

Klaus Börger

Geodäsie und Quantenphysik

**Institut für
Geodäsie und Geoinformation**

Schriftenreihe

Klaus Börger

Geodäsie und Quantenphysik

Diese Arbeit wurde am 25. November 2005 als Habilitationsschrift zur Erlangung der *venia legendi* für das Fach Geodäsie der Landwirtschaftlichen Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn vorgelegt.

Tag des Habilitationskolloquiums: 29. November 2006
Tag der Antrittsvorlesung: 15. Dezember 2006

Schriftenreihe des Instituts für Geodäsie und Geoinformation
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Förstner
Prof. Dr.-Ing. Karl-Heinz Ilk
Prof. Dr.-Ing. Theo Kötter
Prof. Dr.-Ing. Heiner Kuhlmann
Prof. Dr. Lutz Plümer
Prof. Dr.-Ing. Wolf-Dieter Schuh

Die Aufnahme dieser Arbeit in die Schriftenreihe wurde von den Herausgebern der Reihe einstimmig beschlossen.

Vertrieb: Institut für Geodäsie und Geoinformation
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Nussallee 1
53115 Bonn
Tel.: 0228/73-3709
Fax: 0228/73-3708
Internet: <http://www.igg.uni-bonn.de>

Dieses Werk ist einschließlich aller seiner Teile urheberrechtlich geschützt.
Abdruck auch auszugsweise nur mit Quellenangabe gestattet.
Alle Rechte vorbehalten.

Vorwort

Die Geodäsie hat in den letzten Jahrzehnten eine rasante Entwicklung erfahren. Dies liegt insbesondere an der Entwicklung der Mikroelektronik, die einerseits für den Fortschritt in der Computertechnologie, andererseits für die Entwicklung der Messtechnologie auf dem Gebiet der geodätischen Messverfahren und der Satellitengeodäsie verantwortlich ist. Dies sind nur zwei, allerdings sehr wichtige Beispiele aus dem Gesamtgebiet der Geodäsie. Die hohen Genauigkeiten der eng miteinander verknüpften Methoden der Entfernungs- und Zeit- bzw. Frequenzmessverfahren haben aus der Sicht der Modellbildung auf dem Fundament der Relativitäts- und Quantentheorie zu erfolgen. Diese Auffassung hat sich im Lehrgebäude der Geodäsie nur sehr zögerlich durchgesetzt. Statt eine Modellbildung in den angemessenen Theorien vorzunehmen, begnügt man sich auch heute noch gerne mit kleinen Korrekturen, die gewissermaßen als Schmutzeffekte einer Newtonschen Mechanik betrachtet werden. Damit hängt auch die weit verbreitete Meinung zusammen, dass die Beschäftigung mit neuartigen Messmethoden, die auf den Modellbildungen der Relativitätstheorie und der Quantenphysik beruhen, exotische Liebhaberei einiger weniger Außenseiter ist. Die Entwicklungen der letzten Jahre haben sehr deutlich die Notwendigkeit gezeigt, dass die Geodäsie auf ein modernes mathematisch-physikalisches Fundament zu gründen ist.

Einen Beitrag hierzu leistet Klaus Börger mit der vorliegenden Habilitationsschrift, in der der Ansatz verfolgt wird, ausgehend von einer erweiterten Definition der Geodäsie die Fundamente der heute gültigen Physik als Grundlage der Geodäsie aufzubereiten und dadurch neuartige Messmethoden für die Geodäsie nutzbar zu machen. Insbesondere werden die grundlegende Aufgabenstellung der Geodäsie und ihr Selbstverständnis als Wissenschaftszweig hervorgehoben. Dieses Selbstverständnis gründet nicht nur auf der Tatsache, dass die Geodäsie als Teil der Ingenieur- und Geowissenschaften aufzufassen ist, sondern zugleich als Anwendung einer modernen Physik zu sehen ist und in diesem Sinne auch wichtige experimentelle Beiträge zu den Grundlagenwissenschaften selbst leisten kann. Damit wird die Ausarbeitung bzw. Erarbeitung von Theorien, Methoden und Modellbildungen in diesen Wissensgebieten ebenfalls Gegenstand geodätischer Forschung. In diesem Sinne wird in der vorliegenden Arbeit an einigen bedeutsamen quantenphysikalischen Phänomenen der enge Zusammenhang zwischen der Quantenphysik und dem naturwissenschaftlich-technischen Zweig der Geodäsie aufgezeigt. Die Arbeit gibt einen Überblick über die Grundlagen aus der Quantenphysik, wie sie für das Verständnis einer modernen Geodäsie notwendig ist. Den eigentlichen Kern der Arbeit stellt das dritte Kapitel dar, in dem die geodätischen Anwendungen der quantenphysikalischen Phänomene dargestellt werden. Zunächst wird der quantenmechanische Inertialsensor behandelt und das sog. Quantendynamometer, das zur rotatorischen und translatorischen Beschleunigungsmessung verwendet werden kann bzw. als Erdrotationssensor oder als Gravimeter. Weiterhin wird der quantenmechanische Erdrotationssensor beschrieben, der auf der Quanteninterferenz beruht. Diskutiert werden der sog. Heliumkreisel und der Laserkreisel. Während der Heliumkreisel noch am Beginn der Entwicklung steht, hat der auf dem Sagnac-Effekt beruhende Laserkreisel seine Eignung für den praktischen Einsatz bereits überzeugend unter Beweis gestellt, nicht zuletzt durch den Großkreisel der Fundamentalstation Wettzell. Auch wenn die großen Laserring-Kreisele noch sehr aufwendig sind, sind sie in der Lage sehr hochfrequente Rotationsschwankungen zu detektieren. Sie liefern überdies die Erdrotation auf ganz unterschiedliche Art und Weise als die in der Geodäsie üblichen Methoden mittels VLBI oder GPS oder in der Vergangenheit mittels astrometrischer Verfahren. Hinzu kommt, dass sie als lokal sensitives geophysikalisches Messgerät Observable liefern, die auf andere Weise nicht gewonnen werden können. Weitere wichtige Beispiele sind mit der Zeitmessung bzw. mit der Funktionsweise von Frequenznormalen verbunden. Schließlich wird das Prinzip des jüngst vorgeschlagenen quantenmechanischen Gravimeters erläutert, das wohl schon in naher Zukunft mit den herkömmlichen Gravimetern konkurrieren kann. Weitere sich abzeichnende Entwicklungen werden abschließend diskutiert, Entwicklungen, die nur auf der Grundlage eines Verbundes von allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenphysik zu erreichen sind. Die Geodäsie kann die zukünftigen Möglichkeiten nur basierend auf einem tiefgehenden Verständnis der theoretischen Grundlagen nutzen.

Bonn, 17. Juni 2007

Klaus Heinz Tlk

Geodäsie und Quantenphysik

Kurzfassung

Im Jahre 1880 äußerte HELMERT,

*„Geodäsie ist die Wissenschaft von der Ausmessung
und Abbildung der Erdoberfläche“.*

Mit diesem Zitat werden viele geodätische Arbeiten begonnen, und auch für den vorliegenden Beitrag soll es als Einführung dienen. Heute, gut 120 Jahre nach der Definition von Helmert, präsentiert sich die Geodäsie mit einem enorm breiten Spektrum von Aufgaben und Tätigkeiten, so dass die helmertsche Charakterisierung nicht alle Beschäftigungsfelder der Geodäsie abzudecken scheint. Wohl ist der gemeinsame Bezug, dass alle Aktivitäten in Zusammenhang mit der „Ausmessung der Erde“ stehen. Insofern wird auf der einen Seite die Gültigkeit des oben angeführten Zitates auch heute noch im Grundsatz anerkannt, andererseits ist die helmertsche Festlegung immer wieder Ausgangspunkt wissenschaftstheoretischer Diskussionen. Diesbezüglich ist anzumerken, dass eine solche Reflexion auf die Charakteristika der Geodäsie ein Bewusstsein für das Wesen und den Status dieser Wissenschaft schafft. Zusätzlich dient eine methodologische Auseinandersetzung mit der Natur des Faches dazu, den weiteren Fortschritt und die Entwicklung der Disziplin zu gestalten. Ebenfalls im Hinblick auf das Thema dieser Arbeit ist ein Nutzen zu sehen, denn auf dem Hintergrund eines solchen Kontextes kann die Bedeutung der Quantenphysik für die Geodäsie auch von einem übergeordneten Verständnis heraus erfasst werden. In diesem Sinne wird zur Einleitung das Thema „Geodätische Wissenschaft“ erörtert, und es werden grundsätzliche Berührungspunkte der Quantenphysik zur Geodäsie dargestellt.

Nach der Einleitung folgt eine Zusammenstellung der quantenphysikalischen Grundlagen der Geodäsie, so wie sie sich heute darbieten, und im Anschluß daran wird die Nutzung quantenphysikalischer Phänomene für geodätische Anwendungen unterschiedlichster Art vorgestellt: Das Quantendynamometer ist in einem gewissen Sinne ein Universalinstrument, das für vielfältige Zwecke eingesetzt werden kann. Es kann als Inertiales-Navigations-System dienen und damit Drehbewegungen als auch Beschleunigungen messen. Des Weiteren gestattet es den Einsatz als Gravimeter oder Erdrotationssensor. Ebenfalls als Sensor zur Bestimmung der Erdrotation gilt das Quanteninterferometer, wobei die Möglichkeiten dieses Kreiselinstrumentes äußerst vielversprechend sind. Optimistische Abschätzungen erwarten im Hinblick auf die Erfassung der Erdrotation ω_E Genauigkeiten von $10^{-8} \cdot \omega_E$ bis $10^{-9} \cdot \omega_E$, so dass man den Genauigkeitsbereich der Erdrotationsbestimmung durch geodätische Langbasisinterferometrie erreichen würde. Zum Ende des Hauptteils der Arbeit werden der derzeitige Stand wie auch der Fortschritt auf dem Gebiet der atomaren Zeitmessung behandelt.

Die Quantenphysik mit ihren Implikationen hat Einfluss auf die Geodäsie genommen und wirkt auch weiterhin. So ist Absicht der vorliegenden Arbeit, der Quantenphysik in der Geodäsie einen Weg zu bereiten und sie für die Theoretische Geodäsie zu thematisieren, denn mit der Atomphysik werden zukünftig ein weitreichendes Potential und umfangreiche Möglichkeiten verbunden sein. Dies gilt nicht nur für die Theoretische Geodäsie, sondern auch für die Experimentelle oder Praktische Geodäsie.

Geodesy and Quantum physics

Abstract

In 1880 HELMERT stated

“Geodesy is the science of measuring and mapping the earth’s surface”.

Many geodetic studies are introduced like this, and this quote is supposed to serve as an introduction for the present article as well. 120 years after Helmert’s definition, geodesy shows a broad spectrum of tasks and activities, so that today the definition does not seem to apply to all fields of geodesy. But all of these geodetic branches have in common the reference to the earth. As far as that is concerned, on the one hand the quotation is still valid, on the other Helmert’s definition often is a basis for academic discussions. Such a discussion or reflection of the characteristics of geodesy creates more knowledge about the nature and the status of this science. In addition, a methodological debate helps in terms of progress and development. In this sense, the article starts with a principal discussion about the geodetic science and further describes the essential links of quantum physics to geodesy.

The main part presents the quantum physical foundations of geodesy as they currently appear. Based on this the use of different effects of quantum physics for geodetic purposes is shown: The Quantum Dynamometer is an all purpose device. It can be used as an Inertial–Navigation–System (INS), determining rotations and accelerations as well. It also serves as a gravimeter or as an earth rotation sensor. The Quantum–Interference Device can be used to determine earth rotation, too. The possibilities of this instrument are most promising. Optimistic taxations expect accuracies with respect to earth rotation of $10^{-8} \cdot \omega_E$ to $10^{-9} \cdot \omega_E$, so that the accuracy domain of Very Long Baseline Interferometry can be achieved. This description of applications finishes, dealing with the current state and progress concerning the measure of time by means of atomic clocks. There is a new generation of atomic clocks, the so called caesium fountains which are a clear improvement.

Quantum physics with its implications has influenced geodesy and will do so in the future. Aim of this article is to pave the way for quantum physics and to make it an issue for geodesy, because the atom physics provides a lot of opportunities and an enormous potential. This is valid for all parts of geodesy, the theoretical as well as the practical part which deals with the development of geodetic instruments.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	9
1.1	Geodätische Wissenschaft	9
1.2	Geodäsie und Quantenphysik	15
2	Grundlagen aus der Quantenphysik	19
2.1	Allgemeine Grundlagen	19
2.1.1	Vorbemerkungen	19
2.1.2	Aufbau der Atome	20
2.1.3	Atomismus der Elementarteilchen	21
2.1.4	Drehimpuls und magnetisches Moment der Elementarteilchen	23
2.1.5	Mikrophysikalische Objekte als Welle und als Teilchen	26
2.2	Quanteneffekte	29
2.2.1	Superfluidität	29
2.2.2	Supraleitung	31
2.2.3	Energieaufspaltung und Teilchenkinematik durch Magnetfeldeinwirkung	34
2.2.4	Kernspinresonanz	38
2.3	Spezielle quantenmechanische Verfahren	41
2.3.1	Atominterferometrie	41
2.3.2	Quanteninterferometrie	46
2.3.3	Kühlung von Atomen	50
2.3.4	Magneto-optische Falle	56

3	Geodätische Anwendungen	59
3.1	Quantenmechanischer Inertialsensor	59
3.1.1	Schrödingergleichung im terrestrischen Beobachtungssystem . .	59
3.1.2	Anwendungen des Quantendynamometers	62
3.2	Quantenmechanischer Erdrotationssensor	64
3.2.1	Erdrotationsbestimmung durch Quanteninterferenz von 3He . .	64
3.2.2	Stand und Weiterentwicklungen	66
3.3	Cäsiumatomuhren	67
3.3.1	Cäsiumatom	67
3.3.2	Konventionelle Cäsiumatomuhr	68
3.3.3	Cäsiumatomuhr mit Fontänentechnik	72
3.4	Quantenmechanisches Gravimeter	75
3.4.1	Atomfontäne als Interferometer	75
3.4.2	Atominterferometrische Schweremessungen	76
4	Zukünftige Entwicklungen	79
5	Bibliographie	83
6	Sachregister	89

Kapitel 1

Einführung

1.1 Geodätische Wissenschaft

Fragt man nach dem **Wesen der Geodäsie**, nach dem, was Geodäsie ist oder ausmacht, so wird als Antwort häufig und immer wieder HELMERT mit seiner Aussage von 1880

*„Geodäsie ist die Wissenschaft von der Ausmessung und
Abbildung der Erdoberfläche“* (1.1–1)

angeführt. Diese Definition der Geodäsie wird auch heute noch im Grundsatz bestätigt, und sie ist in Abständen immer wieder Gegenstand wissenschaftsphilosophischer Diskussionen. Auch der vorliegende Abschnitt möchte zu diesem Diskurs einen Beitrag liefern, wobei ein Nutzen in zweierlei Hinsicht gesehen wird. Zum einen schafft eine Reflexion auf die Charakteristika der Geodäsie ein Bewusstsein für die Natur und auch den Status dieser Wissenschaft. Auf dieser Grundlage apologetisiert sich das Fach, und die Bedeutung desselben lässt sich gerade gegenüber Dritten überzeugender darstellen, was insbesondere auf dem Hintergrund zunehmender Konkurrenz nicht ohne Bedeutung ist. Zum anderen dient eine methodologische Auseinandersetzung sowie das damit verbundene Erkennen der Natur und des Status dieser Ingenieurwissenschaft dazu, den weiteren Fortschritt und die Entwicklung der Disziplin zu gestalten. In diesem Sinne sollen die nachstehenden Ausführungen einen wissenschaftstheoretischen Kontext bereitstellen, um die sinnvolle Ergänzung der „Physikalischen Geodäsie“ durch Einbeziehung der Quantenphysik von einem übergeordneten Zusammenhang her zu erfassen.

In seinen „Gedanken über Raum + Zeit–Disziplinen“ [vgl. hierzu BUSCHMANN (2003)] ventiliert BUSCHMANN die helmertsche Definition der Geodäsie und liefert wertvolle Anregungen für eine Neuformulierung. Die Ideen BUSCHMANNs zusammengefaßt, gestatten sie nachstehenden Vorschlag, welcher (1.1–1) in die heutige Zeit tradiert.

*„Geodäsie ist die Wissenschaft des Erkennens und des
Gewinnens von raum+zeitlichen Informationen über die
Geosphäre und Anthroposphäre,* (1.1–2a)

*die Wissenschaft von der Abbildung und Darstellung die-
ser Informationen in und durch entsprechende Medien* (1.1–2b)

*sowie die Wissenschaften von der unmittelbaren Nutzung
der Informationen*

- zur Ordnung und Gestaltung von Geo- und Anthroposphäre* (1.1–2c)
als auch
zur Navigation in Geo- und Anthroposphäre“ (1.1–2d)

mit der Semantik

- Geosphäre:*** (1.1–2e)
Raubereich der Erde
- Anthroposphäre:*** (1.1–2f)
Vom Menschen veränderter Raumbereich der Geosphäre .

Die Geosphäre als Raumbereich der Erde wird hier umfassend verstanden. Zur Geosphäre gehören der Erdkern, der Erdmantel und die Erdkruste sowie weiter das Erdmagnetfeld als auch die Atmosphäre und schließlich die auf die Erde einwirkenden Massen, wie vornehmlich Sonne und Mond. Die Schreibweise „raum+zeitlich“ in (1.1–2a) ist von BUSCHMANN übernommen und unterstreicht sowohl die Einheit der beiden Phänomene Raum und Zeit als auch das getrennte Erscheinen [vgl. hierzu BUSCHMANN (2003), ABSCHNITT 1]. Die Definition (1.1–2a-d) segregiert gegenüber anderen wissenschaftlichen Fächern, andererseits können sich in (1.1–2a-d) sämtliche Fachbereiche der Geodäsie, wie sie derzeit an den Hochschulen etabliert sind, wiederfinden. So subsumieren sich in (1.1–2c) die Disziplinen der Raumplanung, wie STÄDTEBAU und BODENORDNUNG. (1.1–2b) schließt die Fachbereiche KARTOGRAPHIE bzw. GEOINFORMATIK ein, und (1.1–2a) werden die AUSGLEICHUNGSRECHNUNG UND STATISTIK, PHOTOGRAMMETRIE und FERNERKUNDUNG, das VERMESSUNGSWESEN sowie die MATHEMATISCHE und PHYSIKALISCHE GEODÄSIE zugewiesen. Dabei findet die AUSGLEICHUNGSRECHNUNG UND STATISTIK ihre Anwendung in der Verarbeitung von Messdaten, das meint Datenanalyse bzw. Auswertung von Messungen, wohingegen Erkenntnisgegenstand der PHOTOGRAMMETRIE UND FERNERKUNDUNG, aber auch des VERMESSUNGSWESENS und der GEODÄSIE die raum+zeitlichen Erscheinungen der Anthroposphäre und Geosphäre sind. Als Ergebnis ihrer Tätigkeiten stellen die gerade genannten Fachbereiche

- raum+zeitliche Anthropoinformationen:*** (1.1–2g)
Informationen über vom Menschen geschaffene und an die Geosphäre, speziell die Lithosphäre, gekoppelte Erscheinungen

und

- raum+zeitliche Geoinformationen:*** (1.1–2h)
Informationen über natürliche Erscheinungen der Geosphäre mit ihren Teilen Barysphäre, Lithosphäre, Hydrosphäre und Atmosphäre

[vgl. hierzu BUSCHMANN (2003), ABSCHNITT 6] zur Verfügung. (1.1–2g) zuzuordnen sind sämtliche Bauten und artifiziellen Objekte, während zu (1.1–2h) zum Beispiel die Orientierung der Erde im Raum, die Rotationsphase der Erde oder die Parameter des Erdschwerefeldes wie Lotlinien, Schwerevektoren, Äquipotentialflächen usw. zählen.

Gemäß (1.1–2a) ist ein essentielles **Merkmal der Geodäsie** das „Erkennen“ und „Gewinnen“ von Informationen im Sinne von (1.1–2g,h). Wissenschaftstheoretisch bringt das eine nicht unbedeutende Frage mit sich, nämlich wie „erkennt“ man Informationen. Am Beispiel der Erdrotation

lässt sich anschaulich illustrieren, welche **Schwierigkeiten mit dem Erkennen von Geoinformationen** grundsätzlich verbunden sind. Vorweg muss angemerkt werden, dass beginnend mit der aristotelischen Physik lange Zeit die Maxime galt, dass sich wissenschaftliche Erkenntnis aus Tatsachen ableitet, die auf Beobachtungen bzw. Sinneswahrnehmungen beruhen. Auch die nachfolgende peripatetische Physik war von diesem Prinzip geprägt, und für die sich herausbildenden wissenschaftsphilosophischen Schulen [vgl. hierzu z. B. CHALMERS (2001)], wie insbesondere den EMPIRISMUS und auch den POSITIVISMUS, galt dieses gar als das „Kriterium von Wissenschaft“. Die Berufung auf Sinneswahrnehmung war dann auch eines der wichtigsten Argumente gegen die Theorie des KOPERNIKUS von 1543, welche u. a. aussagt, dass die Erde rotiert. So wurde zwar mit der kopernikanischen Theorie die Astronomie des ARISTOTELIS bzw. in der Weiterentwicklung das ptolemäische System herausgefordert, allerdings hatte die geltende Lehrmeinung den Vorteil, dass ihre Aussage, nämlich „die Erde bewegt sich nicht“, unmittelbar durch Beobachtungen belegt werden konnte, und man führte an, dass die Erdrotation nicht spürbar ist, wie es ja nun sonst eine Erfahrung bei Bewegung ist. Aber auch ein einfaches Experiment, welches als „Turmargument“ in die Geschichte der Physik einging, macht die Drehbewegung der Erde nicht evident. So wurde erklärt, dass bei der Drehung der Erde um ihre Achse jeder Punkt der Erdoberfläche innerhalb kürzester Zeit einen relativ großen Weg zurücklegen müsste. Demzufolge würde ein vom Turm fallender Stein in einiger Entfernung vom Turm auftreffen, da sich der Turm während des Fallens des Steines weiter bewegt hätte. Soweit das historische Beispiel. Die Geschichte hat gezeigt, dass sich die Theorie des KOPERNIKUS durchsetzen können. Die Bewegung der Erde ist heutzutage ein selbstverständliches Faktum, und mit den hochentwickelten geodätischen Raumverfahren wie der geodätischen Langbasisinterferometrie (engl.: *Very Long Baseline Interferometry, VLBI*) werden regelmäßig die Erdrotationsparameter bestimmt. Der vorangegangene geschichtliche Exkurs weist auf einen bedeutsamen Gesichtspunkt hin. Eine Beobachtung bzw. genauer eine Beobachtungsaussage ist nur auf dem Hintergrund einer Theorie möglich, und in einem gewissen Sinne hängt auch die Richtigkeit einer Beobachtungsaussage von der zugrunde gelegten Theorie ab. Insofern kann der oben beschriebene Standpunkt der Empiristen und Positivisten nicht aufrecht erhalten bleiben. Vielmehr wird postuliert, **die Theorie geht den Tatsachen voraus**, oder mit den Worten von EINSTEIN (1926): „Erst die Theorie entscheidet darüber, was man beobachten kann“. Diese Feststellung von EINSTEIN ist für die Physik und damit auch für die Ingenieurwissenschaft „Geodäsie“ zutreffend. Auf diese Weise ist eine Antwort auf die eingangs gestellte Frage nach dem Erkennen von raum+zeitlichen Informationen gegeben. Es wird allerdings eingeräumt, dass die einspurige Auslegung dieses Grundsatzes zu einer Prävalenz der Theorie geführt hat und damit eine Polarisierung mit sich brachte. Letzteres manifestiert sich in der üblichen **Unterscheidung von Theorie und Praxis**, womit in der Regel auch zwei antagonistische Lager verbunden werden. Allgemein kann aber gesagt werden, dass dieser Hiatus unangemessen ist. Theorie und Praxis müssen in Konjunktion, nicht in Opposition, gesehen werden. Diese Sichtweise wird im Folgenden dargelegt, so dass auch der Stellenwert der Praxis adäquat gewürdigt wird.

POPPER ist der einseitigen Sicht der Theoriedominanz entgegengetreten und hat die Bedeutung des Experiments akzentuiert. Unter **Experiment** begreift man die künstliche Herbeiführung sowie die Abwandlung von Beobachtungsbedingungen zur Akquisition von Daten. Das Experiment ist also ein „aktives Eingreifen“ in die Natur, um eine Größe oder einen Prozeß separat zu erfassen. In der popperschen Auslegung von Wissenschaft [vgl. hierzu POPPER (1994) und POPPER (2000)], dem FALSIFIKATIONISMUS, wird dem Experiment eine große Bedeutung beigemessen, da das Experiment eine Theorie bestätigt oder widerlegt. So ist auch im Falsifikationismus die

Ausgangssituation eine Theorie, die angesehen wird als eine Sammlung von Annahmen, Hypothesen und Spekulationen. Im nächsten Schritt müssen die Theorien stringent und rücksichtslos durch Beobachtung und Experiment geprüft werden. Erweist sich durch das Experiment eine Theorie als falsch bzw. fehlerhaft, so bedarf es der Schaffung einer neuen. Letztendlich ist auf diese Weise ein Prozess in Gang gesetzt, der Fortschritt in der Wissenschaft evoziert. Denn, so die Ansicht der Falsifikationisten, durch Versuch und Irrtum, durch Vermutung und Widerlegung schreitet Wissenschaft voran. In diesem Sinne hat der Versuch urteilende bzw. entscheidende Funktion. Dahingegen kommt dem **Experiment in der Geodäsie** primär eine andere Rolle zu. Beobachtungen und Experimente sind notwendig, um so genannte Zielgrößen, das meint zum Beispiel Geoinformationen gemäß (1.1–2h), zu bestimmen, und die Theorien, genauer gesagt die geodätischen Modelle sind es dann, die den Zusammenhang zwischen Beobachtungs- und Zielgröße vermitteln. Dieses Junktim, die enge Kopplung von Theorie und Beobachtung ist markantes Kennzeichen der Geodäsie und veranschaulicht die **Parität von Theorie und Praxis in der Geodäsie**.

Abschließend sollen **Gedanken zur Entwicklung der Geodäsie** (1.1–2a) geäußert und zur Diskussion gestellt werden. Auch im Hinblick auf diesen Aspekt wird sich zunächst an der Physik orientiert, da sie prominente Beispiele für den Fortschritt einer Wissenschaft liefert. Betrachtet man den Werdegang der Physik von ARISTOTELES über KOPERNIKUS und GALILEI bis hin zu EINSTEIN, PLANCK und SCHRÖDINGER, so wird man kategorisch anerkennen, dass mit dem gespannten Zeitraum entscheidende Momente verbunden waren, die Physik wichtige Meilensteine erreicht hat und Aufsehen erregende Leistungen erbracht worden sind. Gerne spricht man in diesem Kontext auch von Revolutionen. Die Wissenschaftsphilosophie beschäftigt sich mit solchen Vorgängen und entwickelt Modelle zur Erklärung des Fortschritts. Der Falsifikationismus wurde bereits genannt und das damit verbundene Erklärungsmodell der wissenschaftlichen Entwicklung vorgestellt. Wie allerdings oben dargestellt, ist der Falsifikationismus für die Geodäsie eher von untergeordneter Bedeutung. Alternativ zur falsifikationistischen Sichtweise entwickelte KUHN einen neuen Ansatz [vgl. hierzu KUHN (1979)], der nun mit seinen Ideen skizziert und nachfolgend auf die Geodäsie angewandt wird. Zentraler Begriff der kuhnschen Wissenschaftstheorie ist das **Paradigma**, was sich wie folgt charakterisieren lässt. Auch diesbezüglich ist das maßgebliche Konstituens die Theorie mit ihren Grundgleichungen und Implikationen. Auf diesem Fundament werden Anwendungen der Theorie für ein breites Spektrum entwickelt. Zum Beispiel lässt sich die newtonsche Physik gleichermaßen auf die Bewegung von künstlichen Erdsatelliten anwenden wie auch zur Lösung von Aufgaben in der Navigation. Diese Aktivitäten haben unmittelbaren Bezug zur Theorie, KUHN stellt aber auch die experimentelle Komponente eines Paradigmas heraus. Es müssen Experimente konzipiert werden, und damit verbunden ist die Entwicklung von Instrumenten sowie das Herausarbeiten von geeigneten Methoden. Insgesamt wird sich also ein breites Feld auftun mit einem enormen Potential an wissenschaftlicher Beschäftigung. KUHN bezeichnet diese Aktivitäten als „Normalwissenschaft“. Die Arbeiten in der Normalwissenschaft werden natürlich auch Schwierigkeiten aufwerfen und Fragen mit sich bringen, die im äußersten Falle zu einer „Krise“ führen, so dass ein neues Paradigma geschaffen werden kann. Erweist sich das neue Paradigma als valide, so wird sich ein **Paradigmenwechsel** vollziehen, wie zum Beispiel der dargestellte Übergang vom ptolemäischen zum kopernikanischen System.

