, welche die Position der Atome als Schatten im absorbierten Lichtstrahl eines resonanten Laserstrahls auf eine Kamera abbildet. Wie in Abbildung 4.4 bereits ersichtlich, kommt zu diesem Zwecke der Kühllaser zum Einsatz, welcher auf den $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ zu $|5P_{3/2}, F = 3\rangle$ Übergang stabilisiert wurde. Da sich die Atome zu diesem Zeitpunkt

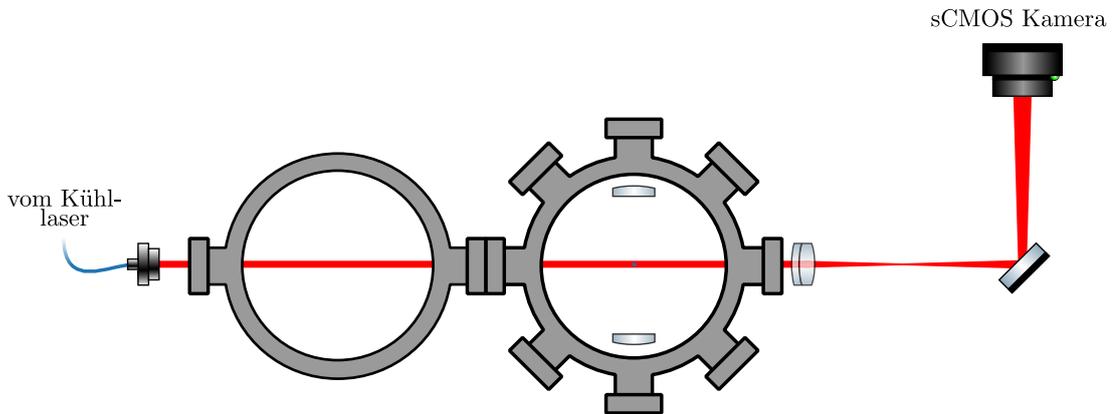


Abbildung 4.8: Aufbau und Strahlengang der Absorptionsabbildung. Licht des Kühllasers wird mittels einer Einmodenfaser zur Vakuumpumpe transportiert und dort durch einen optischen Zugang in die Vorkammer eingebracht, wo es durch den Verbindungsflansch bis in die Hauptkammer an den Ort der gefangenen Rubidiumatome vordringen kann. Durch Absorption dieses resonanten Lichtstrahls entsteht ein Schattenbild der Atome, welches durch einen weiteren optischen Zugang mittels eines achromatischen Doublets von 80 mm Brennweite über einen zusätzlichen Spiegel auf einer sCMOS Kamera abgebildet wird.

allerdings im $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ Hyperfeinzustand befinden, müssen sie zunächst in den passenden Hyperfeinzustand $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ transferiert werden. Dies wird entweder durch kurzes ($\tau_{\text{RP}} \approx 300 \mu\text{s}$) Einstrahlen des Rückpumplasers erreicht, welcher die Atome in den passenden Zustand zurücktransferiert oder durch die Verwendung eines kurzen ($\tau_{\text{MW}} \approx 100 \mu\text{s}$) Mikrowellenpulses realisiert.

Die Mikrowellenpulse werden durch einen Signalgenerator (*Rohde & Schwarz SMR-20*) erzeugt und mittels eines TTL gesteuerten Radiofrequenzschalters (*Mini-Circuits ZYSWA-2-50DR*) durch das Echtzeitsystem gesteuert. Ein Leistungsverstärker mit maximaler Ausgangsleistung von 3 W (*Mini-Circuits ZVE-3W-83+*) verstärkt das erzeugte Mikrowellensignal, welches über einen Richtkoppler (*Mini-Circuits ZGDC35-93HP+*) bis zur Hohlleiterantenne an der Vakuumpumpe vordringt. Als Frequenz dient die Hyperfeinaufspaltung des $|5S_{1/2}\rangle$ von

$$f_{\text{MW}} = 6,834682611 \text{ GHz.} \quad (4.2)$$

Eine detaillierte Beschreibung des Mikrowellenaufbaus findet sich in [73].

Da für die Auswertung der experimentellen Daten für die Simulation des Quanten-Rabi Modells neben den Flugzeitaufnahmen zur Bestimmung der Impulsverteilung der Atome auch die Verteilung im Ortsraum eine wichtige Rolle spielt, wurde im Rahmen der Erstellung dieser Arbeit auch das abbildende System überarbeitet. Die maximal erreichbare Auflösung ist in diesem Aufbau in der Hauptsache durch die Distanz der Atome vom zentralen Fenster der Vakuumpumpe und die Größe des Fensters begrenzt, wobei die Größe der abbildenden

Linse durch weitere Aufbauten mechanisch auf etwa 50 mm beschränkt ist. Aus diesem Grund wurde zur Abbildung ein achromatisches Doublet mit einem Durchmesser von $d_{\text{Linse}} \approx 50,8$ mm gewählt (*Thorlabs AC508-080-B*), welches nach Herstellerangaben in dieser Konfiguration nahezu beugungsbegrenzte Abbildungsleistung für unser System bieten sollte. Abbildung 4.8 zeigt den entsprechenden Aufbau schematisch. Aus geometrischen Gründen wird die Abbildung mittels eines Spiegels zur Kamera (*Andor Zyla 5.5 sCMOS*) geleitet, wobei der Abbildungsmaßstab mit 1 : 12 bei einer Distanz zu den Atomen von etwa 86,7 mm so gewählt wurde, dass die Pixelgröße des sCMOS Sensors von 6,5 μm die Abbildungsleistung nicht einschränkt.

Abbildung 4.9(a) demonstriert die Abbildungsleistung des vorher verwendeten Systems, welches in [74] genauer beschrieben wurde. Hierzu wurde der bestehende Aufbau außerhalb des Experiments erneut aufgebaut und eine positive 1951 USAF Auflösungsstafel (*Thorlabs RIDSIP*) am Ort der Atome aufgestellt. Das kleinste noch auflösbare Element ist hier Gruppe 7, Element 2 mit 144 Linienpaaren pro Millimeter. Im Vergleich dazu finden sich in Abbildung 4.9(b) die Ergebnisse des entsprechenden Testaufbaus mit dem aktuellen Abbildungssystem, wobei hier zunächst auf den in Abbildung 4.8 gezeigten Spiegel verzichtet wurde. Hier konnte auch das kleinste verfügbare Element (Gruppe 7, Element 6) mit 228 Linienpaaren pro Millimeter noch erfolgreich aufgelöst werden. Die Verwendung eines weiteren Spiegels im Abbildungspfad sorgt hierbei für keine sichtbare Verschlechterung des Auflösungsvermögens, wie Abbildung 4.9(c) zeigt. Abbildung 4.10 zeigt jeweils einen Schnitt durch die Abbildung des Elements 6 der Gruppe 7. Hier ist die deutlich verbesserte Abbildungsleistung gut zu erkennen, die Linien werden mit dem beschriebenen Abbildungssystem noch deutlich aufgelöst. Es ist davon auszugehen, dass der externe Versuchsaufbau hierbei eine Obergrenze für die maximale Abbildungsleistung darstellt, da die optische Qualität des verbauten Fensters nicht geprüft werden konnte und mögliche weitere sphärische Aberrationseffekte durch dieses nicht berücksichtigt wurden.

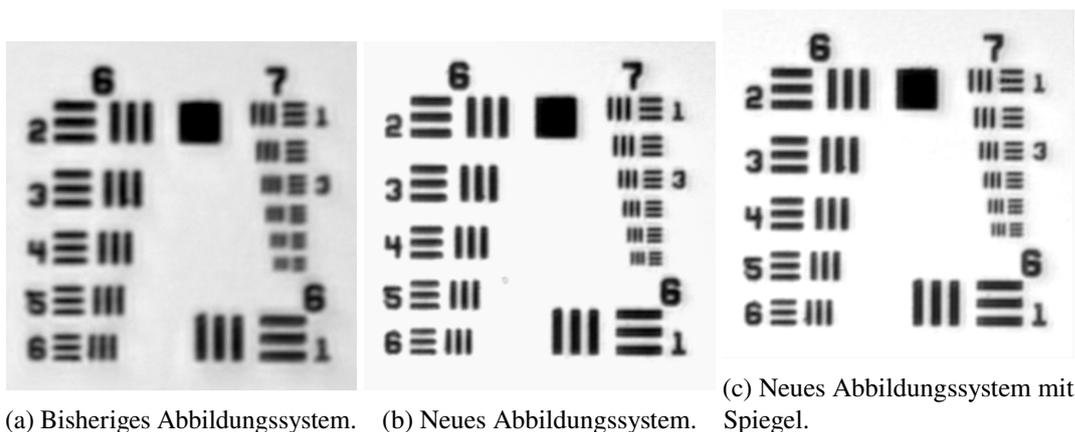
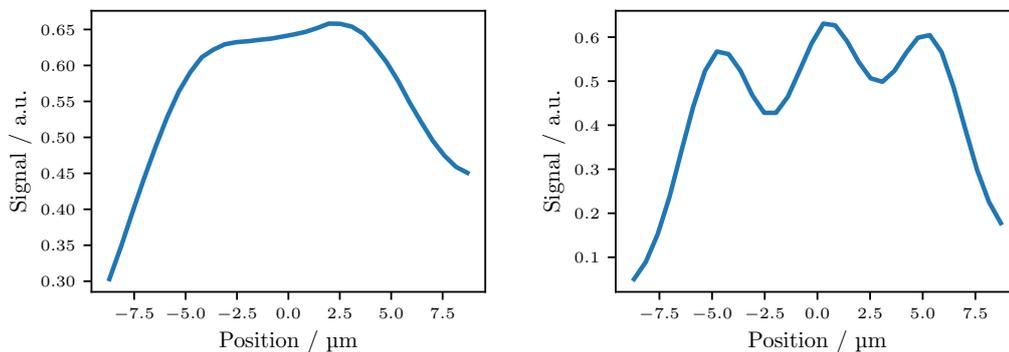


Abbildung 4.9: Messung der Abbildungsleistung, jeweils in einem Aufbau außerhalb des Experiments mit Hilfe einer positiven 1951 USAF Auflösungsstafel. Zu sehen sind die Gruppen 6 und 7, wobei das kleinste Element (Gruppe 7, Element 6) 228 Linienpaare pro Millimeter darstellt.



(a) Bisheriges Abbildungssystem.

(b) Neues Abbildungssystem.

Abbildung 4.10: Schnitt durch Element 6 der Gruppe 7 des (a) bisherigen und des (b) neuen Abbildungssystems als Funktion der Distanz.

4.4 Experimenteller Ablauf

Die Steuerung des experimentellen Zyklus' wird durch ein Echtzeitkontrollsystem (*Jäger Computergesteuerte Messtechnik GmbH ADwin-Pro I*) realisiert, welches die Ansteuerung von digitalen TTL Kanälen sowie analogen Kanälen mit einer Ausgangsspannung zwischen -10 V und 10 V mit einer Zeitgranularität von minimal $4\text{ }\mu\text{s}$ erlaubt. Der Ablauf gliedert sich dabei grob in sieben Teilabschnitte, welche in Abbildung 4.11 für die wichtigsten Signale schematisch dargestellt wurden. Der genaue Ablauf jedes Zyklus' wird mittels einer in Python implementierten Steuerungssoftware festgelegt und in die einzelnen Kontrollsignale für das Echtzeitsystem übersetzt. Nach Übertragung dieser Daten werden alle weiteren Geräte, deren Parameter regelmäßig geändert werden, über die entsprechenden VISA-Schnittstellen programmiert, so dass danach die komplette zeitliche Steuerung durch Steuersignale des Echtzeitsystems vorgenommen werden kann.

Im Folgenden wird der Ablauf in den einzelnen Phasen aufgelistet:

MOT

Zu Beginn eines jeden experimentellen Zyklus' wird zunächst eine magneto-optische Falle aus Rubidium-87 Atomen geladen. Hierzu wird der Rubidium-Dispenser von einem Strom durchflossen, was zur Abgabe einer definierten Menge von Rubidiumatomen in die Vakuumkammer führt. Zur gleichen Zeit wird der Strom durch das zuvor als MOT-Spulen bezeichnete Antihelmholtzspulenpaar auf 80 A hochgefahren, sowie Rückpump- und Kühllaserstrahlen in die Kammer geleitet. Die Verstimmung des Kühllasers beträgt während dieser Phase in etwa drei Linienbreiten bei einer Laserleistung von etwa 120 mW .

Vor dem Ende der typischerweise 25 s andauernden MOT-Phase kommt es zu einem 2 s Überlapp der magneto-optischen Falle und des Dipolfallenlaserstrahls, welcher bei maximaler

Intensität von 32 W in die Vakuumkammer eingestrahlt wird. Die zuvor beschriebene räumliche Aufweitung des Dipolfallenpotentials ist zu diesem Zeitpunkt maximal, um den räumlichen Überlapp zwischen den beiden Fallen für den Umladeprozess zu maximieren. Zu diesem Zeitpunkt befinden sich typischerweise $5 \cdot 10^8$ Atome in der MOT.

Dunkel-MOT

An die MOT-Phase schließt sich eine zeitliche Dunkel-MOT Phase an. Der genaue Ablauf hierzu wurde in [84] detailliert beschrieben. Hierzu wird über eine Dauer von 120 ms die Frequenz des Kühllasers in drei linearen Abschnitten um maximal 150 MHz gegenüber des Kühlübergangs rot verstimmt. Dies dient sowohl dem Ausgleich des durch die eingestrahlt Dipolfalle auftretenden AC-Stark-Effekts, als auch der Verringerung der Photonenstreurrate, was ein weiteres Absinken der Ensembletemperatur zur Folge hat und somit die Umladeeffizienz in die optische Dipolfalle erhöht. Am Ende der Dunkel-MOT Phase werden der Kühl- und der Rückpumpplaserstrahl abgeschaltet, so dass nur die in der optischen Dipolfalle gehaltenen Atome weiter gefangen bleiben.

Evaporationsphase

Zu Beginn der Evaporationsphase befinden sich typischerweise $5 \cdot 10^6$ Atome in der optischen Dipolfalle, welche zu dieser Zeit eine maximale Tiefe von $U_{\text{dip}} = 3,3$ mK hat. Durch evaporatives Kühlen wird nun die Gesamttemperatur des Atomensembles gesenkt. Hierzu wird die Tiefe der optischen Dipolfalle stetig verringert, was zu forcierter Evaporation führt. Die energetischsten Teilchen des Ensembles verlassen dabei die Dipolfalle, während die restlichen Atome durch Stöße zu einer niedrigeren Temperatur rethermalisieren. Aufgrund der Boltzmann-Verteilung der thermischen Atome sollte die zeitliche Entwicklung der Dipolfalle exponentiell erfolgen [56], experimentell führt dies jedoch im Vergleich zu einer linearen Näherung der exponentiellen Form durch drei lineare Rampen zu keiner deutlichen Veränderung der erreichbaren Atomzahl im kondensierten Zustand, weshalb hier drei lineare Evaporationsrampen zum Einsatz kommen. Während die Laserleistung der Dipolfalle heruntergeregelt wird, wird auch die räumliche Ausweitung der Falle adiabatisch heruntergefahren, so dass am Ende des Evaporationsprozesses keine Aufweitung durch Modulation des AOMs stattfindet. Die Gesamtdauer des Evaporationsprozesses wurde experimentell optimiert und betrug während der hier präsentierten Messungen etwa 5,5 s, in denen die Laserleistung der optischen Dipolfalle auf etwa 1‰ der Anfangsleistung heruntergeregelt wurde.

Durch das Anlegen eines magnetischen Gradientenfeldes mittels der MOT-Gradientenspulen ist es möglich, variable Potentiale für die verschiedenen Zeeman-Zustände der Atome zu erzeugen, so dass durch passende Wahl der Magnetfelder die Evaporation eines gewählten m_F Zustands bevorzugt werden kann [72]. Diese Technik wird hier genutzt, um ein spinpolarisiertes Kondensat im Zustand $m_F = -1$ zu erhalten, wobei die Spin-Polarisation durch selektive Abbildung der Atome mittels Mikrowellenübergängen und durch das Anlegen eines

Stern-Gerlach Magnetfeldgradienten während der Flugzeitmessung nachgewiesen wurde. Typischerweise wird so ein Bose-Einstein Kondensat von etwa 30 000 Atomen erzeugt. Um Einflüsse durch interatomare Wechselwirkung während der Simulationsphase zu reduzieren, wurden für die Durchführung der Experimente geringere Atomzahlen von etwa 2 500 Atomen verwendet, was durch gezielte Evaporation in flacheren Fallen als zur Kondensation nötig erreicht wurde.

Für den weiteren experimentellen Verlauf ist die radiale Fallenfrequenz ω des Dipolfallenpotentials von zentraler Bedeutung, da von dieser u.a. die Kopplungsstärke des simulierten Quanten-Rabi Systems bestimmt ist. Um die Fallenfrequenz entsprechend anpassen zu können, wird das Potential am Ende des Evaporationsprozesses innerhalb von 250 ms auf bis zu 0,7 % der Ursprungsleistung angehoben, was einer Erhöhung der Laserleistung um etwa den Faktor 7 entspricht, wodurch die radiale Fallenfrequenz zwischen etwa $\frac{\omega_{\text{rad, min}}}{2\pi} = 250 \text{ Hz}$ und $\frac{\omega_{\text{rad, max}}}{2\pi} = 700 \text{ Hz}$ variiert werden kann.

Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells

Der Ablauf der Quantensimulation teilt sich in drei distinkte Teilphasen: Präparation, Zeitentwicklung und Analyse. Vor Beginn dieser kritischen experimentellen Phase wird das Experiment zur Verminderung magnetischer Störeinflüsse auf die Netzfrequenz synchronisiert.

Die Präparation der Atome erfolgt an der Bandkante der Dispersionsrelation des Vier-Photonen-Gitters. Da die Atome zu diesem Zeitpunkt am tiefsten Punkt der optischen Dipolfalle ruhen, werden die Atome mittels Bragg-Pulsen zu Impulsen von $\pm 2\hbar k$ transferiert. Dies erlaubt nicht nur die Präparation von Eigenzuständen von $\hat{\sigma}_x$, sondern auch die Präparation von Eigenzuständen von $\hat{\sigma}_z$ durch die Verwendung zweier Bragg-Pulse, um eine Besetzung von 50 % der Atome mit einem Impuls von $+2\hbar k$ und 50 % der Atome mit einem Impuls von $-2\hbar k$ zu erzeugen. Die Wahl der relativen Phase der Bragg-Pulse zueinander ermöglicht hierbei die Präparation in den $|\downarrow\rangle$ als auch in den $|\uparrow\rangle$ Zustand des simulierten Zwei-Niveau-Systems. Um zu starke anfängliche Oszillation in der Dipolfalle vor Beginn der Zeitentwicklung zu vermeiden, muss die Präparation möglichst schnell erfolgen, ohne dabei jedoch die Frequenzschärfe, welche für die Bragg-Pulse benötigt wird, zu verlieren. Als Kompromiss wurden Präparationszeiten von $\tau_{\text{prep}} = 50 \mu\text{s}$ gewählt, was einer maximalen Dauer von etwa 3 % einer Oszillationsperiode selbst in den tiefsten verwendeten optischen Dipolfallenpotentialen entspricht.

