Institut für Photogrammetrie

Zur Approximation allgemeiner optischer Abbildungsmodelle und deren Anwendung auf eine geometrisch basierte Mehrbildzuordnung am Beispiel einer Mehrmedienabbildung

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Grades
Doktor-Ingenieur
(Dr.-Ing.)
der
Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

Vorgelegt im Oktober 2006 von
Kirsten Wolff
aus Wilhelmshaven

Referent: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Förstner
Koreferent: Prof. Dr. rer. nat. Hans-Peter Helfrich
Prof. Dr.-Ing. Hans-Gerd Maas

Tag der mündlichen Prüfung: 15.03.2007
Erscheinungsjahr: 2007

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online elektronisch publiziert.

Zusammenfassung

Nicht perspektivische Abbildungen besitzen geometrische Elemente, die auf ihre geometrischen Eigenschaften einen direkten Einfluss haben, im Bereich der Photogrammetrie aber kaum bekannt sind. Ein solches Element ist zum Beispiel die Art eines Projektionszentrums, das punkt-, linien- oder flächenförmig sein kann und der Verlauf der Abbildungsstrahlen, die beide die Abhängigkeit der Verzeichnung von der Position des Bildpunktes im Bildraum oder des zugehörigen Objektpunktes im Objektraum beeinflussen. Diese Arbeit behandelt grundlegend die Geometrie von Projektionszentren, den daraus resultierenden Bildverzeichnungen und ihre Bedeutung für eine dreidimensionale photogrammetrische Auswertung. Zusammenfassend umfasst diese Arbeit die folgenden vier Schwerpunkte:

Einführung einer neuen Repräsentation und Taxonomie optischer Abbildungssysteme. Ein für die Komplexität einer photogrammetrischen Auswertung entscheidendes Merkmal optischer Abbildungen ist die Art ihrer Bildfehler, die bildraumbasiert oder objektraumbasiert sein können. Die Bildfehler und ihre Modellierung werden direkt durch das punktförmige oder nicht punktförmige Projektionszentrum des abbildenden Strahlenbündels beeinflusst. Dabei kann ein Abbildungssystem streng genommen mehr als ein Projektionszentrum besitzen. Eine entsprechende Analyse optischer Systeme ist im Bereich der Photogrammetrie bisher nur unter Berücksichtigung von einzelnen dieser Aspekte durchgeführt worden und wird hier zusammen mit einer resultierenden neuen Repräsentation und Taxonomie umfassender dargestellt.

Vorstellung eines allgemeinen, effizienten Approximationsmodells optischer Abbildungssysteme. Nicht perspektivische Abbildungen, die eine objektraumbasierte Verzeichnung besitzen, können sehr komplexe und spezialisierte Abbildungsmodelle besitzen. Dies ist Motivation für die Entwicklung eines effizienten und allgemein gültigen Approximationsmodells komplexer, objektraumbasiert verzeichneter Abbildungen durch ein einfaches Modell. Durch bestimmte Anforderungen an den Einsatz des Modells wird ein signifikanter Einfluss auf die Endergebnisse verhindert. A priori Qualitätsuntersuchungen für eine dreidimensionale Objektrekonstruktion bestätigen dies.

Entwicklung eines geometrisch basierten Zuordnungsalgorithmus im Mehrbildverband. Das Approximationsmodell wird innerhalb eines ebenfalls hier vorgestellten, geometrisch basierten Zuordnungsverfahrens innerhalb einer Objektrekonstruktion angewendet. Verschiedene Tests mit synthetischen und realen Daten analysieren und bewerten die Methodik der Approximation, der Bildzuordnung und Objektrekonstruktion im Mehrbildverband und zeigen einen effektiven Einsatz der beiden Verfahren.

Qualitätsanalysen mittels photogrammetrischer Rekonstruktion von fluvialen Sedimentoberflächen unter optischen Mehrmedienbedingungen. Als Anwendungsbeispiel wird eine fluviale Sedimentoberfläche durch die Medien Luft, Plexiglas und Wasser hindurch beobachtet und rekonstruiert. Mit diesem Beispiel wird gleichzeitig die Einsatzmöglichkeiten photogrammetrischer Methoden für die Erzeugung von Eingangsdaten für eine Analyse eines dynamischen, fluvialen Sedimentationsprozesses geprüft. Die Ergebnisse zeigen, dass photogrammetrische Methoden für die Lösung dieser Aufgabenstellung grundsätzlich anwendbar sind.

Summary

Non perspective mappings include geometric elements, which have an direct influence on their geometric characteristics but which are more or less unknown in the field of photogrammetry. An example for such an element is the type of a viewing point, which can be a single point, a line or a surface (non single points). Another example is the way of mapping rays. Both influence the image distortions depending on the position of the image point in image space or the object point in object space. This work basically deals with the geometry of viewing points, the resulting image distortion and their relevance for a three dimensional photogrammetric reconstruction. The work focuses the following four points:

Introduction of a new representation and taxonomy for optical imaging systems. One feature of optical mappings is the type of image distortion, which is important for the complexity of a photogrammetric process. It may either base on the position of the image point in image space or the object point in object space, which is much more complex. The image distortion and its modeling are being directly influenced by a single point or non single point viewpoint. In this context it is important that an imaging system may have more than one viewing point. A corresponding analysis of imaging systems is realised in the field of photogrammetry only under condition of some of these aspects. Here, a global analysis is given, which takes all these mentioned aspects into account, and a new resulting representation and taxonomy for optical imaging systems is introduced.

Development of a general, efficient approximation method for imaging systems. Non perspective mappings, which have object space based image distortions, might have very complex and specialised mapping models. This is motivation for the development of an efficient and general approximation method for complex, object space based distorted mappings by a simplified model. By a definition of special requirements for the realisation, a significant influence of the approximation error on the quality of the final results can be prevented. A priori quality analyses of a 3d reconstruction support this assumption.

Development of a geometrically based matching algorithm for multiple views. The approximation method is used for a new geometry based matching algorithm for 3D reconstruction, which will also be presented here. Different tests using synthetic and real data analyse and evaluate the methodology of the approximation, of the image matching and the 3D object reconstruction for multiple views and show the efficiency of both methods.

Quality tests by a photogrammetric reconstruction of a fluvial sediment surface with multi media geometry. As an application example of the methods, a fluvial sediment surface is observed through the three optical media air, Perspex and water and is reconstructed in 3D. This application is also a test of the use of photogrammetric methods for preparing input data for a synthetic analysis of the sedimentation process. The results indicate that photogrammetric methods are applicable for this task.

Verwendete Notation

Innerhalb dieser Arbeit gilt die folgende Notation. Bei den geometrischen Elementen wird unterschieden zwischen dem Objekt an sich, seiner euklidischen und seiner homogenen Repräsentation.

Notation	**Element**
$\mathbb{P}^n$	n-dimensionaler projektiver Raum
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler euklidischer Raum
$\mathcal{x}, y$	2D Punkte
$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ $\mathbf{x}, \mathbf{y}$	euklidische und homogene Koordinatenvektoren der Punkte $\mathcal{x}$ und y
$\boldsymbol{x}_0, x_h$	euklidischer und homogener Teil der Koordinaten des Punktes $\mathbf{x}$
$\mathcal{x}', y', \mathcal{x}'', y'', \mathcal{x}^{(i)}, y^{(i)}$	2D Bildpunkte im ersten, zweiten und $i-$ten Bild
$\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{x}'', \mathbf{y}'', \mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{y}^{(i)}$	homogene Koordinatenvektoren des ersten, zweiten und $i-$ten Bildpunkt
$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$	3D Punkte
$\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}$ $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$	euklidische und homogene Koordinatenvektoren der Punkte $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$
$\boldsymbol{X}_0, X_h$	euklidischer und homogener Teil der Koordinaten des Punktes $\mathcal{X}$
$\mathcal{l}$	2D Linie
$\mathbf{l}$	homogene Repräsentation einer 2D Linie $\mathcal{l}$
$l_0, \boldsymbol{l}_h$	euklidischer und homogener Teil der Linie $\mathcal{l}$
$\mathcal{L}$	3D Linie
$\mathbf{L}$	homogene Repräsentation einer 3D Linie $\mathcal{L}$
$\boldsymbol{L}_0, \boldsymbol{L}_h$	euklidischer und homogener Teil der Linie $\mathcal{L}$
$\overline{\mathcal{L}}$	duale 3D Linie zu der Linie $\mathcal{L}$
$\overline{\mathbf{L}}$	homogener Koordinatenvektor der Linie $\overline{\mathcal{L}}$
$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$	Ebenen
$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	homogene Koordinatenvektoren der Ebenen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$
$A_0, \boldsymbol{A}_h$	euklidischer und homogener Teil des Koordinatenvektors der Ebene $\mathcal{A}$
$\mathcal{Z}$	Projektionszentrum
$\boldsymbol{Z}$, $\mathbf{Z}$	euklidische und homogene Repräsentation eines Projektionszentrums
$\boldsymbol{I}_3$	3×3 Einheitsmatrix
$\mathcal{R}, R$	Rotation, Rotationsmatrix
K	3×3 homogene Kalibriermatrix
$\mathcal{H}, \mathsf{H}$	projektive Abbildung, allgemeine Homographie
$\mathcal{P}, \mathsf{P}$	Projektion, 3×4 homogene Projektionsmatrix
$\mathcal{L}_{\mathcal{x}'}$	3D Abbildungsstrahl zum Bildpunkt $\mathcal{x}'$
$(\cdot)^T$	Transponierte einer Matrix
$\cap$	Schnittoperator von zwei Elementen
$\wedge$	Verknüpfungsoperator von zwei Elementen
$\doteq$	Gleichheit gefordert

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

1.1 Motivation 1

1.2 Schwerpunkte der Arbeit 3

1.3 Überblick über die Arbeit 8

2 Mathematische Grundlagen **11**

2.1 Geometrische Elemente der projektiven Geometrie 11

2.1.1 Homogene Repräsentation geometrischer Elemente 12

2.1.2 Konstruktion geometrischer Elemente 15

2.2 Mathematische Basisabbildungsmodelle 16

2.2.1 Abbildungen der Mathematik 16

2.2.2 Perspektivische Abbildungen 17

2.2.3 Projektive Abbildungen 18

2.3 Minimierung der algebraischen Distanzfunktion für die Parameterschätzung . . . 19

3 Bildgeometrische Grundlagen **23**

3.1 Abbildungen der Strahlenoptik 23

3.2 Definitionen 24

3.3 Geradentreue perspektivische Einbildgeometrie 25

3.3.1 Projektive Kameramodelle 25

3.3.2 Projektive Abbildung geometrischer Elemente 27

3.4 Nicht perspektivische Abbildungen und ihre Projektionszentren 29

3.5 Beispiel einer nicht perspektivischen Einbildgeometrie: Objektivverzeichnung . . . 32

3.6 Beispiel einer nicht perspektivischen Einbildgeometrie: Mehrmediengeometrie . . 33

3.6.1 Grundlagen der Lichtbrechung 35

3.6.2 Das streng physikalische Abbildungsmodell der Dreimediengeometrie . . . 38

3.6.3 Projektionszentren der Mehrmediengeometrie 40

3.7 Zweibildgeometrie 43

3.7.1 Epipolargeometrie für projektive und nicht projektive Abbildungen . . . 43

3.7.2 Bestimmung der Epipolarlinie für nicht geradentreue Abbildungen 46

4 Neue Betrachtung optischer Abbildungssysteme in Abhängigkeit von den geometrischen Eigenschaften ihrer Abbildungsstrahlen 49

4.1 Eigenschaften optischer Abbildungen 49

4.2 Klassifizierung optischer Abbildungssysteme in Abhängigkeit von ihren Abbildungsstrahlenbündel 51

4.3 Abgrenzung zu anderen Arbeiten 54

4.4 Beispiele 55

5 Approximationsmodell allgemeiner optischer Abbildungen 59

5.1 Approximationsidee 59

5.2 Formulierung des Approximationsproblems 60

5.3 Bestimmung der Approximation 62

5.4 Abgrenzung zu anderen Arbeiten 63

6 3D Punktzuordnung in einem Mehrbildverband für projektive und nicht projektive Abbildungen 69

6.1 Grundlagen der Punktzuordnung in einem Mehrbildverband 70

6.1.1 Problematik der Mehrdeutigkeiten 71

6.2 Simultane, geometrische Bildpunktzuordnung in einem Mehrbildverband 72

6.2.1 Verfahrensstrategie 72

6.2.2 Verfahrensablauf 73

6.2.3 Hypothesentests 74

6.3 Charakterisierung des Verfahrens 77

6.3.1 Steuerparameter 77

6.3.2 Merkmale des Algorithmus 78

6.4 Integration des phänomenologischen Approximationsmodells für eine 3D Punktbestimmung 78

6.4.1 Realisierung der Integration 78

6.4.2 Reduktion der Rechenkomplexität durch die Approximation 79

7 Beispiele und Qualitätsanalysen 83

7.1 Einleitung 83

7.1.1 Beobachtungen von Objekten unter Mehrmedienbedingungen 83

7.1.2 Motivation für das Anwendungsbeispiel 85

7.1.3 Strategie der Qualitätsuntersuchungen 86

7.1.4 Parametersatz des Aufnahmemodells 88

7.1.5 Schätzung der Orientierungsparameter des Aufnahmesystems 89

7.2 A priori Qualitätsuntersuchungen mit synthetischen Daten 89
7.2.1 Datensatz 90
7.2.2 Qualitätstests der Güte der Approximation 91
7.2.3 Qualitätstests der Zuverlässigkeit des Zuordnungsalgorithmus und Implementation der Approximation 96
7.3 Experimentelle Analyse mittels realer Daten einer freien Oberfläche 97
7.3.1 Versuchsanordnung und Aufnahmesystem 97
7.3.2 Schätzung der strengen und der approximativen Orientierung und deren Vergleich 98
7.3.3 Zuordnung der Bildelemente im Objektraum 102
7.3.4 Bestimmung der Objektpunkte 105
7.4 Approximation mit geometrischer Fehlerminimierung und realen Passpunkten . . 108

8 Schlussbetrachtungen 111
8.1 Zusammenfassung 111
8.2 Offene Fragen 112

A Singulärwertzerlegung 115

B Äquivalenz der Repräsentation einer projektiven Abbildung und dem Modell der Kollinearitätsgleichung 117

C Schätzung der Direkten Linearen Transformation durch die kleinste Quadrate Minimierung des algebraischen Fehlers 119

D Strenge und approximierende Modellierung der Objektivverzeichnung 121
D.1 Strenge Modellierung der Objektivverzeichnung in Abhängigkeit von der Objektraumposition 121
D.2 Approximierende Modellierung der Objektivverzeichung in Abhängigkeit von der Bildraumposition 121

E k-means Clustering 123

F Kenndaten der Ausgleichung der Orientierungsparameter 125

Literatur 127

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Die Natur eines optischen Abbildungsprozesses zwischen einem dreidimensionalen Objektraum und einem zweidimensionalen Bildraum ist abhängig von den physikalischen Eigenschaften der einzelnen optischen Komponenten des Abbildungssystems, ihrer geometrischen Anordnung und den physikalischen Gesetzmäßigkeiten der Lichtausbreitung. Die Hauptaufgabenstellung der allgemeinen bildverarbeitenden Wissenschaften ist es, aus zwei- oder dreidimensionalen Daten zwei- oder dreidimensionale Informationen zu erzeugen. Dies führt zu dem grundlegenden Problem, die oben beschriebene Natur eines optischen Abbildungsprozesses zu verstehen, den zugrunde liegenden Abbildungsvorgang zu analysieren, zu repräsentieren und ein physikalisches oder phänomenologisches Modell sowie das entsprechende mathematische Modell zur Beschreibung dieses Prozesses aufzustellen.

Diese Arbeit behandelt grundlegend besondere geometrische Eigenschaften von nicht perspektivischen Abbildungen, insbesondere die unterschiedlichen Arten von Projektionszentren, die punktförmig oder nicht punktförmig sein können und die resultierenden Bildverzeichnungen, die entsprechend bildraum- oder objektraumbasiert sein können. Es wird eine entsprechende neue Repräsentation und Klassifikation von optischen Abbildungssystemen eingeführt. Insbesondere für Abbildungen mit objektraumbasierter Verzeichnung wird ein neues, allgemeines und effizientes Approximationsverfahren vorgestellt. Dieses Approximationsmodell wird innerhalb eines neuen, ebenfalls hier vorgestellten geometrischen Zuordnungsalgorithmus im Mehrbildverband angewendet. Beides zusammen wird für eine photogrammetrische Mehrbildauswertung unter den Bedingungen einer Mehrmediengeometrie (Wasser, Plexiglas und Luft) getestet. Als Beobachtungsobjekt dient dabei eine Sedimentoberfläche, entstanden durch einen dynamischen Sedimentationsprozesses.

Das grundlegende geometrische Modell, welches für die meisten Abbildungsmodelle als Basis dient, ist das Modell der Lochkamera. In der Realität weichen die Abbildungssysteme zum Beispiel aufgrund von Konstruktionsfehlern oder eines speziellen Designs von diesem Modell mehr oder weniger stark ab. Insbesondere entstanden neue Designs und spezialisierte Abbildungsgeometrien, um den neuen Anforderungen an Abbildungssysteme gerecht zu werden. So galt es zum Beispiel den Aufnahmebereich zu vergrößern, oder die Auflösung zu verbessern, ohne die Kosten zu sehr in die Höhe zu treiben. Beispiele für Modelle, die diesen Anforderungen entsprechen, sind katadioptische Systeme und Zeilenkameras. Durch die entstehenden Abweichungen der Systeme zum Basismodell entstehen geometrische Bildfehler. Diese Fehler werden im Allgemeinen als systematische Fehler aufgefasst, denen bestimmte physikalische Ursachen zugeordnet werden

können (siehe Schwidefsky & Ackermann, 1976). Aufgrund der Systematik der Abbildungsfehler können Abbildungsmodelle aufgestellt werden, die diese Fehler berücksichtigen. Von großem Interesse für die Entwicklung, Komplexität und Implementation eines physikalischen oder phänomenologischen Abbildungsmodells ist dabei, ob die Auswirkung eines Bildfehlers bildraumabhängig oder objektraumabhängig ist. Dies hat auch eine direkte Auswirkung auf die Modellierung, die entsprechend bildraumbasiert oder objektraumbasiert sein kann kann. Die Art eines Projektionszentrums steht im direkten Zusammenhang mit der angesprochenen Abhängigkeit der Bildfehler. Ein Projektionszentrum kann im Gegensatz zu der klassischen photogrammetrischen Definition von Projektionszentren sowohl punktförmig, als auch nicht punktförmig sein. Die Form des Projektionszentrums ist ausschlaggebend für die Art der Bildfehler und spielt daher in dieser Arbeit eine entscheidende Rolle.

Da mit den punktförmigen und nicht punktförmigen Projektionszentren ein für die Photogrammetrie neuer Aspekt auftritt, ist es notwendig, die Menge der verschiedenen Abbildungssysteme eingehender zu betrachten und zu analysieren. Zu Beginn werden wir daher eine neue Klassifikation von Abbildungssystemen vorstellen. Es existieren bereits einige Arbeiten zu diesem Thema (siehe dazu Kapitel 4.3), die jedoch nur unterschiedliche Teilaspekte berücksichtigen und durch diese Arbeit umfassend erweitert werden sollen.

Für objektraumverzeichnete Abbildungen ist die strenge Modellierung und die davon abhängige Berechnung der Projektionen zwischen dem Objekt- und dem Bildraum meist sehr spezialisiert und aufwendig. Dies ist Motivation für eine zweite Thematik: die Fragestellung nach einer Methodik für eine effiziente Approximation komplexer, objektraumbasiert verzeichneter Abbildungen durch ein einfaches Modell, ohne dass durch das Approximationsmodell ein signifikanter Einfluss auf das Endergebnis entsteht. Mit dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, um ein komplexes Aufnahmesystem durch ein einfaches, phänomenologisches Modell zu approximieren. Damit kann die komplexe Modellierung umgangen werden. Das Entscheidende an der hier vorgestellten Methode ist, dass als Approximationsmodell das einfachste Abbildungsmodell eingesetzt wird, jedoch durch zusätzliche Bedingungen der Einfluss des Approximationsfehlers nahezu beliebig reduziert werden kann. Die abschließende Berechnung der Ergebnisse wird unter Verwendung des strengen Modells durchgeführt. Dadurch kann grundsätzlich ein signifikanter Einfluss auf die Ergebnisse einer Bildanalyse verhindert werden.

Für die Analyse der Qualität und der Einsatzmöglichkeiten einer solchen Approximation für einen photogrammetrischen Auswerteprozess wurde die Bildelementzuordnung im Mehrbildverband für eine Objektrekonstruktion gewählt. Der hier vorgestellte, neu entwickelte Zuordnungsalgorithmus basiert allein auf geometrischen Bedingungen und ist grundsätzlich für alle beliebigen Abbildungssysteme (unverzeichnet, bildraum- oder objektraumbasiert verzeichnet) einsetzbar. Die Approximation des Abbildungsmodells wird dabei nur für die Arbeitsschritte der komplexen Bildzuordnung eingesetzt. Um das ganze Genauigkeitspotential des streng physikalischen Modells ausnutzen zu können, wird für die anschließende 3D Objektpunktbestimmung dieses strenge Modell verwendet. Der Einsatz der vorgestellten Methoden wird sowohl für synthetische, als auch für reale Daten getestet. Als Anwendungsbeispiel für eine photogrammetrische dreidimensionale Auswertung wird eine fluviale Sedimentoberfläche rekonstruiert.

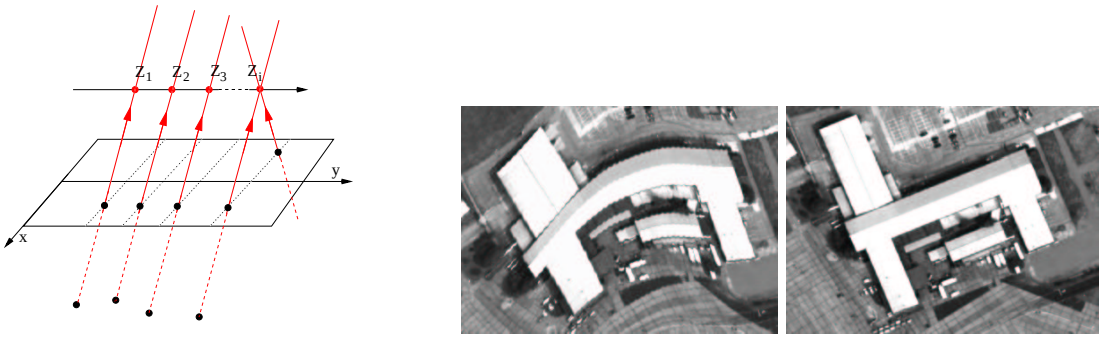


Abbildung 1.1: *Zeilensensor als Beispiel für eine nicht geradentreue Abbildung. Links: Durch die Vorwärtsbewegung des Zeilensensors entsteht eine Kette von punktförmigen Projektionszentren. Mitte: Bildausschnitt eines unkorrigierten Originalbildes. Die deutliche Abweichung zur Geradentreue wird dadurch verursacht, dass zwar in der "across-track"-Richtung eine perspektivische Abbildung des Objektraumes besteht, in der "along-track"-Richtung jedoch eine Parallelprojektion. Rechts: korrigierte Abbildung: die Geraden des Gebäudes sind im entzerrten Bild nahezu gerade (Abbildungen entnommen aus Elberink & Vosselman, 2002).*

1.2 Schwerpunkte der Arbeit

Diese Arbeit umfasst die folgenden vier Schwerpunkte:

Neue Repräsentation und Taxonomie optischer Abbildungssysteme

Betrachten wir für eine erste Einführung der Taxonomie einen *Zeilensensor* als aktuelles Beispiel für eine nicht perspektivische, objektraumbasiert verzeichnete Abbildung (siehe Heipke & Kornus, 1996). Die Verarbeitungsbilder entstehen durch Aneinanderreihung der einzelnen Zeilenbilder. Die nicht geradentreue Abbildung wird durch die Abweichung von dem perspektivischen Abbildungsmodell in "along-track"-Richtung verursacht: zwischen den Zeilen besteht eine Parallelprojektion. Somit existiert nicht mehr ein einziges, punktförmiges Projektionszentrum für das zusammengesetzte Bild, vielmehr entsteht eine Kette von punktförmigen Projektionszentren für jede Zeile (siehe Abbildung 1.1, rechts). Damit gilt das Modell der zentralperspektivischen Abbildung zwar für jede einzelne Zeile, nicht aber für die objektraumbasiert verzeichnete Gesamtaufnahme. Einflüsse wie Objektivverzeichnung, Refraktion oder ähnliches werden hier nicht berücksichtigt. Abbildung 1.1 zeigt in der Mitte eine unkorrigierte Originalaufnahme eines Zeilensensors und rechts das zugehörige entzerrte, annähernd geradentreue Bild (entnommen aus Elberink & Vosselman, 2002).

Diese Unterscheidung eines Projektionszentrums als punktförmig oder nicht punktförmig wird im Bereich der Photogrammetrie kaum berücksichtigt. Vielmehr wird bei einem Projektionszentrum im Allgemeinen von einem punktförmigen Element ausgegangen. In der optischen Physik tauchen auch nicht punktförmige Projektionszentren auf. Wie wir sehen werden, beeinflusst die Art eines Projektionszentrums die Bildfehler, die je nach Projektionszentrum bildraum- oder objektraumbasiert sind. Das bedeutet, dass ein Bildfehler entweder von der Lage des Bildpunktes oder des Objektpunktes abhängt. Dieser Aspekt eines Projektionszentrums fließt ein in die Einführung einer neuen Taxonomie von Abbildungssystemen.

Was bedeutet der Begriff *nicht punktförmiges Projektionszentrum*? Ein solches Projektionszentrum kann zum Beispiel linien-, oder flächenförmig sein. Letzteres taucht zum Beispiel bei der *Mehrmediengeometrie* auf. Abbildung 1.2 zeigt die Geometrie eines Zweimedienaufnahmesystems mit den Medien Luft und Wasser. Die Kamera befindet sich in der Luft und das Objekt im Medium Wasser. Auch hier handelt es sich um eine nicht perspektivische Abbildung, die neben dem punktförmigen Projektionszentrum der Kamera auch ein flächenförmiges Projektionszentrum besitzt, das durch die Refraktion verursacht wird: Die geradlinigen Verlängerungen der Abbildungsstrahlen, die vom Objekt aus bis zur Grenzschicht zwischen Wasser / Luft verlaufen, bilden in ihrem Häufungsbereich eine kaustische Fläche, die von ihnen tangential berührt wird. Abbildung 1.2 (links) zeigt den Strahlenverlauf innerhalb der Medien Wasser und Luft. Abbildung 1.2 (rechts) zeigt das virtuelle, nicht punktförmige Projektionszentrum. Es entsteht durch die geradlinige Verlängerung der Abbildungsstrahlen, die sich im Wasser befinden, über die Grenzschicht Wasser / Luft hinaus. Sie bilden in ihrem Häufungsbereich eine kaustische Fläche, die auch einfach als Kaustik bezeichnet wird.

Da es nur einen sichtbaren Bildpunkt zu jedem Objektpunkt gibt, besteht das Zweimedienaufnahmesystem physikalisch gesehen aus einem einzelnen Abbildungsschritt, (siehe dazu auch Kapitel 3.1). Berücksichtigen wir jedoch auch die mathematische Definition einer Abbildung, so können die Abbildungsstrahlen der Aufnahme in zwei Teilbündel mit je einem Projektionszentrum unterteilt werden (detaillierte Erläuterungen werden in Kapitel 2.2.1 gegeben). Das erste Strahlenbündel wird durch die Objektpunkte und die Brechungspunkte an der Wasseroberfläche (virtuelle Bildpunkte) aufgespannt und besitzt eine flächenförmige Kaustik als Projektionszentrum. Das zweite Strahlenbündel wird durch die Brechungspunkte an der Wasseroberfläche und die realen Bildpunkte in der Bildebene aufgespannt und besitzt als punktförmiges Projektionszentrum das Projektionszentrum der Kamera. Das gesamte Aufnahmesystem besitzt also ein flächenförmiges und ein punktförmiges Projektionszentrum. Auf diese Art und Weise können alle komplexeren Abbildungssysteme in einzelne Teilabbildungen unterteilt werden und jede der Teilabbildungen auf ihre geometrischen Eigenschaften hin untersucht werden. Durch die getrennte Analyse der Teilabbildungen kann auf die geometrischen Eigenschaften des gesamten Aufnahmesystems geschlossen werden. Diese Überlegungen fließen ebenfalls in die neue Repräsentation und Taxonomie mit ein.

Um die Unterteilung des Aufnahmesystems in einzelne Teilabbildungen an sich und ihre Bedeutung verständlicher zu machen, betrachten wir ein System, das ein Objekt über einen hyperbolischen Spiegel und durch verschiedene Medien hindurch abbildet (siehe Abbildung 1.3).

1. Die erste optische Teilabbildung ist die Spiegelung eines Objektpunktes mittels eines hyperbolischen Spiegels, dessen virtuelle Brennweite (Projektionszentrum) hinter dem Spiegel liegt. Das Spiegelbild entsteht ebenfalls hinter dem Spiegel.

2. Die zweite optische Teilabbildung projiziert den virtuellen Bildpunkt (Spiegelpunkt) durch die drei unterschiedlichen Medien Wasser, Plexiglas und Luft auf die Sensorfläche und es entsteht ein zweiter Bildpunkt (real) des Objektpunktes. Werden neben den optischen Aspekten auch mathematische hinzugezogen, kann die zweite Teilabbildung nochmals unterteilt werden:

   (a) zwischen dem Spiegelpunkt und dem ersten Brechungspunkt zwischen Plexiglas und Wasser (flächenförmiges Projektionszentrum),

   (b) zwischen diesem Brechungspunkt und dem zweiten Brechungspunkt zwischen Plexiglas und Luft (flächenförmiges Projektionszentrum) und

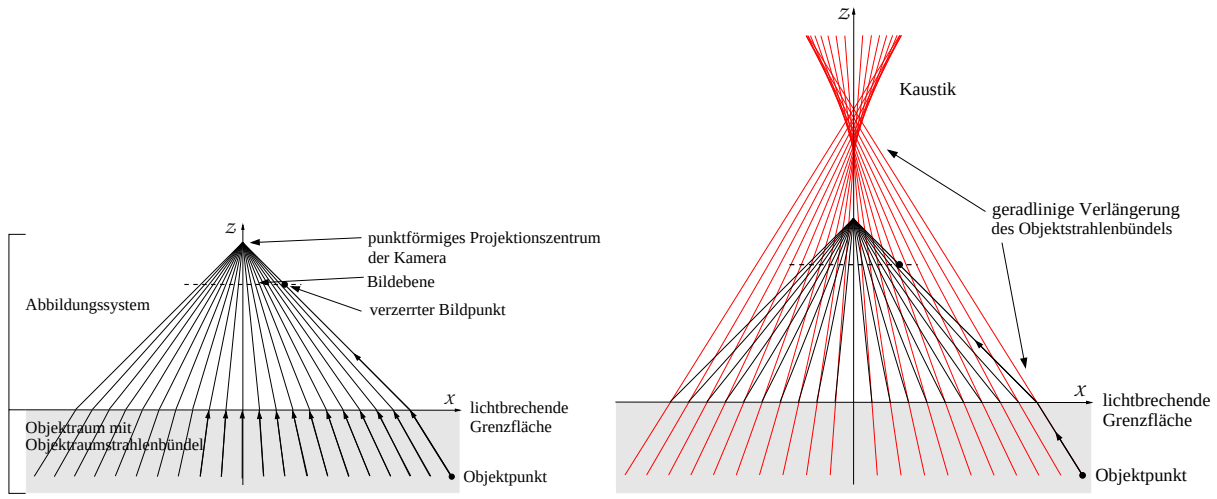


Abbildung 1.2: *2D Darstellung der Verläufe der Abbildungsstrahlen eines Mehrmediensystems bestehend aus den beiden transparenten Medien Luft und Wasser. Links: strenger Verlauf der Abbildungsstrahlen, gebrochen an der Grenzfläche Wasser / Luft. Rechts: Die virtuellen, geradlinigen Verlängerungen des Objektstrahlenbündels schneiden sich nicht in einem punktförmigen Projektionszentrum. Ihre Einhüllende bildet eine kaustische Fläche, die von den Strahlen tangential berührt werden.*

(c) zwischen diesem zweiten Brechungspunkt und dem realen Bildpunkt auf dem optischen Sensor (punktförmiges Projektionszentrum).

Bei einer solchen Abbildung kann die daraus entstehende Bildunschärfe Probleme verursachen. Dies wird jedoch in dieser Arbeit nicht weiter berücksichtigt werden. Wir halten fest, dass bei der Betrachtung der Abbildungssysteme, ihrer Unterteilung und anschließenden Analyse sowohl photogrammetrische und physikalische, als auch mathematische Aspekte eine Rolle spielen können.

Approximationsmodell für allgemeine, optische Abbildungen

Nach Abhandlung der allgemeinen Geometrie von Abbildungssystemen und einer entsprechenden neuen Taxonomie, widmet sich die Arbeit der Approximation von nicht perspektivischen Abbildungsystemen und deren Anwendung für die Lösung photogrammetrischer Aufgabenstellungen. Für die Modellierung und Bildanalyse sind die Auswirkungen einer objektraumbasierten Bildverzeichnung von größerer Bedeutung als bildraumbasierte, da sie nicht a priori korrigiert werden können und eine sehr komplexe Auswertung nach sich ziehen können. Es wurden und werden nach wie vor Verfahren entwickelt, die es ermöglichen, die Abhängigkeit der Bildfehlermodellierung von der Objektraumposition zu umgehen. Ein Beispiel dafür ist die Approximation der objektraumabhängigen Objektivverzeichnung durch eine bildraumabhängige Korrektur (siehe Brown, 1971 und Kapitel 3.5). In Swaminathan *et al.* , 2003 wird eine Methode vorgestellt, die für das Objekt eine approximative, a priori Annahme trifft. Dies kann zum Beispiel eine einfache geometrische Form wie eine Ebene oder ein Zylinder sein. Damit lässt sich die Unkenntnis von Objektrauminformationen umgehen.

Diese Arbeit stellt eine neue Vorgehensweise vor, um die aufwändige, objektraumabhängige Korrektur von Bildfehlern zu umgehen. Die sehr einfache und effiziente Idee basiert darauf, eine be-

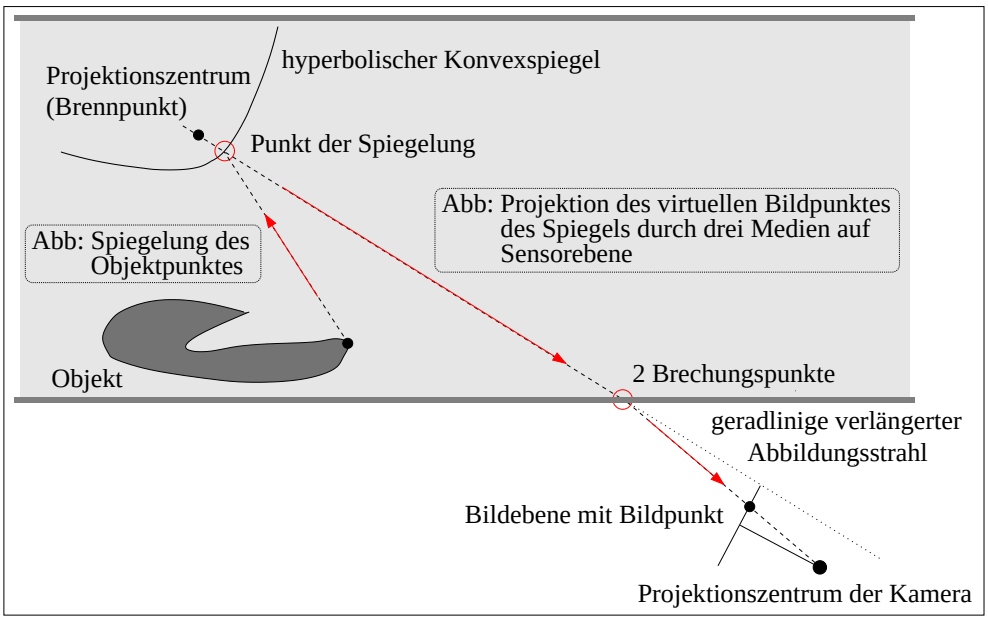


Abbildung 1.3: *Komplexes Abbildungssystem mit unterschiedlichen Teilabbildungen. 1. Abbildung zwischen einem Objektpunkt und seinem Spiegelbild (virtueller Bildpunkt hinter dem hyperbolischem Spiegel liegend) beziehungsweise dem Reflektionspunkt auf dem Spiegel, 2. Abbildung zwischen dem Spiegelbild und dem Sensor. Letztere Abbildung kann mathematisch gesehen nochmals unterteilt werden in a) einer Abbildung zwischen dem Spiegelbildpunkt und dem ersten Brechungspunkt, b) zwischen dem ersten und dem zweiten Brechungspunkt und c) zwischen dem zweiten Brechungspunkt und dem realen Bildpunkt auf dem Sensor.*

liebige, objektraumabhängig verzerrte Abbildung durch das einfache Modell einer geradentreuen Zentralperspektive phänomenologisch zu approximieren. Dadurch muss keine Objektinformation für die Modellierung des Abbildungsprozesses berücksichtigt werden. Diese Approximation alleine stellt noch keine neue Vorgehensweise dar, wird jedoch durch folgende drei entscheidende Punkte für verschiedene Anwendungsgebiete eine interessante Alternative:

1. Es wird nicht eine einzige Approximation für den gesamten Aufnahmebereich bestimmt. In Abhängigkeit von der Aufnahmegeometrie und den Genauigkeitsanforderungen wird der Beobachtungsbereich unterteilt und für jeden Teilraum eine lokal gültige, virtuelle Kamera als Approximation bestimmt. Somit kann die Güte der Approximation theoretisch nahezu beliebig gesteigert werden, da eine nicht perspektivische Abbildung für einen infinitesimal kleinen Bereich bis hin zu einem einzelnen Punkt als Abbildungsraum als geradentreue Abbildung angesehen werden kann. Theoretisch gesehen wird durch die Definition einer lokalen Abbildung für jeden einzelnen Objektpunkt ein Genauigkeitsverlust verhindert. Praktisch gesehen muss eine den Bedingungen und Anforderungen an Genauigkeit und Rechenzeit angemessene Unterteilung gefunden werden.

2. Das Approximationsmodell wird nicht zwingend für jede einzelne Berechnung der Abbildung während einer Auswertung benutzt, sondern nur für ausgewählte, sinnvolle Schritte.

3. Die hier eingesetzte Schätzmethode für die Bestimmung der Approximation verwendet als zu minimierende Distanzfunktion keinen geometrischen Fehler, sondern einen algebraischen Fehler. Zum einen liefert eine Minimierung eines algebraischen Fehlers nach einer systematische Konditionierung der Daten Ergebnisse, die sich nicht signifikant von denen einer geometrischen Fehlerminimierung unterscheiden. Zum anderen beruht das hier vorgestellte Approximationsmodell nicht auf einer realen Geometrie, sondern auf numerischen Relationen zwischen den Objekt- und den Bildpunkten.

Wie wir sehen werden, kann durch diese drei Kernpunkte das Verfahren derart in einen photogrammetrischen Auswerteprozess implementiert werden, dass die Güte und die Qualität der Endergebnisse nicht signifikant beeinflusst werden.

Geometrisch basierter Zuordnungsalgorithmus im Mehrbildverband

Das Approximationsmodell wird für eine photogrammetrische Objektrekonstruktion in einem Mehrbildverband getestet. Für die Lösung dieser Aufgabe wird ein neu entwickelter Zuordnungsalgorithmus vorgestellt, der allein auf geometrischen Zuordnungsbedingungen basiert. Der Algorithmus ist prinzipiell so konzipiert und implementiert, dass jedes beliebige Abbildungsmodell einfach implementiert werden kann.

Bei einer Objektrekonstruktion ist der Schritt der Mehrbildzuordnung von Bildelementen in Abhängigkeit von der Anzahl der Bilder, der Anzahl der extrahierten Bildmerkmale und ihrer Verteilung im Bildraum im Allgemeinen sehr komplex. Dies war Motivation dafür, das allgemeine Approximationsmodell nur für diesen Schritt einzusetzen. Die geforderte Güte der Approximation wird durch die Genauigkeitsanforderungen der Rekonstruktion bestimmt und muss garantieren, dass die Wahrscheinlichkeit für Falschzuordnungen nicht signifikant vergrößert wird. Um in dem anschließenden Schritt der Punktbestimmung durch einen räumlichen Vorwärtsschnitt eine möglichst hohe Genauigkeit zu erhalten, wird für diesen Schritt das streng physikalische Modell verwendet.

Durch dieses Vorgehen wurden aufwendige Methoden einer streng physikalisch basierten Auswertung mit den schnellen Methoden einer auf einem einfachen Modell basierenden Auswertung effektiv kombiniert, indem die jeweiligen Vorteile, wie zum Beispiel hohe Genauigkeit, beziehungsweise geringe Rechenkomplexität, an jeweils geeigneten Stellen in den Auswerteablauf implementiert worden sind. Dieses Vorgehen zeigt, dass es nicht notwendig ist, in jedem Schritt einer Auswertung die komplexen, streng physikalisch basierten Abbildungsmodelle einzusetzen, sondern dass eine sinnvolle und effektive Kombination mit einfachen, weniger komplexen Modellen realisierbar ist.

Anwendungsbeispiel

Die Evaluation der Anwendung des Approximationsverfahrens und der Bildzuordnung wird mittels des nicht perspektivischen Abbildungssystems unter Mehrmedienbedingungen mit objektraumbasierter Verzeichnung durchgeführt. Motiviert wurde dieses Anwendungsbeispiel durch die Eignungsprüfung photogrammetrischer Methoden zur Erzeugung von Eingangsdaten für eine Analyse eines dynamischen, fluvialen Sedimentationsprozesses.

Zusammenfassend erhalten wir folgende Aspekte, die in dieser Arbeit abgehandelt werden:

1. **Theorie**: Die Einführung einer neuen, geometrischen Betrachtung und Klassifizierung optischer Abbildungssysteme in Abhängigkeit von den Eigenschaften ihrer Abbildungsstrahlenbündel und deren Einfluss auf die Bildfehler.
2. **Methodik 1**: Die Definition eines effizienten und allgemeinen Approximationsmodells für komplexe, objektraumbasiert verzeichnete Abbildungen.
3. **Methodik 2**: Die Entwicklung eines geometrisch basierten Zuordnungsalgorithmus in einem Mehrbildverband.
4. **Anwendung**: Die Implementation der Approximation in den Zuordnungsalgorithmus und deren Anwendung für eine Objektrekonstruktion unter Mehrmedienbedingungen.

1.3 Überblick über die Arbeit

Kapitel 2 In diesem Kapitel werden mathematische Grundlagen erläutert, die für das Verständnis und die Umsetzung dieser Arbeit notwendig sind. Dazu gehört zunächst ein knapper Überblick über die homogene Repräsentation geometrischer Elemente der projektiven Geometrie und die Berechnung eines räumlichen Vorwärtsschnittes unter Verwendung von homogenen Koordinaten. In einem zweiten Teil werden das perspektivische und das projektive Abbildungsmodell als Basismodelle unter mathematischen Aspekten vorgestellt. Das Kapitel schließt ab mit einer Erläuterung der Minimierung der algebraischen Distanzfunktion zur Parameterschätzung als effektive Alternative zur Minimierung der geometrischen oder statistischen Kostenfunktion.

Kapitel 3 Hier werden allgemeine, bildgeometrische Grundlagen sowohl für den perspektivischen, als auch für den nicht perspektivischen Fall behandelt. Ein Schwerpunkt liegt dabei insbesondere auf die Einführung und Erläuterung kaustischer Flächen als Projektionszentren.

Kapitel 4 Vorstellung der neuen Repräsentation und Taxonomie für Abbildungssysteme, die auf der Unterscheidung von Abbildungsfehlern und der verursachenden Geometrie des Abbildungsstrahlenbündels basiert. Dafür wird der Begriff Abbildung aus der Sicht verschiedener, hier

einfließender Disziplinen betrachtet. Im Anschluss an die Klassifizierung werden einige Beispiele optischer Abbildungssysteme und ihre Klassifizierung behandelt.

Kapitel 5 In diesem Kapitel wird das allgemeine, approximierende Modell einer objektraumbasiert verzeichnenden Abbildung vorgestellt. Am Anfang steht die Approximationsidee und die Formulierung des Approximationsproblems. Im Anschluss daran folgt die Berechnung der Approximation. Am Ende des Kapitels wird eine Abgrenzung zu anderen Verfahren vorgenommen.

Kapitel 6 Hier wird die Anwendung des Approximationsmodells für eine rein geometrisch basierte Punktzuordnung in einem Mehrbildverband beschrieben. Dazu werden einige Grundlagen der Mehrbildzuordnung wie zum Beispiel die Problematik von Mehrdeutigkeiten angesprochen. Das Zuordnungsverfahren wird unabhängig von der Implementation des Approximationsmodells vorgestellt. Abschließend wird die Zeitersparnis für die Abbildung zwischen Objekt- und Bildraum durch Einsatz der Approximation analysiert.

Kapitel 7 Das Anwendungskapitel umfasst eine Motivation des Anwendungsbeispiels, die Strategie der Qualitätsuntersuchungen und die Realisierung der Tests, die sowohl synthetische, als auch reale Daten verwenden.

Kapitel 8 Zusammenfassung und offene Fragen.

Kapitel 2

Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die wichtigsten mathematischen Grundlagen erläutert, die für das Verständnis und die Umsetzung der vorgestellten Verfahren und Algorithmen notwendig sind.

Für die beiden methodischen Teile dieser Arbeit, die phänomenologische Approximation einer komplexen, objektraumbasiert verzeichneten Abbildung und die Zuordnung in einem Mehrbildverband, setzen wir eine lineare Relation zwischen den Objekt- und den Bildkoordinaten an. Um dieses lineare Verhältnis effektiv für die Berechnungen ausnutzen zu können, wurden bei der Umsetzung der Algorithmen die Verfahren der projektiven Geometrie eingesetzt. Kapitel 2.1 gibt in diesem Kontext eine kurze Übersicht über die verwendeten Elemente und die Berechnung eines räumlichen Vorwärtsschnittes und Kapitel 2.2 definiert die beiden hier verwendeten mathematischen Basisabbildungsmodelle: die perspektivische und die projektive Abbildung.

Die Verwendung der projektiven Methoden für die lineare Repräsentation der Kollinearitätsgleichung ermöglicht die Anwendung einer einfachen und effektiven Methode zur Parameterschätzung: die Minimierung des algebraischen Fehlers. Da diese Methode im Bereich der Photogrammetrie nicht sehr verbreitet ist, wird das Verfahren in Kapitel 2.3 in seinen Grundzügen vorgestellt.

2.1 Geometrische Elemente der projektiven Geometrie

Durch die Verwendung der Methoden der projektiven Geometrie kann die lineare Relation zwischen dem Objektraum und dem Bildraum genutzt werden. Die Verwendung der effektiven Methoden der linearen Algebra fand schon früh Einzug in den Bereich der Photogrammetrie, wenn sie auch erst heute vermehrt eingesetzt werden. Die lineare Repräsentation der Kollinearitätsgleichung für eine optische Abbildung eines 3D Objektraumes in einen 2D Bildraum wurde bereits vor über 50 Jahren von Das, 1949 eingeführt. Die daraus resultierende, direkte lineare Transformation (DLT) wurde von Abdel-Aziz & Karara, 1971 im Rahmen der Nahbereichsphotogrammetrie definiert. Mundy & Zisserman, 1992 verwendeten die Methoden der projektiven Geometrie für die Objektrekonstruktion aus optischen Bildern mit unkalibrierten Kameras. Der Zusammenhang zwischen der linearen Parametrisierung der DLT und der herkömmlichen photogrammetrischen Repräsentation mit euklidischen Parametern wird unter anderem beschrieben in Förstner & Wrobel, 2004a.

Betrachten wir zunächst einige Grundideen der projektiven Geometrie. Eine ihrer Aufgaben ist es, sich mit geometrischen Eigenschaften zu beschäftigen, die invariant gegenüber Transformationen zwischen projektiven Räumen sind (Courant & Robbins, 1962). Übertragen auf Fragestellungen

der Photogrammetrie, handelt es sich um Eigenschaften von Beobachtungsobjekten, die nach einer Projektion vom Objektraum in den Bildraum unverändert erscheinen und daher die visuelle, manuelle oder automatische Objektdetektion und Interpretation erst ermöglichen (zum Beispiel die geradentreue Abbildung von Kanten).

Im Gegensatz zur euklidischen Repräsentation von geometrischen Elementen wie Punkten, Geraden und Ebenen, repräsentiert die projektive Geometrie diese Elemente mit homogenen Koordinaten. Durch diese Repräsentation lassen sich in einem projektiven Raum - anders als in einem affinen Raum - geometrische Elemente wie Punkte und Linien im Unendlichen als uneigentliche Punkte und Geraden darstellen. Darüber hinaus ermöglicht die homogene Repräsentation von Punkten, Geraden und Ebenen eine einfache algebraische Repräsentation von geometrischen Zusammenhängen und Operationen. So kann zum Beispiel die in der Photogrammetrie üblicherweise nicht linear repräsentierte Kollinearitätsgleichung durch ein lineares Gleichungssystem in Matrizenschreibweise dargestellt werden (siehe dazu Kapitel 3.3).

Die algebraische Repräsentation und Berechnung von geometrischen Abbildungen mit homogenen Koordinaten wurde bereits in anderen Arbeiten ausgiebig vorgestellt und es wird für die Grundlagen auf diese Arbeiten verwiesen (siehe Hartley & Zisserman, 2003 und Heuel, 2004) und hier nur eine kurze Zusammenfassung gegeben.

2.1.1 Homogene Repräsentation geometrischer Elemente

In diesem Kapitel sind die geometrischen Elemente zusammengestellt, die für die Darstellung der Bilderzeugung, Bildinversion und der 3D Rekonstruktion in einem Mehrbildverband benötigt werden: Punkte und Linien im zweidimensionalen und dreidimensionalen Raum und Ebenen.