Die kuhnsche Idee von der Normalwissenschaft auf Basis eines Paradigmas soll nun auf die Geodäsie übertragen werden. Ein aktueller Blick auf die Geodäsie lässt verschiedene vorherrschende Themen erkennen. Exemplarisch genannt seien „Geoinformationssysteme“ als auch die „Satellitengeodäsie“, und beide gelten als **Geodätisches Paradigma**, was nun am Beispiel der

Satellitengeodäsie näher ausgeführt wird. Ganz im Sinne von KUHN (1979) hat sich hier eine Normalwissenschaft entwickelt mit bedeutenden theoretischen Arbeiten, engagierten praktischen Aktivitäten und ambitionierten Projekten. Um das tiefer zu begründen, seien einige Weiterentwicklungen genannt, sowohl theoretischer wie auch praktischer Natur. Zum Beispiel seien aus dem Bereich der Theorie die Arbeiten angeführt, die sich mit der Bewegung der Satelliten befassen. Ausgehend von den Grundgleichungen der Mechanik sind hier hochentwickelte Modelle für die Orbitbestimmung und die -prädiktion entwickelt worden, so dass den heutigen Ansprüchen an die Genauigkeit Genüge geleistet wird. Des Weiteren sollen genannt werden die Studien zur Ausbreitung elektromagnetischer Signale im Raum über große Distanzen hinweg. Dies erfordert die Berücksichtigung der Ergebnisse der Elektrodynamik wie auch diejenigen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Schließlich sind in diesem Zusammenhang die Beiträge zu nennen, die den Einfluß der Ionosphäre auf die Signalausbreitung beschreiben. Hier konnten erheblicher Erkenntnisgewinn erreicht und damit die Genauigkeit und Zuverlässigkeit gesteigert werden. Im instrumentellen Bereich sind deutliche Fortschritte zu verzeichnen, zum einen im Hinblick auf allgemeine Kapazitäten, Funktionalitäten und Bedienerfreundlichkeit, zum anderen in Bezug auf die Erfassung von Gerätefehlern. So ist die Kalibrierung von GNSS-Antennen zu einem intensiven Beschäftigungsfeld geworden. Ganz aktuell sind im gerätetechnischen Bereich die Unternehmungen zur Entwicklung von Software-GNSS-Empfängern. Was die Messmethoden anbelangt, hat sich ebenfalls ein großer Fortschritt eingestellt. In den Anfängen waren die differentiellen bzw. relativen Verfahren (DGPS) lediglich lokal möglich, durch Bezug auf eine Referenzstation. Heute sind Referenzstationsnetze geschaffen, so dass Flächenkorrekturparameter (FKP) oder Virtuelle Referenzstationen (VRS) zum Beispiel durch die Dienste der Landesvermessungsverwaltungen bereit gestellt werden. Resümierend sei festgehalten, dass die Satellitengeodäsie als Paradigma innerhalb der Geodäsie (1.1-2a) gilt. Die diesbezügliche Normalwissenschaft hat bedeutsame Leistungen hervorgebracht, und rückblickend beleuchtet, haben ganz allgemein die geodätischen Raumverfahren, insbesondere GPS, die Geodäsie (1.1-2a) „revolutioniert“. Am Beispiel der Satellitengeodäsie ist deutlich geworden, dass die Probleme, „Rätsel“ und Fragestellungen innerhalb eines Paradigmas umfangreich sind und ein enormes Potential für die **geodätische Forschung** darstellen, sowohl im Hinblick auf theoretische wie auch praktische Aspekte. Nach KUHN konstituiert eine Theorie mit ihren Implikationen das Fundament einer Wissenschaftsdisziplin, wobei die Vergänglichkeit eines solchen Fundamentes gesehen werden muss, so dass Paradigmenwechsel für die Weiterentwicklung eines Fachgebietes wichtig bzw. unbedingt erforderlich sind. Verbunden mit einem Paradigmenwechsel ist in jedem Falle ein neuer theoretischer Unterbau, der dann den Ausgangspunkt für eine sich neu entwickelnde Normalwissenschaft markiert. Allein in diesem Sinne liesse sich die Bedeutung der Quantenphysik für die Geodäsie darstellen. Allerdings soll im Folgenden ein weitergehender Ansatz diskutiert werden, der die Basis geodätischer Forschung nicht in einer einzelnen physikalischen Theorie sieht, sondern eine Dyade zugrunde legt. Zur Einführung in den Diskurs wird eine spezielle Formulierung von (1.1-1) vorgestellt, nämlich

„Geodäsie ist die Wissenschaft von der Ausmessung, Abbildung und Interpretation des metrischen Feldes des Systems Erde“ . (1.1-3)

(1.1-3) geht gedanklich auf SCHNEIDER zurück [vgl. hierzu SCHNEIDER (1988)] und ist in Übereinstimmung mit (1.1-2a), wohl ist zu betonen, dass die Wortsequenz „Ausmessung, Abbildung und Interpretation des metrischen Feldes des Systems Erde“ programmatische Gesichtspunkte beinhaltet, was nun konkreter ausgeführt wird. Bereits vorangehend wurde beschrieben, dass die Theorie darüber entscheidet, was man beobachten bzw. ausmessen kann. Angewandt auf (1.1-3) bedeutet dies, dass zur Ausmessung des „metrischen Feldes des Systems Erde“ es vorweg einer

angemessenen Theorie bedarf. Notwendigerweise muss heutzutage eine Modellbildung des metrischen Feldes auf Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie erfolgen. Im Hinblick auf diese Forderung ist prinzipiell anzumerken, dass eine relativistische Modellbildung nicht trivial ist, und aus diesem Grunde existiert auch 90 Jahre nach Schaffung der Allgemeinen Relativitätstheorie noch keine vollständige und konsistente relativistische Modellbildung der Geosphäre, sondern dieses Vorhaben stellt nach wie vor eine Herausforderung dar. Das gilt zum Beispiel für die geodynamischen Phänomene der Erdrotation, der Deformation der Erde oder der Kontinentalplattenbewegung. Zwar existieren Ansätze für eine allgemein-relativistische Modellbildung, wohl sind die bisher gefundenen Lösungen nicht zufriedenstellend, so dass sie sich auch noch nicht in den internationalen Empfehlungen der International Astronomical Union (IAU), der International Association of Geodesy (IAG) und der International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG) haben durchsetzen können. Die Diskussion der geodynamischen Phänomene führt zu einem weiteren Sachverhalt, der im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie noch defizitär ist. Sowohl die Geodäsie als auch die Geodynamik brauchen Bezugssysteme. So nutzt die Geodäsie Bezugsrahmen, um Referenzpunkte für die weitere Vermessung zu haben, und die Geodynamik verwendet Bezugsrahmen, um die zeitliche Veränderung von Punkten und Teilen der Erdoberfläche zu erfassen. Globale Bezugssysteme werden heutzutage mit den geodätischen Raumverfahren realisiert, wobei sich diese sowohl auf terrestrische wie auch auf extraterrestrische Träger stützen. Folglich müssen also zwei Bezugssysteme berücksichtigt und miteinander verknüpft werden, was über die relativen Bewegungskomponenten gemacht wird. Aber auch diesbezüglich sind die momentanen Ergebnisse der allgemein-relativistischen Modellbildung unbefriedigend, und so resümiert HASE (1999) kritisch fragend, ob und inwieweit die derzeitigen Bezugssysteme tatsächlich einer konsistenten Modellbildung im Kontext der Allgemeinen Relativitätstheorie genügen. Anknüpfend an HASE wird festgehalten, dass die allgemein-relativistische Modellbildung noch vielfältige Aufgabenstellungen für die Geodäsie bereit hält. Im Folgenden aber soll die Allgemeine Relativitätstheorie nicht weiter separat behandelt werden. Wie zu Beginn dieser Überlegungen avisiert, könnte eine Dyade **ein zukünftiges Fundament für geodätische Wissenschaft** sein, und gebildet wird diese neue Basis sowohl aus der Allgemeinen Relativitätstheorie als auch aus der Quantenphysik. Dabei dient die Allgemeine Relativitätstheorie zur Beschreibung des metrischen Feldes (1.1–3), und damit manifestiert sich die Metrik in verschiedenen relativistischen Phänomenen. Bekannte Beispiele dafür sind die Einflüsse auf die Laufzeit eines elektromagnetischen Signals, wie der Shapiro- oder der Sagnac-Term, oder das Faktum der Existenz von Eigenzeiten und schliesslich der Lense-Thirring-Effekt mit Auswirkungen sowohl auf Umlaufbahnen als auch auf träge Achsen, die in Folge präzedieren. In der Regel sind die relativistischen Einflüsse sehr klein, und auch sind sie zum Teil noch gar nicht nachgewiesen. Das bedeutet, dass die Messung der relativistischen Effekte bzw. die Ausmessung des metrischen Feldes hochgenaue Sensoren und Messmethoden erfordert. Diesbezüglich sind zum einen zu nennen die geodätischen Raumverfahren, die sensitiv für manche relativistischen Effekte sind, und zum anderen die neuartigen, quantenbasierten Sensoren, die mit ihren extrem hohen Genauigkeiten vielversprechende Perspektiven aufzeigen und Vermessung im Sinne von (1.1–3) gestatten. Insofern wird eine Physikalische Geodäsie, die auf der Verknüpfung von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenphysik fußt, für die Zukunft von großer Bedeutung sein und der Geodäsie eine zentrale und unverzichtbare Rolle in der sich entwickelnden, interdisziplinären Wissenschaft vom System Erde sichern. In diesem Sinne soll mit der vorliegenden Arbeit ein Beitrag geleistet werden, die quantenphysikalischen Grundlagen der Geodäsie herauszuarbeiten. Der sich nun anschließende ABSCHNITT 1.2 wird einen ersten geodätischen Zugang zur Quantenphysik vermitteln, indem Berührungspunkte von Quantenphysik und Geodäsie dargestellt werden.

1.2 Geodäsie und Quantenphysik

In ABSCHNITT 1.1 wurde die grundlegende Bedeutung der Theorie herausgestellt, und es wurde aufgezeigt, dass das Erschließen und Ausarbeiten von Theorien ebenfalls Gegenstand geodätischer Forschung ist. Für den naturwissenschaftlich–technischen Zweig der Geodäsie sind es die physikalischen Theorien, die von besonderem Interesse sind. So wird in diesem Abschnitt die „Theorie der kleinsten Teilchen“ mit einer Auswahl bedeutsamer Phänomene qualitativ vorgestellt und der Bezug zur Geodäsie geschaffen, so dass ein erster geodätischer Zugang zur Quantenphysik eröffnet ist. Allgemein sind mit der Quantenphysik viele Effekte entdeckt worden, die dann durch Weiterentwicklung zu technischen Anwendungen gereift sind. Auch die modernen geodätischen Messinstrumente nutzen oder basieren auf solchen Quantenerscheinungen. Neben dieser Einflussnahme auf die Instrumententechnik hat die Quantenphysik auch in anderer Hinsicht einen Wandel herbeigeführt. Denn atomar definierte Eichmaße lösen die klassischen Prototypen sukzessive ab. Diese metrologischen Gesichtspunkte werden am Ende dieses Abschnitts diskutiert.

Laser werden unter anderem in der **elektrooptischen Distanzmessung** als Strahlungsquellen eingesetzt. Das Akronym steht für *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*, was im Deutschen „Lichtverstärkung durch stimulierte Emission von Strahlung“ bedeutet. Zur Erläuterung der Stimulierten oder auch Induzierten Emission wird auf das Bohrsche Atommodell zurückgegriffen, nach dessen Vorstellung die Elektronen auf Bahnen um den positiven Atomkern kreisen. Verbunden mit einer solchen Elektronenbahn ist ein bestimmter Energiezustand. Wird nun einem Atom extern Energie zugeführt, so wird es in eine andere Elektronenbahn und daraus resultierend in ein höheres Energieniveau versetzt. Das Atom befindet sich dann im so genannten angeregten Zustand. Nach kurzer Verweildauer in diesem Zustand emittiert das Atom ein Photon und kehrt wieder in den Ausgangszustand zurück. Die beschriebene unbeeinflusste Aussendung eines Photons nennt man Spontane Emission. Davon unterschieden wird die Induzierte Emission, welche sich einstellt, wenn ein Photon auf ein angeregtes Atom trifft. Durch das Auftreffen des Photons wird das angeregte Atom unmittelbar zur Ausstrahlung eines Lichtquants veranlaßt, so dass in der Summe zwei Photonen gleicher Eigenschaft vorhanden sind. Dieser Umstand bedeutet also Lichtverstärkung. Vorteile des Lasers gegenüber herkömmlichen Lichtquellen sind die zeitliche und räumliche Kohärenz des Lichtes sowie die Bündelungseigenschaften, die nahezu parallele Lichtstrahlen ermöglichen. Aus diesem Grunde werden die Laser für Entfernungsmessungen hoher Genauigkeit und großer Reichweite eingesetzt. Als Beispiel für ein solches, hochgenaues, terrestrisches Distanzmessgerät sei das MEKOMETER ME 5000 der Firma KERN genannt. Große Reichweiten sind bei Abstandsmessungen zum Mond, dem *Lunar Laser Ranging (LLR)*, und zu Satelliten, dem *Satellite Laser Ranging (SLR)*, zu überwinden. Weitere geodätische Anwendungen des Lasers sind Kreiselinstrumente, wobei **Laserkreisel** mit als genaueste Geräte zur Bestimmung von Drehbewegungen gelten. Besonders hervorzuheben ist der Großringlaser [vgl. hierzu KLÜGEL ET AL. (2005) und SCHREIBER (2000)], der Anfang Oktober 2001 auf der Fundamentalstation in Wettzell in Betrieb genommen worden ist. Dabei ist Ziel, die Erdrotation bis auf 10^{-9} mit einer Zeitauflösung von ein bis zwei Stunden zu bestimmen, so dass damit eine Ergänzung zu den geodätischen Raumverfahren *VLBI*, *SLR* und *LLR* gegeben ist. Nicht unerwähnt bleiben darf in dieser Auflistung von Nutzungen des Lasers die sich zunehmend verbreitende und etablierende Technik des **3D–Laserscannings**.

Weitere quantenphysikalische Effekte sind die Superfluidität und die Supraleitung. **Supraleitung** ist eine Eigenschaft von Metallen oder metallähnlichen Stoffen, die sich bei Unterschreiten einer bestimmten stoffspezifischen Temperatur zeigt und dazu führt, dass der elektrische Widerstand signifikant klein und damit die elektrische Leitfähigkeit unendlich groß wird. In der Geodäsie nutzen **supraleitende Gravimeter** [vgl. hierzu RICHTER (1987)] diesen Effekt und erfassen relative Schwereänderungen. Eine andere instrumentelle Anwendung des Effektes der Supraleitung ist der **Supraleitende Quanteninterferenz-Detektor**, abgekürzt *SQUID*, welcher als Magnetometer zur Ausmessung von Magnetfeldern dient und auch zur Messung von Beschleunigungen eingesetzt wird. Die **Superfluidität** oder auch Suprafluidität ist ebenfalls ein typischer Quanteneffekt. Teilchensysteme, die dieses Phänomen aufweisen, gehen auch bei sehr tiefen Temperaturen nicht in den festen Aggregatzustand über, sondern bleiben flüssig und entwickeln besondere Eigenschaften wie eine hohe Wärmeleitfähigkeit, verschwindenden Wärmehalt und verschwindende Viskosität, so dass die Quantenflüssigkeiten nahezu reibungsfrei durch enge Kapillare fließen können. Für Helium konnte Superfluidität nachgewiesen werden, und als geodätische Applikation ist der **superfluide Helium-Kreisel** zu nennen. Helium-Atome sind so genannte Bosonen und LONDON erklärte 1938 die Erscheinung der Superfluidität bei ${}^4\text{He}$ durch Bose-Einstein Kondensation. Wohl gelang erst ein halbes Jahrhundert später die Erzeugung von weiteren Bose-Einstein Kondensaten, was nicht nur im Hinblick auf die Superfluidität neue Möglichkeiten schafft [vgl. hierzu KAPITEL 3].

Ein Quantenphänomen, das ebenfalls für Gyroskope genutzt werden kann, ist die **Kernspin-Resonanz**, auch als magnetische Kernresonanz und im Englischen mit *Nuclear Magnetic Resonance* bezeichnet, so dass hierauf basierende Rotationssensoren den Namen **NMR-Kreisel** tragen. Atomkerne, die in einem homogenen Magnetfeld präzedieren, zeigen genau dann eine Richtungsänderung ihrer Drehimpuls- bzw. Spinachse, wenn ein äußeres magnetisches Wechselfeld einwirkt. Dieser Effekt ist nicht nur für die genannten Kreiselinstrumente, sondern auch für **Atomuhren**, die nach der Atomstrahlresonanzmethode arbeiten, von Bedeutung.

Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt dargelegt, hat die Quantenphysik ebenfalls in einem grundsätzlichen Sinne Einfluss auf das Messen genommen, nämlich durch die Einführung der **Quantenmaße**, womit Einheiten auf atomarer Grundlage verstanden werden. Einheiten oder Maßstäbe sind notwendig, denn „Messen“ bedeutet, einen Vergleich anzustellen zwischen der Messgröße und einem entsprechenden Maßstab. Anders formuliert, die Bestimmung einer physikalischen Größe ist die Ermittlung ihres Zahlenwertes in einem **Einheitensystem**. Heute wird in den meisten Staaten das „Système International d’Unités“, kurz **SI** verwendet, mit insgesamt sieben Basisgrößen, nämlich Länge, Masse, Zeit, elektrische Stromstärke, Temperatur, Stoffmenge und Lichtstärke. Folgt man BUSCHMANN (2003), ABSCHNITT 3, so sind es maßgeblich die Basisgrößen Länge und Zeit, die für die Geodäsie von Bedeutung sind. Denn den geodätisch relevanten physikalischen Größen sind die Basiseinheiten von Länge und Zeit, also Meter und Sekunde, sowie die verschiedenen Kombinationen dieser Einheiten zugeordnet, wie nachstehend aufgeführt.

Raum:

Länge (m), Fläche (m^2), Volumen (m^3),
ebener Winkel (m/m), Raumwinkel (m^2/m^2).

Zeit:

Dauer (s), Frequenz ($1/s$).

Raum + Zeit:

*Geschwindigkeit (m/s), Beschleunigung (m/s²),
Schwerepotentialdifferenz (m²/s²) .*

Klassisch wurden die Einheiten durch Normale verkörpert, allerdings manifestierten die alten Eichmaße mit zunehmender Messgenauigkeit mehr und mehr Unzulänglichkeiten. Teilweise erreichen heutige Messinstrumente bereits die grundsätzliche Grenzauflösung, die durch die Heisenbergsche Unschärferelation gegeben ist. Aus diesem Grunde bestand das Erfordernis, die Grundeinheiten zu präzisieren, so dass sich ein **Wandel von klassischen Einheiten zu atomaren Einheiten** vollzog, das heißt, die makroskopischen Prototypen wurden sukzessive durch mikroskopische Prototypen substituiert. Die prinzipiellen Aspekte dieser Genese werden im Folgenden am Beispiel der Basiseinheiten „Meter“ und „Sekunde“ prägnant beschrieben. In den Anfängen wurde die **Einheit der Zeit** aus der Rotation der Erde abgeleitet. Die Sekunde war definiert als der 86400ste Teil eines Sonnentages. Das Aufkommen der genauen Quarzuhren brachte Schwierigkeiten mit dieser Festlegung, die sich aus der Erdrotation ableitet, so dass schließlich die Ephemeridensekunde die alte Definition ablöste. Die neue Definition basierte auf dem Umlauf der Erde um die Sonne, und die Ephemeridensekunde ist festgesetzt als der 31556925,9747te Teil des tropischen Jahres zur Referenzepoche 0. Januar 1900, 12.00 Uhr. In der Folge mußte die Ephemeridensekunde ebenfalls revidiert werden, und heute ist die Sekunde das Zeitintervall, während dessen eine Cäsiumatomuhr 9192631770 Schwingungen vollzieht. Damit wurde für die Zeit ein Quantenmaß eingeführt. Unmittelbar mit der Zeit ist die **Basiseinheit Länge** verknüpft. So ist das Meter definiert als diejenige Distanz, die Licht im Vakuum während des Intervalls von 1/299792458 Sekunden durchläuft. Modifiziert man die Sekunde, wird auch das Meter verändert. Damit sind die geodätisch relevanten Basiseinheiten atomar festgelegt, und es sind, wie oben bereits angeführt, auch andere Einheiten mittlerweile durch Quantenmaße ersetzt [vgl. hierzu SCHOW (2001)]. Die TABELLE 1.2–1 [s. Seite 18], entnommen aus KOSE/MELCHERT (1991), ABSCHNITT IX 1., stellt die Vor- und Nachteile von klassischen Normalen und atomar definierten Einheiten gegenüber. Zusammenfassend bleibt festzuhalten, dass Quantenmaße die Defizite der klassischen Prototypmaße aufheben und insbesondere das Identitätsprinzip, ein Begriff aus der Metrologie [vgl. KOSE/MELCHERT (1991)], erfüllen. Mit diesem Grundsatz ist die vollkommene Gleichheit von Maßen gemeint, wodurch die Reproduzierbarkeit unabhängig von Ort und Zeit unbedingt sichergestellt ist. Im Hinblick auf die Abhängigkeit von Einflussgrößen ist ergänzend anzumerken, dass nach derzeitigem Kenntnisstand die Invarianz atomarer Eigenschaften postuliert werden kann, was bedeutet, dass sich Einheiten in einem unabhängigen Sinne realisieren lassen.

Schließlich muss auf den **Zusammenhang zwischen Natur- oder Fundamentalkonstanten und den Basiseinheiten** hingewiesen werden. Fundamentalkonstanten sind daher von Bedeutung, als dass sie unveränderliche Verknüpfungsgrößen innerhalb von Theorien sowie zwischen Theorien darstellen, und sie sind unmittelbar mit den Quantenmaßen verknüpft, wie das Beispiel der Basiseinheit Meter als Funktion der Lichtgeschwindigkeit zeigt. Da die Fundamentalkonstanten dimensionsbehaftet sind, ist deren Genauigkeit an das Einheitensystem gekoppelt. Diese enge Wechselbeziehung zwischen den physikalischen Einheiten und den als unveränderlich geltenden Naturkonstanten bevorzugt ein Einheitensystem auf Grundlage dieser und nicht auf Basis von Prototypen. Weitestgehend ist diese Vorgabe umgesetzt, das heißt, nach und nach konnten die SI-Basiseinheiten durch Fundamentalkonstanten oder Stoffeigenschaften definiert werden [vgl. hierzu SCHOW (2001)]. Lediglich für die Basisgrößen Masse und Stoffmenge sind noch Fundamentalkonstanten oder Stoffeigenschaften zu finden. Auch diesbezüglich werden

Quantenmaße	
Vorteile: reproduzierbar, unabhängig von Ort und Zeit; gering abhängig von Einflussgrößen; langzeitstabil; Gleichwertigkeit der Normale;	Nachteile: abstrakt; aufwendige Messanordnung;
Prototypmaße	
Vorteile: anschaulich; einfache Messanordnung;	Nachteile: einmalig bezüglich Ort und Zeit; abhängig von Einflussgrößen; mangelnde Langzeitstabilität; Genauigkeitshierarchie der Normale;

Tabelle 1.2–1: Gegenüberstellung von klassischen und atomaren Eichmaßen

Fortschritte gemacht, wie in BECKER/GLÄSER (2001) dargestellt. Dabei wird versucht, das Kilogramm mittels atomarer Massen bzw. auf Grundlage einer Elementarmasse zu definieren. In die Zukunft schauend wären ebenfalls eine Elementarlänge l_E als auch eine Elementarzeit t_E denkbar. Im Hinblick auf die Basisgröße Länge wurde, unter anderem ausgehend vom Abstand der Nukleonen im Kern, ursprünglich angenommen, dass diese hypothetische Naturkonstante in der Größenordnung

$$l_E \approx 10^{-15} \text{ m}$$

liegt, und durch Division mit der Lichtgeschwindigkeit c würde sich aus der Elementarlänge die Elementarzeit t_E ableiten und zwar gemäß

$$t_E \approx 10^{-23} \text{ s} .$$

Aufgrund der Erkenntnisse aus der Elementarteilchenphysik ist heute der Wert für l_E zu revidieren. Sollte die Elementarlänge tatsächlich existieren, so wird vermutet, dass sie von der Größenordnung 10^{-36} m ist.

Kapitel 2

Grundlagen aus der Quantenphysik

2.1 Allgemeine Grundlagen

2.1.1 Vorbemerkungen

Unter **Elementarteilchen** werden gemeinhin die Quanten der Materie verstanden, das heißt die kleinsten Komponenten, aus denen sich die stofflichen Erscheinungen zusammensetzen. Im Hinblick auf die subatomaren Existenzformen der Materie sind mittlerweile, außer den seit 1897, 1910 und 1932 bekannten Elementarteilchen, nämlich den **Elektronen**, den **Protonen** und den **Neutronen**, über 200 weitere Teilchen entdeckt worden. Zur Klassifikation dieser Mannigfaltigkeit der Elementarteilchen werden diese nach Art ihrer **Wechselwirkung** eingeordnet, wobei man

$$\textit{Gravitationswechselwirkung} \quad \textit{Reichweite} \infty \quad (2.1-1a)$$

$$\textit{schwache Wechselwirkung} \quad \textit{Reichweite} \approx 10^{-16} \textit{ m} \quad (2.1-1b)$$

$$\textit{elektromagnetische Wechselwirkung} \quad \textit{Reichweite} \infty \quad (2.1-1c)$$

$$\textit{starke Wechselwirkung} \quad \textit{Reichweite} \approx 10^{-15} \textit{ m} \quad (2.1-1d)$$

unterscheidet. Wegen der geringen Reichweite von (2.1-1b,d) treten die entsprechenden Kräfte nicht bei makroskopischen Körpern auf. Neben den Aktionsradien der einzelnen Wechselwirkungen sind auch die Stärken der jeweiligen Kräfte von Bedeutung. So kann die Gravitationswechselwirkung bei der Behandlung mikrophysikalischer Systeme in der Regel vernachlässigt werden, da sie in Relation zu (2.1-1b-d) als schwächste Kraft gilt. Starke und auch schwache Wechselwirkung treten lediglich im Bereich der Atomkerne und der Elementarteilchen auf. Der Aufbau der Atome aus Atomkern und Elektronen beruht maßgeblich auf der elektromagnetischen Wechselwirkung, welche prinzipiell zwischen solchen Elementarteilchen in Erscheinung tritt, deren magnetisches Moment verschieden von Null ist bzw. die ein elektromagnetisches Feld mit sich führen, also Ladung tragen. Rekurrierend auf die starke Wechselwirkung werden nun **zwei Hauptgruppen von Elementarteilchen** unterschieden, nämlich

die Hadronen

sie unterliegen der Wechselwirkung (2.1-1d)

die Leptonen

sie unterliegen nicht der Wechselwirkung (2.1-1d) .

Die Hadronen zeigen weiter die Wechselwirkungen (2.1-1a,b) und auch (2.1-1c), sofern sie Ladung tragen oder ein magnetisches Moment besitzen. Letztere Aussagen gelten auch für die

Leptonen. Die Wechselwirkungen werden durch Austauschteilchen oder **Feldquanten** vermittelt. Dazu gehören

die Photonen

für die elektromagnetische Wechselwirkung

die W- und Z-Bosonen

für die schwache Wechselwirkung

die Gluonen

für die starke Wechselwirkung

die Gravitonen

für die Gravitationswechselwirkung.

Für die im Rahmen dieser Arbeit angestellten Betrachtungen sind relevant die Lichtquanten, also die **Photonen** aus der Gruppe der Austauschteilchen, die **Protonen** und **Neutronen** aus der Gruppe der Hadronen und schließlich die **Elektronen** aus der Gruppe der Leptonen.