Um die Zeitentwicklung der Quantensimulation wie in 3.2 beschrieben durchzuführen, müssen das quasiharmonische Potential der Dipolfalle und das periodische Potential des Vier-Photonen-Gitters zeitlich und räumlich überlagert werden. Somit wird nach der Präparation des Systems zusätzlich zur bereits auf die richtige Fallenfrequenz vertieften optischen Dipolfalle auch das Gitterpotential von passender Intensität eingestrahlt. Die Dauer mit der die Atome der Kombination dieser Potentiale ausgesetzt sind entspricht somit der Dauer der Zeitentwicklung des QRM Hamiltonians. Um Aussagen über die zeitliche Entwicklung der Observablen treffen zu können, wird das System vor der Analyse und Detektion unterschiedlich lange den

entsprechenden Potentialen ausgesetzt.

Am Ende der Simulation schließt sich entsprechend der zu beobachtenden Observablen eine passende Analysephase an. Im einfachsten Fall wird hier schlicht durch abruptes Abschalten der Potentiale eine Rückprojektion der aktuellen Besetzungszustände auf die freien atomaren Zustände erreicht und entweder durch direkte Detektion die Verteilung der Atomwolke im Ortsraum oder nach einer Freifall- und Expansionsphase von 10 ms im Impulsraum bestimmt. Da die Besetzung des Zwei-Niveau-Systems jedoch von der Phasenlage der Wellenpakete an der Bandkante bestimmt ist, genügt zu dessen Bestimmung die instantane Abschaltung der Potentiale nicht. Stattdessen schließt sich hier das Einstrahlen eines weiteren Vier-Photonen-Gitters an, welches durch Frequenzmodulation eine stetig wachsende Beschleunigung relativ zu den Atomen erfährt. Der Prozess erfolgt hierbei langsam genug, um ein adiabatisches Folgen der Atome entlang den Bändern in der Dispersionsrelation zu erreichen. Nach dem Abschalten dieses Potentials erlaubt es die Flugzeitdetektion die Besetzung der Bänder zu messen.

Detektion

Die Detektion der Atome erfolgt wie zuvor beschrieben durch die Absorptionsabbildung der Atome auf eine sCMOS-Kamera. Um ein verfrühtes Aufheizen des Atomensembles vor der eigentlichen Aufnahme bei der Abbildung der Atome im Ortsraum zu vermeiden, kommt hier ein Mikrowellenpuls zum Umpumpen der Atome in den $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ Zustand zum Einsatz, während für die Flugzeitaufnahmen aufgrund der höheren experimentellen Stabilität das Umpumpen mittels des Rückpumpasers bevorzugt wird. Nach erfolgtem Umpumpen werden insgesamt drei Bilder im Abstand von 80 ms erstellt, wobei die ersten beiden Bilder jeweils durch einen Puls des resonanten Kühllasers belichtet werden, während das dritte Bild nur durch das verbleibende Streulicht belichtet wird. Somit enthält das erste Bild den Schattenwurf der Atome, welche das Licht des Kühllaserstrahls absorbiert haben. Aufgrund der Photonenstreuung erhitzt sich das Atomensemble, was zur Zerstörung des zu messenden Zustandes führt. Somit enthält das zweite Bild nur noch das Licht des Kühllasers, während das letzte Bild als Dunkelbild der Untergrundkorrektur dient.

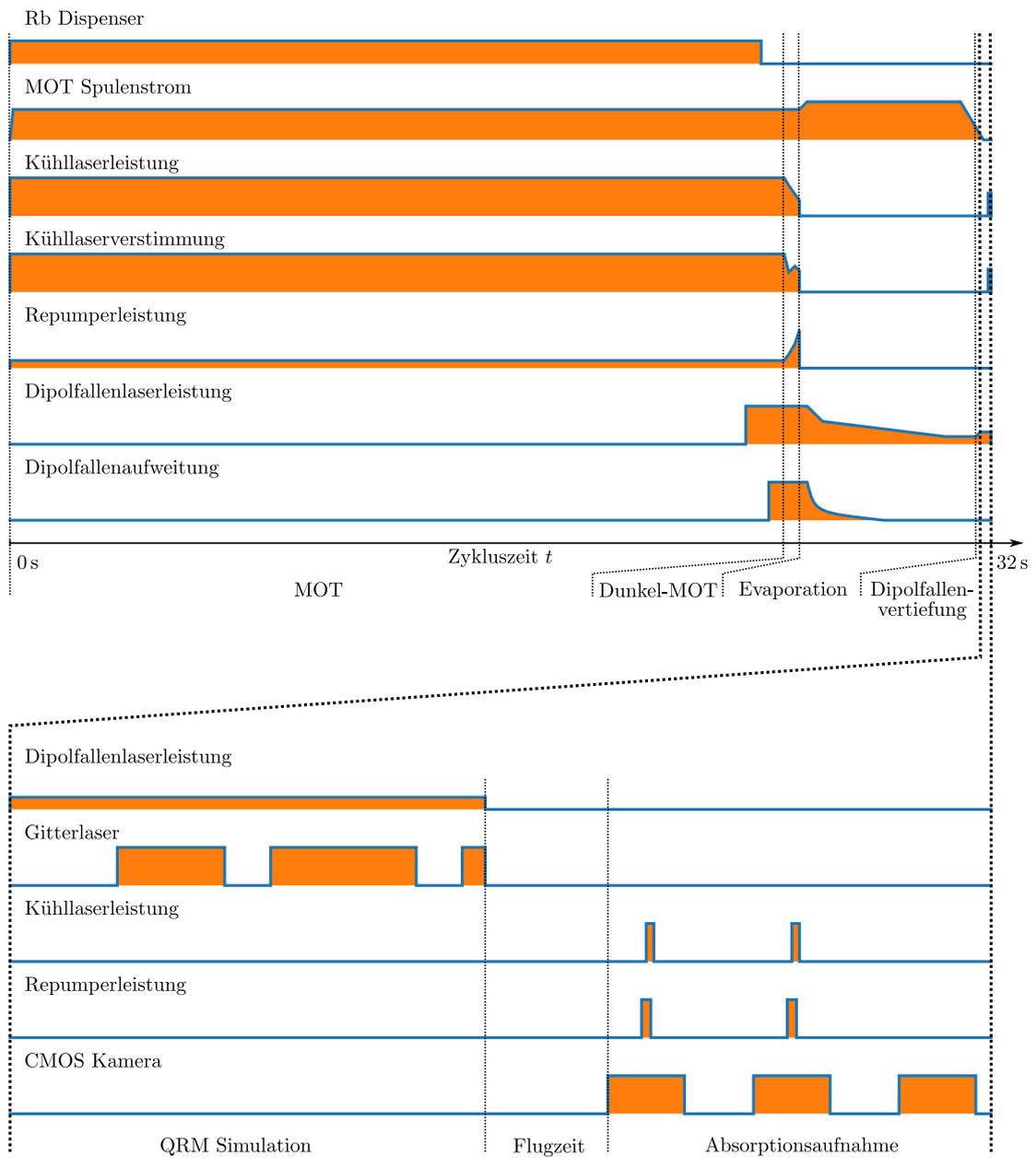


Abbildung 4.11: Schematischer zeitlicher Ablauf des Experiments.

Experimentelle Resultate

In diesem Kapitel werden experimentelle Ergebnisse zur Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells in tiefer starker Kopplung präsentiert. Zunächst werden die hierzu benötigten Kontrollmessungen der Fallenfrequenzen besprochen, welche Aufschluss über die erreichbaren Parameter des Quanten-Rabi Modells geben. Weiterhin wird die Messung der Abbildungsleistung und der Punktspreizfunktion der Abbildung in-situ untersucht. Abschließend werden die Messungen verschiedener dynamischer Erwartungswerte des Quanten-Rabi Modells für verschiedene Anfangszustände des Systems diskutiert.

5.1 Charakterisierung des harmonischen Fallenpotentials

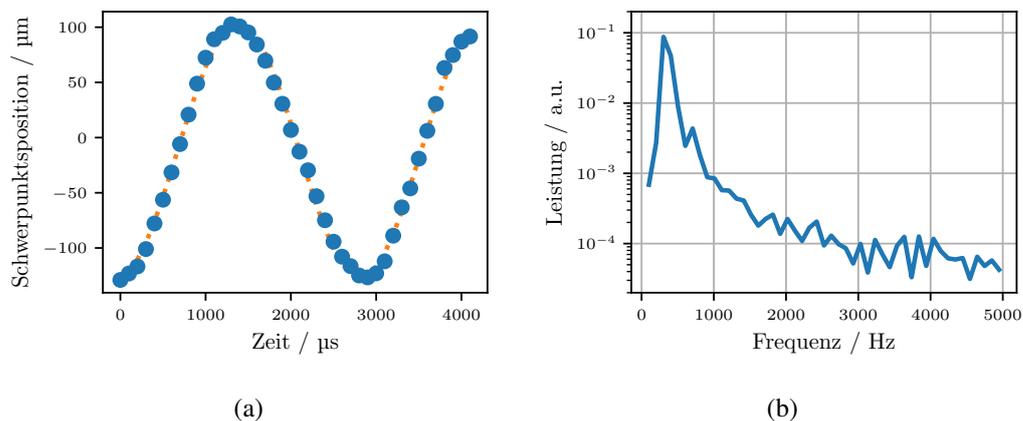


Abbildung 5.1: Beispielhafte Flugzeitaufnahme einer Oszillation der Atome in der optischen Dipolfalle, bei einer Frequenz von (347 ± 1) Hz. Die bestimmten Schwerpunktspositionen sind in Abbildung (a) in blau dargestellt, die nichtlineare Regression einer harmonischen Schwingung ist mit gestrichelt orangefarbener Linie dargestellt. Abbildung (b) zeigt das Leistungsspektrum der diskreten Fourier-Transformation der Zeitreihe in logarithmischer Darstellung.

Als erstes soll hier die optische Dipolfalle charakterisiert werden, welche das nahezu harmonische Potential für die Simulation des Quanten-Rabi Modells erzeugt.

Obwohl das Potential der optischen Dipolfalle aufgrund der Strahlgeometrie des erzeugenden Laserstrahls ein nahezu gaußförmiges Potential ist, kann es wegen der geringen Auslenkung auf dem Grund der Falle als nahezu harmonisches Potential betrachtet werden. So ist die minimale Fallentiefe, welche hier zur Simulation des Quanten-Rabi Modells genutzt wurde, etwa $31E_R$ (mit der Rückstoßenergie E_R aus Gleichung 2.44) tief, während die in der Falle oszillierenden Atome maximal kinetische Energien von $E_{\text{atom,max}} = 2E_R$ durch die Gitterstrahlen erhalten, so dass eine lineare Näherung der Rückstellkraft durch die Dipolfalle gerechtfertigt erscheint. Mit Gleichung 2.35 und dem gaußförmigen Strahlprofil des Dipolfallenlaserstrahls ergibt sich mit der minimalen Tiefe $U_{\text{min}} = 31E_R$ ein radiales Fallenpotential der Form

$$U_{\text{dip}}(r) = -U_{\text{min}} e^{-2\frac{r^2}{w_0^2}} \quad (5.1)$$

mit der Strahltaile $w_0 = 21 \mu\text{m}$. Wird Gleichung 5.1 in seine MacLaurinsche Reihe [86] zur Ordnung r^2 entwickelt ergibt sich als Näherung ein harmonisches Potential der Form

$$U_{\text{dip, harm}}(r) \simeq -U_{\text{min}} + \frac{2U_{\text{min}}}{w_0^2} r^2. \quad (5.2)$$

Die Abweichung durch diese Näherung bei der gegebenen maximalen Auslenkung $E_{\text{atom,max}}$ beträgt somit

$$\left| -U_{\text{min}} e^{-\frac{E_{\text{atom,max}}}{U_{\text{min}}}} - (-U_{\text{min}} + E_{\text{atom,max}}) \right| \simeq 0,22 \%, \quad (5.3)$$

was der oberen Grenze für die Abweichung von der harmonischen Potentialform im hier durchgeführten Experiment entspricht.

Abbildung 5.1 zeigt dies beispielhaft an den Flugzeitdaten, welche für eine Schwingung der Atome in der optischen Dipolfalle bei einer Fallenfrequenz von $\frac{\omega}{2\pi} = (347 \pm 1) \text{ Hz}$ aufgenommen wurden. Hierzu wurden die Atome mittels eines durch die Gitterstrahlen erzeugten Bragg-Pulses mit einem Impuls von $2\hbar k$ präpariert und die Zeitentwicklung in der optischen Dipolfalle mit Hilfe von Flugzeitaufnahmen beobachtet. Für die hier dargestellte Messung wurde bewusst eine Frequenz am unteren Ende des verwendeten Parameterbereichs verwendet, da die harmonische Näherung besser für hohe Frequenzen gilt, so dass die hier gezeigten Messungen dem ungünstigsten experimentell auftretenden Fall entsprechen. In den erhaltenen Absorptionaufnahmen wurde der Schwerpunkt der Atome mit nichtlinearer Regression bestimmt, welche als blaue Punkte in Abbildung 5.1(a) dargestellt wurden. Die mittels nichtlinearer Regression angepasste harmonische Schwingung ist als gestrichelte, orange Linie dargestellt. Bereits hier zeigt sich aufgrund der Güte der nichtlinearen Regression, dass die Annahme eines harmonischen Potentials berechtigt erscheint. Zur weiteren Untersuchung wurde weiterhin die diskrete Fouriertransformation der erhaltenen Daten berechnet, welche in Abbildung 5.1(b) als Leistungsspektrum dargestellt wurde. Da

hohe Abtastraten durch die hohe Zyklusdauer des Experiments zu sehr langen Messdauern führen würden, ist die spektrale Auflösung und die maximal bestimmbare Frequenz dieser Methode begrenzt. Dennoch zeigt sich auch im bestimmten Leistungsspektrum nur ein Peak mit hoher Leistungsdichte, was als weitere Rechtfertigung für die ursprüngliche Annahme dient.

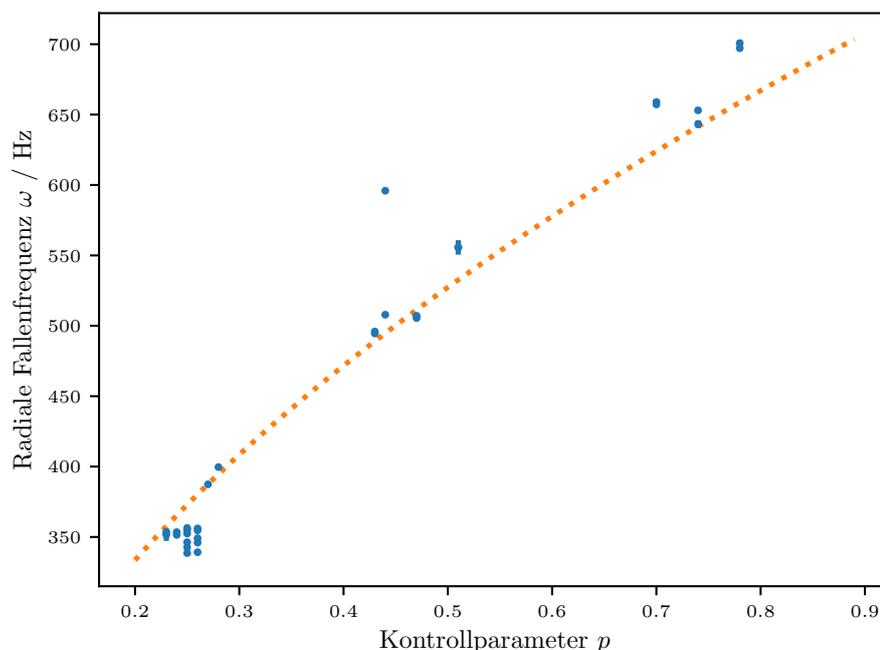


Abbildung 5.2: Abhängigkeit der gemessenen radialen Fallenfrequenz ω vom Kontrollparameter p , der die RF-Leistung für den AOM regelt. Die gemessenen Daten sind als blaue Datenpunkte dargestellt, die aufgrund der Leistung und Strahlgeometrie errechneten Fallenfrequenzen sind als gestrichelte, orange Linie dargestellt.

Obgleich eine Kalibration der Dipolfallenlaserleistung in Abhängigkeit des Kontrollparameters, welcher die RF-Leistung am AOM regelt, erfolgt ist, kommt es zu Langzeitabweichungen der Laserleistung über den Verlauf von Stunden. Da es aus technischen Gründen im Vergleich zu Laserlicht im sichtbaren oder Nahinfrarotbereich nicht möglich war, diese Schwankungen im Rahmen der erstellten Arbeit vollständig zu kompensieren, wurde die radiale Fallenfrequenz an jedem Messtag zu Beginn der Messungen und am Ende der Messungen bestimmt. Etwaige über die Messung aufgetretene Abweichungen dienen so als untere Abschätzung der in den Messdaten zu erwartenden Abweichung von ω . Abbildung 5.2 zeigt die Abhängigkeit der gemessenen radialen Dipolfallenfrequenz ω vom eingestellten Kontrollparameter zur Regelung der RF-Leistung. Dieser entspricht der prozentualen Endleistung des Dipolfallenlaserstrahls ausgehend von der vorgenommenen Kalibration.

Die erwartete Abhängigkeit der Fallenfrequenz von der endgültigen Lichtleistung des erzeugenden Laserstrahls ist gut zu erkennen, ebenso wie die durch die bereits angesprochenen

Leistungsabweichungen verursachten Abweichungen, welche zur Streuung der Datenpunkte um die erwarteten Fallenfrequenzen führen.

5.2 Periodisches Gitterfallenpotential

Neben dem harmonischen Fallenpotential wird für die Realisierung des Quanten-Rabi Modells weiterhin ein periodisches Potential benötigt. Damit das hier verwendete Vier-Photonen-Gitterpotential mit einer räumlichen Periodizität von $\frac{\lambda}{4}$ gleichzeitig über ausreichende Tiefe zur Erzeugung der gewünschten gemiedenen Kreuzung verfügt, sowie eine ausreichende Unterdrückung gegen Zwei-Photonen-Prozesse bietet (vgl. auch [74]), muss eine ausreichende Verstimmung δ gewählt werden. Die Abhängigkeit der Gittertiefe von der Zwei-Photonen-Verstimmung ist in Abbildung 5.4(b) dargestellt. Neben der bestimmten Oszillationsfrequenz ist auch der Anteil der Atome, welche durch Zwei-Photonen-Prozesse für die Oszillation an der Bandkante verloren gehen, in Abhängigkeit der Verstimmung dargestellt. Ein Kompromiss wurde experimentell bei einer Zwei-Photonen-Verstimmung von $\delta = 160$ kHz gefunden, bei der sich Rabi-Oszillationsfrequenzen an der Bandkante bis etwa 6 kHz einstellen lassen.