Homogene Vektoren und Matrizen

Die projektive Geometrie repräsentiert geometrische Elemente wie Punkte, Geraden und Ebenen homogen. Dies bedeutet, dass ein Vektor $\mathbf{x}$, der ein geometrisches Element χ repräsentiert, invariant gegenüber einer Multiplikation mit einem Skalar ist. Er kann beliebig mit einem Faktor $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ skaliert werden, ohne dass sich das geometrische Element, das er repräsentiert, verändert:

$$\mathbf{x} \hat{=} \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y},\ \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Die Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ repräsentieren damit das gleiche geometrische Element.

Entsprechendes gilt für homogene Matrizen mit

$$\mathsf{A} \cong \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} = \lambda \mathbf{B},\ \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

Es wird hier auch von Äquivalenzklassen von Vektoren und Matrizen gesprochen.

Homogene Vektoren und Matrizen werden im Weiteren mit senkrechten Buchstaben wie $\mathbf{x}$, $\mathbf{l}$, P bezeichnet, im Gegensatz dazu werden für euklidische Vektoren und Matrizen kursive Buchstaben wie zum zum Beispiel $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{l}$, und $\boldsymbol{R}$ verwendet.

Repräsentation im zweidimensionalen Raum

Ein **2D Punkt** χ mit den euklidischen Koordinaten $\boldsymbol{x} = (x, y)^T$ ist in einer projektiven Ebene ein geordnetes Tripel reeller Zahlen, die nicht alle gleich Null sind:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ x_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

Die Koordinate x_h ist die homogene Koordinate und zugleich der Skalierungsfaktor des Vektors, $\boldsymbol{x}_0$ ist der euklidische Teil des Vektors.

Wird $\lambda = w$, $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ gesetzt, so erhalten wir mit $u = \lambda x$ und $v = \lambda y$

$$\mathbf{x} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix},$$

x und y sind euklidische Koordinaten.

Eine **2D Linie** ℓ besteht aus allen Punkten, die einer linearen Gleichung in der impliziten, homogenen Form $(a\mathbf{x} + b\mathbf{y} + c\mathbf{z}) = 0$ genügen, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ konstante Parameter sind und nicht alle gleich Null sind. $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ ist ein beliebig wählbarer Faktor, der auch hier wieder eine Äquivalenzklasse beschreibt. Das Zahlentripel a, b, c bildet die homogenen Koordinaten der Linie ℓ. Es gilt

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{l}_h \\ l_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ -s \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}/\{0\}.$$

$s = |c|\sqrt{\cos\phi^2 + \sin\phi^2}$ ist der Abstand der Linie zum Ursprung. Der Untervektor $\boldsymbol{l}_h = [a, b]^T$ ist der homogene Teil des Vektors und beschreibt die Normale der Linie. $l_0 = c$ ist der nicht homogene Anteil oder euklidische Teil des Vektors, der proportional zur Distanz der Linie zum Ursprung ist.

Die Geradengleichung wird in homogenen Koordinaten repräsentiert durch

$$\mathbf{l}^T\mathbf{x} = 0.$$

Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Punkt $\mathbf{x} = [u, v, w]^T$ auf der Geraden liegt.

Repräsentation im dreidimensionalem Raum

Die Repräsentation der Elemente mit homogenen Koordinaten sieht im dreidimensionalem ähnlich wie im zweidimensionalem Raum aus.

Ein **3D Punkt** $\mathcal{X}$, mit den euklidischen Koordinaten $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)^T$ wird durch ein Quadrupel reeller Zahlen gebildet

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_0 \\ X_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix}.$$

Mit $\lambda = T$, $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ und $U = \lambda X$, $V = \lambda Y$ und $W = \lambda Z$ erhalten wir

$$\mathbf{X} = \lambda \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{bmatrix},$$

mit den euklidischen Koordinaten X, Y und Z.

Wird eine **3D Linie** $\mathcal{L}$ durch 2 Punkte $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ aufgespannt, so kann die Gerade durch die Verbindung dieser beiden Punkte in Form des äußeren Produkts $\mathbf{L} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$ dargestellt werden. Der Ausdruck $\wedge$ steht dabei für die Verbindung zweier geometrischer Elemente. In homogenen Koordinaten gilt mit den beiden Punkten $\mathbf{X} = [U_1, V_1, W_1, T_1]^T$ und $\mathbf{Y} = [U_2, V_2, W_2, T_2]^T$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_h \\ \boldsymbol{L}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_0 \\ X_h \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_0 \\ Y_h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} X_h \boldsymbol{Y}_0 - Y \boldsymbol{X}_0 \\ \boldsymbol{X}_0 \times \boldsymbol{Y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1U_2 - U_1T_2 \\ T_1V_2 - V_1T_2 \\ T_1W_2 - W_1T_2 \\ V_1W_2 - V_2W_1 \\ W_1U_2 - W_2U_1 \\ U_1V_2 - U_2V_1 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Die Gerade wird also durch ein Sechstupel dargestellt. Das Tripel $\boldsymbol{L}_h = [L_1, L_2, L_3]$ gibt die Richtung der Geraden und $\boldsymbol{L}_0 = [L_4, L_5, L_6]$ die Normale der Ebene durch die Gerade und den Ursprung an. Diese Koordinaten werden auch *Plücker-Koordinaten* genannt.

Die so genannte *Plückerbedingung* garantiert, dass es sich bei einem Zahlensechstupel tatsächlich um eine Repräsentation einer Geraden handelt. Sie enthält die Bedingung, dass die Normale der Ebene, die durch die Linie und den Ursprung verläuft, senkrecht auf der Richtung der Geraden steht und lautet:

$$\boldsymbol{L}_h \cdot \boldsymbol{L}_0 = 0. \tag{2.2}$$

Werden die beiden Punkte mit den homogenen Anteilen $T_i = 1, i = 1, 2$ euklidisch mit $\mathbf{X}_1 = [X_1, Y_1, Z_1, 1]^T$ und $\boldsymbol{X}_2 = [X_2, Y_2, Z_2, 1]^T$ dargestellt, folgt für die Plückerkoordinaten der Linie mit Gleichung 2.1:

$$\mathbf{L} = \mathbf{X}_1 \wedge \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \\ Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1 \\ Z_1 X_2 - Z_2 X_1 \\ X_1 Y_2 - X_2 Y_1 \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Eine **Ebene** $\mathcal{A}$ wird durch den homogenen Quadrupel $\mathbf{A} = [A, B, C, D]^T$ repräsentiert. A, B, C, D entsprechen den Parametern der Ebenenrepräsentation mit euklidischen Koordinaten $AX+BY+CZ+D=0$. Die Ebene besitzt ebenfalls einen homogenen Teil $\boldsymbol{A}_h$ und einen euklidischen Teil A_0. Für eine Darstellung einer Ebene mit homogenen Koordinaten gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_h \\ A_0 \end{bmatrix}.$$

2.1.2 Konstruktion geometrischer Elemente

Durch einen Schnitt geometrischer Elemente, repräsentiert durch den Operator $\cap$, oder deren Verbindung, repräsentiert durch den Operator $\wedge$, entstehen neue geometrische Elemente. Diese Konstruktionen lassen sich mit Hilfe der homogenen Koordinaten sehr einfach repräsentieren, wie im Folgenden gezeigt wird (vergleiche auch Heuel, 2004).

Zwei Punkte spannen eine 3D Raumgerade auf

Mit Hilfe der Gleichung 2.1 wird eine Gerade $\mathcal{L}$ erzeugt, die durch zwei Punkte $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^3$ aufgespannt wird. Es gilt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} X_h \boldsymbol{Y}_0 - Y_h \boldsymbol{X}_0 \\ \boldsymbol{X}_0 \times \boldsymbol{Y}_0 \end{bmatrix} = \overline{\Pi}(\mathbf{X})\mathbf{Y} \tag{2.4}$$

$\Pi(\mathbf{X})$ ist die 6×4 Jacobimatrix, für die gilt

$$\frac{\partial \mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{Y}} = \overline{\Pi}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} T & 0 & 0 & -U \\ 0 & T & 0 & -V \\ 0 & 0 & T & -W \\ 0 & -W & V & 0 \\ W & 0 & -U & 0 \\ -V & U & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Für die Implementierung des in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus wird ein Abbildungsstrahl einer zentralperspektivischen Abbildung durch das Projektionszentrum und einen Bildpunkt aufgespannt.

Der Schnitt von n 3D Geraden $\mathbf{L}_1$ ... $\mathbf{L}_n$ erzeugt einen Schnittpunkt im 3D Raum:

Die Bedingung *"Punkt $\mathcal{X}$ liegt auf einer Geraden $\mathcal{L}$"* sieht mit Plücker-Koordinaten wie folgt aus

$$\Gamma(\mathbf{L})\mathbf{X} = 0 \tag{2.6}$$

für $\Gamma(\mathbf{L})$ gilt

$$\Gamma(\mathbf{L}) = \begin{bmatrix} 0 & L_3 & -L_2 & -L_4 \\ -L_3 & 0 & L_1 & -L_5 \\ L_2 & -L_1 & 0 & -L_6 \\ L_4 & L_5 & L_6 & 0 \end{bmatrix}.$$

Für den Schnitt von $n \geq 2$ Geraden muss die Bedingung 2.6 für alle n Geraden $\mathcal{L}_i,\ i = 1..n$ und dem allen Geraden gemeinsamen Schnittpunkt $\mathcal{X}$ erfüllt sein. Es entsteht das homogene, lineare Gleichungssystem

$$\mathsf{A}_{4n\times 4}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \Gamma(\mathbf{L}_1) \\ \vdots \\ \Gamma(\mathbf{L}_n) \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}. \tag{2.7}$$

Der Schnitt von $n \geq 2$ Geraden findet in der Photogrammetrie zum Beispiel Anwendung bei der Bestimmung eines Objektpunktes durch den Vorwärtsschnitt der Abbildungsstrahlen homologer Bildpunkte. Die klassische Repräsentation des Vorwärtsschnittes mit euklidischen Koordinaten ergibt ein inhomogenes Gleichungssystem.

Die Lösung eines solchen überbestimmten linearen Gleichungssystems ist ein klassisches Problem der numerischen Mathematik und der Parameterschätzung. Für die Berechnung einer nicht trivialen Lösung ($x \neq 0$) existiert eine Vielfalt von Methoden. Es sei hier auf das Kapitel 2.3 verwiesen, in dem ein einfaches und schnelles Verfahren zur Schätzung von Parametern mit linearen, funktionalen Modellen vorgestellt wird. Das Verfahren minimiert einen algebraischen Fehler nach der Methode der Minimierung der kleinsten Quadrate.

2.2 Mathematische Basisabbildungsmodelle

Sowohl die geometrische Optik, als auch die Photogrammetrie verwenden für ihre Repräsentationen mathematische Funktionen. Die mathematische Definition einer Abbildung ist allgemeiner als das optische und das photogrammetrische Verständnis einer Abbildung. Bei den beiden letzteren ist der Objektpunkt das Urbild, dessen Bild durch eine Bildfläche definiert wird. Die hier vorgestellte Repräsentation und Taxonomie optischer Abbildungssysteme basiert auf den optischen und den photogrammetrischen Begriff der Abbildung und darüber hinaus auch auf die mathematischen Definition.

2.2.1 Abbildungen der Mathematik

Eine mathematische Abbildung oder Funktion ist wie folgt definiert (vereinfachte Definition):

Abbildung: Wird ein Element χ einer Definitionsmenge $A \subset \mathbb{R}^m$, x $\in$ A einem anderen Element y einer Wertemenge $B \subset \mathbb{R}^n$, y $\in$ B zugeordnet, so heißt die Menge f der geordneten Paare $[x, y]$ eine **Abbildung** oder Funktion von A nach B:

$$f : A \longmapsto B, y = f(x).$$

χ ist das Urbild zum Bild y.

Ist die Abbildung linear, kann sie in Matrizenschreibweise repräsentiert werden. Siehe dazu auch Kapitel 2.2.2 und 2.2.3.

Im Unterschied zur Photogrammetrie und der geometrischen Optik wird hier ein Bildpunkt nicht über eine Bildebene oder einen Schnitt von Abbildungsstrahlen definiert, sondern über die Relation zwischen einem Urbild und seinem Bild.

Im Allgemeinen kann jede optische Abbildung als mathematische Abbildung dargestellt werden. Wie wir sehen werden, existieren optische Abbildungen, die in weitere mathematische Teilabbildungen unterteilt werden können. Mathematisch lässt sich eine so zusammengesetzte Abbildung durch eine Komposition beschreiben:

Komposition: Seien f mit $f(x) = y, x \in A \subset \mathbb{R}^n$, y $\in$ B $\subset \mathbb{R}^m$ und g mit $g(y) = z, z \in C \subset \mathbb{R}^p$ zwei Abbildungen, bei denen der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g ist, so ist $g \circ f : A \to C$ von f und g erklärt durch $x \longmapsto g(f(x))$. $g \circ f$ heißt Komposition von f mit g.

Eine solche Komposition lässt sich theoretisch auf beliebig viele Abbildungen zwischen Elementen ausdehnen.

Betrachten wir uns erneut eine photogrammetrische Abbildung unter Mehrmedienbedingungen. Mit der mathematischen Definition einer Abbildung handelt es sich bei den Brechungspunkten ebenfalls um Bildpunkte und es entstehen zusätzlich Teilabbildungen wie zum Beispiel zwischen Objektpunkt und dem ersten Brechungspunkt (siehe Abbildung 1.3, Seite 6).

2.2.2 Perspektivische Abbildungen

Die beiden für die Arbeit grundlegenden mathematischen Modelle optischer Abbildungen sind die perspektivische und die projektive Abbildung, die in den beiden folgenden Unterkapiteln erläutert werden.

Eine zentralperspektivische Abbildung ist eine Projektion von Elementen χ_i entlang von geradlinigen Abbildungsstrahlen $\mathcal{L}_i$ auf die Elemente χ_i'. Die Abbildungsstrahlen schneiden sich dabei in dem punktförmigen Projektionszentrum $\mathcal{Z}$, das entsprechend kollinear mit dem Bildpunkt und dem Objektpunkt ist (siehe auch Kapitel 3.2 und Abbildung 2.1).

Werden die Ausgangselemente auf eine ebene Bildfläche projiziert, so ist die Abbildung geradentreu: Objektgeraden werden in Bildgeraden abgebildet. Wir sprechen dann von einer *geradentreuen perspektivischen Abbildung* (siehe Abbildung 4.1).

Diese geradentreue Abbildung kann mit einer regulären Transformationsmatrix H_z und den homogenen Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{x}'$ repräsentiert werden:

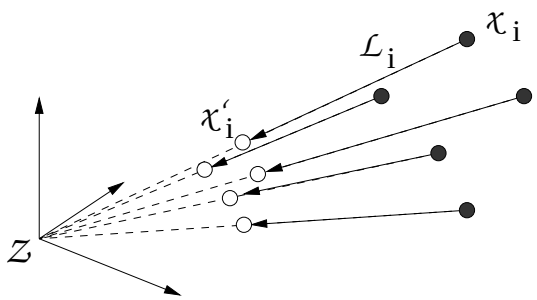


Abbildung 2.1: *Zentralperspektivische Abbildung im* $\mathbb{R}^3$ *mit dem Projektionszentrum* $\mathcal{Z}$*. Objektpunkt, Bildpunkt und Projektionszentrum liegen kollinear.*

$$\mathbf{x}' = \mathsf{H}_z\mathbf{x}, \mathbf{x} \in A, \mathbf{x}' \in B.$$

Ist die Bildfläche nicht eben, sondern zum Beispiel zylindrisch, so handelt es sich um eine *nicht geradentreue perspektivische Abbildung* und Objektgeraden werden gekrümmt oder geknickt dargestellt, siehe Abbildung 4.1, Seite 50.

2.2.3 Projektive Abbildungen

Die Gruppe der projektiven Abbildungen bildet eine Klasse, die als wichtigste projektive Eigenschaft die Geradentreue besitzt. Sie ist eine Verallgemeinerung der geradentreuen, perspektivischen Abbildungen, da ihre Elemente kein Projektionszentrum besitzen müssen und zusätzliche projektive Parameter berücksichtigen, die die Geradentreue nicht beeinflussen (z. B. Translationen).

Eine projektive Abbildung ist eine Abbildung zwischen zwei *projektiven Räumen*. Ein projektiver Raum entsteht durch eine Erweiterung des affinen Raumes um uneigentliche Elemente (Punkte, Geraden und Ebenen im Unendlichen). Für $n = 1$ wird der Raum zu einer projektiven Linie, für $n = 2$ zu einer projektiven Ebene und für $n = 3$ zu einem projektiven Raum. Der projektive Raum $\mathbb{P}^3$ enthält also alle Punkte $\mathbf{X} = [X, Y, Z, 1]$ des euklidischen Raumes und zusätzlich die uneigentlichen Punkte $\mathbf{X}_\infty = [X, Y, Z, 0]$.

Definition
Eine **projektive Abbildung** bezeichnet eine injektive Abbildung $\mathcal{H}$ zwischen zwei projektiven Räumen derselben Dimension n, falls drei Punkte $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$ und $\mathcal{X}_3$, genau dann auf einer Geraden liegen, wenn auch $\mathcal{H}(\mathcal{X}_1)$, $\mathcal{H}(\mathcal{X}_2)$ und $\mathcal{H}(\mathcal{X}_3)$ auf einer Geraden liegen (nach Hartley & Zisserman, 2003). Wir schreiben

$$\mathcal{H} : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n. \tag{2.8}$$

Eine bijektive projektive Abbildung heißt Projektivität (siehe Fischer, 1992).

Ein Punkt $\mathbf{x} = [x_1, x_2, .., x_{n+1}]^T$ wird durch die reguläre Transformationsmatrix $\mathsf{H}_{(n+1)\times(n+1)}$ wie folgt in den Bildpunkt $\mathbf{x}' = [x'_1, x'_2, .., x'_{n+1}]^T$ transformiert

$$\mathcal{H} : \mathbf{x}' = \mathsf{H}\mathbf{x}. \tag{2.9}$$

Die Transformationsmatrix ist homogen, das heißt, dass die Matrix beliebig skaliert werden kann, ohne dass sich der transformierte Punkt $\mathcal{X}'$ ändert. Wir erhalten die Äquivalenzklasse $\tilde{\mathsf{H}}$ der Matrix H mit $\mathsf{H} \cong \tilde{\mathsf{H}}$ und

$$\mathsf{H}\lambda\tilde{\mathsf{H}},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Daher wird die Abbildung auch Homographie genannt. Aufgrund der Definition 2.8 bilden Homographien gerade Linien in gerade Bildlinien ab (Hartley & Zisserman, 2003).

Der Freiheitsgrad der Transformationsmatrix beträgt $(n+1) \times (n+1) - 1 = n(n+2)$.

Die projektiven Eigenschaften einer projektiven Abbildung sind:

- Inzidenz geometrischer Elemente,
- Kollinearität von Punkten (Geradentreue),
- Verbindungen zwischen den Elementen,
- Wert des Doppelverhältnisses von vier Punkten.

2.3 Minimierung der algebraischen Distanzfunktion für die Parameterschätzung

Bei einer Parameterschätzung mit linearen Modellen besteht ein linearer, funktionaler Zusammenhang $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ zwischen den Beobachtungen $\boldsymbol{y}$ und den unbekannten Parameter $\boldsymbol{x}$. Dieser Zusammenhang ist entweder direkt gegeben, oder er kann z.B. mittels Linearisierung nach der Taylor- oder Schneiderentwicklung erreicht werden. Im Allgemeinen kann davon ausgegangen werden, dass bei einer Überbestimmung das zugehörige lineare Gleichungssystem nicht konsistent ist und keine eindeutige Lösung besitzt. Jedoch kann die Konsistenz des Systems erreicht werden, indem ein Zufallsvektor $\boldsymbol{e}$, der die Residuen zu den Beobachtungen $\boldsymbol{y}$ enthält, berücksichtigt wird. Sei $\widehat{\boldsymbol{y}}$ die Schätzung des Erwartungswertes von $\boldsymbol{y}$, dann wird durch die Minimierung einer vorgegebenen Distanzfunktion d als Fehler der Schätzung eine optimale Lösung bestimmt (Koch, 1997).

Für das Minimierungsproblem können verschiedene Metriken als Distanzfunktionen verwendet werden:

1. *Geometrische (euklidische) Distanzfunktion*

$$d_g(\boldsymbol{y}, \widehat{\boldsymbol{y}}) = \sqrt{||\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}}||^2}$$

Die euklidische Distanzfunktion ist eine der bekanntesten Distanzfunktionen. Sie ist die Quadratwurzel der quadratischen Abweichung der Beobachtungen $\boldsymbol{y}$ von den Schätzwerten $\widehat{\boldsymbol{y}}$ ihrer Erwartungswerte $E(\boldsymbol{y})$. Es wird ein euklidischer Abstand zwischen zwei geometrischen Größen berechnet.

2. *Mahalanobis Distanzfunktion*

$$d_M(\boldsymbol{y}, \widehat{\boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{y} - \widehat{\boldsymbol{y}})$$

mit $\boldsymbol{\Sigma}$ Kovarianzmatrix der Beobachtungen $\boldsymbol{y}$. Durch die Einführung der Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ handelt es sich bei dieser Distanzfunktion um eine statistisch korrigierte, euklidische Distanzfunktion (siehe Mahalanobis, 1936).

3. *algebraische Distanzfunktion*

Besteht ein linearer Zusammenhang zwischen Beobachtungen und Unbekannten und sei $\boldsymbol{A}$ die zugehörige Kovarianzmatrix und $\boldsymbol{x}$ der Vektor der unbekannten Parametern und es gilt in dem fehlerfreien System $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0$, so erhalten wir für ein entsprechendes, fehlerbehaftetes System die algebraische Distanzfunktion

$$d_{alg}(\boldsymbol{y}) = \sqrt{||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||^2}$$

Es wird hier also kein geometrischer Abstand, sondern rein numerische Größen minimiert. Da Linearität vorausgesetzt worden ist, benötigt das Modell keine Näherungswerte.

Innerhalb dieser Arbeit werden für die Schätzung von Parametern sowohl die geometrische, als auch die algebraische Distanzfunktion minimiert. Im Falle eines geometrischen Residuenmodells wird ein Residuum abhängig von den geschätzten Größen minimiert, während bei einem algebraischen Modell ein Residuum in Abhängigkeit allein von den Beobachtungen minimiert wird. Dies ließ die Kritik aufkommen, dass die Ergebnisse einer solchen Schätzung ungenügend sein könnten, da sie die Geometrie des Problems nicht berücksichtigt. Entgegen dieser Kritik zeigt Hartley, 1998, dass durch eine systematische Konditionierung der Daten ein signifikanter Einfluss auf die Ergebnisse im Unterschied zur geometrischen Fehlerminimierung verhindert werden kann (siehe auch Hartley, 1995).

Für viele Probleme im Bereich der 3D Bildanalyse sind lineare Algorithmen bekannt, wenn sie auch teilweise weniger eingesetzt werden. Hartley, 1998 stellt die Minimierung des algebraischen Fehlers für folgende drei Aufgabenstellungen vor: i) Bestimmung der Direkten Linearen Transformation einer projektiven Kamera, ii) Bestimmung der Fundamentalmatrix zweier Bilder, iii) Bestimmung des Trifokalen Tensors für drei Bilder und iv) Bestimmung des Quadrifokalen Tensors für vier Bilder.

Für die Arbeitsschritte einer Bildauswertung, bei denen eine virtuelle projektive Kamera als Approximation einer beliebigen Abbildung eingesetzt wird, kann die Schätzung des Projektionsmatrix P und des Geradenschnittes für n Raumgeraden die effiziente Minimierung der algebraischen Distanzfunktion angewendet werden. Bei den späteren Qualitätsuntersuchungen in Kapitel 7 werden für die Evaluierung der berechneten Schätzergebnisse Referenzdaten unter Verwendung der Minimierung der geometrischen Distanzen bestimmt.

Die Minimierung einer geometrischen, beziehungsweise statistischen Distanzfunktion ist im Bereich der Photogrammetrie bekannt und wird zum Beispiel durch eine Parameterschätzung nach der Methode der kleinsten Quadrate oder Maximum-Likelihood-Schätzung durchgeführt (siehe zum Beispiel Koch, 1997). Die Minimierung einer algebraischen Distanzfunktion ist demgegenüber in unserem Fachgebiet weniger verbreitet und wird daher kurz in ihren Grundzügen vorgestellt.

Wir setzen für eine beste Schätzung der Parameter als Fehlermodell für die Residuen $\widehat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{x} - \widehat{\boldsymbol{x}}$ die Normalverteilung $N(\mu, \Sigma_{ee})$ mit dem Erwartungswert $\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{e}) = 0$ und der Kovarianzmatrix $D(\boldsymbol{e}) = \Sigma_{ee}$ an (Koch, 1997). Wir erhalten die folgende Dichtefunktion der Residuen

$$f(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Sigma_{ee}} e^{-\frac{1}{2}e^T \Sigma_{ee}^{-1} e}.$$

Werden Gewichte bei der Ausgleichung berücksichtigt, so liefert die Minimierung der kleinsten Quadrate bei normalverteilten Beobachtungen eine optimale Schätzung.

Mit der Forderung $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{y}_i, \widehat{\boldsymbol{x}}) \doteq 0$ für den linearen Zusammenhang zwischen den n Beobachtungen $\boldsymbol{y}_i$, $i = 1..n$ und den Schätzungen der u unbekannten Parameter $\boldsymbol{x}$, erhalten wir für jede Beobachtung ein homogenes Gleichungssystem

$$\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{y}_i, \widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}_i \widehat{\boldsymbol{x}} \doteq \boldsymbol{0}.$$

Die Matrizen $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}_i(\boldsymbol{y}_i)$ enthalten die von den Beobachtungen abhängigen Koeffizienten der Gleichungen und werden als Untermatrizen in der Matrix $\boldsymbol{A}$ zusammengefasst. Wir erhalten ein Gleichungssystem, dessen nicht triviale Lösung $\widehat{\boldsymbol{x}} \neq 0$ gesucht wird

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}, \widehat{\boldsymbol{x}}) = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}} \doteq \boldsymbol{0}. \tag{2.10}$$

Für eine Schätzung kann für $n > u$ im Allgemeinen die Forderung nach einem konsistenten Gleichungssystem 2.10 nicht eingehalten werden. Durch Berücksichtigung eines zu minimierenden algebraischen Residuenvektors $\widehat{\boldsymbol{e}} = \boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}$ kann das Gleichungssystem 2.10 in ein konsistentes System überführt werden. Wir erhalten das Minimierungsproblem

$$d_{alg}(\boldsymbol{y})^2 = \Sigma_i d_{alg}(\boldsymbol{y}_i)^2 = ||\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}||^2 = ||\widehat{\boldsymbol{e}}||^2 \rightarrow \min,\ ||\widehat{\boldsymbol{x}}|| = 1. \tag{2.11}$$

Eine Lösung liefert der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A}$. Eine numerisch stabilere Berechnung liefert der Singulärvektor zu dem kleinsten rechten Singulärwert von $\boldsymbol{A}$. Eine solche Singulärwertzerlegung ist ein häufig angewendetes Verfahren für die Lösung überbestimmter Gleichungssysteme. In Anhang A wird diese Matrizenzerlegung näher erläutert.

Je kleiner die Dimension der zu zerlegenden Matrix ist, desto schneller und stabiler wird die Lösung. Bei einigen Anwendungsbeispielen kann die Anzahl der Zeilen der Koeffizientenmatrix extrem ansteigen, was insbesondere bei iterativen Berechnungen zu einer hohen Rechenkomplexität führen kann. Für solche Aufgaben können die Eingabedaten in einer reduzierten, quadratischen Koeffizientenmatrix der Dimension $u \times u$ zusammengefasst werden. Gesucht ist eine quadratische $u \times u$ Matrix $\overline{\boldsymbol{A}}$, für die gilt $||\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}|| = ||\overline{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}}||$. Eine Möglichkeit für die Bestimmung einer solchen Matrix ist die Anwendung einer Singulärwertzerlegung. Sei $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T$ die Singulärwertzerlegung von $\boldsymbol{A}$ und $\overline{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T$, dann folgt

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}^T)(\boldsymbol{U}\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T) = (\boldsymbol{V}\boldsymbol{D})(\boldsymbol{D}\boldsymbol{V}^T) = \overline{\boldsymbol{A}}^T\overline{\boldsymbol{A}}.$$

Daraus folgt $||\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}|| = \widehat{\boldsymbol{x}}^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}} = ||\overline{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}}||$.

Mit $\overline{\boldsymbol{A}}$ erhalten wir für die Minimierung des algebraischen Fehlers $d_{alg}(\boldsymbol{y})^2 = ||\boldsymbol{A}\widehat{\boldsymbol{x}}||^2$ die äquivalente Minimierungsaufgabe

$$\Sigma_i d_{alg}(\boldsymbol{y}_i)^2 = ||\overline{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{x}}||^2 \rightarrow \min,\ ||\widehat{\boldsymbol{x}}|| = 1.$$

Eine geeignete Konditionierung der Eingabedaten verbessert die Bedingungen der Messmatrix für die Bestimmung der gesuchten Größen. Der Algorithmus wird so realisiert, dass zunächst die Eingabedaten systematisch konditioniert werden, mit ihnen die Lösung bestimmt wird und anschließend eine Rücktransformation durchgeführt wird (siehe auch Hartley, 1995). Auf die Konditionierung der Eingabedaten und die Berücksichtigung mathematischer Bedingungen wird bei der Minimierung des algebraischen Fehlers für die Bestimmung der direkten linearen Transformation einer Kamera in Anhang C näher eingegangen.

Kapitel 3

Bildgeometrische Grundlagen

Das folgende Kapitel beinhaltet eine Zusammenfassung der bildgeometrischen Grundlagen, die für die Einführung der neuen Taxonomie und für das Verständnis und die Umsetzung der vorgestellten Algorithmen notwendig sind. Neben den photogrammetrischen Betrachtungsweisen fließen auch physikalisch optische Aspekte in die Arbeit mit ein. Diese werden zu Beginn des bildgeometrischen Grundlagenkapitels kurz behandelt. Danach wird die geradentreue perspektivische Einbildgeometrie, ihre Modellierung mittels der Methoden der projektiven Geometrie, kaustische Flächen als Projektionszentren und objektraumabhängige Verzeichnungen erläutert. Am Ende dieses Kapitels wird eine erweiterte Definition der Epipolargeometrie gegeben, die sowohl für perspektivische, als auch für nicht perspektivische Abbildungen gültig ist.

3.1 Abbildungen der Strahlenoptik

Für die Grundlagen optischer Abbildungen beziehen wir uns hier primär auf drei Werke: Bergmann & Schaefer, 1972, Flügge, 1956 und Pohl, 1956.

Für die geometrische Darstellung und Analyse optischer Abbildungssysteme spielt der Weg des Lichtes eine besondere Rolle. Um eine einfache geometrische Darstellung zu erlangen, wird eine strahlenoptische Betrachtung verwendet, die von dem Grenzfall der Wellenoptik für die Wellenlänge null ausgeht. Dies hat den Vorteil, dass sich der wellenförmige Weg des Lichtes als geradliniger Strahl darstellen lässt. In der Strahlenoptik erfährt Licht, das durch homogene, transparente Stoffe dringt, durch die Dichteänderung zwischen den Stoffen eine Richtungsänderung. Dieses Phänomen tritt zum Beispiel bei optischen Elementen wie Linsen oder Prismen auf und kann durch zwei in der Physik ausgiebig behandelte Gesetze beschrieben werden: das Reflexionsgesetz und das Brechungsgesetz für transparente Stoffe nach Snellius. Das Phänomen Beugung wird in der Strahlenoptik nicht berücksichtigt und wird auch hier nicht weiter beachtet. Die Optik versucht, einen Abbildungsprozess in all seinen Details zu verstehen und zu beschreiben. Hier ist das primäre Ziel der Abbildungsprozess an sich, also der Weg der Abbildungsstrahlen zusammen mit alle Wegbeeinflussenden Phänomenen. Die Relation zwischen Urbild und Bild ist in ihrer strengen oder einer approximativen Form das primäre Ziel der Orientierung.

In der Photogrammetrie wird ein Bildpunkt als Schnitt der Bildebene mit dem Abbildungsstrahl definiert, der ein vom Objektpunkt ausgehendes Strahlenbündel repräsentiert. Im Allgemeinen gibt es also bei einem photogrammetrischen System mit einer Bildebene nur einen Bildpunkt. In der Optik kann es aber mehr als einen Bildpunkt geben, zum Beispiel wenn ein Abbildungsstrahl erst von einem Spiegel reflektiert wird und dann auf eine Sensorfläche trifft. Wie wir sehen werden,

können bei bestimmten komplexen Abbildungssystemen im optischen Sinne, durch Hinzuziehung der mathematischen Definition einer Abbildung noch mehr Bildpunkte zu einem Objektpunkt auftreten.

3.2 Definitionen

In dem Kontext dieser Arbeit werden spezifische Definitionen der Begriffe Projektionszentrum, Aufnahmesystem, Parametersatz der Orientierung eines Aufnahmesystems und Teilabbildung benötigt.

Projektionszentrum: Ein allgemeines Projektionszentrum eines Strahlenbündels ist der geometrische Ort, in dem sich alle Abbildungsstrahlen häufen oder schneiden. Im Falle von geradlinigen Abbildungsstrahlen lässt sich mit dessen Hilfe der Weg der Abbildungsstrahlen geometrisch konstruieren. Beispiele für die geometrische Form eines Projektionszentrums sind Punkte, Linien, oder Flächen, die von den Abbildungsstrahlen tangential berührt werden. Solch ein flächenförmiges Projektionszentrum (oder auch *Projektionsfläche*) wird als Kaustik oder als kaustische Fläche bezeichnet. Punkte und Linien können als entartete Kaustiken betrachtet werden (siehe dazu Kapitel 3.4). Ein Abbildungssystem kann aus mehreren Teilabbildungen bestehen und somit auch mehrere Projektionszentren besitzen.

Optisches Aufnahmesystem: In dem Kontext dieser Arbeit umfasst ein Aufnahmesystem den gesamten Bereich, den die Abbildungsstrahlen zwischen dem Objekt und dem Sensor durchlaufen. Bedingung an ein Aufnahmesystem ist, dass ein Bildpunkt $\mathcal{X}'$ auf einer Bildfläche $\mathcal{S}$ durch den Schnitt des einfallenden Abbildungsstrahles $\mathcal{L}_x$ mit der Bildfläche entsteht:

$$\mathcal{X}' = \mathcal{L}_x \cap \mathcal{S}.$$

Parametersatz der Orientierung eines optischen Aufnahmesystems: Der Parametersatz umfasst die Parameter, die den Weg aller für die Abbildung relevanten Abbildungsstrahlen beeinflussen. Dieser Parametersatz enthält somit neben den Orientierungsparametern der Kamera auch all die Parameter, die den Ausbreitungsweg und die Radiometrie der Abbildungsstrahlen in Form von Refraktion und Reflektion außerhalb der Kamera beeinflussen. Besteht ein Aufnahmesystem zum Beispiel aus einer herkömmlichen Kamera, die ein Objekt durch verschiedene transparente Medien hindurch aufnimmt, so wird der Satz der Parameter der Äußeren und Inneren Orientierung der Kamera um die Parameter erweitert, die die Lichtbrechung an der Grenzschicht zwischen den Medien beschreiben. Abbildung 3.1 zeigt ausgehend von der Parametrisierung verschiedener Kameras nach Förstner & Wrobel, 2004a den um zusätzliche Einflussfaktoren des Aufnahmesystems erweiterten Satz von Parametern eines allgemeinen Aufnahmesystems.

Teilabbildung Eine Teilabbildung eines Aufnahmesystems ist im mathematischen Sinne definiert durch die Existenz eines Urbildes, eines Bildes und genau eines punktförmigen oder nicht punktförmigen Projektionszentrums. Ein Aufnahmesystem besteht aus mindestens einer Abbildung oder einer Kombination mehrerer Teilabbildungen.

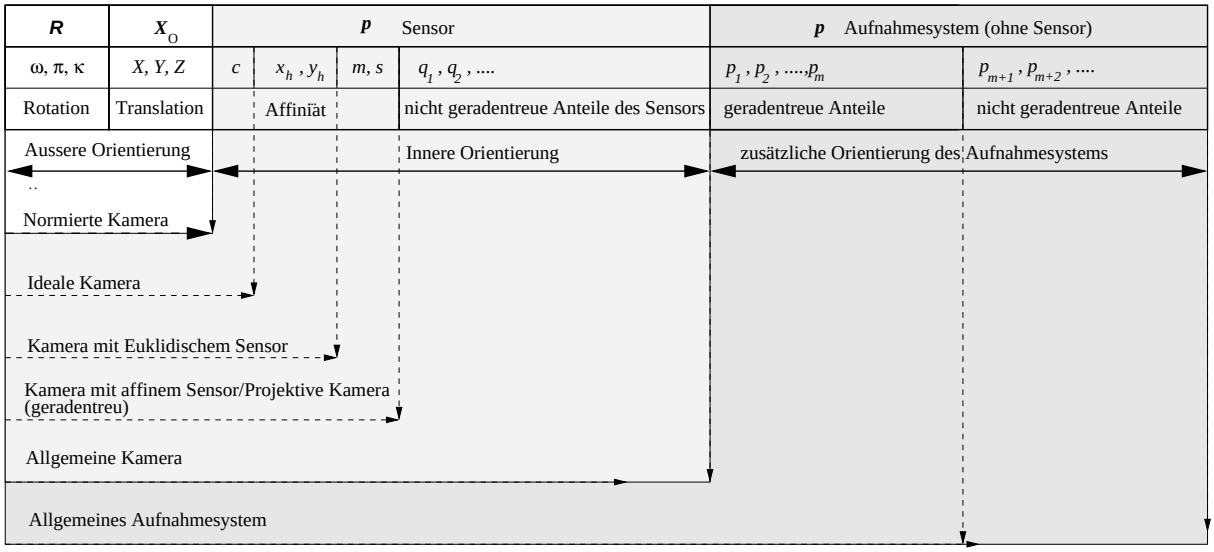


Abbildung 3.1: *Parametrisierung verschiedener Kameras und Sensoren, dargestellt durch eine Erweiterung der Graphik nach Förstner & Wrobel 2004 um zusätzliche geradentreue und nicht geradentreue Parameter der Orientierung des Aufnahmesystems.*

3.3 Geradentreue perspektivische Einbildgeometrie

Eine idealisierte Kamera kann als System ohne Linse mit einer infinitesimal kleinen Blende angesehen werden und damit durch das Modell einer Lochkamera mit einem punktförmigen Projektionszentrum und geradlinigen Abbildungsstrahlen repräsentiert werden. Eine reale Kamera weicht sowohl durch geradentreue, als auch durch nicht geradentreue Einflüsse von diesem Modell ab. Wenden wir uns zunächst den geradentreuen Einflüssen und den dahinter stehenden Parametern zu. Sie können zum Beispiel durch eine projektive Abbildung repräsentiert werden (siehe Gleichung 3.1). Im Folgenden wird die Anwendung der projektiven Methoden für die photogrammetrische Modellierung vorgestellt.

3.3.1 Projektive Kameramodelle

Entsprechend der Definition 2.9, Seite 18 wird für die Abbildung mit einer projektiven Kamera eine Homographie $\mathcal{H}$ gesucht, die einen dreidimensionalen Objektpunkt $\mathbf{X} = [U, V, W, T]^T$ in einen zweidimensionalen Bildpunkt $\mathbf{x} = [u, v, w]^T$ überführt. Definition 2.9 gilt für projektive Räume gleicher Dimension und damit gilt für $\mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$ mit $\mathbf{X'} = [U', V', W', T']^T$

$$\mathbf{X}' = \mathsf{H}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{A}_3^T \\ \mathbf{A}_4^T \end{bmatrix} \mathbf{X}$$

wobei $\mathbf{A}_i^T$, $i = 1..4$ die entsprechenden Zeilenvektoren von H sind. Für eine Projektion in den zweidimensionalen Bildraum wird die dritte Koordinate W', die im euklidischen Fall der Höhenkoordinate Z' entspricht, zu null gesetzt und kann somit gestrichen werden.

Wir erhalten

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U' \\ V' \\ T' \end{bmatrix}.$$

Für die Transformation $\mathcal{H} : \mathbb{P}^4 \rightarrow \mathbb{P}^3$ gilt damit

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{A}_2^T \\ \mathbf{A}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathsf{P}\mathbf{X}$$

mit der Projektionsmatrix $\mathsf{P}_{3\times 4}$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\mathbf{x}'_{3\times 1} = \mathsf{P}_{3\times 4}\mathbf{X}_{4\times 1}.$$

Eine projektive Abbildung kann bis zu 11 Freiheitsgrade besitzen. Das einfachste projektive Modell mit nur einem Freiheitsgrad ist das Modell der Lochkamera. Beide Modelle werden hier kurz vorgestellt. Für die einzelnen Stufen zwischen diesen Modellen siehe die entsprechende Literatur (z.B. Förstner & Wrobel, 2004b).

Das Modell der Lochkamera

Die Lochkamera besitzt als einzigen Parameter die Kammerkonstante c. Mit ihr wird ein Objektpunkt $\mathbf{X} = [X, Y, Z, 1]^T$ wie folgt in den Bildpunkt $\mathbf{x} = [u, v, w]^T$ abgebildet:

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \\ T \end{bmatrix}.$$

Für die Projektionsmatrix P der Projektion innerhalb des Kamerakoordinatenssystems K gilt damit:

$${}^K\mathsf{P}_K = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Modell einer projektiven Kamera

Die direkte lineare Transformation (DLT) einer projektiven Kamera vom Objektsystem O in das Kamerasystem K mit 11 Freiheitsgraden kann wie folgt dargestellt werden

$${}^K\mathbf{x}' = {}^K\mathsf{P}_O \, {}^O\mathbf{X} = \mathsf{K}R[I_3 \mid -\mathbf{Z}]\mathbf{X} \tag{3.1}$$

mit

$$\mathsf{K} = \begin{bmatrix} c & cs & x'_h \\ 0 & c(1+m) & y'_h \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$: Kalibriermatrix

c: Kammerkonstante

m: Maßstabsunterschied zwischen den beiden Bildachsen

s: Scherung zwischen den Bildachsen

x'_h, y'_h: Koordinaten des Bildhauptpunktes

R: Rotationsmatrix, $\mathsf{R} = \mathsf{R}(\omega, \gamma, \kappa)$, (ω, γ, κ): Rotationswinkel

$\mathbf{Z}$: Projektionszentrum, $\mathbf{Z} = [Z_X, Z_Y, Z_Z]^T$.

Der Abbildungsprozess kann sowohl durch diese projektive Kamera, als auch durch das klassische Modell basierend auf der Kollinearitätsgleichung repräsentiert werden. In Anhang B wird die Äquivalenz der beiden Repräsentationen gezeigt.

3.3.2 Projektive Abbildung geometrischer Elemente

Die Modellierung einer projektiven Abbildung umfasst in der Photogrammetrie zwei Relationen:

1. die Projektion eines gegebenen Elementes in die Bildebene, z.B. eines Objektpunktes $\mathcal{X}$ in den Bildpunkt $\mathcal{x}$ (*Bilderzeugung*) mit

$$^K\mathbf{x}' = {}^K\mathsf{P}_O \, {}^O\mathbf{X}$$

   oder einer Objektgerade $\mathcal{L}$ in die Bildgerade $\mathcal{l}$ mit

$$^K\mathbf{l} = {}^K\mathsf{P}_O \, {}^O\mathbf{L}$$

2. Die inverse Projektion eines gegebenen Bildelementes in den Objektraum, z.B. eines Bildpunktes $\mathcal{x}$ in den Abbildungsstrahl $\mathcal{L}$ (*Bildinversion*) mit

$$^O\mathbf{L} = {}^O\mathsf{P}_K^+ \, {}^K\mathbf{x}.$$

Im Folgenden werden wir für diese beiden Relationen die homogene Repräsentation kurz vorstellen. Für weiterführende Details siehe zum Beispiel Förstner & Wrobel, 2004a und Hartley & Zisserman, 2003.

Projektive Bilderzeugung

1. *Objektpunkt* $\rightarrow$ *Bildpunkt*
   Die Projektion eines Objektpunktes $\mathcal{X}$ mit den homogenen Koordinaten $\mathbf{X} = [U, V, W, T]^T$ in den Bildpunkt $\mathbf{x} = [u, v, w]^T$ wird direkt über die Projektionsmatrix P bestimmt

$$^K\mathbf{x} = {}^K\mathsf{P}_O \, {}^O\mathbf{X}.$$

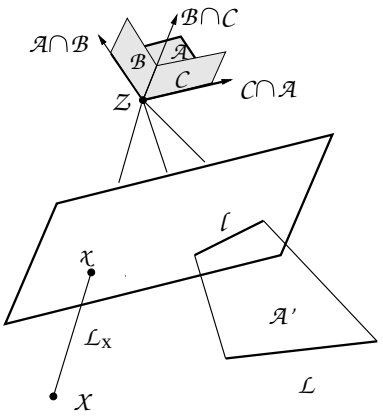


Abbildung 3.2: *Projektive Bilderzeugung und Bildinversion.*

Die Zeilen von P können als Koordinatenebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ des Kamerasystems interpretiert werden, von denen sich je zwei in einer Koordinatenachse und alle drei sich in dem Ursprung des Systems schneiden (siehe Abbildung 3.2). Wir erhalten

$$\mathsf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \\ \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T \end{bmatrix}.$$

2. *Objektgerade* $\rightarrow$ *Bildgerade*
   Eine Objektgerade $\mathcal{L}$, dargestellt durch ihren Plückerkoordinaten $\mathbf{L} = [L_H^T, L_0^T]$ (vergleiche Gleichung 2.1), wird mit Hilfe der Transformationsmatrix $\mathsf{Q}_{(3\times6)}$ in die Bildgerade $\mathbf{l} = [g_h^T, g_0^T]$ abgebildet

$$^K\mathbf{l} = {}^K\mathsf{Q}_O \, {}^O\mathbf{L}. \tag{3.2}$$

Die Zeilen von Q sind die Dualen der Koordinatenachsen des Kamerakoordinatensystems. Da die Koordinatenachsen durch den Schnitt der Koordinatenachsenebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ entstehen, folgt für die Transformationsmatrix für Linien

$$\mathsf{Q} = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}\wedge\mathbf{C})^T \\ (\mathbf{C}\wedge\mathbf{A})^T \\ (\mathbf{A}\wedge\mathbf{B})^T \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Projektive Bildinversion

Da die Bildinversion ein unterbestimmtes Problem ist, kann nicht ein Objektpunkt, sondern nur ein Raumstrahl $\mathcal{L}$ bestimmt werden, der durch das Projektionszentrum $\mathcal{Z}$ und einem Bildelement aufgespannt wird. So kann das Urbild eines Bildpunktes geometrisch gesehen nur als eine dreidimensionale Linie oder physikalisch gesehen als ein abbildender Raumstrahl bestimmt werden, auf dem sich der zugehörige Objektpunkt befinden muss.

Bildpunkt → abbildende Raumgerade
Der abbildende Raumstrahl kann aus einem gegebenen Bildpunkt $\mathbf{x} = [u, v, w]^T$ und einem bekannten Projektionszentrum $\mathcal{Z}$ durch Bildinversion bestimmt werden. Es gilt

$$^{O}\mathbf{L} = {}^{O}\overline{\mathsf{Q}}_K^T \, {}^{K}\mathbf{x} = u\,(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + v\,(\mathbf{C} \cap \mathbf{A}) + w\,(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \tag{3.4}$$

$\overline{\mathsf{Q}}^T$ ist das duale Element zu Q^T aus Gleichung 3.3.

Normalisierte Kameras

Sind die Parameter der Kalibrierung und der Orientierung bekannt, so kann eine normalisierte Kamera mit $\mathsf{K} = R = I_3$ verwendet werden. Normalisierte Kameras wurden bereits in Mikhail, 1963 ohne Berücksichtigung der Normalisierung von c diskutiert. Durch die Normalisierung wird das Strahlenbündel durch seinen Schnitt mit einer Bildebene mit der Kamerakonstante $c = 1$ repräsentiert. Normalisierte Koordinaten $\dot{\mathbf{x}}$ werden wie folgt aus den ursprünglichen Koordinaten berechnet:

$$\dot{\mathbf{x}} = [\mathsf{K}R]^{-1}\mathbf{x}.$$

Die normalisierte Abbildung ist dann $\dot{\mathbf{x}} = [I_3| - \boldsymbol{Z}]\ \mathbf{X}$. Für die Abbildung des Objektpunktes $\mathbf{X}_i$ in das $j - te$ Bild erhalten wir

$${}^{j}\dot{\mathbf{x}}_i = [I_3| - \boldsymbol{Z}_j]\ \boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{Z}_j.$$

Es folgt für die normalisierte Projektionsmatrix

$${}^{n}\mathsf{P}_j = [I_3| - \boldsymbol{Z}_j] \tag{3.5}$$

und $\mathsf{Q}_{n_j} = [-S(Z_j)|I]$ für Punkte und Linien ($S(Z_j)$ = Schiefsymmetrische Matrix) äquivalent zu der Repräsentation gegeben in Triggs, 2000.

Für die Inversion der Bildentstehung führt Gleichung 3.4 zu den normalisierten Abbildungsstrahlen (siehe Faugeras & Papadopoulo, 1998 und Förstner, 2000)

$$\mathbf{L}_{ij} = {}^{n}\,\overline{\mathsf{Q}}_j^T \, {}^{n}\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{Z}_j \times {}^{n}\mathbf{x}_i \end{bmatrix}.$$

3.4 Nicht perspektivische Abbildungen und ihre Projektionszentren

Im Gegensatz zu perspektivischen Abbildungen besitzen nicht perspektivische Abbildungen ein nicht punktförmiges Projektionszentrum. Punktwolken und Linien al Beispiele für nicht punktförmige Projektionszentren besitzen eine einfache geometrische Repräsentation. Die Geometrie und Repräsentation eines flächenförmigen Projektionszentrums ist dagegen komplizierter und wird hier kurz erläutert.