2.1.2 Aufbau der Atome

Seit dem Altertum beschäftigen sich Wissenschaftler mit der Frage nach der Struktur der Materie. Einen bedeutsamen Schritt brachte das **Rutherfordsche Atommodell (1911)**, welches als wesentliche Erkenntnis die Unterscheidung von Atomkern und -hülle brachte, dem Aufenthaltsort der Elektronen. Des Weiteren ging das Modell davon aus, dass die Elektronen sich auf Bahnen um den Atomkern bewegen, ähnlich wie die Planeten des Sonnensystems. Damit verbunden ist dann auch die Vorstellung, dass der Atomkern aufgrund seiner elektrischen Ladung ein radialsymmetrisches Feld besitzt, so dass sich einem Elektron in Abhängigkeit vom Kernabstand eine potentielle Energie zuordnen lässt. Neben diesem Energieanteil besitzt das Elektron kinetische Energie, begründet durch die Bahnbewegung. Damit addieren sich beide Energiekomponenten zur Gesamtenergie des Elektrons. Das **Bohrsche Atommodell (1913)** als Weiterentwicklung der Rutherfordschen Theorie postulierte, dass sich die Elektronen lediglich auf ganz bestimmten Kreisbahnen bewegen, was bedeutet, die einzelnen Atomradien sind gequantelt, und die mit den Elektronenkreisbahnen verbundenen Energiestufen sind diskret. So werden im Bohrschen Atommodell die Elektronenumlaufbahnen bzw. der **Zustand eines Elektrons** durch die **Hauptquantenzahl der Bahn**

$$n \in \{1, 2, 3, \dots\} \quad (2.1-2)$$

gekennzeichnet und entsprechend die damit verbundenen Energieniveaus durch E_n . Im zweiten Bohrschen Postulat wird reklamiert, dass Elektronen von einer Energiestufe auf eine andere wechseln können. So erfolgt der **Übergang von einem Quantenzustand in einen energiereicheren Zustand** durch sogenannte **Anregung**, welche in drei Weisen erfolgen kann, und zwar

- *Stoß* (2.1-3a)

- *optische Anregung (Absorption eines Lichtquants)* (2.1-3b)

- *thermische Anregung (Wärmezufuhr).* (2.1-3c)

Auch ist der inverse Prozess möglich, nämlich dass durch Energiezufuhr ein Elektron von einem

energetisch höheren Niveau auf ein tieferes gebracht wird. Dabei wird ein angeregtes Atom durch das einfallende Energiequant veranlasst, ein Photon abzugeben, so dass man diesen Vorgang als **Induzierte Emission** bezeichnet. Bleibt dahingegen ein angeregtes Atom ohne äußeren Einfluss, so verweilt es einen Zeitraum lang in diesem Zustand, um dann durch **Spontane Emission** eines Photons in den Ausgangszustand zurückzukehren. Einen Niveauübergang nennt man auch **Quantensprung**. Das Bohrsche Atommodell wird hier wegen seiner historischen Bedeutung genannt. Es ist aber nur beschränkt gültig und erklärt lediglich Sachverhalte von Eielektronensystemen, wie es zum Beispiel ein Wasserstoffatom darstellt. Um den **Zustand eines Mehrelektronensystems** zu beschreiben, nutzt man die Kennung

$$n^{2S+1} L_J . \quad (2.1-4a)$$

Darin bedeuten

$$n = \text{Hauptquantenzahl des höchsten angeregten Elektrons} \quad (2.1-4b)$$

$$2S + 1 = \text{Multiplizität des } L\text{-Terms} \quad (2.1-4c)$$

$$L = \text{Quantenzahl des Gesamtbahndrehimpulses der Elektronen} \quad (2.1-4d)$$

$$J = \text{Quantenzahl des Gesamtdrehimpulses der Elektronenhülle} \quad (2.1-4e)$$

mit

$$L \in \{S, P, D, F, \dots\} . \quad (2.1-4f)$$

Für tiefergehende Erläuterungen der Größen in (2.1-4a) wird auf die Lehrbücher verwiesen, wie zum Beispiel HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), ABSCHNITT 2.6.5.2, DEMTRÖDER (1996) und HAKEN/WOLF (1987), ABSCHNITT 17.3.2. Abschließend wird zur Veranschaulichung von (2.1-4a) ein einfaches Beispiel angegeben, es wird nämlich ein Eielektronensystem, das Wasserstoffatom, im untersten Energieniveau dargestellt. Die Anwendung von (2.1-4a) liefert

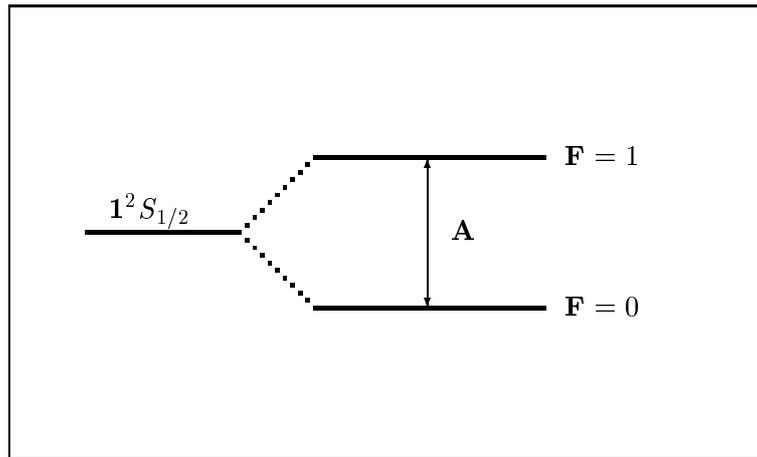
$$1^2S_{1/2} = \text{Grundzustand des Wasserstoff-Atoms} ,$$

und in ABBILDUNG 2.1.2-1 [s. Seite 22] sind die mit diesem **Grundzustand** verbundenen Energiestufen graphisch dargestellt. Die Abbildung bezeichnet man auch als **Termschema**, und darin sind A der Hyperfeinfaktor (2.2-22d) und F die Gesamtdrehimpulsquantenzahl [vgl. hierzu (2.2-20)].

2.1.3 Atomismus der Elementarteilchen

Zur **Kennzeichnung der Elementarteilchen** werden messbare Attribute herangezogen. Solche Charakteristika sind zum Beispiel ganz herkömmlich die elektrische Ladung, die Masse, dann aber auch spezifisch mikrophysikalische Eigenschaften wie der Spin mit der Einheit \hbar [vgl. (2.1-20a)] sowie das magnetische Moment, dessen Einheit je nach Elementarteilchenart das Bohrsche Magneton (2.1-15b) oder das Kernmagneton (2.1-15c) ist, und des Weiteren die Leptonen- und die Baryonenzahl als auch schließlich die Halbwertszeit bzw. die Lebensdauer.

Um den **Aufbau der Materie** [vgl. hierzu auch die Ausführungen von ABSCHNITT 2.1.2] zu beschreiben, geht man von einer kleinsten Einheit aus, das meint den kleinsten Teil eines chemischen Elements, welcher mit chemischen Mitteln nicht weiter auflösen ist. Diese kleinste

Abbildung 2.1.2–1: Termschema des Wasserstoffgrundzustandes $1^2S_{1/2}$

Einheit, ein sogenanntes Atom, besteht aus einem Kern, gebildet aus Nukleonen, das heißt Z Protonen und N Neutronen, und weiter aus Z Elektronen, welche die Atom- bzw. Elektronenhülle ausmachen. Sämtliche Vorgänge im Zusammenhang mit der Elektronenhülle sind Gegenstand der **Atomphysik**. Dahingegen untersucht und beschreibt die **Kernphysik** die Atomkerne. Die Summe aus Protonenzahl (Kernladungszahl) Z und Neutronenzahl N heißt

$$\begin{aligned} A &= Z + N & (2.1-5a) \\ &= \text{Massen- oder Nukleonenzahl.} \end{aligned}$$

Im **Periodensystem der Elemente** werden die Atome nach wachsenden Kernladungszahlen geordnet, so dass sie in diesem Zusammenhang auch als Ordnungszahlen oder Atomnummern bezeichnet werden. Damit, nämlich mit der Ordnungszahl Z und mit der Nukleonenzahl A sowie mit Hilfe eines Symbols für das jeweilige chemische Element, lässt sich jedes Atom im Periodensystem der Elemente in der Weise

$${}^A_Z(\text{Symbol}) \quad (2.1-5b)$$

darstellen. Als **Nuklid** bezeichnet man eine Sorte von Atomen, die jeweils alle in der Protonenzahl Z und Massenzahl A gleich sind. Verschiedene Nuklide eines Elementes werden unter dem Begriff **Isotop** zusammengefasst. Sie besitzen die gleiche Protonenzahl, haben aber unterschiedliche Massenzahlen. Eine **Plejade** bildet die Gesamtheit der isotopen Atome eines Elementes. Zusätzlich zur Ordnungszahl werden im Periodensystem der Elemente die durchschnittlichen Massenzahlen der Isotope, das sind die **relativen Atommassen** A_{rel} eines Elementes, angegeben. Diese mittleren Massenzahlen ergeben sich aus den relativen Häufigkeiten der isotopen Atome einer Plejade [vgl. hierzu DEMTRÖDER (1996), Bd.3, ABSCHNITT 6.2.4]. Die Einheit der relativen Atommasse ist

$$m_u = 1 u = 1,660565 \cdot 10^{-27} \text{ kg} . \quad (2.1-6)$$

Damit ist die **Gesamtmasse eines Atoms** m_{abs} , auch absolute Atommasse genannt, durch

$$m_{abs} = A_{rel} m_u \quad (2.1-7a)$$

gegeben. Ebenfalls lässt sich die absolute Atommasse gemäß

$$m = Z m_p + N m_n + Z m_e \quad (2.1-7b)$$

bestimmen, wobei das indizierte m der rechten Seite der Gleichung jeweils die Masse für das Proton (Index p), das Neutron (Index n) und das Elektron (Index e) bezeichnet. Im Allgemeinen ist der Beitrag der Hüllenmasse, gebildet aus den Z Elektronen, so gering, dass die Kernmasse die gesamte Atommasse ausmacht, also der dritte Term in (2.1-7b) nicht berücksichtigt werden braucht. Allerdings stellt die Kernmassenbestimmung nach (2.1-7b) lediglich eine Näherung dar, da beim Zusammenbau von Protonen und Neutronen ein Massenverlust, der sogenannte **Massendefekt** Δm , entsteht [vgl. hierzu DEMTRÖDER (1996), BD.3, ABSCHNITT 6.2.4]. Vernachlässigt man in (2.1-7b) die geringen Unterschiede zwischen Protonen- und Neutronenmasse sowie den Beitrag des Massendefektes und denjenigen der Hüllenmasse, so liefert ein Gleichsetzen von (2.1-7a,b)

$$A_{rel} m_u \approx (Z + N) \bar{m} \quad \bar{m} = m_p \approx m_n . \quad (2.1-7c)$$

2.1.4 Drehimpuls und magnetisches Moment der Elementarteilchen

Wie im vorangegangenen Abschnitt kurz angesprochen, gehören zu den wesentlichen kennzeichnenden Eigenschaften der Elementarteilchen der Spin und das magnetische Moment. Auf beide Größen wird nun vertieft eingegangen.

Den Elementarteilchen lassen sich jeweils ein Bahndrehimpuls und ein Eigendrehimpuls zuordnen. Gekoppelt an die jeweilige Bewegung sind magnetische Momente. Zur Darstellung dieser Zusammenhänge wird von der klassischen Formulierung des Drehimpulses ausgegangen:

$$L_j = \varepsilon_{jkl} x_k p_l , \quad p_l = m v_l . \quad (2.1-8)$$

Um aus (2.1-8) eine quantenmechanische Größe zu erhalten, sind die sogenannten Operatorregeln [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), ABSCHNITT 2.6.2.2] anzuwenden, so dass sich der **Bahndrehimpulsoperator** in der Weise

$$\hat{L}_j = \varepsilon_{jkl} \hat{x}_k \hat{p}_l = -i \hbar \varepsilon_{jkl} x_k \partial_l , \quad (2.1-9a)$$

und der **Operator des Drehimpulsquadrates** gemäß

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_j \hat{L}_j = \hbar^2 x_k \partial_l (x_k \partial_l - x_l \partial_k) \quad (2.1-9b)$$

bildet. Zur Bedeutung der Operatoren siehe auch BLOCHINZEW (1988), §20. Im Folgenden interessiert, welche Werte die Bahndrehimpulskomponenten und das Bahndrehimpulsquadrat annehmen können. Diese Problemstellung ist die rein mathematische Aufgabe der Bestimmung der Eigenwerte sowie der zugehörigen Eigenfunktion aus den entsprechenden Eigenwertgleichungen für die Operatoren der physikalischen Größe. Im Hinblick auf die Eigenfunktion von Bahndrehimpulsoperator und Operator des Drehimpulsquadrates ist von Bedeutung, dass die Vertauschungsrelation verschwindet, so dass beide Operatoren eine gemeinsame Eigenfunktion besitzen. Die Aufstellung der Eigenwertgleichungen für (2.1-9a) und (2.1-9b) erfolgt zweckmäßig in sphärischen Koordinaten. Hierzu findet sich eine ausführliche Rechnung in HEITZ/STÖCKER-MEIER

(1998), ABSCHNITT 2.6.2.3, und BLOCHINZEW (1988), §25. Sie liefert für die **Eigenwerte des Bahndrehimpulsquadrates**

$$L_l^2 = \hbar^2 l(l+1), \quad L_l = |L_{j,l}| = \hbar [l(l+1)]^{1/2}, \quad (2.1-10a)$$

sowie für die korrespondierende **Eigenfunktion**

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(\lambda, \theta) &= Y_{lm}(\lambda, \theta) = a_{lm} P_{lm}(\theta) \exp(im\lambda), \\ a_{lm} &= (4\pi)^{-1/2} [(2l+1)(l-m)!/(l+m)!]^{1/2}, \quad m = |m|. \end{aligned} \quad (2.1-10b)$$

In (2.1-10b) sind die $P_{lm}(\theta)$ die zugeordneten Legendreschen Polynome erster Art [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.6-25)], und für die **Bahndrehimpuls- oder Nebenquantenzahl l** gilt

$$l \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}. \quad (2.1-10c)$$

Die **magnetische Quantenzahl m** kann die Werte

$$m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm l\} \quad (2.1-10d)$$

annehmen. (2.1-10b) ist auch Eigenfunktion des Bahndrehimpulsoperators. Berücksichtigt man weiter, dass die 3.-Komponente des sphärischen Bahndrehimpulsoperators lediglich eine Funktion der Länge λ ist, so ergibt die Auswertung der Eigenwertgleichung für die **3.-Komponente des Bahndrehimpulses**

$$L_{3,m} = \hbar m. \quad (2.1-11)$$

Nach (2.1-10a) und (2.1-11) ist das Eigenwertspektrum von L_l und L_3 diskret, und es umfasst die Gesamtheit aller möglichen Messergebnisse für die mechanischen Größen (2.1-9a,b).

Tragen die Elementarteilchen Ladungen, so erzeugt die oben genannte Bahnbewegung ein Magnetfeld, das heißt mit dem mechanischen Bahnmoment ist auch ein **magnetisches Bahnmoment** verbunden. Allgemein gilt für den Zusammenhang beider Momente die Beziehung

$$\mu_i = \gamma L_i, \quad (2.1-12)$$

wobei die Proportionalitätskonstante γ das **gyromagnetische Verhältnis** darstellt. Für die Relation (2.1-12) wird eine positive Ladung des Elementarteilchens vorausgesetzt. Im Falle einer negativen Elementarladung kehrt sich das Vorzeichen des Terms auf der rechten Seite um. Weitergehende Betrachtungen zu (2.1-12) werden zu (2.1-15ff) ausgeführt.

Neben den Bahnmomenten besitzen die Elementarteilchen auch Eigenmomente. Diese Größen bezeichnet man als **mechanisches Spinmoment** (kurz: Spin) und **magnetisches Spinmoment**. Grundsätzlich können die Ergebnisse (2.1-10a) bis (2.1-12) auf die Spinmomente übertragen werden, allerdings sind dabei Besonderheiten zu berücksichtigen. Die Versuche von OTTO STERN und WALTER GERLACH aus dem Jahre 1921 zeigten, dass für den **Elektronenspin** nur zwei räumliche Orientierungen möglich sind, das heißt anstelle der $2l+1$ Eigenwerte, was für (2.1-11) gilt, ist hier

$$2l+1 = 2 \quad \Rightarrow l =: s = 1/2. \quad (2.1-13a)$$

Mit der in (2.1-13a) eingeführten **Spinquantenzahl s** liefert (2.1-10a) für das **Spinquadrat**

$$\bar{s}^2 = \bar{s}_j \bar{s}_j = \frac{3}{4} \hbar^2, \quad \bar{s} = |\bar{s}_j| = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/2} \hbar, \quad (2.1-13b)$$

und die möglichen Einstellungen für die **3.–Komponente des Elektronenspins** sind

$$\bar{s}_3 = \hbar m_s , \quad m_s \in \{-1/2, +1/2\} , \quad (2.1-13c)$$

wobei analog zu (2.1-10d) m_s die **magnetische Spinquantenzahl** darstellt. Die Ergebnisse (2.1-13) gelten nicht nur für das Elektron, sondern auch für die Nukleonen, so dass die Spinquantenzahl s , die üblicherweise in der Bezeichnung „Spin“ angegeben wird, für diese drei Elementarteilchen gleich ist. Als **Kernspin** bezeichnet man den Gesamtdrehimpuls eines Atomkerns, der sich aus Protonen- und Neutronenspin als auch aus den einzelnen Bahndrehimpulsen der Nukleonen zusammensetzt [vgl. hierzu DEMTRÖDER (1998), Bd. 4, ABSCHNITT 2.5]. Formal gelten die Beziehungen (2.1-10a) und (2.1-11), die für das **Kernspinquadrat** lauten

$$\bar{I}^2 = \bar{I}_j \bar{I}_j = \hbar^2 I(I+1) , \quad \bar{I} = |\bar{I}_j| = \hbar [I(I+1)]^{1/2} , \quad (2.1-14a)$$

und für die **3.–Komponente des Kernspins**

$$\bar{I}_3 = \hbar m_I . \quad (2.1-14b)$$

Ebenfalls in formaler Übereinstimmung mit (2.1-10c,d) sind I die **Kernspin-Quantenzahl** mit

$$0 \leq I \leq 15/2 \quad (2.1-14c)$$

und m_I die **magnetische Kernspin-Quantenzahl**

$$m_I = \{-I, -I+1, \dots, I-1, +I\} . \quad (2.1-14d)$$

Schließlich lässt sich auch für das Lichtquant ein Eigendrehimpuls, der sogenannte **Photonenspin**, angeben wie beispielsweise in HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.6-30), dargestellt.

Zur **Berechnung des magnetischen Momentes** (2.1-12) geht man von der Vorstellung eines auf einer Kreisbahn umlaufenden Elementarteilchens aus, welches Ladung trägt und somit einen elektrischen Strom darstellt, der ein magnetisches Moment erzeugt. Es gilt dann [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.6-35)]

$$\mu_j = \frac{e}{2m_0} L_j , \quad (2.1-15a)$$

wobei m_0 die Ruhmasse des Elementarteilchens ist und das Vorzeichen des rechtsseitigen Terms je nach Art der Ladung e positiv oder negativ wird. Mit den Definitionen

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9,274078 \cdot 10^{-24} Am^2 , \quad m_e = \text{Elektronenruhmase} , \quad (2.1-15b)$$

$$\mu_K = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,050824 \cdot 10^{-27} Am^2 , \quad m_p = \text{Protonenruhmase} , \quad (2.1-15c)$$

lässt sich (2.1-15a) entweder in Einheiten des **Bohrschen Magnetons** μ_B oder in Einheiten des **Kernmagnetons** μ_K darstellen. Das Kernmagneton ist im Verhältnis $1/1836$ kleiner als das Bohrsche Magneton, da es anstelle der Elektronenmasse auf die Protonenmasse bezogen wird. Die experimentelle Erfahrung zeigt weiterhin, dass es sinnvoll ist, in (2.1-15a) einen sogenannten **g-Faktor** einzuführen. Dieser g-Faktor kann messtechnisch bestimmt werden, so dass sich daraus

die magnetischen Eigenschaften der Elementarteilchen ableiten lassen. Für das **magnetische Bahnmoment des Elektrons** gilt mit (2.1–12) und (2.1–15a,b)

$$\mu_{j.Bahn} = -\gamma_{Bahn} L_j = (g_l \mu_B / \hbar) L_j, \quad g_l = -1. \quad (2.1-16a)$$

Oftmals wird das gyromagnetische Verhältnis $\gamma_{Bahn} \hbar$ bzw. der g-Faktor in Einheiten μ_B angegeben, das heißt, das magnetische Bahnmoment für das Elektron ist gleich $-\mu_B$. In Analogie bestimmen sich das **magnetische Spinnmoment des Elektrons** gemäß

$$\mu_{j.Spin} = -\gamma_{Spin} \bar{s}_j = (g_s \mu_B / \hbar) \bar{s}_j, \quad g_s = -2,0023, \quad (2.1-16b)$$

sowie das **magnetische Moment des Kernspins** unter Berücksichtigung von (2.1–12) und (2.1–15a,c)

$$\mu_{j.Kern} = \gamma_{Kern} \bar{I}_j = (g_I \mu_K / \hbar) \bar{I}_j, \quad (2.1-17a)$$

$g_I = g\text{-Faktor des Kerns, abhängig von der speziellen Kernstruktur}.$

Betrachtet man in (2.1–17a) lediglich die 3.-Komponente, so liefert dies für die Extremwerte unter Beachtung von (2.1–14b,d)

$$\mu_{3.Kern}|_{max} = (g_I \mu_K) [(\pm I)]. \quad (2.1-17b)$$

Neben dem g-Faktor g_I stellt auch die Kernspin-Quantenzahl I eine Messgröße dar, und beispielsweise sind die Beobachtungen für das Proton

$$I_P = 1/2 \quad g_P = 5,58556, \quad (2.1-18a)$$

und für das Neutron

$$I_N = 1/2 \quad g_N = -3,82630, \quad (2.1-18b)$$

so dass das magnetische Moment entsprechend (2.1–17b) angegeben werden kann, nämlich für das Proton $+2,79278\mu_K$ und für das Neutron $-1,91315\mu_K$. Das Faktum, dass das Neutron mit der Elementarladung Null ein magnetisches Spinnmoment besitzt, ist ein Hinweis darauf, dass sich das Neutron aus weiteren Elementen, den sogenannten **Quarks**, zusammensetzt [vgl. hierzu z.B. DEMTRÖDER (1997)].

2.1.5 Mikrophysikalische Objekte als Welle und als Teilchen

Gegenstand dieses Abschnitts ist die **Darstellung der Zusammenhänge zur Beschreibung des Verhaltens der mikrophysikalischen Objekte** bzw. der Elementarteilchen. Dabei liegt es nahe, mikrophysikalische Objekte als Teilchen anzunehmen und daraus folgend das Verhalten der Objekte mit den Gesetzen der klassischen Mechanik zu beschreiben. Eine solche Vorgehensweise ist zulässig, da sie insbesondere durch das Experiment bestätigt wird. Allerdings existieren auch Fälle, bei denen das klassische mechanische Modell mit seiner Teilchenvorstellung versagt und die Erklärung des entsprechenden Phänomens allein durch die Vorstellung einer Welle möglich ist. Vom Standpunkt der klassischen Mechanik aus stellt der Sachverhalt einen Antagonismus dar, der als **Dualismus von Wellen- und Teilchenbild** bezeichnet wird. Im Gegensatz dazu erkennt die Quantentheorie diese beiden Eigenschaften der Elementarteilchen

als sich ergänzend an, und so spricht man in diesem Zusammenhang auch von **Komplementarität**, ein Begriff, der erstmals von NIELS BOHR in die Physik eingeführt wurde.

Entsprechend den vorangegangenen Feststellungen werden jedem Elementarteilchen eine

$$\mathbf{kinetische\ Energie\ } E_{kin} \tag{2.1-19a}$$

$$E_{kin} = \gamma m_0 c^2 = c (m_0^2 c^2 + p^2)^{1/2}$$

und ein

$$\mathbf{Impuls\ } p_i. \tag{2.1-19b}$$

$$p_i. = p (v_i./v) = \gamma m_0 v_i. = (E_{kin}/c^2) v_i.$$

mit

$$\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}, \quad m_0 = \mathbf{Ruhmasse},$$

$$v^2 = v_i. v_i., \quad p^2 = p_i. p_i.,$$

zugeordnet, und in der Vorstellung der Elementarteilchen als Welle sind es die Eigenschaften

$$\mathbf{Strahlungsfrequenz\ } \nu, \tag{2.1-19c}$$

$$\mathbf{Kreisfrequenz\ } \omega, \tag{2.1-19d}$$

$$\mathbf{Wellenlänge\ } \lambda. \tag{2.1-19e}$$

Im Besonderen ergeben sich dann für die Elementarteilchen des Lichts und der Materie nachfolgende Zusammenhänge. MAX PLANCK (1900) hat für die Energie der Lichtquanten, die sogenannte **Photonenenergie**, die Beziehung

$$E_{kin} = h \nu = \hbar \omega, \tag{2.1-20a}$$

$$h = 6,626176 \cdot 10^{-34} J_s = \mathbf{Plancksche\ Konstante}, \quad \hbar = h/(2\pi),$$

gefunden, so dass sich aus (2.1-19b) in Verbindung mit (2.1-19a) der **Photonenimpuls**

$$p = |p_i.| = h/\lambda = \hbar/k, \quad k = 2\pi/\lambda = \mathbf{Wellenzahl}, \tag{2.1-20b}$$

ergibt. Mit (2.1-20a,b) wird das klassische Wellenbild des Lichts durch ein Teilchenbild ergänzt. Umgekehrt hat LOUIS-VICTOR DE BROGLIE (1924) das Teilchenbild der Materie um das Wellenbild erweitert, indem er die Ergebnisse für die Photonen, (2.1-20a,b), auf Elementarteilchen der Materie übertragen hat. Gleichsetzen von (2.1-20a) und (2.1-19a) liefert

$$\nu = (1/h) \gamma m_0 c^2, \tag{2.1-21a}$$

und für die Wellenlänge des Materieteilchens, die sogenannte **de Broglie-Wellenlänge**, folgt aus dem Impuls (2.1-19b) in Verbindung mit (2.1-20b)

$$\lambda = (h/v) (\gamma m_0)^{-1}. \tag{2.1-21b}$$

Teilchenvorstellung (2.1-19a,b) und Wellenvorstellung (2.1-19c-e) sind durch die Beziehungen (2.1-20a,b), beziehungsweise (2.1-21a,b), miteinander gekoppelt. Aus (2.1-21b) folgt

$$\lambda = 0 \quad \mathbf{für} \quad m_0 \rightarrow \infty,$$

das heißt, für makroskopische Objekte verschwindet die de Broglie-Wellenlänge, und damit tritt bei diesen Objekten der Wellencharakter nicht in Erscheinung.

An dieser Stelle ist zu unterstreichen, dass die voran dargestellten Erkenntnisse nur durch das enge Zusammen- und Wechselwirken von Theorie und Experiment möglich waren. Diese Synergie bewirkte auch den weiteren Erkenntnisfortschritt, denn mit (2.1–20,21) war die Modellbildung noch nicht vollständig. Erst mit der Aufstellung einer Wellengleichung durch ERWIN SCHRÖDINGER (1926) in Verbindung mit der von MAX BORN (1926) vorgeschlagenen statistischen Deutung der Lösungen ψ dieser Wellengleichung war ein konsistentes Wellenmodell für Teilchen gegeben. BORN postulierte, dass

$$P(t, x_j) dv = |\psi(t, x_j)|^2 dv \equiv (\psi^* \psi) dv \quad (2.1-22a)$$

die **Wahrscheinlichkeit** dafür ist, dass ein

$$\text{Teilchen} \in \text{Volumenelement } dv = dx_1 dx_2 dx_3.$$

ist. Die Größe ψ^* in (2.1–22a) bezeichnet die konjugiert komplexe Wellenfunktion. Des Weiteren soll die **Normierungsbedingung**

$$\int_B P dv = 1 \quad (2.1-22b)$$

gelten, wobei B den räumlichen Bereich bezeichnet, in dem das Teilchen mit Sicherheit anzutreffen ist. Die **Wellengleichung** für elektromagnetische Wellen wie auch für Materiewellen schreibt sich allgemein

$$\begin{aligned} \Delta \psi &= \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \\ \Delta &:= \partial_j \partial_j = \text{Laplaceoperator}, \quad u = \text{Phasengeschwindigkeit}. \end{aligned} \quad (2.1-23)$$

Im Vakuum gilt für die Phasengeschwindigkeit des Lichtes

$$u = c, \quad c = \text{Vakuum-Lichtgeschwindigkeit}, \quad (2.1-24a)$$

so dass damit die **klassische homogene Wellengleichung der Elektrodynamik** für den ladungs- und stromfreien Fall

$$\Delta \psi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (2.1-24b)$$

resultiert [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), ABSCHNITT 2.4]. Die Wellengleichung (2.1–24b) gilt gleichermaßen für die elektrische Feldstärke E_i und die magnetische Induktion B_i . Bei Materie ist für die Phasengeschwindigkeit von

$$u = p/2m = \hbar k/2m \quad (2.1-25a)$$

auszugehen, und für stationäre Systeme wählt man den Ansatz

$$\psi(t, x_j) = \varphi(x_j) \exp(-i\omega t), \quad i := (-1)^{1/2}, \quad (2.1-25b)$$

so dass die **zeitunabhängige Schrödingersche Wellengleichung** in der Weise

$$E_{ges} \varphi = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E_{pot} \right] \varphi, \quad E_{ges} = E_{kin} + E_{pot}, \quad (2.1-25c)$$

angegeben werden kann. In (2.1–25c) ist die Energie lediglich eine Funktion des Ortes. Für nicht stationäre Systeme muss die **zeitabhängige Schrödingergleichung**

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + E_{pot} \right] \psi, \quad E_{pot} = E_{pot}(t, x_j), \quad (2.1-25d)$$

erfüllt sein. Darin bedeuten

$$\psi(t, x_j), \varphi(x_j) = \text{Zustands- bzw. Wellenfunktion} \quad (2.1-25e)$$

$$E_{kin}, E_{pot}, E_{ges} = \text{kinetische -, potentielle -, Gesamtenergie} \quad (2.1-25f)$$

$$m = \text{Masse des Teilchens.} \quad (2.1-25g)$$

2.2 Quanteneffekte

2.2.1 Superfluidität

Als **Superfluidität** bezeichnet man einen Zustand von Vielteilchensystemen, die bei sehr tiefen Temperaturen, das heißt, in der Nähe des absoluten Nullpunktes, nicht in den festen Aggregatzustand übergehen. Dieser Quanteneffekt konnte erstmals für das Isotop Helium 4 (${}^4\text{He}$) nachgewiesen werden. Bei bestimmten Temperatur- und Druckverhältnissen geht das normalflüssige Helium, als **Helium I** bezeichnet, in das supraflüssige **Helium II** über. Allerdings stellt das Helium II keine ideale Supraflüssigkeit dar, sondern die Supraflüssigkeit des Heliums ist ein Gemisch aus Normal- und Supraflüssigkeit. Dieser Tatsache wird durch das sogenannte Zweiflüssigkeitsmodell Rechnung getragen. Zur **Beschreibung der theoretischen Zusammenhänge** und der Eigenschaften der Superfluidität wird von der zeitabhängigen Schrödingergleichung (2.1–25d) ausgegangen. (2.1–25d) gilt grundsätzlich für einzelne Teilchen, nicht aber für Vielteilchensysteme, wie es der vorliegende Fall ist. Gleichwohl lässt sich zeigen, dass die potentielle Energie E_{pot} eines Einzelteilchens genau dann mit dem chemischen Potential V der Gesamtflüssigkeit identifiziert werden kann, wenn sich die Supraflüssigkeit nicht im Bewegungszustand befindet [vgl. hierzu TILLEY/TILLEY (1990)], so dass also das chemische Potential und die Masse eines Einzelteilchens (2.1–25g) in die Schrödingergleichung (2.1–25d) eingeführt werden und damit die Approximation des Vielteilchensystems erreicht ist. Für die Wellenfunktion als Lösung der Schrödingergleichung wird

$$\psi(t, x_j) = \psi_0(t, x_j) \exp[i \phi(t, x_j)], \quad \phi = \text{Phase der Wellenfunktion}, \quad (2.2-1a)$$

angesetzt, und für das Amplitudenquadrat

$$\psi^* \psi =: \psi_0^2, \quad \psi^* = \text{konjugiert komplexe Wellenfunktion}, \quad (2.2-1b)$$

gilt

$$\psi_0^2 = \bar{\rho}_s/m, \quad \bar{\rho}_s/m = \text{Massendichte des suprafluiden Teilchensystems}. \quad (2.2-1c)$$