Die Bestimmung der Potentialtiefe erfolgt hier über die direkte Messung der Rabi-Oszillationen von Atomen, welche zuvor mittels eines π -Bragg-Pulses mit einem Impuls von $2\hbar k$ oder $-2\hbar k$ versehen wurden. Eine Beobachtung der Atome anhand von Flugzeitabbildungen nach der unterschiedlich langen Einwirkung des periodischen Potentials zeigt entsprechende gedämpfte Oszillationen. Um insbesondere im Falle von flachen Potentialtiefen Messergebnisse zu erhalten, welche nicht durch die harmonische Schwingung in der optischen Dipolfalle beeinflusst werden, wurden diese Messungen stattdessen an fallenden Kondensaten durchgeführt. Der Ablauf der Messungen gestaltet sich somit folgendermaßen: Erzeugung eines spin-polarisierten Kondensats, Ausschalten der optischen Dipolfalle, Fallzeit von 2 ms, Einstrahlen eines π -Bragg-Pulses, um die Atome mit einem Impuls von $2\hbar k$ zu versehen, Einwirkung des periodischen Fallenpotentials, Absorptionsabbildung der Atome nach 10 ms Flugzeit.

Da die Atome hier relativ zum durch die Gitterlaserstrahlen erzeugten Potential durch die Gravitation beschleunigt werden, wird der von unten kommende Laserstrahl mit Hilfe des AOMs wie in Gleichung 4.1 beschrieben verstimmt, mit der Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ und der Wellenlänge des Gitterlaserstrahls $\lambda_{\text{lat}} = 783,5 \text{ nm}$.

Beispielhaft wurde das Ergebnis einer solchen Messung in Abbildung 5.3(a) dargestellt, wobei die Abbildung die relative Besetzung des Zustands bei $2\hbar k$ zeigt, in welchem die Atome ursprünglich präpariert wurden. Die angepasste Funktion ist eine exponentiell gedämpfte harmonische Oszillation. Die starke Dämpfung ist ein Effekt der Umwandlung der inneren Energie in kinetische Energie des Atomensembles, verursacht durch die Öffnung der Dipolfalle, und die hohe Frequenz- und somit Impulsschärfe der immer längeren Pulse des Vier-Photonen-Gitters. Dies zeigt auch direkt eine Begrenzung dieser Messmethode zur Bestimmung der Gittertiefe auf, da mit fallender Potentialtiefe und somit fallender Oszillationsfrequenz immer längere Pulsdauern des Vier-Photonen-Gitters zur Bestimmung einer vollständigen Oszillation

nötig werden, was zeitgleich dafür sorgt, dass ein immer geringerer Teil des Atomensembles tatsächlich durch das periodische Potential gebeugt wird.

Zur Bestimmung der Oszillationsfrequenz bei geringen Potentialtiefen wurde somit auf eine indirekte Messmethode zurückgegriffen, bei welcher statt der Oszillationsfrequenz die Lichtleistung hinter den Einmodenfasern der Gitterlaserstrahlen bestimmt wurde. Um Abweichungen der Lichtleistungen durch thermische Effekte der AOMs zu vermeiden, wurden vergleichsweise kurze Pulsdauern von $500\ \mu\text{s}$ verwendet und die Messung der Lichtleistung erfolgte mit ausreichend schnellen Photodioden (*Thorlabs DET10A*). Die Anpassung der erhaltenen Daten an die direkt beobachteten Oszillationen erfolgte durch nichtlineare Regression via

$$\omega_q(P_{\text{rf}}) = (a \cdot U_{\text{pd},1} + b \cdot U_{\text{pd},2})^2 \quad (5.4)$$

mit dem Ausgangssignal der ersten Photodiode $U_{\text{pd},1}$ und dem Ausgangssignal der zweiten Photodiode $U_{\text{pd},2}$. Die Verwendung zweier getrennter Variablen zur Anpassung ist durch einen möglicherweise unterschiedlichen Strahlfokus der beiden Gitterlaserstrahlen am Ort der Atome motiviert. Die erhaltene Kalibration ist in Abbildung 5.4(a) dargestellt und zeigt im Überlappbereich der Daten eine gute Übereinstimmung.

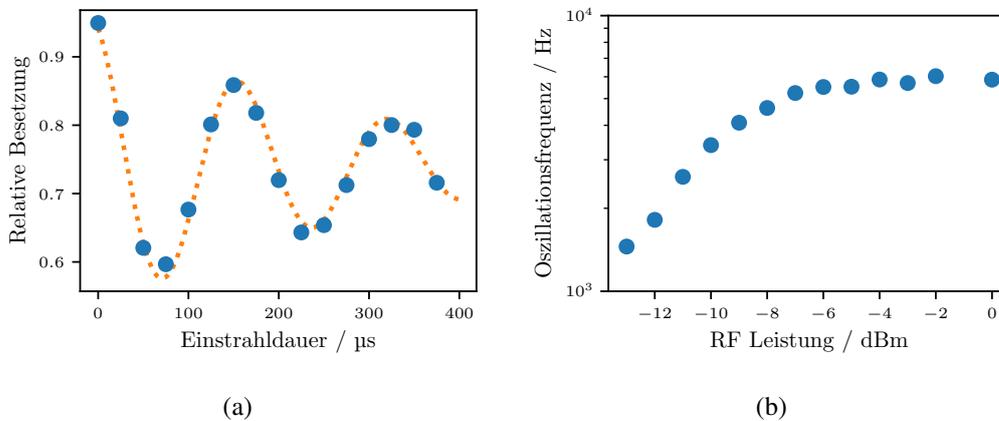


Abbildung 5.3: Bestimmung der Oszillationsfrequenz des Vier-Photonen-Gitters. (a) zeigt eine beispielhafte Messung der Oszillationsfrequenz zwischen Atomen mit einem Impuls von $-2\hbar k$ und $2\hbar k$ in Abhängigkeit von der Einstrahldauer des Gitterpotentials, welche hier zu $\frac{\omega_q}{2\pi} = (6030 \pm 70)$ Hz bestimmt wurde. Die blauen Datenpunkte zeigen dabei die relative Besetzung der Atome bei $2\hbar k$, während die gestrichelte, orange Linie die angepasste, gedämpfte harmonische Schwingung darstellt. (b) zeigt eine Übersicht der gemessenen Oszillationsfrequenzen gegen die am Funktionsgenerator eingestellte Radiofrequenzleistung.

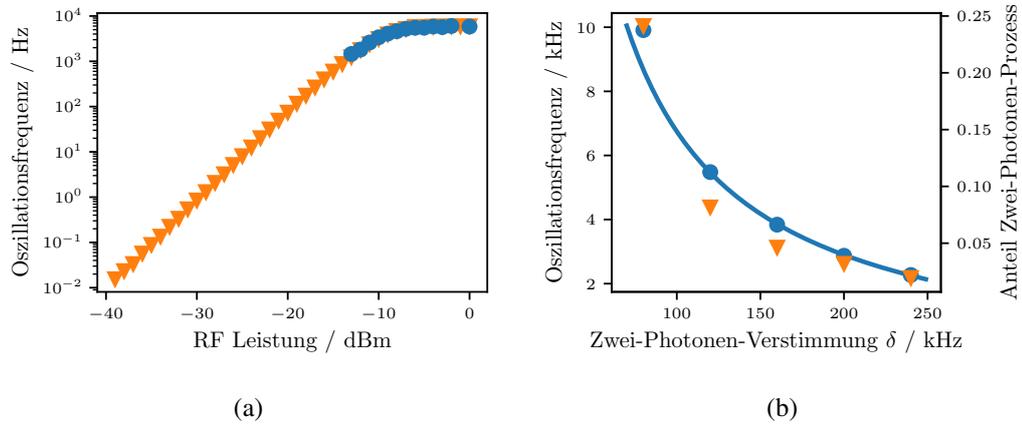


Abbildung 5.4: Kalibration der Oszillationsfrequenz des Vier-Photonen-Gitters und Abhängigkeit der Gittertiefe von der Zwei-Photonen-Verstimmung δ . (a) zeigt die Anpassung der mittels Photodioden hinter den Einmodenfasern gemessenen Lichtleistung an die tatsächlich gemessenen Oszillationsfrequenzen in Abhängigkeit von der am Funktionsgenerator eingestellten Radiofrequenzleistung. Die gemessenen Oszillationsfrequenzen sind als blaue Punkte dargestellt, die angepassten Daten der Messung mittels Photodioden als orange Dreiecke. (b) zeigt die Abhängigkeit der gemessenen Oszillationsfrequenzen im Vier-Photonen-Gitter von der Zwei-Photonen-Verstimmung δ als blaue Punkte (der erwartete Verlauf ist als blaue Linie dargestellt) und den Anteil an Atomen, der durch Zwei-Photonen-Prozesse gebeugt wird, als orange Dreiecke.

5.3 Testmessungen zur Abbildung ultrakalter atomarer Ensembles

Um den exakten Abbildungsmaßstab des abbildenden Systems zu bestimmen, wurde auf die Abbildung von atomaren Kondensaten im freien Fall bei unterschiedlichen freien Flugzeiten nach Ausschalten des Dipolfallenpotentials zurückgegriffen. Die erhaltenen Daten sind in Abbildung 5.5 dargestellt, dabei sind die durch Bestimmung der Schwerpunktsposition erhaltenen Daten als blaue Punkte dargestellt, während die durch die Erdbeschleunigung erwartete Fallbewegung mit einer orangen, gestrichelten Linie dargestellt wurde. Die korrekte Skalierung der Daten wurde dabei durch nichtlineare Regression an die zu erwartende Fallbewegung bestimmt und es ergibt sich eine Distanz pro Pixel von

$$\Delta x_{\text{Pixel}} = (0,545 \pm 0,002) \mu\text{m}. \quad (5.5)$$

Die physikalische Pixelgröße der verwendeten Kamera beträgt $l_{\text{Pixel}} = 6,5 \mu\text{m}$ [87], so dass sich für die verwendete Abbildung ein Abbildungsmaßstab von

$$\beta = 11,92 \pm 0,04 \quad (5.6)$$

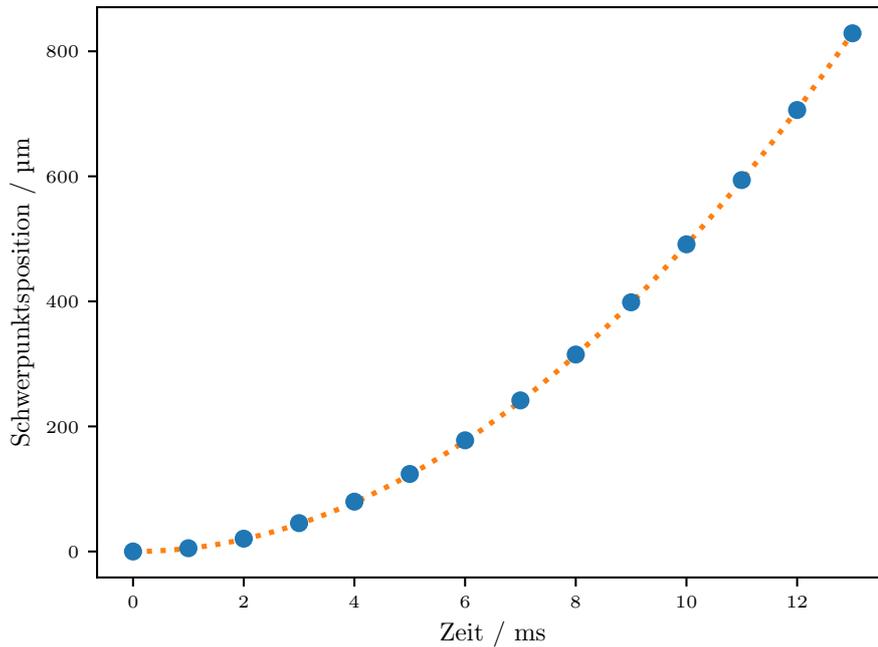


Abbildung 5.5: Kalibration des Abbildungsmaßstabs mit Hilfe von im Schwerfeld der Erde fallenden Atomen. Die orange, gestrichelte Linie entspricht der theoretisch erwarteten Schwerpunktsbewegung aufgrund der Erdbeschleunigung von $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, die blauen Punkte entsprechen den gemessenen Schwerpunktspositionen nach Bestimmung des Abbildungsmaßstabs durch nichtlineare Regression. Der so bestimmte Abbildungsmaßstab beträgt $1 : (11,92 \pm 0,04)$.

ergibt. Dies entspricht grob dem zuvor geplanten Abbildungsmaßstab von $1 : 12$, wobei die verbleibende entstandene Abweichung in der Hauptsache auf die nicht exakt zu bestimmende Distanz zwischen Fenster und Kondensat zurückzuführen ist.

Die maximal zu erwartende Separation der beiden auftretenden Impulskomponenten $\pm 2\hbar k$ im Ortsraum in der optischen Dipolfalle kann durch Gleichsetzen der kinetischen und potentiellen Energie bestimmt werden:

$$\frac{(4\hbar k)^2}{2m} = \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (5.7)$$

Auflösen nach x ergibt die maximale Auslenkung der beiden Ordnungen von

$$x_{\text{Separation,max}} = \frac{4\hbar k}{m\omega}. \quad (5.8)$$

Für die verwendeten Dipolfallenpotentialtiefen liegen diese im Bereich von etwa $5 \mu\text{m}$ und $10 \mu\text{m}$, so dass weiterhin eine Beschränkung durch die erreichte Auflösung zu erwarten ist. Um den Einfluss der Abbildung auf die Messungen so gering wie möglich zu halten wurde hier versucht, die Punktantwort des abbildenden Systems zu vermessen, um so

durch mathematisches Entfalten der gemessenen Bilder mit der Punktantwort eine bessere Rekonstruktion der Atomverteilung im Ortsraum zu erreichen.

Direkte Messmethoden der Punktantwort, wie sie beispielsweise in der Mikroskopie Anwendung finden [88], können im vorliegenden Fall nicht angewendet werden, da die Objektebene aufgrund der Vakuumanlage nicht zugänglich ist. Da durch die Vakuumanlage zusätzliche optische Elemente im Abbildungspfad stehen, welche nicht hinreichend genau in einem weiteren Aufbau repliziert werden können, wurde auch auf die Messung der Punktantwort in einem weiteren externen Aufbau verzichtet. Stattdessen wurde durch sehr tiefe Evaporation ein kleines Atomensemble von weniger als 500 Atomen pro Aufnahme präpariert und die optische Dipolfalle im Anschluss adiabatisch auf eine Tiefe von etwa $U_{\text{dip}} = 200E_R$ geregelt, um einen möglichst engen radialen Einschluss der Atome zu erreichen, ohne die Temperatur des Ensembles zu stark zu beeinflussen. Auf diese Weise wurde versucht, ein möglichst kleines Objekt im Objektraum der Abbildung zur Bestimmung der Punktantwort zu erhalten, wobei aus dem Verhältnis der radialen und axialen Fallenfrequenzen zusammen mit der gemessenen axialen Halbwertsbreite der Atomwolke von etwa $20\ \mu\text{m}$ eine radiale Halbwertsbreite von ca. $6\ \mu\text{m}$ zu erwarten ist. Dies liegt nah an der Auflösungsgrenze des abbildenden Linsensystems, insbesondere, da durch die radialsymmetrische Verteilung ein Teil der Atome vor und ein Teil der Atome hinter der Fokusebene der Abbildung zu liegen kommt. Da die in diesem Experiment erzeugbaren Atomwolken nur in der radialen Richtung einen Einschluss nahe der Auflösungsgrenze aufweisen, wird im Weiteren die Punktantwortfunktion des abbildenden Systems nur in einer Dimension entlang der radialen Richtung bestimmt und als näherungsweise radialsymmetrisch angenommen. Um dem durch die geringe Anzahl an Atomen verursachten geringen Signal-zu-Rauschen Verhältnis entgegenzuwirken, wurden 50 Aufnahmen unter identischen Bedingungen erstellt und gemittelt.

Abbildung 5.6(a) zeigt das entstandene, gemittelte Bild der Atome. Deutlich sind hier die durch die Abbildung verursachten Abbildungsfehler zu sehen, welche durch die Auflösungsbegrenzung des abbildenden Systems und die geringe Tiefenschärfe verursacht werden. Abbildung 5.6(c) zeigt einen Schnitt durch das erhaltene Bild entlang der radialen Richtung (blaue Linie). Trotz der hohen Anzahl an gemittelten Bildern enthalten diese Daten weiterhin einen nicht vernachlässigbaren Anteil an Rauschen, was sie für eine direkte Verwendung zur Entfaltung weiterer Aufnahmen untauglich macht. Um trotzdem eine experimentell verwendbare Schätzung der Punktantwort zu erhalten, wurde das Hauptmaximum und die ersten vier Nebenmaxima durch Gaußfunktionen mittels nichtlinearer Regression genähert. Das Ergebnis dieser Näherung ist in der Abbildung orange gestrichelt dargestellt. Die auf diesem Weg bestimmte radialsymmetrische Näherung des Punktantwortfunktionskerns des abbildenden Systems $PSF(x, y)$ ist in Abbildung 5.6(b) zu sehen.

Die Halbwertsbreite des bestimmten zentralen Maximums entspricht mit einer Breite von ca. $6,5\ \mu\text{m}$ in etwa der Erwartung an die Größe der kleinsten auftretenden Atomwolken. Im Vergleich zu den an einer Auflösungsstafel getätigten Messungen, dargestellt in Abbildung 4.9, bei welchen noch 228 Linienpaare pro Millimeter aufgelöst werden konnten, ist die durch die Punktantwortfunktion bestimmte Auflösung somit etwas niedriger. Dies ist zum einen der nicht punktförmigen Atomwolke geschuldet, deren endliche Ausbreitung als Faltung in die

experimentell bestimmte Punktantwortfunktion einfließt, zum anderen eine Folge der Atomwolkenausdehnung vor und hinter der Fokusebene der Abbildung. Zusätzlich verursachen auch die optischen Zugänge der Vakuumkammer weitere sphärische Aberrationen, welche nicht adäquat im externen Aufbau nachgebildet werden konnten. Trotz dieser Einschränkungen hat sich die Entfaltung der erhaltenen Ortsraumaufnahmen mit der so bestimmten Punktantwortfunktion für die im Rahmen dieser Arbeit getätigten Messungen experimentell bewährt.