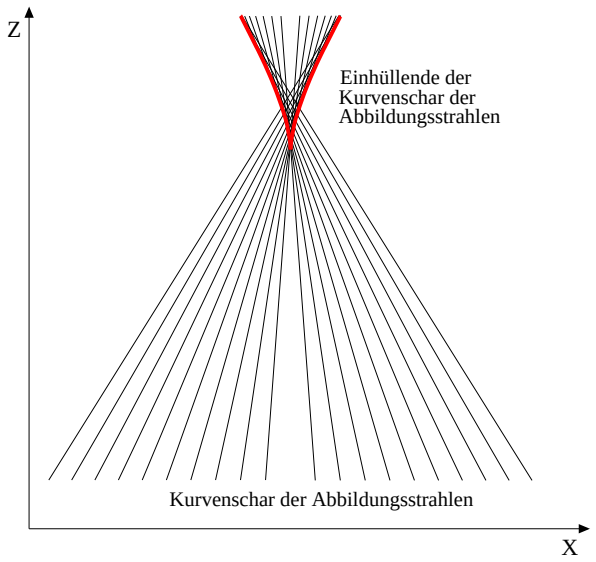


Abbildung 3.3: *Einhüllende einer Kurvenschar (2D Darstellung): Unter einer Einhüllenden einer Kurvenschar (hier das Abbildungsstrahlenbündel) wird eine Kurve verstanden, die in jedem ihrer Punkte eine Kurve der vorgegebenen Schar berührt.*

Kaustische Fläche einer nicht perspektivischen Abbildung (Projektionsfläche) : Bilden die Abbildungsstrahlen einer nicht perspektivischen Abbildung eine Kurvenschar, die eine Einhüllende besitzt, so wird die Einhüllende als kaustische Fläche oder *Kaustik* bezeichnet und ist das Projektionszentrum oder die Projektionsfläche der Abbildungsstrahlen.

Eine Kaustik, die durch reflektierte Strahlen erzeugt wird, heißt *Katakaustik*. Wird sie durch gebrochene Strahlen erzeugt, heißt sie *Diakaustik* (siehe Bergmann & Schaefer, 1972).

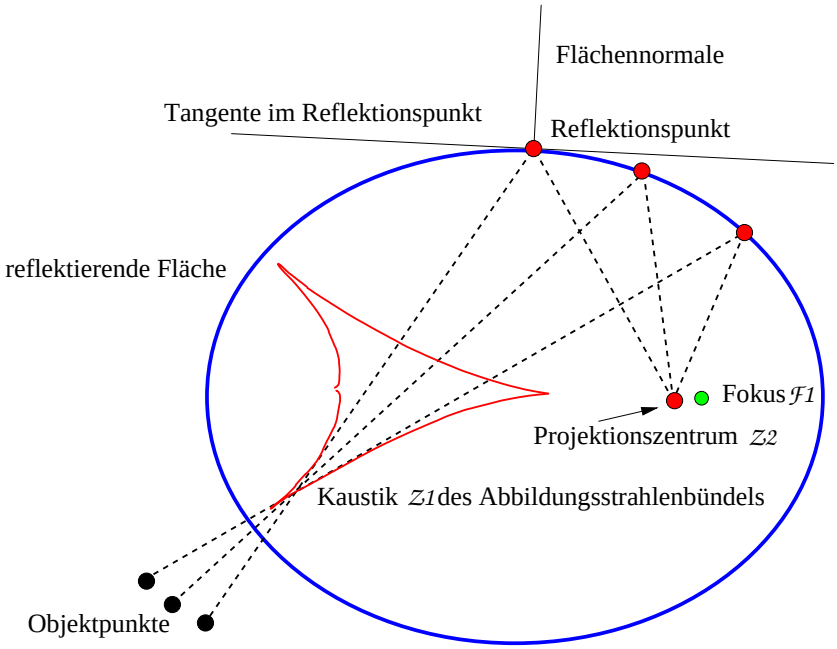
Mathematisch lässt sich solch eine Einhüllende wie folgt definieren (Erweiterung nach Bronstein & Semendjajew, 1989 auf den hier benötigten dreidimensionalen Fall):

Einhüllende einer Kurvenschar: Unter einer Einhüllenden einer Kurvenschar (hier das Abbildungsbündel) wird eine Kurve verstanden, die in jedem ihrer Punkte eine Kurve der vorgegebenen Schar berührt. Abbildung 3.3 zeigt eine solche Einhüllende für den zweidimensionalen Fall.
Liegt die Kurvenschar in der Form $F(x, y, z, c) = 0$ vor, dann ergibt sich die Einhüllende durch Elimination von c aus den Gleichungen:

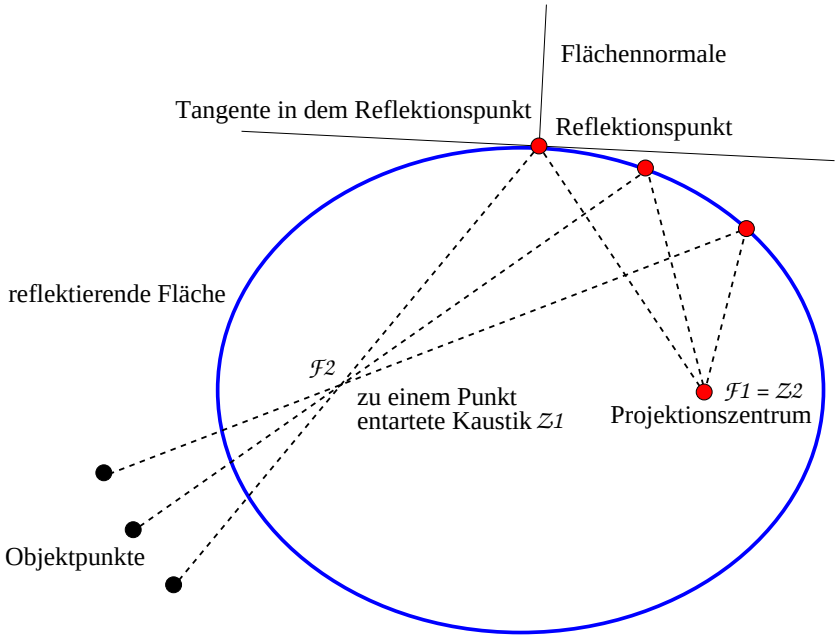
$$F(x, y, z, c) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial c}(x, y, z, c) = 0. \tag{3.6}$$

Das heißt, F muss stetig differenzierbar sein, die Abbildung muss also glatt sein.

Aus der Tatsache, dass die Einhüllende in jedem Punkt einen Abbildungsstrahl berührt, folgt dass sich die Abbildungsstrahlen in der Nähe der Kaustik stark bündeln. Die Kaustik kann daher als nicht punktförmiges Projektionszentrum der Abbildungsstrahlen angesehen werden und wird tangential von den Abbildungsstrahlen berührt. Ein Punkt der Kaustik kann approximativ als ein punktförmiges Projektionszentrum eines infinitesimal kleinen Strahlenbündels angesehen werden.



(a) *Die Einhüllende der Abbildungsstrahlen vor der Lichtreflektion bildet tangential ein flächenförmiges Projektionszentrum (Kaustik).*



(b) *Das Projektionszentrum liegt in diesem Beispiel genau in einen der Brennpunkte der Ellipse. Die kaustische Fläche entartet dadurch zu einem Punkt, der sich in dem anderen Brennpunkt der Ellipse befindet.*

Abbildung 3.4: *2D Darstellung einer kaustischen Fläche durch Spiegelung an der Innenseite einer Ellipse und ihre Entartung zu einem Punkt.*

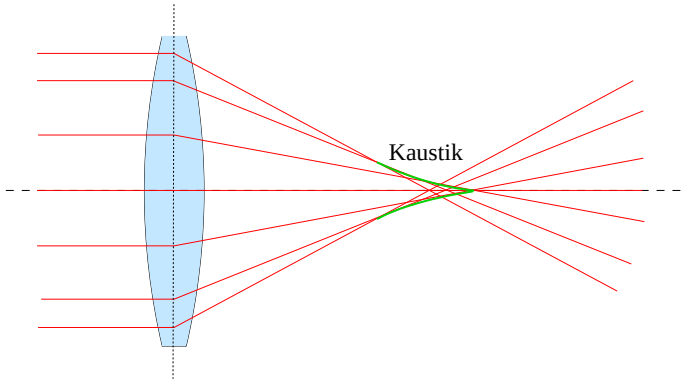


Abbildung 3.5: *Diakaustik verursacht durch sphärische Aberration: achsennahe Strahlen schneiden sich in dem Brennpunkt der Linse, achsenferne Punkte besitzen eine kürzere Brennweite.*

Eine Kaustik kann zu einem Punkt oder einer Linie entarten. Abbildung 3.4 zeigt ein Beispiel, bei dem die Abbildungsstrahlen, die von dem Objekt ausgehen, an der Innenfläche einer Ellipse reflektiert werden. Hier wurde eine vereinfachte zweidimensionale Darstellung gewählt. Nach der Reflektion schneiden sich alle Strahlen in dem punktförmigem Projektionszentrum $\mathcal{Z}2$. Auf die Darstellung einer Bildebene wurde hier verzichtet, da es nur um die Abbildungsstrahlen und ihre Projektionszentren geht. Abbildung 3.4 a) zeigt die Katakaustik der Abbildungsstrahlen vor der Lichtreflektion. Das Projektionszentrum $\mathcal{Z}2$ ist dabei nicht identisch mit dem Brennpunkt $\mathcal{F}1$ der Ellipse. Die Menge der Abbildungsstrahlen, von denen nur drei repräsentativ für alle dargestellt worden sind, bilden in ihrem Häufungsbereich die Kaustik $\mathcal{Z}1$. Abbildung 3.4 b) zeigt die Kaustik $\mathcal{Z}1$ für den Fall, dass das Projektionszentrum $\mathcal{Z}2$ identisch ist mit dem Brennpunkt $\mathcal{F}1$ der Ellipse. Die Kaustik entartet in diesem Fall zu einem Punkt, der identisch ist mit dem zweiten Brennpunkt $\mathcal{F}2$ der Ellipse und in dem sich alle Abbildungsstrahlen schneiden.

Ein anderes Beispiel einer Kaustik als Projektionszentrum im Bereich der optischen Abbildungen findet sich bei der sphärischen Aberration eines Linsensystems. Achsennahe Parallelstrahlen schneiden sich in dem Brennpunkt der Linse (siehe Abbildung 3.5). Die achsenfernen Parallelstrahlen besitzen eine kürzere Brennweite. Alle einzelnen Brennweiten zusammen bilden die flächenförmige Diakaustik, die in der Optik auch als Brennebene bezeichnet wird.

Kapitel 3.6 erläutert die Bestimmung der Kaustik für den Zweimedienfall. Eine Methode, um die Kaustik katadioptischer Aufnahmesysteme zu bestimmen, wird in Swaminathan *et al.* , 2001 beschrieben.

3.5 Beispiel einer nicht perspektivischen Einbildgeometrie: Objektivverzeichnung

Die Verzeichnung ist ein geometrischer Abbildungsfehler optischer Systeme, der zu einer lokalen Veränderung des Abbildungsmaßstabes führt. Der Fehler und damit auch seine Korrektur sind streng genommen objektraumbasierten. Im Allgemeinen werden sie jedoch bildraumbasiert modelliert.

Die Verzeichnung wird unter anderem durch eine Blende innerhalb eines Linsensystems einer Kamera verursacht (siehe auch Bergmann & Schaefer, 1972 und Flügge, 1956). Die Auswirkung einer Blende soll im Folgenden näher betrachtet werden.

Das Bild eines Objektpunktes $\mathcal{G}_2$ ist kein exakter Punkt $\mathcal{B}_2$, sondern ein Zerstreuungskreis $\mathcal{ZZ}'$. Die Position des Bildpunktes wird durch den Mittelpunkt $\mathcal{M}$ des Zerstreuungskreises $\mathcal{ZZ}'$ definiert. Wird jedoch durch die Blende ein Teil der Strahlen des Bündels abgeschnitten, so wird auch der Zerstreuungskreis unsymmetrisch abgeschnitten und der Mittelpunkt verschiebt sich systematisch in Abhängigkeit von der Entfernung des Objektpunktes zum Mittelpunkt des Linsensystems. Der neue Bildpunkt wird nun definiert durch den verschobenen Mittelpunkt $\mathcal{M}'$. Nur die Abbildung eines Objektpunktes $\mathcal{G}_1$, der auf der optischen Achse liegt, wird unbeeinflusst auf den Punkt $\mathcal{B}_1$ abgebildet. Würden die Abbildungsstrahlen, die sich hinter der Linse auf der Sensorseite befinden und durch die verschobenen Mittelpunkte $\mathcal{M}_i$ verlaufen, geradlinig verlängert werden, so würden sich diese Strahlen nicht in einem Punkt schneiden, sondern ihre Einhüllende würde eine flächenförmige Kaustik bilden, ähnlich wie auch bei der Aberration.

Betrachten wir nun die beiden Objektpunkte $\mathcal{G}_2$ und $\mathcal{G}_3$, die sich nach dem Modell der perspektivischen Abbildung auf einem Abbildungsstrahl befinden und folglich auch in einem Bildpunkt abgebildet werden sollten. Die Blende schneidet in Folge der unterschiedlichen Position der beiden Punkte die Strahlenbündel unterschiedlich ab (siehe Abbildung 3.6, unten), wodurch die Mittelpunkte der Zerstreuungskreise unterschiedlich verschoben werden (von $\mathcal{M}$ auf $\overline{\mathcal{M}}_2$ beziehungsweise $\overline{\mathcal{M}}_3$).

Es gibt verschiedene Ansätze für die Modellierung des Verzeichnungsfehlers. Die in der Praxis am häufigsten verwendeten Ansätze bestimmen den Verzeichnungsfehler approximativ in Abhängigkeit von der Bildraumposition und sind für die meisten Anwendungen hinreichend genau. Um höchste Genauigkeiten erreichen zu können, ist es jedoch notwendig, die Veränderungen der Verzeichnung bezüglich der Position im Objektraum zu berücksichtigen. Dies gilt insbesondere für Aufgaben der Nahbereichsphotogrammetrie (siehe Brown, 1971 und Fraser & Shortis, 1992). Diese Modelle werden im Anhang D beschrieben.

3.6 Beispiel einer nicht perspektivischen Einbildgeometrie: Mehrmediengeometrie

Durchsichtige Körper wie Luft, Glas und Wasser lassen das Licht nahezu ungeschwächt durch und es können Objekte durch sie hindurch beobachtet werden. Durchlaufen die Abbildungsstrahlen transparente Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes, so tritt an den Grenzflächen zwischen den Medien eine Refraktion der Abbildungsstrahlen auf, die wiederum eine Abweichung von dem perspektivischen Abbildungsmodell verursachen.

In der älteren Literatur findet sich für die photogrammetrische Beobachtung durch unterschiedliche Medien hindurch die Begriffe *Zwei- Drei- oder Mehrmedienphotogrammetrie* (siehe zum Beispiel Rinner, 1948, eine der frühesten Arbeiten in diesem Gebiet). Da diese Begriffe in der heutigen Zeit der Informationsmedien meist in einem anderen Zusammenhang verwendet werden, greifen wir hier zu der Bezeichnung *Mehrmediengeometrie*, die die geometrischen Zusammenhänge auch besser verdeutlicht.

Es finden sich zahlreiche Veröffentlichungen, die sich mit dem weiten Spektrum von Anwendungen der Mehrmedienaufnahmen beschäftigen. Ein großes Anwendungsgebiet ist die Strömungsmessung. Die Strömung wird dabei häufig durch zu rekonstruierende Partikel gekennzeichnet (siehe Maas, 1992b, Stöhr, 1998 und Willneff, 2003). Eine andere Aufgabenstellung ist die Beobachtung und Rekonstruktion von Objekten, die sich im Wasser befinden. In Przybilla *et al.* , 1987 wird eine Arbeit für die Vermessung von Kernbrennstäben vorgestellt. Bachmann, 2000 verwendete

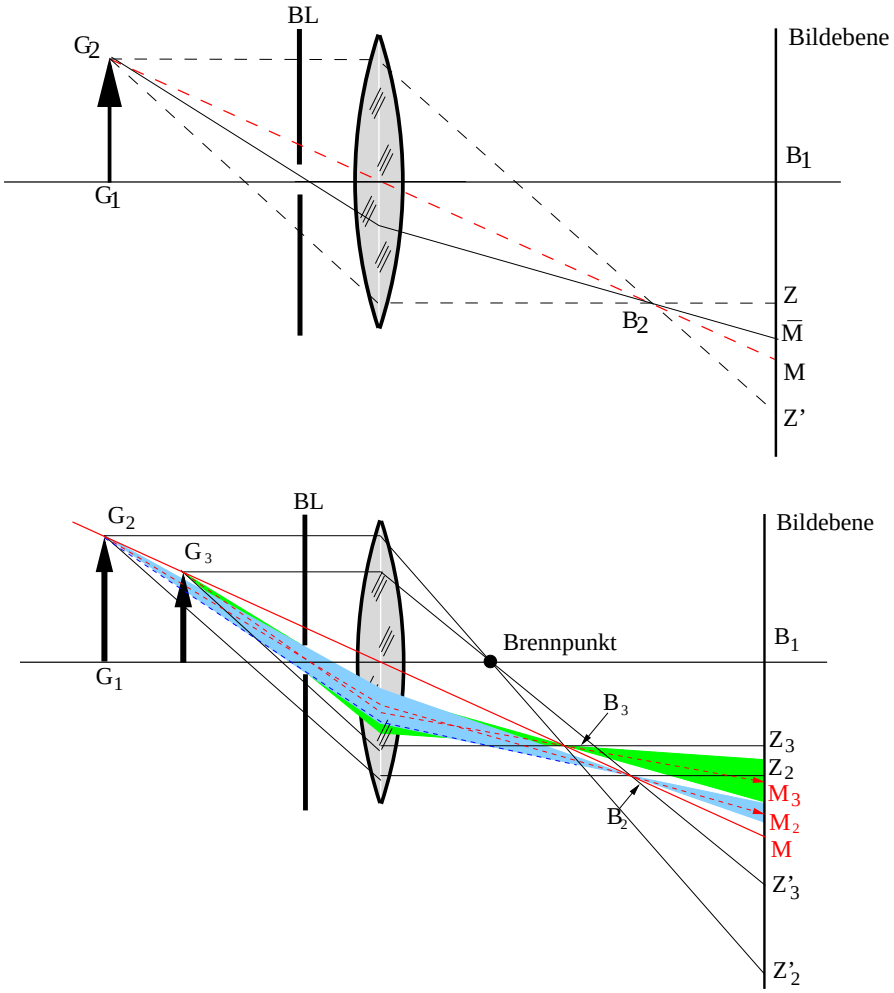


Abbildung 3.6: *Strahlenverlauf durch eine dünne Linsen mit vorgelagerter Blende. Oben: Blende als eine Ursache für Objektivverzeichnung. Durch die vorgestellte Blende gelangen nicht alle Strahlen auf die Bildebene, wodurch sich der den Bildpunkt auf der Bildebene definierende Mittelpunkt $\mathcal{M}$ des Zerstreuungskreises nach $\overline{\mathcal{M}}$ verschiebt. Unten: Erläuterung der Abhängigkeit der Objektivverzeichnung von der Objektraumposition. Zwei Objektpunkte, die nach dem Modell der perspektivischen Abbildung in dem Punkt $\mathcal{M}$ abgebildet werden müssten, besitzen nicht die gleiche Verzeichnung, sondern werden in die zwei Punkte $\mathcal{M}_2$ und $\mathcal{M}_3$ abgebildet.*

photogrammetrische Methoden zur Beobachtung von Grossmanipulatoren unter Mehrmedienbedingungen. Daneben finden sich zahlreiche anderen Anwendungsbereiche, bei denen sich das Objekt und der Sensor in unterschiedlichen Medien befinden. Andere Arbeiten behandeln den Fall, dass sich sowohl die Kameras als auch das Objekt im Wasser befinden. Siehe hierzu zum Beispiel die Arbeit von Fryer & Fraser, 1986 über die Kalibrierung von Unterwasserkameras. Lavest *et al.* , 2000 stellen ein Verfahren vor, um die Parameter einer Unterwasserkamera aus den Kalibrierungsergebnissen einer Kamera ausserhalb des Wassers abzuleiten.

3.6.1 Grundlagen der Lichtbrechung

Snelliussches Brechungsgesetz

Bei der Mehrmediengeometrie durchlaufen die Abbildungsstrahlen mehrere Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes. Im Allgemeinen kann von homogenen, isotropen Medien ausgegangen werden, so dass sich die Abbildungsstrahlen geradlinig ausbreiten. An den Grenzflächen der Medien wird die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes und damit auch seine Ausbreitungsrichtung verändert (siehe Abbildung 3.7).

Die Richtungsänderung berechnet sich nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz (siehe Flügge, 1956):

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2 \tag{3.7}$$

n_1 und n_2 sind die Brechungsindizes der beiden Medien, α_1 der Einfallswinkel und α_2 der Ausfallswinkel.

Mit $\sin \alpha_1 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}$, (x, y) Richtung des Abbildungsstrahles, folgt für den Ausfallswinkel α_2

$$\alpha_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{c}\right).$$

Der einfallende Strahl, das Einfallslot und der gebrochene Strahl liegen in einer Ebene. Die Richtungsänderung ist um so größer, je größer der Einfallswinkel α_1 ist.

Auswirkung der Lichtbrechung

Zur Verdeutlichung der Auswirkung der Lichtbrechung betrachten wir den Fall einer Lichtbrechung an einer ebenen Grenzfläche zweier transparenter Medien. Es entsteht eine zum Nadir der Kamera radiale Verschiebung des Abbildungsstrahles, wobei Projektionszentrum, Verschiebungsvektor und Objektpunkt in einer Ebene liegen (siehe dazu Abbildung 3.8). Der Betrag der Bildpunktverzeichnung $\Delta r'$ in einer zur Grenzfläche parallel liegenden Bildebene berechnet sich nach Kotowski, 1988 wie folgt

$$\Delta r' = c \tan \alpha_1 \frac{Z_i - Z_O}{Z_i}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{n^2 + (n^2-1)\tan^2 \alpha_1}}\right] \tag{3.8}$$

mit

c : Kamerakonstante

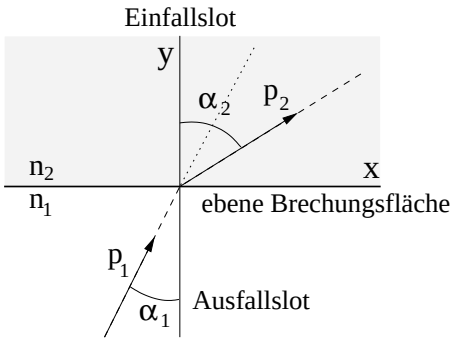


Abbildung 3.7: *Snelliussches Brechungsgesetzt: Strahlenverlauf einer Lichtbrechung an der Grenzfläche zwischen zwei transparenten Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes ($n_1 > n_2$). Der einfallende Strahl p_1, das Ausfallslot und der ausfallende Strahl p_2 liegen auf einer Ebene.*

α_1 : Einfallswinkel

Z_i : orthonormaler Abstand Grenzfläche/Projektionszentrum

Z_O : orthonormaler Abstand Grenzfläche/Objektpunkt

(verdeutlicht objektraumbasierte Verzeichnung)

$n = \frac{n_2}{n_1}$: Quotient der Brechungsindizes n_1 und n_2.

Zusammengefasst ist die Verschiebung $\Delta r'$ im Bildraum also von folgendes Parametern abhängig

$$\Delta r' = \Delta r'(c, \alpha_1, Z_i, Z_O, n)$$

und damit auch abhängig von der Lage des abgebildeten Objektes im Objektraum.

Gleichung 3.8 zeigt, dass sich die Verzeichnung $\Delta r'$ mit wachsender horizontaler Entfernung des Objektpunktes zum Nadir bei konstanter Objektpunkttiefe durch den größeren Einfallswinkel vergrößert (siehe $\Delta r'_1$ und $\Delta r'_2$ in Abbildung 3.8). Auch wird die Verzeichnung größer, je weiter der Abbildungsstrahl in das Wasser eindringt (siehe $\Delta r'_2$ und $\Delta r'_3$).

Neben der Auswirkung im Bildraum soll auch die Auswirkung im Objektraum bei einer Objektpunktbestimmung betrachtet werden. Dazu vergleichen wir die Ergebnisse einer Punktrekonstruktion unter Verwendung des strengen, physikalisch basierten Mehrmedienmodells mit den Ergebnissen einer Rekonstruktion unter Vernachlässigung der Richtungsänderung des Abbildungsstrahles. Abbildung 3.9 verdeutlicht den Einfluss der Mehrmediengeometrie für die Bestimmung des Vorwärtsschnittes der Abbildungsstrahlen zweier homologer Punkte für eine übliche Aufnahmekonstellation. Die Vernachlässigung der Richtungsänderung besitzt ihren größten Einfluss auf die Höhe des virtuellen Objektpunktes im Vergleich zum Originalpunkt. Daher können bei einer solchen Aufnahmekonfiguration unter bestimmten Bedingungen die Bildpunkte auch ohne strenge Modellierung zugeordnet werden. Jedoch kann bei einer Rekonstruktion ein signifikanter Höhenfehler entstehen.

Stetigkeit der Lichtbrechung

Für den effektiven Einsatz der hier vorgestellten Approximation für nicht projektive Abbildungen wird die Stetigkeit der Abbildung verlangt.

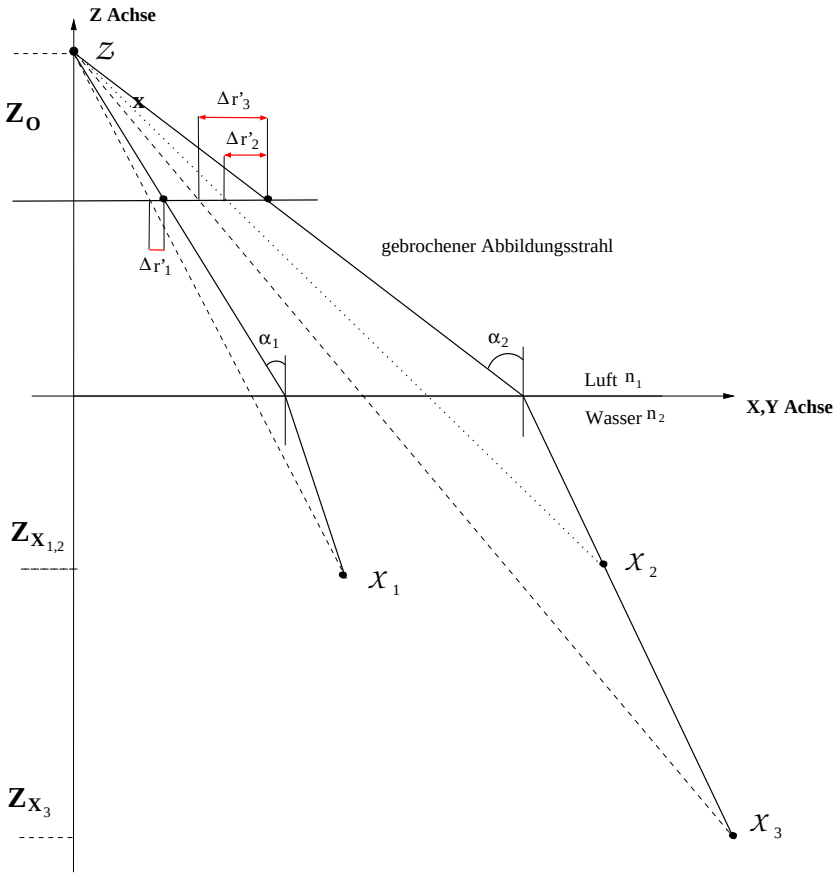


Abbildung 3.8: *Die durch die Lichtbrechung des Abbildungsstrahles hervorgerufene Verzeichnung im Bildraum ist abhängig von der Position des Objektpunktes. Je weiter der Objektpunkt bei gleicher Tiefe von dem Nadir der Kamera entfernt ist, desto größer ist die Verzeichnung $\Delta r'_i$ (siehe $\Delta r'_3$ und $\Delta r'_2$). Die Verzeichnung vergrößert sich ebenfalls, je tiefer sich der Objektpunkt auf einem Abbildungsstrahl befindet (siehe $\Delta r'_2$ und $\Delta r'_3$).*

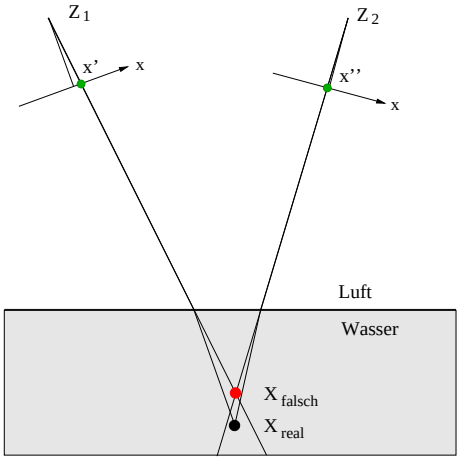


Abbildung 3.9: *Auswirkungen einer Vernachlässigung des Mehrmedieneinflusses beim Vorwärtsschnitt der Abbildungsstrahlen zweier homologer Punkte für eine typische Aufnahmekonfiguration. Der größte Einfluss liegt im Allgemeinen in der Bestimmung einer falschen Höhe.*

Für den Nachweis der Stetigkeit untersuchen wir die Abbildung der Menge der Einfallswinkel auf die Menge der Ausfallswinkel:

Sei die Grenzschicht zwischen zwei Medien mit den Brechungsindizes n_1 und n_2 eine stetige Fläche. Gleichung 3.6.1, Seite 35 (Berechnung des Ausfallswinkels) ist eine Zusammensetzung der beiden stetigen Funktionen $f(x) = \frac{n_1}{n_2} \sin x$ und $g(x) = \arcsin(x)$. Innerhalb des Definitionsbereichs von $D(g(x)) = \frac{-\pi}{2} \leq \frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1 \leq \frac{\pi}{2}$ folgt die Stetigkeit der zu untersuchenden Funktion $g[f(\alpha_2)] = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin \alpha_1\right)$ aus der Stetigkeit für zusammengesetzte stetige Funktionen.

3.6.2 Das streng physikalische Abbildungsmodell der Dreimediengeometrie

Wir betrachten die Mehrmediengeometrie für den oben angesprochenen häufigsten Anwendungsfall der Photogrammetrie mit den drei Medien Luft, Plexiglas und Wasser. Alle drei Medien werden als homogen und isotrop angesehen. Die abbildenden Lichtstrahlen zwischen dem Sensor und dem Objekt werden zweimal gebrochen und verlaufen zwischen den Grenzflächen geradlinig.

Für die Berechnung des Einflusses der Refraktion auf die Abbildung können verschiedene Sonderfälle durch Einführung von Randbedingungen unterschieden werden. Beispiele dazu sind:

- Festlegung einer einfachen Form für die Grenzflächen (z.B. eine Ebene),
- Einführung eines lokalen Koordinatensystems, dessen X/Y-Ebene parallel zur Trennfläche zwischen Wasser und Plexiglasplatte liegt.

Die zugrunde liegende Geometrie für drei Medien mit planparallelen Grenzflächen wird in Abbildung 3.10 gezeigt (vergleiche auch Maas, 1992b).

Nach dem Brechungsgesetz 3.7, Seite 35 liegen das Projektionszentrum $\mathcal{Z}$, der Bildpunkt χ, die beiden Brechungspunkte $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ und der Objektpunkt $\mathcal{X}$ auf einer Ebene. Daraus folgt, dass der objektraumbasierte Einfluss der Refraktion eine zum Nadir der Kamera radialsymmetrische Verschiebung der Bildkoordinaten verursacht.

Ist die Kaustik der Abbildungsstrahlen nicht bekannt, so ist die Modellierung der Bilderzeugung nicht direkt lösbar, da die Richtung des Abbildungsstrahles ausgehend vom Objektpunkt $\mathcal{X}$ in diesem Fall nicht bekannt ist. In Maas, 1992b wird ein Verfahren für diese Projektion beschrieben. Es handelt sich streng genommen ebenfalls um eine Approximation, die jedoch durch beliebig viele Iterationen dem strengen Modell beliebig nah angenähert werden kann. Es wird iterativ eine radiale Verschiebung $\Delta\mathcal{R}$ für jeden Objektpunkt $\mathcal{X}$ relativ zum Nadirpunkt jeder Kamera bestimmt. Der daraus resultierende Objektpunkt $\overline{\mathcal{X}}$ wird dann für die Abbildung in den Bildraum mit einer projektiven Abbildung verwendet. Der Algorithmus kann als Modul in die Kollinearitätsgleichung und damit in eine Bündelausgleichung implementiert werden.

Eine allgemeine Betrachtung der Mehrmediengeometrie ohne die Einschränkung auf planparallele Grenzflächen wird in Höhle, 1971 gegeben. Okamoto & Höhle, 1972 beschreiben eine Methode, die sich auf gekrümmte Trennflächen und auf mehrere Medien leicht ausdehnen lässt. In Kotowski, 1987 und Kotowski, 1988 wurde ein Algorithmus zur Strahlenverfolgung durch eine beliebige Anzahl von Medien mit parametrisierbaren Trennflächen entwickelt. Dieser Algorithmus kann ebenfalls in ein Bündelausgleichungsprogramm implementiert werden.

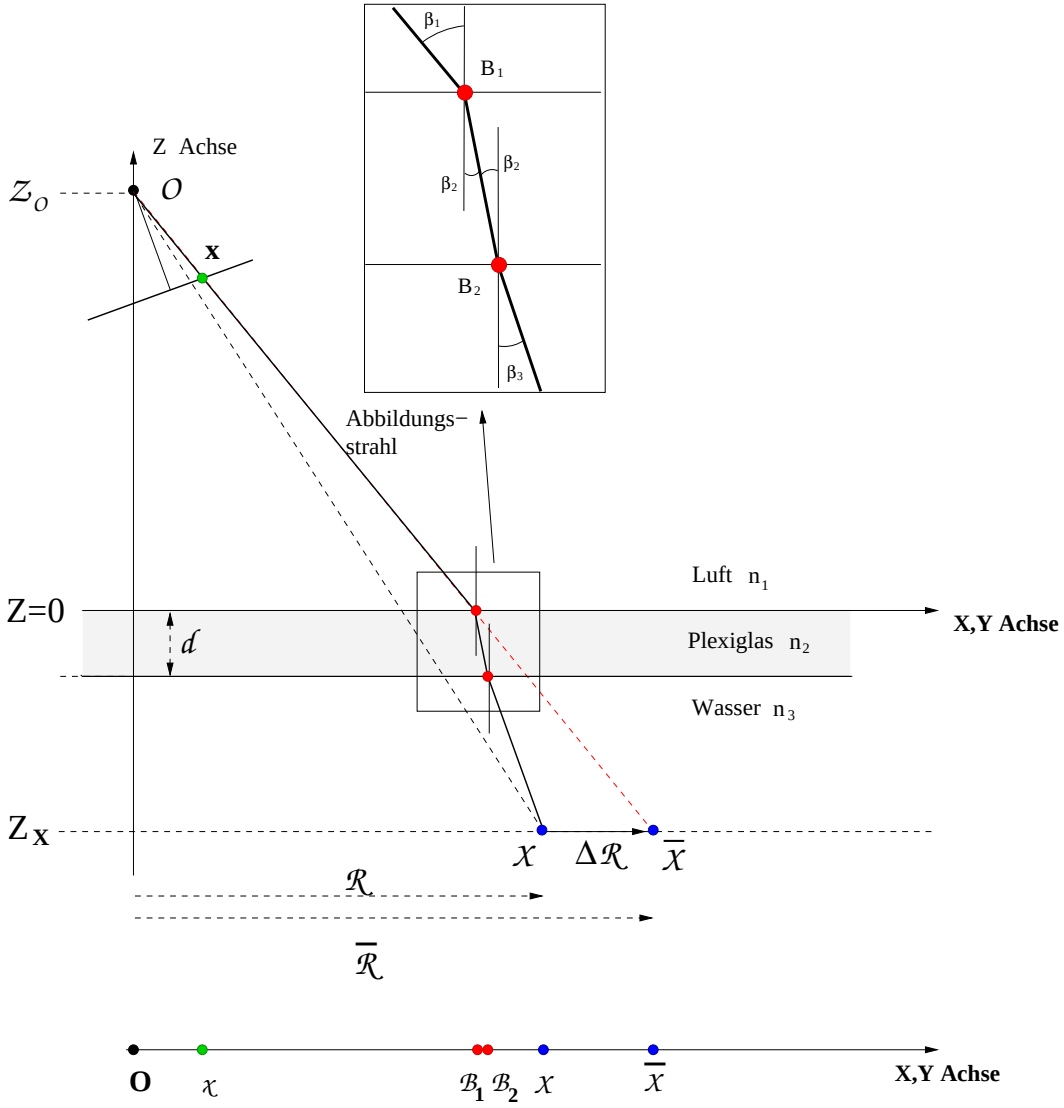


Abbildung 3.10: *Verlauf eines gebrochenen Abbildungsstrahls im Fall der Dreimediengeometrie und Berechnung eines radialen Korrekturwertes $\Delta\mathcal{R}$ für die Projektion eines Objektpunktes in den Bildraum nach Maas, 1992B. Der Abbildungsstrahl wird an den zwei Grenzflächen nach dem Snelliusschen Brechungsgesetz mit den Brechungswinkeln β_i gebrochen. Das Projektionszentrum, der Bildpunkt, die Brechungspunkte, der Objektpunkt und der Korrekturvektor liegen in einer Ebene. Wird die Korrektur $\Delta\mathcal{R}$ an den Objektpunkt $\mathcal{X}$ angebracht, so ergibt sich der Objektpunkt $\overline{\mathcal{X}}$, der durch eine perspektivische Abbildung direkt in den Bildpunkt $\mathcal{x}$ abgebildet werden kann.*

Tabelle 3.1: *Orientierungsparameter eines Dreimediensystems, bei dem zur Vereinfachung das übergeordnete Koordinatensystem durch die ebene Grenzschicht zwischen Luft und Plexiglas definiert wird.*

Ä.O. der Kamera	**I.O. der Kamera**
Rotation: R	Kammerkonstante: c
Translation: (X_O, Y_O, Z_O)	Hauptpunkt: (x_H, y_H)
	Objektivverzeichnung: $(p_1, p_2, ...)$
Ä.O. der Dreimediengeometrie	**I.O. der Dreimediengeometrie**
Rotation der Platte: $R_P = I$	Brechungsindizes: n_1, n_2, n_3
Translation der Platte: $(X_P, Y_P, Z_P) = (0, 0, 0)$	Dicke der Plexiglasplatte: d

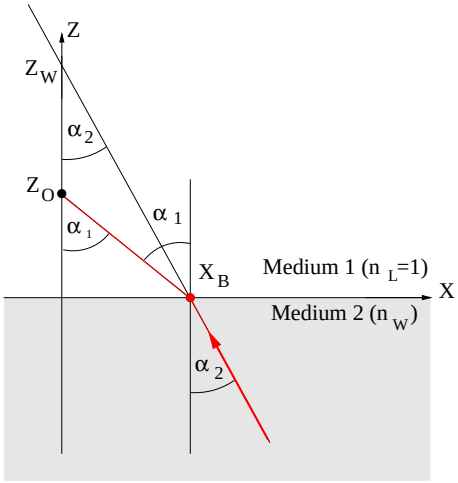


Abbildung 3.11: *Bestimmung des Schnittpunktes Z_W der geradlinigen Verlängerungen der Abbildungsstrahlen aus dem Objektraum (Medium 2) mit der Z-Achse.*

Parameter der Mehrmedienaufnahme

Entsprechend den Überlegungen in Kapitel 3.2 besteht der Satz von Parametern des Mehrmediensystems neben den Parametern der Äußeren und Inneren Orientierung der Kamera zusätzlich aus den Parametern der lichtbrechenden Grenzschichten. Bei unserem Anwendungsfall handelt es sich um eine planparallele Plexiglasplatte, die die Orientierung des übergeordneten Systems definiert: die Orientierung der Grenzflächen definiert die $X-$ und die $Y-$ Achse des Objektkoordinatensystems. Dadurch genügen als zusätzliche Parameter die Dicke der Platte d und die drei Brechungsindizes n_1, n_2, n_3. Tabelle 3.1 zeigt eine Zusammenstellung der verwendeten Parameter für die Dreimediengeometrie.

3.6.3 Projektionszentren der Mehrmediengeometrie

Unter Verwendung der Definition 3.6, Seite 30 lässt sich die Kaustik eines Mehrmediensystems bestimmen. Zur vereinfachten Darstellung wählen wir eine Aufnahmekonstellation mit zwei Medien und den zweidimensionalen Fall. Der Abbildungsstrahl verläuft parallel zur $X-$Achse, so dass die $Y-$Koordinate nicht weiter berücksichtigt werden muss (siehe Abbildung 3.11). Die

Grenzfläche liegt in der $X-, Y-$ Achse des übergeordneten Koordinatensystems, das Projektionszentrum $\boldsymbol{Z} = (0, 0, Z_O)$ der Kamera befindet sich auf der $Z-$Achse und der Abbildungsstrahl wird in X_B einmal gebrochen. Der Brechungsindize für Luft ist $n_L = 1$.

Für den Einfallswinkel α_1 gilt nach den trigonometrischen Gesetzen in einem rechtwinkligen Dreieck

$$\sin \alpha_1 = \frac{X_B}{\sqrt{Z_O^2 + X_B^2}}.$$

Der Abbildungsstrahl im Medium Luft lässt sich mit Hilfe der Strahlensätze mit den Variablen X und Z repräsentieren durch

$$Z = Z_o - \frac{XZ_o}{X_B}.$$

Nach dem Brechungsgesetz 3.7 und mit $n_L = 1$ gilt für den Ausfallswinkel α_2

$$\sin \alpha_2 = \frac{X_B}{\sqrt{Z_O^2 + X_B^2}} \frac{1}{n_W}. \tag{3.9}$$

Der Abbildungsstrahl innerhalb des Wassers lässt sich mit den Variablen X und Z_w repräsentieren durch

$$\begin{aligned} Z_W &= \cot \alpha_2 (X_B - X) \\ &= \frac{(X_B - X)}{X_B} \sqrt{n_w^2 X_B^2 + n_w^2 Z_O^2 - X_B^2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Gesucht ist nun als nicht punktförmiges Projektionszentrum die Einhüllende des Strahlenbündels, das durch Gleichung 3.10 repräsentiert wird. Dafür bestimmen wir gemäß Gleichung 3.6, Seite 30 die implizite Form der Strahlen im Wasser

$$\begin{aligned} F &= F(X, Z, X_B) = Z_w - Z = 0 \\ F &= \frac{(X_B - X)}{X_B} \sqrt{n_w^2 X_B^2 + n_w^2 Z_O^2 - X_B^2} - Z. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Die erste Ableitung nach dem Parameter X_B wird zu

$$\frac{\partial F}{\partial X_B} = \frac{n_W^2 Z_O^2 X + n_W^2 X_B^3 - X_B^3}{\sqrt{n_W^2 X_B + n_w^2 Z_O^2 - X_B^2}\, X_B^2}. \tag{3.12}$$

Aus der Auflösung nach X und Z von Gleichung 3.11 und 3.12 erhalten wir die implizite Form der Einhüllenden

$$Z = \frac{\sqrt{n_W^2 X_B + n_w^2 Z_O^2 - X_B^2}\, (n_W^2 X_B^2 + n_w^2 Z_O^2 - X_B^2)}{n_W^2 Z_O^2} \tag{3.13}$$

$$X = -\frac{X_B^3 (n_W^2 - 1)}{n_W^2 Z_O^2}. \tag{3.14}$$

Die Spitze der Kaustik ist eine Singularität und liegt in unserem Beispiel auf der $Z-$Achse des Koordinatensystems. Um sie zu bestimmen wird der Grenzwert von Z in Gleichung 3.13 mit $X_B \to 0$ berechnet, wir erhalten

$$Z_{X_B \to 0} = n_w Z_O. \tag{3.15}$$

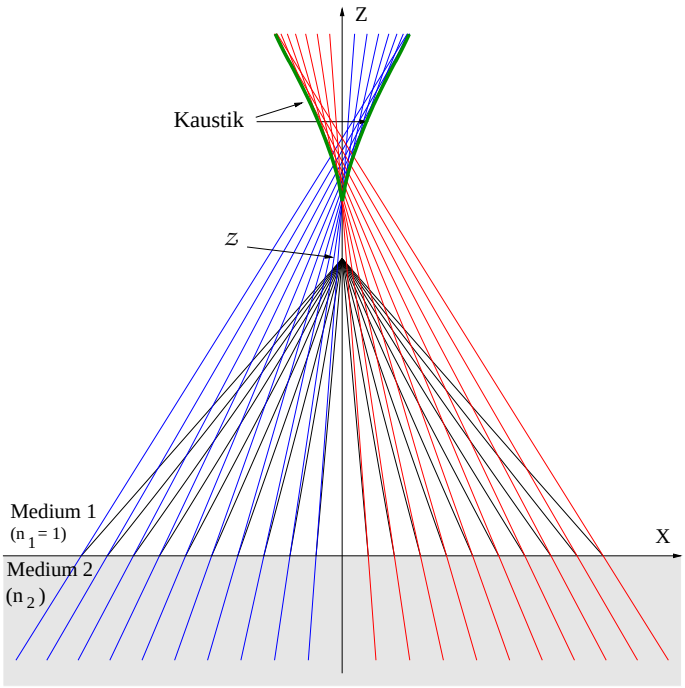


Abbildung 3.12: *Projektionszentren einer Zweimedienabbildung. Die Abbildungsstrahlen, die sich im Medium Luft befinden, schneiden sich in dem punktförmigen Projektionszentrum Z der Kamera. Die Einhüllende des Objektstrahlenbündels bildet eine kaustische Fläche. Die einzelnen Strahlen berühren diese Fläche tangential. Für die direkte Beschreibung des Prozesses der Bildentstehung und Bildinversion genügt es, wenn diese beiden Projektionszentren bekannt sind.*

Die Lage der Kaustik ist nach Gleichung 3.15 für diese vereinfachte Konstellation abhängig von dem Brechungsindex des Objektraummediums und der Position der Kamera. Betrachten wir die Form der Kaustik für verschiedene optische Medien mit unterschiedlichen Brechungsindizes. Abbildung 3.13 zeigt die Kaustiken für Wasser mit dem Brechungsindex $n_W = 1.333$ und Plexiglas mit dem Brechungsindex $n_P = 1.5$. Da die Ablenkung des Abbildungsstrahls mit steigendem Brechungsindex größer wird (siehe Brechungsgesetz 3.7, Seite 35), wandert die Kaustik entlang der $Z-$Achse in positiver Richtung und wird für das betrachtete Strahlenbündel höher und breiter.

3.7 Zweibildgeometrie

Nach der projektiven und nicht projektiven Geometrie eines Einzelbildes kommen wir nun zu der speziellen Geometrie von zwei Bildern, die ein wichtiger Bestandteil der Objektrekonstruktion darstellt. Die Zweibildzuordnung dient als Basis für eine Mehrbildzuordnung (siehe Kapitel 6).

Das in dieser Arbeit besprochene Zuordnungsverfahren von extrahierten Bildelementen in einem Mehrbildverband basiert auf rein geometrischen Zuordnungsbedingungen. In der Literatur finden sich verschiedene Strategien für eine Mehrbildzuordnung. Eine gängige Strategie beruht darauf, in einem ersten Schritt Zuordnungshypothesen zwischen je zwei Bildern des Bildverbandes herzustellen und in einem zweiten Schritt eine Zuordnung zwischen den Bildpaaren zu finden (siehe Wolff & Förstner, 2000a und Maas, 1992b). Auch das hier beschriebene Verfahren beruht auf einer solchen Strategie. Für den Schritt der Zuordnung von Bildelementen zwischen zwei Bildern werden für die Einschränkung des Suchbereichs im zweiten Bild die Methoden der Epipolargeometrie eingesetzt.

3.7.1 Epipolargeometrie für projektive und nicht projektive Abbildungen

Der geradentreuen Epipolargeometrie liegt die Kollinearität des Projektionszentrums, dem Bildpunkt und dem zugehörigen Objektpunkt als geometrische Bedingung zugrunde. Diese geometrischen Elemente spannen zusammen den Abbildungsstrahl auf (siehe Abbildung 3.14).

Im Falle einer nicht geradentreuen Abbildung spannen die beiden gekrümmten Abbildungsstrahlen $\mathcal{S}'$ und $\mathcal{S}''$ keine Ebene auf, und die Epipolarlinie kann nicht über den einfachen Schnitt einer Raumebene mit der Bildebene berechnet werden. Die *gekrümmte Epipolarlinie* kann aber über die Projektion des Abbildungsstrahles $\mathcal{L}'$ in die zweite Bildebene bestimmt werden. Diese Methode der Epipolarlinienberechnung kann sowohl für eine projektive Abbildung, als auch für eine nicht projektive Abbildung verwendet werden (Abbildung 3.15).

Epipolarlinie Eine Epipolarlinie ist die Projektion eines Abbildungsstrahls $\mathcal{L}$, der durch ein Projektionszentrum $\mathcal{Z}$, einen Bildpunkt $\mathcal{X}'$ und den zugehörigen Objektpunkt $\mathcal{X}$ aufgespannt wird, in einen zweiten Bildraum. Der zu $\mathcal{X}'$ homologe Bildpunkt $\mathcal{X}''$ liegt auf dieser projizierten, geradlinigen, gekrümmten oder geknickten Epipolarlinie $\mathcal{l}''_\epsilon$.