Berücksichtigt man diese Vorgaben in der Schrödingergleichung (2.1–25d), so liefert diese die Ergebnisse

$$\partial \phi / \partial t = -(\hbar/2m) \{ (\partial_j \phi)^2 - \Delta \psi_0 / \psi_0 \} - V/\hbar \quad (2.2-2a)$$

für den Realteil und

$$i \partial \psi_0 / \partial t = -(\hbar/2m) \{2i (\partial_j \psi_0)(\partial_j \phi) + i \psi_0 \Delta \phi\} \quad (2.2-2b)$$

für den Imaginärteil. Beide Gleichungen lassen sich weiter auswerten. Für den Realteil (2.2-2a) geschieht dies unter Zuhilfenahme der Eigenwertgleichung für den Impuls des superfluiden Teilchens

$$\hat{p}_j \psi = p_j \psi ,$$

aus der

$$p_j = m v_{j.s} = \hbar \partial_j \phi , \quad v_{j.s} = \text{Geschwindigkeit relativ zum Inertialsystem} , \quad (2.2-3)$$

hervorgeht. Des Weiteren wird (2.2-1b,c) genutzt, und es lässt sich die in einem Inertialsystem gültige **Superfluid-Bewegungsgleichung**

$$m \partial v_{j.s} / \partial t = -(m/2) \partial_j v_s^2 - \partial_j V + (\hbar^2/2m) \partial_j (\bar{\varrho}_s^{(-1/2)} \Delta \bar{\varrho}_s^{(1/2)}) , v_s^2 = v_i v_i , \quad (2.2-4a)$$

herleiten. Aus dem Imaginärteil (2.2-2b) resultiert schließlich die **Kontinuitätsgleichung der Superfluide**

$$\partial \bar{\varrho}_s / \partial t = -\partial_j (\bar{\varrho}_s v_{j.s}) . \quad (2.2-4b)$$

Unter Vernachlässigung des dritten Terms auf der rechten Seite in der ersten Gleichung von (2.2-4a) lassen sich die Bewegungsgleichungen der klassischen Fluidodynamik zum Vergleich heranziehen. Diese Gegenüberstellung zeigt, dass (2.2-4a) der klassischen Eulerschen Gleichung entspricht. Daraus lässt sich für die Eigenschaften der Superfluide folgern, dass diese ideale Potentialströmungen sind, mit verschwindender Viskosität und verschwindender Rotation des Geschwindigkeitsfeldes [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), ABSCHNITT 2.7.4.2, und TILLEY/TILLEY (1990), ABSCHNITT 3.3]. Die gerade genannten Attribute sollen nun näher beleuchtet werden. Zu diesem Zweck wird die **suprafluide Flüssigkeit in einem rotierenden Gefäß** betrachtet. Bei kleinen Winkelgeschwindigkeiten des rotierenden Gefäßes bildet die gesamte Flüssigkeit einen **einfach zusammenhängenden Bereich**, und das Geschwindigkeitsfeld ist rotationsfrei (wirbelfrei), so dass

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j v_{k.s} = 0 , \quad (2.2-5a)$$

und aus der Kontinuitätsgleichung folgt

$$v_{j.s} = 0 , \quad (2.2-5b)$$

das heißt, die suprafluide Flüssigkeit ruht. Es wird nun die Winkelgeschwindigkeit des rotierenden Gefäßes erhöht, und es lässt sich zeigen, dass auch für

$$v_{j.s} \neq 0 \quad (2.2-5c)$$

die Bedingung (2.2-5a) erfüllt bleibt. Denn die Flüssigkeit formt nun einen **mehrfach zusammenhängenden Bereich**, bestehend aus Wirbeln. Zur Berechnung der Wirbelstärke einer Strömung durch eine Fläche wird die sogenannte **Zirkulation** [vgl. hierzu DEMTRÖDER (1994), BD.I, ABSCHNITT 8.6.1]

$$\kappa = \oint_C v_{j.s} dx_j . \quad (2.2-6a)$$

bestimmt, also das Integral längs einer beliebigen geschlossenen Kurve C , welche ein Flächenstück umrandet. Aufgrund (2.2–5c) kann (2.2–3) in (2.2–6a) genutzt werden, so dass zunächst

$$\kappa = \oint_C [(\hbar/m) \partial_j \phi] dx_j. \quad (2.2-6b)$$

resultiert, mit dem abschließenden Ergebnis

$$\kappa = (\hbar/m) \Delta \phi. \quad (2.2-7a)$$

Die Zustandsfunktion (2.2–1a) ist einwertig, so dass nach Durchlauf der geschlossenen Kurve C die Phase ϕ den gleichen Wert hat wie vor dem Durchlauf. So kann also die Phasendifferenz lediglich ganzzahlige Vielfache von 2π annehmen, nämlich

$$\Delta \phi = n 2\pi, \quad n \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (2.2-7b)$$

Das Resultat (2.2–7b) bedeutet für κ , dass nur diskrete Werte erlaubt sind, mit anderen Worten, **die Zirkulation ist gequantelt**.

2.2.2 Supraleitung

Anfang des 20. Jahrhunderts wurde der Effekt beobachtet, dass für viele Metalle und metallähnliche Verbindungen der elektrische Widerstand bei Unterschreiten einer stoffspezifischen, nahe dem absoluten Nullpunkt liegenden, kritischen Übergangstemperatur sprunghaft klein wird und somit **die elektrische Leitfähigkeit unendlich groß**. Eine weitere experimentelle Tatsache ist der **Meißner–Ochsenfeld–Effekt (1933)**, das bedeutet, in einem Supraleiter verschwindet die magnetische Induktion. Die theoretische Beschreibung dieser experimentellen Erscheinungen, also die Entwicklung einer adäquaten Modellvorstellung war ein langwieriger Prozess. Dabei war eine wichtige Komponente der Theoriebildung die Formulierung einer neuen Wechselwirkung. Denn die Supraleitung als geordneter Zustand, welcher sich temperaturabhängig einstellt, musste ordnenden Kräften, nämlich Wechselwirkungen, unterliegen. Diese Wechselwirkung wurde allerdings erst 1950 durch ein Zwei–Elektronen–Modell angegeben, welches schließlich in die sogenannten **Cooper–Paare** mündete [zum Wechselwirkungsmodell siehe BUCKEL (1994), ABSCHNITT 2.1]. Ein tragfähiges, atomistisches Modell der Supraleitung wurde 1957 von BARDEEN, COOPER und SCHRIEFFER angegeben, also gut ein halbes Jahrhundert nach erster Beobachtung der Effekte. Dieser sogenannten **BCS–Theorie** gingen phänomenologische Modelle voran, wie die Londonsche Theorie sowie deren Weiterentwicklung durch GINZBURG und LANDAU. Der letztgenannte Ansatz wird im Folgenden dargestellt. Die Anwendung der Schrödingergleichung auf das Phänomen der Supraleitung erfordert noch einige Vorbetrachtungen. Wie eingangs festgehalten, kommt den Cooperpaaren bei der Modellbildung entscheidende Bedeutung zu. Diese Paare existieren aufgrund des Elektron–Gitter–Wechselwirkungsmechanismus, und auf diese Weise werden makroskopische Größen wie Temperatur und Gitterabstand in das Modell eingeführt. Konkret manifestieren sich diese makroskopischen Größen in der Wellenfunktion, so dass diese in dem hiesigen Zusammenhang auch als **Makrowellenfunktion** $\psi^{(S)}$ bezeichnet wird. Die **potentielle Energie** wird wie folgt aufgespalten

$$E_{pot} = E_{ext} + E_{int} \quad (2.2-8a)$$

mit dem externen Anteil

$$E_{ext} = e_0 \Phi_{el}, \quad \Phi_{el} = \text{elektrisches Skalarpotential}, \quad (2.2-8b)$$

welcher aus einem von außen angelegten elektrischen Feld herrührt, und dem internen Anteil

$$E_{int} = a + b |\psi^{(S)}|^2, \quad a, b = \text{reelle Parameter.} \quad (2.2-8c)$$

Für die **Teilchenmasse** ist die effektive Masse m_{eff} anzuhalten, die durch Berücksichtigung der Wechselwirkung zustande kommt, und für die **Teilchenladung q des Cooperpaares** gilt

$$q = -2e_0, \quad e_0 = \text{Elementarladung.} \quad (2.2-9)$$

Die Annahmen (2.2-8,9) in (2.1-25d) eingesetzt, ergeben

$$i\hbar (\partial\psi^{(S)}/\partial t) = \hat{H}_{GL} \psi^{(S)} \quad (2.2-10a)$$

mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_{GL} = 1/(2m_{eff}) [-i\hbar\partial_j - (q/c) A_j]^2 + q \Phi_{el} + [a + b |\psi^{(S)}|^2]. \quad (2.2-10b)$$

(2.2-10b) ist im Grunde der verallgemeinerte Hamiltonoperator für eine Ladung [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.6-14e)]. Dabei bezeichnen A_j und Φ_{el} die elektrodynamischen Potentiale und c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die zugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte lässt sich dann mit

$$J_j = (1/(2m_{eff})) [i\hbar (\psi^{(S)} \partial_j \psi^{(S)*} - \psi^{(S)*} \partial_j \psi^{(S)}) - 2 (q/c) A_j \psi^{(S)*} \psi^{(S)}] \quad (2.2-11a)$$

angeben. In einem Supraleiter gilt in guter Näherung

$$\psi^{(S)} \partial_j \psi^{(S)*} \approx \psi^{(S)*} \partial_j \psi^{(S)},$$

so dass für (2.2-11a)

$$J_j = (-1/m_{eff}) ((q/c) A_j \psi^{(S)*} \psi^{(S)}) \quad (2.2-11b)$$

folgt. Die Beziehungen (2.2-10) und (2.2-11b) sind die elementaren **Ginzburg-Landau Theorie**, und in der angegebenen Weise sind sie gültig für ein Cooperpaar. Den Übergang zu einem Mehrteilchensystem schafft man durch **Quantisierung des Makrowellenfeldes** [vgl. hierzu SCHMUTZER (1989), ABSCHNITT 13.3.2]. Demnach ergibt sich für die Elektronendichte $n^{(S)}$

$$\psi^{(S)*} \psi^{(S)} \rightarrow n^{(S)}.$$

Multiplikation von (2.2-11b) mit der Teilchenladung des Cooperpaares (2.2-9), Einsetzen von $n^{(S)}$ und Rotationsbildung führen schließlich zu

$$\Lambda \varepsilon_{ijk} \partial_j J_k = (-1/c) B_i \quad (2.2-11c)$$

mit

$$\begin{aligned} \Lambda &= (m_{eff}/(n^{(S)} q^2)) \\ &= \text{Londonscher Materialkoeffizient} \end{aligned} \quad (2.2-11d)$$

$$\begin{aligned} B_i &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k \\ &= \text{magnetische Induktion.} \end{aligned} \quad (2.2-11e)$$

Damit entspricht (2.2-11c) der **2. Londonschen Materialgleichung**, welche den in der Einführung erwähnten Meißner-Ochsenfeld-Effekt beschreibt [siehe hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER

(1998), ABSCHNITT 2.7.2.1].

Von eminenter Bedeutung im Zusammenhang mit der Supraleitung sind die **Josephson–Effekte**, welche bei schwach gekoppelten Supraleitern in Erscheinung treten. Es werden also zwei Supraleiter dicht zusammengeführt, dass eine schwache Kopplung eintritt. Im Hinblick auf den Energieoperator der aufzustellenden Schrödingergleichung sind hier nur Zustandsänderungen infolge von Variationen der potentiellen Energie $E_{pot}(t)$ von Interesse. Des Weiteren ist die Schrödingergleichung durch Kopplungsterme zu ergänzen, so dass sich für den Supraleiter 1 und den Supraleiter 2 aus (2.1–25d) das Gleichungssystem

$$i\hbar \partial\psi_1/\partial t = E_{pot}|_1 \psi_1 + K \psi_2 \quad (2.2-12a)$$

$$i\hbar \partial\psi_2/\partial t = E_{pot}|_2 \psi_2 + K \psi_1 \quad (2.2-12b)$$

ergibt. Für die Wellenfunktion wird

$$\psi(t, x_j) = \varrho^{1/2} \exp[i\phi(t, x_j)] \quad (2.2-13a)$$

angesetzt, wobei

$$\varrho = \text{Teilchendichte der Cooperpaare} \quad (2.2-13b)$$

$$\phi = \text{Phase der Wellenfunktion} . \quad (2.2-13c)$$

Einsetzen von (2.2–13) in (2.2–12) sowie separate Betrachtung von Real– und Imaginärteil liefern für die jeweiligen Supraleiter

$$\partial\varrho_1/\partial t = (-2/\hbar) K (\varrho_1\varrho_2)^{1/2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.2-14a)$$

$$\partial\phi_1/\partial t = (-1/\hbar) (E_{pot}|_1 + K (\varrho_2/\varrho_1)^{1/2} \cos(\phi_1 - \phi_2)) \quad (2.2-14b)$$

$$\partial\varrho_2/\partial t = (2/\hbar) K (\varrho_1\varrho_2)^{1/2} \sin(\phi_1 - \phi_2) \quad (2.2-14c)$$

$$\partial\phi_2/\partial t = (-1/\hbar) (E_{pot}|_2 + K (\varrho_1/\varrho_2)^{1/2} \cos(\phi_1 - \phi_2)) . \quad (2.2-14d)$$

Ist die Konstruktion der beiden kombinierten Supraleiter derart, dass ein symmetrischer Aufbau vorliegt, so kann

$$\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$$

gesetzt werden. Damit führt die Addition von (2.2–14b) und (2.2–14d) zu

$$\begin{aligned} \partial(\phi_1 - \phi_2)/\partial t &= (1/\hbar) (E_{pot}|_2 - E_{pot}|_1) \\ &= ((2e_0)/\hbar) U(t) , \end{aligned} \quad (2.2-15a)$$

wobei e_0 gemäß (2.2–9) und $U(t)$ die Spannung ist. Aus (2.2–14a) und (2.2–14c) folgt mit Beachtung der Symmetriebeziehung für die Teilchendichte der Cooperpaare

$$J_S(t) := -\partial\varrho_1/\partial t = \partial\varrho_2/\partial t = ((2K)/\hbar) \varrho \sin(\phi_1 - \phi_2) , \quad J_0 := ((2K)/\hbar) \varrho . \quad (2.2-15b)$$

Die beiden Gleichungen (2.2–15a,b) sind die **Josephson–Gleichungen**. In (2.2–15b) ist $J_S(t)$ die **Cooperpaar–Stromdichte** und J_0 beschreibt die **kritische Stromdichte**.

2.2.3 Energieaufspaltung und Teilchenkinematik durch Magnetfeldeinwirkung

Setzt man allgemein ein magnetisches Moment einem Magnetfeld aus, so kommt es zu Wechselwirkungen. Gegenstand dieses Abschnittes sind die Wechselwirkungen der magnetischen Momente (2.1–16a,b) und (2.1–17a) untereinander sowie diejenigen mit einem äußeren Magnetfeld.

Zur Beschreibung der Zusammenhänge nutzt man auch die Gesetzmäßigkeiten der klassischen Physik. Der **Drehimpulssatz der klassischen Mechanik** sagt aus, dass die zeitliche Änderung des Drehimpulses D_i eine Funktion des einwirkenden Drehmomentes M_i ist, das heißt

$$D_i/dt = M_i. \quad (2.2-16a)$$

Gemäß den Gesetzen der klassischen **Magnetostatik** wirkt auf ein magnetisches Moment μ_i , das einem äußeren homogenen Magnetfeld $B_{i,ext}$ ausgesetzt ist, das Drehmoment

$$M_j = \varepsilon_{jkl} \mu_k B_{l,ext}, \quad (2.2-16b)$$

und verbunden mit diesem Drehmoment ist die potentielle magnetische Energie

$$V_{mag} = -\mu_j B_j. \quad (2.2-16c)$$

Zunächst wird nun die Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Elektronenspins, (2.1–16b), und dem Magnetfeld, welches durch die Bahnbewegung des Elektrons erzeugt wird, untersucht. Diese Wechselwirkung bezeichnet man als **Spin–Bahn–Kopplung**, die sich mechanisch durch Addition von Bahndrehimpuls (2.1–10,11) und Eigendrehimpuls des Elektrons (2.1–13) vollzieht, also

$$\begin{aligned} \vec{j}_k &= \vec{L}_k + \vec{s}_k \\ &= \text{Drehimpuls der Spin–Bahn–Kopplung (SBK)} \end{aligned} \quad (2.2-17a)$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{j}_3 &= \hbar m_j, \\ \vec{j}^2 &= \hbar^2 j(j+1), & \vec{j} &= |\vec{j}_k| = \hbar [j(j+1)]^{1/2}, \\ j &= \text{SBK–Quantenzahl}, & j &= |l \pm s| = |l \pm 1/2|, \\ m_j &= \text{magnetische SBK–Quantenzahl}, & m_j &\in \{-j, -j+1, \dots, j-1, +j\}. \end{aligned} \quad (2.2-17b)$$

Das, analog (2.1–16,17a), zu (2.2–17a) gehörige **Magnetische Moment des SBK–Drehimpulses** wird mit

$$\mu_{k,SBK} = \gamma_{SBK} \vec{j}_k = (-g_j \mu_B / \hbar) \vec{j}_k, \quad g_j = g\text{-Faktor des SBK–Drehimpulses} \quad (2.2-17c)$$

angegeben [vgl. hierzu HAKEN/WOLF (1987), (13.17)]. Zur Berechnung des magnetischen Potentials bzw. der **Spin–Bahn–Kopplungsenergie** setzt man gemäß (2.2–16c)

$$V_{FS} = -\mu_{k,Spin} B_{k,Bahn} \quad (2.2-18a)$$

an, was mit (2.1–16b) zu

$$V_{FS} = (2/\hbar) \mu_B \vec{s}_j \cdot B_{j,Bahn} \quad (2.2-18b)$$

führt. Mit klassisch-relativistischen Rechnungen lässt sich die Größe des Magnetfeldes $B_{j.Bahn}$ bestimmen, und man gelangt schließlich zu [vgl. zum Beispiel HAKEN/WOLF (1987), ABSCHNITT 12.8]

$$V_{FS} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{Z e^2 \mu_0 \hbar^2}{8 \pi m_e^2 r^3} \right) [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] . \quad (2.2-18c)$$

Der Ausdruck (2.2-18c) ist die sogenannte **Feinstrukturaufspaltung** mit

$$Z = \text{Kernladungszahl} \quad (2.2-18d)$$

$$\mu_0 = \text{Induktionskonstante} \quad (2.2-18e)$$

$$r = \text{Bahnradius des Elektrons} . \quad (2.2-18f)$$

Streng genügt (2.2-18c) nicht der Quantentheorie, sondern es bedarf noch Korrekturen. Eine exakte und ausführliche Berechnung der Feinstrukturaufspaltung findet sich zum Beispiel in SCHPOLSKI (1978), § 204.

Betrachtet man den SBK-Drehimpuls (2.2-17a) in einem äußeren homogenen Magnetfeld $B_{j.ext}$, so liefert, wie schon zu (2.2-18a), der Ansatz (2.2-16c)

$$\begin{aligned} V_Z &= -\mu_{j.SBK} B_{j.ext} \\ &= (g_j \mu_B / \hbar) \vec{j}_k \cdot B_{k.ext} \end{aligned} \quad (2.2-19a)$$

mit

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)} . \quad (2.2-19b)$$

(2.2-19) beschreibt den **anomalen Zeemann-Effekt**. Ohne Berücksichtigung des Elektronenspins (das bedeutet Spinquantenzahl $s = 0$) verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite von (2.2-19b), und es resultiert in (2.2-19a) der **normale Zeemann-Effekt**.

In gleicher Weise wie zu (2.2-18) und (2.2-19) werden nun Energieterme angegeben, die zum einen aus der Wechselwirkung zwischen dem magnetischen Moment des Kernspins, (2.1-17a), und dem Magnetfeld der Elektronenhülle resultieren sowie zum anderen aus der Korrespondenz von (2.1-17a) mit einem äußeren homogenen Magnetfeld. Zur Herleitung der **Hyperfeinstrukturaufspaltung** koppelt man den SBK-Drehimpuls (2.2-17a) mit dem Kernspin (2.1-14) durch Addition zum **Gesamtdrehimpuls (GD) des Atoms**

$$\vec{F}_k = \vec{j}_k + \vec{I}_k , \quad (2.2-20a)$$

wobei

$$\begin{aligned} \vec{F}_3 &= \hbar m_F , \\ \vec{F}^2 &= \hbar^2 F(F+1) , & \vec{F} &= |\vec{F}_k| = \hbar [F(F+1)]^{1/2} , \\ F &= \text{GD-Quantenzahl} , & F &= \{ j+I, j+I-1, \dots, j-I \} , \\ m_F &= \text{magn. GD-Quantenzahl} , & m_F &\in \{ -F, -F+1, \dots, F-1, +F \} . \end{aligned} \quad (2.2-20b)$$

In Analogie zu (2.2-17) wird zum Gesamtdrehimpuls des Atoms ein magnetisches Moment, das sogenannte **effektive magnetische Moment**

$$\mu_{j.eff} = \mu_{j.eff}(F, m_F) \quad (2.2-21a)$$

als Funktion der Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl F und der magnetischen Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl m_F angegeben. Aus der **Breit-Rabi-Formel** ergibt sich für die 3.-Komponente des effektiven magnetischen Momentes [vgl. hierzu VANIER/AUDOIN (1989), ABSCHNITT 4.1.1]

$$\mu_{3,eff} = \pm \frac{1}{2} (g_J \mu_B - g_I \mu_K) \left(\frac{2m_F}{2I+1} + x \right) \left(1 + \frac{4m_F}{2I+1} x + x^2 \right)^{-1/2} \quad (2.2-21b)$$

mit

$$x := \frac{1}{\Delta V_{HFS}} (g_J \mu_B - g_I \mu_K) B \quad (2.2-21c)$$

$$\Delta V_{HFS} = V_{HFS}(F = I + 1/2) - V_{HFS}(F = I - 1/2) . \quad (2.2-21d)$$

Dabei sei B die 3.-Komponente eines inhomogenen Magnetfeldes, und V_{HFS} ist gemäß (2.2-22f). In (2.2-21b) gilt das positive Vorzeichen für $F = I - 1/2$ und das negative Vorzeichen für $F = I + 1/2$. Zur Berechnung der magnetischen Zusatzenergie geht man wie in (2.2-18a) bzw. (2.2-16c) von

$$V_{HFS} = -\mu_{k,Kern} B_{k,\vec{j}} \quad (2.2-22a)$$

aus. Der Vektor $B_{k,\vec{j}}$ repräsentiert das von der Elektronenhülle induzierte Magnetfeld. Es ist definiert gemäß

$$B_{k,\vec{j}} = -B_{\vec{j}}(\vec{j}_k/\vec{j}) , \quad B_{\vec{j}} = |B_{k,\vec{j}}| , \quad (2.2-22b)$$

das heißt, die Richtung des magnetischen Gesamtmomentes der Elektronenhülle ist antiparallel zur Richtung des SBK-Drehimpulses. Die Elektronenhülle setzt sich im Allgemeinen aus mehreren negativ geladenen Elementarteilchen zusammen, was dann dahingehend Berücksichtigung findet, dass die entsprechenden Quantenzahlen durch Großbuchstaben gekennzeichnet sind, allerdings genügt im Kontext dieser Ausführung die Betrachtung der Einelektronensysteme. Einsetzen von (2.1-17a) und (2.2-22b) in (2.2-22a) liefert

$$V_{HFS} = (g_I \mu_K B_{\vec{j}}/\hbar^2) [j(j+1)]^{-1/2} \bar{I}_k \cdot \vec{j}_k , \quad (2.2-22c)$$

und mit

$$A = (g_I \mu_K B_{\vec{j}}) [j(j+1)]^{-1/2} \quad (2.2-22d)$$

$$= \text{Hyperfeinfaktor}$$

$$\bar{I}_k \cdot \vec{j}_k = (\hbar^2/2) [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)] \quad (2.2-22e)$$

schreibt sich (2.2-22c), die **Energie der Hyperfeinstruktur**, kurz [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.6-46e)]

$$V_{HFS} = (A/2) [F(F+1) - j(j+1) - I(I+1)] . \quad (2.2-22f)$$

Der **Hyperfein-Zeemann-Effekt** tritt dann auf, wenn auf den Gesamtdrehimpuls des Atoms (2.2-20a) ein äußeres homogenes Magnetfeld $B_{j,ext}$ einwirkt. Die analytische Bestimmung der Hyperfein-Zeemann-Aufspaltung ist vollkommen analog zu (2.2-19a), das heißt man macht den Ansatz

$$V_{HZ} = -(\mu_{j,SBK} + \mu_{j,Kern}) B_{j,ext} . \quad (2.2-23a)$$

In der weiteren Berechnung von (2.2-23a) wird für $\mu_{j,Kern}$ der Ausdruck (2.1-17a) eingesetzt. Vom magnetischen Moment des SBK-Drehimpulses ist im Experiment lediglich die Projektion

von $\mu_{j.SBK}$ auf die Richtung von \vec{j}_k , beobachtbar [vgl. hierzu die Ausführungen von HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998) zu (2.6–44)], so dass $\mu_{j.SBK}$ durch

$$(\mu_{k.SBK})_{\vec{j}} = -(g_j \mu_B / \hbar) \vec{j}_k. \quad (2.2-23b)$$

zu substituieren ist. g_j ist gemäß (2.2–17c) bzw. (2.2–19b) der g-Faktor des SBK-Drehimpulses. Maßgeblich sind in (2.2–23a) die 3.-Komponenten der Vektoren, also diejenigen in Richtung des Feldes $B_{k.ext}$, so dass sich zunächst

$$V_{HZ} = \mu_B B_{3.ext} [(g_j / \hbar) \vec{j}_3 - (g_I / \hbar) (\mu_K / \mu_B) \vec{I}_3.] \quad (2.2-23c)$$

ergibt. Für die Vektorkomponenten \vec{j}_3 und \vec{I}_3 sind die beobachtbaren Werte zu bestimmen, was durch sukzessive Mittelung erreicht wird [vgl. hierzu LANDAU/LIFSCHITZ (1979), § 113] und schließlich für (2.2–23c) zu

$$V_{HZ} = g_F \mu_B m_F B_{3.ext} \quad (2.2-23d)$$

mit

$$g_F = g_j \frac{F(F+1) + j(j+1) - I(I+1)}{2F(F+1)} - \frac{\mu_K}{\mu_B} g_I \frac{F(F+1) + I(I+1) - j(j+1)}{2F(F+1)} \quad (2.2-23e)$$

führt.

Neben der beschriebenen Segmentierung der Energie evozieren Magnetfelder **ein kinematisches Verhalten des Elektrons bzw. Kerns**. So wirkt ein äußeres homogenes Magnetfeld einerseits derart auf den magnetischen Dipol von Kern oder Elektron, dass sich dieser wie ein konventioneller Magnet parallel oder antiparallel zur Feldrichtung einstellt, andererseits besitzen Kern und Elektron durch ihr Rotationsverhalten [vgl. hierzu (2.1–10,11) und (2.1–13,14)] die Eigenschaften eines Kreisels, so dass sie sich der Ingerenz des Magnetfeldes zu entziehen suchen und daher eine Präzessionsbewegung um die Feldrichtung ausführen. Dieses Kreisellmodell hat LARMOR (1857–1942) für die den Atomkern umkreisenden Elektronen entwickelt, und so wird die Ausweichbewegung des magnetischen Dipols als **Larmor-Präzession** bezeichnet. Allgemein bestimmt sich die Präzessionsfrequenz gemäß

$$\omega = |M_i| / (|D_i| \sin \alpha) = |\mu_i| |B_i| / |D_i|, \quad (2.2-24a)$$

wobei

$$M_i = \text{Drehmoment} \quad (2.2-24b)$$

$$D_i = \text{Drehimpuls} \quad (2.2-24c)$$

$$\alpha = \text{Winkel zwischen Feldrichtung und der Richtung von } D_i. \quad (2.2-24d)$$

$$\mu_i = \text{magnetisches Moment} \quad (2.2-24e)$$

$$B_i = \text{äußeres homogenes Magnetfeld} . \quad (2.2-24f)$$

Das Präzessionsmodell (2.2–24) lässt sich auf Kern wie auch Elektron anwenden, so dass die Larmorpräzession allgemein durch

$$\omega_L = \gamma B \quad (2.2-25)$$

angegeben wird. γ ist das jeweilige **gyromagnetische Verhältnis**, das bereits zu (2.1–16) und (2.1–17a) eingeführt worden ist, und B ist der Betrag des Magnetfeldes.