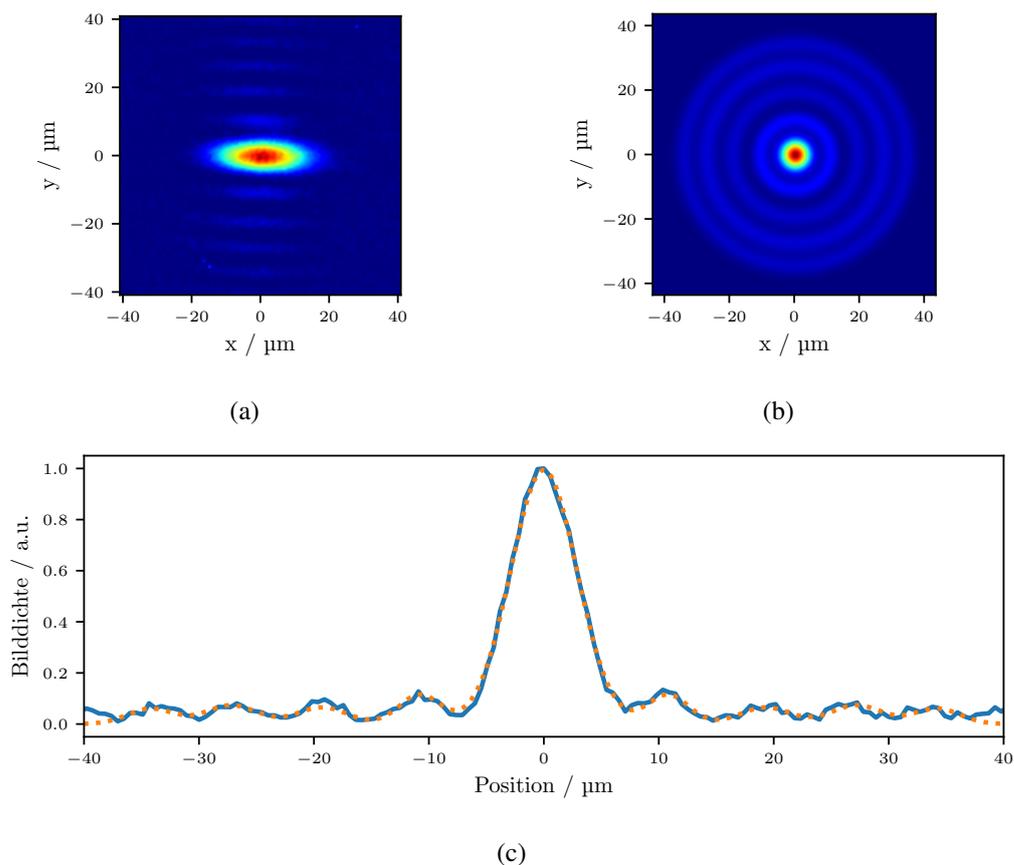


Abbildung 5.6: Messung der Punktantwortfunktion der verwendeten optischen Abbildung mittels Atomen. Abbildung (a) zeigt das Resultat von 50 gemittelte Absorptionsabbildungen im Ortsraum eines kleinen Kondensats bestehend aus weniger als 500 Atomen pro Bild. Abbildung (b) ist der durch Näherung des Hauptmaximums und der ersten vier Nebenmaxima entstandene, radialsymmetrische Kernel der durch die Anpassung bestimmten Punktantwortfunktion, welcher im weiteren Verlauf zur Entfaltung der Aufnahmen im Ortsraum verwendet wurde. Abbildung (c) zeigt einen zentralen Schnitt durch die in Abbildung (a) dargestellte Messung in radialer Richtung (blaue Linie) und die durch nichtlineare Regression angepasste Funktion bestehend aus fünf überlagerten Gaußfunktionen.

Ein Beispiel für das Resultat der Entfaltung mit dem erhaltenen Kernel mittels des iterativen Richardson-Lucy Verfahrens [89, 90] ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Die in Abbildung 5.7(a)

gezeigte Messung zeigt das Bild zweier atomarer Wellenpakete im Ortsraum, welche zu Beginn mit Hilfe zweier Bragg-Pulse jeweils mit einem Impuls von $2\hbar k$ bzw. $-2\hbar k$ versehen wurden. Nach einer viertel Oszillation im durch die optische Dipolfalle verursachten Potential (radiale Fallenfrequenz $\omega = (354 \pm 4)$ Hz) sind die Atome, entsprechend den Erwartungen aus Gleichung 5.8, im Ortsraum maximal separiert und werden durch das verwendete abbildende System noch deutlich getrennt. Trotzdem verursacht die Faltung mit der Punktantwortfunktion ein Verschmieren der beiden Ordnungen, was insbesondere für die spätere Bestimmung der bosonischen Anregungszahlen zu einer Verfälschung der Ergebnisse führt. Abbildung 5.7(b) zeigt die gleiche Aufnahme nach der Entfaltung mit dem in Abbildung 5.6(b) gezeigten Kernel $PSF(x, y)$. Hierbei ist deutlich eine Reduktion der durch die Auflösung des Abbildungssystems und die Ausdehnung der Atomwolken verursachten Abbildungsfehler und die sehr viel deutlichere Separation der Atomwolken erkennbar.

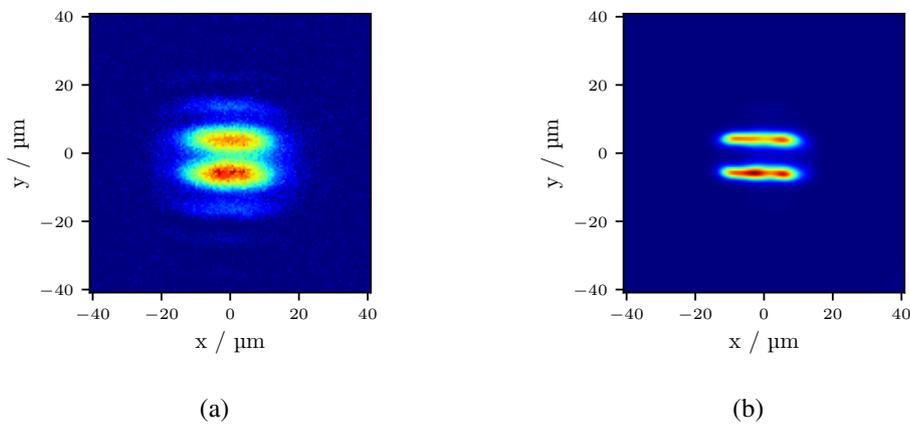


Abbildung 5.7: Resultat der Entfaltung von Ortsraumaufnahmen mit der genäherten Punktantwortfunktion des abbildenden Systems. Abbildung (a) zeigt zwei Atomwellenpakete, welche im Ortsraum um etwa $10 \mu\text{m}$ separiert sind. Deutlich ist hier der Einfluss der Auflösungsbegrenzung der Bilder erkennbar. Abbildung (b) zeigt das gleiche Bild, nachdem es mittels des Richardson-Lucy Algorithmus' mit der zuvor bestimmten Punktantwortfunktion des Systems entfaltet wurde. Die deutliche Reduktion der Abbildungsfehler und die höhere Separation der beiden Atomwolken ist deutlich erkennbar.

5.4 Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells: Präparation in Superpositionszuständen des Zwei-Niveau-Systems

Nach den beschriebenen vorbereitenden Messungen sollen nun Ergebnisse zur Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells in tiefer starker Kopplung mit den ultrakalten Atomen vorgestellt werden. Zu Beginn wird in diesem Abschnitt das Resultat von Messungen des

simulierten Quanten-Rabi Hamiltonians gezeigt, bei denen das Zwei-Niveau-System des simulierten Quanten-Rabi Hamiltonians in Zuständen des $\hat{\sigma}_x$ Operators präpariert wurde. Die Feldmode befindet sich zu Beginn der Zeitentwicklung im Vakuumzustand $|0\rangle$. Der Anfangszustand für alle hier gezeigten Messungen ist entsprechend:

$$\psi_{\text{ini}} = |N = 0, -2\hbar k\rangle = |N = 0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\rangle + |\uparrow\rangle). \quad (5.9)$$

Zunächst wird die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte $\langle x \rangle$, $\langle q \rangle$ und $\langle \sigma_x \rangle$ gezeigt, welche einen Überblick über die relevanten, von null verschiedenen Erwartungswerte für das Quanten-Rabi Modell in tiefer starker Kopplung und dispersiver tiefer starker Kopplung für den Anfangszustand ψ_{ini} aufzeigt. Insbesondere die zeitliche Entwicklung von $\langle \sigma_x \rangle$ demonstriert dabei eine der Eigenheiten dieser extremen Parameterbereiche. Weiterhin wird die zeitliche Entwicklung der Anregung der bosonischen Feldmode $\langle N \rangle$ untersucht, welche eindrücklich den Einfluss der sehr starken Kopplung in dem hier realisierten System demonstriert.

5.4.1 Messungen im Ortsraum

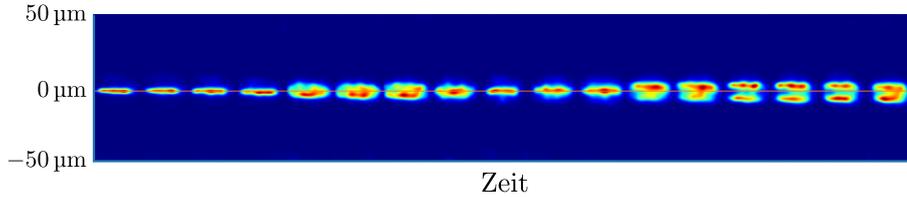


Abbildung 5.8: Beispiel für die beobachtete zeitliche Entwicklung der gefangenen Atome im Ortsraum. Die erste gemessene Verteilung der Atome auf der linken Seite entspricht dem ursprünglich präparierten Zustand, jede weitere Verteilung entspricht einer zeitlichen Entwicklung des Systems um $50 \mu\text{s}$. Die einzelnen Aufnahmen wurden entsprechend der Beschreibung in Abschnitt 5.3 mit der Punktantwortfunktion des abbildenden Systems entfaltet. Zur besseren visuellen Übersicht zeigt das Bild die Zeitentwicklung eines Anfangszustands von $|N = 0, \downarrow\rangle$ (siehe Gleichung 5.24).

Um die Zeitentwicklung des Erwartungswerts

$$\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m_{\text{Rb}}\omega}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (5.10)$$

zu bestimmen, wurden Aufnahmen der Atomdynamik im Ortsraum nach gleichzeitiger Einwirkung des harmonischen und des periodischen Potentials durchgeführt. Anhand der Dichte p_i der mit der Punktantwortfunktion des Abbildungssystems entfaltenen Absorptionsspektren kann somit der Erwartungswert von x durch Summation entlang eines vertikalen Schnittes

durch die Atomwolke der Form

$$\langle x \rangle \simeq \frac{\sum_{i=0}^N p_i x_i}{\sum_{i=0}^N p_i} \quad (5.11)$$

bestimmt werden, wobei x_i der durch die vorherige Kalibration bestimmten Position des entsprechenden Bildpunkts im Objektraum der Abbildung entspricht. Um den Einfluss des Hintergrundrauschens zu minimieren, wurde zuvor eine Hintergrundkorrektur der Bilder durchgeführt. Abbildung 5.8 zeigt beispielhaft die entfalteten Bilder einer solchen Messreihe.

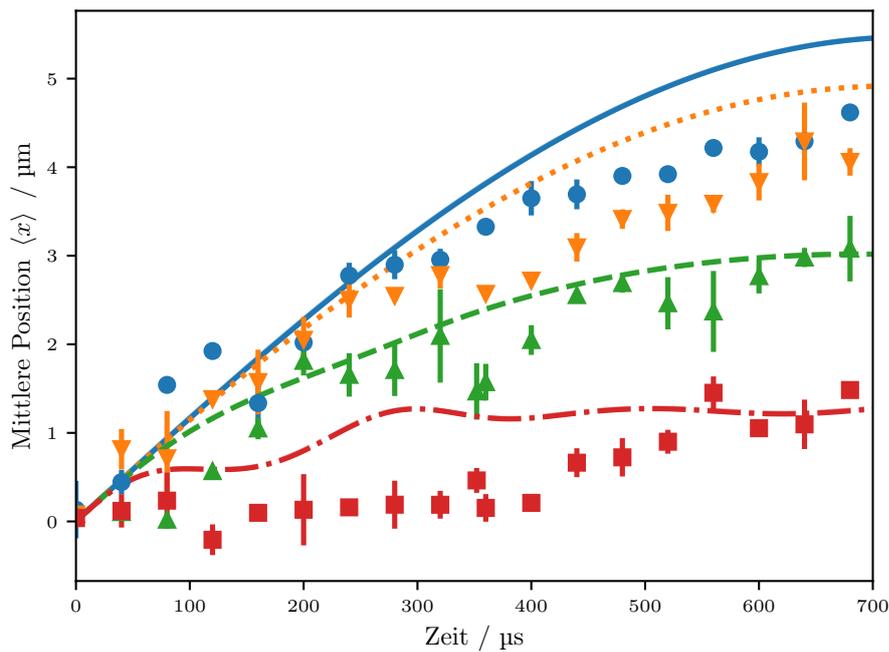


Abbildung 5.9: Zeitentwicklung der mittleren Position $\langle x \rangle$ des Systems mit einem Anfangszustand $|N = 0, -2\hbar k\rangle$ (siehe Gleichung 5.9). Die relative Kopplungsstärke beträgt bei diesen Messungen $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$. Hier gezeigt sind Messungen für Zwei-Niveau-Energieabstände $\frac{\omega_q}{2\pi}$ von 0 Hz (blaue Punkte), (586 ± 6) Hz (orange Dreiecke), $(1\,660 \pm 20)$ Hz (grüne Dreiecke) und $(3\,600 \pm 40)$ Hz (rote Quadrate). Die Ergebnisse der numerischen Simulation des Quanten-Rabi Modells sind als Linien dargestellt.

Abbildung 5.9 zeigt beispielhaft die Ergebnisse der Messungen für ein System mit relativer Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$ und unterschiedlichen Zwei-Niveau-Energieabständen ω_q zwischen 0 Hz und $(3\,600 \pm 40)$ Hz. Diese decken somit den Bereich der perturbativen tiefen starken Kopplung bis in die dispersive tiefe starke Kopplung ab. Wie anhand des Hamiltonians zu erwarten, entsprechen die Ergebnisse bei kleinen Werten von ω_q , gemäß dem Bereich der tiefen starken Kopplung, noch weitgehend einer ungestörten harmonischen Oszillation. Zunehmende Zwei-Niveau-Energieabstände führen zur Reduktion der beobachteten Oszillationsamplitude und stärker werdenden Anharmonizitäten der Bewegung, was

dem interessanten Bereich des Übergangs in die dispersive tiefe starke Kopplung entspricht. Im Vergleich zu geringeren Kopplungsstärken tritt im Bereich der tiefen starken Kopplung eine Oszillationsamplitude jenseits der ursprünglichen Ausbreitung des Anfangszustands auf, was hier auch experimentell bestätigt wird. Die numerischen Berechnungen für das Quanten-Rabi Modell bei der gegebenen Kopplung wurden in der Abbildung durch Linien der entsprechenden Farben dargestellt. Obwohl das optische Abbildungsvermögen nur knapp über der Auslenkung der hier beobachteten Dynamik liegt, konnte eine noch akzeptable Übereinstimmung zwischen Messdaten und den Erwartungen für das Quanten-Rabi Modell gefunden werden, die zumindest die korrekten Tendenzen abbildet.

Zusätzlich erlaubt uns die Messung der Dynamik für den entarteten Zwei-Niveau-Zustand von $\omega_q = 0$ Hz eine direkte Abschätzung der relativen Kopplungsstärke $\frac{g}{\omega}$ via

$$\frac{g}{\omega} = \frac{\langle x \rangle_{\max}}{x_{\text{HO}}} \quad (5.12)$$

mit der maximalen auftretenden Auslenkung $\langle x \rangle_{\max} = \frac{2\hbar k}{m_{\text{Rb}}\omega}$ und der Größe des harmonischen Oszillator Grundzustands $x_{\text{HO}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m_{\text{Rb}}\omega}}$. Für die in Abbildung 5.9 gezeigten Daten ergibt sich so eine relative Kopplungsstärke von

$$\left(\frac{g}{\omega}\right)_{\text{gemessen}} = 5,6 \pm 0,6. \quad (5.13)$$

Die Abweichung der so bestimmten Kopplungsstärke von der erwarteten Kopplungsstärke von etwa 14 % wird auf die vergleichsweise geringe optische Auflösung des abbildenden Systems zurückgeführt, die eine exaktere Bestimmung von $\langle x \rangle$ verhindert. Trotzdem befindet sich die errechnete relative Kopplungsstärke noch in der 2σ Umgebung des bestimmten Wertes.

5.4.2 Erwartungswert des Quasiimpulses \hat{q}

Die Zeitentwicklung des Erwartungswertes des Quasiimpulses des simulierten Systems

$$\langle q \rangle = -i\sqrt{\frac{m_{\text{Rb}}\omega}{2k}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (5.14)$$

wird auf ähnliche Weise wie die Zeitentwicklung von $\langle x \rangle$ bestimmt. Da hier allerdings der mittlere Quasiimpuls bestimmt wird, werden die Messungen im Impulsraum durchgeführt. Hierzu schließt sich der Einwirkung des kombinierten Potentials nach dem instantanen Abschalten der Potentiale eine Flugzeitphase von 10 ms an. Der Erwartungswert wird

daraufhin durch Summation entlang eines vertikalen Schnitts durch die Flugzeitbilder mittels

$$\langle q \rangle \simeq \frac{\sum_{i=0}^N p(i) q_i}{\sum_{i=0}^N p(i)} \quad (5.15)$$

durchgeführt, wobei der Quasiimpuls durch Kalibration der Flugzeitdaten mit Wellenpaketen von definierten Impulsen von $2\hbar k$ und $-2\hbar k$ durchgeführt wird. Entsprechend der Definition des Quasiimpulses in Abschnitt 3.2 kann so aus den gemessenen echten Impulsen der Quasiimpuls eines jeden Bildpunktes bestimmt werden. Ein Beispiel für eine solche Messung ist in Abbildung 5.10 dargestellt, bei welcher auf der linken y-Skala der echte Impuls und auf der rechten y-Skala der entsprechend zugeordnete Quasiimpuls gezeigt wird.

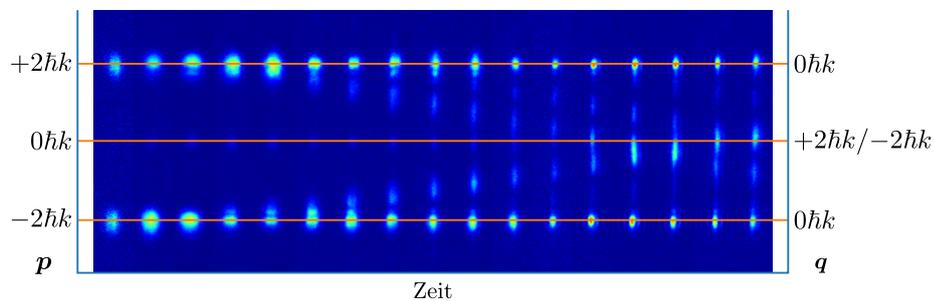


Abbildung 5.10: Resultat einer beispielhaften Messung der zeitlichen Entwicklung der beobachteten atomaren Dynamik im Impulsraum als Funktion der Wechselwirkungszeit. Die Impulsverteilung wurde durch Flugzeitmessungen bestimmt. Die erste gemessene Verteilung der Atome auf der linken Seite entspricht dem Ursprungszustand, jede weitere Verteilung einer weiteren zeitlichen Entwicklung des Systems um $50 \mu\text{s}$. Die Skala der linken y-Achse entspricht dem zuvor kalibrierten reellen Impuls der Atome, während die Skala auf der rechten Seite die zugeordneten Quasiimpulse zeigt. Zur besseren visuellen Übersicht zeigt das Bild Resultate für einen Anfangszustand von $|N = 0, \downarrow\rangle$ (siehe Gleichung 5.24).