Die Ausnutzung der Epipolargeometrie ermöglicht es, den Suchbereich für mögliche Kandidaten von homologen Punkten in einem zweiten Bild auf eine Epipolarlinie zu reduzieren. Ist die maximale und minimale Höhe innerhalb einer Szene bekannt, so kann der Suchraum zusätzlich auf nur ein Teilstück der Epipolarlinie innerhalb eines Bildes eingeschränkt werden. Der relevante Bereich der Epipolarlinie wird gebildet durch das Bild ${}^2\mathcal{l}_j$ des Abschnittes des Abbildungsstrahles

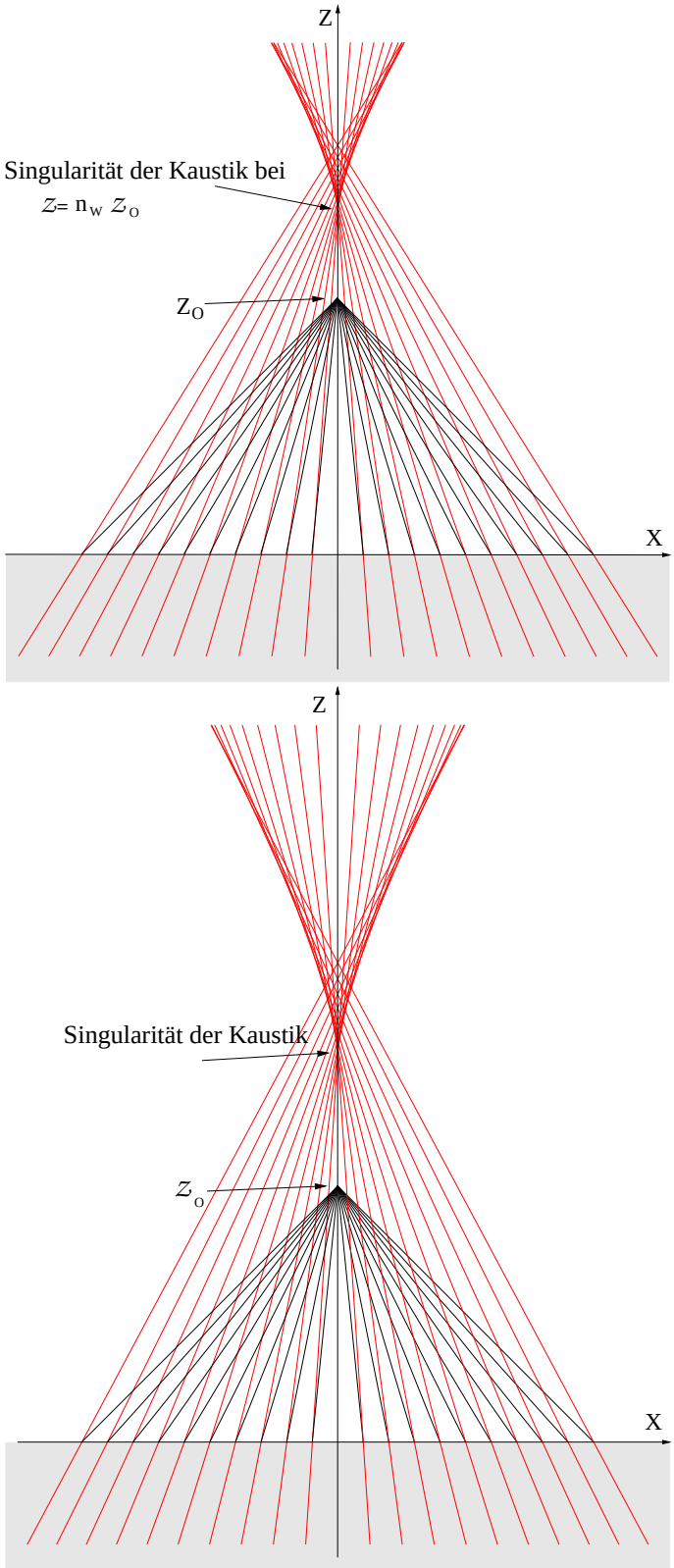


Abbildung 3.13: *Vergleich der Form von Kaustiken für die Mehrmediengeometrie für unterschiedliche Brechungsindizes. Unten für Wasser mit Brechungsindize $n_w = 1.333$, oben für Plexiglas mit Brechungsindize $n_p = 1.5$. Die Position der Singularität der Kaustik in ihrer Spitze ist $\mathcal{Z} = n_w Z_O$, wobei Z_O die Position des Projektionszentrums der Kamera ist.*

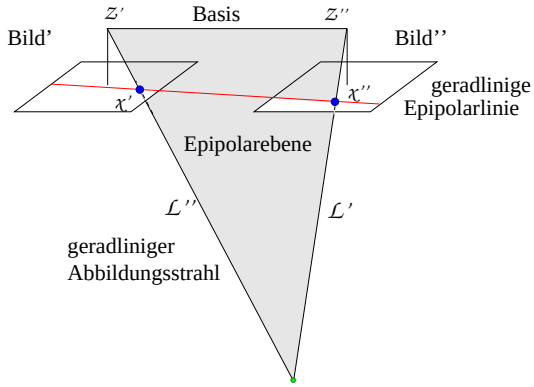


Abbildung 3.14: *Epipolargeometrie für den Fall einer geradentreuen Abbildung, die auf der Kollinearitätsbedingung von Projektionszentrum $\mathcal{Z}$, Bildpunkt χ und Objektpunkt X basiert. Die Epipolarebene wird aufgespannt durch die beiden Abbildungsstrahlen $\mathcal{L}'$ und $\mathcal{L}''$. Die geradlinige Epipolarlinie entsteht durch den Schnitt der Epipolarebene mit den Bildebenen.*

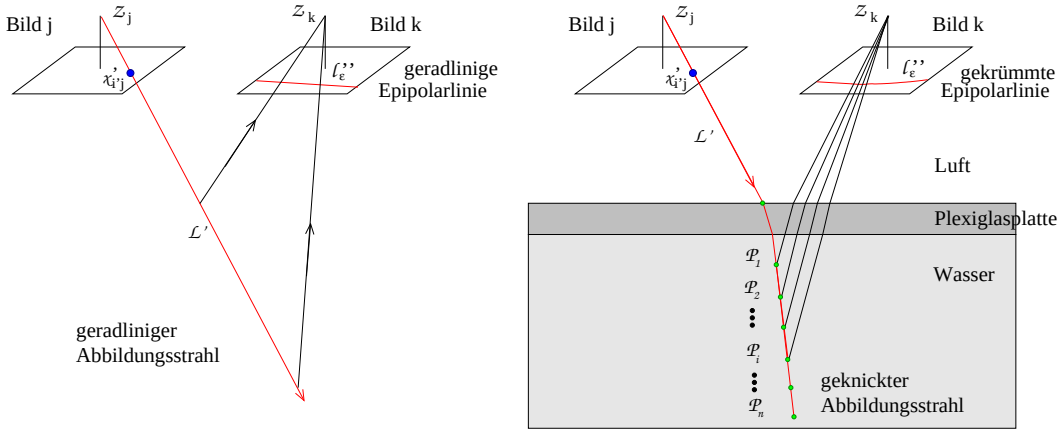


Abbildung 3.15: *Allgemein gültige Definition einer Epipolarlinie, gezeigt für den Fall der Mehrmediengeometrie. Die Epipolarlinie wird gebildet durch die Projektion des Abbildungsstrahles $\mathcal{L}'$ in die zweite Bildebene. Diese Definition gilt sowohl für den projektiven Fall mit einer geradlinigen Epipolarlinie (links) als auch für den nicht projektiven Fall (rechts).*

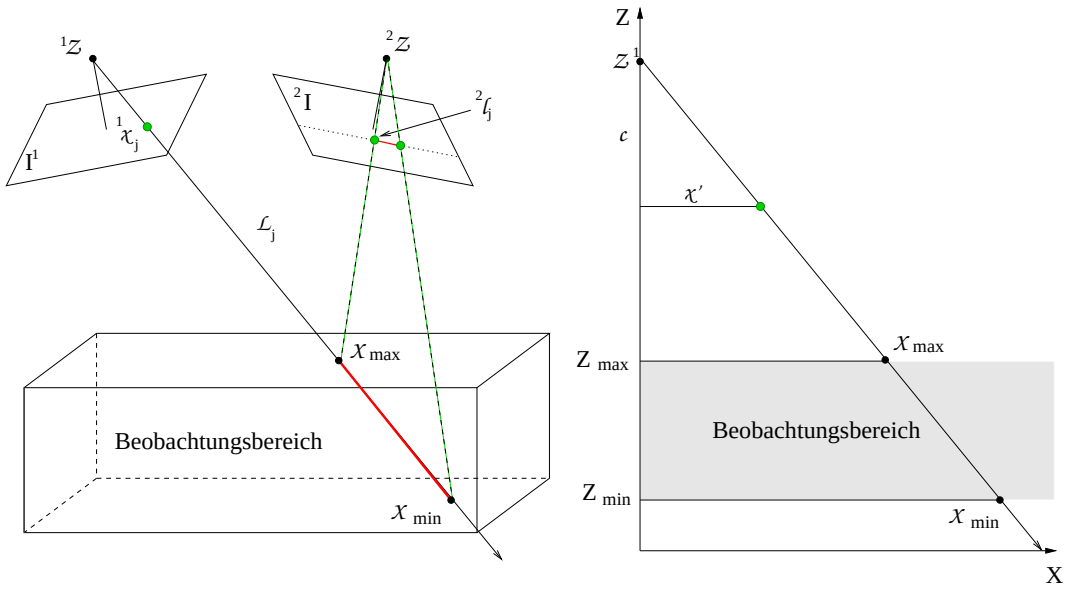


Abbildung 3.16: *Einschränkung der Epipolarlinie. Z_{max} und Z_{min} seien die maximale und minimale Höhe des relevanten Objektraumbereichs. Der relevante Bereich der Epipolarlinie wird gebildet durch das Bild ${}^2l_j$ des Teils des Abbildungsstrahls, der sich zwischen Z_{max} und Z_{min} befindet.*

$\mathcal{L}_j$, der sich innerhalb dieses Aufnahmebereichs befindet (siehe Abbildung 3.16). Die benötigten Informationen über die Höhenausdehnung des Beobachtungsgebietes können näherungsweise aus der Aufnahmesituation, aus höheren Bildpyramidenstufen oder aus älteren DHMs bestimmt werden.

3.7.2 Bestimmung der Epipolarlinie für nicht geradentreue Abbildungen

Die Bestimmung der Epipolarlinie ergibt sich aus ihrer Definition in Kapitel 3.7.1, Seite 43: Die Epipolarlinie ist die Projektion eines Abbildungsstrahls in ein anderes Bild. Der Abbildungsstrahl wird für diese Projektion durch einen geradlinigen Polygonzug dargestellt, dessen Knotenpunkte in die zweite Bildebene projiziert werden (Abbildung 3.15 rechts). Die entstehenden Bildpunkte sind die Knotenpunkte eines im Allgemeinen nicht geradlinigen Polygonzuges. Durch die Verbindung der Knotenpunkte entsteht eine Approximation der Epipolarlinie. Im einfachsten Fall wird eine Linearität zwischen den Knotenpunkten angesetzt. Die Unterteilung des Abbildungsstrahles hängt ab von der notwendigen Approximationsgenauigkeit und den Parametern des nicht projektiven Aufnahmesystems. Die einzelnen Schritte lauten wie folgt (siehe auch Abbildung 3.15 rechts):

1. Einteilung des Abbildungsstrahles r' im Objektraum in Segmente mit Knotenpunkten $\mathcal{P}_i$, für die approximativ eine geradentreue Abbildung angenommen werden kann.

2. Projektion der Knotenpunkte $\mathcal{P}_i$ in die zweite Bildebene unter Verwendung der nicht projektiven Abbildung. Diese Bildpunkte liegen auf der nicht geradlinig verlaufenden Epipolarlinie $\mathbf{l}''_\epsilon$.

3. Zwischen den Bildpunkten der Knotenpunkte wurde die Existenz einer approximativen, geradentreuen Abbildung angesetzt, sie bilden damit die Bildpunkte die Knotenpunkte eines Polygonzuges, der die Epipolarlinie $\mathbf{l}''_\epsilon$ approximiert.

Die Einschränkung der Epipolarlinie aus Kapitel 3.7.1, lässt sich auch für den nicht projektiven Fall einsetzen. Es werden dann nur Knotenpunkte in das Bild projiziert, die sich innerhalb des definierten Objektbereiches befinden.

Kapitel 4

Neue Betrachtung optischer Abbildungssysteme in Abhängigkeit von den geometrischen Eigenschaften ihrer Abbildungsstrahlen

Optische Abbildungen und Abbildungssysteme werden häufig nach den Eigenschaften ihres Sensors unterschieden und eingeteilt. Solche Unterscheidungskriterien sind zum Beispiel, ob der Sensoren analog oder digital ist, welche geometrische oder radiometrische Auflösung er besitzt, ob es sich um einen Flächen oder Zeilensensor handelt, ob Bildsequenzen oder Momentaufnahmen akquiriert werden, oder für welche Aufgaben der Sensor eingesetzt werden kann. Die zugehörigen Modelle werden häufig danach unterschieden, ob sie perspektivisch sind oder nicht perspektivisch, oder ob sie streng physikalisch oder phänomenologisch sind.

Aufgrund von neuen Anforderungen an optische Sensoren entstanden entsprechende Designs mit neuen radiometrischen und geometrischen Eigenschaften. Diese neuen Abbildungssysteme führen dazu, dass auch neue Klassifikationen von Abbildungssystemen benötigt werden, um die neuen Anforderungen und Sensoreigenschaften berücksichtigen zu können. Mit dieser Arbeit wird eine entsprechende neue Taxonomie vorgestellt, die auf den geometrischen Eigenschaften der Strahlenbündel des Aufnahmesystems und den Auswirkungen auf resultierende Bildfehler beruht. Diese Taxonomie basiert auf einer ersten Idee, vorgestellt in Wolff & Förstner, 2001 und ergänzt in Wolff, 2004. Eine ähnliche Taxonomie findet sich auch in Swaminathan *et al.* , 2003 und Sturm & Ramalingam, 2004. Bei der hier vorgestellte Klassifizierung handelt es sich um eine Erweiterung dieser Klassifikationen.

Die hier vorgestellte Taxonomie basiert zum einen auf einer Unterteilung komplexer Abbildungssysteme in ihre einzelnen Teilabbildungen und zum anderen auf die Zuordnung dieser Teilabbildungen zu einer von vier Grundmodellen. Die Zuordnung wird in Abhängigkeit der geometrischen Eigenschaften ihrer Abbildungsstrahlen und den resultierenden Bildfehlern vorgenommen.

4.1 Eigenschaften optischer Abbildungen

Das Basismodell für die meisten Modelle in der Bildverarbeitung ist die *geradentreue Zentralperspektive*. Nach Fischer, 1992 sind die Kennzeichen einer Zentralperspektive ein punktförmiges

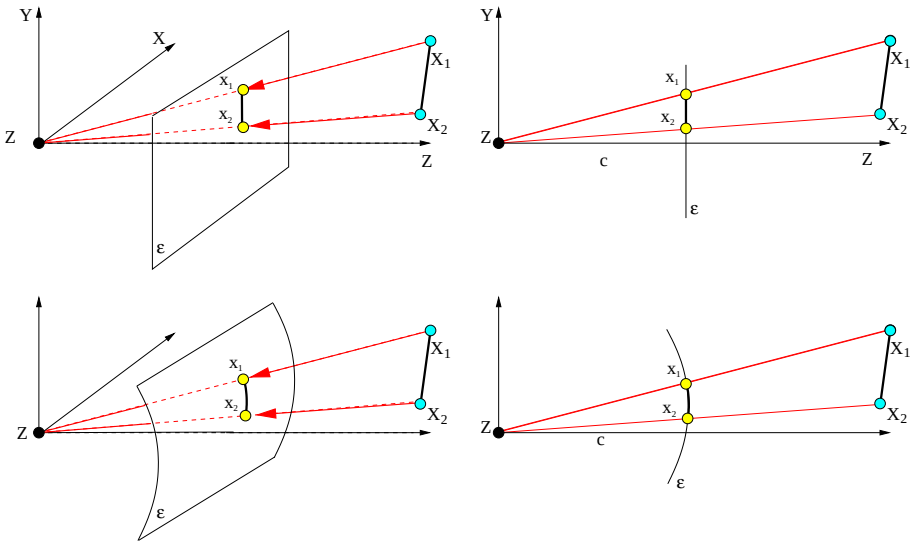


Abbildung 4.1: *Oben: die geradlinigen Abbildungsstrahlen schneiden sich in dem Projektionszentrum. In der ebenen Bildebene werden geradlinige Objektlinien geradlinig abgebildet. Unten: Durch den nicht ebenen Bildraum werden gerade Objektlinien nicht geradlinig abgebildet.*

Projektionszentrum und geradlinig verlaufende Abbildungsstrahlen (siehe auch Kapitel 2.2). Da es sich hier um eine allgemeine Beschreibung handelt, gibt es keine Angaben über eine Bildfläche. Im Falle einer ebenen Bildfläche wäre die Abbildung *geradentreu* und Objektgeraden würden in Bildgeraden abgebildet werden. Würde es sich um eine zylinderförmig gekrümmte Bildfläche handeln, so wäre die Abbildung eine nicht geradentreue Zentralperspektive, die sich über eine Abbildung des Bildes auf eine beliebige, ebene Bildfläche entzerren lässt. Wir halten fest (siehe Abbildung 4.1):

Perspektive: als Zentralperspektive oder einfach Perspektive wird eine Abbildung bezeichnet, die ein punktförmiges Projektionszentrum besitzt, in dem sich die geradlinigen Strahlen eines Abbildungsstrahlenbündels schneiden. Es gibt zwei Arten der Perspektive:

a) Geradentreue Perspektive: die geradentreue Perspektive besitzt eine ebene Bildfläche. Die resultierenden Bilder sind geradentreu und nicht verzerrt. Diese optische Abbildung entspricht dem Modell einer Lochkamera und kann durch das lineare Modell einer projektiven Abbildung modelliert werden (siehe Kapitel 2.2 und 3.3.1).

b) Nicht geradentreue Perspektive: die nicht geradentreue Perspektive besitzt keine ebene Bildfläche, sondern zum Beispiel eine zylinderförmige. Die resultierenden Bilder sind dadurch nicht geradentreu. Die Korrektur der Bilder kann bildraumbasiert erfolgen. Für eine Entzerrung werden dadurch nur Bildkoordinaten und die Parameter des Aufnahmesystems benötigt, nicht aber zusätzliche Objektrauminformationen.

Für die geometrischen Eigenschaften optischer Abbildungen können folgende Punkte festgehalten werden und sind die Basis für die Taxonomie:

1. **Abbildungsstrahlen: geradlinig oder beliebig gekrümmt**
   Die Strahlen einer Abbildung können entweder geradlinig oder gekrümmt und stetig oder unstetig sein.

2. **Projektionszentren: punktförmig oder nicht punktförmig**
   Jedes abbildende Strahlenbündel besitzt ein punktförmiges, oder ein nicht punktförmiges Projektionszentrum wie z.B. eine Linie, Fläche oder Punktwolke.

3. **Sensorfläche: eben oder gekrümmt**
   Die Sensor- oder Bildfläche eines Aufnahmesystems kann entweder eben oder gekrümmt und stetig oder unstetig sein. Bei einer gekrümmten Bildfläche gehen wir im Allgemeinen von einer hinreichend glatten Fläche aus, deren Krümmung eingeschränkt ist.

4. **Geradentreue: Invarianz oder Varianz von geraden Linien**
   Eine optische Abbildung bildet Objektgeraden in unverzerrte Bildgeraden (*geradentreu*) oder verzerrte (*nicht geradentreu*) im Bildraum ab.

5. **Bildfehler: bildraumbasierte oder objektraumbasierte Korrektur**
   Eine Verzeichnung beziehungsweise ein Bildfehler kann bildraumbasiert oder objektraumbasiert korrigiert werden. Das heißt, ihre Korrekturwerte $\Delta\chi$ hängen entweder von den Bildpunktkoordinaten ab ($\Delta\chi = \Delta\chi(\chi)$), oder von den Objektkoordinaten des Urbildes ($\Delta\chi = \Delta\chi(\mathcal{X})$) ab.

4.2 Klassifizierung optischer Abbildungssysteme in Abhängigkeit von ihren Abbildungsstrahlenbündel

Die *photogrammetrische Modellierung* basiert auf den Methoden der *physikalische Optik* und der *Mathematik*. Wie wir gesehen haben existieren in jeder Disziplin unterschiedliche Auffassungen und Definitionen des Begriffs Abbildung. Die mathematische Abbildung ist die allgemeinste Interpretation und ist eine Abbildung zwischen den Räumen der Wertemenge und der Definitionsmenge, unabhängig von einem optischen Sensor (siehe Kapitel 2.2). Physikalisch optische Abbildungen sind Spezialisierungen davon, indem die Abbildungen durch optische Elemente wie zum Beispiel Linsen und Spiegel erzeugt werden. Eine weitere Spezialisierung wird durch die Einführung von Bildflächen erreicht, womit wir das Gebiet der Photogrammetrie erreicht haben.

Eine komplexe photogrammetrische Abbildung zwischen einem Objekt und einer Bildfläche ist entweder unteilbar, oder sie lässt sich in mehrere physikalisch optische Abbildungen unterteilen. Diese ist wiederum entweder unteilbar, oder in mehrere mathematische Abbildungen unterteilbar.

Die Kenntnis über mögliche Unterteilung eines Aufnahmesystems in kleinste Einheiten von optischen oder mathematischen Abbildungen spielt im Zusammenhang mit den geometrischen Verzeichnungseigenschaften eines Aufnahmesystems in sofern eine Rolle, als dass aus den Eigenschaften der kleinsten Einheiten auf die Eigenschaften des Gesamtsystems geschlossen werden kann. Ein Projektionszentrum beeinflusst die Art der Bildraumverzeichnung, daher ist es notwendig, eine Unterteilung zu finden, bei der jede Teilabbildung genau ein Projektionszentrum besitzt. Unterteilen wir ein Abbildungssystem im mathematischen Sinne, so ist garantiert, dass wir eine Kombination von Teilabbildungen erhalten, bei der jede ein einziges Projektionszentrum im Sinne der Definition 3.2, Seite 24 besitzt. Im optisch physikalischen und im photogrammetrischen Sinne kann die kleinste Einheit einer Abbildung oder Teilabbildung mehr als nur ein Projektionszentrum besitzen.

Für die Beschreibung der kleinst möglichen Teilabbildung genügen vier Typen, um alle vorkommenden optischen Teilabbildungen zu beschreiben (siehe auch Tabelle 4.1):

- **Grundmodell** a (***allgemeine Abbildung***): Dies ist das allgemeinste Modell. Es gibt keinerlei Einschränkungen für den Verlauf der Abbildungsstrahlen und die Form ihres Projektionszentrums. Werden als Spezialisierungen geradlinige Abbildungsstrahlen und eine kaustische Fläche als Projektionszentrum festgesetzt, so erhalten wir das folgende Modell.

- **Grundmodell** b (***Abbildung in homogenen Medien***): Die Abbildungsstrahlen verlaufen geradlinig und besitzen eine Kaustik als Projektionszentrum. Ihre Bildfehler sind objektraumabhängig. Wir sprechen hier von Abbildungen in homogenen Medien, da dies Bedingung für geradlinige Abbildungsstrahlen ist. Ist das flächenförmige Projektionszentrum zu einem Punkt entartet, erhalten wir das spezialisiertere Grundmodell c.

- **Grundmodell** c (***allgemeine Zentralperspektive***): Die Abbildungsstrahlen verlaufen geradlinig und besitzen ein punktförmiges Projektionszentrum. Für die Bildfläche gibt es keine Einschränkungen. Die resultierenden Bildfehler sind bildraumabhängig. Wir sprechen hier von einer allgemeinen Zentralperspektive, da dieses Modell geradlinige Abbildungsstrahlen und ein punktförmigen Projektionszentrum besitzt. Durch die Beliebigkeit der Bildfläche kann das Objekt aber verzerrt abgebildet werden. Ist diese eben, erhalten wir das spezialisiertere Grundmodell d.

- **Grundmodell** d (***geradentreue Zentralperspektive***): Entspricht dem Modell einer zentralperspektivischen Abbildung mit geradlinigen Abbildungsstrahlen, einem punktförmigem Projektionszentrum und einer ebenen Bildfläche. Aus diesen geometrischen Bedingungen ergeben sich keine Bildfehler.

Die beiden Grundmodelle c und d entsprechen einer Zentralperspektive im Sinne der geometrischen Optik. Unter photogrammetrischen Aspekten macht es jedoch Sinn, diese beiden Abbildungstypen zu unterscheiden, da ein Bildpunkt im photogrammetrischen Sinne über den Schnitt von Abbildungsstrahlen mit einer Bildfläche definiert wird.

Die Grundmodelle sind hierarchisch aufgebaut. Die einzelnen Stufen können ausgehend von dem allgemeinsten Grundmodell a bis zur niedrigsten Stufe, dem Grundmodell d der geradentreuen Zentralperspektiven spezialisiert werden. Wir erhalten die hierarchische Relation $a \subset b \subset c \subset d$. Grundmodell a und b gehören zu den *nicht perspektivischen Abbildungen* und Grundmodell c und d zu den *perspektivischen Abbildungen*.

Komposition der Grundmodelle zu komplexen Abbildungssystemen Beliebige, komplexe Abbildungssysteme können aus einer Komposition der vier Grundmodelle erzeugt werden. Sie bilden die Teilabbildungen des Systems im Sinne ihrer Definition in Kapitel 3.2. Die geometrischen Eigenschaften des Abbildungssystems entsprechen ihrem Grundmodell mit der höchsten Stufe. Wir erhalten entsprechend die folgenden vier Abbildungssysteme:

1. Klasse A: Allgemeine Abbildungssysteme
2. Klasse B: Abbildungssysteme in homogenen Medien
3. Klasse C: Allgemeine zentralperspektivische Abbildungssysteme
4. Klasse D: Geradentreue zentralperspektivische Abbildungssysteme

Auch die vier Klassen sind wie die Grundmodelle, aus denen sie zusammengesetzt sind, hierarchisch aufgebaut: $A \subset B \subset C \subset D$. Die Klassen A und B gehören zu den *nicht perspektivischen*

Tabelle 4.1: *Vier hierarchische Grundmodelle von optischen Abbildungen.*

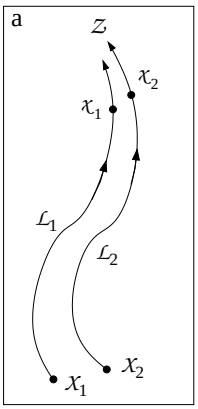
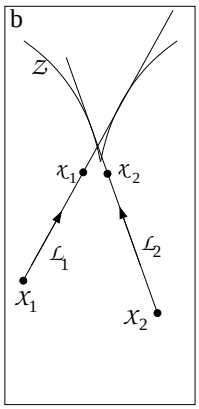
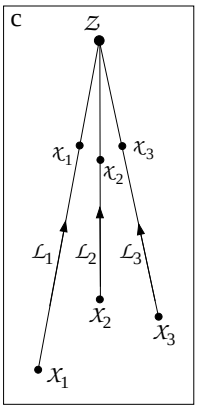
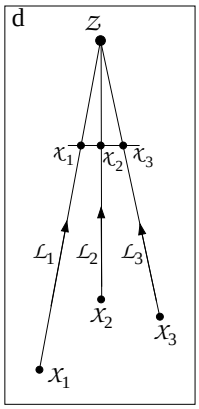
Grundmodell a	**Grundmodell b**
 **Allgemeine Abbildung:** Beliebige Abbildungsstrahlen mit beliebigem Projektionszentrum	 **Abbildung in homogenen Medien:** Geradlinige Abbildungsstrahlen mit einer kaustischen Fläche als Projektionszentrum. Die allgemeinste dieser Abbildungen enthält objektraumbasierte Bildfehler.
Grundmodell c	**Grundmodell d**
 **Allgemeine Zentralperspektive:** Geradlinige Abbildungsstrahlen mit einem punktförmigen Projektionszentrum. Die allgemeinste dieser Abbildungen besitzt bildraumbasierte Bildfehler.	 **Geradentreue Zentralperspektive:** Geradlinige Abbildungsstrahlen mit einem punktförmigen Projektionszentrum und einer ebenen Bildfläche. Die Abbildung ist geradentreu und enthält keine Bildfehler.

Tabelle 4.2: *Klassifizierung optischer Abbildungssysteme, die durch Komposition der Grundmodelle a bis d aus Tabelle* 4.1 *entstehen.*

Klasse	***Bezeichnung***	***Projektions-zentrum***	***Verzeichnung***	***Aufnahmesystem***
A	***Allgemeine Abbildungssysteme***	beliebiges PZ	objektraum-basierte Verzeichnung	Abbildung in inhomogenen Gebieten,
B	***Abbildungssysteme in homogenen Medien***	Kaustik	objektraum-basierte Verzeichnung	Weitwinkelobjektiv, Fischauge, katadioptisches System, Zeilenkamera, bewegte Kamera, Mehrmediengeometrie, Objektivverzeichnung
C	***Allgemeine zentralperspektive Abbildungssysteme***	punktförmiges PZ beliebige Bildfläche	bildraumbasierte Verzeichnung	Panoramakamera, zentrales katadioptisches System
D	***Geradentreue zentralperspektive Abbildungssysteme***	punktförmiges PZ ebene Bildfläche	keine Verzeichnung	Lochkamera, verzeichnungs-freie Linsensysteme

Abbildungssystemen mit objektraumabhängiger Verzeichnung und die Klassen C und D zu den *perspektivischen Abbildungssystemen* mit bildraumbasierter Verzeichnung beziehungsweise ohne Abbildungsfehler.

In Tabelle 4.2 sind diese vier Klassen und ihre Eigenschaften zusammengefasst. Im folgenden Kapitel werden einige Beispiele für Abbildungskompositionen und ihre Zuordnung zu einer der vier Klassen vorgestellt.

4.3 Abgrenzung zu anderen Arbeiten

Es existieren nur wenige Arbeiten, die sich in den bildverarbeitenden Wissenschaften mit dem Thema einer allgemeinen Betrachtung von Bildfehlern, ihren Ursachen und einer daraus folgenden Klassifizierung optischer Abbildungen beschäftigen. Erste Grundüberlegungen der hier vorgestellten Arbeit finden sich in Wolff & Förstner, 2001 und Wolff, 2004.

Die neue Repräsentation von Abbildungssystemen fundiert auf der Annahme, dass sich ein komplexes Abbildungssystem in einzelne Teilabbildungen mit virtuellen und realen Objekt- und Bildpunkten unterteilen lässt. Jede dieser Teilabbildungen kann dann auf ihre geometrischen Eigenschaften hin untersucht werden und aus ihrer Summe auf die Eigenschaften des gesamten Abbildungssystems geschlossen werden.

In Swaminathan *et al.* , 2003 ist eine ähnliche Taxonomie mit den drei Klassen *perspektivisches Abbildungsmodell*, *Abbildungsmodell mit einem punktförmigen Projektionszentrum* und dem *Abbildungsmodell mit einem nicht punktförmigen Projektionszentrum* zu finden. Den Schwerpunkt dieser Arbeit bilden die Bildverzerrungen. Die Repräsentation eines Abbildungsmodells basiert

hierbei auf dem allgemeinen Modell nach Grossberg & Nayar, 2001. Es wird ein Abbildungsmodell als eine Black Box beschrieben, in der Abbildungsstrahlen auf einen Sensor treffen. Die Klassifizierung bezieht sich nur auf Abbildungen mit einem Projektionszentrum und macht zum Beispiel keine Unterscheidung zwischen ebenen und nicht ebenen Bildflächen. Ebenfalls auf dem allgemeinen Modell nach Grossberg & Nayar, 2001 basiert die Unterteilung nach Sturm & Ramalingam, 2004, der eine Unterscheidung zwischen den beiden Klassen *zentrale Kamera* und *nicht zentrale Kamera*, also perspektivisch und nicht perspektivisch verwendet. Beide Klassifizierungen entsprechen grundsätzlich den hier vorgestellten Überlegungen, reichen aber zusammen mit ihrer zugrunde liegenden Repräsentation nicht für die hier gewünschte, formale Analyse optischer Systeme aus.

4.4 Beispiele

In diesem Kapitel werden einige Beispiele für komplexe Aufnahmesysteme zusammen mit der Geometrie ihrer Abbildungsstrahlen und ihren Projektionszentren, einer Unterteilung in einzelne Unterabbildungen und der daraus resultierenden Zuordnung zu einer der vier Klassen vorgestellt. Tabelle 4.3 beschreibt eine Panoramakamera und ein zentrales katadioptisches System als Beispiele für allgemeine zentralperspektivische Abbildungssysteme mit bildraumabhängigen Verzeichnungen. Tabelle 4.4 beschreibt die Eigenschaften eines Zeilensensors und eines nicht zentralen katadioptischen Systems als Beispiele für Abbildungssysteme in homogenen Medien. Der Zeilensensor an sich entspricht einem geradentreuen, zentralperspektivischen Abbildungssystem. Das aus verschiedenen Zeilenbilder zusammengesetzte Bild entspricht allerdings keiner zentralperspektivischen Abbildung. Tabelle 4.5 zeigt die Geometrie und Eigenschaften der Mehrmediengeometrie, ein weiteres Beispiel für ein Abbildungssystem in homogenen Medien.

Tabelle 4.3: *Beispiele nicht projektiver Abbildungssysteme mit bildraumbasierter Verzeichnung.*

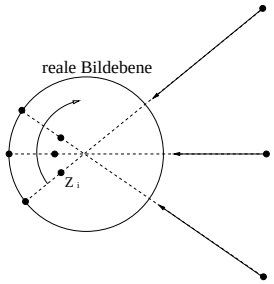
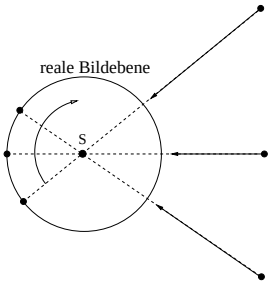
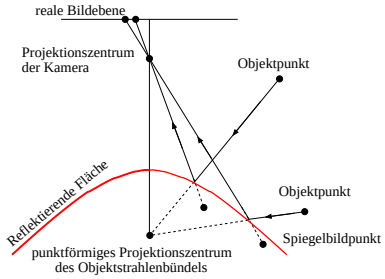
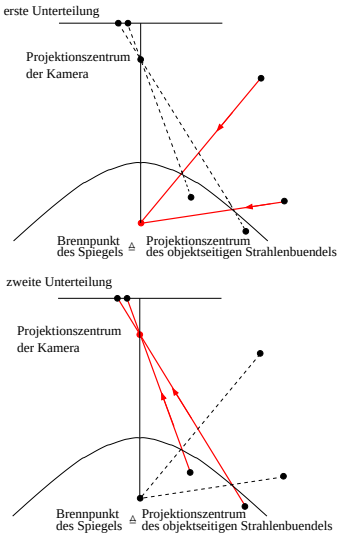
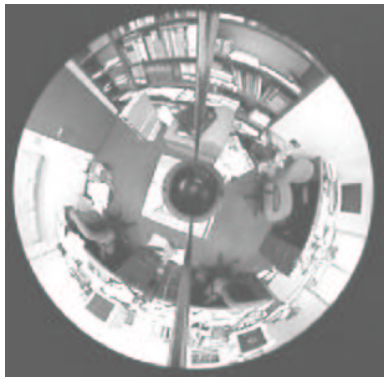
<table>
<tr><th colspan="3">Allgemeine zentralperspektivische Abbildungssysteme</th></tr>
<tr><th>Aufnahmegeometrie</th><th>Unterteilung und PZ</th><th>Bildbeispiel</th></tr>
<tr><td colspan="3">Panoramakamera</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td> </td></tr>
<tr><td>Eine Panoramakamera besitzt ein punktförmiges Projektionszentrum, das um eine Drehachse rotiert. Durch die gekrümmte Bildfläche entsteht eine bildraumbasierte Verzeichnung. Die Abbildungsstrahlen</td><td>schneiden sich idealisiert in einem Punkt. Es entsteht ein virtuelles, punktförmiges Projektionszentrum S. Das System entspricht einer allgemeinen Zentralperspektive und bedarf keiner Unterteilung.</td><td>Unten: 360 Grad Originalbild einer Panoramakamera. Oben: vergrößerter Ausschnitt: geradlinige waagerechte Raumkanten sind gekrümmt abgebildet (entnommen aus Schneider & Maas, 2003).</td></tr>
<tr><td colspan="3">Zentrales katadioptisches System</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td>  </td></tr>
<tr><td>Die vor der Spiegelung geradlinig verlängerten Abbildungsstrahlen schneiden sich in einem punktförmigen Projektionszentrum. Die Abbildungsstrahlen zwischen dem virtuellen Bildpunkt treffen sich in dem punktförmigen Projektionszentrum der Kamera.</td><td>Zwei Projektionszentren des Systems: oben) punktförmiges PZ der vom Objekt ausgehenden Abbildungsstrahlen, unten) punktförmiges PZ der geradlinigen Strahlen zwischen den Spiegelpunkten und den Bildpunkten. Die zwei allgemeinen zentralperspektivischen Teilabbildungen führen zu einer allgemeinen Zentralperspektive.</td><td>Die 360 Grad Darstellung der Umgebung wird auf eine kreisförmigen Bildebene abgebildet (entnommen aus Gluckman, 1998). Deutlich ist zu erkennen, dass im Objektraum senkrecht verlaufende Geraden nahezu geradlinig abgebildet sind, waagerecht verlaufende Raumgeraden jedoch deutlich gekrümmt abgebildet worden sind.</td></tr>
</table>

Tabelle 4.4: *Beispiele nicht projektiver Abbildungssysteme mit objektraumbasierter Verzeichnung.*

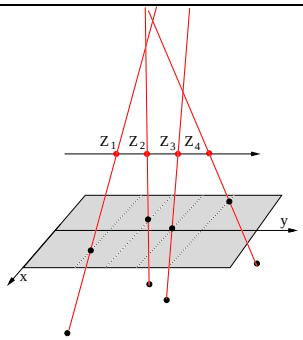
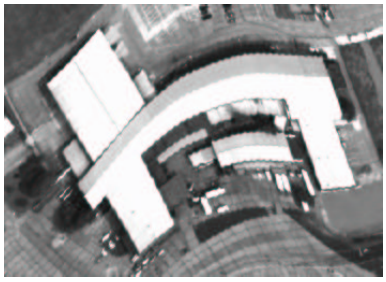
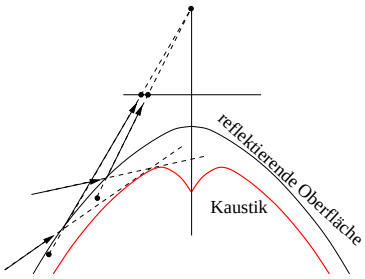
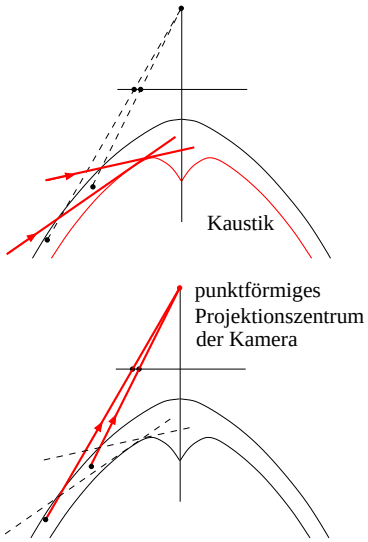
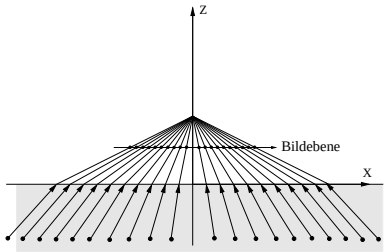
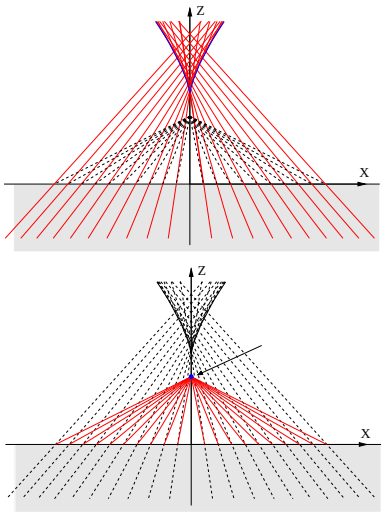
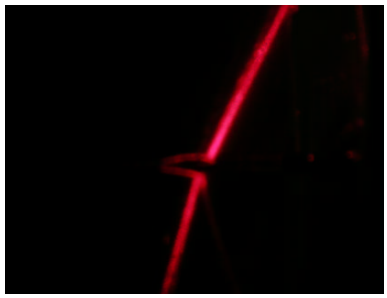
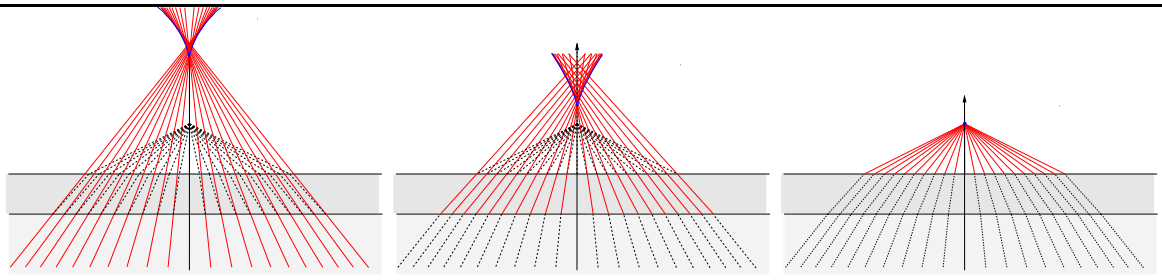
<table>
<tr><th colspan="3">Abbildungssysteme in homogenen Medien</th></tr>
<tr><th>Aufnahmegeometrie</th><th>Unterteilung und PZ</th><th>Bildbeispiel</th></tr>
<tr><td colspan="3">Zeilensensor</td></tr>
<tr><td> 
</td><td></td><td>  </td></tr>
<tr><td>Jedes Zeilenbild b_i besitzt ein eigenes punktförmiges Projektionszentrum Z_i einer perspektivischen Abbildung. Das zusammengesetzte Bild besitzt aber kein punktförmiges Projektionszentrum, sondern eine Kette von Projektionszentren.</td><td>Entlang der geradlinigen Abbildungsstrahlen gibt es keine Unterteilung. Bei diesem Sonderfall könnte theoretisch jede Zeile als Unterabbildung angesehen werden, praktisch macht dies jedoch keinen Sinn.</td><td>Verzerrtes Originalbild, aufgenommen mit einem Zeilensensor (entnommen aus Elberink & Vosselman, 2002). Das rechteckige Haus ist im Bild deutlich gekrümmt dargestellt.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nicht zentrales katadioptisches System</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td> </td></tr>
<tr><td>Im Gegensatz zu einem zentralen katadioptischen System besitzt ein nicht zentrales katadioptisches System eine Kaustik als nicht punktförmiges Projektionszentrum der Abbildungsstrahlen zwischen Objekt und Spiegel.</td><td>Zwei Teilabbildungen: Oben: Abbildungen in homogenen Medien (Objekt / Spiegel). Unten: geradentreue Zentralperspektive (Spiegel / Kamera). Daraus folgt ein Abbildungssystem in homogenen Medien mit objektraumbasierten Bildfehlern.</td><td>Originalbild, entnommen aus Nayar & Karmarkar, 2000. In der Mitte der Aufnahme ist das Bild der Kamera zu sehen, die über dem Spiegel angebracht ist.</td></tr>
</table>

Tabelle 4.5: *Mehrmedienabbildung als Beispiel für ein nicht projektives Abbildungssystem mit objektraumbasierter Verzeichnung.*

<table>
<tr><th colspan="3">Abbildungssysteme in homogenen Medien</th></tr>
<tr><th>Aufnahmegeometrie</th><th>Unterteilung und PZ</th><th>Bildbeispiel</th></tr>
<tr><td colspan="3">Zweimedienaufnahme</td></tr>
<tr><td> 
</td><td> 
</td><td>  </td></tr>
<tr><td>Die Abbildungsstrahlen eines Mehrmediensystems werden an der Grenzfläche gebrochen und schneiden sich dann in dem punktförmigen Projektionszentrum der Kamera.</td><td>Die verlängerten Abbildungsstrahlen, die durch die Objekt- und die Brechungspunkte aufgespannt werden, besitzen eine Kaustik als Projektionszentrum. Es entsteht eine Zweiteilung des Abbildungssystems in eine Abbildung in homogenen Medien und einer geradentreuen Zentralperspektive.</td><td>Visualisierung der Lichtrefraktion eines Abbildungsstrahles als Ursache für die Abweichung von einer Zentralperspektive im Bildraum. Die Refraktion ist dargestellt durch einen an der Grenzschicht zwischen Wasser im unteren Bereich des Bildes und Luft im oberen Teil des Bildes gebrochenen Laserstrahles.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dreimedienaufnahme</td></tr>
<tr><td colspan="3">  </td></tr>
<tr><td colspan="3">Durchlaufen die Abbildungsstrahlen drei verschiedene Medien, so besitzt das Abbildungssystem zwei Brechungspunkte. Dem entsprechend kann das Abbildungssystem in drei Teilabbildungen unterteilt werden: zwei Abbildungen in homogenen Medien und eine geradentreue Zentralperspektive.</td></tr>
<tr><td>Kaustik der Abbildungsstrahlen im Wasser.</td><td>Kaustik der Abbildungsstrahlen des Plexiglases.</td><td>Punktförmiges Projektionszentrum der Kamera und der Abbildungsstrahlen in der Luft.</td></tr>
</table>

Kapitel 5

Approximationsmodell allgemeiner optischer Abbildungen

Im vorangegangenen Kapitel wurden vier verschiedene hierarchische Klassen optischer Abbildungssysteme vorgestellt. Mittels der Klassen B und C sind die meisten realen Abbildungssysteme zu beschreiben und sind daher für die Modellierung von besonderer Bedeutung. Einer der Hauptunterschiede dieser beiden Modelle ist die Auswirkung auf die entsprechenden Bildfehler: im ersten Fall ist ihre Korrektur bildraumbasiert und somit in einem a priori Schritt berechenbar und das Bild entsprechend a priori entzerrbar. Im zweiten Fall sind sie objektraumbasiert, dadurch ist eine strenge Korrektur der Bildfehler nur in Abhängigkeit des abgebildeten Objektpunktes und somit nicht a priori möglich.

In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, das für eine nicht perspektivische Abbildung der Klasse C mit objektraumbasierten Bildverzeichnungen eine allgemeine Approximation bestimmt. Diese Approximation kann derart in einen Auswertealgorithmus implementiert werden, dass kein signifikanter Genauigkeitsverlust der Endresultate verursacht wird.

5.1 Approximationsidee

Bei der Suche nach einem geeigneten allgemeinen Approximationsmodell bietet sich das Modell mit dem einfachsten funktionalen Zusammenhang zwischen Bild- und Objektkoordinaten an: das Modell einer geradentreuen Zentralperspektive repräsentiert durch eine projektive Abbildung. Es ist zum einen einfach und ermöglicht zum anderen den Einsatz effektiver Methoden der projektiven Geometrie. Um einen signifikanten Einfluss auf die Endergebnisse einer Bildauswertung zu vermeiden, führen wir zwei weitere Bedingung hinzu: 1) je nach Aufnahmegeometrie und Genauigkeitsanforderungen wird nicht nur eine globale Approximation bestimmt, sondern der Beobachtungsraum wird unterteilt und es wird für jeden Teilraum eine eigene, lokale Approximation bestimmt. 2) Die Approximation wird nur für geeignete Auswerteschritte eingesetzt. Ein Beispiel für einen solch gezielten Einsatz wird in Kapitel 6 für eine dreidimensionale Objektpunktbestimmung im Mehrbildverband vorgestellt. Die Approximation wird nur für den Arbeitsschritt der Aufstellung der Zuordnungshypothesen verwendet. Für den abschließenden Hypothesentest und die Berechnung der räumlichen Vorwärtsschnitte werden die strengen Abbildungsmodelle verwendet. Dies ist eine effektive Kombination der Vorteile der beiden Modellierungen: die geringe Komplexität und Einfachheit des perspektivischen Modells für die komplexe Bildzuordnung mit der hohen Genauigkeit der streng physikalischen Modellierung für die Objektpunktbestimmung.

Zusammenfassend erhalten wir:

Die Idee des allgemeinen Approximationsmodells ist die, ein phänomenologisches Modell in Form einer projektiven Abbildung als allgemein gültiges, approximierendes Abbildungsmodell zu verwenden. Zu dem allgemeinen Modell gehören folgende Bedingungen:

1. ***Allgemeine Approximation durch eine projektive Abbildung.***
2. ***Garantie der Approximationsgüte durch Unterteilung des Beobachtungsraumes und Bestimmung lokaler Approximationen.***
3. ***Gezielter Einsatz der Approximation nur für geeignete Arbeitsschritte.***
4. ***Geeignetes Schätzmodell für Parameter der Approximation und Verwendung von mit dem strengen Modell erzeugten Bildkoordinaten von synthetischen Passpunkten.***

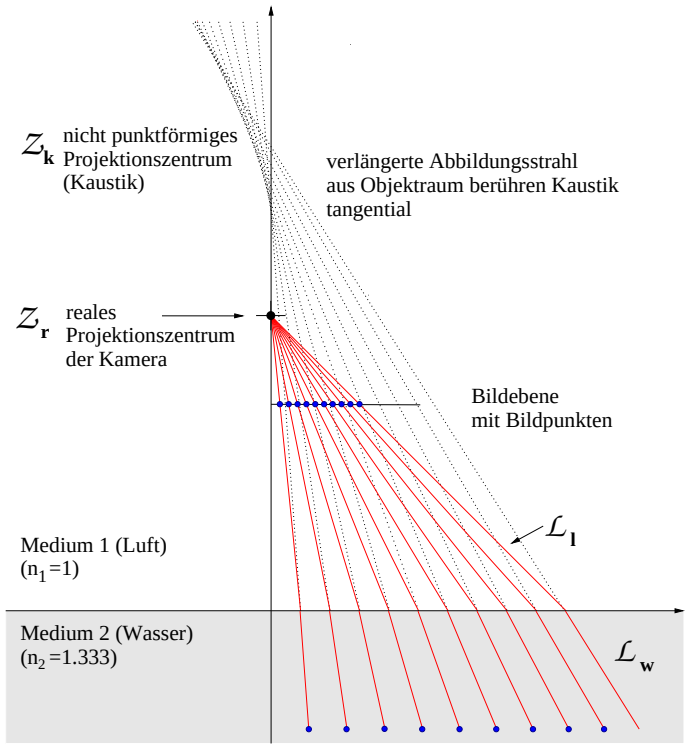
Die projektiven Parameter, die durch diese Schätzung der approximierenden Abbildung lokal berechnet werden, entsprechen keiner realen Kamera. Daher wird diese Kamera als *virtuelle projektive Kamera* bezeichnet.