2.2.4 Kernspinresonanz

Kernspin–Resonanz, im Englischen mit „nuclear magnetic resonance (NMR)“ bezeichnet, meint unter anderem die Auslösung einer Richtungsänderung der Drehimpulsachse des Atomkerns durch ein äußeres magnetisches Wechselfeld, wenn der Kern in einem homogenen magnetischen Feld präzediert. Ebenfalls eine Richtungsänderung ist bei der translatorischen Bewegung eines Atoms im inhomogenen Magnetfeld zu beobachten, nämlich eine Abweichung von der geradlinigen Bewegung. Eine qualitative und analytische Beschreibung beider Phänomene vermittelt dieser Abschnitt.

Nachfolgende Darstellungen beziehen sich auf ein nicht inertiales Beobachtungssystem S_a . Damit stellt sich das in der vorangegangenen Einführung beschriebene Magnetfeld in der Weise

$$\overset{a}{\vec{B}}_{k.ext} = \overset{a}{\vec{B}}_k + \delta\overset{a}{\vec{B}}_k(t) \quad (2.2-26a)$$

dar, wobei

$$\overset{a}{\vec{B}}_k = \overset{a}{B} \delta_{k3} \quad (2.2-26b)$$

= *äußeres, homogenes magnetisches Feld*

$$\overset{a}{B} = |\overset{a}{\vec{B}}_k| \quad (2.2-26c)$$

$$\delta\overset{a}{\vec{B}}_k(t) = \delta\overset{a}{B} [\cos(\overline{\omega}t), \sin(\overline{\omega}t), 0] \quad (2.2-26d)$$

= *äußeres, transversales magnetisches Wechselfeld*

$$\overline{\omega} = \text{Rotationsfrequenz des magnetischen Wechselfeldes} . \quad (2.2-26e)$$

Um die Kernspindynamik anschaulich darzustellen, werden nachstehende Festsetzungen getroffen.

$$I = 1/2 , \quad (2.2-27a)$$

so dass

$$m_I \in \{-1/2, +1/2\} , \quad (2.2-27b)$$

was einschränkend bedeutet, dass der Kernspin grundsätzlich zwei Einstellmöglichkeiten hat [vgl. hierzu (2.1–14) in Verbindung mit (2.2–27b)], vorzugsweise in Richtung der 3.–Achse. **Quantitative Aussagen zum Kernspinverhalten** liefert erst die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung. Für dieses Ziel wird unter Berücksichtigung der beiden Einstellmöglichkeiten des Kernspins für **die Wellenfunktion**

$$\psi(t) = C_1(t) \psi_{\uparrow} + C_2(t) \psi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_2(t) \end{pmatrix} \quad (2.2-28a)$$

angesetzt, wobei ψ_{\uparrow} diejenige Wellenfunktion mit Orientierung des Kernspins in Richtung der positiven 3.–Achse ist, und demgemäß steht ψ_{\downarrow} für die Wellenfunktion, die der inversen Richtung entspricht. Sie genügen den Beziehungen

$$\begin{aligned} \psi_{\uparrow} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , & \psi_{\uparrow}^* &= (1, 0) , \\ \psi_{\downarrow} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} , & \psi_{\downarrow}^* &= (0, 1) . \end{aligned} \quad (2.2-28b)$$

Um einen physikalischen Ausdruck für die Kernspin–Wellenfunktion herzuleiten, wertet man **die zeitabhängige Schrödingergleichung** aus, die unter Vernachlässigung der kinetischen Energie

$$i\hbar \partial\psi/\partial t = E_{pot} \psi \quad (2.2-29a)$$

lautet. Für die potentielle Energie lässt sich aus (2.2-16c) in Verbindung mit (2.1-17a) und mit $g_I = 1$, also in klassischer Betrachtung, der Ausdruck

$$E_{pot} = -(e/2m_p) \bar{I}_j \cdot B_j.$$

bzw. in Operatorschreibweise

$$E_{pot} := (e/2m_p) \hat{I}_j \cdot B_j.$$

herleiten. Aufgrund der Restriktion (2.2-27) lassen sich für \hat{I}_j die **Paulischen Spinmatrizen** [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER–MEIER (1998), (2.6-28)] anwenden, so dass schließlich

$$E_{pot} = \left(\frac{e\hbar}{2m_p} \right) \begin{pmatrix} B_3. & B_1. - i B_2. \\ B_1. + i B_2. & -B_3. \end{pmatrix} \quad (2.2-29b)$$

gefunden wird und damit die zeitabhängige Schrödingergleichung mit Beachtung von (2.2-28a) und (2.2-26) die Formen

$$(\hbar\omega_0/2) C_1(t) + \left(\mu_K \delta\overset{a}{B} \exp[-i\bar{\omega}t] \right) C_2(t) = i\hbar \partial C_1(t)/\partial t \quad (2.2-29c)$$

$$\left(\mu_K \delta\overset{a}{B} \exp[i\bar{\omega}t] \right) C_1(t) - (\hbar\omega_0/2) C_2(t) = i\hbar \partial C_2(t)/\partial t \quad (2.2-29d)$$

annimmt. In (2.2-29c,d) wurde die Abkürzung

$$\mu_K B = \hbar\omega_L = \hbar\omega_0/2$$

eingeführt, das heißt, ω_0 ist die zweifache Larmorfrequenz. Für die zeitabhängigen Koeffizienten $C_1(t)$ und $C_2(t)$ wählt man

$$C_1(t) = A_1(t) \exp[-i\omega_0 t/2]$$

$$C_2(t) = A_2(t) \exp[i\omega_0 t/2],$$

so dass sich die Gleichungen (2.2-29c,d) in

$$i\hbar \partial A_1/\partial t = A_2 \mu_K \delta\overset{a}{B} \exp[-i(\bar{\omega} - \omega_0) t] \quad (2.2-29e)$$

$$i\hbar \partial A_2/\partial t = A_1 \mu_K \delta\overset{a}{B} \exp[i(\bar{\omega} - \omega_0) t] \quad (2.2-29f)$$

überführen lassen. Induziert man durch das Wechselfeld Resonanz, also

$$\bar{\omega} = \omega_0 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\omega} - \omega_0 = 0, \quad (2.2-29g)$$

vereinfachen sich die Gleichungen (2.2-29e,f), und man gelangt zur Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators. Dafür lässt sich eine Lösung unmittelbar angeben, und man findet schließlich für die Koeffizienten A_1 und A_2

$$A_1(t) = \mathcal{A} \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$A_2(t) = i\mathcal{A} \cos(\Omega t + \varphi),$$

so dass die Koeffizienten C_1 und C_2 den Beziehungen

$$C_1(t) = \mathcal{A} \sin(\Omega t + \varphi) \exp[-i\omega_0 t/2] \quad (2.2-29h)$$

$$C_2(t) = i\mathcal{A} \cos(\Omega t + \varphi) \exp[i\omega_0 t/2] \quad (2.2-29i)$$

genügen, und für die Kreisfrequenz Ω gilt

$$\Omega = (\mu_K \delta \overset{a}{B})/\hbar . \quad (2.2-29j)$$

Aus der Normierungsbedingung der Wellenfunktion ergibt sich

$$\mathcal{A} = 1 ,$$

und durch adäquate Wahl des Null-Zeitpunktes ist die Phasenverschiebung

$$\varphi = 0 ,$$

so dass die **Kernspin-Wellenfunktion** (2.2-28a) mit

$$\psi(t) = \alpha \psi_{\uparrow} + \beta \psi_{\downarrow} , \quad (2.2-29k)$$

wobei

$$\alpha = \sin(\Omega t) \exp[-i\omega_0 t/2] , \quad (2.2-29l)$$

$$\beta = i \cos(\Omega t) \exp[i\omega_0 t/2] , \quad (2.2-29m)$$

angeschrieben werden kann. Mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung (2.2-29a) ist die Kernspin-Wellenfunktion bestimmt, so dass nun **ein Beobachtungswert für die 3.-Komponente des Kernspins** berechnet werden kann, was durch

$$\hat{I}_3. \psi = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix} , \quad (2.2-30a)$$

also durch Bilden des Erwartungswertes erfolgt. Multiplikation von (2.2-30a) mit der konjugiert komplexen Wellenfunktion ψ^* liefert schließlich den gesuchten Erwartungswert

$$\langle \hat{I}_3. \rangle = -\hbar/2 \cos(2 \Omega t) . \quad (2.2-30b)$$

In (2.2-30b) ist für den Zeitpunkt $t = 0$ der Kosinus gleich 1, und die 3.-Komponente des Kernspins zeigt nach unten. Wählt man das Argument des Kosinus so, dass $2\Omega t = \pi/2$, dann verschwindet die 3.-Komponente, und für $2\Omega t = \pi$ zeigt sie nach oben. Die beiden anderen Komponenten genügen jeweils

$$\langle \hat{I}_1. \rangle = -\hbar/2 \sin(2 \Omega t) \sin(\omega_0 t) \quad (2.2-30c)$$

$$\langle \hat{I}_2. \rangle = \hbar/2 \sin(2 \Omega t) \cos(\omega_0 t) . \quad (2.2-30d)$$

Im Folgenden wird ein weiteres Phänomen der Richtungsänderung beschrieben, nämlich **die Änderung der Bewegungsrichtung eines Teilchens im inhomogenen Magnetfeld**. Die diesbezüglichen theoretischen Zusammenhänge sind einfach, da sie sich aus der klassischen Mechanik bzw. Magnetostatik ergeben, so dass hier lediglich die Ergebnisse angegeben werden. Wohl ist dieser Effekt von großer Bedeutung, denn STERN und GERLACH konnten in ihren Experimenten (1921) zeigen, wie man die Ablenkung von Atomen zum Nachweis der Orientierung

magnetischer Dipole nutzen kann. RABI entwickelte das Verfahren dahingehend weiter, dass sich auch magnetische Dipolübergänge, also Umklappungen wie zum Beispiel mit (2.2–30b) gezeigt, belegen lassen.

Verlässt ein Atom eine Atomstrahlquelle Q mit der Geschwindigkeit

$$\overset{a}{v}_{i,Q} \approx v_Q \delta_{i1}. \quad (2.2-31)$$

in Richtung der 1.a–Achse des Beobachtungssystems S_a , so erfährt der Geschwindigkeitsvektor bei Vorhandensein eines inhomogenen Magnetfeldes senkrecht zur 1.a–Achse, für gewöhnlich die 3.a–Achse, eine zeitliche Änderung. Diese Ablenkung resultiert aus der auf das Atom einwirkenden Kraft

$$\overset{a}{K}_k = \overset{a}{\mu}_{j,eff} \overset{a}{\partial}_k \overset{a}{B}_j. \quad (2.2-32a)$$

bzw. mit der gewählten Koordinatensystemdarstellung

$$\overset{a}{K}_k = \overset{a}{\mu}_{3,eff} \overset{a}{\partial}_3 \overset{a}{B} \delta_{k3}, \quad (2.2-32b)$$

wobei

$$\overset{a}{\mu}_{j,eff} = \text{effektives magnetisches Atommoment im System } S_a \text{ gemäß (2.2-21)} \quad (2.2-32c)$$

$$\overset{a}{B}_j = \text{äußeres, inhomogenes Magnetfeld, dargestellt in } S_a. \quad (2.2-32d)$$

Ordnet man längs des Atomstrahlweges zwei inhomogene Magnetfelder $MF1$ und $MF2$ nacheinander an, wobei für die Feldgradienten

$$\overset{a}{\partial}_3 \overset{a}{B}|_{MF1} = - \overset{a}{\partial}_3 \overset{a}{B}|_{MF2} \quad (2.2-33)$$

gelten möge, so kompensiert sich die Ablenkung.

2.3 Spezielle quantenmechanische Verfahren

2.3.1 Atominterferometrie

Für die Atominterferometrie sind **Raman–Übergänge** von großer Bedeutung, denn ein optischer Puls bzw. Raman–Puls induziert eine Überlagerung verschiedener Energiezustände und liefert auf diese Weise räumlich getrennte Materiewellen. So sind die Raman–Pulse und Raman–Übergänge wichtige Komponenten eines Atominterferometers. Zur Erläuterung des prinzipiellen Vorgangs eines Raman–Übergangs wird ein Zwei–Niveau–Atom betrachtet. Das bedeutet, es werden lediglich zwei Energiezustände berücksichtigt, symbolisiert durch $|a\rangle$ und $|b\rangle$. Für das Atom wird ein Impuls p_i angenommen, so dass das Atom insgesamt durch die Kennzeichnung

$$|a, p_i\rangle = \text{Zustand des Atoms (vor einem Raman–Puls)} \quad (2.3-1)$$

charakterisiert ist. Ausgehend von diesen Voraussetzungen absorbiert das Atom ein Photon 1 mit

$$\hbar k_{i,1} = \text{Impuls des Photon 1}, \quad h = \hbar 2\pi, \quad (2.3-2a)$$

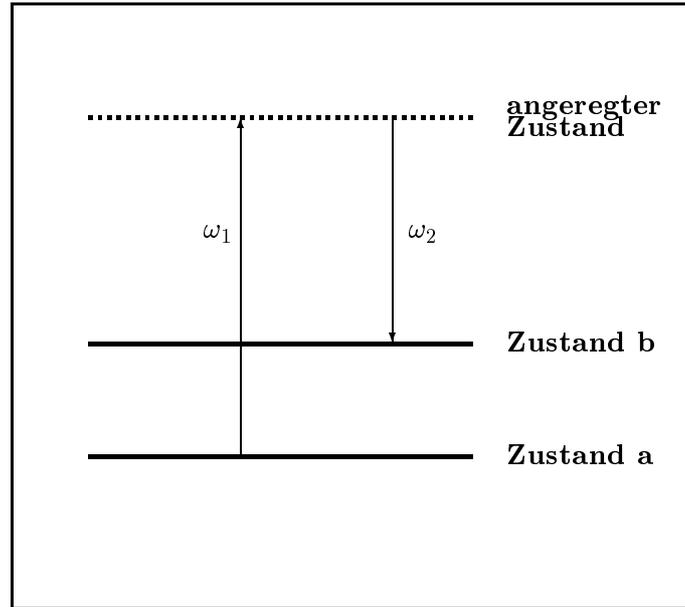


Abbildung 2.3.1-1: Raman-Übergang

wobei

$$k_{i,1} = (\omega_1/c) r_i = \text{Wellenvektor 1} \quad (2.3-2b)$$

$$r_i = \text{Vektor } \perp \text{ Wellenfront} . \quad (2.3-2c)$$

In (2.3-2) ist ω_1 die Frequenz des Photons 1, h ist die Plancksche Konstante und c ist die Lichtgeschwindigkeit. Durch die Aufnahme des Photons 1 wird das Atom in einen angeregten Zustand überführt und in diesem Zustand wird ein weiteres, gegenläufiges Photon 2 aufgenommen. Das Photon 2 induziert eine Spontane Emission, so dass ein Photon 2 das Atom verlässt, was schließlich zu

$$|b, p_i + \Delta p_i \rangle = \text{Zustand des Atoms (nach einem Raman-Puls)} \quad (2.3-3a)$$

mit

$$\Delta p_i = \hbar (k_{i,1} - k_{i,2}) =: \hbar k_{i,eff} , \quad k_{i,eff} = \text{effektiver Wellenvektor} , \quad (2.3-3b)$$

führt. Der Prozess, der von (2.3-1) nach (2.3-3) führt, ist ein Raman-Übergang, und mit diesem verbunden ist ein mechanischer Effekt, nämlich eine Impulsänderung gemäß (2.3-3b). Sind die Bewegung des Atoms und der Laserstrahl in Richtung einer Koordinatenachse, zum Beispiel der 3.-Koordinatenachse, so schreibt sich (2.3-3b) einfach

$$\Delta p_3 = \hbar k_{eff} , \quad k_{eff} = k_1 + k_2 . \quad (2.3-3c)$$

Wie ein Vergleich von (2.3-1) mit (2.3-3a) zeigt, ändert sich nicht nur der Impuls, sondern ebenfalls der innere Zustand, nämlich der Energiezustand von $|a \rangle$ nach $|b \rangle$. Die ABBILDUNG 2.3.1-1 [s. Seite 42] veranschaulicht diesen Vorgang. Die entsprechende Wellenfunktion ist

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_a + \Psi_b \\ &= A e^{-i\phi_a} + B e^{-i\phi_b} , \end{aligned} \quad (2.3-4)$$

wobei Ψ_a und Ψ_b die mit dem jeweiligen inneren Zustand verbundenen Wellenfunktionen des Atoms sind. Mit dem Ansatz einer ebenen Welle resultiert der Ausdruck der zweiten Zeile. Dabei sind A und B die Amplituden, und ϕ_a und ϕ_b sind die Phasen der einzelnen Wellenpakete.

Im Hinblick auf die Wechselwirkung des Atoms mit Licht ist folgende Unterscheidung erforderlich. Die Wirkungsweise eines Raman-Pulses kann gesteuert werden durch Modifikation der Amplitude, der Wechselwirkungszeit und der Abstimmung des Pulses. Insofern kann ein Raman-Puls verschiedene Funktionen haben. Ist der Puls entsprechend eingestellt, so kann er als Strahlteiler wirken, und in dieser Funktion bezeichnet man ihn als $\pi/2$ -Puls, wie es auch von der Kernspin-Resonanz her bekannt ist. Eine andere Einstellung erzeugt einen π -Puls mit der Funktion eines Spiegels, denn für das einzelne Wellenpaket invertieren sowohl der innere Zustand als auch der Impuls. Auf diese Weise sind die Raman-Pulse geeignete Bestandteile eines Atominterferometers. Die ABBILDUNG 2.3.1–2 [s. Seite 43] zeigt ein typisches Bild eines solchen Atominterferometers. Klassisch wird durch ein Interferometer ein Wellenpaket aufgespalten, die Einzelstrahlen wer-

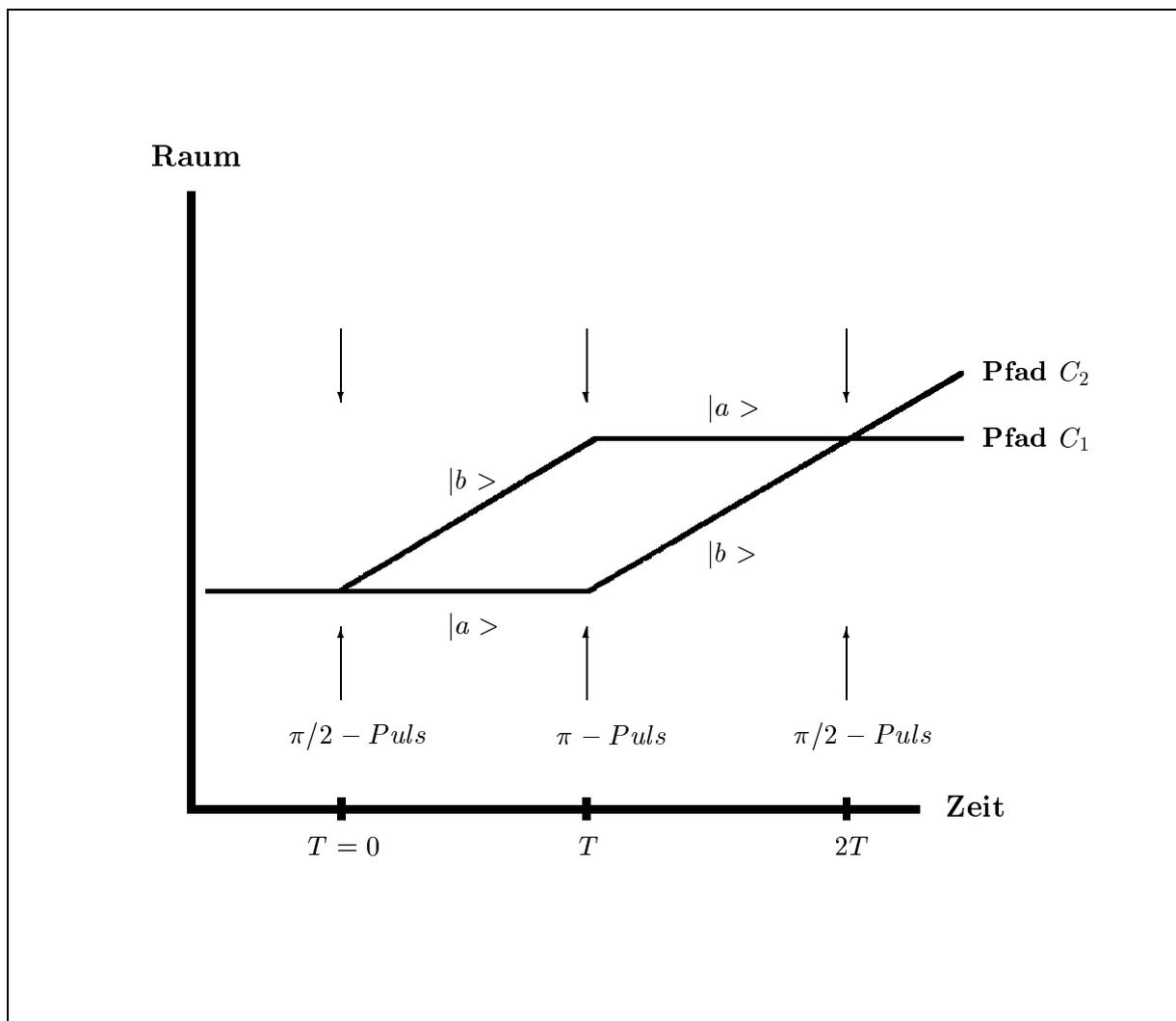


Abbildung 2.3.1–2: Prinzipskizze eines Raman-Atominterferometers

den abgelenkt und wieder zusammengeführt, so dass es zur Interferenz kommt. Gleichermäßen gilt dieses für ein Atominterferometer, dessen geometrischer Strahlverlauf in der ABBILDUNG

2.3.1–2 [s. Seite 43] dargestellt ist. Im Folgenden werden die verschiedenen Trajektorien der Wellenpakete bzw. Phasen ϕ_a und ϕ_b analytisch für eine Fontänenbewegung beschrieben.

In einer Fontäne bewegen sich die Atome zuerst aufwärts, und wenn sie eine gewisse Höhe erreicht haben, fallen sie infolge der Schwere wieder zurück. Mit der Definition

$$x_3(t) =: z(t)$$

gilt für den Weg eines Teilchens

$$z(T) = -(1/2)gT^2 + v_0T + z_0 \quad (2.3-5a)$$

mit

$$g = \text{Schwerebeschleunigung} \quad (2.3-5b)$$

$$v_0 = \text{Anfangsgeschwindigkeit} \quad (2.3-5c)$$

$$z_0 = \text{Anfangshöhe} \quad (2.3-5d)$$

$$T = \text{Flugzeit} . \quad (2.3-5e)$$

Der erste Raman-Puls wirkt auf den Materiestrahl zum Zeitpunkt $T = 0$, und dieser $\pi/2$ -Puls spaltet die Materiewelle in zwei Pakete mit verschiedenen Impulsen auf. Aus diesem Grunde bewegen sich die einzelnen Pakete auf verschiedenen Pfaden, das heißt

$$C_1 = \text{Trajektorie der Welle 1 bzw. Phase 1}$$

$$C_2 = \text{Trajektorie der Welle 2 bzw. Phase 2} .$$

Die beiden Pfade verfolgend, gilt für den Anfang

$$z_{C_1}(T = 0) = z_0 \quad (2.3-6a)$$

$$z_{C_2}(T = 0) = z_0 . \quad (2.3-6b)$$

Nach dem Zeitintervall T haben die einzelnen Wellenpakete die Positionen und Geschwindigkeiten

$$z_{C_1}(T) = (-1/2)gT^2 + (v_0 + \Delta v)T + z_0 \quad v_1 = v_0 + \Delta v - gT \quad (2.3-6c)$$

$$z_{C_2}(T) = (-1/2)gT^2 + v_0 T + z_0 \quad v_2 = v_0 - gT \quad (2.3-6d)$$

erreicht. In (2.3-6c) wird durch Δv für das Paket, welches den Raman-Übergang vollzogen hat, die Impulsänderung (2.3-3c) berücksichtigt. Zum Zeitpunkt T sind beide Wellenpakete einem π -Puls ausgesetzt, welcher zu einer Inversion des inneren Zustands und einer Impulsänderung führt. So gilt anstelle der Geschwindigkeiten (2.3-6c,d) dann

$$v_1 = v_0 + \Delta v - gT - \Delta v$$

$$v_2 = v_0 - gT + \Delta v .$$

Nach einem weiteren Zeitintervall T befinden sich beide Wellenpakete an der Position

$$z_{C_1}(2T) = z_{C_2}(2T) = -2gT^2 + (2v_0 + \Delta v)T + z_0 , \quad (2.3-6e)$$

was bedeutet, dass sich beide Wellenpakete an gleicher Stelle befinden und sich überlappen.

Nun soll das Verhalten der Phasen der einzelnen Wellenpakete genauer betrachtet werden. Die **gesamte Phasendifferenz** zwischen den Wegen C_1 und C_2 ist

$$\Delta\phi_{tot} = \Delta\phi_{Weg} + \Delta\phi_{Licht} , \quad (2.3-7a)$$

wobei

$$\Delta\phi_{Weg} = \textit{Phasendifferenz infolge freier Propagation} \quad (2.3-7b)$$

$$\Delta\phi_{Licht} = \textit{Phasendifferenz infolge der Wechselwirkung mit Licht} . \quad (2.3-7c)$$

(2.3-7b) kann vernachlässigt werden, da die jeweiligen Beiträge längs der beiden Pfade identisch sind [vgl. hierzu PETERS ET AL. (1997)]. Insofern verbleibt lediglich (2.3-7c), was nun eingehender betrachtet wird. Interagiert ein Atom mit Licht, so wird dem Atom die Phase des Lichtes durch den sogenannten **Phasenfaktor**

$$\exp[\pm i(k_j \cdot x_j - \omega t_n - \varphi_n)] = \exp[\phi_n] \quad (2.3-8a)$$

aufgeprägt, und es sind

$$k_j = \textit{Wellenvektor des Lichtes} \quad (2.3-8b)$$

$$\omega = \textit{Frequenz des Lichtes} \quad (2.3-8c)$$

$$\varphi_n = \textit{Phase des Lichtes} \quad (2.3-8d)$$

an der Stelle x_j zur Zeit t_n , wobei der Index „n“ die Epoche kennzeichnet. Absorbiert das Atom ein Photon, so ist das Vorzeichen in (2.3-8a) „-“, sonst „+“. Wie die ABBILDUNG 2.3.1-2 [s. Seite 43] darstellt, werden im Interferometer zwei gegenläufige Laserstrahlen in Richtung der 3.-Achse genutzt, so dass anstelle (2.3-8a)

$$\phi_n = \pm i(k_{eff} z_n - \omega_{eff} t_n - \varphi_n) , \quad k_{eff} = |k_{j,1}| - |k_{j,2}| , \quad \omega_{eff} = \omega_1 - \omega_2 , \quad (2.3-8e)$$

zu nutzen ist. Schließlich ergibt sich für die Phasen längs der verschiedenen Wege

$$\phi_{C_1} = -i\{k_{eff} [z_{C_1}(0) - z_{C_1}(T)] + \omega_{eff} T - \varphi_0 + \varphi_1\} \quad (2.3-9a)$$

$$\phi_{C_2} = -i\{k_{eff} [z_{C_2}(T) - z_{C_1}(2T)] + \omega_{eff} T - \varphi_1 + \varphi_2\} . \quad (2.3-9b)$$

Es werden nun die Ergebnisse der vorangegangenen Ausführungen verwendet, um die vertikalen Positionsdifferenzen in (2.3-9a,b) auszudrücken. Damit schreibt sich (2.3-7a)

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{tot} &= \Delta\phi_{Weg} = \phi_{C_1} - \phi_{C_2} \\ &= k_{eff} (-gT^2) - \varphi_0 + 2\varphi_1 - \varphi_2 . \end{aligned} \quad (2.3-10)$$

Des Weiteren gilt die Beziehung

$$N_a/(N_a + N_b) \propto (1 + \cos[\Delta\phi_{tot}]) , \quad (2.3-11)$$

so dass durch Messung der Besetzung von Energiezuständen, das heißt durch Bestimmung von N_a und N_b , die Phasendifferenz $\Delta\phi_{tot}$ ermittelt werden kann.