Beispielhaft wird hier in Abbildung 5.11 die Messung des mittleren Quasiimpulses des simulierten Systems für eine relative Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$ gezeigt. Auch für den mittleren Quasiimpuls entsprechen die Ergebnisse qualitativ den Erwartungen des Quanten-Rabi Modells im Bereich der tiefen starken Kopplung bzw. der dispersiven tiefen starken Kopplung, welche als Linien der entsprechenden Farben eingezeichnet wurden. Zusätzlich wurden numerische Untersuchungen des hier tatsächlich realisierten, periodischen Quanten-Rabi Modells mit semitransparenten Linien eingezeichnet. Diese zeigen deutlich, dass die in Abschnitt 3.2 aufgestellte These der Äquivalenz der beiden Modelle für Zustände, welche die erste Brillouin-Zone nicht verlassen, gegeben ist, da beide Modelle im Rahmen der numerischen Genauigkeit übereinstimmen. Erst am Ende der hier dargestellten Zeitentwicklung verlässt die Dynamik die erste Brillouin-Zone und die Periodizität des Quasiimpulses tritt zu Tage. Statt eines Absinkens des mittleren Quasiimpulses kommt es hier zu einem rapiden Anstieg des mittleren Quasiimpulses, welcher sich auch in den Messdaten widerspiegelt.

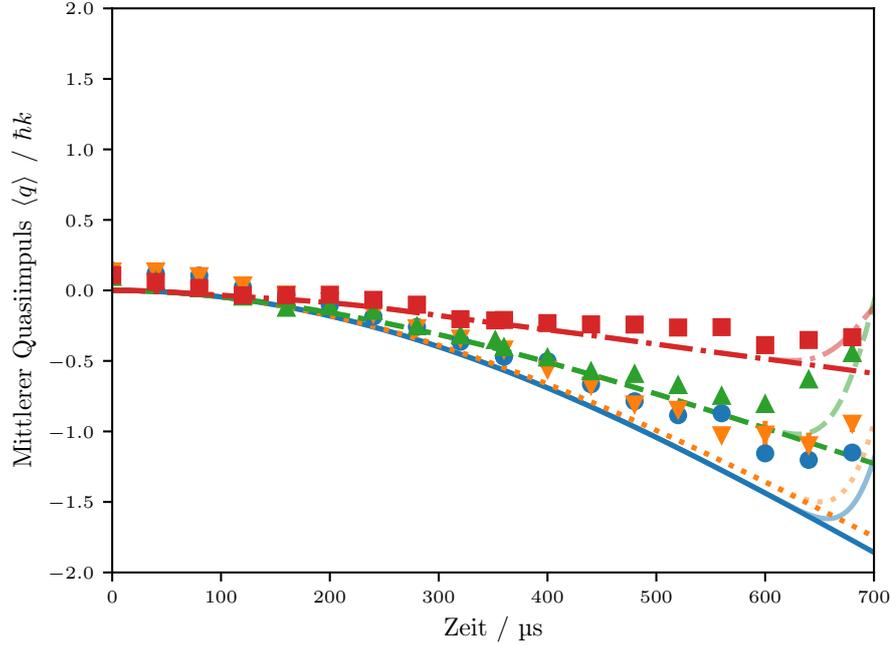


Abbildung 5.11: Zeitentwicklung des mittleren Quasiimpulses $\langle q \rangle$ des Systems mit einem Anfangszustand $|N = 0, -2\hbar k\rangle$ (siehe Gleichung 5.9). Die relative Kopplungsstärke beträgt bei diesen Messungen $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$. Hier gezeigt sind Messungen für Zwei-Niveau-Energieabstände $\frac{\omega_q}{2\pi}$ von 0 Hz (blaue Punkte), (586 ± 6) Hz (orange Dreiecke), $(1\,660 \pm 20)$ Hz (grüne Dreiecke) und $(3\,600 \pm 40)$ Hz (rote Quadrate). Die Ergebnisse der numerischen Simulation des Quanten-Rabi Modells sind als Linien dargestellt, während die Ergebnisse der numerischen Simulation des hier tatsächlich realisierten periodischen Quanten-Rabi Modells mit semitransparenten Linien dargestellt wurden.

5.4.3 Erwartungswert des Inversionsoperators $\hat{\sigma}_x$

Weiterhin wurde der Erwartungswert des Inversionsoperators $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ bestimmt. Genau wie der Erwartungswert für den Quasiimpuls, kann dieser aus den Flugzeitaufnahmen bestimmt werden, wobei die Gewichtung der einzelnen Bildpunkte hier anders erfolgen muss. Im Gegensatz zu den zuvor bestimmten Quasiimpulsen wurde hier entsprechend Gleichung 3.59 mit dem Blochbandindex n_b gewichtet, so dass

$$p = q + n_b (2\hbar k) \quad (5.16)$$

gilt. Die entsprechende Zuordnung ist auch in Abbildung 5.12 dargestellt.

Auch hier sollen beispielhaft die Ergebnisse für eine relative Kopplungsstärke $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$ gezeigt werden. Die entsprechenden Messungen finden sich in Abbildung 5.13. Die Messungen entsprechen dabei den Erwartungen für das Quanten-Rabi Modell in tiefer starker Kopplung, was durch die gute Übereinstimmung mit den numerischen Daten weiter bestätigt wird. Zum Ende der Messung verlässt die Dynamik des Systems die erste Brillouin-Zone, weshalb die

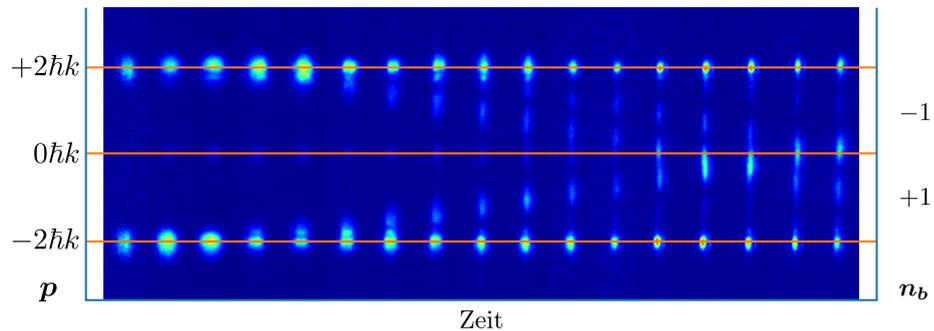


Abbildung 5.12: Resultat einer beispielhaften Messung der zeitlichen Entwicklung der beobachteten atomaren Dynamik im Impulsraum als Funktion der Wechselwirkungszeit. Die Impulsverteilung wurde durch Flugzeitmessungen bestimmt. Die erste gemessene Verteilung der Atome auf der linken Seite entspricht dem Ursprungszustand, jede weitere Verteilung einer weiteren zeitlichen Entwicklung des Systems um $50 \mu\text{s}$. Die Skala der linken y-Achse entspricht dem zuvor kalibrierten reellen Impuls der Atome, während die Skala auf der rechten Seite den zugeordneten Blochbandindex n_b zeigt. Zur besseren visuellen Übersicht zeigt das Bild Resultate für einen Anfangszustand von $|N = 0, \downarrow\rangle$ (siehe Gleichung 5.24).

Periodizität des Quasiimpuls auch in diesen Daten offenbar wird. Wie in Abschnitt 3.1.2 erläutert, ist insbesondere der nahezu statische Verlauf der Dynamik des Inversionsoperators ein Merkmal der perturbativen tiefen starken Kopplung [70]. Dieses Verhalten ist für geringe Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems gut in den gemessenen Daten reproduziert. Für größere Energieaufspaltungen des Zwei-Niveau-Systems im Bereich der dispersiven tiefen starken Kopplung kommt es, den Erwartungen entsprechend, zu gedämpften Oszillationen, deren Natur in der Vermischung der Dynamiken der beiden distinkten Paritätsketten begründet liegt [70].

5.4.4 Grad der bosonischen Anregung

Nachdem nun hauptsächlich die Erwartungswerte des Systems betrachtet wurden, welche zwar für das Quanten-Rabi Modell in tiefer starker Kopplung von Interesse sind, aber selten für schwächer gekoppelte Systeme, die durch das Jaynes-Cummings Modell beschrieben werden können, betrachtet werden, soll nun die bosonische Anregungszahl $\langle \hat{N} \rangle$ untersucht werden. Im Jaynes-Cummings Modell bildet die Gesamtzahl der Anregungen des Zwei-Niveau-Systems und der bosonischen Feldmode jedoch im Vergleich zum Quanten-Rabi Modell eine Erhaltungsgröße. Auf diese Weise kann sehr einfach der Nachweis für die extreme Kopplung des Systems geführt werden, da nur in tiefer starker Kopplung eine nennenswerte Verletzung dieser Erhaltung zu erwarten ist.

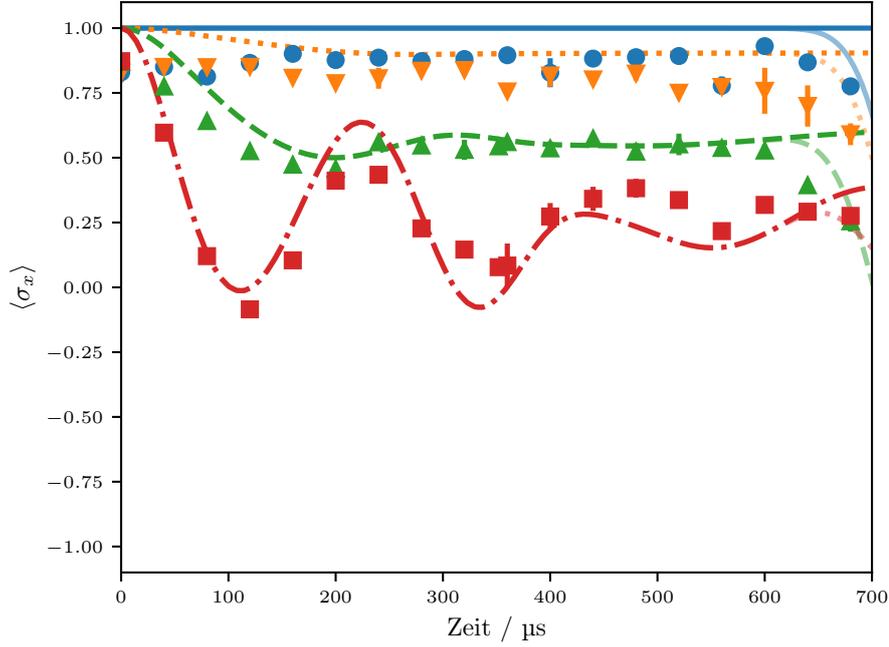


Abbildung 5.13: Zeitentwicklung von $\langle \hat{\sigma}_x \rangle$ des Systems mit einem Anfangszustand $|N = 0, -2\hbar k\rangle$ (siehe Gleichung 5.9). Die relative Kopplungsstärke beträgt $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$. Hier gezeigt sind Messungen für Energieabstände des Zwei-Niveau-Systems $\frac{\omega_q}{2\pi}$ von 0 Hz (blaue Punkte), (586 ± 6) Hz (orange Dreiecke), (1660 ± 20) Hz (grüne Dreiecke) und (3600 ± 40) Hz (rote Quadrate). Die Ergebnisse der numerischen Simulation des Quanten-Rabi Modells sind als Linien dargestellt, die Ergebnisse der numerischen Simulation des hier tatsächlich realisierten periodischen Quanten-Rabi Modells sind als semitransparenten Linien dargestellt.

Für die bosonische Anregungszahl gilt:

$$\langle \hat{N} \rangle = \frac{m_{\text{Rb}}\omega}{2\hbar} \left(\langle \hat{x}^2 \rangle + \frac{1}{m_{\text{Rb}}^2\omega^2} \langle \hat{q}^2 \rangle \right) \quad (5.17)$$

Es ist somit leicht zu sehen, dass die Anteile an $\langle \hat{N} \rangle$ in zwei Teile separiert werden können:

$$\langle \hat{N}_x \rangle = \frac{m_{\text{Rb}}\omega}{2\hbar} \langle \hat{x}^2 \rangle, \quad \langle \hat{N}_q \rangle = \frac{1}{2\hbar m_{\text{Rb}}\omega} \langle \hat{q}^2 \rangle \quad (5.18)$$

Durch Abbildung des gleichen Systems einmal im Ortsraum und einmal mit Flugzeitaufnahmen im Impulsraum können die beiden Anteile somit folgendermaßen aus den vertikalen

Schnitten durch die entsprechenden Absorptionenaufnahmen ermittelt werden:

$$\langle \hat{N}_x^2 \rangle \simeq \frac{m_{\text{Rb}} \omega}{2\hbar} \frac{\sum_{i=0}^N p_{x,i} x_i^2}{\sum_{i=0}^N p_{x,i}} \quad (5.19)$$

$$\langle \hat{N}_q^2 \rangle \simeq \frac{1}{2\hbar m_{\text{Rb}} \omega} \frac{\sum_{i=0}^N p_{q,i} q_i^2}{\sum_{i=0}^N p_{q,i}} \quad (5.20)$$

wobei $p_{x,i}$ der Dichte in den Absorptionenaufnahmen im Ortsraum entspricht, während $p_{q,i}$ der Dichte der Flugzeitaufnahmen entspricht.

Abbildung 5.14 zeigt ein Beispiel für das Resultat entsprechender Messungen mit einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$ für zwei verschiedene Energieabstände des Zwei-Niveau-Systems von $\frac{\omega_q}{2\pi} = (586 \pm 6)$ Hz, d.h. in tiefer starker Kopplung, als blaue Punkte und $\frac{\omega_q}{2\pi} = (5\,200 \pm 50)$ Hz, in dispersiver tiefer starker Kopplung, als orange Dreiecke dargestellt. Die theoretische Erwartungen wurden durch numerische Simulation bestimmt und sind als Linien der entsprechenden Farbe eingezeichnet. Hier zeigt sich eine faszinierende Eigenschaft des Quanten-Rabi Modells in tiefer starker Kopplung, denn im Gegensatz zu den meisten physikalisch realisierten Systemen kommt es hier zu einem sehr starken Anstieg der Anregungszahl, wobei in diesem Experiment ein Maximum von 73 ± 2 Anregungen beobachtet wurde. Wie in Abschnitt 3.1.2 bereits gezeigt wurde, ist die maximal zu erwartende Anregungszahl für eine gegebene relative Kopplung $\frac{g}{\omega}$ im Falle des entarteten Zwei-Niveau-Systems analytisch lösbar und stellt eine obere Grenze für das System bei dieser Kopplungsstärke dar (vgl. Gleichung 3.33). Entsprechend kann so aus der maximal beobachteten Zahl an Anregungen eine untere Grenze für die relative Kopplung bestimmt werden, obwohl im hier verwendeten System aufgrund der Periodizität des Quasiimpulsraums keine vollständige Oszillation für $\langle N \rangle$ beobachtet werden konnte:

$$\frac{g}{\omega} \geq \frac{\sqrt{\langle \hat{N} \rangle_{\text{max}}}}{2} = 4.3(1) \quad (5.21)$$

Auch dies ist eine weitere Bestätigung für das experimentelle Erreichen des Bereichs der perturbativen tiefen starken Kopplung.

Aufgrund des engen Zusammenhangs zwischen erreichten bosonischen Anregungen und der relativen Kopplungsstärke des Systems wurden jene für verschiedene erreichbare Kopplungsstärken in dem hier realisierten System untersucht. Hierbei gilt es zu beachten, dass in diesem System nach Gleichung 3.55 eine direkte Abhängigkeit von relativer Kopplung und der Energiequantisierung des bosonischen Feldes besteht, so dass es bei dem hier gewählten experimentellen Ansatz unmöglich ist, beide Parameter unabhängig voneinander zu variieren. Gleichzeitig ist es aufgrund der Periodizität des Systems auch nicht möglich, die komplette Oszillation des Fockmodenpackets zu beobachten, weshalb auch die maximal erreichte mittlere Anregungszahl nicht direkt ermittelt werden kann. Der Grund hierfür ist,

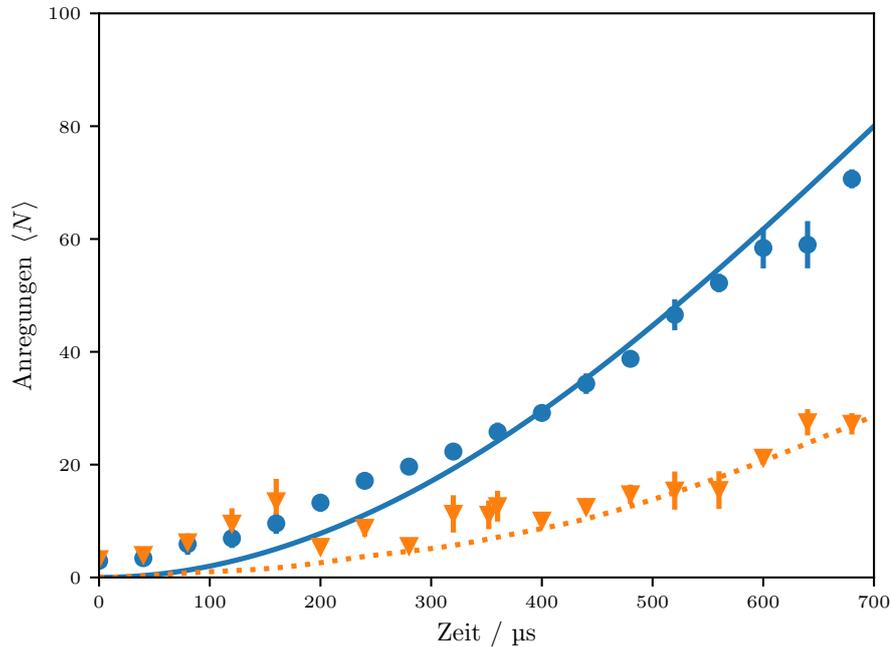


Abbildung 5.14: Zeitentwicklung der bosonischen Anregung $\langle \hat{N} \rangle$ des Systems mit einem Anfangszustand $|N = 0, -2\hbar k\rangle$ (siehe Gleichung 5.9). Die relative Kopplungsstärke beträgt $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$. Hier gezeigt sind Messungen für Zwei-Niveau-Energieabstände $\frac{\omega_d}{2\pi}$ von (586 ± 6) Hz (blaue Punkte) und $(5\,200 \pm 50)$ Hz (orange Dreiecke). Als Linien wurden die theoretischen Erwartungen anhand numerischer Simulation des Quanten-Rabi Modells dargestellt.

dass für größere Wechselwirkungszeiten, bei denen die Grenze der Brillouin-Zone erreicht ist, eine periodische Variante des Quanten-Rabi Modells realisiert wird. Um trotzdem einen Vergleich der Dynamik der bosonischen Anregungszahl zu erhalten, wurde die Dauer der Zeitentwicklung für diese Messung auf die Oszillationsfrequenz der bosonischen Mode, welche die natürliche Zeitnormalisierung von Gleichung 3.60 darstellt, normiert. Zum Erhalt einer möglichst langen Zeitentwicklung bei gleichzeitiger Einhaltung der Bedingung, die Dynamik in der ersten Brillouin-Zone zu halten, wurde eine Entwicklungszeit von

$$t_N = \frac{3\pi}{8\omega} \quad (5.22)$$

für alle Messungen gewählt. Abbildung 5.15 zeigt das Resultat der durchgeführten Messungen beispielhaft für zwei unterschiedliche Energieabstände des Zwei-Niveau-Systems, einmal bei $\frac{\omega}{2\pi} = (586 \pm 6)$ Hz (blaue Punkte) und einmal bei $\frac{\omega}{2\pi} = (5\,200 \pm 50)$ Hz (orange Dreiecke). Die Ergebnisse der numerischen Simulation des Systems sind wieder durch Linien der entsprechenden Farbe eingezeichnet. Hierbei ist gut die erwartete starke Abhängigkeit der auftretenden Anregungszahlen von der relativen Kopplungsstärke des Systems zu erkennen,

welche im Rahmen der Messunsicherheiten den theoretischen Erwartungen entspricht. Für Parameterbereiche in dispersiver tiefer starker Kopplung kommt es auch zu einem Anstieg der gemessenen bosonischen Anregungszahlen, doch wie schon in Abbildung 5.14 zu erkennen ist bei deutlich reduzierter Anzahl von Anregungen im Vergleich zu Messungen, welche im Bereich der tiefen starken Kopplung durchgeführt wurden.