Die Idee hinter der Approximation wird veranschaulicht für den Mehrmedienfall, ist aber auf andere Abbildungsmodelle einfach übertragbar. Für das virtuelle Projektionszentrum wird ein approximierender Schnittpunkt der räumlichen Geraden des Strahlenbündels $\mathcal{L}_v$ bestimmt, das aufgespannt wird durch Objektpunkte und den zugehörigen, verzerrten Bildpunkten. Abbildung 5.1 zeigt die Geometrie eines Zweimedienmodells. Die Verlängerungen der Objektstrahlen des Bündels $\mathcal{L}_w$, über die Grenzfläche hinaus, schneiden sich nicht in einem punktförmigen Projektionszentrum, sondern bilden eine kaustische Fläche Z_k. Die Abbildungsstrahlen innerhalb des Mediums Luft, in der sich auch die Kamera befindet, schneiden sich in dem punktförmigen realen Projektionszentrum $\mathcal{Z}_r$ der Kamera. Für die phänomenologische Approximation wird ein einziges, punktförmiges Projektionszentrum $\mathcal{Z}_v$ einer virtuellen Kamera gesucht. Dieses Projektionszentrum ist die Lösung einer Minimierungsaufgabe, bei der der Abstand der räumlichen Geraden $\mathcal{L}_v$ zu dem virtuellen, approximierenden Projektionszentrum minimiert wird. In der Zeichnung ist dieses virtuelle Projektionszentrum für die spezielle Aufnahmekonfiguration als genäherten Schnitt der Geraden $\mathcal{L}_v$ dargestellt. Es ist ein Punkt oberhalb des realen Projektionszentrums $\mathcal{Z}_r$ der Kamera auf der Z-Achse. Das Minimierungsproblem wird in Kapitel 5.2 allgemein formuliert.

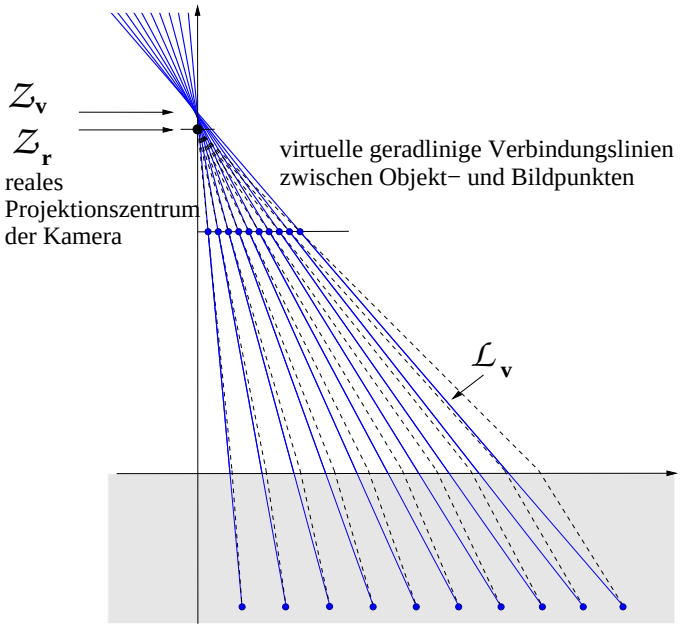
5.2 Formulierung des Approximationsproblems

Ziel der Approximation ist die Repräsentation einer nicht linearen Relation zwischen Objekt- und Bildraum durch das lineare Modell einer Zentralperspektive. Geometrisch gesehen wird der polygonzugartige Abbildungsstrahl durch geradlinige Abbildungsstrahlen ersetzt. Um die beste Approximation zu erhalten, wird die entstehende Differenz der realen und der approximierten Bildkoordinaten im Bildraum minimiert. Wir erhalten eine Minimierungsaufgabe, die entsprechend Kapitel 2.3 gelöst werden kann.

Das Ziel der Approximation ist die Darstellung einer nicht projektiven Abbildung durch ein projektives Modell. Dafür müssen die 11 unabhängigen Parameter einer approximierenden Projektionsmatrix ${}^{a}\mathsf{P}$ (siehe Gleichung 3.1, Seite 26) einer virtuellen Kamera derart bestimmt werden,



(a) *Geometrie eines Zweimedienabbildungssystems mit der kaustischen Projektionsfläche Z_k der Abbildungsstrahlen $\mathcal{L}_w$ und dem punktförmigen Projektionszentrum Z_r der Abbildungsstrahlen $\mathcal{L}_l$.*



(b) *Approximativer Schnittpunkt $\mathcal{Z}_v$ der virtuellen Raumgeraden $\mathcal{L}_v$ zwischen Objekt- und Bildpunkten. Die Fehlerminimierung führt zur besten Approximation.*

Abbildung 5.1: *Approximationsidee am Beispiel der Mehrmedienabbildung.*

dass mit ${}^a\mathbf{x} = {}^a\mathsf{P}\mathbf{X}$ der systematische Rückprojektionsfehler $d(\mathbf{x},{}^a\mathsf{P}\mathbf{X}) = \|\mathbf{x} - {}^a\mathsf{P}\mathbf{X}\|$ zwischen den verzerrten Bildpunkten $\mathbf{x}$ und den mit der Approximation berechneten Bildpunkten ${}^a\mathbf{x}$ im Bildraum minimiert wird.

Gesucht ist eine Projektionsmatrix ${}^a\mathsf{P}$ einer virtuellen Kamera für das Objektvolumen $\mathcal{V}$, so dass gilt

$$\Omega = \int_{\mathbf{X}\in V} d^2(\mathbf{x},{}^a\mathsf{P}\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \rightarrow \min. \tag{5.1}$$

Durch die geforderte Einhaltung einer Genauigkeitsforderung an die Approximation wird dieses Minimierungsproblem zu einem Maximierungsproblem innerhalb des Geltungsbereichs der Approximation. Voraussetzung für die Existenz der Approximation ist die Stetigkeit der abbildenden Funktion innerhalb dieses Geltungsbereiches. Das heißt, dass innerhalb dieses Bereichs benachbarte Objektpunkte auch benachbarte Bildpunkte und ihre Abbildungsstrahlen ebenfalls benachbarte Wege besitzen. Für eine solche stetige, nicht perspektivische, objektraumbasiert verzeichneten Abbildung gilt, dass die Genauigkeit der Approximation mit kleiner werdendem Geltungsbereich zunimmt. Die dem Approximationsmodell zugrunde liegende perspektivische Abbildung gilt für ein infinitesimal eng zusammen liegendes Strahlenbündel, beziehungsweise den dazugehörigen infinitesimal kleinen Objektbereich V_{inf}. Die Güte der Approximation nimmt mit der Größe des Volumens ab. Ist eine Genauigkeitsforderung durch einen maximalen Differenzwert ϵ vorgegeben, so ist die maximale Ausbreitung des Geltungsbereichs im Objektraum gesucht, die diese Genauigkeitsanforderung einhält. Dabei kann je nach Aufnahmesituation eine einzige Approximation für den gesamten beobachteten Raum ausreichend sein, oder der Beobachtungsraum muss in einzelne Untervolumina $V_i \in V$, $i = 1..n$, $\sum_{i=1..n} V_i = V$ entsprechend der notwendigen Güte der Approximation unterteilt werden. Für jedes Untervolumen V_i wird entsprechend eine lokale Projektionsmatrix

$${}^a\mathsf{P}_i(V_i) \tag{5.2}$$

einer lokalen virtuellen Kamera bestimmt. Ziel dabei ist es, so wenig lokale Approximationen wie möglich bestimmen zu müssen.

Wir erhalten das folgende Maximierungsproblem:

Für eine beliebig vorgegebene Zahl $\epsilon > 0$ wird eine Unterteilung des Beobachtungsraums V in k Unterräume V_i mit $\bigcup_{i=1..k} V_i = V$ und den zugehörigen, approximierenden Projektionsmatrizen ${}^a\mathsf{P}_i(V_i)$ gesucht, so dass gilt

$$V_i \rightarrow \max,\quad \Omega_i(V_i) = \int_{\mathbf{X}\in V_i} d^2(\mathbf{x},{}^a\mathsf{P}_i\mathbf{X})\,\mathrm{d}\mathbf{x} \leq \epsilon. \tag{5.3}$$

5.3 Bestimmung der Approximation

Die 11 unabhängigen Parameter der approximierenden Projektionsmatrizen ${}^a\mathsf{P}_i(V_i)$ aus Gleichung 5.3 werden aus gegebenen, dreidimensionalen Passpunktkoordinaten und deren streng physikalisch verzerrten Bildkoordinaten berechnet. Um lokale systematische Fehler zu vermeiden, sollte für die Bestimmung der Approximation eine große Redundanz gut verteilter Passpunkte bei der Schätzung eingehalten werden. Dafür bietet es sich an, aus den strengen Orientierungsparametern gut konditionierte synthetische Passpunkte und ihre Bildkoordinaten zu bestimmen.

Die für die Schätzung benötigten Passpunkte im Objektraum und deren verzerrte Bildpunkte können auf zwei verschiedenen Wege bestimmt werden:

1. Es werden *reale Passpunkte* im Objektraum verwendet, die zum Beispiel für die Bestimmung der Orientierungsparameter des Systems genutzt worden sind, und deren reale, verzeichneten Bildpunkte. Wichtig dabei ist jedoch, dass sie gleichmäßig über den Beobachtungsbereich verteilt sind. Tests für die hier vorgestellten Auswertungen in der Mehrmediengeometrie haben gezeigt, dass die erreichte Qualität der Approximation bei diesem Anwendungsfall nicht ausreichend ist, insbesondere wenn nur im Randbereich des Beobachtungsgebietes Passpunkte definiert werden können.

2. Es werden *synthetische Passpunkte* verwendet, deren Bildpunkte unter Verwendung der Orientierungsparameter aus der strengen Modellierung rechnerisch bestimmt werden. Der Vorteil dieses Vorgehens ist, dass eine gleichmäßige und beliebig dichte Verteilung der Passpunkte vorgenommen werden kann und damit eine bessere Güte der Approximation für das gesamte Aufnahmegebiet gewährleistet ist.
   Bei den in Kapitel 7 durchgeführten Berechnungen wird dieses Vorgehen angewendet. Voraussetzung dafür sind ausreichend genaue Orientierungsparameter des strengen Modells.

Schätzung einer virtuellen projektiven Kamera Für die Schätzung einer virtuellen Kamera gilt es, eine Lösung des Minimierungsproblems 5.1 beziehungsweise Maximierungsproblems 5.3, Seite 62 zu finden. Für die Lösung wird sowohl ein Minimierungsverfahren verwendet, das die Geometrie des Systems berücksichtigt, als auch ein Verfahren, das eine rein algebraische Minimierung (siehe auch Kapitel 2.3) vornimmt. Bei der Parameterschätzung für eine virtuelle Kamera muss kein Ausreißertest vorgenommen werden, da die Daten und damit auch die Zuordnung synthetisch erzeugt worden sind und damit Zuordnungsfehler ausgeschlossen werden können.

In einem Mehrbildverband muss für jede Kamera eine oder mehrere lokale virtuelle Kameras als Approximation bestimmt werden. Die Objektpunkte können als fehlerfrei angenommen werden, da sie synthetisch definiert worden sind. Es wird bewusst eine Blockausgleichung vermieden, da die Approximation durch den speziellen Einfluss auf jede einzelne Kamera negativ beeinflusst werden könnte. Die Relation der Kameras zueinander wurde bereits in der Bestimmung der Orientierungsparameter des strengen Modells im Block berücksichtigt.

Algorithmus 1, Seite 65 fasst die einzelnen Schritte der Schätzung der approximierenden, virtuellen Kamera zusammen. Abbildung 5.2, Seite 64 zeigt eine graphische Übersicht der Schritte für eine mögliche Implementation der Approximation in eine Bildauswertung und den jeweiligen Einsatz des physikalischen und des phänomenologischen Modells.

5.4 Abgrenzung zu anderen Arbeiten

Bei der hier gestellten Frage nach einer Approximation geht es nicht um beliebige Approximationen, sondern im Speziellen um solche, die eine objektraumbasiert verzeichnete Abbildung durch ein approximierendes phänomenologisches Modell ersetzen, wodurch für die Auswertung schliesslich ein geradentreues Modell eingesetzt werden kann. Solche Approximationen werden für verschiedene Abbildungen bereits genutzt. Der Hauptunterschied zwischen dem hier vorgestellten Verfahren zu anderen ist die Verbesserung der Genauigkeit der Endergebnisse durch

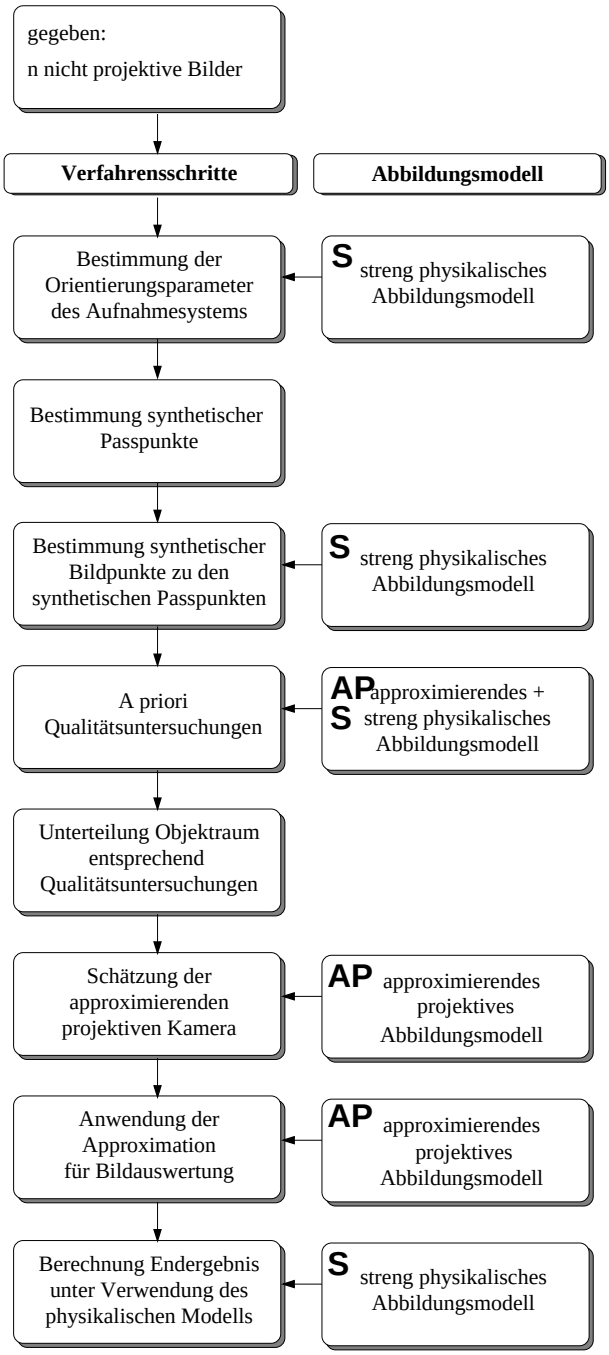


Abbildung 5.2: *Übersicht der Verfahrensschritte der Schätzung und Anwendung der approximierenden projektiven Abbildung (***S***: streng physikalisches Modell,* **AP** *: approximierendes projektives Modell).*

Algorithm 1 Schätzung einer virtuellen projektiven Kamera mit synthetischen Passpunkten als Approximation für ein nicht perspektivisches Aufnahmesystem

- Bestimmung der Orientierungsparameter des Aufnahmesystems unter Verwendung realer Passpunkte und dem streng physikalisch basierten Abbildungsmodell.
- Definition einer genügend großen Anzahl n gleichmäßig im Beobachtungsvolumen V verteilter synthetischer Passpunkte $\mathbf{X}_j, j = 1..n$.
- Berechnung der Bildpunkte ${}^g\mathbf{x}_j, j = 1..n$ der synthetischen Passpunkte $\mathbf{X}$ unter Verwendung des strengen Abbildungsmodells.
- A priori Qualitätsuntersuchungen mittels der synthetischen Daten mit Variation verschiedener Parameter, insbesondere der Volumenunterteilung im Objektraum.
- Unterteilung des Objektraumes V in Objektunterräume V_i entsprechend den Ergebnissen der a priori Qualitätsuntersuchungen.
- Schätzung der Projektionsmatrizen ${}^a\mathsf{P}_i$ der virtuellen Kameras, gültig für den Objektunterraum V_i. In die Schätzung fließen die synthetischen Passpunkte $\mathbf{X}_j$ als bekannte Parameter und deren Bildpunkte ${}^g\mathbf{x}_j$ als Beobachtungen ein.

einen gezielten Einsatz der Approximation für geeignete Berechnungsschritte und der Bestimmung einer Objektraumunterteilung mit lokalen virtuellen Kameras unter Berücksichtigung einer Genauigkeitsanforderung. Im Folgenden werden einige Beispiele dazu aufgeführt:

Bei der Einteilung der existierenden Verfahren zeichnen sich insbesondere zwei Hauptstrategien für die Bestimmung einer Approximation ab. Strategie 1 ist die Korrektur einer objektraumabhängigen Bildverzeichnung durch eine approximierende, bildraumabhängige Verzeichnung. Strategie 2 ist eine lokale oder globale Approximation einer nicht geradentreuen Abbildung durch eine geradentreue Abbildung.

Strategie 1: objektraumabhängig → bildraumabhängig

Unter bestimmten Voraussetzungen können die Einflüsse der objektraumbasierten Verzeichnungen durch bildraumbasierte Korrekturwerte approximiert werden. Dadurch ist es möglich, für das Aufnahmesystem eine einmalige Berechnung der Parameter des funktionalen Zusammenhanges zwischen den Bildkoordinaten und dem Korrekturwert zu bestimmen und in einer Look-up Tabelle zu speichern.

Ein Beispiel für diese Strategie ist die klassische radial-symmetrische und tangentiale bildraumabhängige Modellierung der Objektivverzeichnung nach Brown, 1971. Streng genommen gilt diese Korrektur der Objektivverzeichnung nur für Punkte, die in einer zur Bildebene parallel liegenden Objektebene angeordnet sind, für die die Verzeichnungskorrekturen explizit bestimmt worden sind (siehe Kapitel 3.5 und Fraser & Shortis, 1992). Für Bildpunkte, deren zugehörige Objektpunkte außerhalb dieser Ebene liegen, gelten diese Korrekturwerte nur näherungsweise. Die bildraumabhängige Modellierung gilt als sehr gute Approximation der objektraumabhängigen Objektivverzeichnung und ist für die meisten Anwendungen hinreichend genau. Abbildung 5.3 zeigt links ein aufgrund einer Objektivverzeichnung stark verzerrtes Bild und rechts das bildraumbasiert entzerrte Bild (entnommen aus Abraham, 1998).

Abbildung 5.3: *Links: Beispiel einer verzerrten, nicht geradentreuen Abbildung, verursacht durch Objektivverzeichnung. Rechts: das auf eine perspektivische Abbildung entzerrtes Bild. Gerade Objektlinien werden in gerade Bildlinien abgebildet (aus Abraham 1998).*

Strategie 2: nicht geradentreu → geradentreu

Andere Verfahren bestimmen eine lokale oder globale projektive Abbildung als Approximation. Die Bestimmung eines Korrekturwertes fällt dadurch ganz weg.

Im Falle einer Mehrmediengeometrie kann eine Epipolarlinie durch eine Projektion eines invertierten Abbildungsstrahles über den Objektraum in den zweiten Bildraum bestimmt werden (siehe auch Kapitel 3.6). In Maas, 1992b wird ein Verfahren für die Approximation der leicht gekrümmten Epipolarlinien durch ein Polygon vorgestellt. Da diese Abbildung nicht linear ist und das Bild der Epipolarlinie gekrümmt ist, wird der invertierte Abbildungsstrahl im Objektraum unterteilt und die einzelnen Teilstücke geradlinig abgebildet. Die gekrümmte Epipolarlinie wird somit durch ein Polygon mit geradlinigen Teilstücken approximiert. Jedes dieser Teilstücke kann als eine lokale Approximation durch eine geradentreue Abbildung angesehen werden.

In Swaminathan *et al.* , 2001 wird ein Verfahren präsentiert, das eine kaustische Fläche eines katadioptischen Systems durch einen einzelnen Punkt approximiert. Als Restriktion für diesen Punkt wird vorgegeben, dass der Punkt auf der optischen Achse des Systems liegen muss. Die beste Approximation wird durch die Bestimmung eines Grenzwertes der Singularität der Kaustik berechnet. Bei diesem Verfahren muss die Kaustik des Systems bekannt sein. Ein Verfahren zur Bestimmung einer Kaustik wird ebenfalls in Swaminathan *et al.* , 2001 für katadioptische Aufnahmesysteme beschrieben. Bei diesem Verfahren wird für den gesamten Aufnahmebereich nur eine einzige Approximation bestimmt. Die Genauigkeit wird nicht durch eine Bestimmung mehrerer virtueller Kameras an die Anforderungen angepasst.

Bildorientierungen mit 3D Affintransformationen sind ebenfalls Beispiele für eine Transformation eines nicht geradentreuen Abbildungsprozesses auf ein approximierendes, geradentreues Abbildungsmodell. In Okamoto, 1981 wurde bereits eine Affintransformation vorgestellt, um die Probleme eines schmalen Aufnahmewinkels zu bewältigen. Diese Methode wurde später zum Beispiel für SPOT Stereobilder (siehe Okamoto, 1998) angewendet und für verschiedene andere Dreizeilenkameras erfolgreich eingesetzt (siehe zum Beispiel auch Fraser, 2001).

Im Bereich des Computer Vision werden meist die Parameter der Inneren Orientierung in eine Kalibriermatrix K mit fünf Freiheitsgraden zusammengefasst. Nicht projektive Einflüsse können dabei nicht explizit berücksichtigt werden (siehe dazu auch Kapitel 3.3.1). Die Parameter der Objektivverzeichnung können durch eine bildraumabhängige Korrekturmatrix $d\mathsf{K}$ modelliert werden (Hartley & Zisserman, 2003 und Förstner, 2000). Wird keine solche Korrekturmatrix berücksichtigt, kann der Einfluss der Objektivverzeichnung durch die elf Freiheitsgrade der Pro-

jektionsmatrix P approximativ aufgefangen werden.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren greift dieses Prinzip der Berücksichtigung nicht projektiver Einflüsse durch projektive Parameter auf und erweitert es in den folgenden Punkten:

- das Prinzip wird für beliebige, nicht projektive Abbildungen verwendet,
- synthetische Passpunkte können beliebig über das Beobachtungsgebiet verteilt werden, wodurch eine gleichmäßige Verteilung der Einflüsse erreicht werden kann,
- die Güte der Gesamtapproximation kann durch eine Unterteilung des Beobachtungsraumes und einer Bestimmung lokal gültiger Approximationen positiv beeinflusst werden,
- es wird vorgeschlagen, die Approximation bei Forderung nach hoher Genauigkeit nur für Teilschritte der Verarbeitung der Bilddaten anzuwenden. Abschließend kann eine Parameterausgleichung unter Verwendung des strengen, physikalischen Modells durchgeführt werden.

Neben diesen zwei Hauptstrategien gibt es noch andere Vorgehensweisen. So zum Beispiel die Verwendung von phänomenologischen Modellen wie bei der Berechnung von Rationalen Funktionsmodellen (in der Literatur häufig als Rational Function Model zu finden) oder Rationalen Polynomkoeffizienten (Rational Polynomial Coefficients) als Orientierungsparameter von Zeilensensoren. Sie werden mit Hilfe der Parameter der strengen Modellierung bestimmt und können als gute Approximation des nicht perspektivischen Verhältnisses zwischen Objektraum und Bildraum verwendet werden. Damit kann eine dreidimensionale Stereoauswertung durchgeführt werden, ohne das strenge Modell mit einem Projektionszentrum für jede einzelne Zeile berücksichtigen zu müssen. Grodecki & Dial, 2003 beschreiben zum Beispiel eine Bündelausgleichung mit Rationalen Polynomkoeffizienten mit Anwendung für hochauflösende Satellitenbilder wie zum Beispiel IKONOS Bilder.

Kapitel 6

3D Punktzuordnung in einem Mehrbildverband für projektive und nicht projektive Abbildungen

Die Einsatzmöglichkeiten des in Kapitel 5 vorgestellten Verfahrens zur Approximation einer nicht projektiven Abbildung mit objektraumbasierter Verzeichnung durch eine virtuelle projektive Kamera wird für das Problem der dreidimensionalen Objektrekonstruktion in einem Mehrbildverband getestet. Dazu wird zunächst ein neues, rein geometrisch und merkmalsbasiertes Zuordnungsverfahren im Objektraum vorgestellt, das prinzipiell unter Verwendung eines beliebigen, strengen Abbildungsmodells oder eines approximativen Modells anwendbar ist.

Die zentrale und im Allgemeinen komplexeste Aufgabe einer Objektrekonstruktion ist die Zuordnung homologer Bildelemente. Wir wenden die Approximation nur für diesen Schritt an. Da die eigentliche dreidimensionale Punktbestimmung erst nach der Zuordnung separat durchgeführt werden kann, reicht ein gutes Approximationsmodell für den Schritt der Zuordnung aus. Die benötigten Schwellwerte können entsprechend größer gewählt werden, da etwaige resultierende Falschzuordnungen in einem abschließenden statistischen Hypothesentest und dem strengen Modell eliminiert werden können.

Eine Zuordnung kann prinzipiell im Bildraum oder im Objektraum durchgeführt werden. Eine Zuordnung im Bildraum verhindert eine simultane, von der Reihenfolge der Bilder unabhängige Verarbeitung aller Bilder. Da jedoch keine signifikante Veränderung des Objektraumes zwischen den Aufnahmen besteht, ist es sinnvoll, alle Bilder eines Objektpunktes nach Möglichkeit auch simultan zu verarbeiten. Dies wird durch eine Zuordnung im Objektraum ermöglicht.

Eine geometrisch basierte Zuordnung im Objektraum fundiert auf der folgenden geometrischen Eigenschaft von Abbildungsstrahlen:

Alle n Raumstrahlen, die innerhalb eines Mehrbildverbandes von einer Gruppe homologer Punkte und den zugehörigen Projektionszentren aufgespannt werden, schneiden sich in einem Objektpunkt.

Der Vorteil einer rein geometrisch basierten Zuordnung ist, dass nach einer a priori Punktextraktion nur die geometrischen Informationen eines Bildpunktes während der Auswertung gespeichert und berücksichtigt werden müssen. Bei Bedarf lassen sich grundsätzlich auch zusätzliche Informationen und Merkmale der Bildpunkte, wie Form, Farbe, Größe usw. leicht in die Zuordnung und den Test von Zuordnungshypothesen integrieren.

Das Verfahren der Bildpunktzuordnung ist nicht Schwerpunkt dieser Arbeit. Es dient vielmehr dazu, die Implementation der phänomenologischen Approximation in einen Auswerteprozess zu evaluieren. Um die Qualitätstests für die Approximation beurteilen zu können, ist es jedoch notwendig, den Algorithmus in seinen Grundzügen vorzustellen. Das Zuordnungsverfahren wird nur insofern getestet, dass ein signifikanter Einfluss auf die Qualität der Approximation und dem Vergleich der Ergebnisse zu Referenzdaten durch den Zuordnungsalgorithmus ausgeschlossen werden kann. Eine detaillierte Prüfung muss an anderer Stelle durchgeführt werden. Der Algorithmus ist so umgesetzt, dass sowohl das streng physikalische, als auch das approximierende Abbildungsmodell für die Berechnungen eingesetzt werden kann. Somit sind vergleichende Qualitätstests einfach durchführbar.

6.1 Grundlagen der Punktzuordnung in einem Mehrbildverband

Die Bestimmung von dreidimensionalen Informationen aus zweidimensionalen Bilddaten hat sich aufgrund heutiger technischer Möglichkeiten und Anforderungen schon seit einigen Jahren von einer Zweibildtechnik hin zu einer Mehrbildtechnik entwickelt. Dadurch ist zum einen die Wahrscheinlichkeit des Verlustes von Informationen durch Verdeckungen geringer und zum anderen grundsätzlich eine höhere Genauigkeit, Robustheit und Zuverlässigkeit zu erwarten. In einzelnen Fällen, wie zum Beispiel der Zuordnung aufgrund von rein geometrischen Bedingungen, ist durch einen Mehrbildverband eine Zuordnung überhaupt erst möglich. Auch die digitale Bildzuordnung von Linien wird durch die simultane Verwendung von mindestens drei Bildern erst realisierbar. Als sogenannte Verfahren der Mehrbildtechniken gelten dabei nur solche Verfahren, die für mehr als zwei Bilder simultan anwendbar sind. Eine Wiederholung eines Verfahrens für zwei Bilder, angewendet auf verschiedene Kombinationen der Bilder, zählen wir nicht dazu.

Theoretisch gesehen kann ein Mehrbildverband aus einer beliebigen Anzahl von Bildern bestehen, jedoch sollte ein sinnvolles Verhältnis zwischen der Anzahl der Bilder, der Anzahl homologer Punkte in einer Zuordnungsgruppe, dem Rechenzeitaufwand und der Robustheit gefunden werden. Je nach Aufnahmekonstellation erhöht sich ab einer bestimmten Anzahl Bilder die Rechenzeit, ohne dass sich die Robustheit weiter verbessert oder neue, markante Punkte bestimmt werden können.

Im Allgemeinen setzen wir für das verwendete Bildmaterial die Anforderungen nach Förstner, 1986 und Dreschler-Fischer, 1987 für eine Merkmalszuordnung voraus: gute Auffindbarkeit der Merkmale, Robustheit der Merkmale gegenüber geometrischen und radiometrischen Einflüssen, eine eindeutige Beschreibbarkeit der Elemente durch ihre Attribute und eine nicht zu hohe Dichte der Bildmerkmale, so dass Mehrdeutigkeiten nicht überhand nehmen.

Die Verfahren können nach verschiedenen Kriterien charakterisiert werden. Die folgenden Kriterien sind dabei innerhalb unseres Kontextes von besonderer Bedeutung:

1. *Basis der Zuordnung*:
   Nach Shapiro & Harlik, 1987 können drei grundlegende Gruppen von Zuordnungsverfahren unterschieden werden:
   - merkmalsbasierte Bildzuordnung (feature based matching)
   - flächenbasierte Bildzuordnung (area based matching)
   - relationale Zuordnungsverfahren (relational matching).

2. *Anzahl der simultan verwendeten Bilder*:
   Das Verfahren ist so konzipiert, dass es eine beliebige Anzahl Bilder bearbeiten kann.

3. *Ort der Bildzuordnung*:
   Eine Bildzuordnung kann sowohl im Objektraum, als auch im Bildraum durchgeführt werden (siehe Lang & Förstner, 1998). Um die Zuordnung im Mehrbildverband simultan durchführen zu können, wird die Zuordnung im Objektraum durchgeführt.

4. *Abhängigkeit der Ergebnisse von der Reihenfolge der Bilder*:
   Die Ergebnisse eines Zuordnungsalgorithmus können je nach Zuordnungsstrategie abhängen von der Wahl der Referenzbilder sein. Insbesondere bei merkmalsbasierten Zuordnungsverfahren führt eine Abhängigkeit von der Reihenfolge der Bilder zu einem kombinatorischen Problem mit hoher Rechenkomplexität. Um diesen Einfluss zu umgehen, wird der Algorithmus mit unterschiedlichen Masterbildern durchgeführt und die Ergebnisse zusammen ausgewertet.

6.1.1 Problematik der Mehrdeutigkeiten

Eines der Hauptprobleme der Bildzuordnung, insbesondere für die Verarbeitung von zwei Bildern, ist das auftreten von Mehrdeutigkeiten. Die Ursache dafür ist von zufälliger Natur und hängt in erster Linie von der Anzahl der Punkte und ihrer Verteilung im Raum ab. Eine Mehrdeutigkeit kann einen sogenannten *Geisterpunkt* erzeugen, der keinem realen Objektpunkt entspricht und aus einer falschen Zuordnungsgruppe berechnet wird. Ein solcher Punkt lässt sich nicht durch statistische Prüfungen der Schnittbedingung detektieren und führt somit zu einem falschen Objektpunkt. Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Fehlers zweiter Art kann dadurch verringert werden, dass a priori Objektinformationen berücksichtigt werden, wie zum Beispiel die Annahme einer glatten Oberfläche. Es können auch andere Informationen hinzugezogen werden wie zum Beispiel weitere geometrische Relationen oder Farbwerte.

Für eine rein geometrische Zuordnung von Bildelementen ist die Anzahl von Mehrdeutigkeiten insbesondere bei der Verwendung von nur zwei Bildern ein großes Problem (siehe Maas, 1997). Trotz Anwendung der Epipolargeometrie und Reduzierung der Länge der Epipolarlinien (siehe Kapitel 3.7), reichen zwei Bilder nicht aus, um die Wahrscheinlichkeit von Mehrdeutigkeiten und damit die Inkonsistenz der Ergebnisse gering zu halten.

In Maas, 1992b wird die Wahrscheinlichkeit P_a von Mehrdeutigkeiten in einem Zweibildverband, die nicht allein durch geometrische Kriterien gelöst werden können, wie folgt angegeben:

$$P_a = 1 - e^{-\left(n \cdot \frac{f}{F}\right)}$$

mit

F: Bildfläche
n: Anzahl Punkte im Bild
$f = 2\epsilon \cdot l_{12}$: Fläche des epipolaren Suchbereichs
l_{12}: Länge des epipolaren Suchbereichs
ϵ: seitliche Toleranz zur Epipolarlinie.

Damit bestimmt sich die wahrscheinliche Gesamtzahl ${}^2N_a$ von Mehrdeutigkeiten in einem Bildpaar in Abhängigkeit von der Anzahl Punkte pro Bild, der Kammerkonstante c, der Toleranz zur Epipolarlinie ϵ, der Basis im Objektraum b_{12}, der Sensorfläche F und den durch die Näherungswerte vorgegebenen Tiefenbereich im Objektraum ($Z_{min} < Z < Z_{max}$) zu

$$^2N_a = (n^2 - n) \cdot \frac{2 \cdot c \cdot \epsilon \cdot b_{12} \cdot (Z_{max} - Z_{min})}{F \cdot Z_{min} \cdot Z_{max}}. \tag{6.1}$$

Stehen keine guten Näherungswerte der Objektausdehnung zur Verfügung, treten bei einer Zuordnung aufgrund der Epipolarbedingung nach Gleichung (6.1) vermehrt Mehrdeutigkeiten auf.

Die Möglichkeiten und Wahrscheinlichkeiten von Mehrdeutigkeiten beim Epipolarlinienschnitt in drei Bildern werden in Maas, 1992a diskutiert. Die wahrscheinliche Anzahl nicht lösbarer Mehrdeutigkeiten für ein Aufnahmesystem mit drei Kameras im Epipolarlinienschnittverfahren ergibt sich danach zu

$$^3N_a = \frac{\cdot (n^2 - n) \cdot \epsilon^2}{F \cdot sin\alpha} \cdot \left(1 + \frac{b_{12}}{b_{23}} + \frac{b_{12}}{b_{13}}\right) \tag{6.2}$$

mit b_{12}, b_{13}, b_{23} : Basiskomponenten
α : Schnittwinkel der Epipolarlinien im dritten Bild.

Die Anzahl nicht lösbarer Mehrdeutigkeiten können bei der Zuordnung durch eine dritte oder vierte Kamera jeweils mindestens um eine Größenordnung verringert werden. Die Anzahl verbleibender Mehrdeutigkeiten wächst bei der Dreibildlösung nach Gleichung 6.2 und bei der binokularen Lösung mit dem Quadrat der Anzahl von Punkten im Bildraum. Sie wird aber weitgehend unabhängig von der Länge der Epipolarlinie und damit von der Verfügbarkeit von Näherungswerten und der Basislänge.

Eine größere Anzahl Bilder verhindert insbesondere bei einer rein geometrisch basierten Zuordnung die Wahrscheinlichkeit von Mehrdeutigkeiten. Sie erhöht aber auch die Rechenkomplexität einer Merkmalszuordnung und der Konsistenzprüfung auf Mehrdeutigkeiten. Dieses kombinatorische Problem gilt es bei der Entwicklung eines Mehrbildalgorithmus zu berücksichtigen. Bei den praktischen Experimenten innerhalb dieser Arbeit wurde mit vier Kameras gearbeitet und als notwendige Bedingung für einen realen Objektpunkt die Darstellung und Zuordnung von Punkten in mindestens drei Bildern verlangt. Damit konnte eine hinreichende Reduzierung der Mehrdeutigkeiten erreicht werden.

6.2 Simultane, geometrische Bildpunktzuordnung in einem Mehrbildverband

In diesem Kapitel wird das geometrisch und merkmalsbasierte Zuordnungsverfahren mit einer Verifizierung der Zuordnungshypothesen im Objektraum vorgestellt. Durch die Hypothesenprüfung im Objektraum wird eine simultane Zuordnung der Punkte aller Bilder ermöglicht. Die Zuordnungsstrategie wird hier am Beispiel für Punkte vorgestellt, ist aber auch auf andere Bildmerkmale übertragbar.

6.2.1 Verfahrensstrategie

Wie wir in Kapitel 6.1.1 gesehen haben, kann eine deutliche Verringerung von Mehrdeutigkeiten durch die Verwendung von mindestens drei Bildern für die Bildpunktzuordnung erreicht werden. Ist von möglichen Fehlzuordnungen auszugehen, so erhalten wir für die Einschränkung der Mehrdeutigkeiten allein aufgrund von geometrischen Bedingungen folgende *notwendige Bedingung* für eine Zuordnung von Bildpunkten:

Um einen Objektpunkt mit einem rein geometrisch basierten Zuordnungsverfahren dreidimensional bestimmen und mögliche Fehlzuordnungen verringern zu können,

muss der Punkt in mindestens drei Bildern abgebildet sein. Bei einer Zuordnung im Raum müssen sich also mindestens drei Raumstrahlen in einem Punkt schneiden.

Je mehr Raumstrahlen sich schneiden, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Objektpunkt handelt und nicht um einen Geisterpunkt.

Als hinreichende Bedingung gilt die Konsistenz der Menge der Zuordnungsgruppen, die durch eine Konsistenzprüfung oder durch die Verwendung zusätzlicher geometrischer oder radiometrischer Zuordnungsbedingungen erreicht werden kann.

Aufgrund der oben erwähnten Überlegungen über Eigenschaften von Zuordnungsverfahren, Strategien und Taktiken stellen wir folgende Anforderungen an das hier entwickelte Verfahren und seine Implementation:

- Verarbeitung von beliebig vielen Bildern,
- simultane Verarbeitung aller Bilder,
- Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Reihenfolge der verarbeiteten Bilder,
- Minimierung der notwendigerweise berechneten Kombinationen der Zuordnungen,
- Verwendung der Anzahl der Elemente in einer Zuordnungsgruppe als Wahrscheinlichkeitsmaß,
- einfache Implementation beliebiger Abbildungsmodelle,
- Möglichkeit zur einfachen Integration von zusätzlichen geometrischen und radiometrischen Bedingungen,
- Berücksichtigung einer maximalen und minimalen Ausdehnungen im Objektraum (falls bekannt) für eine Reduzierung der Epipolarliniensuchbereiche im Bildraum und der Rechenkomplexität.

6.2.2 Verfahrensablauf

Die einzelnen Schritte des Zuordnungsalgorithmus für ein beliebiges Abbildungsmodell ohne expliziter Berücksichtigung des Approximationsmodells sind in Abbildung 6.1, Seite 75 in ihren Grundzügen zusammengefasst. Der jeweilige Aktionsraum (Bild- oder Objektraum) ist hervorgehoben. Abbildung 6.2, Seite 76 unterstützt die Darstellung der Prinzipien mit Graphiken zu den einzelnen Schritten.

Schritt 1 *Bestimmung Masterbild*

Schritt 2 und 3 *Aufstellung von Hypothesen im Bildraum*: Ausgehend von dem Masterbild werden mit Hilfe der Methoden der Epipolargeometrie im Bildraum Zuordnungshypothesen zu jedem Bildpunkt des Masterbildes Hypothesen homologer Punkte bestimmt.

Schritt 4 und 5 *Erster Hypothesentest im Objektraum*: Danach werden für jeden Abbildungsstrahl der Punkte des Masterbildes die Schnittpunkte mit den Abbildungsstrahlen der hypothetischen homologen Punkte in den anderen Bildern bestimmt. Wir erhalten entsprechend der Anzahl von Hypothesen zu einem Bildpunkt Objektpunkte entlang des Abbildungsstrahls. Es folgt ein Hypothesentest durch Gruppierung entlang des zweidimensionalen Raumes eines Abbildungsstrahls. Für die Forderung, dass ein Objektpunkt in mindestens 3 Bildern zu sehen ist, müssen mindestens

2 Punkte entlang dieses Raumstrahls eine Gruppe bilden. Hierfür wird ein Schwellwert ϵ_1 für die Distanz der Punkte einer Gruppe benötigt. Gruppen mit nur einem Element werden eliminiert. Wir erhalten einen Satz von Objektpunkten, die jeweils zwei homologe Punkte repräsentieren.

Schritt 6 *Wiederholung aller bisherigen Schritte für alle Masterbilder*: Hier kann eine minimale Anzahl von Masterbildern verwendet werden. Test in einem vierer Bildverband haben gezeigt, dass sich die Anzahl der rekonstruierten Objektpunkte bei mehr als 2 Masterbildern nicht signifikant verbessert (siehe dazu (Wolff & Förstner, 2000b)).

Schritt 7 *Zweiter Hypothesentest im Objektraum*: Auch dieser Hypothesentest wird durch eine Gruppierung, diesmal innerhalb einer dreidimensional angeordneten Punktwolke, im Objektraum durchgeführt. Die eingehenden Objektpunkte repräsentieren jeweils homologe Bildpunkte in zwei Bildern. Für die Bedingung der Gruppierung muss wiederum ein Schwellwert ϵ_2 für den Abstand der Punkte einer Gruppe und eine Mindestanzahl von Punkten angegeben werden. Wir erhalten einen Satz von Objektpunkten, wobei jeder alle homologen Punkte eines Objektpunktes repräsentieren. Für die Realisierung dieses Gruppierungsverfahrens wurde das k-means Clustering eingesetzt (siehe dazu Anhang E). Hierbei ist es wichtig, die Schwellwerte entsprechend den geforderten Genauigkeiten zu bestimmen.

Schritt 8 und 9 *Konsistenzprüfung im Bildraum und statistischer Hypothesentest:* Gegeben ist eine Menge von Objektpunkten und die dahinterstehenden Zuordnunghypothesen im Bildraum. Eine Konsistenzprüfung prüft, ob ein Bildpunkt zu mehr als einem Objektpunkt gehört. Wenn ja, so wird die Zugehörigkeit über einen statistischen Test der Schnittbedingung der Abbildungsstrahlen festgestellt. Um eine hohe Rekonstruktionsgenauigkeit zu erhalten, wird eine Berechnung des Vorwärtsschnitts zusammen mit dem Hypothesentest der Schnittbedingung für alle Objektpunkte durchgeführt. Für die Realisierung eines solchen Hypothesentests im Falle von projektiven Abbildungen siehe zum Beispiel Heuel, 2004. Im Fall eines approximierenden Abbildungsmodells für den Schritt der Bildzuordnung kann für diesen Schritt das strenge Abbildungsmodell verwendet werden. Dadurch wird die volle Genauigkeit, die das strenge Modell bieten kann, für die Punktbestimmung erhalten.

Im Kapitel 6.4 wird die Implementation des projektiven Approximationsmodells in den Prozess einer dreidimensionalen Punktbestimmung im Detail behandelt.

6.2.3 Hypothesentests

In dem hier beschriebenen Verfahren werden bei vier Schritten Hypothesentests im Objektraum durchgeführt:

1. Gesucht sind die homologen Bildpunkte zwischen dem Masterbild und den anderen Bildern. Hypothesentestfrage: liegt ein Bildpunkt ${}^{l}\mathcal{X}$ auf der Epipolarlinie ${}^{l}\mathcal{l}({}^{k}\mathcal{X}_j)$ im Bild l?

2. Test, ob Punkte, die jeweils Hypothesen homologer Bildpunkte in zwei Bildern repräsentieren und entlang eines Raumstrahles liegen, einen Objektpunkt bilden (Gruppierung der Punkthypothesen). Hypothesentestfrage: besitzen die Punkte entlang des Raumstrahls die gleiche Position und entspricht die Anzahl der Punkte der Mindestforderung (zum Beispiel zwei Punkte, falls der Objektpunkt in mindestens drei Bildern zu sehen sein soll).

3. Gruppierung aller Objektpunkthypothesen $\mathcal{H}\mathcal{X}_3({}^{s}\mathcal{X}_j)$, die für die verschiedenen Masterbilder bestimmt worden sind zu jeweils einer Objektpunkthypothese, beziehungsweise der durch sie repräsentierten endgültigen Bildpunktzuordnung. Hypothesentestfrage: besitzen die Objektpunkthypothesen die gleiche Position und entspricht die Anzahl der Punkte der Mindestforderung?

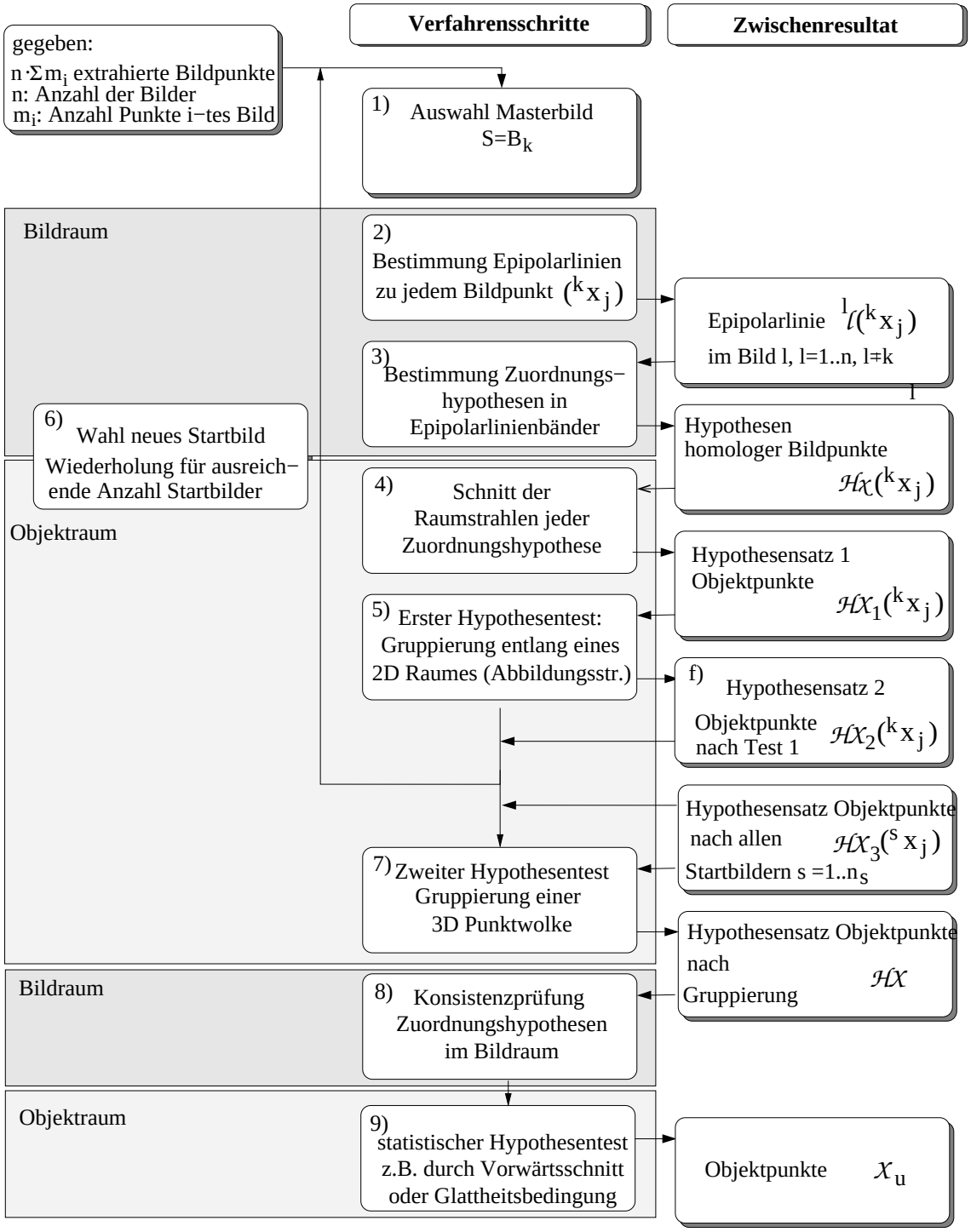
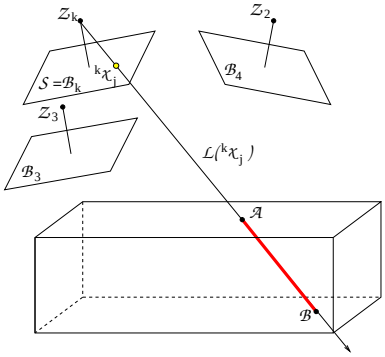
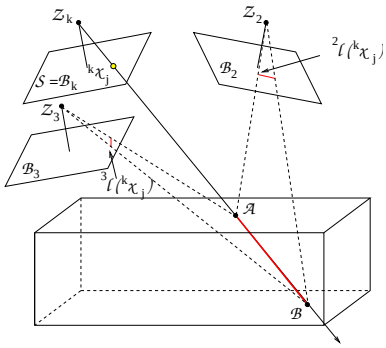


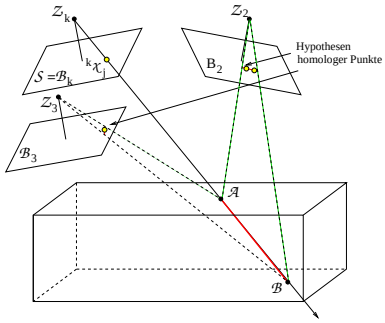
Abbildung 6.1: **Algorithmus 2***: Bildpunktzuordnung im Objektraum für Mehrbildverbände. Siehe auch Abbildung 6.2*



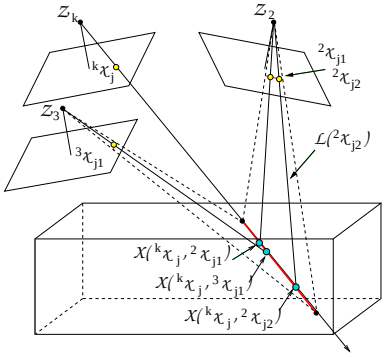
(a) Auswahl eines Masterbildes



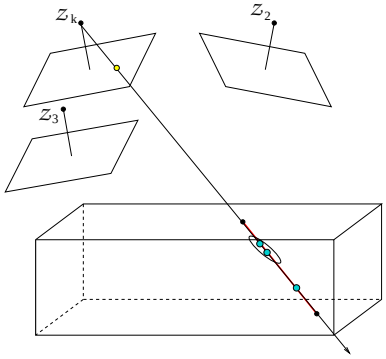
(b) Bestimmung Epipolarlinien (Schritt 2)



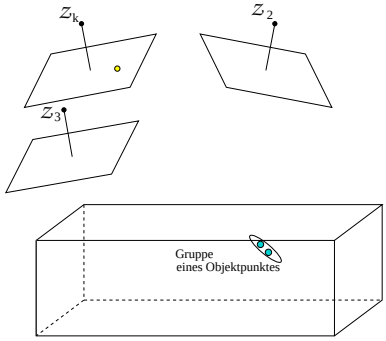
(c) Zuordnungshypothesen (Schritt 3)



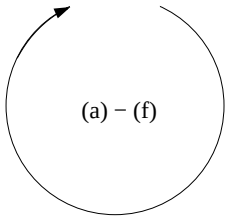
(d) Schnitt Raumstrahlen(Schritt 4)



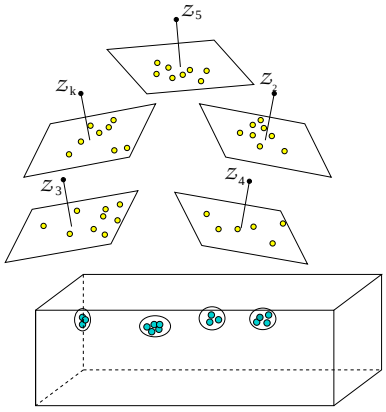
(e) Erster Hypothesentest: Gruppierung entlang des Abbildungsstrahls (Schritt 5)



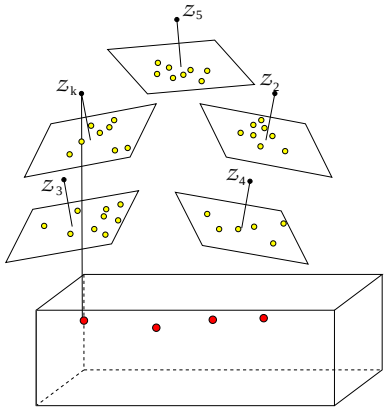
(f) Objektpunkt- und Zuordnungshypothesen



(g) Wiederholung der Schritte (a) bis (f) für verschiedene Masterbilder (Schritt 6)



(h) Zweiter Hypothesentest: Gruppierung der 3D Punktwolke (Schritt 7)



(i) Objektpunkte

Abbildung 6.2: *Veranschaulichung einzelner Schritte des Verfahrensablaufs. Abbildung a) - f) stellen nur eine Auswahl von drei Bildern des Bildverbandes dar. Siehe auch Abbildung 6.1*

4. Abschließender Test, welche Objektpunkthypothesen einem Objektpunkt entsprechen. Bei diesem Test können unterschiedliche Informationen in die Fragestellung einfließen. Beispiel für Hypothesentestfrage: schneiden sich die Abbildungsstrahlen der Zuordnungshypothesen in einem Objektpunkt? Zusatzfrage im Falle einer glatten Oberfläche: bilden die rekonstruierten Objektpunkte eine glatten Oberfläche?