2.3.2 Quanteninterferometrie

Im Folgenden werden die Grundgleichungen der Quanteninterferenz dargestellt. Zu diesem Zweck wird von der mit q , gemäß (2.2–9), multiplizierten Wahrscheinlichkeitsstromdichte J_j , (2.2–11a), ausgegangen. Für die Wellenfunktion wird (2.2–13) angesetzt, allerdings mit der Einschränkung, dass ausschließlich Ortsabhängigkeit unterstellt wird, also

$$\psi = \varphi(x_j) = \varrho^{1/2} \exp[i\phi(x_j)] ,$$

und es geht

$$J_{j,s} := J_j = (q\hbar\varrho/m_{\text{eff}}) \{ \partial_j \phi - q/(\hbar c) A_j \} \quad (2.3-12)$$

hervor. Wie auch bei (2.2–15b) bezeichnet $J_{j,s}$ die **Cooperpaarstromdichte**. Bildet man für (2.3–12) das Wegintegral zwischen den Punkten A und B und berücksichtigt

$$-\Delta\phi_{AB} = \int_A^B (\partial_j \phi) dx_j. \quad (2.3-13)$$

als auch (2.2–9), so resultiert

$$\Delta\phi_{AB} = \frac{2\pi m_e}{e_0 \hbar \varrho} \int_A^B J_{j,s} dx_j + \frac{4\pi e_0}{\hbar c} \int_A^B A_j dx_j , \quad (2.3-14a)$$

wobei der zweite Term den Einfluss des Vektorpotentials auf die Phasendifferenz kennzeichnet und der erste denjenigen des Suprastromes. Substituiert man in Gleichung (2.3–14a) das Integral von A nach B durch ein geschlossenes Integral längs C , so gilt

$$\Delta\phi = 2\pi n = \frac{2\pi m_e}{e_0 \hbar \varrho} \oint_C J_{j,s} dx_j + \frac{4\pi e_0}{\hbar c} \oint_C A_j dx_j , \quad (2.3-14b)$$

wobei

$$n \in \{0, 1, 2, \dots\} , \quad (2.3-14c)$$

denn für einen geschlossenen Weg kann die Phasendifferenz $\Delta\phi_{AB}$ lediglich ein Vielfaches von 2π sein. Unter Nutzung des Stokesschen Integralsatzes ergibt sich weiter

$$(n\hbar)/(2e_0) =: \Phi' = \textit{Fluxoid} \quad (2.3-15a)$$

mit

$$\Phi' = \frac{m_e}{2e_0^2 \varrho} \oint_C J_{j,s} dx_j + \Phi \quad (2.3-15b)$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{c} \int_F B_j n_j dF \\ &= \textit{magnetischer Fluss} . \end{aligned} \quad (2.3-15c)$$

In (2.3–15b) kann bei kleinen Supraströmen von

$$(n\hbar)/(2e_0) =: n\Phi_0 = \Phi$$

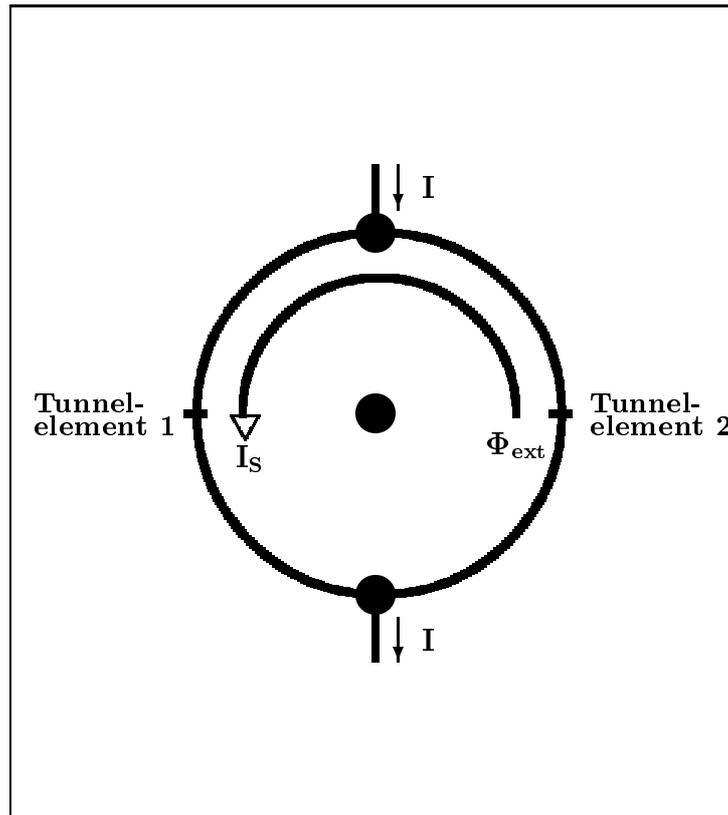


Abbildung 2.3.2–1: Prinzipskizze eines supraleitenden Quanteninterferometers

ausgegangen werden, das heißt, der magnetische Fluss Φ ist ein ganzes Vielfaches des Flussquants Φ_0 , für welches

$$\Phi_0 = 2,06783461 \cdot 10^{-15} \text{Vs} \quad (2.3-15d)$$

gilt. Vergleiche zu (2.3–15) KOSE/MELCHERT (1991), ABSCHNITT V1.2.1 und HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998) (2.7–22). In (2.3–15) ist dF ein Flächenelement der Oberfläche F , umrandet durch die Kurve C . B_j beschreibt das Magnetfeld, und n_j ist der Normalenvektor des Flächenelementes dF .

Die nun anschließende Herleitung eines Ausdrucks für die Quanteninterferenz ist in Anlehnung an KOSE/MELCHERT (1991), ABSCHNITT V1.3. Die ABBILDUNG 2.3.2–1 [s. Seite 47] beschreibt die Ausgangssituation. Dargestellt ist ein supraleitender Ring mit zwei Josephson-Tunnelementen, markiert durch die Ziffern 1 und 2. Der externe Strom I sei gleich Null. Im Innern des supraleitenden Ringes sei ein externer magnetischer Fluss von Null auf Φ_{ext} geändert, so dass ein Ringstrom I_S resultiert. Es wird nun ein geschlossener Pfad C im supraleitenden Ring betrachtet. Mit Vernachlässigung des Suprastromes $J_{j,s}$ ergibt sich für die Phasendifferenz aus (2.3–14b)

$$2\pi n = \frac{4\pi e_0}{hc} \oint_C A_j \cdot dx_j + \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 \quad (2.3-16a)$$

$$\Delta\phi_m = \text{Phasendifferenz im Josephson-Tunnelement } m, \quad m = 1, 2, \quad (2.3-16b)$$

wobei das Integral über das Vektorpotential A_j gemäß (2.3–15c) ausgedrückt werden kann und

den erwähnten externen magnetischen Fluss darstellt. Für beide Tunnellelemente wird Identität vorausgesetzt, das heißt beide besitzen jeweils die gleiche kritische Stromstärke I_0 und weisen die gleiche Ringstromstärke I_S auf, so dass

$$\Delta\phi := \Delta\phi_1 = \Delta\phi_2 .$$

Also lässt sich für (2.3–16a)

$$\Delta\phi = \pi \left(n - \frac{\Phi_{ext}}{\Phi_0} \right) , \quad \Phi_0 = \frac{h}{2e_0} = \text{Flussquant gemäß (2.3–15d)} , \quad (2.3–17)$$

anschreiben. Neben dem magnetischen Fluss Φ_{ext} wird nun ein externer Strom I in den supraleitenden Ring eingespeist. Für die beiden Josephson–Tunnellelemente gilt dann die Josephson–Gleichung (2.2–15b), wobei die Cooperpaarstromdichte J_s durch den Gesamtstrom I_{ges} und die kritische Stromdichte J_0 durch die kritische Stromstärke I_0 zu substituieren sind. Mit Beachtung des eingespeisten Stromes folgt für das linke und rechte Tunnellelement

$$I_{ges}|_l = I_S + I/2 = I_0 \sin[\Delta\phi_1 + \phi_0] \quad (2.3–18a)$$

$$I_{ges}|_r = I_S - I/2 = I_0 \sin[\Delta\phi_2 - \phi_0] , \quad (2.3–18b)$$

mit

$$\phi_0 = \text{Integrationskonstante} . \quad (2.3–18c)$$

Das Ergebnis (2.3–17) wird nun in (2.3–18a,b) genutzt und liefert nach Differenzbildung beider Gleichungen

$$I = 2 I_0 \cos[\pi (n - \Phi_{ext}/\Phi_0)] \sin[\phi_0] . \quad (2.3–19)$$

Die mit (2.3–19) gefundene Relation beschreibt die **Quanteninterferenz der Supraleitung**.

In Analogie zu den vorangegangenen Betrachtungen soll jetzt ein **Quanteninterferenzterm für suprafluides ${}^3\text{He}$** hergeleitet werden. Für das Quanteninterferometer auf suprafluider Grundlage gilt grundsätzlich der Aufbau wie in **ABBILDUNG 2.3.2–1** [s. Seite 47] gezeigt, allerdings ist der Torus mit superfluidem ${}^3\text{He}$ gefüllt und den Josephson–Tunnellelementen im Falle der Supraleitung entsprechen Josephson–Schwachstellen (englisch: Josephson weak-links) [vgl. hierzu **ABBILDUNG 2.3.2–2** auf Seite 49]. Diese Josephson–Schwachstellen sind Wände innerhalb des Torus mit Öffnungen von wenigen Nanometern Größe. Sie sind der Kohärenzlänge von ${}^3\text{He}$ angepasst, und es lässt sich unter dieser Prämisse sowohl theoretisch als auch experimentell nachweisen, dass im Hinblick auf die Strom–Phasen Beziehung die Josephson–Gleichung (2.2–15b) auch im Falle der Superfluidität Anwendung finden kann [vgl. hierzu **PACKARD (1992)**]. Wie auch bei der Quanteninterferenz der Supraleitung wird in den Torus ein externer Strom eingebracht, wobei dieser sich gemäß

$$I = (1/2) I_l + (1/2) I_r \quad (2.3–20)$$

aufteilt. Die Indizes l , r stehen für die Laufrichtung des eingespeisten Stromes. Wie dargelegt, gilt an den Josephson–Schwachstellen jeweils die Josephson–Gleichung [vgl. hierzu auch die Ausführungen zu (2.3–18)], also

$$I_l = I_0 \sin\Delta\phi_1 , \quad I_r = I_0 \sin\Delta\phi_2 , \quad (2.3–21)$$

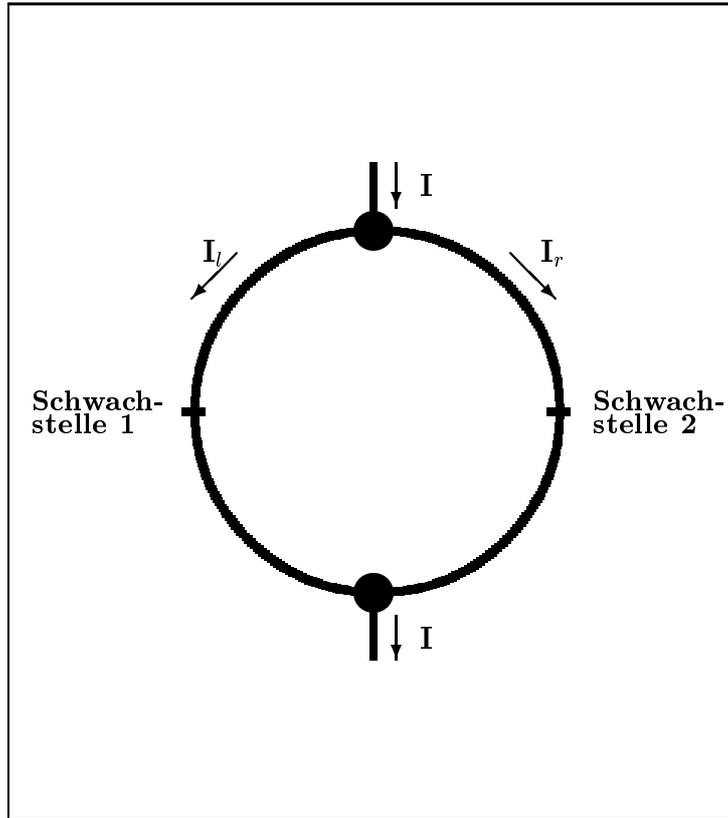


Abbildung 2.3.2-2: Prinzipskizze eines suprafluiden Quanteninterferometers

mit

$$\Delta\phi_m = \text{Phasendifferenz an der Josephson-Schwachstelle } m, \quad m = 1, 2.$$

Einsetzen von (2.3-21) in (2.3-20) ergibt

$$I = (1/2) I_0 \{2 \sin[(\Delta\phi_1 + \Delta\phi_2)/2] \cos[(\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2)/2]\}. \quad (2.3-22)$$

Die Phasendifferenz im Argument des Cosinus von (2.3-22), $\Delta\phi_1 - \Delta\phi_2$, wird nun näher betrachtet. Zu diesem Zweck wird von

$$\Delta\phi_C = 2\pi n = \oint_C (\partial_j \phi) dx_j. \quad (2.3-23a)$$

ausgegangen, wobei n gemäß (2.3-14c). Gleichung (2.3-23a) sagt aus, dass das Integral von $(\partial_j \phi)$ längs des geschlossenen Weges C lediglich ein ganzes Vielfaches von 2π ist. Diese Restriktion ergibt sich aus der Einwertigkeit der Wellenfunktion [vgl. hierzu auch die Ausführungen zu (2.2-7b) und (2.3-14b)]. Für den Gradienten der Phase lässt sich (2.2-3) nutzen, und berücksichtigt man an den Josephson-Schwachstellen die Phasendifferenzen $\Delta\phi_1$ als auch $\Delta\phi_2$, so schreibt sich (2.3-23a) alternativ

$$\Delta\phi_C = 2\pi n = \int_2^1 \left(\frac{2m_3}{\hbar} v_{j,s} \right) dx_j + \Delta\phi_1 + \int_1^2 \left(\frac{2m_3}{\hbar} v_{j,s} \right) dx_j - \Delta\phi_2 \quad (2.3-23b)$$

$v_{j,s}$ = Geschwindigkeit der suprafluiden Atome relativ zum Inertialsystem

m_3 = Masse des ^3He -Isotops.

Zur Auswertung der Integrale wird das Stokessche Theorem angewandt, und für die Geschwindigkeit der superfluiden Atome relativ zum lokalen Horizontsystem wird angenommen, dass diese gleich Null ist, das heißt, die superfluiden Atome ruhen im lokalen Horizontsystem. Mit diesen Vorgaben lässt sich für die Phasendifferenz

$$\Delta \phi_1 - \Delta \phi_2 = \frac{4\pi w_j \cdot F_j}{\kappa_3} \quad (2.3-24a)$$

herleiten. Darin sind

$$F_j = F n_j = \text{Flächenvektor des Torus} \quad (2.3-24b)$$

$$n_j = \text{Normalenvektor von } F \quad (2.3-24c)$$

$$F = \text{durch den Torus definierte Kreisfläche} \quad (2.3-24d)$$

$$\begin{aligned} \kappa_3 &= \text{Zirkulationsquant des } {}^3\text{He} \quad (2.3-24e) \\ &= 0,66 \cdot 10^{-7} \text{m}^2/\text{s} . \end{aligned}$$

Das Ergebnis (2.3-24) wird in (2.3-22) eingesetzt, so dass

$$I = I_0 \{ \sin[(\Delta \phi_1 + \Delta \phi_2)/2] \cos[2\pi w_j \cdot F_j / \kappa_3] \} \quad (2.3-25a)$$

$$=: I_{max} \sin[(\Delta \phi_1 + \Delta \phi_2)/2] \quad (2.3-25b)$$

mit

$$I_{max} = I_0 \cos[2\pi w_j \cdot F_j / \kappa_3] . \quad (2.3-25c)$$

Die Gleichung (2.3-25c), also der maximale Strom, ist das Äquivalent zu (2.3-19) und stellt den **Quanteninterferenzterm der Superfluidität** dar.

2.3.3 Kühlung von Atomen

In einem thermischen Atomstrahl bewegen sich die einzelnen Atome mit verschiedenen Geschwindigkeiten, und die Häufigkeiten dieser in der Gaswolke vorkommenden Geschwindigkeiten können durch die kinetische Gastheorie beschrieben werden. Die essentiellen Zusammenhänge dieser Theorie werden nun vorgestellt, da die daraus hervorgehenden Erkenntnisse für das Verständnis der Kühlung von Atomen von Bedeutung sind. Die Technik des Kühlens von Atomen findet Verwendung in Messgeräten auf Grundlage der Atominterferometrie [vgl. hierzu ABSCHNITT 3.4.1] und in den modernen Cäsiumatomuhren [vgl. hierzu ABSCHNITT 3.3.3].

Die **kinetische Gastheorie** ist ein Teilgebiet der **Statistischen Physik**, und sie wurde maßgeblich durch die Wissenschaftler BOLTZMANN und MAXWELL geprägt. Es kommen also statistische Methoden zur Anwendung, um die Eigenschaften eines Gases zu beschreiben. Dieses erklärt sich dadurch, dass die Newtonsche Mechanik, insbesondere die Bewegungsgleichung, nicht genutzt werden kann. So geht man davon aus, dass sich ein Gas aus Atomen oder Molekülen zusammensetzt, welche sich mit statistisch verteilten Geschwindigkeiten bewegen. Dabei werden die Atome als Massepunkte betrachtet, und sie können mit anderen Atomen kollidieren. Diese Stöße sind elastisch, und es gelten Energie- und Impulssatz. Das beschriebene Gasmodell bezeichnet man als **ideales Gas**. Für ein solches ideales Gas gilt die **allgemeine Gasgleichung**, eine Generalisierung des **Gesetzes von Boyle–Mariotte** (1664 bzw. 1676), zum Beispiel in der Form

$$PV = (2/3)(m/2)N \langle v^2 \rangle = N k T \quad (2.3-26a)$$

mit

$$\begin{aligned}
 V &= \text{Gasvolumen} \\
 P &= \text{Druck in } V \\
 N &= \text{Gesamtzahl der Gasteilchen in } V \\
 T &= \text{absolute Temperatur in Kelvin (K)} \\
 k &= 1,38054 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1} = \text{Boltzmann-Konstante} .
 \end{aligned}
 \tag{2.3-26b}$$

Die Beziehungszeichen $\langle \rangle$ symbolisieren eine Mittelwertbildung, und damit steht der Ausdruck $\langle v^2 \rangle$ für das **mittlere Geschwindigkeitsquadrat**. Des Weiteren ist m die **Masse eines Gasteilchens**, so dass

$$\langle E_{kin} \rangle = (m/2) \langle v^2 \rangle \tag{2.3-26c}$$

die **mittlere kinetische Energie** darstellt, wofür aus (2.3-26a) unmittelbar

$$\langle E_{kin} \rangle = (3/2) k T \tag{2.3-26d}$$

folgt. Wegen

$$(1/3) \langle v^2 \rangle = \langle v_2^2 \rangle = \langle v_3^2 \rangle = \langle v_1^2 \rangle$$

lässt sich die allgemeine Gasgleichung auch in der Variante

$$(m/2) \langle v_j^2 \rangle = (1/2) k T , \quad j \in \{1, 2, 3\} , \tag{2.3-26e}$$

anschreiben. Gemäß MAXWELL müssen für die Geschwindigkeitskomponenten v_j statistische Verteilungen eingeführt werden. Als Ergebnis erhält man die **Dichte der Normalverteilung des Geschwindigkeitsvektors**

$$f(v_j) = [m/(2\pi k T)]^{1/2} \exp[-m v_j^2/(2kT)] , \quad j \in \{1, 2, 3\} , \tag{2.3-27a}$$

und die Dichte für den Geschwindigkeitsbetrag, die so genannte **Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung** oder auch Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung

$$f(v) = 4\pi v^2 [m/(2\pi k T)]^{3/2} \exp[-m v^2/(2kT)] . \tag{2.3-27b}$$

Die Maxwell-Boltzmannsche Geschwindigkeitsverteilung ist keine symmetrische Gaußverteilung, ihr Maximum liegt bei der **wahrscheinlichsten Geschwindigkeit**

$$v_w = (2kT/m)^{1/2} . \tag{2.3-28a}$$

Davon zu unterscheiden sind die **mittlere Geschwindigkeit**

$$\langle v \rangle = [8kT/(\pi m)]^{1/2} = 2v_w \pi^{-1/2} \tag{2.3-28b}$$

sowie das **mittlere Geschwindigkeitsquadrat**

$$\langle v^2 \rangle = 3kT/m , \tag{2.3-28c}$$

auch als dreidimensionale RMS-Geschwindigkeit bezeichnet. Mit den Ergebnissen der kinetischen Gastheorie, (2.3-28), können dann die Geschwindigkeiten zum Beispiel für einen Cäsiumatomstrahl, der in herkömmlichen Atomuhren genutzt wird, bestimmt werden. Vorweg ist die Gesamtmasse für ^{133}Cs zu berechnen, und zwar gemäß

$$m_{abs} = A_{rel} m_u , \quad m_u = 1,660565 \cdot 10^{-27} \text{ kg} . \tag{2.3-29}$$

A_{rel} ist die relative Atommasse, und für das betrachtete Cäsiumisotop wird sie mit $A_{rel} = 133$ angegeben. Die so bestimmte absolute Atommasse wird dann in (2.3–28) eingeführt, so dass

$$\begin{aligned} v_w &\approx 11,2 T^{1/2} \text{ ms}^{-1} \\ \langle v \rangle &\approx 12,6 T^{1/2} \text{ ms}^{-1} \\ \langle v^2 \rangle &\approx 187,5 T (\text{ms}^{-1})^2 \end{aligned} \quad (2.3-30)$$

resultiert. Für eine Temperatur von 100° C beträgt also die wahrscheinlichste Geschwindigkeit 216 ms^{-1} . Eine Reduktion der Temperatur auf 0° C ergibt für die mittlere Geschwindigkeit immer noch 185 ms^{-1} und für die dreidimensionale RMS-Geschwindigkeit, (2.3–28c), 226 ms^{-1} . Ein Absinken der Temperatur ist demnach wenig geschwindigkeitsmindernd, und des Weiteren muss beachtet werden, dass einem solchen Kühlprozess durch Kondensation Grenzen gesetzt sind.

Geschwindigkeitsreduktion kann aber auch durch Stoß herbeigeführt werden, wobei ein Stoß beispielsweise bei Absorption eines Photons durch ein Atom auftritt. Diesbezüglich hat ALBERT EINSTEIN (1917) mit seiner Strahlungstheorie gezeigt, dass sich die Erhaltungssätze für Energie und Impuls auch auf die Wechselwirkung zwischen Atomen und Licht anwenden lassen, insbesondere kann der Impulssatz auf das Phänomen der Absorption und Emission von Photonen durch Atome herangezogen werden. Das Prinzip der **Geschwindigkeitsreduktion eines Atoms durch Impulsübertragung** ist dann einfach erläutert. Ein Atom bewege sich längs der 1.-Achse mit der Geschwindigkeit $v_{1,A}$, so dass der Impuls

$$p_{1,A} = m_A v_{1,A}, \quad m_A = \text{Masse des Atoms}, \quad (2.3-31a)$$

ist. Ein entgegenkommendes Photon besitze den Impuls

$$p_{1,P} = -\hbar k_P, \quad k_P = 2\pi/\lambda = \text{Wellenzahl des Lichtes}. \quad (2.3-31b)$$

Die Wellenlänge des entgegenkommenden Lichtes ist so adaptiert, dass das Atom das Photon mit großer Wahrscheinlichkeit aufnimmt und es damit zum Stoß kommt. Mit der Absorption des Photons befindet sich das Atom im angeregten Zustand. Das aufgenommene Photon wird dann nach einer kurzen Zeit wieder emittiert. Die Abgabe des Photons ist in alle Richtungen gleich wahrscheinlich, so dass dieser Impulsbeitrag im Mittel gleich Null ist [vgl. hierzu COHEN-TANNOUJJI (1998), PHILLIPS (1998)]. Damit beträgt die Geschwindigkeitsreduktion

$$v = \hbar k_P / m_A. \quad (2.3-31c)$$

Trifft zum Beispiel Licht mit der Wellenlänge $\lambda = 852 \text{ nm}$ auf ein Cäsiumatom, dann wird nach (2.3–31c) die Geschwindigkeit um den Betrag $0,0035 \text{ ms}^{-1}$ verringert. Unterstellt man eine Ausgangsgeschwindigkeit von 200 ms^{-1} , bedarf es also $5,7 \cdot 10^4$ Absorptions-Emissions-Zyklen, was bei 30 ns Dauer für einen Zyklus insgesamt $0,0017 \text{ s}$ entspricht, um das Cäsiumatom zur Ruhe zu bringen.

Basierend auf dieser grundsätzlichen Idee der Geschwindigkeitsverringern von neutralen Atomen, wird nun die **Methode des Dopplerkühlens** vorgestellt. Prämisse zur resonanten Absorption eines Photons ist, dass die Frequenz des Laserlichtes ν_L der Anregungs- bzw. Resonanzfrequenz ν_R des Atoms entspricht, also

$$\nu_L = \nu_R. \quad (2.3-32a)$$

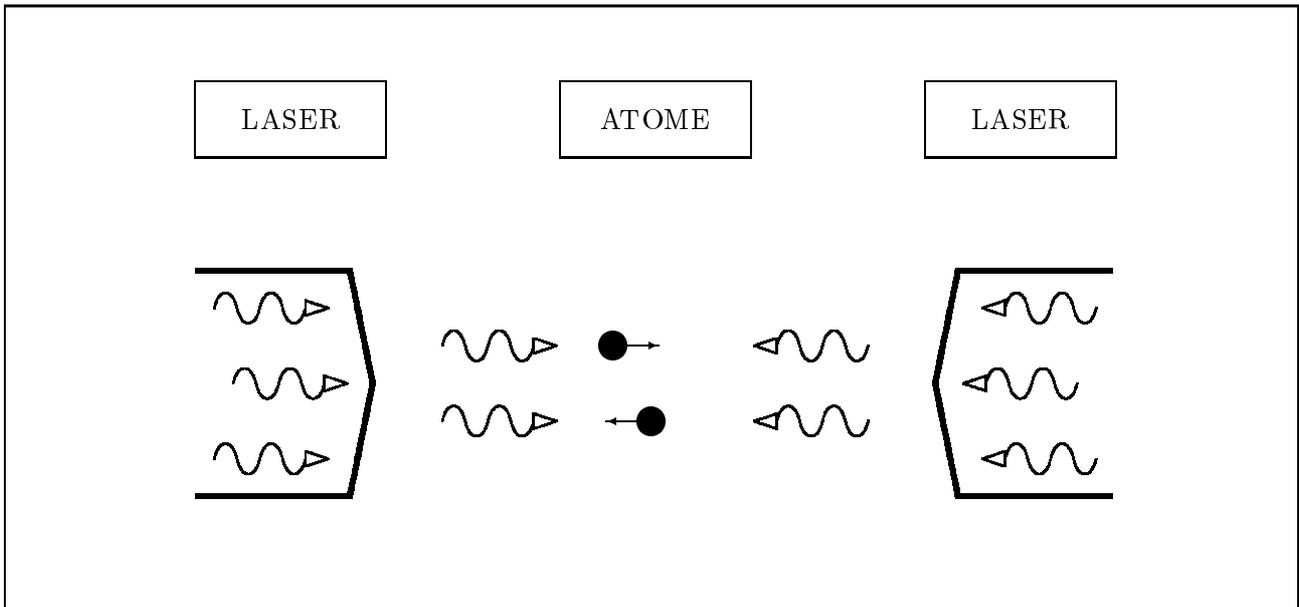


Abbildung 2.3.3–1: Eindimensionale Dopplerkühlung

Bewegen sich Atom und Photon gegenläufig, ist die Dopplerverschiebung zu beachten, und die Frequenz ν_L ist dann derart abzustimmen, dass

$$\nu_L < \nu_R \quad (2.3-32b)$$

gilt, das heißt, dass die Frequenz des Laserlichtes rotverschoben ist. Das hat zur Folge, dass für das Atom das entgegenkommende Laserlicht gerade die Resonanzfrequenz aufweist und daher mit großer Wahrscheinlichkeit absorbiert wird. Um ein Atom zum Stillstand zu bringen, das sich beliebig längs einer Achse bewegt, werden zwei gegenläufige Laserstrahlen eingerichtet, wobei für den in Bewegungsrichtung laufenden Laserstrahl ebenfalls die Bedingung (2.3–32b) gilt. So ist für das Atom, aufgrund der Bewegung, die Frequenz dieses Laserlichtes erhöht rotverschoben und damit eine Photonenaufnahme weniger wahrscheinlich. ABBILDUNG 2.3.3–1 [s. Seite 53] veranschaulicht das Prinzip des Dopplerkühlens längs einer Koordinatenachse. Konfiguriert man eine dreidimensionale Anordnung gegenläufiger Paare von Laserlicht, werden die Atome in alle Raumrichtungen abgebremst, und die resultierende Bewegung der Atome erinnert an ein viskoses Fluidum, was für die geschwindigkeitsreduzierte Gaswolke schließlich zu der Bezeichnung „**optische Melasse**“ geführt hat. Die optische Melasse lässt sich aber nicht „einfrieren“, denn nach der Theorie des Dopplerkühlens kann ein bestimmtes Temperaturminimum T_D nicht unterschritten werden. Diese **Grenze des Dopplerkühlens**, im Englischen als „Doppler cooling limit“ bezeichnet, wird mit

$$k T_D = \hbar \Gamma / 2 \quad (2.3-32c)$$

angegeben, wobei

$$\Gamma^{-1} = \text{Lebensdauer des angeregten Zustands} . \quad (2.3-32d)$$

Für Cäsium beträgt (2.3–32d) etwa 30 – 32 ns, so dass minimale Temperaturen von bis zu 120 μK erreicht werden können [vgl. hierzu GIBBLE/CHU (1992), ABSCHNITT 4.1]. Die aus

dieser Temperatur hervorgehenden Geschwindigkeiten genügen auch der Maxwell–Boltzmann Verteilung, so dass die RMS–Geschwindigkeit gemäß (2.3–28c)

$$v = (3 k T_D/m)^{1/2} = 0,150 \text{ ms}^{-1} \quad (2.3-32e)$$

oder für den eindimensionalen Fall

$$v = (k T_D/m)^{1/2} = 0,088 \text{ ms}^{-1} \quad (2.3-32f)$$

beträgt.