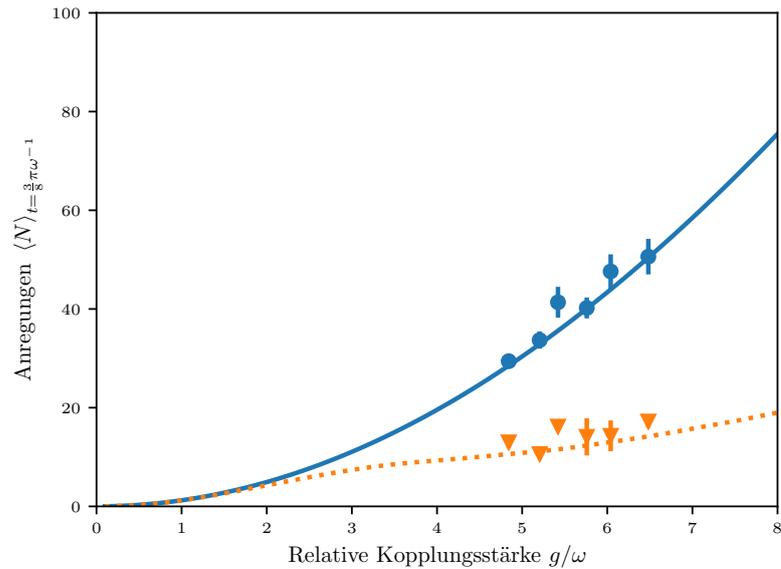


Abbildung 5.15: Bosonische Anregung $\langle \hat{N} \rangle$ mit einem Anfangszustand $|N = 0, -2\hbar k\rangle$ (siehe Gleichung 5.9) nach einer Zeitentwicklung von $t_N = \frac{3\pi}{8\omega}$ für verschiedene relative Kopplungsstärken, bei Energieabständen des Zwei-Niveau-Systems $\frac{\omega_q}{2\pi}$ von (586 ± 6) Hz (blaue Punkte) und (5200 ± 50) Hz (orange Dreiecke). Die theoretischen Erwartungen auf Basis numerischer Simulationen sind als Linien der entsprechenden Farbe eingezeichnet.

Um diese Beobachtung besser zu quantifizieren, zeigt Abbildung 5.16 nun die Abhängigkeit der erreichten mittleren bosonischen Anregungszahl nach einer Zeitentwicklung von t_N , hier jedoch wieder bei konstanter relativer Kopplung von $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$. Es ist deutlich zu erkennen, dass für Zwei-Niveau-Energieabstände von $\omega_q < g$ nur eine sehr geringe Abhängigkeit der erreichten Anregungszahlen von ω_q auftritt. Erst für Energien, welche die Kopplungsstärke überschreiten, tritt eine deutliche Reduktion der Anregungszahlen zutage. Obgleich im vorliegenden Fall die Zeitentwicklung eines hochangeregten Zustands des Quanten-Rabi Modells untersucht wird, ist hier eine phänomenologische Ähnlichkeit zu einem bereits bekannten Quantenphasenübergang des Grundzustands des Quanten-Rabi Modells zu erkennen [91]. Für ein tieferes Verständnis dieses Effekts bedarf es zunächst weiterer theoretischer Untersuchungen des Modells.

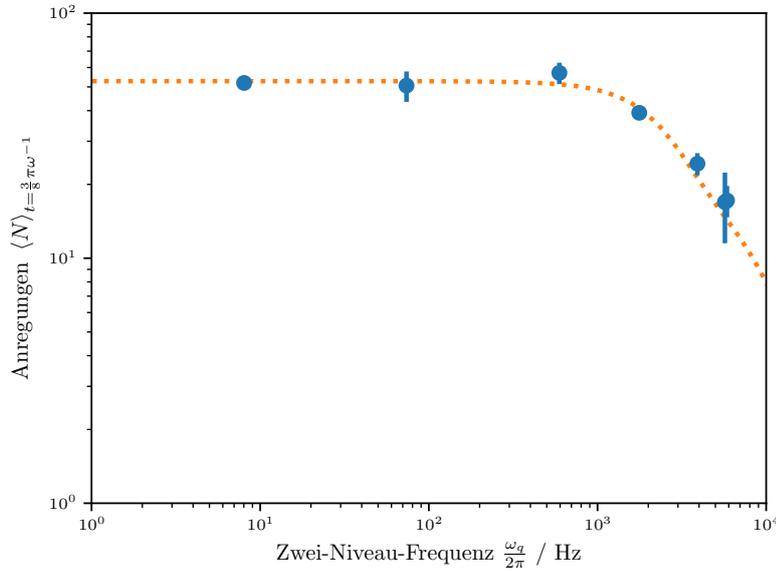


Abbildung 5.16: Bosonische Anregung $\langle \hat{N} \rangle$ mit einem Anfangszustand $|N = 0, -2\hbar k\rangle$ (siehe Gleichung 5.9) nach einer Zeitentwicklung von $t_N = \frac{3\pi}{8\omega}$ bei einer relativen Kopplungsstärke $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$, in Abhängigkeit des Zwei-Niveau-Energieabstands ω_q . Die theoretische Erwartung ist als Linie dargestellt.

5.5 Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells: Präparation in reinen Zuständen des Zwei-Niveau-Systems

Nachdem im letzten Abschnitt die Zeitentwicklung des Systems für Eigenzustände des $\hat{\sigma}_x$ Operators untersucht wurde, widmet sich dieser Teil der Zeitentwicklung des Quanten-Rabi Modells nach Präparation des Zwei-Niveau-Systems in Eigenzuständen des $\hat{\sigma}_z$ Operators des Quanten-Rabi Modells und des Vakuumzustands des Feldes. Dies ist aus zweierlei Hinsicht von Interesse: Zunächst handelt es sich bei den hier präparierten Zuständen $|N = 0, \downarrow\rangle$ und $|N = 0, \uparrow\rangle$ um typische Zustände des Jaynes-Cummings Modells, was eine bessere Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit bekannten Systemen ermöglicht. Weiterhin handelt es sich im Gegensatz zu den zuvor behandelten Zuständen um Zustände von definierter Parität, welche aufgrund der \mathbb{Z}_2 -Symmetrie des Quanten-Rabi Hamiltonians eine zentrale Erhaltungsgröße des Modells darstellt. Die experimentellen Anforderungen an die Präparation und die Analyse dieser Zustände sind aufgrund der Definition über die Relativphase erhöht und erlauben bei erfolgreicher Vermessung von Effekten, welche vom gewählten Anfangszustand abhängen, weiterhin einen Nachweis für die erfolgreiche phasenabhängige Präparation und Phasenstabilität des Systems über die gemessenen Zeiträume. Die verwendeten Zustände

haben somit hier die Form:

$$\psi_{\text{ini},\downarrow} = |N = 0, \downarrow\rangle = |N = 0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|-2\hbar k\rangle + |2\hbar k\rangle) \quad (5.23)$$

$$\psi_{\text{ini},\uparrow} = |N = 0, \uparrow\rangle = |N = 0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|-2\hbar k\rangle - |2\hbar k\rangle). \quad (5.24)$$

Zunächst soll hierzu die zeitliche Entwicklung der Zwei-Niveau-Besetzung des Systems $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ untersucht werden. Als zweites wird wie im vorherigen Abschnitt auch die zeitliche Entwicklung der bosonischen Anregungszahl $\langle \hat{N} \rangle$ betrachtet, um Unterschiede in der zeitlichen Entwicklung in Abhängigkeit des gewählten Anfangszustands zu untersuchen.

5.5.1 Zwei-Niveau-Besetzung

Im Gegensatz zu den Messungen im letzten Abschnitt, bedarf es für die Bestimmung der Zwei-Niveau-Besetzung $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$ einer Untersuchung der Relativphase zweier Wellenpakete an der durch das periodische Potential erzeugten vermiedenen Kreuzung. Da die räumliche Auflösung des Systems keinen Zugriff auf das Beugungsbild im Ortsraum zulässt, kommt hier eine indirekte Messmethode zum Einsatz. Wird, wie zuvor, das periodische Potential nach der Zeitentwicklung des Systems instantan abgeschaltet, geht alle vorhandene Information über den existierenden Zustand verloren; die Wellenpakete folgen nach Abschalten des Potentials den ungestörten Parabeln der freien Atome. Stattdessen wurde hier die Besetzung des Zwei-Niveau-Zustands über einen Beschleunigungsprozess des Gitters vorgenommen, bei welchem die Atome langsam von der Bandkante wegbewegt werden. Passiert dieser Prozess nahezu adiabatisch, können die Atome den Bändern in der Dispersionsrelation folgen, so dass ein darauf folgendes Abschalten des periodischen Potentials, aufgrund des nun großen energetischen Abstands zur Dispersionsrelation der freien Atome, keine vollständige Rückprojektion der Wellenpakete auf die freien Parabeln verursacht. Stattdessen verbleiben die Atome, welche sich auf den Bändern befunden haben, nun überwiegend in einem der beiden Impulszustände [37]. Abbildung 5.17 zeigt schematisch den Ablauf dieses Prozesses. Eine der Schwierigkeiten eines solchen Messprozesses ist die korrekte Bestimmung der benötigten Beschleunigung und der Dauer des Messprozesses. Für einen möglichst guten Kontrast der Messungen wäre ein möglichst langsames, aber starkes Beschleunigen des Gitters vorteilhaft, was im Kontrast zu den experimentellen Gegebenheiten steht, da das System nicht vollständig von seiner Umgebung isoliert werden kann. So muss nach Ablauf der gewünschten Zeitentwicklung in den kombinierten Potentialen zumindest das harmonische Fallenpotential abgeschaltet werden, um die Zeitentwicklung der Simulation des Quanten-Rabi Modells zu beenden, was jedoch gleichzeitig zu einem freien Fall der Wellenpakete führt. Um einen ausreichenden Kompromiss im weiten Parameterraum dieser Messung finden zu können, wurde hier zunächst mittels numerischer Simulation ein Parametersatz bestimmt, welcher für das hier simulierte System zu einer Minimierung der Differenz der durch die oben genannte Messmethode und der numerisch erwarteten Zwei-Niveau-Besetzung bestimmten Werte

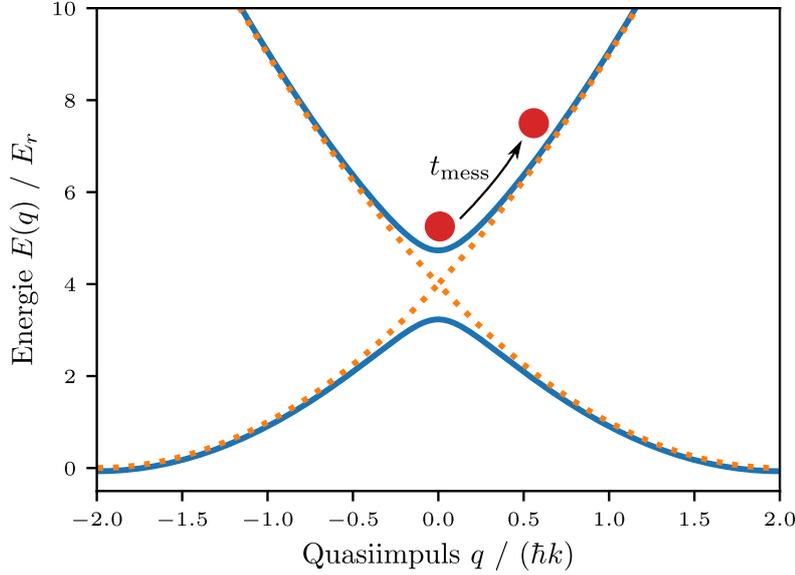


Abbildung 5.17: Schematische Darstellung der Messmethode zur Bestimmung von $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$. Das an der vermiedenen Kreuzung befindliche Atomwellenpaket wird adiabatisch durch Beschleunigung des Gitters von der vermiedenen Kreuzung wegbewegt. Beim späteren Ausschalten des Potentials kommt es so nicht zu einer vollständigen Rückprojektion auf die freien Zustände, sondern zu einer teilweisen Projektion der Bandbesetzung auf die freien Zustände.

führt. Dies erlaubt ein weites Durchsuchen des Parameterraums, was experimentell aufgrund der langen Zykluszeiten von etwa 33 s pro Messung nicht realistisch möglich gewesen wäre. Der simulierte Messprozess ist durch den zeitabhängigen Hamiltonian

$$\begin{aligned}
 H_{\text{mess}}(t) = & \Theta(t_{\text{QRM}} - t)H_{\text{QRM}} \\
 & + \Theta(t - t_{\text{QRM}})\Theta\left(\left(t_{\text{QRM}} + t_{\text{mess}}\right) - t\right) \\
 & \cdot \left[\frac{\hat{p}^2}{2m_{\text{Rb}}} + \frac{V}{2} \cos(4k + k_{\text{shift}}(t)\hat{x}) \right]
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

gegeben, mit der Zeitentwicklungsdauer der Simulation des Quanten-Rabi Modells t_{QRM} , der Dauer des Analysepulses t_{mess} und der Beschleunigung des periodischen Potentials $k_{\text{shift}}(t)$. Als Optimierungsverfahren zum Finden eines Schätzers für das globale Minimum der Quadrate der Residuen wurde Basin-Hopping [92] (auf Deutsch etwa Becken-Springen) verwendet, welches eine Kombination aus Metropolis-Monte-Carlo Schritten und anschließender lokaler Optimierung (hier mittels limited-memory BFGS [93]) zur Annäherung an das globale

Minimum des Systems ist. Die so bestimmten Parameter wurden daraufhin experimentell untersucht und eine weitere Optimierung durch experimentelle Suche eines möglichst optimalen Kontrasts vorgenommen.

Beispielhaft finden sich die Ergebnisse einer solchen Messung in Abbildung 5.18. Gut zu erkennen ist das bereits in Abschnitt 3.1.2 besprochene Verhalten der Dynamik des Erwartungswerts des Zwei-Niveau-Operators in tiefer starker Kopplung. So kommt es innerhalb von kurzer Zeit (hier etwa $100 \mu\text{s}$) zu einem vollständigen Zusammenbruch des Kontrasts. Dies steht in starkem Gegensatz zu den in schwacher Kopplung beobachtbaren Vakuum-Rabi-Oszillationen. Innerhalb der hier beobachteten Zeitentwicklungsdauer kommt es nicht zu einem Wiederaufleben des Kontrast, so dass auch ein vollständiger Verlust der Kohärenz als mögliche Erklärung der Beobachtungen in Frage kommt. Die erkennbare Differenz in der Dynamik der bosonischen Anregungszahl $\langle \hat{N} \rangle$, welche im nächsten Abschnitt dargestellt wird, zeigt jedoch, dass das System auch nach den $100 \mu\text{s}$ eine deutliche, phasenabhängige Dynamik aufweist. Somit bleibt nur der Energieaustausch mit der Feldmode als Erklärung für das beobachtete Verhalten, in Einklang zu den Erwartungen, welche für die perturbative tiefe starke Kopplung formuliert wurden.

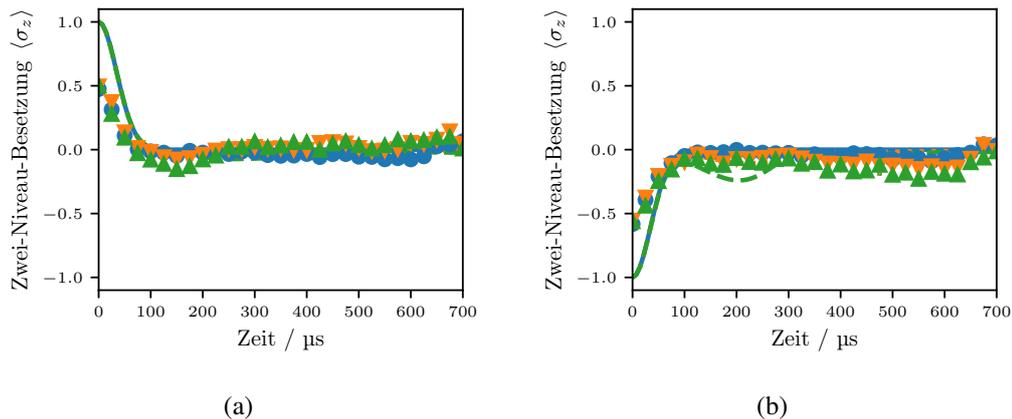


Abbildung 5.18: Zeitentwicklung der Zwei-Niveau-Besetzung $\langle \hat{\sigma}_z \rangle$, in beiden Fällen bei einer Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6,5 \pm 0,5$. Gezeigt sind Messungen für Energieabstände des Zwei-Niveau-Systems $\frac{\omega_q}{2\pi}$ von 0 Hz (blaue Punkte), (500 ± 5) Hz (orange Dreiecke) und $(1\,050 \pm 10)$ Hz (grüne gedrehte Dreiecke). Die durchgehenden Linien zeigen die theoretischen Erwartungen anhand numerischer Simulationen des Quanten-Rabi Modells. Abbildung (a) zeigt die zeitliche Entwicklung bei Präparation im Zustand $\langle N = 0, \downarrow \rangle$, während Abbildung (b) die zeitliche Entwicklung bei Präparation im Zustand $\langle N = 0, \uparrow \rangle$ (siehe Gleichung 5.24) zeigt.