Bei den verschiedenen Hypothesentests wird in allen Fällen eine geometrische Relation zwischen geometrischen Elementen untersucht. Dies führt im Allgemeinen dazu, dass eine Distanz $d \neq 0$ bestimmt wird. Nach der Wahl eines Schwellwertes ϵ wird getestet, ob $d < \epsilon$ ist. Wird für ϵ ein fixer Wert gewählt, wie es auch hier zunächst realisiert worden ist, ist die Lösung nicht optimal, da sie nicht abhängig ist von der Position der Elemente und ihrem Konfidenzinterval. Heuel stell in (Heuel, 2004) eine Methode vor, um mit Hilfe von Hypothesentests einen Wert für ϵ zu bestimmen, die diese beiden Punkte mit berücksichtigt.

6.3 Charakterisierung des Verfahrens

6.3.1 Steuerparameter

Für den Ablauf des Zuordnungsalgorithmus werden verschiedene Steuerparameter benötigt, die die Rechenzeit und das Ergebnis beeinflussen können. Wir unterscheiden dabei zwischen den Parametern, die die Rechenzeit und solchen, die die Ergebnisse beeinflussen. Für die einzelnen Schritte siehe Abbildung 6.1.

Primär für die Einschränkung der Rechenzeit sind verantwortlich:

1. Innerhalb Schritt 2: Wahl der ***Anzahl der Segmente der Epipolarlinien***, die im Fall einer nicht perspektivischen Abbildung mit objektraumbasierter Verzeichnung in ein Bild projiziert werden müssen. Dieser Parameter ist abhängig von der Abweichung des strengen Abbildungsmodells von dem projektiven Modell.

2. Innerhalb Schritt 3: Die Größe einer ***einschränkenden Tiefenausdehnung***, so dass nur entlang kürzeren Epipolarlinienteilstücken gesucht werden muss. Diese Information kann zum Beispiel im Nahbereich aufgrund der Aufnahmekonstellation als bekannt vorausgesetzt werden. Im Rahmen einer Luft- oder Satellitenbildauswertung kann sie aus anderen Datensätzen, wie zum Beispiel Kartenmaterial mit Höhenangaben oder vorhandenen DTMs entnommen werden oder aus einem Vorverarbeitungsschritt aus höheren Pyramidenstufen als Näherungswerte bestimmt werden.

Steuerparameter, die primär die Anzahl der rekonstruierten Punkte beeinflussen können:

1. Innerhalb Schritt 3: Die ***Breite des Suchbandes*** entlang der Epipolarlinien. Dieser Parameter kann entsprechend den zu erwartenden Genauigkeiten im Bildraum bestimmt werden.

2. Innerhalb Schritt 5: Für die Gruppierung des ersten Hypothesentests wird eine ***maximale euklidische Distanz für zwei Punkte entlang des Abbildungsstrahles*** als Schwellwert benötigt.

3. Innerhalb Schritt 7: Für die Gruppierung des zweiten Hypothesentests wird eine ***maximale Distanz eines Punktes jeder Gruppe zu ihrem Schwerpunkt*** als Schwellwert für die Zugehörigkeit einer Gruppe benötigt.

4. Innerhalb Schritt 9: Für den statistischen Hypothesentest der ***Genauigkeit des Schnittes der 3D Raumgeraden*** kann eine maximale Fehlerschranke eingebaut werden.

Die letzte Gruppe der Parameter hängt von der zu erwartenden a priori Genauigkeit des Systems und der notwendigen Genauigkeit ab. Dem entsprechend müssen die Schwellwerte entweder für den ganzen Bereich fix, oder mittels Hypothesentests entsprechend den Konfidenzintervallen der geometrischen Objekten angepasst werden (siehe Kapitel 6.2.3).

6.3.2 Merkmale des Algorithmus

Folgenden a priori Merkmale des Algorithmus können zusammengefasst werden:

- Die Zuordnung der zuvor extrahierten Bildpunkte ist rein geometrisch basiert.
- Die minimale Anforderung an einen Objektpunkt für seine Bestimmbarkeit ist seine Abbildung in mindestens drei Bildern. Soll die Zuverlässigkeit verbessert werden, so kann diese Anzahl erhöht werden.
- Die finale Zuordnung der Punkte findet im Objektraum statt, dadurch werden alle Bilder simultan verarbeitet. Dies ermöglicht eine Quasi-Unabhängigkeit von der Reihenfolge der Bilder. Das Ergebnis wird nur durch die Anzahl der Masterbilder verändert.
- Durch die voneinander unabhängige Berechnung für die verschiedenen Masterbilder ist dieser Algorithmus für eine Berechnung mit Parallelrechnern geeignet.
- Die Ergebnisse der Zuordnung vor dem abschließenden Hypothesentest können als sehr gute Näherungswerte für die Objektpunktkoordinaten weiter verwendet werden.
- Da die Zuordnung allein auf geometrischen Bedingungen basiert, hängt die Anzahl der Mehrdeutigkeiten und ihrer Zuverlässigkeit von der Dichte und der Verteilung der Punkte im Raum ab. Die besten Ergebnisse sind zu erwarten, wenn es sich um eine glatte 2.5D Oberfläche handelt, bei der keine Verdeckungen innerhalb der Bilder existieren und deren extrahierte Punkte gleichmäßig verteilt sind.

Bei der hier durchgeführten Analyse des Algorithmus mit realen Daten sind die speziellen Rahmenbedingungen der Aufgabenstellung mit zu berücksichtigen. So handelt es sich zum Beispiel bei dem Beobachtungsobjekt um eine glatte Oberfläche ohne Verdeckungen.

6.4 Integration des phänomenologischen Approximationsmodells für eine 3D Punktbestimmung

6.4.1 Realisierung der Integration

Der Zuordnungsalgorithmus ist grundsätzlich unabhängig von dem zugrunde liegenden Abbildungsmodell und daher allgemein anwendbar. Liegt dem Abbildungsprozess eine nicht projektive Abbildung zugrunde, so ist es möglich den Schritt der Zuordnung durch das hier vorgestellte

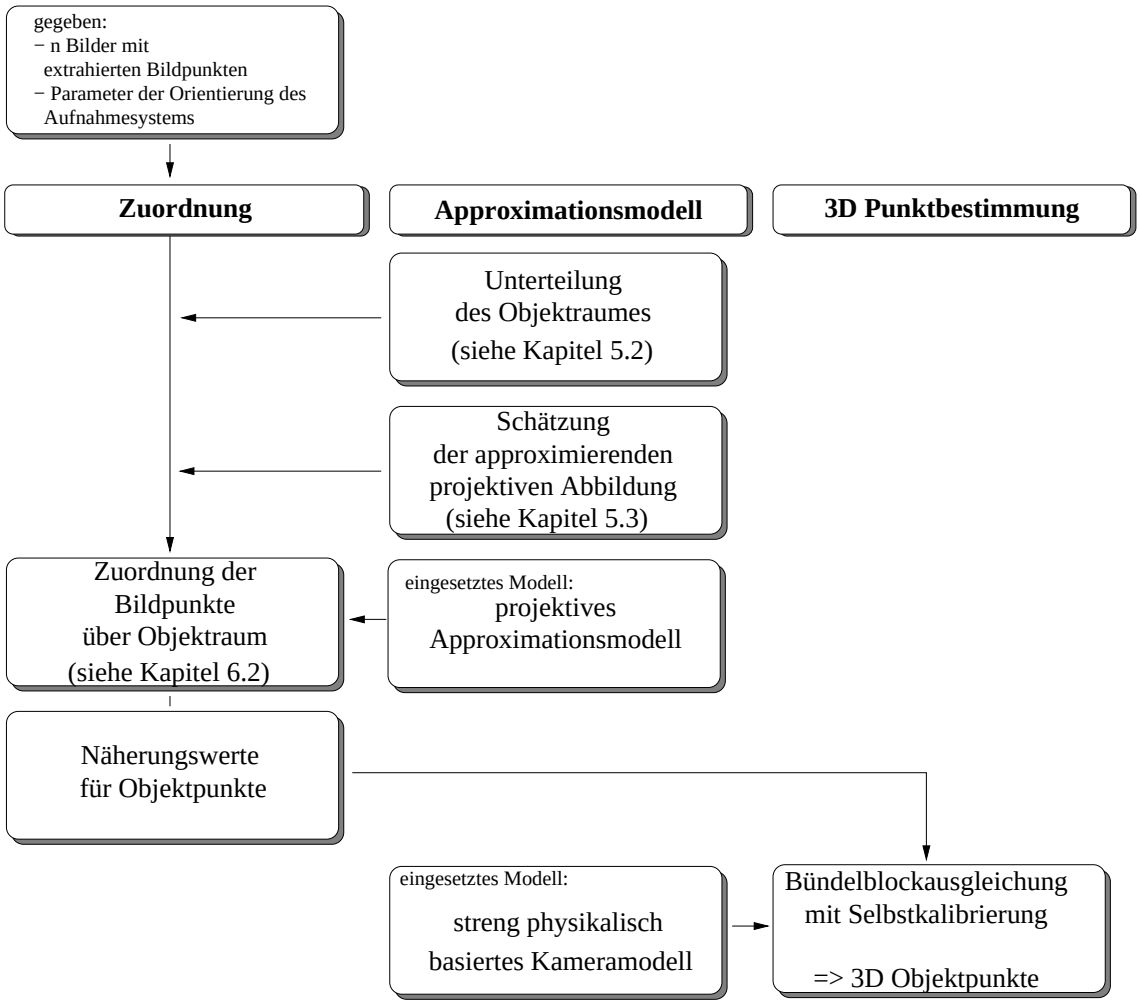


Abbildung 6.3: *Implementation des projektiven Approximationsmodells in die Bildpunktzuordnung zur 3D Punktbestimmung.*

Approximationsmodell zu vereinfachen. Abbildung 6.3, Seite 79, stellt die Schritte dieser Implementation schematisch dar. Hierbei ist zwischen dem Zuordnungsalgorithmus, den Schritten für die Implementation der Approximation und der Implementation in den Prozess der dreidimensionalen Punktbestimmung zu unterscheiden. In einem ersten Schritt wird die Approximation bestimmt, die dann für die Bildzuordnung angewendet wird. Anschließend wird eine Bündelblockausgleichung unter Verwendung des strengen physikalischen Abbildungsmodells durchgeführt. Die während der Zuordnung bestimmten Objektpunkt X_u können dabei als Näherungswerte weiter verwendet werden. Statistische Ausreißer können durch statistische Hypothesentests eliminiert werden.

6.4.2 Reduktion der Rechenkomplexität durch die Approximation

Innerhalb eines Bildpunktzuordnungsverfahrens in einem Mehrbildverband ist die Rechenzeit primär abhängig von:

1. der Komplexität des streng physikalischen Abbildungsmodells,

2. der Anzahl der Bilder,
3. der Anzahl der extrahierten Bildpunkte,
4. der Implementation des Algorithmuses und
5. der Rechenleistung des eingesetzten Rechners.

Durch die Verwendung des projektiven Abbildungsmodells als Approximation für den komplexen Schritt der Bildpunktzuordnung reduziert sich die Rechenkomplexität signifikant, was insbesondere für Echtzeitberechnungen trotz leistungsstarker Rechner nach wie vor von Bedeutung sein kann.

Um einen unabhängigen Vergleich zwischen den beiden Methoden durchführen zu können, wird nur die Projektion zwischen dem Objekt- und dem Bildraum in beide Richtungen verglichen und keine weiteren Berechnungen hinzugezogen. Um die Berechnungen einfach und übersichtlich zu gestalten wird die Kalibriermatrix K gleich der Einheitsmatrix gesetzt. Da eine absolute Rechenzeit von der Rechnerleistung abhängig ist, geben wir die Zeiten in einer beliebigen Zeitskala mit unbestimmter Zeiteinheit [ze] an. Um ein repräsentatives Ergebnis zu bekommen, werden die Berechnungen der Projektionen jeweils mit einer sehr hohen Anzahl von Wiederholungen berechnet.

Als Rechenbeispiel verwenden wir hier den Zweimedienfall, bei dem die Lichtbrechnung nur einmal berechnet werden muss. Für die einzelnen Berechnungen siehe auch Kapitel 3.6.2.

Für die Bilderzeugung werden folgende Berechnungen durchgeführt:

1. Iterative Berechnung eines Hilfsobjektpunktes in einem lokalen System, der projektiv in die Bildebene projiziert werden kann (hier 4 Iterationen),
2. Transformation des Hilfsobjektpunktes vom lokalen System in das Objektsystem,
3. Transformation des Hilfsobjektpunktes in das Bildsystem.

   Rechenzeit: 13 [ze]

Für die Bilderzeugung mit dem projektiven Modell werden folgende Berechnungen durchgeführt:

1. Transformation des Objektpunktes vom Objekt- in das Bildsystem.

   Rechenzeit: 2 [ze]

Für die Bildinversion mit dem Zweimedienmodell werden folgende Berechnungen durchgeführt:

1. Definition des Richtungsvektors, aufgespannt durch Projektionszentrum und Bildpunkt,
2. Transformation des Richtungsvektors in das Objektsystem,
3. Berechnung des Brechungspunktes auf der ersten Grenzfläche,
4. Berechnung des Richtungsvektors nach der ersten Brechung,
5. Berechnung des Brechungspunktes auf der zweiten Grenzfläche,

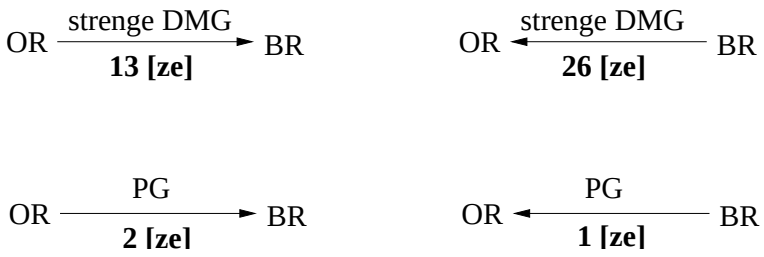


Abbildung 6.4: *Rechenzeiten der Projektionen zwischen dem Objektraum (OR) und dem Bildraum (BR), angegeben in einer freien Zeitskala mit einer unbestimmten Einheit [ze]. Als Beispiel ist eine Dreimediengeometrie (DMG) gewählt worden. Um die Effektivität der Approximation durch ein projektives Modell (PG) zu unterstreichen, wurden die Rechenzeiten unter Verwendung des approximativen Verfahrens und des strengen Verfahrens berechnet. Links: Bilderzeugung, rechts: Bildinversion.*

6. Berechnung des Richtungsvektors nach der zweiten Brechung (im Objektraum).

   Rechenzeit: 26 [ze]

Für die Bildinversion mit dem projektiven Modell werden folgende Berechnungen durchgeführt:

1. Definition des Richtungsvektors, aufgespannt durch Projektionszentrum und Bildpunkt,
2. Transformation des Richtungsvektors in das Objektsystem.

   Rechenzeit: 1 [ze]

Deutlich ist der Unterschied der Rechenzeiten zwischen dem strengen Dreimedienmodell und dem einfachen projektiven Modell zu erkennen. Für die Bilderzeugung wurde der Faktor 7.5 und für die Bildinversion sogar der Faktor 26 festgestellt. Diese Werte sind nicht absolut und allgemein gültig, sondern für den speziellen Anwendungsfall und der Implementation der Projektionen gültig. Jedoch geben sie einen tendenziellen Hinweis auf die Rechenzeitverkürzung. Einen großen Einfluss auf die Rechenzeit im Falle der Mehrmediengeometrie besitzt die komplexe, numerische Berechnung von Wurzeln, die bei einem projektiven Modell nicht anfällt. Damit lässt sich auch der auffällige Zeitunterschied zwischen der Bildinversion und -erzeugung für den Zweimedienfall erklären. Hier könnte erwartet werden, dass die Bilderzeugung der komplexere Schritt ist, da eine iterative Berechnung durchgeführt werden muss und für die Bildinversion nur eine Strahlenverfolgung. Jedoch muss bei der Projektion des Bildpunktes in den Objektraum mit dem Faktor vier häufiger eine Wurzel berechnet werden, was einen signifikanten Einfluss auf die Rechenzeit besitzt.

Abbildung 6.4 zeigt eine Übersicht über die einzelnen Rechenzeiten.

Kapitel 7

Beispiele und Qualitätsanalysen

Für die Qualitätsanalyse werden die folgenden drei methodischen Hauptaspekte untersucht:

- Algorithmen und Methoden zur Bestimmung eines allgemeingültigen, linearen Approximationsmodells für beliebige optische Abbildungen,
- ein neues, geometrisch basiertes Zuordnungsverfahren im Mehrbildverband,
- die Implementation der Approximation in den Zuordnungsalgorithmus.

Den Schwerpunkt der Untersuchungen legen wir auf die Approximation und deren Anwendung. Die Leistungsfähigkeiten des Zuordnungsalgorithmus wird an dieser Stelle nur für den hier beschriebenen Anwendungsfall untersucht.

Für die Anwendung werden Objekte rekonstruiert, die sich im Medium Wasser befinden und durch eine glättende Plexiglasplatte zwischen den Medien Luft und Wasser beobachtet werden. Es liegt der häufig vorkommende Dreimedienfall vor.

7.1 Einleitung

7.1.1 Beobachtungen von Objekten unter Mehrmedienbedingungen

Wird ein sich im Medium Wasser befindliches Objekt beobachtet, so lassen sich primär die zwei folgenden Aufnahmesituationen unterscheiden: i) die beobachtenden Kameras befinden sich in der Luft und ii) sie befinden sich ebenfalls im Wasser. Der zweite Fall wird hier nicht weiter berücksichtigt (siehe dazu aus dem Bereich der Photogrammetrie zum Beispiel die Arbeit von Fryer & Fraser, 1986 über die Kalibrierung von Unterwasserkameras, oder die Arbeit von Murino & Trucco, 2000 über Computer Vision unter Wasser und Mustererkennung).

Befindet sich die Kamera im Medium Luft, lassen sich primär zwei Anordnungen unterscheiden:

1. **Freie Wasseroberfläche** (siehe Abbildung 7.1 links)
   Die Kameras befinden sich oberhalb der Wasseroberfläche, das Objekt wird durch die zwei Medien Luft und Wasser beobachtet. Für die Berechnung der Refraktion des Lichtes muss der Verlauf der Grenzfläche zwischen Luft und Wasser bekannt sein. Die dafür zu rekonstruierende Wasseroberfläche kann in ruhigem Gewässer nahezu eben sein, oder bei einer

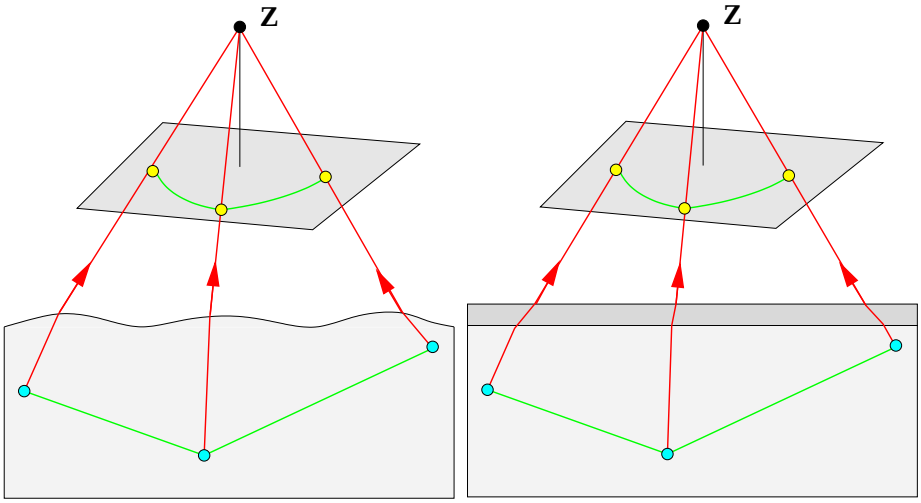


Abbildung 7.1: *Verlauf der Abbildungsstrahlen unter Mehrmedienbedingungen. Die geradlinig verlaufenden Abbildungsstrahlen werden an den jeweiligen Grenzflächen gebrochen. Links: freie Wasseroberfläche, rechts: mit einer Plexiglasplatte geglättete Oberfläche.*

Strömung auch stark gekrümmt bis turbulent sein. Die Rekonstruktion einer unbewegten, ebenen Oberfläche ist deutlich einfacher, da sie durch drei Punkte definiert werden kann und sogar nur durch einen, wenn sie parallel zur X-, Y-Achse ist. Im Falle einer deutlich komplexeren unregelmäßigen Wasseroberfläche existieren unterschiedliche Vorgehensweisen für deren Rekonstruktion. Brandes, 1995 stellt eine Methode vor, um die Wasseroberfläche anhand der Lichtbrechung zu rekonstruieren. Dabei wird mittels der Verzeichnungen von bekannten Passpunkten und bekannten Parametern der Mehrmediengeometrie auf den Verlauf der Wasseroberfläche geschlossen. Als Modell für die Oberfläche wird kein bestimmter funktionaler Ansatz gewählt, sondern es wird auf Freiformflächen zurückgegriffen. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung des von Okamoto, 1984 und Kotowski, 1987 vorgestellten Verfahrens, das für die Beschreibung der Oberfläche globale Funktionen mit niederer Ordnung verwendet.

Ernst, 1997 repräsentiert die Wasseroberfläche durch schwimmende Partikel, die photogrammetrisch rekonstruiert werden. Problematisch ist dabei, dass die Position der einzelnen Partikel auf der Wasseroberfläche nicht beeinflusst und so keine dem Verlauf der Oberfläche angepasste Verteilung der Partikel gewährleistet werden kann. Zusätzlich können die Partikel die Sicht auf das Beobachtungsobjekt im Wasser verdecken. Bei allen Verfahren, die die Wasseroberfläche durch Punkte repräsentieren, offenbaren sich erhebliche Probleme, sobald die Oberfläche kleinräumige Strukturen aufweist. Kommt es sogar zu Turbulenzen und Gischtbildung an der Oberfläche, kann zwar die dadurch entstehende Textur für eine Rekonstruktion verwendet werden, eine Sicht auf das Objekt im Wasser wird jedoch verhindert.

Bachmann, 2000 beobachtet die Bewegung von Robotern unter Wasser, wobei die Wasseroberfläche durch sich auf ihr spiegelnde Leuchtdioden repräsentiert wird. Diese Leuchtdioden können beliebig verteilt werden, können die Oberfläche jedoch für genauere Rekonstruktionen nicht ausreichend genau repräsentieren, insbesondere wenn sich die Oberfläche bewegt.

2. **Geglättete Wasseroberfläche** (siehe Abbildung 7.1 rechts)
   Um die eben genannten Probleme einer freien Wasseroberfläche zu umgehen, wird häufig

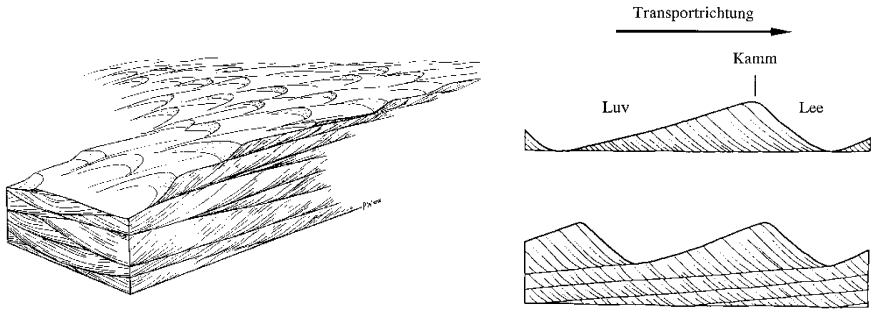


Abbildung 7.2: *Links: Skizze eines Dünenfeldes und der daraus entstehenden Schrägschichtung (aus Wurster 1958). Rechts: Entstehung von Schrägschichtungen (aus Valdivia-Manchego 1996).*

die Wasseroberfläche durch eine planparallele, transparente Platte geglättet. Maas, 1992b stellt ein Verfahren vor, bei dem die dreidimensionalen Koordinaten von im Wasser schwimmende Partikel photogrammetrisch bestimmt werden und die Partikel über die Zeit verfolgt werden. Das Ziel dieser Untersuchungen ist der Rückschluss auf die zugrunde liegende Strömung. Hier wird die Wasseroberfläche zwar nicht durch eine Platte geglättet, jedoch befinden sich die Kameras unterhalb der künstlichen Strömungsrinne und sie beobachten die Teilchen durch den Plexiglasboden der Rinne. Die Einflüsse und die Berechnungen sind bei den beiden Anordnungen identisch, da die Abbildungsstrahlen alle den Weg Objekt - Wasser - Plexiglas - Luft - Kamera - Sensor durchlaufen.

Bei den hier vorgestellten Untersuchungen befinden sich die Kameras oberhalb des Wassers und die Wasseroberfläche wird durch eine Plexiglasplatte geglättet.

7.1.2 Motivation für das Anwendungsbeispiel

Die Evaluation des Verfahrens mit realen Daten wird am Beispiel einer Beobachtung einer zeitabhängigen Sedimentoberfläche im Medium Wasser durchgeführt. Motiviert wurde diese Anwendung durch die Fragestellung des Teilprojektes C5 *Geometrische Rekonstruktion und Simulation der Entwicklung von Schrägschichtungsgefügen* im Rahmen des abgeschlossenen Sonderforschungsbereichs 350 *Wechselwirkungen kontinentaler Stoffsysteme und ihre Modellierung.* Ziel dieses Teilprojektes war es, einen dynamischen Sedimentationsprozess photogrammetrisch zu beobachten und die entstehende Oberfläche vierdimensional zu rekonstruieren. Mit diesen Daten können Kalibrierungsparameter für die Modellierung des sedimentologischen Prozesses bestimmt werden. Mit Hilfe eines solchen Modells ist es möglich, Rückschlüsse auf den verursachenden Prozess treffen zu können und einen Bezug zwischen der Oberflächenform, dem Interngefüge und der Strömung herzustellen. Mit diesem Anwendungsbeispiel soll gezeigt werden, dass die Methoden der digitalen Photogrammetrie für die Rekonstruktion der Oberfläche prinzipiell einsetzbar sind.

Strömt Wasser über ein Sediment, so entstehen durch Umlagerung und Aufwürfen des Sediments dünenförmige Transportkörper, die als Rippel bezeichnet werden. Durch die Umlagerungen des Sediments bewegen sich die Rippelstrukturen in Strömungsrichtung. Dabei kommt es zu einer gegenseitigen Überlagerung der Rippel und es entsteht die typische Formation eines Schrägschichtungsgefüges. Abbildung 7.2 zeigt ein solches Schrägschichtungsgefüge und den Aufbau eines einzelnen Rippels (entnommen aus Wurster, 1958). Die Analyse der Bewegung, Veränderung

und Ablagerung des Sedimentes lässt Rückschlüsse auf den zugrundeliegenden Sedimentationsprozess zu (siehe Valdivia-Manchego, 1996 und Ngusaru, 1999). Für die Vorwärtsbewegung der Rippelstrukturen kann eine maximale Geschwindigkeit von einem Zentimeter pro Minute angenommen werden. In diesen und anderen Projekten wurde ein fluviales Schrägschichtungsgefüge nur in fossiler Form beobachtet und rekonstruiert. Dadurch kann nur ein statischer Zustand erfasst werden, nicht aber der dynamische Entwicklungsprozess und der verursachende Prozess. Mit Hilfe der berührungslosen Techniken der Photogrammetrie ist es möglich, den Prozess während der Entwicklung räumlich und zeitlich dicht und ausreichend genau zu erfassen und auszuwerten, ohne ihn zu beeinflussen.

Die photogrammetrischen Beobachtungen werden als Laborversuch durchgeführt. Eine durch Wasserbewegung entstandene Sedimentoberfläche wird durch eine Plexiglasplatte und Wasser beobachtet. Die Grenzflächen zwischen Luft und Plexiglas sowie Plexiglas und Wasser können als eben angenommen werden. Die vier Kameras sind oberhalb der Sedimentoberfläche positioniert, so dass die Kameras fast senkrecht auf die Oberfläche schauen.

Die zeitliche Rekonstruktion der Sedimentoberfläche und die Analyse der Ergebnisse sind nicht Inhalt dieser Arbeit und dienen nur als Motivation für eine mögliche Anwendung des hier vorgestellten Verfahrens.

7.1.3 Strategie der Qualitätsuntersuchungen

Für eine Qualitätsuntersuchung hat Maimone & Shafer, 1996 eine Strategie vorgestellt, um mittels synthetischer und realer Daten eine statistische Analyse eines Stereoauswertealgorithmus effizient durchführen zu können. Es wird eine Taxonomie für Datensätze mit unterschiedlichem Grad an Realitätsbezug vorgestellt, mit deren Hilfe verschiedene Aspekte eines Algorithmus getestet werden können. Es werden drei Grade der vorausgesetzten Objektinformationen unterschieden:

1. komplette Information durch sehr genaue Sollkoordinaten,
2. Teilinformationen,
3. keinerlei Kontrolldaten.

Synthetische Daten können Objektinformationen hoch genau liefern, können aber nicht die realen Gegebenheiten und Einflüsse in allen Einzelheiten detailliert modellieren. Dem gegenüber sind für reale Beispiele nicht immer hoch genaue Kontrolldaten vorhanden. Daher liegt es nahe, beide Arten von Daten als Testdatensätze zu verwenden. Wir werden hier für die einzelnen Untersuchungen - je nach Fragestellung - eine geeignete Wahl aus den unterschiedlichen Kombinationen von Datentypen und Objektinformationen wählen.

Für die Qualitätsüberprüfungen lassen sich folgende mittlere quadratische Fehler (RMSE) für Bild- und Objektpunkte bestimmen:

- **RMSE 1** Für die approximativ berechneten Bildpunkte ${}^a\mathbf{x}'_i$ mit ${}^a\mathbf{x}'_i = {}^a\mathsf{P}\mathbf{X}_i$, die in die Schätzung der 11 unbekannten Parameter der Projektionsmatrix mit eingehen, erhalten wir die folgende interne (i), empirische Standardabweichung:

$$s_x^{(i)} = \sqrt{\frac{\sum_i ({}^a\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{x}'_i)^2}{(2n-11)}}, i = 1..n \tag{7.1}$$

  n: Anzahl der Punkte, die für die Schätzung verwendet worden sind.

- **RMSE 2** Für approximativ berechnete Bildpunkte, die nicht in die Schätzung mit eingehen, erhalten wir die folgende externe (e), empirische Standardabweichung:

$$s_x^{(e)} = \sqrt{\frac{\sum_i ({}^a\boldsymbol{x}'_i - \boldsymbol{x}'_i)^2}{(2m)}}, i = 1..m \tag{7.2}$$

  m: beliebige Anzahl von Kontrollpunkten.

Die empirischen Standardabweichungen für dreidimensionale Objektkoordinaten $\mathbf{X}_i$, die unter Verwendung der approximierenden Projektionsmatrix bestimmt worden sind, berechnen sich aus:

- **RMSE 3** Für die approximativ berechneten Objektpunkte ${}^a\mathbf{X}'_i$, die in die Schätzung mit eingegangen sind:

$$s_X^{(i)} = \sqrt{\frac{\sum_i ({}^a\boldsymbol{X}'_i - \boldsymbol{X}'_i)^2}{(2n-11)}}, i = 1..n \tag{7.3}$$

- **RMSE 4** Für die approximativ berechneten Objektpunkte ${}^a\mathbf{X}'_i$, die nicht in die Schätzung mit eingegangen sind:

$$s_X^{(e)} = \sqrt{\frac{\sum_i ({}^a\boldsymbol{X}'_i - \boldsymbol{X}'_i)^2}{(2m)}}, i = 1..m \tag{7.4}$$

Es werden folgende Hauptaspekte bei der Qualitätsprüfung untersucht:

- Güte der Approximation,
- Zuverlässigkeit des Zuordnungsalgorithmus,
- Implementation der Approximation in den Zuordnungsalgorithmus.

Güte der Approximation: Durch eine a priori Untersuchung anhand von verrauschten und unverrauschten synthetischen Daten wird eine allgemeine Beurteilung der Güte der Approximation durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Beurteilung werden für die Planung der späteren Auswertung mit realen Daten verwendet, um so eine geeignete Aufnahmekonfiguration und Unterteilung des Beobachtungsgebietes entsprechend Kapitel 5.2 und andere Parameter bestimmen zu können. Beides sollte so gewählt werden, dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art gering ist, also nicht signifikant viele Falschzuordnungen auftreten. Bei der Verwendung von realen Daten kann die Qualität der Approximation durch einen Vergleich der Ergebnisse unter Verwendung der strengen und der approximierenden Modellierung überprüft werden.

Folgende Tests werden durchgeführt:

- Mit Hilfe von synthetischen, fehlerfreien Daten werden die 3D Koordinaten der Punkte unter Verwendung des strengen Modells und der Approximation miteinander verglichen. Dabei werden für die Planung der Aufnahmekonfiguration verschiedene Parameter variiert.

- Wie vorheriger Punkt, aber mit verrauschten Daten.
- Unter Verwendung von realen Daten werden die Ergebnisse der 3D Punktbestimmung mit beiden Modellen miteinander verglichen (siehe dazu auch die Tests zu *Implementation der Approximation in den Zuordnungsalgorithmus*).

Zuverlässigkeit des Zuordnungsalgorithmus: Da der Zuordnungsalgorithmus hier nur auf geometrischen Bedingungen basiert, ist eine Prüfung der Zuverlässigkeit von großer Bedeutung.
Für eine a priori Qualitätsuntersuchung ist es notwendig, dass die Dichte und die Verteilung der Punkte den realen Bedingungen annähernd entsprechen.

Folgende Tests werden durchgeführt:

- Mit Hilfe von synthetischen, fehlerfreien Daten wird der Schritt der Zuordnung durchgeführt und die Zuordnungen, also nicht die berechneten Koordinaten, mit den gegebenen Referenzgruppen verglichen.
- Wie der vorherige Punkt, aber mit verrauschten Daten.
- Mit Hilfe von realen Bilddaten einer Ebene werden die unter Verwendung des strengen Modells erhaltenen Abstände der 3D Koordinaten zu der durch sie definierten Ebene geprüft.
- Mit Hilfe von realen Bilddaten werden die Oberflächenpunkte einer freien, glatten Oberfläche bestimmt. Zuordnungsfehler der zweiten Art können dadurch als Ausreißer von der glatten Oberfläche detektiert werden.

Implementation der Approximation in den Zuordnungsalgorithmus: Bei den beiden bisherigen Untersuchungsaspekten wurden die Approximation und der Zuordnungsalgorithmus getrennt voneinander getestet. Als letztes wird eine Zuordnung unter Verwendung der Approximation und einer anschließenden Punktrekonstruktion mit dem strengen Modell durchgeführt. Verglichen werden die Ergebnisse mit den Referenzdaten, die aus dem Einsatz des strengen Abbildungsmodells für die Zuordnung resultieren.

Folgende Tests werden durchgeführt:

- Mit Hilfe von realen Daten werden die Oberflächenpunkte einer freien, aber glatten Oberfläche bestimmt. Zuordnungsfehler der zweiten Art können dadurch als Ausreißer von der glatten Oberfläche detektiert werden.
- Vergleich der approximierten Punktwolke mit derjenigen, die unter Verwendung des strengen Modells für die Zuordnung berechnet wird.
- Berechnung der RMS-Fehler für Bild- und Objektkoordinaten.

7.1.4 Parametersatz des Aufnahmemodells

Der Parametersatz der Orientierung eines Aufnahmesystems unter Dreimedienbedingungen entsprechend der hier angegebenen Definition auf Seite 24 sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Parameter	Notation
Parameter der Inneren Orientierung der Kamera	c, x_h, y_h, s, m
Parameter der Äußeren Orientierung der Kamera	Z, R
Orientierung der Refraktionsflächen (Flächen liegen parallel zur $X-, Y-$Ebene mit jeweils einer unbekannten Höhe)	Z_{ref1}, Z_{ref2}
Refraktionsindizes für Luft, Plexiglas und Wasser	$n_L := 1, n_P, n_W$

Wir gehen hier von dem vereinfachten Fall aus, dass das Koordinatensystem parallel zu den ebenen Grenzflächen liegt. Wie aus Gleichung 3.8 ersichtlich ist, hängt dann der Einfluss der Refraktion von folgenden Parametern ab:

1. Refraktionsindizes n_P und n_W. Beide können in einem homogenen, isotropen Medium wie wir es hier voraussetzen, als konstant angenommen werden.
2. Vertikale Distanzen zwischen dem Projektionszentrum und den Refraktionsflächen.
3. Dreidimensionale Position des Objektpunktes.

Ziel der Voruntersuchungen mit synthetischen Daten ist es zum einen, a priori Qualitätsaussagen treffen zu können, und zum anderen durch Variation der Parameter eine geeignete Aufnahmekonfiguration zu bestimmen.

7.1.5 Schätzung der Orientierungsparameter des Aufnahmesystems

Für die Qualitätsuntersuchungen wird sowohl eine Berechnung der Parameter des strengen, nicht perspektivischen Modells, als auch des approximierenden Modells einer projektiven Kamera benötigt.

Für die Schätzung der Parameter des *strengen Modells* der Mehrmediengeometrie wird das Gauß-Helmert-Modell mit Restriktionen eingesetzt (siehe hierzu Helmert, 1872, Wolf, 1987 und Mikhail, 1976). Realisiert wurde die Schätzung durch ein universell einsetzbares, generisches Schätzmodul, das am Institut für Photogrammetrie der Universität Bonn entwickelt worden ist (siehe dazu Hau, 2000). Dieses Modul benutzt generische Strukturen zur Modellierung der Parameterschätzung, so dass nach Angabe der Beobachtungsgleichung das Normalgleichungssystem automatisch aufgebaut werden kann. Die dafür notwendige Linearisierung wird numerisch durchgeführt.

Für die Schätzung der Parameter einer projektiven Kamera als *approximatives Modell* kann ebenfalls ein Verfahren zur Minimierung des geometrischen oder statistischen Fehlers eingesetzt werden. Hier wurde aber für die Schätzung der linearen Relation zwischen Objekt- und Bildraum die Methode der Minimierung des algebraischen Fehlers eingesetzt (siehe dazu Anhang C).

7.2 A priori Qualitätsuntersuchungen mit synthetischen Daten

Für die Bestimmung der synthetischen Datensätze wird von einer Aufnahmesituation ausgegangen, die ähnlich dem folgenden realen Beispiel ist: Vier Kameras beobachten das zu rekonstruierende Objekt durch die drei Medien Luft, Plexiglas und Wasser. Als Objekt für die Tests wurde eine frei definierbare Punktwolke gewählt.

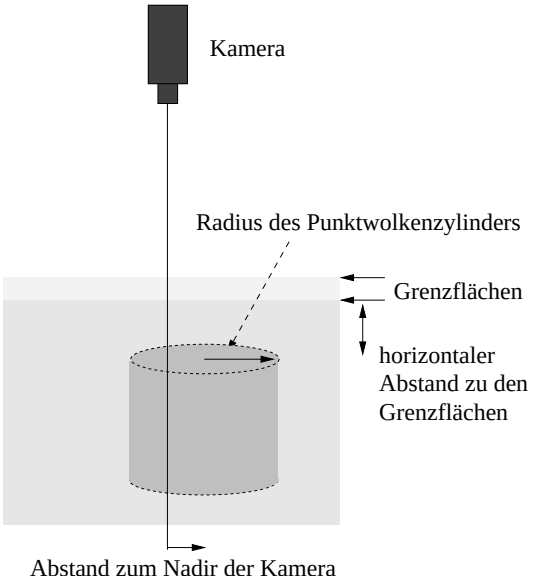


Abbildung 7.3: *Aufnahmekonfiguration für Test 1a bis 1c mit einer zylinderförmigen Punktwolke als Objektpunkte. Für die Tests werden der Radius des Zylinders, sein vertikaler Abstand zu den Grenzflächen und der horizontale Abstand zum Nadir der Kamera variiert.*

7.2.1 Datensatz

Die Parameter des Aufnahmesystems werden als bekannt vorausgesetzt. Für die Qualitätstests werden in einem ersten Schritt die Bildpunkte $\chi_i, i = 1..100$ zu gegebenen, synthetischen Objektpunkten $\mathcal{X}_i, i = 1..100$ unter Verwendung des strengen, physikalischen Modells und den bekannten Parametern des Aufnahmesystems bestimmt. Die Objektpunkte sind im Beobachtungsbereich regelmäßig in Form eines Zylinders angeordnet. In die Schätzung der approximierenden Matrix ${}^a\mathsf{P}$ gehen die Objektpunkte $\mathcal{X}_i$ als bekannte Parameter und die Bildpunkte χ_i als Beobachtungen ein. Da die Relation zwischen den Objektpunkten und den Bildpunkten nicht linear ist, verursacht die Projektion ${}^a\mathbf{x}_i = {}^a\mathsf{P}\mathbf{X}_i$ der Objektpunkte in die Bildebene die Fehler $d_i = {}^a\chi_i - \chi_i, i = 1..n, n = 100$.

Für die a priori Qualitätstests mit synthetischen Daten werden verschiedene Parameter des Mehrmedienaufnahmesystems (siehe Kapitel 7.1.4) variiert. Es kann hier nur eine Auswahl von möglichen Untersuchungen vorgestellt werden.

Prinzipiell werden zwei unterschiedliche Konstellationen verwendet:

1. Um den Einfluss der Parameter auf die Güte der Approximation zu testen, werden diese variiert (Test 1a bis 1c).

2. In einem weiteren Test werden die Parameter entsprechend der Aufnahmekonfiguration fest gelassen. Mit diesem Test können Qualitätsuntersuchungen der Approximation, der Leistungsfähigkeit des Zuordnungsalgorithmus und der Implementation der Approximation in das Punktbestimmungsverfahren geprüft werden (Test 2).

Für diese Tests werden zwei Datensätze $\mathcal{D}1$ und $\mathcal{D}2$ verwendet. Für den Datensatz $\mathcal{D}1$ der Tests 1a bis 1c wird eine regelmäßige, zylinderförmige Punktwolke im Objektraum definiert und

Abbildung 7.4: *Verteilung der synthetischen Bildpunkte.*

in den Bildraum mit dem strengen Modell projiziert. Die Versuchsanordnung ist in Abbildung 7.3 skizziert. Da hier nur die Güte der Approximation der Kameraorientierung bestimmt wird, genügt es, den Test für eine einzelne Kamera durchzuführen. Bei den Tests wird der Radius des Zylinders, sein vertikaler Abstand zu den Grenzflächen und sein horizontaler Abstand zum Nadir der Kamera variiert.

Für den Datensatz $\mathcal{D}2$ der Tests 2, 3 und 4 werden 1500 ungleichmäßig verteilte Objektpunkte, die eine zweieinhalbdimensionale Oberfläche repräsentieren und die zugehörigen verrauschten und unverrauschten Bildpunkte in vier Kameras sowohl für die Einmedien-, als auch Dreimediengeometrie bestimmt. Abbildung 7.4 zeigt die Verteilung der Punkte in einem Bild. Tabelle 7.1, Seite 92 enthält im oberen Abschnitt die Kenngrößen des Datensatzes.

7.2.2 Qualitätstests der Güte der Approximation

Die Ergebnisse der Tests für die Güte der Approximation hängen von den Orientierungsparametern ab. Um die Tests auch als a priori Untersuchungen verwenden zu können, werden die Orientierungsparameter für diesen Test dem realen Beispiel angepasst und nur der Zylinderradius, die vertikale Distanz des Zylinders zu den Grenzflächen und die horizontale Distanz des Zylinders zum Nadir verändert. Bei diesen Untersuchungen steht die geometrische Aufnahmekonstellation im Vordergrund, die Variation der Refraktionsindizes wird hier nicht weiter untersucht. Es werden unverrauschte Daten verwendet, da es hier nur um die theoretische Güte der Approximation in Abhängigkeit von den einzelnen Parametern geht.

Test 1a - Variation des Zylinderradius (Passpunkte)

Im ersten Test wird für zwei verschiedene vertikale Abstände d_v zwischen den als Zylinder angeordneten Objektpunkten und den Refraktionsflächen der Radius des Objektzylinders variiert. Das Zentrum des Zylinders liegt senkrecht unter dem Projektionszentrum der Kamera. Weiterhin gelten folgende Kenngrößen:

- Abstand des Zylinders zur Plexiglasplatte ca. 0.65 m,

Tabelle 7.1: *Kenndaten der synthetischen Datensätze (EMG: Einmedienfall, DMG: Dreimedienfall). Im oberen Teil sind die 3D Datensätze kurz beschrieben. Im mittleren Teil werden einige Ergebnisse der Bildpunktzuordnung (erste Hypothese, Test 3) erwähnt und im unteren Teil einige Ergebnisse des Clusterings (zweite Zuordnungshypothese Test 4).*

Kenndaten Datensätze			
Datensatz	$\mathcal{D}$**2 a**	$\mathcal{D}$**2 b**	$\mathcal{D}$**2 c**
Geometrie	EMG	DMG	DMG
Orientierung	streng	approximativ	approximativ
Anzahl Punkte	1500	1500	1500
Rauschen	*nein*	*nein*	ja
σ (soll/ist)	*nein*	*nein*	0.07 [*pel*]
σ_{max} (ist)	*nein*	*nein*	0.23 [*pel*]
Ergebnisse Punktzuordnung (erste Hypothese, Test 3)			
Suchraum ϵ im Bild	« 0.1 [pel]	0.24 [pel]	0.34 [pel]
Anzahl richtiger Zuordnungen	1500	1500	1500
davon:			
Anzahl Punkte mit 6 richtigen Zuordnungen	1500	1486	1481
Anzahl Punkte mit 5 richtigen Zuordnungen	*keine*	2	6
Anzahl Punkte mit 4 richtigen Zuordnungen	*keine*	12	13
Ergebnisse Clustering (zweite Hypothese, Test 4)			
Bedingung: mindestens 6 zugeordnete Paare für Objektpunkt, Grenzwert Objektraum 0.5 [mm]	1500	311	26
Bedingung: mindestens 4 zugeordnete Paare für Objektpunkt, Grenzwert Objektraum 0.5 [mm]	1500	1500	986
Bedingung: mindestens 4 zugeordnete Paare für Objektpunkt, Grenzwert Objektraum 1 [mm]	1500	1500	1405

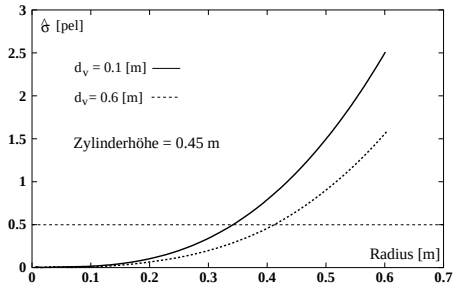


Abbildung 7.5: *Test 1a) mit Variation des Radius des Objektpunktzylinders für zwei feste vertikale Abstände d_v zwischen dem Objektpunktzylinder und der Refraktionsfläche. Die Residuen der Passpunkte werden im Bildraum angegeben.*

- Abstand Kamera / Zylinderoberfläche ca. 0.75 m und 1.25 m.

Aus den Residuen ${}^a\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i$ wird der RMSE 1, (Gleichung 7.1, Seite 86) für die Bildkoordinaten berechnet, die in die Schätzung der DLT eingegangen sind. In Abbildung 7.5 sind die Residuen im Bildraum gegenüber der Größe des Radius aufgetragen.