Mit Hilfe sogenannter **Sub–Doppler–Kühlmechanismen** lassen sich die Ergebnisse (2.3–32e,f) weiter optimieren. Diesbezüglich ist das Verfahren der **Polarisationsgradientenkühlung** bzw. **Sisyphus–Kühlung** von großer Bedeutung. Um die Wirkungsweise dieser Methode zu veranschaulichen, wird von einem 2–Niveau–Atom ausgegangen, mit den beiden Feinstrukturzuständen

$$J_g = \text{Grundzustand (engl.: ground state)} \quad (2.3-33a)$$

$$J_e = \text{angeregter Zustand (engl.: excited state)} . \quad (2.3-33b)$$

Die mit (2.3–33a,b) verbundenen Energieniveaus mögen weitere Zustände besitzen mit den magnetischen Quantenzahlen

$$m_g \in \{-1/2, +1/2\} \quad (2.3-33c)$$

$$m_e \in \{-3/2, -1/2, +1/2, +3/2\} . \quad (2.3-33d)$$

Eine solche zusätzliche Aufspaltung bezeichnet man als **Entartung**, und in diesem Sinne sind der Grundzustand sowie der angeregte Zustand aufgrund von (2.3–33c,d) zweifach bzw. vierfach entartet. Es werde nun ein **Atom in einem Lichtfeld gegenläufiger Lichtstrahlen** betrachtet, wie es auch bei der optischen Melasse der Fall ist. Vereinfachend werden die Zusammenhänge für den Fall nur einer Laserachse beschrieben. Die beiden gegenläufigen Laserstrahlen seien von gleicher Intensität sowie senkrecht zueinander linear polarisiert, so dass man von einer **lin ⊥ lin–Anordnung** spricht. Die Überlagerung der gegenläufigen Laserstrahlung führt zu einer unterschiedlichen Polarisation des resultierenden Lichtfeldes, nämlich längs der Laserachse entstehen in Abhängigkeit von der Wellenlänge des Lichtes Orte, an denen das Lichtfeld entweder linear oder zirkular polarisiert ist. Ein bewegtes Atom passiert also Orte von verschieden polarisiertem Licht. Dadurch kommt es dann zum Phänomen der **Sisyphus–Kühlung**, resultierend aus der Kombination von Stark–Effekt und dem optischen Pumpen. Der **Stark–Effekt** besagt, dass die Energie eines Atoms unter dem Einfluß verschieden polarisierten Lichtes variiert, das heißt, die Energieniveaus verschieben sich, wobei diese Verschiebungen disparat sind [siehe zum Stark–Effekt zum Beispiel HAKEN/WOLF (1987)]. Mit dem **Verfahren des optischen Pumpens** verbindet sich folgender Prozess für das mit (2.3–33) beschriebene Atom. Ein Atom möge sich im Grundzustand (2.3–33a) mit $m_g = -1/2$ befinden. Wird das Atom dann mit

$$\sigma^+ - \text{Licht} = \text{zirkular polarisiertes Licht mit Photonendrehimpuls } „+\hbar“$$

bestrahlt, geht es nach der Emission in den Grundzustand $m_g = +1/2$ über. Entsprechend gilt für die Bestrahlung eines Atoms im Grundzustand (2.3–33a) und $m_g = +1/2$ mit

$$\sigma^- - \text{Licht} = \text{zirkular polarisiertes Licht mit Photonendrehimpuls } „-\hbar“ ,$$

dass das Atom in den Grundzustand mit der magnetischen Quantenzahl $m_g = -1/2$ transferiert wird. Kombiniert man Stark–Effekt und optisches Pumpen, so führt dies zum Mechanismus der

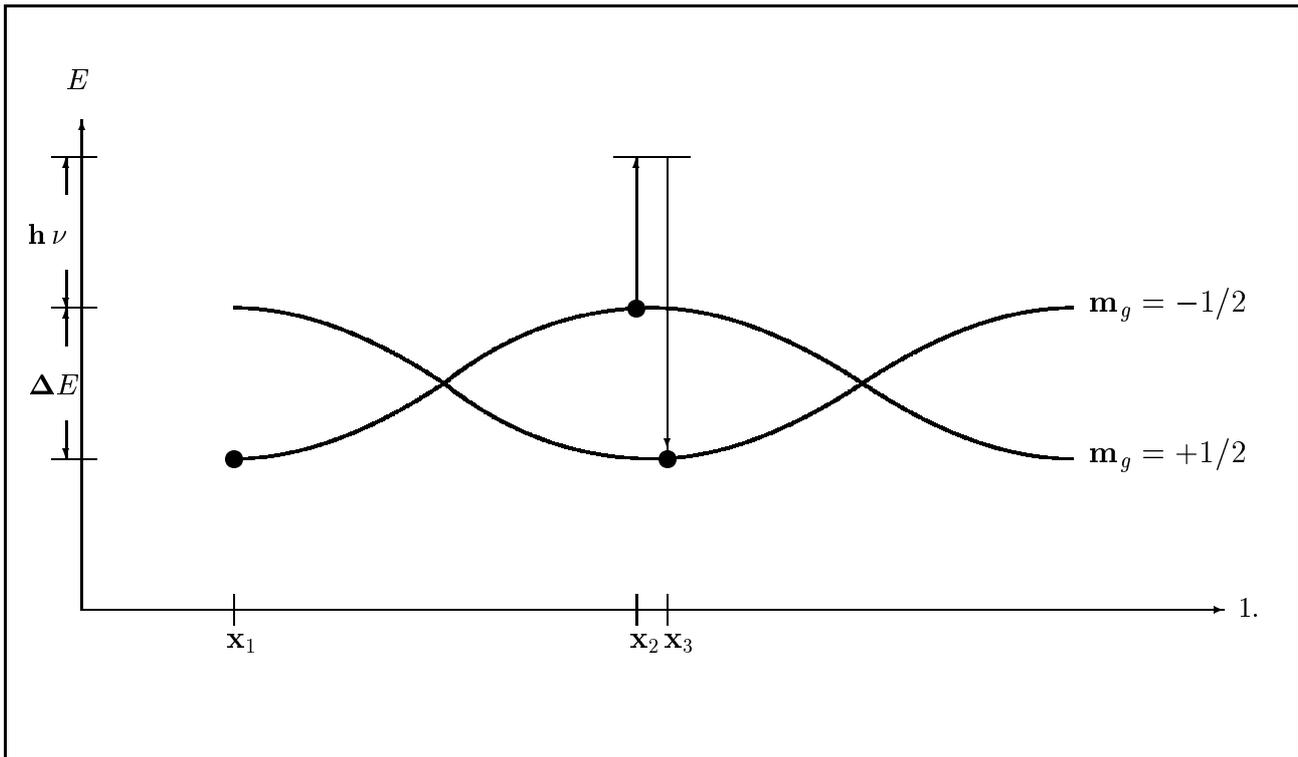


Abbildung 2.3.3–2: Prinzip der Sisyphus-Kühlung

Sisyphus-Kühlung, wie er anschaulich in ABBILDUNG 2.3.3–2 [s. Seite 55] dargestellt ist. Die Abbildung zeigt den Energiezustand eines Atoms in Abhängigkeit von der Position auf der 1.-Achse. An der Position x_1 befinde sich das Atom im Grundzustand mit $m_g = +1/2$ und die Gesamtenergie betrage

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} . \quad (2.3-34a)$$

Das Atom bewege sich nun längs der positiven 1.-Koordinatenachse, und mit der räumlichen Änderung des Atoms geht eine Änderung der Polarisation des Lichtfeldes einher, das heißt, durch den Polarisationsgradienten wird das Energieniveau des Grundzustandes mit $m_g = +1/2$ verschoben. Wie im Beispiel zu erkennen, wächst das Energieniveau an, bis das Atom die Position x_2 erreicht. Es wird dem Atom also kinetische Energie entzogen und potentielle Energie zugeführt, also

$$E_{ges} = (E_{kin} - \Delta E) + (E_{pot} + \Delta E) , \quad (2.3-34b)$$

wobei ΔE gerade die Potentialdifferenz zwischen den beiden, durch (2.3-33c) gekennzeichneten Energieniveaus beschreibt. Mit der Position x_2 ist das Maximum des Energieniveaus für $m_g = +1/2$ erreicht, und das Atom ist örtlich an einer Stelle, wo es mit σ^+ -Licht bestrahlt wird. Mit hoher Wahrscheinlichkeit wird nun ein Photon mit der Energie $h\nu$ absorbiert, so dass die Energiebilanz

$$E_{ges} = (E_{kin} - \Delta E) + (E_{pot} + \Delta E + h\nu) \quad (2.3-34c)$$

liefert. Nach kurzer Verweildauer im angeregten Zustand wird dann ein Photon durch Spontane Emission wieder abgegeben, wobei das Atom durch das optische Pumpen nun in den Grundzu-

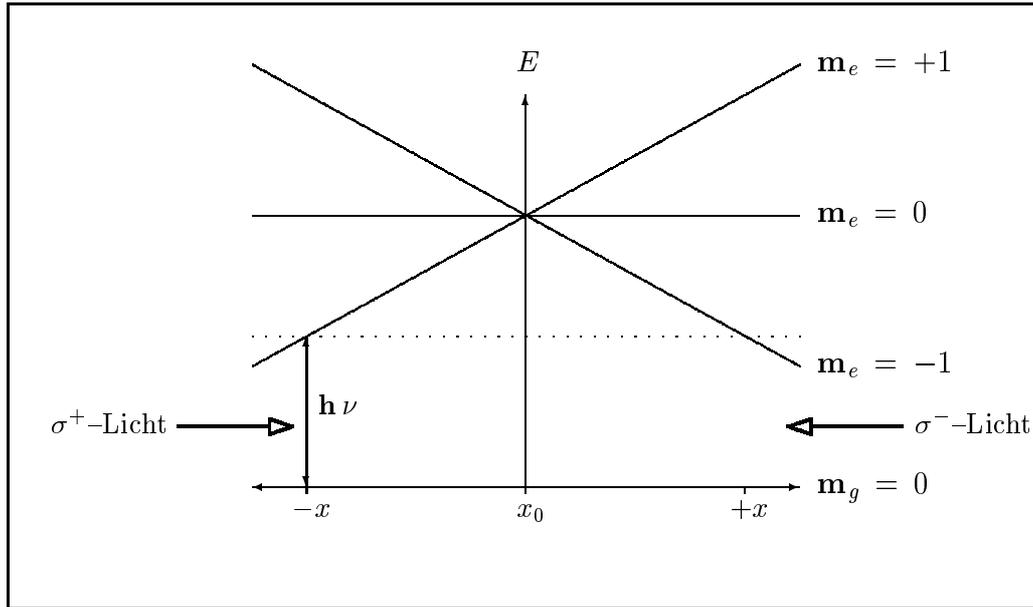


Abbildung 2.3.4-1: Prinzip der magneto-optischen Falle

stand mit $m_g = -1/2$ überführt wird, was impliziert, dass die Energie des emittierten Photons $\Delta E + h\nu$ beträgt. Damit gilt für die Gesamtenergie nach einem solchen Zyklus

$$E_{ges} = (E_{kin} - \Delta E) + E_{pot} . \quad (2.3-34d)$$

Ein Vergleich von (2.3-34d) mit (2.3-34a) demonstriert, dass die Gesamtenergie vermindert ist, da das Atom immer wieder den Potentialwall hinaufläuft, dann aber durch Emission im Kontext des optischen Pumpens den Zuwachs an potentieller Energie verliert. Diese Sisyphus-Zyklen werden so lange fortgesetzt, bis dass

$$E_{ges} < \Delta E , \quad (2.3-34e)$$

und für ΔE gilt die Restriktion

$$\Delta E \geq E_R = (\hbar k_P)^2 / (2m) , \quad (2.3-34f)$$

wobei E_R das so genannte Rückstoßlimit [vgl. hierzu COHEN-TANNOUDJI (1998), (3)] darstellt. Die damit verbundene Temperatur genügt der Beziehung

$$T_R = (\hbar k_P)^2 / (k m) . \quad (2.3-34g)$$

Für das Cäsiumatom konnten mit Hilfe der Sisyphus-Kühlung Temperaturen von $2,5 \mu K$ erreicht werden, was einer eindimensionalen RMS-Geschwindigkeit von $0,011 \text{ ms}^{-1}$ entspricht. Damit sind die niedrigen Geschwindigkeiten erreicht, mit denen neuartige Atomuhren, nämlich Cäsiumfontänen [vgl. hierzu ABSCHNITT 3.3.3], realisierbar sind.

2.3.4 Magneto-optische Falle

Mit einer optischen Melasse können Atome nicht eingefangen werden. Ist nämlich die Minimaltemperatur erreicht, verweilen die Atome lediglich einen Augenblick innerhalb des durch

die Melasse gegebenen Volumenbereiches. Insofern ist keine rücktreibende Kraft gegeben, welche die Atome im Kreuzungspunkt der Laserstrahlen zusammenhält. Erst mit der Entwicklung einer so genannten magneto-optischen Falle konnten neutrale Atome tatsächlich eingefangen werden. Zur Erläuterung der Funktionsweise einer **magneto-optischen Falle**, im Englischen „magneto-optical trap (MOT)“, wird wieder von einem Zwei-Niveau-Atom gemäß (2.3-33a,b) ausgegangen, allerdings gelte nun für die magnetischen Quantenzahlen

$$m_g = 0 \quad (2.3-35a)$$

$$m_e \in (-1, 0, +1) . \quad (2.3-35b)$$

Die ABBILDUNG 2.3.4-1 [s. Seite 56] veranschaulicht den Verfahrensablauf in einer Dimension. Dem Lichtfeld der lin \perp lin-Anordnung wird nun ein inhomogenes Magnetfeld überlagert, so dass die mit (2.3-35b) verbundenen Energieniveaus infolge des **Zeemann-Effektes** verschoben sind, wie aus der ABBILDUNG 2.3.4-1 [s. Seite 56] zu erkennen ist. Betrachtet man nun die Bewegung eines Atoms von links nach rechts, dann ist an der Stelle „-x“ die Energie des Laserlichtes gerade so, dass das Atom in den angeregten Zustand J_e mit $m_e = +1$ überführt werden kann. Dies erfordert allerdings die Absorption von σ^+ -Licht, was auch wahrscheinlich erfolgt. Auf diese Weise erfährt das Atom eine Kraft in Richtung x_0 . Im positiven Halbraum verhalten sich die Dinge umgekehrt. Das Atom wird also immer zur Position x_0 in Richtung Kreuzungspunkt der Laserstrahlen beschleunigt.

Kapitel 3

Geodätische Anwendungen

3.1 Quantenmechanischer Inertialsensor

3.1.1 Schrödingergleichung im terrestrischen Beobachtungssystem

Gegenstand dieses Abschnitts ist die Herleitung einer Beobachtungsgleichung für einen quantenmechanischen Inertialsensor, ein so genanntes **Quantendynamometer**. Ein Ansatz hierzu wie auch die Ausführung der prinzipiellen Zusammenhänge finden sich in HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), ABSCHNITT 3.4.4. Diese Idee wird hier aufgegriffen und dahingehend erweitert, dass die Schrödingergleichung in einem beliebig bewegten terrestrischen Beobachtungssystem aufgestellt wird und damit das vorgestellte „Quantendynamometer“ ein universales Messinstrument darstellt. Es seien

$$S_I = \text{Inertialsystem} \quad (3.1-1a)$$

$$S_E = \text{erdgebundenes System,} \quad (3.1-1b)$$

relativ S_I translatorisch beschleunigt und rotierend

$$S_a = \text{terrestrisches Beobachtungssystem,} \quad (3.1-1c)$$

relativ S_I/S_E translatorisch beschleunigt und rotierend

und

$$y_{i,s} := \overset{I(O_I)}{y}_{i,s} = \text{Ortsvektor vom Ursprung } O_I \text{ zum Punkt } P_s \text{ im System } S_I \quad (3.1-1d)$$

$$x_{i,s} := \overset{E(O_E)}{x}_{i,s} = \text{Ortsvektor vom Ursprung } O_E \text{ zum Punkt } P_s \text{ im System } S_E \quad (3.1-1e)$$

$$z_{i,s} := \overset{a(O_a)}{z}_{i,s} = \text{Ortsvektor vom Ursprung } O_a \text{ zum Punkt } P_s \text{ im System } S_a . \quad (3.1-1f)$$

Ziel der nun folgenden Ausführungen ist die **Aufstellung des Hamiltonoperators im Beobachtungssystem S_a** . Das heißt, Grundlage der nachfolgenden Begriffe und Definitionen bildet die Hamilton–Jacobi–Theorie der Mechanik. Zunächst wird von der Bewegungsgleichung für den Massenmittelpunkt P_p eines Testkörpers mit dem Volumen VTa und der Masse m_a im nicht inertialen Beobachtungssystem S_a [vgl. hierzu HEITZ (1986), (3–69)]

$$\overset{a(O_a)}{b}_{i,p} = \overset{a}{g}_{i,Ep} + \overset{a}{g}_{i,Hp} + \overset{a}{K}_{i,Op}/m_a - \overset{a}{b}_{i,Tp} - \overset{a(O_I)}{b}_{i,O_a} \quad (3.1-2a)$$

mit

$$\begin{aligned}
g_{i.Ep}^a &= \text{Gravitationsbeschleunigung infolge der Erdmasse} \\
g_{i.Hp}^a &= \text{Gravitationsbeschleunigung infolge extraterrestrischer Massen} \\
\overset{a}{K}_{i.Op} &= \text{am Testkörper VTa angreifende Oberflächenkräfte} \\
\overset{a}{b}_{i.Tp} &= \text{auf den Testkörper VTa wirkende Trägheitsbeschleunigungen} \\
&= 2 \varepsilon_{ijk} \overset{a}{w}_{j.aI} \overset{a}{v}_{k.p}^{(O_a)} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \overset{a}{w}_{j.aI} \overset{a}{w}_{l.aI} \overset{a}{z}_{m.p} + \varepsilon_{ijk} (\overset{a}{d}w_{j.aI}/\overset{a}{d}t) \overset{a}{z}_{k.p} \\
\overset{a}{w}_{i.aI} &= \text{Winkelgeschwindigkeit des Beobachtungssystems } S_a \\
&\quad \text{relativ zum inertialen System } S_I \\
\overset{a}{b}_{i.O_a}^{(O_I)} &= \text{Beschleunigung des Beobachtungssystems } S_a \\
&\quad \text{relativ zum inertialen System } S_I .
\end{aligned} \tag{3.1-2b}$$

ausgegangen. Die Winkelgeschwindigkeit in (3.1-2b) setzt sich aus der Winkelgeschwindigkeit des Beobachtungssystems S_a relativ zum erdgebundenen System S_E und derjenigen des erdgebundenen Systems S_E relativ zum Inertialsystem S_I zusammen:

$$\overset{a}{w}_{i.aI} = \overset{a}{w}_{i.aE} + \overset{a}{w}_{i.EI} , \tag{3.1-2c}$$

und in die Beschleunigung des Beobachtungssystems S_a relativ zum inertialen System S_I gehen die Beschleunigung des Systems S_a relativ S_E , nämlich $\overset{a}{b}_{i.O_a}^{(O_E)}$, sowie die Trägheitsbeschleunigungen ein, welche auf das erdgebundene System S_E wirken, so dass

$$\begin{aligned}
\overset{a}{b}_{i.O_a}^{(O_I)} &= \overset{a}{b}_{i.O_a}^{(O_E)} + \overset{a}{b}_{i.O_E}^{(O_I)} \\
&\quad + 2 \varepsilon_{ijk} \overset{a}{w}_{j.EI} \overset{a}{v}_{k.O_a}^{(O_E)} + \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \overset{a}{w}_{j.EI} \overset{a}{w}_{l.EI} \overset{a}{x}_{m.O_a} + \varepsilon_{ijk} (\overset{a}{d}w_{j.EI}/\overset{a}{d}t) \overset{a}{x}_{k.O_a}
\end{aligned} \tag{3.1-2d}$$

gilt [vgl. hierzu HEITZ (1986), ABSCHNITT 3.5]. Für die weiteren Betrachtungen wird angenommen, dass auf den Testkörper VTa keine Oberflächenkräfte wirken und damit $\overset{a}{K}_{i.Op}$ verschwindet. Auf diese Weise vereinfacht sich (3.1-2a), und die den verbleibenden Beschleunigungen entsprechenden Potentiale sind

$$U_E = \text{Gravitationspotential der Erde} \tag{3.1-3a}$$

$$U_H = \text{Gravitationspotential extraterrestrischer Quellkörper} \tag{3.1-3b}$$

$$\begin{aligned}
U_T^{(O_a)} &= \text{Translationspotential bezüglich } O_a \\
&= \overset{a}{b}_{i.O_a}^{(O_I)} \overset{a}{z}_{i.p}
\end{aligned} \tag{3.1-3c}$$

$$\begin{aligned}
U_{CR} &= \text{Potential aus Rotations- und Coriolisbeschleunigung} \\
&= - \varepsilon_{ijk} \overset{a}{v}_{i.p}^{(O_a)} \overset{a}{w}_{j.aI} \overset{a}{z}_{k.p}
\end{aligned} \tag{3.1-3d}$$

$$\begin{aligned}
U_{ZF} &= \text{Potential aus Zentrifugalbeschleunigung} \\
&= - (1/2) (\varepsilon_{ijk} \overset{a}{w}_{j.aI} \overset{a}{z}_{k.p})^2 ,
\end{aligned} \tag{3.1-3e}$$

woraus sich die **potentielle Gesamtenergie**

$$W = W_G + W_{TR} \tag{3.1-4a}$$

mit

$$\begin{aligned} W_G &= \text{potentielle Energie resultierend aus der Gravitation} & (3.1-4b) \\ &= \int_{VT_a} (U_E + U_H) dm_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{TR} &= \text{potentielle Energie resultierend aus der Trägheit} & (3.1-4c) \\ &= \int_{VT_a} (U_T^{(O_a)} + U_{ZF} + U_{CR}) dm_a \end{aligned}$$

ergibt. Mit der **kinetischen Energie**

$$E = \frac{1}{2} \int_V v_i \cdot v_i \cdot dm \quad (3.1-5)$$

schreibt sich die **Lagrangefunktion** im Beobachtungssystem (3.1-1c)

$$\begin{aligned} L &= (m_a/2) (\dot{v}_{i,p}^{(O_a)} \dot{v}_{i,p}^{(O_a)}) & (3.1-6) \\ &\quad - m_a \left[U_E + U_H + \dot{b}_{i,O_a}^{(O_a)} \dot{z}_{i,p} - \frac{1}{2} (\varepsilon_{ijk} \dot{w}_{j,aI} \dot{z}_{k,p})^2 - \varepsilon_{ijk} \dot{v}_{i,p}^{(O_a)} \dot{w}_{j,aI} \dot{z}_{k,p} \right]. \end{aligned}$$

Aus der Lagrangefunktion (3.1-6) bildet sich der **generalisierte Impuls**

$$\dot{p}_{i,pg}^a := \partial L / \partial \dot{v}_{i,p}^{(O_a)} = m_a \dot{v}_{i,p}^{(O_a)} + m_a \varepsilon_{ijk} \dot{w}_{j,aI} \dot{z}_{k,p} \quad (3.1-7a)$$

bzw. die **generalisierte Geschwindigkeit**

$$\dot{v}_{i,pg}^a := \dot{v}_{i,p}^{(O_a)} = \dot{p}_{i,pg}^a / m_a - \varepsilon_{ijk} \dot{w}_{j,aI} \dot{z}_{k,p}. \quad (3.1-7b)$$

Mit diesen Ergebnissen (3.1-7a,b) lautet die **Hamiltonfunktion im terrestrischen Beobachtungssystem**, in Anwendung der Vorschrift HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.3-92a),

$$H = [1/(2m_a)] \dot{p}_{i,pg}^a \dot{p}_{i,pg}^a - \varepsilon_{ijk} \dot{p}_{i,pg}^a \dot{w}_{j,aI} \dot{z}_{k,p} + m_a (U_E + U_H + U_T^{(O_a)}). \quad (3.1-8)$$

Den Hamiltonoperator \hat{H} des quantenmechanischen System erhält man aus der Hamiltonfunktion (3.1-8), indem man die klassischen Größen, Koordinaten und Impuls, durch die entsprechenden quantenmechanischen Operatoren substituiert. So liefert die Anwendung der Operatorregeln [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (2.6-12)] auf (3.1-8) den **Hamiltonoperator im Beobachtungssystem** S_a

$$\hat{H} = -[\hbar^2/(2m_a)] \partial_i^a \partial_i^a + i\hbar \varepsilon_{ijk} \dot{w}_{i,aI} \dot{z}_{j,p} \partial_k^a + m_a (U_E + U_H + U_T^{(O_a)}). \quad (3.1-9)$$

Die Vorarbeiten (3.1-1) bis (3.1-9) bilden die Grundlage zur Aufstellung einer Beobachtungsgleichung unter Nutzung der Schrödingerschen Wellengleichung. Dazu wählt man für die Materiewellenfunktion ψ den Ansatz der **ebenen de Broglieschen Materiewelle**

$$\psi(t, x_k) = A \exp[-i\omega t + i k_j \cdot x_j], \quad A = \text{Amplitude}, \quad (3.1-10a)$$

welche sich unter der Annahme eines stationären Systems in der Weise

$$\psi(t, x_k) = f(t) \varphi(x_k) = (e^{-i\omega t}) (A e^{i k_j \cdot x_j}) \quad (3.1-10b)$$

aufspalten lässt [vgl. hierzu (2.1–25b)]. In (3.1–10b) definiert das Skalarprodukt aus dem Wellenvektor k_j und dem Ortsvektor x_j die Phase der Materiewelle

$$\Phi = k_j \cdot x_j . \quad (3.1-10c)$$

Mit (3.1–10b), dargestellt im Beobachtungssystem (3.1–1c), und dem Hamiltonoperator (3.1–9) schreibt sich die zeitunabhängige Schrödingergleichung (2.1–25c)

$$-\frac{\hbar^2}{2m_a} \partial_i^a \partial_i^a \varphi(z_{j,p}^a) + i\hbar \varepsilon_{ijk} \dot{w}_{i,aI}^a z_{j,p}^a \partial_k^a \varphi(z_{j,p}^a) + m_a \varphi(z_{j,p}^a) U_{ges} = E_{ges} \varphi(z_{j,p}^a) \quad (3.1-11a)$$

mit

$$U_{ges} = U_E + U_H + U_T^{(O_a)} . \quad (3.1-11b)$$

3.1.2 Anwendungen des Quantendynamometers

Der **Aufbau des Quantendynamometers** und damit die Verläufe der Materiestrahlen werden wie folgt idealisiert. Der Sender der Materiestrahlen sei im Ursprung des Beobachtungssystems (3.1–1c) positioniert. Es wird dann ein Paar von Materiestrahlen erzeugt, so dass beide Strahlen parallel versetzt und in konstruktiver Interferenz in eine Achsrichtung laufen. Zur Veranschaulichung diene das Strahlpaar längs der $1.a$ -Achse wie in **ABBILDUNG 3.1.2–1** [s. Seite 63] dargestellt. Der erste Strahl wird mit S_{1A} , der zweite mit S_{1B} bezeichnet, und für die Koordinaten der jeweiligen Strahlen gilt

$$\begin{aligned} S_{1A} : z_{1,p}^a &= z_{1,p}^a , & z_{2,p}^a &= l , & z_{3,p}^a &= 0 , \\ S_{1B} : z_{1,p}^a &= z_{1,p}^a , & z_{2,p}^a &= 0 , & z_{3,p}^a &= l , \end{aligned} \quad (3.1-12)$$

so dass nur die Koordinate $z_{1,p}^a$ variabel ist und damit die Gradienten in Richtung der $2.a$ - und $3.a$ -Achse verschwinden. Für die einzelnen Strahlverläufe werden dann die Schrödingergleichungen aufgestellt, wozu (3.1–12) in (3.1–11) eingesetzt wird. Die Differenz der einzelnen Schrödingergleichungen ergibt dann jeweils eine von der Gesamtenergie E_{ges} des quantenmechanischen Systems befreite Beobachtungsgleichung. Analog werden Materiestrahlen längs der $2.a$ - und $3.a$ -Achse generiert, und es wird entsprechend der Darstellung (3.1–12) für das Strahlenpaar längs der $1.a$ -Achse vorgegangen. Auf diese Weise und unter Beachtung von (3.1–10c) entsteht das **Gleichungssystem des Quantendynamometers**:

$$\frac{\Delta\Phi}{s}|_1 = \alpha_1 \left\{ \left(\frac{m_a}{\hbar} \right) \left[\Delta U_{Grav}|_1 + l \left(\dot{b}_{3,O_a}^{(O_I)} - \dot{b}_{2,O_a}^{(O_I)} \right) \right] - l \left[\dot{k}_{1,1A}^a \dot{w}_{3,aI}^a + \dot{k}_{1,1B}^a \dot{w}_{2,aI}^a \right] \right\} \quad (3.1-13a)$$

$$\frac{\Delta\Phi}{s}|_2 = \alpha_2 \left\{ \left(\frac{m_a}{\hbar} \right) \left[\Delta U_{Grav}|_2 + l \left(\dot{b}_{3,O_a}^{(O_I)} - \dot{b}_{1,O_a}^{(O_I)} \right) \right] + l \left[\dot{k}_{2,2A}^a \dot{w}_{3,aI}^a + \dot{k}_{2,2B}^a \dot{w}_{1,aI}^a \right] \right\} \quad (3.1-13b)$$

$$\frac{\Delta\Phi}{s}|_3 = \alpha_3 \left\{ \left(\frac{m_a}{\hbar} \right) \left[\Delta U_{Grav}|_3 + l \left(\dot{b}_{2,O_a}^{(O_I)} - \dot{b}_{1,O_a}^{(O_I)} \right) \right] - l \left[\dot{k}_{3,3A}^a \dot{w}_{2,aI}^a + \dot{k}_{3,3B}^a \dot{w}_{1,aI}^a \right] \right\} \quad (3.1-13c)$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_n = \left(\frac{2}{\dot{k}_{n,nA}^a + \dot{k}_{n,nB}^a} \right) \left(\frac{m_a}{\hbar} \right) , \quad n \in \{1, 2, 3\} , \quad (3.1-13d)$$

und den Potentialunterschieden zwischen den jeweiligen Strahlwegen

$$\Delta U_{Grav|n} = (U_E + U_H)_{nB} - (U_E + U_H)_{nA}, \quad n \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1-13e)$$