5.5.2 Grad der bosonische Anregung

Die letzten Messungen, die hier gezeigt werden sollen, zeigen die bosonische Anregungszahl $\langle \hat{N} \rangle$ bei Präparation in den reinen Zuständen des Zwei-Niveau-Systems. Die Auswertung der

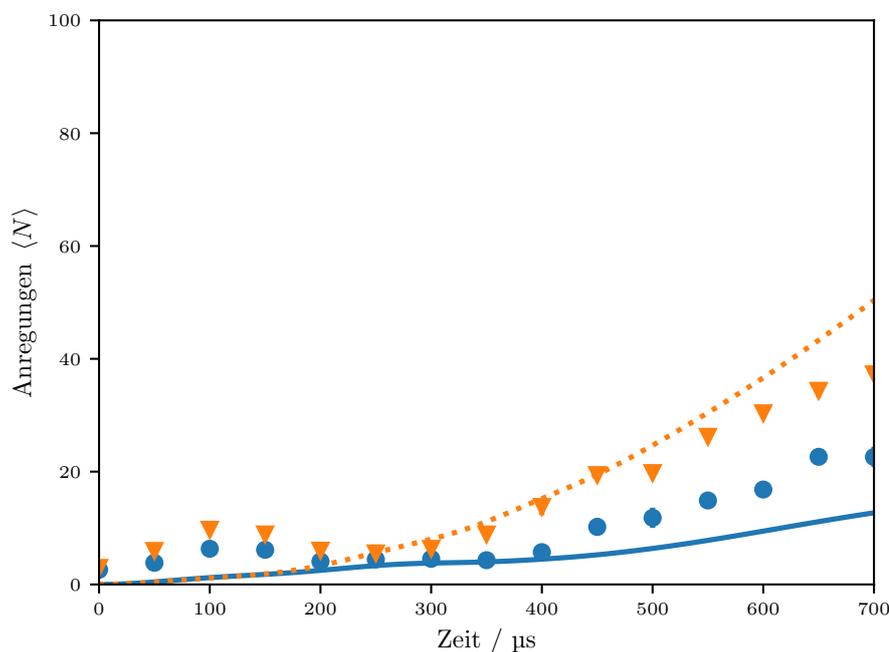


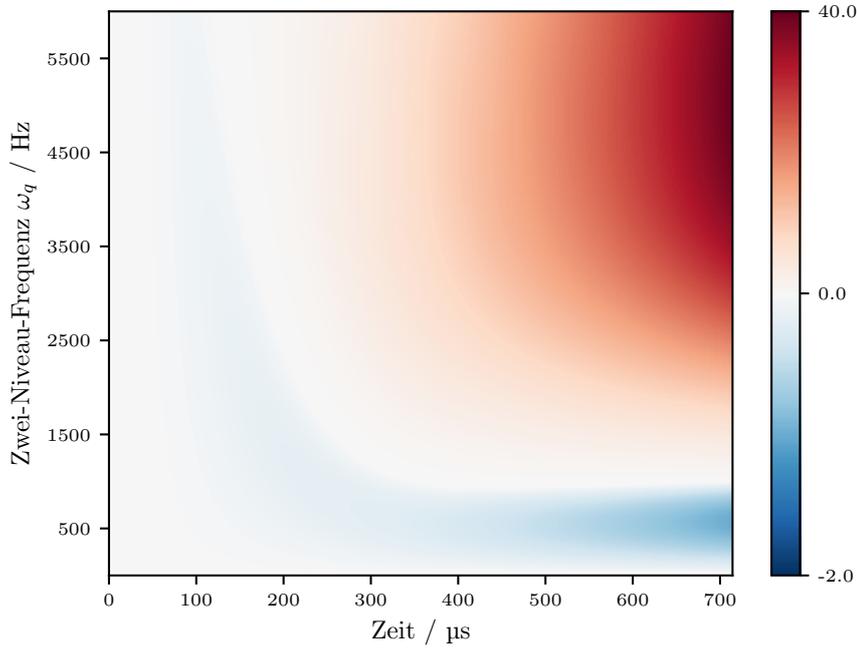
Abbildung 5.19: Zeitentwicklung der mittleren bosonischen Anregungszahl $\langle \hat{N} \rangle$, in beiden Fällen bei einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6,5 \pm 0,5$ und Zwei-Niveau-Energiedifferenzen von $\frac{\omega_a}{2\pi} = (4660 \pm 50)$ Hz. für Präparation im Zustand $|N = 0, \downarrow\rangle$ (blaue Punkte) und $|N = 0, \uparrow\rangle$ (siehe Gleichung 5.24) (orange Dreiecke). Die durchgehenden Linien zeigen die Erwartungen anhand numerischer Simulationen des Quanten-Rabi Modells.

Rohdaten erfolgte entlang der Beschreibung, die bereits in Abschnitt 5.4.4 gegeben wurde. Abbildung 5.19 zeigt die Dynamik der mittleren bosonischen Anregungszahl für die anfängliche Präparation in $|N = 0, \downarrow\rangle$ sowie $|N = 0, \uparrow\rangle$ bei einer festen Wahl der Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems im Bereich der dispersiven tiefen starken Kopplung. Es ist deutlich zu erkennen, dass eine Aufspaltung der zeitlichen Entwicklung in Abhängigkeit des anfänglichen Zustands stattfindet, deren grundsätzliches Verhalten auch in den Messdaten erkennbar bleibt. Im Vergleich zu den Messungen, welche in Abschnitt 5.4.4 gezeigt wurden, ist die geringe Auflösung der Abbildung im Ortsraum hier ein größeres Hindernis, da es zu einer getrennten Bewegung der beiden anfänglich präparierten Wellenpakete kommt. Die dadurch entstehende Unsicherheit drückt sich in einer systematischen Überschätzung der anfänglich auftretenden Anregungen und der Verringerung des gemessenen Kontrasts zwischen den beiden Messreihen aus. Trotzdem ist die Messung bereits ein guter Indikator dafür, dass es nicht wie im vorherigen Abschnitt angedeutet, zu einem Verlust der Phasenkohärenz des Systems kommt. Die erreichten bosonischen Anregungszahlen sind hingegen wieder ein eindeutiger Nachweis für das Erreichen der perturbativen tiefen starken Kopplung.

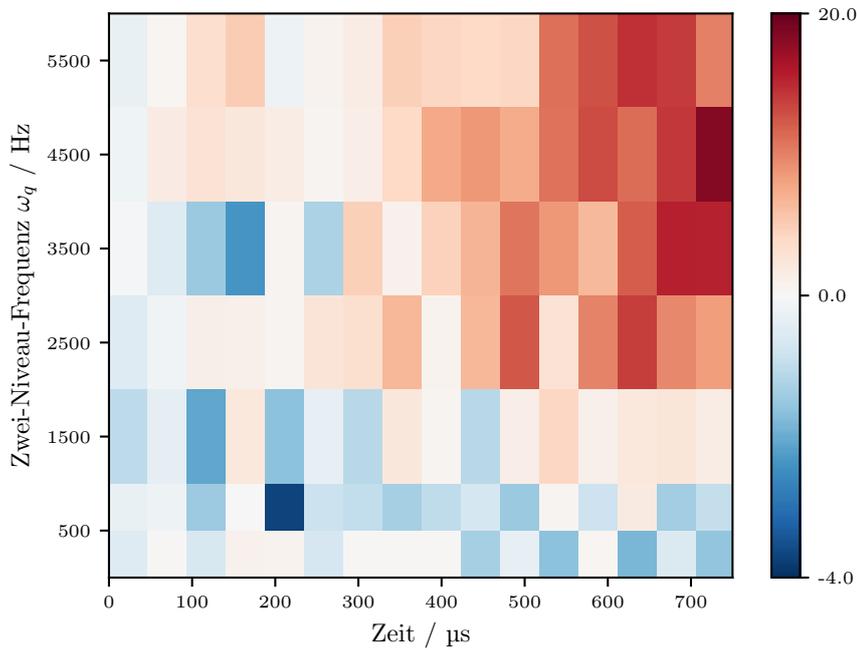
Die auftretende Dynamik in Abhängigkeit der Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems ist in Abbildung 5.20 dargestellt. Um den Einfluss der geringen Ortsauflösung des Abbil-

derungssystem gering zu halten, wurde hier die Differenz zwischen der mittleren bosonischen Anregungszahl bei Präparation in $|N = 0, \downarrow\rangle$ ($\langle \hat{N} \rangle_{\downarrow}$) sowie $|N = 0, \uparrow\rangle$ ($\langle \hat{N} \rangle_{\uparrow}$) dargestellt. In Abbildung 5.20(a) ist die theoretische Erwartung anhand von numerischen Simulationen des Quanten-Rabi Modells von $\langle \hat{N} \rangle_{\downarrow} - \langle \hat{N} \rangle_{\uparrow}$ dargestellt. Dabei wird deutlich, dass das Verhalten des Systems sich für den Bereich der tiefen starken Kopplung und der dispersiven tiefen starken Kopplung unterscheidet. Die generelle Dynamik ist in den Messdaten, welche in Abbildung 5.20(b) dargestellt werden, sehr gut reproduziert, auch wenn der absolute Betrag aufgrund des bereits besprochenen Einflusses der Ortsraumauflösung nicht erreicht wurde. Trotzdem kann anhand dieser Messung nicht nur die komplexe zeitliche Dynamik in tiefer starker Kopplung aufgezeigt werden, sie ist auch ein guter Nachweis für die erfolgreiche Präparation in den reinen Zuständen des Zwei-Niveau-Systems und den Erhalt der Phasenkohärenz des Systems.

5.5 Präparation in reinen Zuständen des Zwei-Niveau-Systems



(a)



(b)

Abbildung 5.20: Zeitentwicklung von $\langle \hat{N} \rangle_{\downarrow} - \langle \hat{N} \rangle_{\uparrow}$ (siehe Gleichung 5.24), bei einer relativen Kopplungsstärke von $\frac{g}{\omega} = 6,5 \pm 0,5$. Abbildung (a) zeigt die numerisch ermittelte Zeitentwicklung des Quanten-Rabi Modells, während Abbildung (b) die Messungen darstellt.

Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Dynamik ultrakalter Rubidiumatome in einem kombinierten Potential aus einem harmonischen optischen Dipolfallenpotential und einem periodischen optischen Gitterpotential untersucht, deren Verhalten durch das Quanten-Rabi Modell in tiefer starker Kopplung beschrieben werden kann. Es wurden zunächst die erreichbaren Parameterbereiche der Quantensimulation bestimmt, welche deutlich im Bereich der perturbativen tiefen starken Kopplung und dispersiven tiefen starken Kopplung lagen. Die anfängliche Präparation des Systems wurde sowohl für Superpositionszustände des Zwei-Niveau-Systems als auch für reine Zustände des Zwei-Niveau-Systems bei gleichzeitiger Präparation der Vakuummode des Feldes durchgeführt und der erwartete zeitliche Anstieg der mittleren bosonischen Anregungszahl beobachtet, welcher einen klaren Indikator für das Erreichen der tiefen starken Kopplung darstellt. Weiterhin konnte Anhand der Dynamik des Erwartungswerts des atomaren Inversionsoperators $\hat{\sigma}_x$ gezeigt werden, dass dessen Dynamik im Bereich der tiefen starken Kopplung zum Erliegen kommt, was Folge des Auftretens entarteter Eigenzustände in der perturbativen tiefen starken Kopplung ist und einen direkten Nachweis für das Erreichen dieses Bereiches darstellt. Der Zusammenbruch des Kontrasts der Messungen des bestimmten Erwartungswerts des atomaren Besetzungsoperators $\hat{\sigma}_z$ zeigt ein Merkmal der tiefen starken Kopplung, in welcher auch bei der Präparation der Vakuumfeldmode ein Erliegen der Vakuum-Rabi-Oszillationen stattfindet.

Zusammen ergeben die gezeigten Messungen einen klaren Nachweis des erstmaligen Erreichens des Bereiches der perturbativen tiefen starken Kopplung des Quanten-Rabi Modells in einer analogen Quantensimulation. Die maximal erreichte relative Kopplungsstärke des Systems von $\frac{g}{\omega} = 6,58 \pm 0,07$ übertrifft den bisherigen Rekord [21] hierbei beinahe um den Faktor 5. Weiterhin konnte die weite Verstimmbarkeit der Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems genutzt werden, um die zeitliche Dynamik am Übergang zwischen der perturbativen tiefen starken Kopplung und der dispersiven tiefen starken Kopplung zu beobachten.

Zukünftig interessant wäre es, aufbauend auf dem hier demonstrierten Verfahren zur Implementation des Quanten-Rabi Modells, zunächst den in theoretischen Arbeiten vorhergesagten

Zusammenbruch und das Wiederaufleben des Anfangszustands in tiefer starker Kopplung zu untersuchen. Obgleich die Dynamik des Systems in diesem Falle die erste Brillouin-Zone verlässt und somit eine periodische Variante des Quanten-Rabi Modells simuliert wird, konnte in theoretischen Arbeiten bereits eine Beziehung zwischen den Mustern des Zusammenbruchs und Wiederauflebens der beiden Modelle aufgezeigt werden [71]. Dank der weiten Verstimbarkeit der Energieaufspaltung des Zwei-Niveau-Systems ist auch eine Suche nach dynamischen Quantenphasenübergängen des Quanten-Rabi Modells denkbar [94, 95].

Eine interessante mögliche weitere Anwendung der hier aufgezeigten Techniken könnte in der Simulation schneller Quantengatter in der Quanteninformationsverarbeitung liegen [70]. Dabei sind auch digital-analoge Techniken zur Kopplung mehrerer Zwei-Niveau-Systeme durch zeitlich alternierende Phasen tiefer starker Kopplung und Phasen der Manipulation der Zwei-Niveau-Zustände denkbar [96].

Numerische Methoden

Um eine Beurteilung der Ergebnisse der Quantensimulation des Quanten-Rabi Modells mit Hilfe kalter Atome vornehmen zu können, werden numerische Methoden zur Bestimmung der erwarteten Zeitentwicklungen der gemessenen Observablen verwendet. Weiterhin hilft die zusätzliche numerische Simulation der hier tatsächlich realisierten Potentiale bei der Abschätzung von benötigter Messgenauigkeit und der Optimierung der Messverfahren, da experimentell durch die lange Zyklusdauer von etwa 32 s ein feines Durchsuchen weiter Parameterbereiche nicht realisiert werden kann.

Da für diese beiden Anwendungsfälle unterschiedliche Ziele verfolgt werden, wurden auch zwei verschiedene numerische Ansätze verfolgt. Zur Simulation des Quanten-Rabi Hamiltonians (Gleichung 3.60) wurde die Fock-Zustandsbasis auf eine Zahl oberhalb der zu erwartenden maximalen Besetzung (siehe hierzu auch Gleichung 3.33) beschränkt, was die vollständige Darstellung des Systems mit endlichen Vektoren und Matrizen erlaubt. Die Diagonalisierung der durch die Schrödingergleichung bestimmten partiellen Differentialgleichungen in Matrixrepräsentation wurde numerisch mit Hilfe der Quantum Toolbox in Python (QuTiP) durchgeführt [97, 98]. Die Simulation der Atomdynamik in den experimentell realisierten Potentialen (Gleichung 3.36) erfolgte hingegen mittels Integration der Gross-Pitaevskii-Gleichung via Split-Step Integration [99], wobei sich das Problem im vorliegenden Fall aufgrund der geringen Atomdichte und der daraus folgenden vernachlässigbaren Atom-Atom Wechselwirkung auf die Lösung der eindimensionalen Schrödingergleichung unter dem Einfluss des Potentials aus Gleichung 3.36 reduziert.

A.1 Numerische Simulation des Quanten-Rabi Hamiltonian

Zur numerischen Lösung der Dynamik des Quanten-Rabi Modells wurde auf die Quantum Toolbox in Python (QuTiP) zurückgegriffen, welche eine vielfach geprüfte Grundlage für die Implementation zur numerischen Manipulation von Quantenobjekten bietet. Aufgrund der in

dieser Arbeit maximal auftretenden relativen Kopplung von $\frac{g}{\omega} \approx 6.5$ wurde eine Obergrenze von $N = 1000$ für die Definition der Fock-Zustände verwendet, was deutlich genug von den maximal zu erwartenden Zuständen entfernt liegt, um keine Beeinflussung der numerischen Ergebnisse durch diese Beschränkung erwarten zu müssen, bei gleichzeitig vertretbarem Rechen- und Speicheraufwand.

Die Zeitentwicklung des Systems wurde durch direkte numerische Integration der Schrödingergleichung mittels des bereitgestellten Mastergleichungslösers *qutip.mesolve* durchgeführt. Dieser ist neben der effizienten Lösung von Lindblatt-Gleichungen auch auf die Lösung von Schrödingergleichungen optimiert und bietet mittels adaptiver Schrittweitensteuerung für Systeme der hier verwendeten Größe einen guten Kompromiss zwischen numerischer Genauigkeit, Stabilität und benötigten Ressourcen [100].

A.2 Numerische Simulation der Dynamik des Systems der kalten Atome im Lichtpotential

Wie in der Einleitung des Kapitels beschrieben, kommt zur numerischen Integration der eindimensionalen Schrödingergleichung hier eine sogenannte Split-Step Integration zum Einsatz. Hierzu wird die anfängliche Wellenfunktion des Systems zunächst auf einem äquidistanten Gitter im Ortsraum mit einer Auflösung von Δx definiert. Die Zeitentwicklung des Systems um Δt wird nun in Teilschritte im Orts- und Impulsraum zerlegt, was jeweils die triviale Bestimmung der Wirkung des potentiellen bzw. des kinetischen Anteils des Potentials aus Gleichung 3.36 erlaubt, da diese jeweils im entsprechenden Raum eine diagonale Darstellung besitzen, welche im weiteren als H_{or} und H_{ir} bezeichnet werden. Der Wechsel zwischen den beiden Darstellungen der Wellenfunktion erfolgt mittels schneller, diskreter Fouriertransformation (FFT), womit die Granularität des Gitters im Impulsraum durch $\Delta k = \frac{2\pi}{N\Delta x}$ gegeben ist, wobei N der Anzahl der verwendeten Gitterpunkte der anfänglichen Wellenfunktion entspricht.

Der Fehler durch die Nichtbeachtung der Nichtkommutativität des kinetischen und des potentiellen Zeitentwicklungsoperators ist dabei proportional $(\Delta t)^3$, bei gleichzeitiger Normerhaltung, so dass der Fehler für ausreichend kleine Zeitschritte vernachlässigbar klein wird [101]. Der Zeitentwicklungsoperator kann in diesem Fall genähert werden als

$$e^{iH\Delta t/\hbar} \approx e^{i\frac{H_{\text{or}}\Delta t}{2\hbar}} e^{i\frac{H_{\text{ir}}\Delta t}{\hbar}} e^{i\frac{H_{\text{or}}\Delta t}{2\hbar}}. \quad (\text{A.1})$$

Die erhaltenen eindimensionalen Wellenfunktionen wurden zur Verifikation der Analyseverfahren der Messdaten durch Faltung mit zweidimensionalen Gaußfunktionen in simulierte Messdaten gewandelt. Weiterhin wurde, wie in Abschnitt 5.5.1 beschrieben, auch die numerische Berechnung zeitabhängiger Hamiltonians implementiert, was mittels numerischer Optimierungsverfahren für die schnelle Durchschreitung großer Parameterbereiche zur Findung optimaler Kontrollparameter genutzt wurde.

Anhang

B.1 Spulenüberwachung

Um die MOT- und Gravitationskompensationsspulen vor Überhitzung durch Überlast oder Kühlmittelverlust zu schützen, wird die Temperatur der einzelnen Spulen kontinuierlich mittels Temperatursensoren (*Maxim Integrated DS18S20*), sowie der Gesamtkühlmittelfluss am Ausgang der Spulen mittels eines Turbinen-Durchflussmessers (*B.I.O-TECH e.K. FCH-midi-POM*), überwacht. Solange die programmatisch festgelegten Schwellen von 70 °C für die Temperatursensoren oder 600 mL für den Durchflusssensor eingehalten werden, werden durch den Mikrocontroller die Interlockschaltkreise der Stromquellen durch zwei Relais geöffnet. Ein Überschreiten der Temperatur- oder Unterschreiten der Durchflussgrenzen sowie ein Spannungsverlust der Überwachungssteuerung schließt die Relais, was eine sofortige Abschaltung der Stromquellen zur Folge hat. Der Schaltplan der Steuerung ist in Abbildung B.1 zu sehen.