Die Abhängigkeit der Approximationsgüte von dem Radius des Zylinders, also von der Ausdehnung des Beobachtungsbereichs, ist deutlich zu erkennen. Es ist aber auch die hohe Genauigkeit der Approximation im unteren Bereich der Radiusgröße des Zylinders zu sehen. So wird bei einem Abstand zwischen der Kamera und dem Zylinder von 0.75 m bis zu einem Radius von 0.35 m und mit einem Abstand von 1.25 m bis zu einem Radius von 0.42 m ein RMSE im Bildraum von unter einem halben Pixel erreicht. Entsprechend der geforderten Genauigkeit im Bildraum, kann eine Größe des lokalen Auswertebereichs und damit die Unterteilung bestimmt werden. Auch ist die Abhängigkeit von dem Abstand zwischen dem Zylinder und der Refraktionsfläche zu erkennen. Das heißt, dass bei einer großen Tiefenausdehnung des Beobachtungsraumes mit zunehmendem Abstand zur Refraktionsfläche eine sich in der Höhe vergrößernde Unterteilung gewählt werden kann. Hier fließt der unterschiedliche Bildmaßstab mit ein.

Test 1b - Variation des Zylinderradius (Kontrollpunkte)

Der zweite Test entspricht grundsätzlich dem ersten Test, nur wird hier der RMSE 2, Gleichung 7.2, Seite 87, aus den Residuen ${}^a\boldsymbol{x}_i^n - \boldsymbol{x}_i^n$ für Punkte $\boldsymbol{x}_i^n$ berechnet, die nicht in die Schätzung der DLT mit einbezogen worden sind. In Abbildung 7.6 sind die Residuen der Kontrollpunkte gegenüber der Größe des Radius aufgetragen.

Auch die Ergebnisse dieses Tests sind ähnlich denen des vorhergehenden und es ist zusätzlich eine zu erwartende leichte Verschlechterung der Ergebnisse für Kontrollpunkte im Vergleich zu den Referenzdaten zu erkennen.

Test 1c - Variation der horizontalen Distanz zwischen Kamera und Zylinder

Im dritten Test wird erneut für zwei verschiedene vertikale Abstände d_v zwischen dem Objektzylinder und der Refraktionsfläche und einem fixen Radius $r = 0.1$ m die horizontale Distanz zwischen Kamera und Zylinder variiert. Der RMSE 1, Gleichung 7.1 wird aus den Residuen

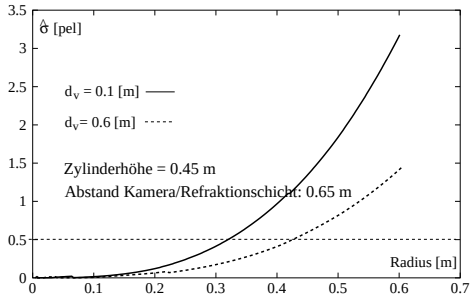


Abbildung 7.6: *Test 1b) mit Variation des Radius des Objektpunktzylinders für zwei feste vertikale Abstände d_v zwischen dem Objektpunktzylinder und der Reraktionsfläche - Angabe der Residuen für Kontrollpunkte.*

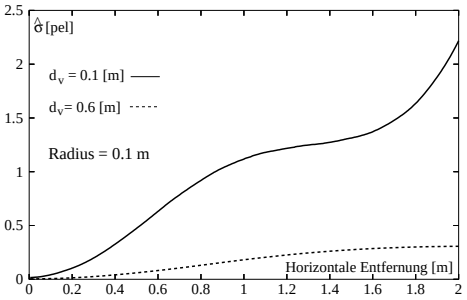


Abbildung 7.7: *Test 1c) für die Variation des horizontalen Abstandes zwischen dem Objektzylinder und der Kamera für zwei unterschiedliche vertikale Abstände zwischen dem Objektzylinder und der Refraktionsfläche Plexiglas/Wasser.*

${}^a\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_i$ für die Bildkoordinaten berechnet, die für die Schätzung der DLT verwendet worden sind. In Abbildung 7.7 sind die Residuen der Bildpunkte gegenüber der Größe des Radius aufgetragen.

Es ist ein deutlicher Unterschied in Abhängigkeit von der vertikalen Entfernung zur Refraktionsfläche zu erkennen. Der RMSE ist für den Zylinder mit größerem Abstand zur Grenzfläche auch für die größte untersuchte horizontale Entfernung nicht sehr groß. Für den Zylinder mit einer geringeren vertikalen Distanz steigt der RMSE deutlich an.

Test 2 - Beispielrechnung

Für den zweiten Teil der Prüfung der Qualität der Approximation werden die Datensätze $\mathcal{D}2\,b$ (unverrauscht) und $\mathcal{D}2\,c$ (verrauscht) für den Dreimedienfall und fixen Orientierungsdaten verwendet. Als Qualitätsmerkmal werden die Rückprojektionsfehler durch die Approximation berechnet. Abbildung 7.8 zeigt die Histogramme der Residuen in den Bildachsenrichtungen x' und y' (links) und der radialen Residuen für den unverrauschten Datensatz $\mathcal{D}2\ b$ (rechts). Abbildung 7.9 zeigt beides für den verrauschten Datensatz $\mathcal{D}2\,c$.

Die Ergebnisse der Histogramme für die radialen Residuen geben Hinweis auf die Größe des Suchraums im Bildraum für die Bildzuordnung. Um den Algorithmus testen zu können, wird der

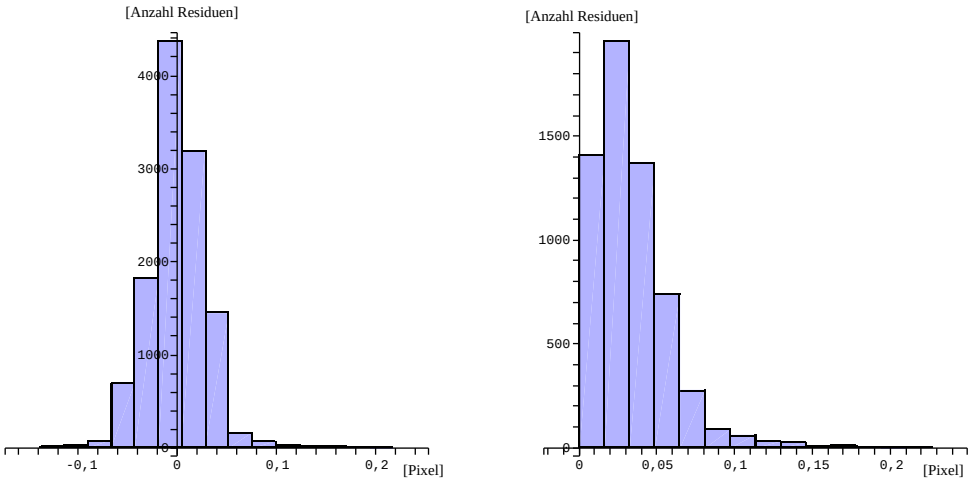


Abbildung 7.8: *Residuen der in den Bildraum zurück projizierten Objektpunkte unter Verwendung der Approximation (unverrauscht). Links sind unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen die Werte für beide Koordinaten zusammen aufgetragen und rechts ist der Betrag des radialen Abstandes aufgetragen.*

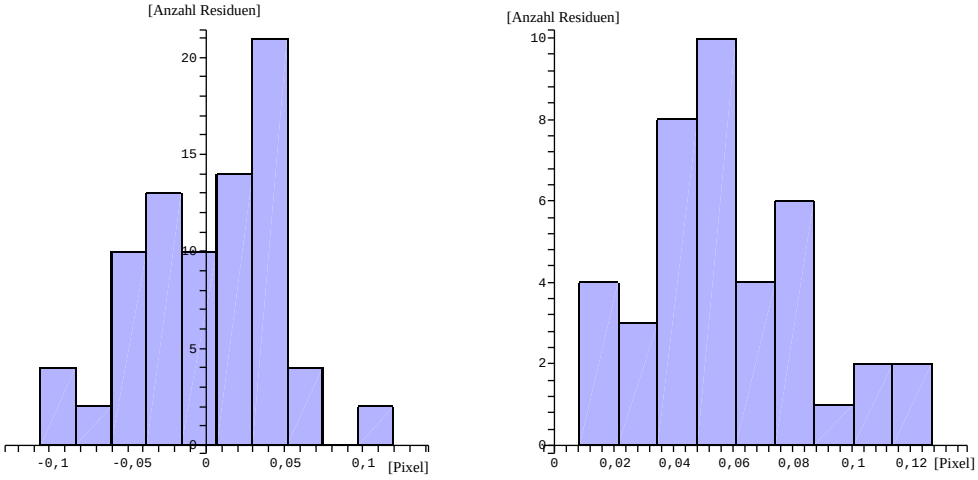


Abbildung 7.9: *Residuen der in den Bildraum zurück projizierten Objektpunkte unter Verwendung der Approximation (verrauscht). Links sind unter Berücksichtigung ihrer Vorzeichen die Werte für beide Koordinaten zusammen aufgetragen und rechts ist der Betrag des radialen Abstandes aufgetragen.*

Tabelle 7.2: *Reale Projektionszentren der Kameras und geschätzte Projektionszentren als Approximation für das gesamte, nicht projektive Abbildungssystem. O1: Reales Projektionszentrum, OA1: Approximation mit unverrauschten Daten, OA2: Approximation mit verrauschten Daten.*

		Kamera 1	Kamera 2	Kamera 3	Kamera 4
O1	X	30.0	213.0	39.0	220.0
	Y $[mm]$	45.0	41.0	190.0	186.0
	Z	635.0	630.0	622.0	618.0
OA1	X	29.5	213.3	38.8	220.2
	Y $[mm]$	44.6	40.7	190.2	186.0
	Z	867.6	855.2	846.9	835.4
OA2	X	29.5	213.3	38.8	220.1
	Y $[mm]$	44.3	40.7	190.1	185.9
	Z	868.1	855.8	846.2	834.8

Suchraum so gewählt, dass alle Zuordnungen gefunden werden können.

Tabelle 7.2 fasst die geschätzten Projektionszentren für die Approximation des Aufnahmesystems zusammen. Deutlich ist der Einfluss auf die Höhe des Projektionszentrums zu sehen. Die approximierende Kamera wurde mit der Schätzmethode der algebraischen Fehlerminimierung bestimmt. Weiterführende Analysen, auch im Vergleich zur Schätzung mit Minimierung des geometrischen Fehlers, sind bei dem Test mit realen Daten in Kapitel 7.3 durchgeführt worden.

7.2.3 Qualitätstests der Zuverlässigkeit des Zuordnungsalgorithmus und Implementation der Approximation

Die Tests der Zuverlässigkeit des Zuordnungsalgorithmus mit synthetischen Daten dienen insbesondere dazu, die Implementation des Algorithmus zu testen. Dafür wurden für die Datensätzen $\mathcal{D}1\,a$, $\mathcal{D}1\,b$ und $\mathcal{D}1\,c$ (siehe Tabelle 7.1) Zuordnungen der Bildpunkte durchgeführt. Da es bei diesem Test nicht um die erreichbaren Genauigkeiten geht, sondern um die Zuverlässigkeit der Zuordnung, wurden nicht die abschließend bestimmten Objektpunktkoordinaten, sondern die Punktzuordnungen verglichen. Für die Zuordnung ist der Parameter *Breite des Suchraums um die Epipolarlinie* von Bedeutung. Dieser wurde für die Approximationen entsprechend der Ergebnisse der Histogramme 7.8 und 7.9 so gewählt, dass alle Punkte gefunden werden sollten. Hier können auch die Methoden eingesetzt werden, die in Kapitel 6.2.3 über Hypothesentests beschrieben worden sind. Die Zuordnung zwischen den vier Bildern wurde mit der maximalen Anzahl von drei Masterbildern bestimmt, so dass alle vorhandenen Zuordnungen gefunden werden können. Daraus können nach dem ersten Hypothesentest maximal sechs Zuordnungshypothesen pro Objektpunkt gefunden werden (eine Hypothese aus jeder möglichen Kombination von je zwei der vier Kameras).

Test 3

Die Ergebnisse des **Tests 3** der Punktzuordnungen (Aufstellung der ersten Zuordnungshypothese) in Tabelle 7.1, mittlerer Teil, zeigen für den Einmedienfall mit unverrauschten Daten und strenger Modellierung ($\mathcal{D}2\,a$), dass der Algorithmus prinzipiell richtig implementiert ist. 75 Prozent der Punkte sind in Mehrdeutigkeiten verwickelt, die es durch den Schritt des Clusterings

herauszufiltern gilt. Der Test für die Zuordnung innerhalb der Datensätze $\mathcal{D}2\,b$ und $\mathcal{D}2\,c$ unter Verwendung der Approximation für unverrauschte und verrauschet Daten zeigt, dass zwar alle Zuordnungsgruppen gefunden worden sind, zum Teil aber nicht alle Elemente einer Gruppe. Das kann daran erkannt werden, dass bei vier Bildern und drei Masterbildern maximal sechs Zuordnungspaare pro Objektpunkt gefunden werden können (siehe vorherigen Abschnitt). Es fanden sich aber auch Objektpunkte, für die nur fünf oder vier Paare gefunden worden sind. Nach einer Analyse der Ergebnisse, stellte es sich heraus, dass für einige Paare eine schlechte Aufnahmekonfiguration bestand (schleifender Schnitt). Da allerdings in einem Mehrbildverband gearbeitet wird, können diese verloren gegangenen Zuordnungen kompensiert werden, so dass alle Punkte bestimmt werden können.

Test 4

Im zweiten Schritt der Punktzuordnung werden die ersten Hypothesen durch ein Clustering getestet. Tabelle 7.1, Seite 92 zeigt diese Ergebnisse dieses Tests im unteren Abschnitt der Tabelle. Das Ergebnis hängt von zwei Parametern ab: dem maximalen Abstand der Punkte innerhalb eines Clusters und der notwendigen Anzahl der zugeordneten Punktepaare eines Clusters. Da die notwendige Bedingung für eine Punktzuordnung die Abbildung des Punktes in mindestens drei Bildern ist, müssen mindestens drei Punktepaare in einem Cluster sein, damit es einen Objektpunkt repräsentiert. Diese Bedingung kann mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auch zu einem Geisterpunkt führen. Hierbei kann entweder zum Beispiel eine zusätzliche Bedingung wie *die Oberfläche ist glatt* hinzugezogen werden, oder die notwendige Anzahl von Punkten in einem Cluster wird erhöht, wodurch das Ergebnis robuster wird. Dadurch können allerdings auch Punkte, die in nur drei Bildern abgebildet sind, verloren gehen. Hier wurde mit dieser härteren notwendigen Bedingung gearbeitet. Der zweite Parameter, der Abstand der Punkte innerhalb eines Clusters, kann in Abhängigkeit von der geforderten Genauigkeit und den Methoden aus Kapitel 6.2.3 über Hypothesentests gewählt werden.

7.3 Experimentelle Analyse mittels realer Daten einer freien Oberfläche

7.3.1 Versuchsanordnung und Aufnahmesystem

Die experimentelle Beobachtung und Rekonstruktion einer Sedimentoberfläche entspricht einer Aufnahmegeometrie mit den drei Medien Luft, Plexiglas und Wasser. Abbildung 7.10 zeigt die einzelnen Komponenten des Aufnahmesystems. Die vier Kameras wurden über das Wasserbecken so positioniert, dass die Projektionszentren der Kameras die Ecken eines Quadrates bilden. Die Wasseroberfläche wird mit einer Plexiglasplatte geglättet. Die Platte ist umrandet, so dass das strömende Wasser nicht auf ihr fließen und den Beobachtungsprozess stören kann. Sowohl auf diesem Rand als auch auf der Platte selbst befinden sich Passpunkte im Medium Luft. Weitere Passpunkte befinden sich unterhalb der Platte im Medium Wasser. Diese Punkte befinden sich im Randbereich des Aufnahmegebietes, so dass auch während der Aufnahme der Bildsequenzen Selbstkalibrierungen durchgeführt werden können, ohne dass dabei die Sicht auf das Beobachtungsobjekt gestört wird.

In der Nahbereichsphotogrammetrie ist die Beleuchtungstechnik von besonderer Bedeutung, da sie Einfluss auf die Radiometrie hat und damit auf die Merkmalsextraktion. In unserem Beispiel ist die Beleuchtung so eingesetzt, dass die eigene, feine Textur der Sandkörner in den Aufnahmen

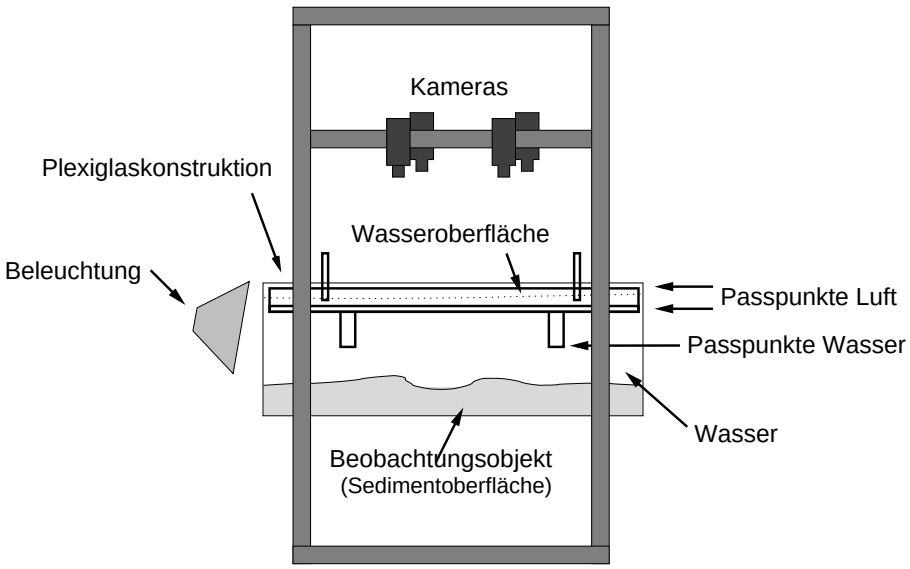


Abbildung 7.10: *Versuchsaufbau des Aufnahmesystems zur Datenakquisition für die Rekonstruktion der Sedimentoberfläche.*

deutlich zu erkennen ist und eine Merkmalsextraktion durchgeführt werden kann, ohne dass eine Textur auf die Oberfläche projiziert werden muss. Abbildung 7.11 zeigt die vier Aufnahmen der zu rekonstruierenden Sedimentoberfläche. Wie zu erkennen ist, muss für eine genaue Messung der Passpunkte im Bild für dieses Beispiel jedoch eine andere Beleuchtung gewählt werden.

7.3.2 Schätzung der strengen und der approximativen Orientierung und deren Vergleich

Schätzung der Orientierungsparameter des strengen Mehrmedienabbildungsmodells

Für die Analyse der Genauigkeit der Approximation und ihrer Einsatzfähigkeit ist primär nicht die absolute Genauigkeit der Objektpunktbestimmung von Bedeutung, sondern der Einfluss auf die Zuordnungsergebnisse im Vergleich zur Anwendung des strengen Modells. Um die Ergebnisse richtig einschätzen zu können, wird für die Referenzdaten die erreichte, absolute Genauigkeit aber mit angegeben. Für den Normalfall einer Stereoaufnahme kann als Abschätzung für die erreichbare Genauigkeit in Aufnahmerichtung die folgende Standardabweichung σ_z in $Z-$Richtung angenommen werden (vergleiche Luhmann, 2003, Seite 323):

$$\sigma_z = \frac{h^2}{b \cdot c} \cdot \sigma_{p_{x'}} \tag{7.5}$$

mit

h : Abstand zum Objekt (Höhe)

b : Basis

$\sigma_{p_{x'}} = \frac{\sigma_{x'}}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_{y'}}{\sqrt{2}}$: Abschätzung für Parallaxenmessgenauigkeit,

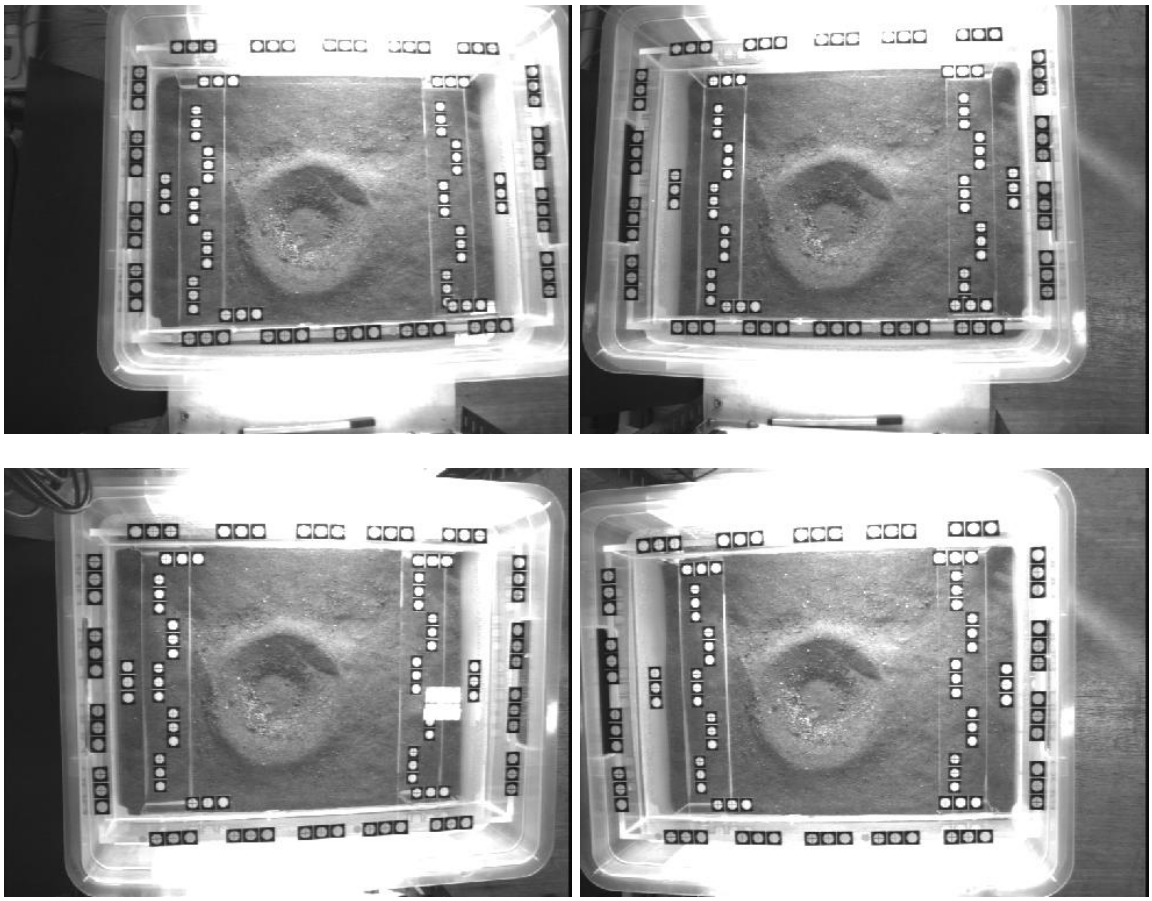


Abbildung 7.11: *Beispielaufnahmen der Sedimentoberfläche. Die Beleuchtung wurde so gewählt, dass die Textur der Sedimentoberfläche gut zu erkennen ist. Für die Messung der Passpunkte muss die Beleuchtung entsprechend verändert werden.*

Tabelle 7.3: *A priori Standardabweichungen für die verwendete Aufnahmesituation (Schätzformeln gelten für den Einmedienfall).*

Bildmessgenauigkeit $\sigma_{p_{x'}}$	σ_X, σ_Y	σ_Z
3.9 μm ($\sigma'_x = 0.5\,pel$)	0.52 mm	1.7 mm
2.3 μm ($\sigma'_x = 0.3\,pel$)	0.35 mm	1.0 mm
Pixelgröße Bildraum	11 μm,	
Pixelgröße Objektraum	1 mm,	
Basis	$b = 160$ mm,	
mittlere Höhe	$h_m = 750$ mm	
Kammerkonstante	$c = 8$ mm	

Tabelle 7.4: *Standardabweichungen der Neupunkte in X-, Y- und Z-Richtung für das strenge Dreimedienabbildungsmodell.*

Genauigkeit der Kontrollpunkte	
mittlere Standardabweichung in $X-, Y-$Richtung	0.43 mm
maximale Standardabweichung in $X-, Y-$Richtung	0.70 mm
mittlere Standardabweichung in $Z-$Richtung	1.49 mm
maximale Standardabweichung in $Z-$Richtung	3.22 mm

$\sigma_{x'} = \sigma_{y'}$: Bildmessgenauigkeit.

Für die Standardabweichung in $X-, Y-$Richtung gilt

$$\sigma_{X,Y} = m_b \cdot \sigma_{x'} \tag{7.6}$$

Die angegebenen Formeln sind für den Einmedienfall gültig. Einflüsse durch die Mehrmediengeometrie wurden hier nicht berücksichtigt. Die a priori Standardabweichungen, die entsprechend den Gleichungen 7.5 und 7.6 berechneten worden sind, sind in Tabelle 7.3 für zwei verschiedene Bildmessgenauigkeiten angegeben. Die Ergebnisse der Schätzung der Parameter der Orientierung des Aufnahmesystems unter Verwendung des strengen Mehrmedienmodells sind in Tabelle 7.4 zusammengefasst. Die Kenndaten der Ausgleichung stehen im Anhang F, Tabelle F.1. Die Bildkoordinaten der Passpunkte wurden manuell gemessen, so dass mit einer Messgenauigkeit von einem halben Pixel im Bildraum gerechnet werden kann. Verglichen mit den a priori Genauigkeiten in Tabelle 7.3 ist die erreichte Genauigkeit entsprechend den Erwartungen.

Schätzung der Orientierungsparameter des approximierenden Abbildungsmodells

Die Schätzung der Orientierungsparameter des approximierenden Abbildungsmodells wurde entsprechend den in Kapitel 5 und Kapitel 7.2 beschriebenen Methoden durchgeführt. Ähnlich wie bei den Qualitätsuntersuchungen mit synthetischen Daten wurden 846 virtuelle Passpunkte in einem regelmäßigen, dreidimensionalen Gitter definiert, das den gesamten Beobachtungsraum ausfüllt, definiert und mit dem strengen Modell in den Bildraum transformiert. Mit diesen Objekt- und Bildpunkten wurde die virtuelle projektive Kamera bestimmt. Zum Vergleich der Ergebnisse wurde die Schätzung einmal nach der Minimierung des geometrischen Fehlers durchgeführt und

einmal nach der Minimierung des algebraischen Fehlers. Die Kenndaten der Ausgleichung sind im Anhang F, Tabelle F.2 angegeben.

Um den Einfluss einer Unterteilung des Objektraumes und einer getrennten Bestimmung von lokalen Projektionsmatrizen zu verdeutlichen, wird die Punktbestimmung einmal ohne Unterteilung und einmal mit einer vertikalen Teilung des Gebietes in zwei gleich große Bereiche durchgeführt.

Es werden folgende Approximationen berechnet:

- **virtuelle Kamera VK A**: Approximation mit Minimierung des *algebraischen Fehlers* für das ganze Gebiet.
- **virtuelle Kamera VK G**: Approximation mit Minimierung des *geometrischen Fehlers* für das ganze Gebiet.
- **zwei lokale virtuelle Kameras VK A1 und VK A2**: Approximation mit Minimierung des *algebraischen Fehlers* für eine *Zweiteilung* des Gebietes.

Vergleich der Ergebnisse der realen und der virtuellen, approximierenden Kamera

Die Ergebnisse sind in Tabelle 7.5, Seite 103 alle zusammengefasst. Für den Vergleich werden folgende RMS-Fehler berechnet:

- **VK A (algebraisch)**: RMSE 1 nach 7.1, Seite 86 für die Rückprojektionen der Punkte, die in die Schätzung mit eingehen $s_x^{(i)} = 0.04\,pel$.
- **VK G (geometrisch)**: RMSE 1 nach für die Rückprojektionen der Punkte, die in die Schätzung mit eingehen $s_x^{(i)} = 0.8\,pel$.
- **VK A1** und **VK A2 (algebraisch)**: RMSE 1 für die Rückprojektionen der Punkte, die in die Schätzung mit eingehen $s_x^{(i)} = 0.03\,pel$.

A: Vergleich der Qualität der virtuellen Kameras für die algebraische und die geometrische Fehlerminimierung

Bei einem Vergleich der RMSE fällt auf, dass die erreichte Genauigkeit der Approximation mit algebraischer Fehlerminimierung deutlich besser ist. Dies lässt sich zum Teil dadurch erklären, dass im Fall der geometrischen Fehlerminimierung die Innere Orientierung der Kamera fix gelassen worden ist (reale kammerkonstante 718 pel), während im Fall der Schätzung einer approximierenden Projektionsmatrix die Kammerkonstante mit geschätzt worden ist (970 pel). Vergleichen wir die Projektionszentren der beiden geschätzten virtuellen Kameras, so wird ein weiterer Unterschied deutlich: die Lage des mit der geometrischen Fehlerminimierung berechneten Projektionszentrums ist der des Referenzprojektionszentrums der Kamera ähnlich. Das virtuelle Zentrum der algebraische Fehlerminimierung liegt deutlich oberhalb des Projektionszentrums. Der Einfluss der Mehrmediengeometrie wird also durch die veränderte Kammerkonstante aufgefangen, was wiederum in einem verschobenes Projektionszentrum resultiert.
Ein weiterer Vergleich zwischen der algebraischen und der geometrischen Fehlerminimierung in diesem Kontext wird am Ende dieses Kapitels bei der Objektpunktbestimmung durchgeführt.

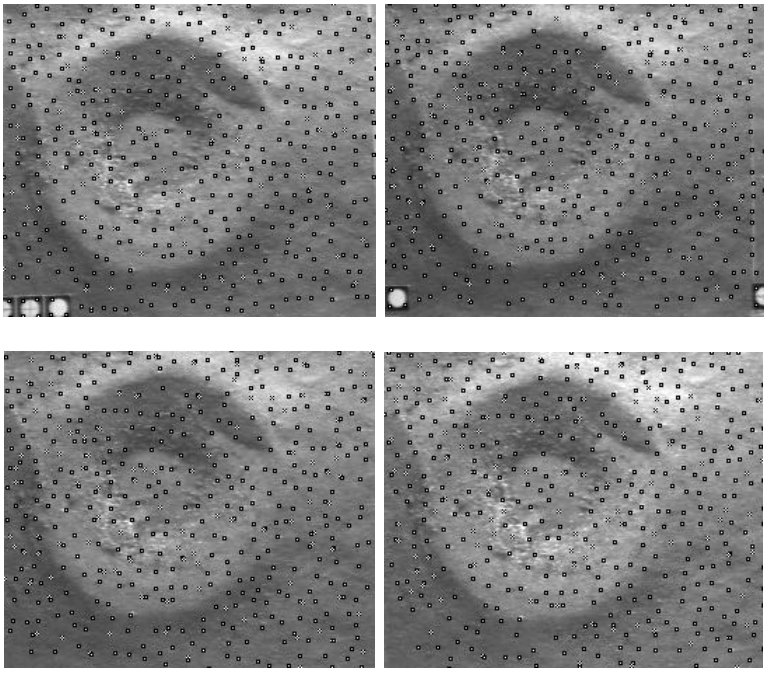


Abbildung 7.12: *Originalbilder der Sedimentoberfläche, dargestellt mit den extrahierten Bildpunkten.*

B: Vergleich der Approximationen für das Gesamtgebiet und für die die Unterteilung

Wie bereits nach den Voruntersuchungen zu erwarten war, liefert die Unterteilung dieses Aufnahmegebietes für diese Aufnahmekonfiguration keine signifikante Verbesserung, da die Ausdehnung des Beobachtungsgebietes, insbesondere die Tiefenausdehnung, nicht sehr groß ist. Jedoch ist die Tendenz zu einer Verbesserung der Ergebnisse durch die Unterteilung zu erkennen.

Aus den a priori Untersuchungen mit synthetischen Daten für größere Beobachtungsgesbiete ist darüber hinaus zu erkennen, dass bei größeren Aufnahmegebieten durch die Unterteilung eine deutliche Qualitätsverbesserung erreicht werden kann. Besitzt ein Beobachtungsraum eine größere Tiefenausdehnung, so liefert auch eine horizontale Unterteilung eine deutliche Verbesserung der Ergebnisse.

7.3.3 Zuordnung der Bildelemente im Objektraum

Die für die Zuordnung von Bildelementen notwendige Extraktion von Bildpunkten wird nach dem in Förstner, 1994 und Fuchs, 1998 vorgestellten Verfahren zur Merkmalsextraktion durchgeführt. Abbildung 7.12 zeigt einen Ausschnitt der Sedimentoberfläche mit den extrahierten Punkten, die gleichmäßig über die Oberfläche verteilt sind. Für eine detailliertere Rekonstruktion der Oberfläche können auch extrahierte Linien rekonstruiert werden. Dafür muss eine geeignete Beleuchtung gewählt werden, so dass die Linien der markanten Rippeloberfläche mit dem Schattenrand annähernd zusammenfallen. Diese Linien sind für die Auswertung des Sedimentationsprozesses von Bedeutung.

Entsprechend den Ausführungen in Kapitel 6 werden die Zuordnungshypothesen in zwei Schritten aufgestellt:

Tabelle 7.5: *Vergleich der Schätzung mit algebraischer und geometrischer Fehlerminimierung.*

	geo. Fehler (VKG)	***algebr. Fehler (VKA)***	***algebr. Fehler VKA1***	***algebr. Fehler VKA2***
	ohne Unterteilung	ohne Unterteilung	Teilgebiet A1	Teilgebiet A2
$Z = \begin{bmatrix} 3.08 \\ 4.53 \\ 6.46 \end{bmatrix}$ Referenz PZ	$Z_1 = \begin{bmatrix} 5.6\ cm \\ 6.34\ cm \\ 60.49\ cm \end{bmatrix}$	$Z_2 = \begin{bmatrix} 3.07\ cm \\ 4.51\ cm \\ 5898\ cm \end{bmatrix}$	$Z_{A1} = \begin{bmatrix} 3.07\ cm \\ 4.53\ cm \\ 5850\ cm \end{bmatrix}$	$Z_{A2} = \begin{bmatrix} 2.99\ cm \\ 4.50\ cm \\ 6852\ cm \end{bmatrix}$
Kammerkonstante $c = 718\ pel$ (strenge Mod.)	fixer Wert $c = 718\ pel$	$970\ pel$	$965\ pel$	$973\ pel$
Residuen der Passpunkte:				
Mittel	$0.6\ pel$	$0.03\ pel$	$0.02\ pel$	$0.02\ pel$
Maximum	$4\ pel$	$0.2\ pel$	$0.18\ pel$	$0.16\ pel$
$\widehat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-u_i}}$	$0.8\ pel$	$0.04\ pel$	$0.03\ pel$	$0.03\ pel$
Rückprojektionsfehler im Bildraum bezogen auf normierte Kammerkonstante $c_n = 1$ (Originalkammerkonstante $c \approx 718\ Pixel$)				
Anzahl Beob. bei 846 virt. Passpunkten	6768	6768	3640	3640

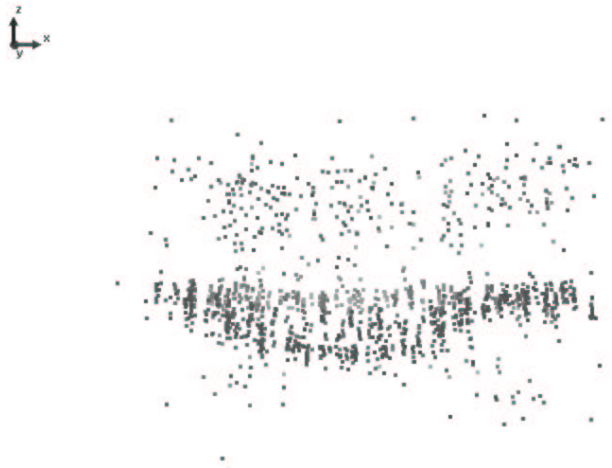


Abbildung 7.13: *3D Punktwolke nach dem ersten Zuordnungsschritt (projiziert auf die $X-, Z-$ Ebene). Die Punktwolke umfasst noch sowohl Zuordnungshypothesen für Objektpunkte, als auch für Geisterpunkte. Ein Punkt repräsentiert homologe Punkte in zwei Bildern. Deutlich ist hier das Objekt durch die Dichteverteilung erkennbar.*

Abbildung 7.14: *3D Punktwolke nach dem Clustering (links: projiziert auf die $X-, Z-$ Ebene, rechts: projiziert auf die $X-, Y-$Ebene). Es wurden die Hypothesen verworfen, die Geisterpunkte repräsentierten. Ein Punkt repräsentiert nun eine Hypothese für einen Objektpunkt aus allen Bildern.*

1. Im Bildraum werden mittels der Methoden der Epipolargeometrie Zuordnungshypothesen für homologe Punkte in zwei Bildern aufgestellt (mit einem ersten Hypothesentest entlang der Abbildungsstrahlen). Die Zuordnungshypothesen des Beispiels sind in Abbildung 7.13 visualisiert: ein Punkt entspricht dabei einer Zuordnungshypothese von zwei homologen Bildpunkten und ist der Schnittpunkt der beiden zugehörigen Abbildungsstrahlen im Objektraum.

2. Im Objektraum wird mittels eines Clusterings ein zweiter Hypothesentest durchgeführt. Dabei werden die Hypothesen ausgewählt, die mehr als zwei homologe Punkte repräsentieren. Dies entspricht der notwendigen Bedingung, dass ein Objektpunkt in mindestens drei Bildern zu sehen ist. Die Ergebnisse des Clusterings sind in Abbildung 7.14 visualisiert. Ein Objektpunkt repräsentiert eine Zuordnungshypothese für alle Bilder. Deutlich ist zu erkennen, dass nur noch Objektpunkte im Bereich der Sedimentoberfläche übrig geblieben sind. Geisterpunkte als grobe Ausreißer sind ohne ein weiteres Kriterium zu verwenden verschwunden.

7.3.4 Bestimmung der Objektpunkte

In dem finalen Schritt der Zuordnung werden alle Daten, die nach der Gruppierung übrig bleiben, zusammen in einem Bündel ausgeglichen und die 3D Punkte mit dem strengen Modell bestimmt. Für diesen Schritt kann je nach Anforderung an Genauigkeit und Komplexität sowohl das physikalisch basierte Modell, als auch das approximierende Modell verwendet werden. Die 3D Punkte die aus dem Clusterverfahren stammen, können dabei als sehr gute Näherungswerte eingesetzt werden.

Zur *Visualisierung der Ergebnisse der 3D Punktbestimmung* wurden die Oberflächenpunkte trianguliert und es wurde eine regelmäßige $2\frac{1}{2}D$ Oberfläche durch Interpolation bestimmt (siehe Abbildung 7.15).

Für die Qualitätstests wurden die Punktbestimmungen mit beiden Modellen durchgeführt und die Ergebnisse miteinander verglichen. Als Referenz dient hier die Zuordnung und 3D Punktbestimmung mit dem physikalischen Abbildungsmodell. Mit ihm wurden 156 Referenzpunkte bestimmt, mit dem Approximationsmodell 161 Punkte. Der Fehler erster Art, dass ein Punkt nicht gefunden worden ist, ist einmal aufgetreten, der Fehler zweiter Art, dass ein falscher Punkt gefunden worden ist (Geisterpunkt) ist 4 mal aufgetreten. Der Fall, dass für einen Punkt zwei Punkte gefunden worden sind, ist einmal aufgetreten. Die RMS-Fehler des 3D Vergleiches der Objektpunkte sind in Tabelle 7.6 aufgelistet. Sowohl der RMS-Fehler für die Lage mit 0.03 mm, wie auch der der Höhe mit 0.37 mm ist vernachlässigbar klein.

Abbildung 7.16 zeigt den *Unterschied der Höhen der rekonstruierten Objektpunkte* mit und ohne Unterteilung. Die Unterteilung ist in der Mitte des Aufnahmegebietes senkrecht von oben nach unten vorgenommen. Der Unterschied ist in dem mittleren Bereich, entlang der Unterteilungsgrenze, gering. Dort bilden die Dreiecke, die durch die Abbildungsstrahlen und den Basen gebildet werden, gleichschenklige Dreiecke. Je weiter die Punkte von der Unterteilungsgrenze liegen, desto größer ist der Unterschied.

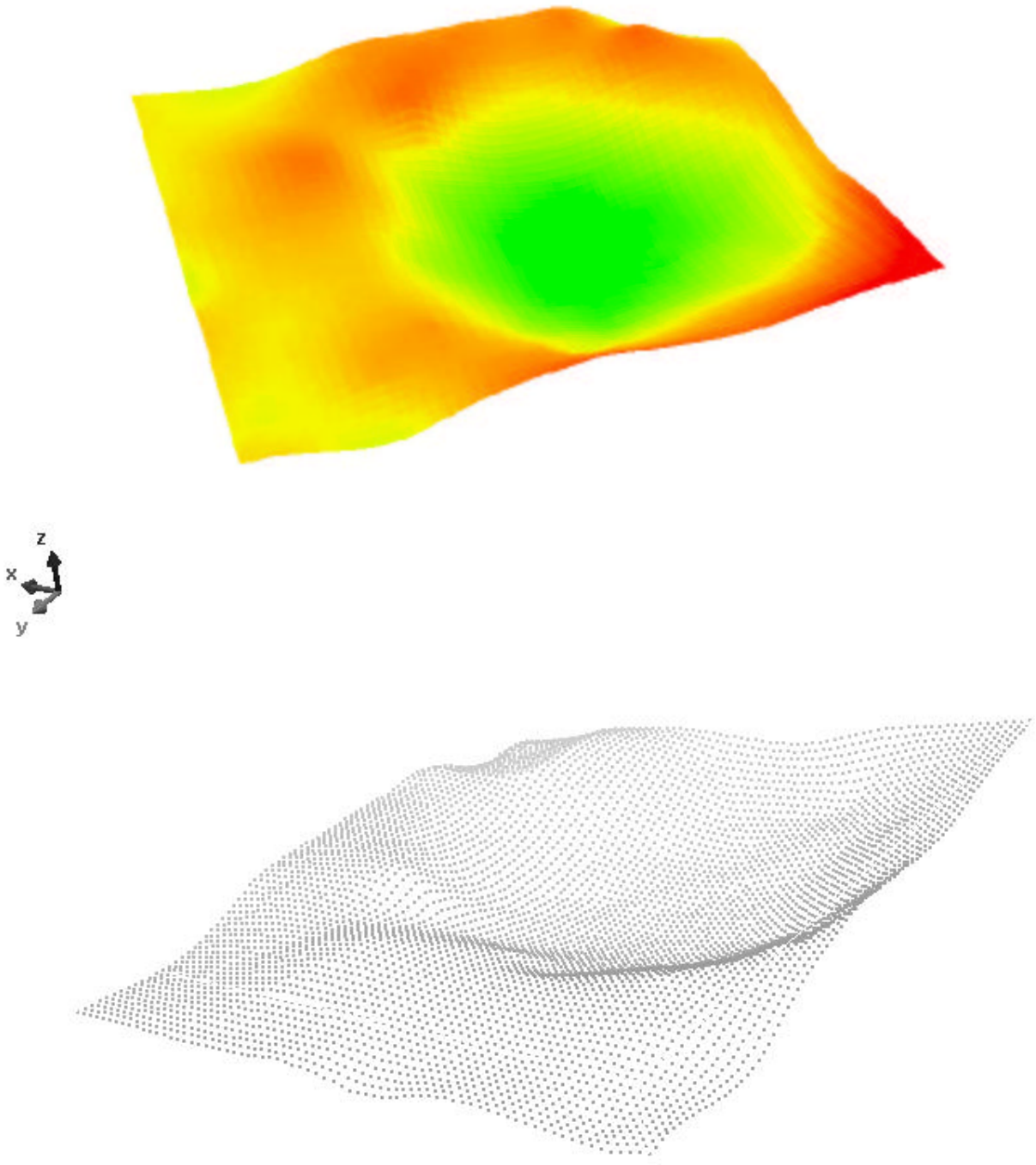


Abbildung 7.15: *Visualisierung der Ergebnisse der Oberflächenrekonstruktion mit dem Approximationsmodell. Zwischen den Bildpunkten wurde eine $2\frac{1}{2}D$ Oberfläche mit einem regelmäßigem Punktegitter interpoliert.*

Tabelle 7.6: *Ergebnisse des Vergleiches der Referenzobjektpunkte mit den Objektpunkten die mit Hilfe der Approximation bestimmt worden sind.*

	X/Y	***Z***
RMSE	0.03 mm	0.37 mm
Max	0.26 mm	1.30 mm
Mittel	-0.02 mm	-0.23 mm
d<0.05mm	95.4 %	6.5 %
0.05mm<d<0.5mm	4.6 %	73.2 %
0.5mm<d<1mm	0.0 %	19.6 %
d>1mm	0.0 %	0.7 %

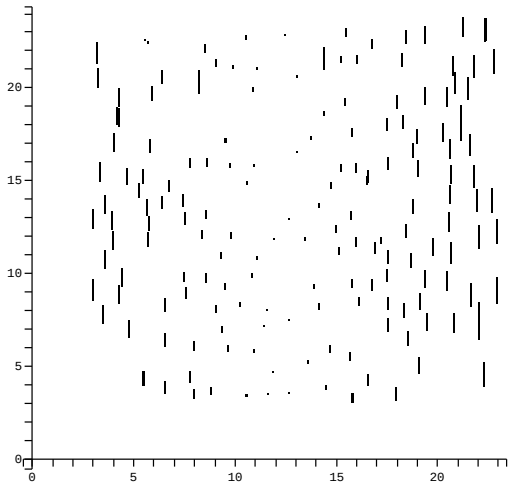


Abbildung 7.16: *Höhendifferenzen zwischen den 3D Punkten, die mit und ohne Unterteilung des Beobachtungsraums bestimmt worden sind. Die Unterteilungsgrenze verläuft senkrecht in der Mitte des Gebiets. Diese Graphik zeigt, dass sich der Unterschied mit dem Abstand zu der Unterteilungsgrenze vergrößert.*

Abbildung 7.17: *Verteilung der Passpunkte im Wasser und in der Luft und der Verknüpfungspunkte auf der Sedimentoberfläche. Die Residuen im Bildraum sind mit Faktor 5 vergrößert dargestellt und verdeutlichen den Einfluss der Mehrmediengeometrie auf die Passpunkte im Wasser.*

7.4 Approximation mit geometrischer Fehlerminimierung und realen Passpunkten

Für einen weiteren Test wird die Approximation durch eine Schätzung mit geometrischer Fehlerminimierung mit realen Passpunkten bestimmt und mit den Ergebnissen der Approximation mit algebraischer Fehlerminimierung verglichen.

Für diese Berechnungen wird die kommerzielle digitale photogrammetrische Station *Leica Photogrammetry Suite* (LPS) der Firma Leica eingesetzt. Somit ist auch gewährleistet, dass die beiden Berechnungen vollkommen unabhängig voneinander durchgeführt werden. Das Programm ist nicht für die Auswertung der sehr spezialisierten Mehrmediengeometrie entwickelt, jedoch kann prinzipiell die approximierende Orientierung mit geometrischer Fehlerminimierung und anschließender Objektrekonstruktion getestet werden. Für die Auswertung wird der gleiche Datensatz wie im vorhergehenden realen Beispiel verwendet.

Die Bestimmung der Approximation wird mit LPS derart realisiert, dass alle Passpunkte zusammen mit den Verknüpfungspunkten, die sich auf der Sedimentoberfläche befinden, in die Ausgleichung des perspektivischen Abbildungsmodells eingehen.

Die Verteilung der Passpunkte und der Verknüpfungspunkte ist zusammen mit deren Residuen im Bildraum in Abbildung 7.17 dargestellt. Deutlich wird der Einfluss der Mehrmediengeometrie an den großen Residuen der Passpunkte unter Wasser sichtbar.

Abbildung 7.18 zeigt die rekonstruierte Oberfläche. Ihre Höhenausdehnung ist insgesamt flacher als die reale Oberfläche. Abbildung 7.19 zeigt den Höhenfehler der Oberfläche im Vergleich zu der, die unter Verwendung des strengen Modells berechnet worden ist. Tabelle 7.7 unterstützt dieses Ergebnis mit numerischen Werten. Mit diesen Ergebnissen wurde die geringere Qualität deutlich, die mit der geometrischen Fehlerminimierung und realen Passpunkten und Verknüp-

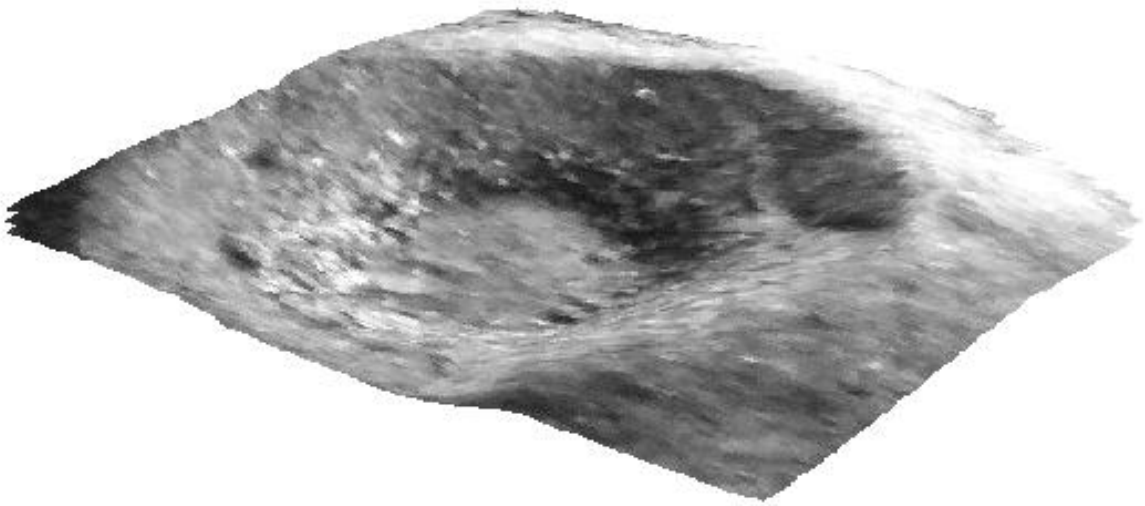


Abbildung 7.18: *Visualisierung der mit LPS rekonstruierten Oberfläche. Die Approximation (geometrische Fehlerminimierung von LPS) wurde nur mit realen Passpunkten bestimmt. Das auf die Oberfläche projizierte Orthophoto wurde ebenfalls mit LPS berechnet.*

fungspunkten auf der Objektoberfläche erreicht werden kann und die Effizienz der algebraischer Fehlerminimierung mit synthetischen Passpunkten in diesem Zusammenhang unterstrichen. Bei diesem Fazit gilt es noch zu berücksichtigen, dass bei der Schätzung der Approximation mit LPS die Parameter im Bündelblock bestimmt worden sind. Dies ist in diesem Fall kein Vorteil, da die Einflüsse der Mehrmediengeometrie auf die einzelnen Kameras nicht gleich sein müssen und so eine gegenseitige, negative Beeinflussung stattfinden kann. Auch konnte hier wiederum die Kammerkonstante nicht neu geschätzt werden.