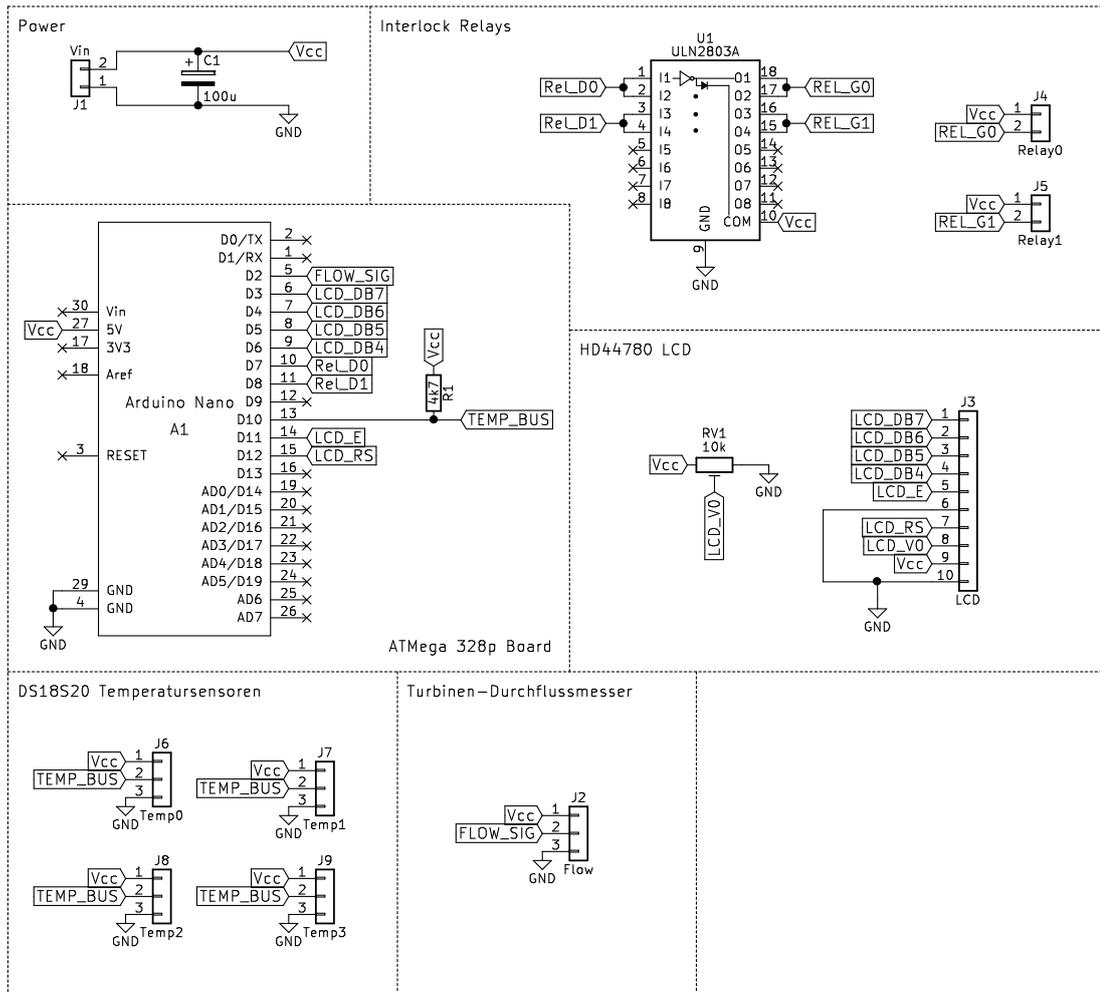


Abbildung B.1: Schaltplan der Spulenüberwachung.

Literatur

- [1] I. I. Rabi, *On the process of space quantization*, Physical Review **49**, 324 (1936).
- [2] I. I. Rabi, *Space quantization in a gyrating magnetic field*, Physical Review **51**, 652 (1937).
- [3] P. L. Knight und P. W. Milonni, *The Rabi frequency in optical spectra*, Physics Reports **66**, 21 (1980).
- [4] F. Bloch und A. Siegert, *Magnetic resonance for nonrotating fields*, Physical Review **57**, 522 (1940).
- [5] J. H. Shirley,
Solution of the Schrödinger equation with a Hamiltonian periodic in time, Physical Review **138**, B979 (1965).
- [6] J. V. Moloney und W. J. Meath, *Time dependence of a two-level system for arbitrary sinusoidal field strengths and times*, Molecular Physics **30**, 171 (1975).
- [7] E. T. Jaynes und F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proceedings of the IEEE **51**, 89 (1963).
- [8] J. Fink et al., *Climbing the Jaynes–Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system*, Nature **454**, 315 (2008).
- [9] B. W. Shore und P. L. Knight, *The Jaynes-Cummings model*, Journal of Modern Optics **40**, 1195 (1993).
- [10] J. H. Eberly, N. Narozhny und J. Sanchez-Mondragon,
Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model, Physical Review Letters **44**, 1323 (1980).
- [11] P. Forn-Díaz, L. Lamata, E. Rico, J. Kono und E. Solano,
Ultrastrong coupling regimes of light-matter interaction, Reviews of Modern Physics **91**, 025005 (2019).
- [12] R. Thompson, G. Rempe und H. Kimble,
Observation of normal-mode splitting for an atom in an optical cavity, Physical Review Letters **68**, 1132 (1992).

- [13] D. Braak, Q.-H. Chen, M. T. Batchelor und E. Solano, *Semi-classical and quantum Rabi models: in celebration of 80 years*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **49**, 300301 (2016).
- [14] D. Braak, *Integrability of the Rabi model*, Physical Review Letters **107**, 100401 (2011).
- [15] A. A. Anappara et al., *Signatures of the ultrastrong light-matter coupling regime*, Physical Review B **79**, 201303 (2009).
- [16] G. Günter et al., *Sub-cycle switch-on of ultrastrong light-matter interaction*, Nature **458**, 178 (2009).
- [17] Y. Todorov et al., *Ultrastrong light-matter coupling regime with polariton dots*, Physical Review Letters **105**, 196402 (2010).
- [18] T. Schwartz, J. A. Hutchison, C. Genet und T. W. Ebbesen, *Reversible switching of ultrastrong light-molecule coupling*, Physical Review Letters **106**, 196405 (2011).
- [19] P. Forn-Díaz et al., *Observation of the Bloch-Siegert shift in a qubit-oscillator system in the ultrastrong coupling regime*, Physical Review Letters **105**, 237001 (2010).
- [20] J. Casanova, G. Romero, I. Lizuain, J. J. García-Ripoll und E. Solano, *Deep strong coupling regime of the Jaynes-Cummings model*, Physical Review Letters **105**, 263603 (2010).
- [21] F. Yoshihara et al., *Superconducting qubit-oscillator circuit beyond the ultrastrong-coupling regime*, Nature Physics **13**, 44 (2017).
- [22] D. Lv et al., *Quantum simulation of the quantum Rabi model in a trapped ion*, Physical Review X **8**, 021027 (2018).
- [23] A. Dureau, Y. Meng, P. Schneeweiss und A. Rauschenbeutel, *Observation of ultrastrong spin-motion coupling for cold atoms in optical microtraps*, Physical Review Letters **121**, 253603 (2018).
- [24] M. Halbhauer et al., *Non-adiabatic stripping of a cavity field from electrons in the deep-strong coupling regime*, Nature Photonics **14**, 675 (2020).
- [25] D. Z. Rossatto, C. J. Villas-Bôas, M. Sanz und E. Solano, *Spectral classification of coupling regimes in the quantum Rabi model*, Physical Review A **96**, 013849 (2017).
- [26] K. B. Davis et al., *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Physical Review Letters **75**, 3969 (1995).
- [27] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman und E. A. Cornell, *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science **269**, 198 (1995).

-
- [28] R. P. Feynman, *Simulating Physics with Computers*, International Journal of Theoretical Physics **21** (1982).
- [29] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin und C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*, Physical Review Letters **76**, 4508 (1996).
- [30] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch und I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39 (2002).
- [31] T. Salger, C. Grossert, S. Kling und M. Weitz, *Klein tunneling of a quasirelativistic Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, Physical Review Letters **107**, 240401 (2011).
- [32] M. Leder, C. Grossert und M. Weitz, *Veselago lensing with ultracold atoms in an optical lattice*, Nature Communications **5**, 1 (2014).
- [33] M. Leder et al., *Real-space imaging of a topologically protected edge state with ultracold atoms in an amplitude-chirped optical lattice*, Nature Communications **7**, 1 (2016).
- [34] J. Klaers, J. Schmitt, F. Vewinger und M. Weitz, *Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity*, Nature **468**, 545 (2010).
- [35] M. Weitz, G. Cennini, G. Ritt und C. Geckeler, *Optical multiphoton lattices*, Physical Review A **70**, 043414 (2004).
- [36] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler und M. Weitz, *All-optical realization of an atom laser*, Physical Review Letters **91**, 240408 (2003).
- [37] C. Grossert, M. Leder und M. Weitz, *Phase dependent loading of Bloch bands and quantum simulation of relativistic wave equation predictions with ultracold atoms in variably shaped optical lattice potentials*, Journal of Modern Optics **63**, 1805 (2016).
- [38] C. J. Pethick und H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, Cambridge university press, (2008).
- [39] W. Pauli, *The connection between spin and statistics*, Physical Review **58**, 716 (1940).
- [40] W. Pauli, *Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren*, Zeitschrift für Physik **31**, 765 (1925).
- [41] S. N. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Zeitschrift für Physik **26**, 178 (1924).
- [42] A. Einstein, *Quantentheorie des idealen einatomigen Gases, zweite Abhandlung*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 3 (1925).

- [43] M. Zheng et al.,
A brief review of dilution refrigerator development for space applications,
Journal of Low Temperature Physics **197**, 1 (2019).
- [44] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu und D. E. Pritchard,
Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure,
Physical Review Letters **59**, 2631 (1987).
- [45] T. W. Hänsch und A. L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*,
Optics Communications **13**, 68 (1975).
- [46] H. J. Metcalf und P. van der Straten, *Laser cooling and trapping of atoms*,
Journal of the Optical Society of America B **20**, 887 (2003).
- [47] D. A. Steck, *Rubidium 87 D Line Data*, (2021),
URL: <http://steck.us/alkalidata> (besucht am 25. 08. 2021).
- [48] W. D. Phillips, J. V. Prodan und H. J. Metcalf,
Laser cooling and electromagnetic trapping of neutral atoms,
Journal of the Optical Society of America B **2**, 1751 (1985).
- [49] C. Adams und E. Riis, *Laser cooling and trapping of neutral atoms*,
Progress in Quantum Electronics **21**, 1 (1997).
- [50] D. E. Pritchard, *Cooling neutral atoms in a magnetic trap for precision spectroscopy*,
Physical Review Letters **51**, 1336 (1983).
- [51] J. Dalibard und C. Cohen-Tannoudji,
Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited,
Journal of the Optical Society of America B **2**, 1707 (1985).
- [52] R. Grimm, M. Weidemüller und Y. B. Ovchinnikov,
Optical dipole traps for neutral atoms,
Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics **42**, 95 (2000).
- [53] J. D. Jackson, *klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, (2011).
- [54] W. Ketterle und N. Van Druten, *Evaporative cooling of trapped atoms*,
Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics **37**, 181 (1996).
- [55] T. Salger, *Quantentransport ultrakalter Atome in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen*,
Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (2010).
- [56] K. O'hara, M. E. Gehm, S. Granade und J. Thomas,
Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps,
Physical Review A **64**, 051403 (2001).
- [57] H. F. Hess et al., *Magnetic trapping of spin-polarized atomic hydrogen*,
Physical Review Letters **59**, 672 (1987).

-
- [58] C. S. Adams, H. J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich und S. Chu,
Evaporative cooling in a crossed dipole trap,
Physical Review Letters **74**, 3577 (1995).
- [59] O. Morsch und M. Oberthaler,
Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices,
Reviews of Modern Physics **78**, 179 (2006).
- [60] I. Bloch und M. Greiner,
Exploring quantum matter with ultracold atoms in optical lattices,
Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics **52**, 1 (2005).
- [61] G. Ritt, C. Geckeler, T. Salger, G. Cennini und M. Weitz,
Fourier synthesis of optical potentials for atomic quantum gases,
Physical Review A **74**, 063622 (2006).
- [62] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*,
Zeitschrift für Physik **52**, 555 (1929).
- [63] N. W. Ashcroft, N. D. Mermin et al., „Solid state physics“,
Holt, Rinehart und Winston, New York, (1976) 151.
- [64] G. Ritt, *Fourier-Synthese von asymmetrischen optischen Potentialen für Atome*,
Dissertation, Universität Tübingen, (2007).
- [65] R. Graham und M. Höhnerbach, *Two-state system coupled to a boson mode: quantum dynamics and classical approximations*,
Zeitschrift für Physik B Condensed Matter **57**, 233 (1984).
- [66] Q.-H. Chen, C. Wang, S. He, T. Liu und K.-L. Wang,
Exact solvability of the quantum Rabi model using Bogoliubov operators,
Physical Review A **86**, 023822 (2012).
- [67] H. Zhong, Q. Xie, M. T. Batchelor und C. Lee,
Analytical eigenstates for the quantum Rabi model,
Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **46**, 415302 (2013).
- [68] C. Gerry, P. Knight und P. L. Knight, *Introductory quantum optics*,
Cambridge university press, (2005).
- [69] A. F. Kockum, A. Miranowicz, S. De Liberato, S. Savasta und F. Nori,
Ultrastrong coupling between light and matter, Nature Reviews Physics **1**, 19 (2019).
- [70] F. A. Wolf, M. Kollar und D. Braak,
Exact real-time dynamics of the quantum Rabi model,
Physical Review A **85**, 053817 (2012).
- [71] S. Felicetti et al., *Quantum Rabi model in the Brillouin zone with ultracold atoms*,
Physical Review A **95**, 013827 (2017).

- [72] G. Cennini, *Field-insensitive Bose-Einstein condensates and an all-optical atom laser*, Dissertation, Universität Tübingen, (2004).
- [73] C. Grossert, *Atomarer Transport und die Kontrolle von Transportresonanzen in optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (2015).
- [74] M. Leder, *Quantensimulation von relativistischen Effekten mit ultrakalten Atomen in variablen optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (2016).
- [75] A. Franzen, *ComponentLibrary*, (2021), URL: <http://www.gwoptics.org/ComponentLibrary/> (besucht am 08. 10. 2021), lizenziert unter CC BY-NC 3.0.
- [76] E. Catanzaro, T. J. Murphy, E. Garner und W.-R. Shields, *Absolute isotopic abundance ratio and atomic weight of terrestrial rubidium*, Journal of Research of the National Bureau of Standards. Section A, Physics and Chemistry **73**, 511 (1969).
- [77] I. M. Villa, P. De Bièvre, N. Holden und P. Renne, *IUPAC-IUGS recommendation on the half life of ^{87}Rb* , Geochimica et Cosmochimica Acta **164**, 382 (2015).
- [78] L. Ricci et al., *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*, Optics Communications **117**, 541 (1995).
- [79] W. Demtröder, „Laser Spectroscopy: Basic Concepts and Instrumentation“, Springer Science & Business Media, (2013) 453.
- [80] P. Pokrowsky, W. Zapka, F. Chu und G. Bjorklund, *High frequency wavelength modulation spectroscopy with diode lasers*, Optics Communications **44**, 175 (1983).
- [81] L. Sitta, *Observation of an edge state in ultra cold atoms with spatially variable optical lattice potentials*, Masterarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (2015).
- [82] S. Z. Hassan, *Realization of the Quantum Rabi Model with Ultracold Rubidium Atoms in an Optical Lattice*, Masterarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (2017).
- [83] R. N. Ward, M. T. Montgomery und M. Gottlieb, *Acousto-Optic Scanners and Modulators*, Handbook of Optical and Laser Scanning, 525 (2018).
- [84] J. Plumhof, *Bose-Einstein-Kondensation von Rubidiumatomen in variablen optischen Gittern*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, (2008).

-
- [85] H. Haken und H. C. Wolf, „Atom-und Quantenphysik: Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen“, Springer-Verlag, (2001) 209.
- [86] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, „Taschenbuch der Mathematik“, Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, (2005) 435.
- [87] Andor Technology Ltd, *Andor Zyla 5.5 Specifications - Physical Sciences*, (2021), URL: <https://andor.oxinst.com/assets/uploads/products/andor/documents/andor-zyla-for-physical-sciences-specifications.pdf> (besucht am 16. 11. 2021).
- [88] J. J. Braat, S. van Haver, A. J. Janssen und P. Dirksen, *Assessment of optical systems by means of point-spread functions*, *Progress in Optics* **51**, 349 (2008).
- [89] W. H. Richardson, *Bayesian-based iterative method of image restoration*, *Journal of the Optical Society of America* **62**, 55 (1972).
- [90] L. B. Lucy, *An iterative technique for the rectification of observed distributions*, *The Astronomical Journal* **79**, 745 (1974).
- [91] R. Puebla, M.-J. Hwang und M. B. Plenio, *Excited-state quantum phase transition in the Rabi model*, *Physical Review A* **94**, 023835 (2016).
- [92] D. J. Wales und J. P. Doye, *Global optimization by basin-hopping and the lowest energy structures of Lennard-Jones clusters containing up to 110 atoms*, *The Journal of Physical Chemistry A* **101**, 5111 (1997).
- [93] D. C. Liu und J. Nocedal, *On the limited memory BFGS method for large scale optimization*, *Mathematical Programming* **45**, 503 (1989).
- [94] M.-J. Hwang, R. Puebla und M. B. Plenio, *Quantum phase transition and universal dynamics in the Rabi model*, *Physical Review Letters* **115**, 180404 (2015).
- [95] M. Heyl, *Dynamical quantum phase transitions: a review*, *Reports on Progress in Physics* **81**, 054001 (2018).
- [96] L. Lamata, A. Parra-Rodriguez, M. Sanz und E. Solano, *Digital-analog quantum simulations with superconducting circuits*, *Advances in Physics: X* **3**, 1457981 (2018).
- [97] J. R. Johansson, P. D. Nation und F. Nori, *QuTiP: An open-source Python framework for the dynamics of open quantum systems*, *Computer Physics Communications* **183**, 1760 (2012).

- [98] J. R. Johansson, P. D. Nation und F. Nori,
QuTiP 2: A Python framework for the dynamics of open quantum systems,
Computer Physics Communications **184**, 1234 (2013).
- [99] J. Weideman und B. Herbst,
Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation,
SIAM Journal on Numerical Analysis **23**, 485 (1986).
- [100] P. D. Nation et al., *QuTiP: Quantum Toolbox in Python*, (2021), URL:
<https://qutip.org/docs/latest/index.html> (besucht am 05. 11. 2021).
- [101] J. Javanainen und J. Ruostekoski, *Symbolic calculation in development of algorithms:
split-step methods for the Gross–Pitaevskii equation*,
Journal of Physics A: Mathematical and General **39**, L179 (2006).