Es wurde hiermit gezeigt, dass eine Bestimmung einer solchen Approximation mit einem System für herkömmliche Aufnahmen prinzipiell berechnet werden kann. Auf der anderen Seite ist die erreichte Genauigkeit aber deutlich schlechter, als mit der speziellen Berechnung der Approximation mit synthetischen Daten und der algebraischen Fehlerminimierung. Es gilt aber zu betonen, dass ein solches System nicht für eine solche Aufgabe entwickelt worden ist, die Genauigkeit also etwas über die spezielle Berechnung der Approximation aussagt und nicht über das System.

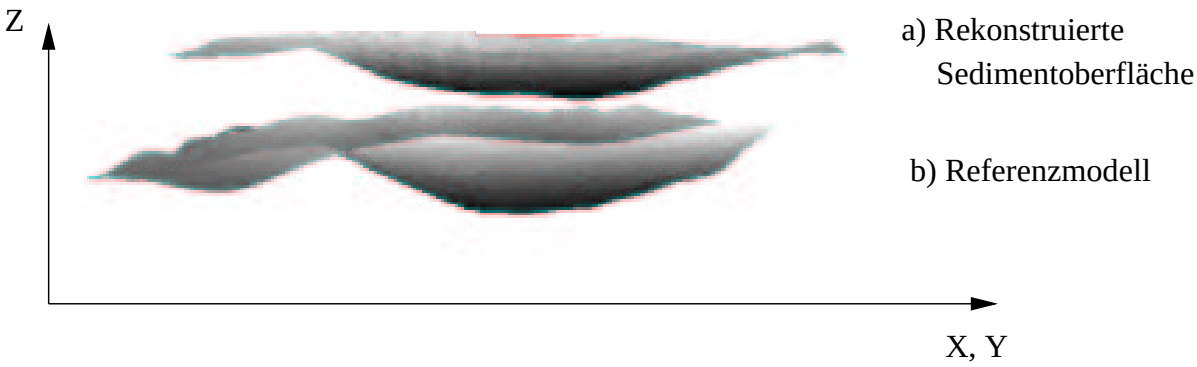


Abbildung 7.19: *Höhenfehler des rekonstruierten DTMs. Oben) mit LPS und der geometrisch basierten Approximation und den realen Passpunkten. Unten) Referenzoberfläche.*

Tabelle 7.7: *Numerische Darstellung des Höhenfehlers der rekonstruierten Sedimentoberfläche (geometrischen Fehlerminimierung) im Vergleich zur Referenzoberfläche.*

Höhen-ausdehnung	**LPS-Approximation (geometr. Fehlerm.)**	**Referenz DHM strenges Modell**
max [cm]	-10.5	-12.8
min [cm]	-12.9	-16.8
diff [cm]	2.4	4.0

Kapitel 8

Schlussbetrachtungen

8.1 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurden drei Hauptthemen behandelt:

- eine neue, allgemeine Repräsentation und Taxonomie optischer Abbildungssysteme unter Berücksichtigung der Eigenschaften der abbildenden Strahlenbündel, insbesondere ihrer punktförmigen und nicht punktförmigen Projektionszentren,
- ein allgemeines, approximierendes Abbildungsmodell einer nicht perspektivischen Abbildung und die Anwendung dieses Modells ohne signifikanten Genauigkeitsverlust für eine dreidimensionale Objektrekonstruktion,
- die Implementation des allgemeinen Approximationsmodells in einen Zuordnungsalgorithmus im Mehrbildverband.

Der Zuordnungsalgorithmus wurde innerhalb dieses Kontextes neu entwickelt und basiert auf rein geometrischen Zuordnungsbedingungen. Innerhalb dieser Arbeit ist er kein Hauptthema und wird nur in soweit analysiert, als dass er als Einsatzmöglichkeit und Anwendungstest der vorgestellten Approximation dient.

Der erste Aspekt dieser Arbeit ist durch das Auftreten neu entwickelter Abbildungssysteme motiviert, die von der klassischen, photogrammetrischen Vorstellung und der Repräsentation eines optischen Abbildungssystems abweichen. Neue Designs von Aufnahmesystemen und die resultierenden geometrischen Abbildungseigenschaften können mit vorhandenen Klassifizierungen von Abbildungssystemen nur unzureichend zugeordnet werden. Daher bedarf es neuer Taxonomien, die Aspekte wie punktförmige und nicht punktförmige Projektionszentren oder bildraum- und objektraumbasierte Korrekturen von Bildfehlern umfassen. Diese Arbeit gibt eine entsprechende neue Taxonomie an, die beliebige Abbildungssysteme behandelt. Für die Klassifizierung betrachten wir Abbildungssysteme als eine Kombination von Teilabbildungen mit jeweils nur einem Projektionszentrum.

Insbesondere die Klasse der Abbildungssysteme in homogenen Medien ist von besonderem Interesse, da sie Bildfehler erzeugen, die objektraumbasiert korrigiert werden müssen. Da dies einen dreidimensionalen Auswerteprozess sehr spezialisiert und komplex werden lassen kann, behandelt diese Arbeit die allgemeine Fragestellung, ob es möglich ist, eine beliebige Abbildung durch das einfachste Abbildungsmodell zu approximieren, ohne dabei signifikant die Endergebnisse der

dreidimensionalen Objektrekonstruktion zu beeinflussen. Es wurde ein Verfahren zur Bestimmung einer solchen Approximation entwickelt und in einen neuen, rein geometrisch basierten Zuordnungsalgorithmus mit anschließender Objektrekonstruktion implementiert. Synthetische und reale Tests für eine photogrammetrische Auswertung unter Dreimedienbedingungen haben gezeigt, dass die Ergebnisse nicht signifikant von denen der strengen Modellierung abweichen. Beobachtungsobjekt war dabei eine fluviale Sedimentoberfläche.

Für die Schätzung der Parameter der Approximation wurden sowohl die geometrische, als auch die algebraische Distanzfunktion minimiert. Im Allgemeinen gilt die Minimierung der geometrischen Distanzfunktion als besser, jedoch können auch bei der meist weniger komplexen Minimierung des algebraischen Fehlers mittels einer systematischen Konditionierung sehr gute Ergebnisse erreicht werden.

Als Motivation für das Anwendungsbeispiel diente die zeitliche Rekonstruktion dynamischer, fluvialer Sedimentoberflächen. Ziel war es, die Einsatzmöglichkeiten photogrammetrischer Methoden zu prüfen, um Initialisierungsdaten für eine Simulation des zugrunde liegenden Sedimentationsprozesses zu erzeugen. Die Ergebnisse haben gezeigt, dass photogrammetrische Methoden grundsätzlich für diese Aufgabe eingesetzt werden können, insbesondere da die Textur der Sedimentoberfläche ausreicht, um genügend Bilder von Oberflächenpunkten in den Bildern zu extrahieren, zuzuordnen und dreidimensional bestimmen zu können. Tests haben gezeigt, dass die Sedimentoberfläche auch während des dynamischen Strömungsprozesses beobachtet und rekonstruiert werden kann. Hierbei darf die Strömung jedoch nicht zu stark sein, da sonst die Sedimentkörnchen aufgewirbelt werden und dadurch sowohl die Formation der Oberfläche zerstört, als auch die Sicht auf die Oberfläche beeinträchtigt werden würde.

8.2 Offene Fragen

Mit dieser Arbeit wurden die Hauptfragestellungen zu unserem Thema in ihren Grundsätzen behandelt und beantwortet. Folgende Aspekte können mit zukünftigen Arbeiten vertieft werden:

A) Approximation

Es wurde ein Verfahren vorgestellt, das theoretisch für jede beliebige, reale, optische Abbildung eine Approximation ohne signifikanten Genauigkeitsverlust für eine effektive dreidimensionale Objektrekonstruktion bestimmen kann. Praktisch gesehen müssen für jedes Sensormodell eigene a priori Untersuchungen durchgeführt werden, um die Effektivität einer entsprechenden Approximation im Detail zu untersuchen und prüfen zu können. Hier ist insbesondere das Verhalten der Methode bei stark verzeichnenden Sensoren wie zum Beispiel das Fischauge von großem Interesse. Für weitere Sensoren siehe zum Beispiel Tabelle 4.2.

B) Zuordnungsalgorithmus

Der Zuordnungsalgorithmus diente hier primär als Auswertealgorithmus, in den die Approximation implementiert worden ist. Er wurde nur unter diesem Aspekt für die Rekonstruktion der Sedimentoberfläche getestet, so dass für ein tiefergehendes Verständnis und eine Beurteilung zusätzliche Tests mit unterschiedlichen Datensätzen durchzuführen sind. Folgende Aspekte können dabei berücksichtigt werden:

- Zusätzliche Merkmale: Hier ist die Frage, ob der Einsatz zusätzlicher Merkmale, wie zum Beispiel radiometrischer Informationen, eine signifikante Verbesserung der Ergebnisse bedeuten würde. Es würde auf jeden Fall die Rechenkomplexität erhöhen.

- Anwendung des Algorithmus auf andere Datentopographien: Hier wurde für die realen Untersuchungen eine glatte, zweieinhalbdimensionale Oberfläche rekonstruiert. Dies sind für eine geometrisch basierte Rekonstruktion gute Rahmenbedingungen, was durch die hier vorgestellten Ergebnisse bestätigt wurde. Wie reagiert dieser Algorithmus, wenn keine glatte Oberfläche beobachtet wird, sondern echte dreidimensionale Daten gegeben sind?

C) Anwendungsbeispiel

Untersuchungen haben gezeigt, dass eine Rekonstruktion einer dynamischen, fluvialen Sedimentoberfläche mit photogrammetrischen Methoden grundsätzlich möglich ist. Für eine tiefergehende Untersuchung und Anwendung können folgende Aspekte berücksichtigt werden:

- Eine höhere Auflösung der Bilddaten kann zu mehr Punkten und damit zu einer feineren Auflösung der Oberfläche führen.

- Für eine zeitliche Rekonstruktion der Oberfläche können die Oberflächeninformationen des vorhergehenden Zeitpunkts in die Zuordnung und Rekonstruktion mit einbezogen werden. Dies vereinfacht den Schritt der Zuordnung enorm, da die Aufnahmefrequenz so gewählt werden kann, dass sich die Sedimentoberfläche zwischen den Aufnahmezeitpunkten nur gering verändert. Damit verbessern sich die Vorinformationen des Objektes und der Suchbereich in den Bildern kann entsprechend verkleinert werden.

- Ein Merkmal der Sedimentstruktur sind die Oberkanten der Rippel, die während des Transportprozesses durch geeignete Beleuchtung sehr markant abgebildet werden können. Untersuchungen haben gezeigt, dass diese gekrümmten Linien in den Bildern gut extrahiert und rekonstruiert werden können. Abbildung 8.1 zeigt eine Aufnahme einer Rippeloberkante und ihre Extraktion im Bildraum und die dynamische Verfolgung des extrahierten Rippels über die Zeit. Hier ist das zeitliche Tracking einzelner Oberkantenbereiche eine interessante Fragestellung der Bildanalyse. Für die sedimentologische Auswertung des Sedimentationsprozesses liefert die zeitliche Verfolgung einer solchen Oberkante neben der Analyse der Volumenbewegung wichtige Informationen.

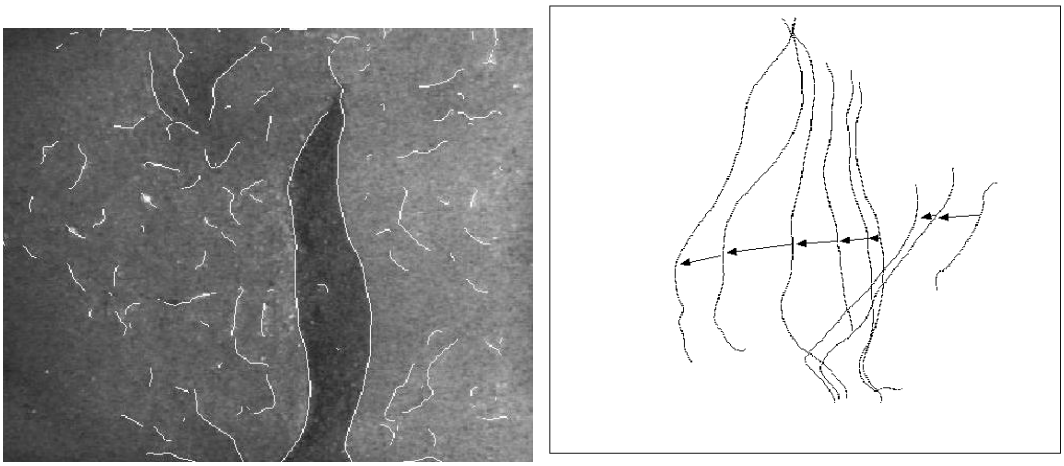


Abbildung 8.1: *Links: Bild von oben auf eine Rippeloberkante, sichtbar gemacht durch eine sehr schräg einfallende Beleuchtung. Die extrahierten Kanten sind im Bild weiß dargestellt. An der Länge der Kanten ist ein Rippel zu erkennen und automatisch herauszufiltern. Die Strömung fließt von recht nach links, so dass die rechte Schattenkante der Rippeloberkante entspricht. Rechts: Extrahierte Rippeloberkante verfolgt über die Zeit. Deutlich ist die Bewegung der Oberkante von rechts nach links zu erkennen, dargestellt durch die Pfeile. Ein zweites Rippel kommt während der Sequenzaufnahme von rechts ins Bild. Es ist zu erkennen, das das erste Rippel von dem zweiten mit der Zeit überlagert wird, wodurch es zu den typischen Schrägschichtungen kommt.*

Anhang A

Singulärwertzerlegung

Die Singulärwertzerlegung (SVD = Singular Value Decomposition) ist eine effektive Technik um mit einem Satz von Gleichungen oder Matrizen zu arbeiten, die singulär oder numerisch annähernd singulär sind. Wir wollen sie hier für die Lösung homogener Gleichungssysteme vorstellen. Im Fall eines überbestimmten Systems liefert die SVD eine beste Approximation im Sinne der kleinsten Quadrate als Lösung. Siehe zum Thema SVD auch Golub & Van Loan, 1989 und Press *et al.* , 2002.

Die SVD basiert auf dem folgenden Theorem der Linearen Algebra:

Jede reelle Matrix $\boldsymbol{A}_{m\times n}$, $m \geq n$ kann als Produkt der orthogonalen Matrix $\boldsymbol{U}_{m\times n}$ (mit orthonormalen Spaltenvektoren), der Diagonalmatrix $\boldsymbol{S}_{m\times n}$ mit den Singulärwerten $\sigma_j \geq 0$, $j = 1..m$ und der Transponierten der orthogonalen Matrix $\boldsymbol{V}_{n\times n}$ (mit orthonormalen Spalten und Zeilen) zerlegt werden, so dass gilt

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{S}\boldsymbol{V}^T \tag{A.1}$$

aus der Orthogonalität von $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$ folgt $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^T = \boldsymbol{I}$ und $\boldsymbol{V}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{V} = \boldsymbol{I}$.

Die SVD gibt Hinweis auf die Singularität von $\boldsymbol{A}$: je mehr Singulärwerte σ_j gleich null sind, desto "singulärer" ist die Matrix. Besitzt $\boldsymbol{A}$ den Rang r, so enthält die Diagonalmatrix $\boldsymbol{S}$ r Singulärwerte von $\boldsymbol{A}$.

Ist $\boldsymbol{A}$ singulär, so existiert ein Nullraum $null(\boldsymbol{A})$ als Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}.$$

Die Spalten von $\boldsymbol{V}$, deren zugehörige Singulärwerte σ gleich null sind, bilden eine Orthonormalbasis des Nullraums.

Gilt zum Beispiel für die Zerlegung

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m1} & \cdots & u_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & & & \\ & \sigma_{r+1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{1n} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{bmatrix}$$

mit $\boldsymbol{x} = [v_{11}, ..., v_{n1}]^T$, dann folgt aufgrund der Orthogonalität von $\boldsymbol{V}$ $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Der Satz der homogenen Gleichungen wird somit direkt durch die SVD gelöst: jede Spalte $\boldsymbol{v}_j$ von $\boldsymbol{V}$ deren korrespondierender Singulärwert σ_j gleich null ist, liefert eine Lösung des Systems.

Die Lösung ist damit eindeutig bis auf

- der Erzeugung gleicher Permutationen der Spalten von $\boldsymbol{U}$, den Singulärwerten in $\boldsymbol{S}$ und den Spalten von $\boldsymbol{V}$,
- das Bilden von Linearkombinationen beliebiger Spalten von $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{V}$.

Im Falle von realen Daten ist die Matrix $\boldsymbol{A}$ meist nicht singulär, so dass keine Singulärwerte gleich null sind. Ist das Gleichungssystem dennoch gut konditioniert, so können Singulärwerte existieren, die sehr klein sind. In einem solchen Fall wird als Lösung für das überbestimmte homogene System die Spalte von $\boldsymbol{V}$ zum kleinsten Singulärwert gewählt. Sind die Singulärwerte zu groß, ist das Gleichungssystem schlecht konditioniert und nicht lösbar.

Innerhalb dieser Arbeit wird die Singulärwertzerlegung für die Bestimmung eines Objektpunktes durch einen Vorwärtsschnitt beliebig vieler Raumstrahlen und der Schätzung der DLT als kleinste Quadrate Lösung (siehe Anhang C) verwendet.

Anhang B

Äquivalenz der Repräsentation einer projektiven Abbildung und dem Modell der Kollinearitätsgleichung

Die in 3.1 definierte lineare Repräsentation einer projektive Kamera wird primär in dem Bereich des Computer Visions angewendet. Im Bereich der Photogrammetrie wird für die Modellierung des Abbildungsmodells meist das nicht lineare Modell der Kollinearitätsgleichung verwendet. Die Identität der beiden Modelle kann folgendermaßen gezeigt werden:

Als nicht lineare Kollinearitätsbedingung für den Objektpunkt $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)$, dem Bildpunkt $\widetilde{\boldsymbol{x}}' = (x, y, c)$ und dem Projektionszentrum $\boldsymbol{Z} = (Z_X, Z_Y, Z_Z)$ gilt mit der Kollinearitätsbedingung:

$$\begin{aligned} \widetilde{x}'_i &= c\frac{r_{11}(X - Z_X) + r_{12}(Y - Z_Y) + r_{13}(Z - Z_Z)}{r_{31}(X - Z_X) + r_{32}(Y - Z_Y) + r_{33}(Z - Z_Z)} \\ \widetilde{y}'_i &= c\frac{r_{21}(X - Z_X) + r_{22}(Y - Z_Y) + r_{23}(Z - Z_Z)}{r_{31}(X - Z_X) + r_{32}(Y - Z_Y) + r_{33}(Z - Z_Z)} \end{aligned} \tag{B.1}$$

mit

R: Rotationsmatrix $R = R(\omega, \gamma, \kappa) = r_{ij}, i, j = 1, 2, 3$

und als erweiterte Kollinearitätsgleichung, die die Scherung s und den Maßstabsunterschied m der beiden Achsen und die Hauptpunktverschiebung x'_h, y'_h berücksichtigt, erhalten wir

$$\begin{aligned} x' &= \widetilde{x}' + s\widetilde{y}' + x'_h \\ y' &= \widetilde{y}' + m\widetilde{y}' + y'_h. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Betrachten wir nun die homogenen Repräsentation 3.1

$$\mathbf{x}' = \mathsf{P}\mathbf{x} = \mathsf{K}R[I \mid -\boldsymbol{Z}]\mathbf{x}$$

folgt

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathsf{K}R \begin{bmatrix} X - Z_x \\ Y - Z_Y \\ Z - Z_Z \end{bmatrix} = \mathsf{K} \begin{bmatrix} r_{11}(X - Z_X) + r_{12}(Y - Z_Y) + r_{13}(Z - Z_Z) \\ r_{21}(X - Z_X) + r_{22}(Y - Z_Y) + r_{23}(Z - Z_Z) \\ r_{31}(X - Z_X) + r_{32}(Y - Z_Y) + r_{33}(Z - Z_Z) \end{bmatrix}$$

mit $(r_i) = r_{i1}(X - Z_X) + r_{i2}(Y - Z_Y) + r_{i3}(Z - Z_Z)$, $i = 1, 2, 3$ folgt

$$\mathsf{K}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(r_1) + cs(r_2) + x'_h(r_3) \\ c(1+m)(r_2) + y'_h(r_3) \\ r_3 \end{bmatrix}$$

Um Bildkoordinaten zu erhalten, wird der homogene Vektor auf $w = 1$ normiert:

$$= \begin{bmatrix} c\frac{(r_1)}{(r_3)} + cs\frac{(r_2)}{(r_3)} + x'_h \\ c(1+m)\frac{(r_2)}{(r_3)} + y'_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

aus Gleichung B.1 folgt $c\frac{(r_1)}{(r_3)} = \widetilde{x}'$ und $c\frac{(r_2)}{(r_3)} = \widetilde{y}'$, womit auch

$$x' = \widetilde{x}' + s\widetilde{y}' + x'_h$$
$$y' = \widetilde{y}' + m\widetilde{y}' + y'_h$$

folgt. Diese Relationen sind identisch mit den Relationen B.2.

Die Berechnung der Orientierungsparameter aus der Projektionsmatrix P geschieht wie folgt: zunächst wird die Projektionsmatrix in die zwei Untermatrizen $\mathsf{H}_{\infty_{(3\times3)}}$ und $\mathbf{h}_{(3\times1)}$ aufgeteilt:

$$\mathsf{P} = [\mathsf{H}_\infty|\mathbf{h}] = \mathsf{K}R[I \mid -\boldsymbol{Z}]$$

daraus folgt

$$\mathsf{H}_\infty = \mathsf{K}R \tag{B.3}$$
$$\mathbf{h} = -\mathsf{K}RZ = -\mathsf{H}_\infty\boldsymbol{Z} \tag{B.4}$$

Multiplikation der Gleichung B.3 von rechts mit H_∞^T ergibt

$$\mathsf{H}_\infty\mathsf{H}_\infty^T = \mathsf{K}RR^T\mathsf{K}^T = \mathsf{K}\mathsf{K}^T.$$

K ist eine obere Dreiecksmatrix. $\mathsf{H}_\infty\mathsf{H}_\infty^T$ lässt sich analog zum Cholesky-Verfahren (Produkt einer unteren Dreiecksmatrix und ihrer Transponierten) in das Produkt einer oberen Dreiecksmatrix und ihrer Transponierten zerlegen, falls $\mathsf{H}_\infty\mathsf{H}_\infty^T$ positiv definit ist. Eine Matrix ist positiv definit, falls sie symmetrisch ist und ihre Eigenwerte positiv sind. Da das Produkt einer Matrix mit ihrer Transponierten symmetrisch ist, ist also auch $\mathsf{H}_\infty\mathsf{H}_\infty^T$symmetrisch.

Das Ergebnis der Cholesky-Zerlegung liefert die Matrix $\mathsf{K} = (K_{ij}), i, j = 1, 2, 3$. Um die Parameter der Inneren Orientierung aus der Matrix zu erhalten, muss die Matrix mit $K_{33} = 1$ normiert werden.

Die Rotationsmatrix ergibt sich aus der Multiplikation von B.3 von links mit K^{-1}

$$\mathsf{K}^{-1}\mathsf{H}_\infty = \mathsf{K}^{-1}\mathsf{K}R = R.$$

Das Projektionszentrum folgt mit Gleichung B.4 und Gleichung B.3:

$$\mathbf{h} = \mathsf{H}_\infty(-\boldsymbol{Z})$$

zu

$$\boldsymbol{Z} = -\mathsf{H}_\infty^{-1}\mathbf{h}.$$

Ist H_∞ eine reguläre Matrix, so handelt es sich um eine im Endlichen liegende Kamera. Ist H_∞ singulär, so liegt das Projektionszentrum der Kamera im Unendlichen.

Anhang C

Schätzung der Direkten Linearen Transformation durch die kleinste Quadrate Minimierung des algebraischen Fehlers

Für die Schätzung der Direkten Linearen Transformation (DLT) gilt es die Kameramatrix $\mathsf{P}_{3\times4}$ derart zu bestimmen, dass zwischen den gegebenen homogenen Objektkoordinaten $\mathbf{X}_i = [X_i, Y_i, Z_i, 1]$, $i = 1..n$ und den gegebenen homogenen Bildkoordinaten $x_i = [x_i, y_i, w_i]^T$, $i = 1..n$ folgende lineare Relation gilt

$$\mathbf{x}_i = \mathsf{P}\mathbf{X}_i. \tag{C.1}$$

Da es sich um eine lineare Relation zwischen den Beobachtungen und den Unbekannten handelt und von normalverteilten Koordinatenmessungen ausgegangen werden kann, kann die Minimierung des algebraischen Fehlers nach Gleichung 2.11 effektiv eingesetzt werden. Bevor die Messmatrix $\mathbf{M}$ (siehe Gleichung 2.10) des Problems aufgestellt wird, wird eine Normalisierung der Eingabedaten vorgenommen, um nach Hartley, 1995 die Bedingungen der Messmatrix zu verbessern und so eine signifikante Verbesserung der Schätzergebnisse zu erreichen.

Konditionierung der Eingabedaten

1. Translation
   Die 3D Objektpunkte und die 2D Bildpunkte sollten unabhängig voneinander derart verschoben werden, dass ihr Schwerpunkt im Ursprung liegt.

2. Skalierung
   In einem zweiten Schritt sollten die Koordinaten aller Punkte derart skaliert werden, dass der mittlere Abstand der Bildpunkte vom Ursprung $d_{2D} = \sqrt{2}$ und der mittlere Abstand der Objektpunkte vom Ursprung $d_{3D} = \sqrt{3}$ beträgt.

Die Schätzung der Projektionsmatrix wird zunächst mit diesen konditionierten Eingabedaten berechnet. Anschließend wird eine Rücktransformation durchgeführt.

Aufstellung der Messmatrix

Gleichung C.1 kann durch das Kreuzprodukt $\boldsymbol{x}_i \times \mathsf{P}\boldsymbol{X}_i$ dargestellt werden. Wird die i-te Zeile der Matrix P mit $\boldsymbol{p}_i$, $i = 1, 2, 3$ bezeichnet, so kann das Kreuzprodukt wie folgt geschrieben werden

$$\boldsymbol{x}_i \times \mathsf{P}\boldsymbol{X}_i = \begin{bmatrix} y_i \boldsymbol{p}_3^T \boldsymbol{X}_i - w_i \boldsymbol{p}_2^T \\ w_i \boldsymbol{p}_1^T \boldsymbol{X}_i - x_i \boldsymbol{p}_3^T \\ x_i \boldsymbol{p}_2^T \boldsymbol{X}_i - y_i \boldsymbol{p}_1^T \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt für jede Korrespondenz die drei folgenden Gleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i \mathbf{X}_i^T & y_i \mathbf{X}_i^T \\ w_i \mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i \mathbf{X}_i^T \\ -y_i \mathbf{X}_i^T & x_i \mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Nur zwei der drei Gleichungen des Systems sind linear unabhängig, daher genügt es, wenn im Weiteren nur die ersten beiden Gleichungen verwendet werden. Wird ein Satz von n Punktkorrespondenzen gemessen, so stehen insgesamt $2n$ Gleichungen für die Schätzung der 12 unbekannten Parameter der Projektionsmatrix P zur Verfügung. Werden alle Gleichungen zu einem System zusammengefügt, erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & -w_i \mathbf{X}_i^T & y_i \mathbf{X}_i^T \\ w_i \mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i \mathbf{X}_i^T \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0^T & -w_i \mathbf{X}_i^T & y_i \mathbf{X}_i^T \\ w_i \mathbf{X}_i^T & \mathbf{0}^T & -x_i \mathbf{X}_i^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \boldsymbol{p}_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}_{2n \times 9} \boldsymbol{p}_{9 \times 1} = \mathbf{0}.$$

Die Projektionsmatrix P wird berechnet durch die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p} = 0, \quad mit\ \boldsymbol{p} \neq \mathbf{0}\ \ und\ \ \|\boldsymbol{p}\| = 1.$$

Für die Minimierung des algebraischen Fehlers folgt mit Gleichung (2.11)

$$d_{alg} = \Sigma_i d_{i_{alg}}(\mathbf{x}_i, \mathsf{P}\mathbf{X}_i)^2 \ \rightarrow\ \min. \tag{C.2}$$

Für die Schätzung $\widehat{\boldsymbol{x}}_i = (\widehat{x}_i, \widehat{y}_i, \widehat{w}_i)^T = \mathsf{P}\boldsymbol{X}_i$ erhalten wir folgenden Fehler

$$\boldsymbol{A}_i \boldsymbol{p} = \boldsymbol{e}_i = \begin{pmatrix} y_i \widehat{w}_i - w_i \widehat{y}_i \\ w_i \widehat{x}_i - x_i \widehat{w}_i \end{pmatrix}. \tag{C.3}$$

Mit den Gleichungen (2.11), (C.2) und (C.3) folgt die Minimierung des algebraischen Fehlers

$$d_{alg} = ||\boldsymbol{e}||^2 = \boldsymbol{\Sigma}_i((y_i \widehat{w}_i - w_i \widehat{y}_i)^2 + (w_i \widehat{x}_i - x_i \widehat{w}_i)^2 \rightarrow \min.$$

Dieses Minimierungsproblem wird bei den Berechnungen im Rahmen dieser Arbeit unter Verwendung der Singulärwertzerlegung der Matrix $\mathbf{A}$ (siehe Anhang A) gelöst.

Anhang D

Strenge und approximierende Modellierung der Objektivverzeichnung

D.1 Strenge Modellierung der Objektivverzeichnung in Abhängigkeit von der Objektraumposition

Brown, 1971 stellt ein Verfahren vor, das die gaußsche radiale Verzeichnung durch eine lineare Interpolation in Abhängigkeit von der Fokussierung bestimmt. Dabei werden zunächst die Parameter der Verzeichnung für zwei unterschiedliche Fokussiereinstellungen s_1 und s_2 bestimmt. Davon ausgehend, können die Parameter für jede beliebige andere Einstellung abgeleitet werden. Brown hat die entfernungsabhängigen Formeln von Magill, 1954 erweitert zu:

$$\delta r_s = \alpha_s \delta r_{s_1} + (1 - \alpha_s)\delta r_{s_2} \tag{D.1}$$

mit

$\alpha_s = \frac{s_2 - s}{s_2 - s_1}$

s : Distanz zwischen Objekt und Sensor, für die die Verzeichnung δr_s bestimmt werden soll

$\delta r_{s_1}, \delta r_{s_2}$: bekannte Verzeichnungsfunktionen für Entfernung $s_1$und s_2

Mit Gleichung D.1 können die Koeffizienten der Verzeichnungsfunktion δr_s für beliebige Distanzen s bestimmt werden.

Fryer & Brown, 1986 schlagen darüber hinaus für eine strenge Modellierung der Objektivverzeichnung die Einführung eines Skalierungsfaktors vor.

D.2 Approximierende Modellierung der Objektivverzeichung in Abhängigkeit von der Bildraumposition

Für eine bildraumabhängige Modellierung existieren physikalisch (siehe Brown, 1971 und Wester-Ebbinghaus, 1983) und phänomenologisch (siehe Ebner, 1976) motivierte Ansätze. Mittels dieser Modelle können Funktionen zur Berechnung von Korrekturwerte k_x, k_y in Abhängigkeit von der Position (x, y) im Bildraum bestimmt werden und die Bilder entsprechend a priori entzerrt werden.

Die Korrektur der Bildkoordinaten ist linear, wodurch das Modell der projektiven Kamera auf einfachem Wege um die Korrekturwerte erweitert werden kann. Seien $\widetilde{x}$ und $\widetilde{y}$ die Koordinaten eines verzeichneten Bildpunktes $\widetilde{\boldsymbol{x}}$, dann berechnen sich die korrigierten Bildpunktkoordinaten x' und y' von $\boldsymbol{x}'$ wie folgt:

$$x' = \widetilde{x} + k_x(\widetilde{x})$$

$$y' = \widetilde{y} + k_y(\widetilde{y})$$

Werden die Korrekturwerte in die Transformationsmatrix $\mathsf{H}_{\widetilde{x}}$ geschrieben

$$\mathsf{H}_{\widetilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & k_x \\ 0 & 1 & k_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

so erhalten wir für die Abbildung eines Objektpunktes in den Bildraum

$$\mathbf{x} = \mathsf{H}_{\widetilde{\mathbf{x}}}(\mathbf{x})\mathsf{K}R(I \mid -\boldsymbol{Z})\mathbf{X}. \tag{D.2}$$

Mit $\mathsf{K}_{\widetilde{\mathbf{x}}} = H_{\widetilde{\mathbf{x}}}(\widetilde{\mathbf{x}})\mathsf{K}$ folgt für die bildraumpositionsabhängige Projektionsmatrix

$$\mathsf{P}_{\widetilde{\mathbf{x}}} = \mathsf{K}_{\widetilde{\mathbf{x}}}R(I \mid -\boldsymbol{Z})$$

und

$$\mathbf{x} = \mathsf{P}_{\widetilde{\mathbf{x}}}\mathbf{X}.$$

Anhang E

k-means Clustering

Es existieren verschiedene Verfahren für die Gruppierung einer dreidimensionalen Punktwolke. Das $k-means\ Clustering$ ist eine sehr elementare, aber auch sehr verbreitete Methode, die eine Punktwolke in k Gruppen unterteilt. k muss a priori bekannt sein oder in einem ersten Schritt bestimmt werden. Das Ergebnis der Gruppierung hängt ab von der Wahl der zu minimierenden Metrik und der Distanz. Hier wird als zu minimierende Metrik die euklidische Distanz für jedes Element einer Gruppe zu seinem Schwerpunkt berechnet.

In einem ersten Initialisierungsschritt wird die Anzahl k der Gruppe bestimmt unter Verwendung eines Schwellwertes d_1, der die maximale euklidische Distanz zwischen zwei Punkten einer Gruppe definiert. In einem zweiten Schritt werden die Schwerpunkte der einzelnen Cluster bestimmt unter der Minimierung der euklidischen Distanz innerhalb eines Clusters von jedem Punkt zu dem Schwerpunkt. Ein Schwellwert d_2 wird für die maximale euklidische Distanz dazu verwendet, einzelne Punkte aus einem Cluster zu entfernen. Cluster, die danach nicht genügend Punkte enthalten, werden eliminiert. Die Schwellwerte müssen entsprechend der Verteilung der Objektpunkte und der zu erwartenden Genauigkeit bestimmt werden. Enthält das Clustering keine Fehler, so können bis zu $n_s \cdot (n-1)$ Punkte zu einem Cluster, also zu einem Objektpunkt gehören (n_s ist die Anzahl der Variationen des Masterbildes, n ist die Anzahl der Bilder). Die Mindestanforderung ist die Anzahl von $3n_s$ Punkte in einem Cluster. Dies entspricht der Bedingung, dass ein Objektpunkt in mindestens drei Bildern abgebildet worden ist. Soll die Zuverlässigkeit erhöht werden, so kann die Abbildung eines Objektpunktes in mehr als drei Bildern gefordert werden.

Die so ermittelten Schwerpunkte der Cluster können als sehr gute Näherungswerte der Objektpunkte für weitere Schritte verwendet werden.

Anhang F

Kenndaten der Ausgleichung der Orientierungsparameter

Tabelle F.1: *Kenndaten der Schätzung der Orientierungsparameter des strengen Mehrmedienmodells.*

Daten der Ausgleichung mit physikalischem Modell	
Anzahl unbekannter Neupunktkoordinaten	$54 \cdot 3$
Anzahl der Beobachtungen	438
Anzahl der Unbekannten	194
Anzahl der Restriktionen	4
Anzahl zusätzlich gewichteter Parameter	12
geschätzte Varianz der Gewichtseinheit σ_0^2	$0.035\ mm^2$
Standardabweichung σ_0	$0.18\ mm$

Tabelle F.2: *Kenndaten der Schätzung der Parameter des approximierenden Abbildungsmodells.*

Daten der Ausgleichung für Approximationsmodell	
Anzahl der Unbekannten u_g Min. geom. Fehler	28
Anzahl der Unbekannten u_a Min. algebr. Fehler	48
Anzahl der in die Schätzung eingehenden Punkte	846
Ausdehnung des abgedeckten Gebietes	$24 \cdot 24 \cdot 8\ cm^3$

Literatur

Abdel-Aziz, Y.I., & Karara, H.M. 1971. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry. *Pages 147–155 of: Procceedings of the Symposium on Close-Range Photogrammetry.* Springer-Verlag.

Abraham, S. 1998. *Test field based selfcalibration of stereo camera systems.* Tech. rept. Rheinische-Friedrich-Wilhelmsuniversität, http://www.ipb.uni-bonn.de/ipb/staff/Steffen.dir/stereo.html.

Bachmann, M. 2000. *Verbesserung der Genauigkeitsgrößen von Grossmanipulatoren im Mehrmedieneinsatz mit Hilfe der digitalen Photogrammetrie.* Ph.D. thesis, Universität Hannover, Institut für Werkstoffkunde.

Bergmann, L., & Schaefer, C. 1972. *Lehrbuch der Experimentalphysik, Optik.* Fünfte edn. Vol. Band III. W. de Gruyter.

Brandes, U. 1995. *Rekonstruktion bewegter Wasseroberflächen anhand ihrer lichtbrechenden Wirkung.* M.Phil. thesis, Rheinische-Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

Bronstein, I.N., & Semendjajew, K.A. 1989. *Taschenbuch der Mathematik.* Verlag Harri Deutsch.

Brown, D.C. 1971. Close-range camera calibration. *Photogrammetric Engineering*, **37**(No. 8), 855–866.

Courant, R., & Robbins, H. 1962. *Was ist Mathematik? (Original: What is mathematics, erschienen im Verlag der Oxford University Press).* Springer-Verlag.

Das, G.B. 1949. A Mathematical Approach to Problems in Photogrammetry. *Empire Survey Review.*

Dreschler-Fischer, L. 1987. *Intelligent autonomous systems.* Elsevier Science Publishers, Amsterdam. Chap. A blackboard system for dynamic stereo matching, pages 189–202.

Ebner, H. 1976. Selfcalibrating block adjustment. *BuL*, 128–139.

Elberink, S.O., & Vosselman, G. 2002. 3D Line reconstruction from airborne three-line scanner data. *Pages 108–113 of:* Kalliany, R.; Leberl, F.; Fraundorfer F. (ed), *IAPRS*, vol. 34.

Ernst, H. 1997. *Photogrammetric mensuration of water surfaces.* M.Phil. thesis, Rheinische-Friedrich-Wilhemsuniversität.

FAUGERAS, O., & PAPADOPOULO, T. 1998. *Grassmann-Caley Algebra for Modeling Systems of Cameras and the Algebraic Equations of the Manifold of Trifocal Tensors.* Trans. of the Royal Society.

FISCHER, G. 1992. *Analytische Geometrie.* Vieweg Studium, Grundkurs Mathematik.

FLÜGGE, J. 1956. *Leitfaden der geometrischen Optik und des Optikrechnens.* Studia Mathematica / Mathematische Lehrbücher, vol. XI. Vandenhoeck and Ruprecht, Göttingen. Chap. 1.2 Das Brechungsgesetz.

FÖRSTNER, W. 2000. New orientation procedures. *In: ISPRS 2000 : Geoinformation for all.*

FRASER, C.S., & SHORTIS, M. 1992. Variation of distortion within the photographic field. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **58**(6), 851–855.

FRASER, C., HANLEY H.B. YAMAKAWA T. 2001. Sub-meter geopositioning with IKONOS GEO imagery. *In: ISPRS Workshop "High resolution Mapping from Space", Hanover.* (on CDROM).

FÖRSTNER, W. 1986. A feature based correspondence algorithm for image matching. *Pages 150–166 of: IntArchPhRS, Symposium Rovaniemi, Kommission III*, vol. 26.

FÖRSTNER, W. 1994. A framework for low level feature extraction. *Pages 383–394 of:* EKLUNDH, J.O. (ed), *Computer Vision - ECCV 94.* LNCS, vol. 802. Springer.

FÖRSTNER, W., & WROBEL, B. 2004a. *Manual of Photogrammetry.* John Wiley and Sons. Chap. 11: Analytical Photogrammetric Operations.

FÖRSTNER, W., & WROBEL, B. 2004b. *Manual of Photogrammetry.* John Wiley and Sons. Chap. 2.3 Projective Geometry.

FRYER, J., & FRASER, C. 1986. Analytical calibration of underwater cameras. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, **26**.

FRYER, J.G., & BROWN, D.C. 1986. Lens distortion for close-range photogrammetry. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **52**.

FUCHS, C. 1998. *Extraktion polymorpher Bildstrukturen und ihre topologische und geometrische Gruppierung.* Ph.D. thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn.

GOLUB, G. H., & VAN LOAN, C. F. 1989. *Matrix Computations.* The Johns Hopkins University Press. Chap. 2: Orthogonality and the SVD.

GRODECKI, J., & DIAL, G. 2003. Block Adjustment of High-Resolution Satellite Images Described by Rational Polynomials. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing (PE&RS)*, **69**(1), 59–70.

GROSSBERG, M.G., & NAYAR, S.K. 2001. A General Imaging Model and a Method for Finding its Parameters. *Pages 108–115 of: Proc. International Conference on Computer Vision.*

HARTLEY, R. 1998. Minimizing algebraic error. *Pages 1175–1192 of: Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 356.

HARTLEY, R., & ZISSERMAN, A. 2003. *Multiple View Geometry in Computer Vision.* Cambridge University Press.

HARTLEY, R.I. 1995. In defence of the 8-point algorithm. *Pages 1064–1070 of: Int. Conf. on Computer Vision, Los Alamitos, CA: Ieee Computer Society Press.*

HAU, T. 2000. *Generische Strukturen zur Modellierung der Parameterschätzung.* Ph.D. thesis, Rheinische-Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn, Shaker Verlag.

HEIPKE, C., & KORNUS, W.AND PFANNENSTEIN, A. 1996. The evaluation of MEOSS airborne three-line scanner imagery: processing chain and results. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **62**(3), 293–299.

HELMERT, F.R. 1872. *Die Ausgleichsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.* Teubner, Leipzig.

HEUEL, S. 2004. *Uncertain Projective Geometry - Statistical Reasoning for Polyhedral Object Reconstruction.* Springer.

HÖHLE, J. 1971. *Zur Theorie und Praxis der Unterwasser-Photogrammetrie.* Nr. 163, Dissertation, Universität Karlsruhe, Deutsche Geodätische Kommission.

KOCH, K.R. 1997. *Parameterschätzung und Hypothesentests.* Dümmler Verlag Bonn.

KOTOWSKI, R. 1987. *Zur Berücksichtigung lichtbrechender Flächen im Strahlenbündel.* Ph.D. thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelm-Universität Bonn, Deutsche Geodätische Kommission.

KOTOWSKI, R. 1988. Phototriangulation in multi-media-photogrammetry. International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing. **27**.

LANG, F., & FÖRSTNER, W. 1998. Matching Techniques. *In:* FÖRSTNER, W. (ed), *Proc. of the Third Course in Digital Photogrammetry.* Institut für Photogrammetrie, Universität Bonn.

LAVEST, J.M., RIVES, G., & LAPRESTE, J.T. 2000. Underwater Camera Calibration. *Pages S. 654–668 of: ECCV 2000.*

LUHMANN, T. 2003. *Nahbereichsphotogrammetrie.* Zweite Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg. Chap. 3.2 Geometrische Grundlagen.

MAAS, H.-G. 1992a. Complexity analysis for the determination of image correspondences in dense spatial target fields. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*, **29**(Part B5), 482–485.

MAAS, H.-G. 1992b. *Digitale Photogrammetrie in der dreidimensionale Strömungsmeßtechnik.* Ph.D. thesis, ETH-Zürich.

MAAS, H.-G. 1997. *Mehrbildtechniken in der digitalen Photogrammetrie.* Ph.D. thesis, ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie.

MAGILL, A.A. 1954. Variation in Distortion with Magnification. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, **54**(No. 3), 135–142.

MAHALANOBIS, P. C. 1936. On the generalized distance in statistics. *Proc. Nat. Inst. Sciences India.*

MAIMONE, M., & SHAFER, S. 1996. A taxonomy for stereo computer vision experiments. *In: Workshop on Performance Characteristics of Vision Algorithms, Cambridge.*

MIKHAIL, E.M. 1963. Use of two-directional triplets in a sub-block approach for analytical aerotriangulation. *Photogr. Eng*, **29**, 1014–1024.

MIKHAIL, E.M.AND ACKERMANN, F. 1976. *Observations and least squares*. University Press of America.

MUNDY, J.L., & ZISSERMAN, A.P. 1992. *Geometric Invarance in Computer Vision*. MIT Press.

MURINO, V., & TRUCCO, A. 2000. Underwater computer vision and pattern recognition. *CVIU*, **79**(1), 1–3.

NAYAR, S.K., & KARMARKAR, A.D. 2000. 360 x 360 Mosaics. *Pages pages I:388–395 of: Proc. CVPR*.

NGUSARU, A. S. 1999. Geometrical scales and cross-shore migration of lunate megaripples. *In: American Geophysical Union, AGU 1999 Fall Meeting, San Francisco*.

OKAMOTO, A. 1981. Orientation and construction of moels, Part III: Mathematical basis of the orientation problem of one-dimensional central-perspective photographs. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing (PE&RS)*, **47**(12), 1739–1752.

OKAMOTO, A. 1984. Orientation problems of two-media photogrammetry with curved boundary surfaces. *Photogrammetric Engineering and Remote Sensing*, **50(3)**, 303–316.

OKAMOTO, A., & HÖHLE, J. 1972. Allgemeines analytisches Orientierungsverfahren in der Zwei- und Mehrmedien-Photogrammetrie und seine Erprobung. *Bildmessung und Luftbildwesen*.

OKAMOTO, A., FRASER C. HATTORI S. HASEGAWA H. ONO T. 1998. An alternative approach to the triangulation of SPOT imagery. *Pages 457 – 462 of: IAPRS*. Part 4, vol. 32.

POHL, J. 1956. *Leitfaden der geometrischen Optik und des Optikrechnens*. Vandenhoeck and Ruprecht.

PRESS, W. H.AND TEUKOLSKY S. A., T., VETTERLING W., & P., FLANNERY B. 2002. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press. Chap. 2.6: Singular Value Decomposition.

PRZYBILLA, H.-J., KOTOWSKI, R., MEID, A., & WEBER, B. 1987. Geometric quality control in nuclear power stations - a procedure for high precision underwater photogrammetry. *International Archives of Photogrammetry and Remote Sensing*.

RINNER, K. 1948. Abbildungsgesetz und Orientierungsaufgaben in der Zweimedienphotogrammetrie. *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen*.

SCHWIDEFSKY, K., & ACKERMANN, F. 1976. *Photogrammetrie*. B.G. Teubner Stuttgart. Chap. 3.6: Fehlertheorie und Genauigkeit der photogrammetrischen Punktbestimmung.

SHAPIRO, L.G., & HARLIK, R.M. 1987. Relational matching. *Applied Optics*, **10**(Nr. 26), 1845–1851.

STÖHR, M. 1998. *Entwicklung dreidimensionaler Particle Tracking Velocimetry zur Messung der Zweiphasenströmung in Gas-Flüssig-Reaktoren*. M.Phil. thesis, Diplomarbeit, Universität Heidelberg.

STURM, P., & RAMALINGAM, S. 2004. A generic concept for camera calibration. *Pages 1–13 of: ECCV - European Confrence on Computer Vision, Prague, Czech Republic*, vol. 2.

SWAMINATHAN, R., GROSSBERG, M.D., & NAYAR, S.K. 2001. Caustics of catadioptric cameras. *Pages 2–9 of: IEEE.*

SWAMINATHAN, R., GROSSBERG, M.D., & NAYAR, S. K. 2003. A perspective on distortions. *Pages 594 – 601 of: Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Madison, Wisconsin.*

TRIGGS, B. 2000. Plane + parallax, tensors and factorization. *Pages 522 – 538 of: Proc. ECCV*, vol. LNCS 1842. Springer Verlag.

VALDIVIA-MANCHEGO, M. 1996. *Stereophotogrammetrisch - sedimentologische Aufnahmen und 3D-Modellierung von Schrägschichtungsgefügen am Beispiel einer pliozänen fluvialen Abfolge in der Niederrheinischen Bucht.* Ph.D. thesis, Geologisches Institut der Universitä Bonn.

WESTER-EBBINGHAUS, W. 1983. *Einzelstandpunkt-Selbstkalibrierung, ein Beitrag zur Feldkalibrierung von Aufnahmesystemen.* Vol. 289. Verlag der Bayrischen Akademie der Wissenschaft.

WILLNEFF, J. 2003. *A Spatio-Temporal Matching Algorithm for 3D Particle Tracking Velocimetry.* Ph.D. thesis, ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie.

WOLF, H. 1987. Das geodätische Gauß-Helmert-Modell und seine Eigenschaften. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, 41–43.

WOLFF, K. 2004. Approximation of non projective mapping and their efficient application for a geometrically based 3D point determination using multiple views. *In: Proceedings of the 20th ISPRS Congress, Istanbul.*

WOLFF, K., & FÖRSTNER, W. 2000a. Exploiting the Multi View Geometry for Automatic Surfaces Reconstruction Using Feature Based Matching in Multi Media Photogrammetry. *In: Proceedings of the 19th ISPRS Congress, Amsterdam.*

WOLFF, K., & FÖRSTNER, W. 2000b. Oral presentation of: Exploiting the multi view geometry for automatic surfaces reconstruction using feature based matching in multi media photogrammetry. *In: 19th ISPRS Congress, Amsterdam.*

WOLFF, K., & FÖRSTNER, W. 2001. Efficiency of feature matching for single- and multi-media geometry using multiple view relations. *Pages 336–344 of:* GRÜN, & KAHMEN (eds), *Optical 3-D Measurement Techniques V, Wien.*

WURSTER, P. 1958. *Geol. Rdsch.* Vol. 47. Stuttgart. Chap. Geometrie und Geologie von Kreuzschichtungskörpern, pages 322–359.