Die Größe s in (3.1-13a-c) ist die für alle Strahlverläufe gleiche Weglänge, und am Ende der Strahlwege gewinnen Phasendetektoren die Beobachtung des Quantendynamometers, nämlich die Phase bzw. Phasendifferenz. Die beschriebene Darstellung erlaubt eine **vielfältige Nutzung**

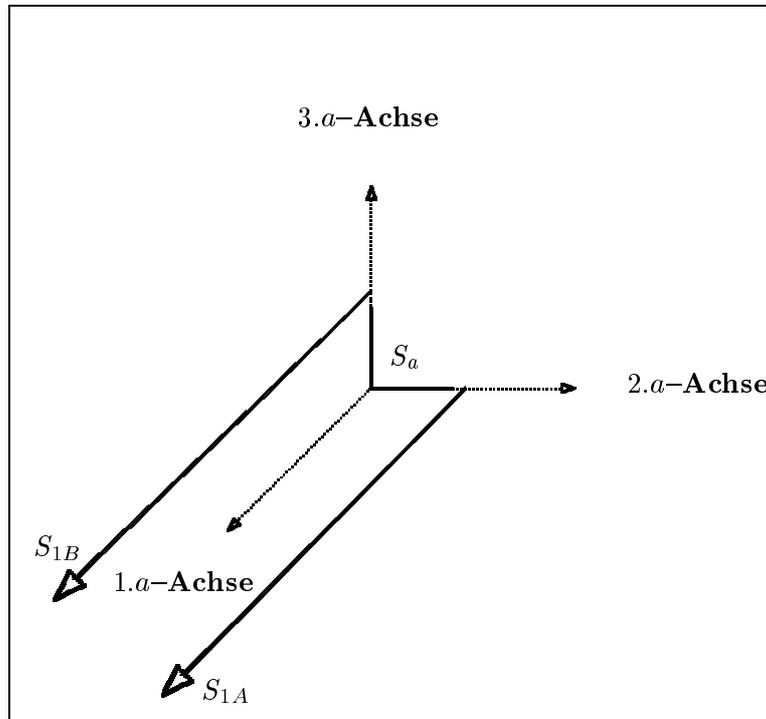


Abbildung 3.1.2-1: schematisierter Strahlverlauf längs der 1.-Achse

des Quantendynamometers, z.B. als **Beobachtungsgerät der Trägheitsnavigation**, wozu die Beobachtungsgleichungen (3.1-13a-c) zur Ermittlung der translatorischen und rotatorischen Bewegung des Beobachtungssystems S_a verwendet werden. Diesem entsprechend werden

$$b_{i.O_a}^{(O_E)} = \text{Beschleunigung von } O_a \text{ relativ } O_E \text{ [vgl. (3.1-2d)]}, \quad (3.1-14a)$$

$$w_{i.aI} = \text{Winkelgeschwindigkeit von } S_a \text{ relativ } S_I \text{ [vgl. (3.1-2c)]}, \quad (3.1-14b)$$

als Bestimmungsgrößen herangezogen, welche dann weiter ausgewertet werden müssen, um die Zielgrößen der Trägheitsnavigation zu gewinnen [zur Trägheitsnavigation siehe HEITZ (1980-1983), ABSCHNITT 11.5]. Wählt man eine erdfeste Aufstellung, so gilt insbesondere

$$w_{i.aE} = 0_i, \quad (3.1-14c)$$

so dass sich (3.1-2c) zu

$$w_{i.aI} = w_{i.EI} \quad (3.1-14d)$$

reduziert. Auf diese Weise kann (3.1-14d) als Zielgröße eingeführt werden und damit das **Quanten-Dynamometer als Erdrotationssensor** dienen. Des Weiteren ist eine **Nutzung des Quantendynamometers als Gravimeter** möglich, wenn (3.1-13e) Zielgröße der Beobachtungsgleichung ist.

Abschließend soll die **Leistungsfähigkeit der Materiewellen** demonstriert werden. Zu diesem Zweck werden die Empfindlichkeiten für die einzelnen Einflüsse in Relation zu den Lichtwellen genauer untersucht. Allgemein lässt sich aus (3.1–13a-c) ablesen, dass ein langer Strahlweg s günstig zur Bestimmung sämtlicher Zielgrößen ist. Dasselbe gilt für den Abstand l der Strahlwege, sofern die translatorische und rotatorische Bewegung des Beobachtungssystems S_a bestimmt werden. Allerdings haben beide Längen keinen maßgeblichen Einfluß auf die nachfolgend dargestellten Abschätzungen. Im Falle einer Materiewelle gilt gemäß (3.1–13) bei einem gegebenen Gravitationsunterschied für den Beitrag zur Phasendifferenz

$$\delta\Phi_{Grav}(Materie) = \left(\frac{8\pi^2 s}{a(k_{n,nA} + k_{n,nB})} \right) \left(\frac{m_a}{h} \right)^2 \Delta U_{Grav}|_n, \quad n \in \{1, 2, 3\}, \quad (3.1-15a)$$

und im Falle einer Lichtwelle mit Beachtung von (2.1–21b)

$$\delta\Phi_{Grav}(Licht) = \left(\frac{8\pi^2 s}{a(k_{n,nA} + k_{n,nB})} \right) \left(\frac{1}{\lambda c} \right)^2 \Delta U_{Grav}|_n, \quad n \in \{1, 2, 3\}. \quad (3.1-15b)$$

Nach (3.1–15a) sind zur Bestimmung des Gravitationsunterschiedes sehr massereiche Materieteilchen besonders geeignet. Nutzt man zum Beispiel ein Natriumatom mit

$$A_{rel} = 22,9898,$$

so ergibt sich aus (2.1–7a) die absolute Atommasse des Natriumatoms zu $3,82 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$. Die Lichtwellen seien durch die Wellenlänge

$$\lambda_{opt} = 5000 \text{ \AA}$$

repräsentiert. Diese Vorgaben, in (3.1–15a,b) eingesetzt, zeigen, dass der Natriumstrahl um den Faktor $7,5 \cdot 10^{19}$ empfindlicher für den Gravitationseinfluss ist als die Lichtwelle. Gleiches gilt für die Empfindlichkeit gegenüber der translatorischen Bewegung. Bei der Empfindlichkeit gegenüber der rotatorischen Bewegung ist die Materiewelle um den Faktor $8,6 \cdot 10^9$ besser. Allerdings müssen zur umfassenden Bewertung der Kapazität des Quantendynamometers und vor allem im Hinblick auf vergleichende Betrachtungen mit konkurrierenden Sensoren noch weitere Kriterien berücksichtigt werden. Wohl aber sind solche Gegenüberstellungen derzeit wenig nützlich, da die tatsächlich realisierten Quantendynamometer bisher nicht über das experimentelle Stadium hinaus entwickelt sind.

3.2 Quantenmechanischer Erdrotationssensor

3.2.1 Erdrotationsbestimmung durch Quanteninterferenz von ${}^3\text{He}$

Die Grundlagen der Quanteninterferenz wurden in ABSCHNITT 2.3.2 dargestellt. Mit Hilfe der Quanteninterferenz ist es einer Gruppe an der Universität Kalifornien [vgl. hierzu SIMMONDS ET AL. (2001)] gelungen, die Erdrotation nachzuweisen. So steht im Vordergrund der nachfolgenden Ausführungen die Beschreibung des diesbezüglichen Experimentes. Die theoretischen Grundlagen zur Detektion der Erdrotation mittels Quanteninterferenz von ${}^3\text{He}$ sind durch (2.3–25)

gegeben. Im Hinblick auf die experimentelle Durchführung sind folgende Vorbetrachtungen notwendig. Es wird zwischen den Systemen

$$S_I = \text{Inertialsystem} \quad (3.2-1a)$$

$$S_E = \text{relativ } S_I \text{ rotierendes Erdsystem} \quad (3.2-1b)$$

$$S_G = \text{relativ } S_E \text{ gelagertes, lokales Horizontsystem} \quad (3.2-1c)$$

$$S_T = \text{relativ } S_G \text{ gelagertes Torussystem} \quad (3.2-1d)$$

unterschieden, wobei

$$S_E \parallel S_I, \quad (3.2-1e)$$

so dass hinsichtlich der Rotation von S_E relativ S_I

$$\overset{E}{w}_{i,EI} = (0, 0, \omega_E) \quad (3.2-2)$$

angesetzt wird.

Es wird nun der Quanteninterferenzterm (2.3–25c) diskutiert. Der hergeleitete Ausdruck gilt zunächst im Inertialsystem S_I . Es sollen nachfolgend eine analytische Darstellung in S_G und eine geeignete experimentelle Anordnung gefunden werden, so dass die Bestimmung der Erdrotation optimal erfolgen kann. Ausgang der Betrachtungen ist das Skalarprodukt

$$\overset{G}{w}_j \cdot \overset{G}{n}_j \cdot F, \quad \overset{G}{n}_j \cdot F \text{ gemäß (2.3-24b)}, \quad (3.2-3)$$

der sogenannte **rotatorische Fluss**. Für die Winkelgeschwindigkeit $\overset{G}{w}_{j,EI}$ gilt mit (3.2-2)

$$\overset{G}{w}_{i,EI} = \overset{G}{e}_{ij,E} \overset{E}{w}_{j,EI}. \quad (3.2-4a)$$

Mit (3.2-4a) wird angenommen, dass die Winkelgeschwindigkeit der Erde (3.2-2) die einzig wirkende Rotation ist, oder anders, der Torus wie auch das Superfluidum ruhen relativ S_G und partizipieren ausschließlich an der Rotation der Erde. Die Drehmatrix $\overset{G}{e}_{ij,E}$ ist bekannt [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), (3.6-2e)], und damit resultiert aus (3.2-4a)

$$\overset{G}{w}_{i,EI} = (0, \cos B \omega_E, \sin B \omega_E). \quad (3.2-4b)$$

In (3.2-4b) ist B die Breite des Ursprungs des lokalen Horizontsystems S_G . Für die Orientierung des Torussystems (3.2-1d) relativ zum lokalen Horizontsystem (3.2-1c) wird folgendes festgelegt. Die $3.T$ – Achse möge in Richtung Ost zeigen und die $1.T$ – Achse in Richtung Nadir. Wird das Torussystem, ausgehend von dieser Positionierung, um die $1.T$ – Achse gedreht, so ist

$$\overset{G}{e}_{ij,T} = \begin{pmatrix} 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2-5)$$

und wegen

$$\overset{G}{n}_i = \overset{G}{e}_{i3,T} \quad (3.2-6)$$

lässt sich für das Skalarprodukt

$$\overset{G}{w}_i \cdot \overset{G}{n}_i = \cos B \sin \alpha \omega_E \quad (3.2-7)$$

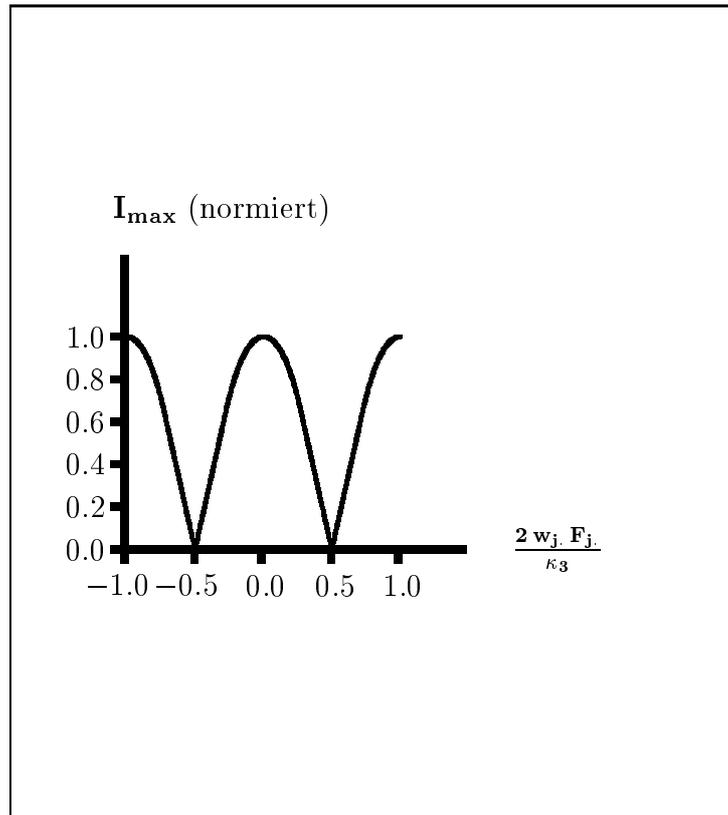


Abbildung 3.2.1–1: Interferenzmuster eines suprafluiden Quanteninterferenz–Kreisel

angeben. Der Winkel α beschreibt die Auslenkung des Torussystems in Richtung Nord relativ zur Ost–West–Richtung. Bei südlicher Auslenkung ist das Vorzeichen des Sinus negativ. SIMMONDS ET AL. nutzten in ihrem Experiment ein Quanteninterferometer, welches eine Torusfläche F von etwa 6 cm^2 aufwies [vgl. hierzu SIMMONDS ET AL. (2001)]. Damit und mit Nutzung von (3.2–7) sind in (2.3–25c) sämtliche Parameter bis auf die Zielgröße bekannt, so dass (2.3–25c) als **Beobachtungsgleichung zur Erdrotationsbestimmung durch Quanteninterferenz von ^3He** dient. Beobachtungsgröße ist der maximale Strom I_{\max} . Das genannte Experiment wurde derart durchgeführt, dass die $3.T$ – Achse in Stufen um $\pm\pi/2$ relativ zur Ost–West–Richtung ausgelenkt wurde, so dass das in ABBILDUNG 3.2.1–1 [s. Seite 66] dargestellte Interferenzmuster beobachtet werden konnte. Das bedeutet, der rotatorische Fluss, und damit die Winkelgeschwindigkeit der Erde ω_E , moduliert den Strom I_{\max} in analoger Weise wie der magnetische Fluss im Falle des Suprafluiden Quanten–Interferenz–Detektors (SQUID) [vgl. hierzu (2.3–19) und KOSE/MELCHERT (1991), Abbildung 29a)].

3.2.2 Stand und Weiterentwicklungen

ESKA gibt in seinem Bericht [vgl. hierzu ESKA (1999)] einen Überblick über quantenbasierte Kreisel. Dabei werden sowohl Funktionsprinzipien als auch der experimentelle sowie technische Entwicklungsstand beschrieben. Insbesondere die in Abschnitt 5 geäußerten Überlegungen sind interessant und lesenswert, so dass für weitergehende Betrachtungen auf ESKA (1999) verwiesen wird. In Bezug auf die Realisierung quantenbasierter Rotationssensoren sind zu nennen

NMR-Kreisel [vgl. hierzu WÄCKERLE ET AL. (1996)], Laserkreisel als auch suprafluide Helium-Kreisel. Der **NMR-Kreisel** nutzt das Phänomen der Kernspin-Resonanz (engl.: Nuclear Magnetic Resonance), welche in ABSCHNITT 2.2.4 beschrieben worden ist. Die **Laserkreisel** greifen auf den Sagnac-Effekt zurück [vgl. hierzu HEITZ/STÖCKER-MEIER (1998), ABSCHNITT 3.3.6]. Dieser Kreiseltyp ist zur Reife entwickelt und findet verbreitete Anwendung in der Navigation. Prinzipiell ermöglichen sie auch eine recht genaue Erdrotationsbestimmung, und in diesem Zusammenhang ist der Großringlaser der Fundamentalstation Wettzell zu nennen [vgl. hierzu KLÜGEL ET AL. (2005) und SCHREIBER (2000)]. Mit einem solchen Großringlaser können mittlerweile Genauigkeiten von etwa $10^{-8} \cdot \omega_E$ erreicht werden. Die dritte Gruppe innerhalb der quantenbasierten Rotationssensoren wird gebildet durch **suprafluide Helium-Kreisel**. Dabei ist grundsätzlich zu differenzieren zwischen den beiden Helium-Isotopen ^3He und ^4He . Die Isotope haben jeweils verschiedene Massen, weisen jeweils deutlich andere Übergangstemperaturen auf und besitzen unterschiedliche Kohärenzlängen, das heißt

$$\begin{aligned} 0,2 \text{ nm} &= \text{Kohärenzlänge für } ^4\text{He} \\ 50 \text{ nm} &= \text{Kohärenzlänge für } ^3\text{He} . \end{aligned}$$

Aus diesen Eigenschaften ergeben sich gewisse technische Schwierigkeiten, die letztlich zur Ausbildung grundsätzlich zweier Funktionsprinzipien geführt haben. Zum einen die Kreisel auf Grundlage der quantisierten Wirbelbildung, was im Tübinger Projekt „Quantenrot“ umgesetzt worden ist [vgl. hierzu FRIESCH ET AL. (1999)], und zum anderen die Kreisel auf Basis des Josephson-Effektes, wie in diesem Beitrag beschrieben. Allgemein hängt die Qualität, das soll meinen die Empfindlichkeit, suprafluider Helium-Kreisel von diversen Faktoren ab, die umfassend in ESKA (1999), ABSCHNITT 5, diskutiert werden. Eine maßgebliche Komponente ist die Beschaffenheit der Schwachstelle. So ist die optimale Lochgröße durch das Zweieinhalbfache der Kohärenzlänge des Superfluids festgelegt [vgl. hierzu ESKA (1999), ABSCHNITT 3.3]. Dieser Forderung entsprechende kleine Öffnungen lassen sich derzeit nicht für ^4He herstellen, so dass der Josephson-Effekt nicht für ^4He genutzt werden kann, sondern lediglich die quantisierte Wirbelerzeugung, was allerdings einen Genauigkeitsverlust von mehr als einer Größenordnung bedeutet. Abschätzungen zufolge werden derartige Gyroskope maximal Genauigkeiten von $10^{-6} \cdot \omega_E$ erzielen, was der Kapazität von Laserkreiseln entspricht. Mehr Optimismus versprechen die in diesem Beitrag vorgestellten, Josephson-Effekt basierten ^3He -Kreisel. Von diesen Rotationssensoren erwartet man Genauigkeiten von deutlich mehr als $10^{-6} \cdot \omega_E$, je nachdem $10^{-8} \cdot \omega_E$ bis $10^{-9} \cdot \omega_E$, was bedeutet, dass Konkurrenz zur VLBI mit $10^{-8} \cdot \omega_E$ möglich ist. Es wird darauf hingewiesen, dass die am Ende des ABSCHNITTES 3.1.2 gemachten Aussagen im Hinblick auf vergleichende Betrachtungen mit alternativen Sensoren auch hier gelten. Das heißt, erst wenn die „industrielle Reife“ der suprafluiden Helium-Kreisel gegeben ist, lassen sich eindeutig Vor- und Nachteile in Relation zu anderen Kreiseltypen angeben.

3.3 Cäsiumatomuhren

3.3.1 Cäsiumatom

Atomare Basis einer Cäsiumuhr ist das **Cäsium-Atom** aus der Gruppe der Alkali-Metalle, wobei das Element ^{133}Cs das einzig stabile Isotop darstellt. Mit Bezug auf (2.1-4) ist **das Atom ^{133}Cs im Grundzustand** wie folgt charakterisiert

$$S = 1/2 = \text{Spinquantenzahl der Elektronenhülle} \quad (3.3-1a)$$

$$L = 0 = \text{Bahndrehimpuls-Quantenzahl der Elektronenhülle} \quad (3.3-1b)$$

$$J = 1/2 = \text{SBK-Quantenzahl der Elektronenhülle} \quad (3.3-1c)$$

$$I = 7/2 = \text{Kernspin-Quantenzahl,} \quad (3.3-1d)$$

so dass sich kurz, gemäß (2.1-4a),

$${}^2S_{1/2}, \quad S \text{ gemäß (2.1-4f),} \quad (3.3-2a)$$

ergibt, und für die Gesamtdrehimpuls-Quantenzahl (2.2-20b) gilt mit (3.3-1c,d)

$$F_1 = 3 = \text{Energiezustand } E_1 \quad F_2 = 4 = \text{Energiezustand } E_2. \quad (3.3-2b)$$

Die in (3.3-1) mit Großbuchstaben gekennzeichneten Quantenzahlen verweisen auf ein Mehr-elektronensystem [vgl. hierzu die Ausführungen nach (2.2-22b)]. In diesem Zusammenhang muss deutlich herausgestellt werden, dass S gemäß (3.3-1a) und S gemäß (2.1-4f) zu unterscheiden sind. Im **ersten angeregten Zustand des ^{133}Cs** bleibt die Eigenschaft (3.3-1a), wohl ist anstelle von (3.3-1b)

$$L = 1, \quad (3.3-3a)$$

woraus für die SBK-Quantenzahl nach (2.2-17b)

$$J_1 = 3/2 \quad J_2 = 1/2 \quad (3.3-3b)$$

folgt, und damit der erste angeregte Zustand aufspaltet in

$${}^2P_{3/2} \quad {}^2P_{1/2}. \quad (3.3-3c)$$

Mit (3.3-2a,b) sind verschiedene Hyperfein-Energiezustände verbunden, deren Differenz sich aus (2.2-21d) berechnet. Rekurrierend auf (2.2-22f) ergibt sich dann

$$\Delta V_{HFS} = E_2 - E_1 = A F_2 = 4A, \quad (3.3-4a)$$

$$A = \text{Hyperfeinfaktor gemäß (2.2-22d),} \quad (3.3-4b)$$

woraus für die Frequenz

$$\nu = A F_2 / h \quad (3.3-4c)$$

folgt. Misst man die Cäsiumfrequenz (3.3-4c) in der Einheit der Ephemeridensekunde, ergibt sich als Wert für die **Übergangsfrequenz**

$$\nu = 9,192631770 \text{ GHz}. \quad (3.3-4d)$$

3.3.2 Konventionelle Cäsiumatomuhr

Originäres Funktionsprinzip der Cäsiumatomuhr ist das **Atomstrahlresonanzverfahren nach Rabi**. Die ABBILDUNG 3.3.2-1 [s. Seite 69] illustriert diese so genannte Rabi-Methode [vgl. zur Atomstrahlresonanz nach Rabi z.B. AUDOIN (1992)]. So wird zunächst in einem Ofen O ein gebündelter Strahl von Atomen erzeugt, ein **thermischer Atomstrahl**, der sich zusammensetzt aus Teilchen im Energiezustand E_1 wie auch solchen im Energiezustand E_2 . Ohne äußeren Einfluß laufen die Atome ausgehend vom Ofen längs der *1.a-Achse* zum Detektor D , der dann ein Maximum einfallender Atome registriert. Die Magneten $MF1$ und $MF2$ erzeugen äußere,

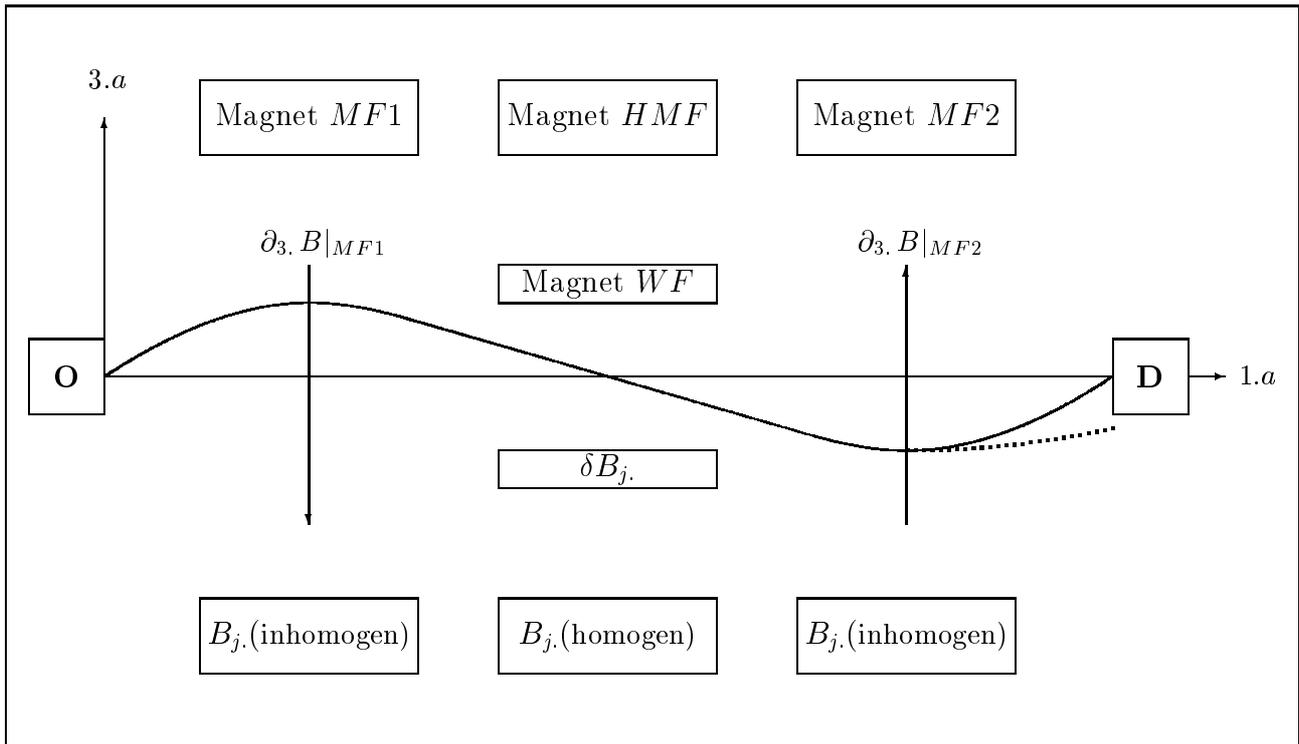


Abbildung 3.3.2-1: Schematisierte Atomstrahlresonanz nach Rabi

inhomogene Magnetfelder, und werden sie eingeschaltet, so bewirkt die aus den Magnetfeldern resultierende Kraft eine Ablenkung der Atome aus der ursprünglichen Bewegungsrichtung, wie mit (2.2-31,32) gezeigt. Dabei werden Atome im Energiezustand E_2 anders abgelenkt als diejenigen im Zustand E_1 , nämlich so, dass Atome im Zustand E_2 nicht mehr Komponente des eigentlichen Strahls sind und damit ein **zustandsselektierter Atomstrahl** vorliegt. Durch das Hintereinanderordnen der Felder $MF1$ und $MF2$ mit der Eigenschaft (2.2-33), das heißt mit entgegengesetzten Feldgradienten, wird die Gesamtablenkung für den zustandsselektierten Atomstrahl kompensiert, so dass sämtliche Atome des Strahls nach wie vor, wie in der Abbildung durch die durchgezogene Linie dargestellt, zum Detektor gelangen. Zusätzlich zu $MF1$ und $MF2$ wird nun das in der Mitte angeordnete, homogene Magnetfeld HMF eingeschaltet, und des Weiteren wird das homogene Magnetfeld mit einem zu HMF transversalen, magnetischen Wechselfeld WF überlagert [vgl. hierzu (2.2-26)], so dass im Falle der Resonanz, also bei Erfüllung von (2.2-29g) der Kernspin sowohl, aufgrund des homogenen Magnetfeldes, eine Präzessionsbewegung mit der Frequenz ω_0 [vgl. hierzu allgemein (2.2-24,25) sowie insbesondere (2.2-30c,d)] durchführt als auch, aufgrund des magnetischen Wechselfeldes, „umklappt“ wie mit (2.2-30b) gezeigt. Mit dem Einstrahlen der Resonanzfrequenz sind nicht nur kinematische Prozesse verbunden, sondern auch Änderungen des Energiezustandes, das heißt „Übergänge“ vom Energiezustand E_1 nach E_2 . Damit verbunden ist dann das bereits erwähnte „Umklappen“, nämlich ein negatives, effektives magnetisches Moment, welches ein anderes Ablenkverhalten zeigt, was in der Abbildung durch die gestrichelte Linie illustriert wird, so dass die Atome im Zustand E_2 nun nicht mehr zum Detektor gelangen und dieser damit ein Minimum aufzeichnet. Am Detektor registriert wird also die Intensität, respektive die Anzahl der einfallenden Atome in Abhängigkeit von der eingespeisten Frequenz, das heißt der Frequenz des magnetischen Wechselfeldes $\bar{\omega}$, (2.2-26e). Dieses Intensitäts- bzw. **Nachweissignal** I_D , nämlich der Nach-

weis der Resonanz, das meint die Erfüllung der Bedingung (2.2–29g), ist proportional zu der Wahrscheinlichkeit, dass eine Zustandsänderung eingetreten ist. Die graphische Darstellung des Nachweissignals I_D als Funktion der Frequenz $\bar{\omega}$, der Testfrequenz, ergibt die so genannte **Resonanzkurve**. Beispielfhaft zeigt ABBILDUNG 3.3.2–2 [s. Seite 70] eine Ramsey–Resonanzkurve, denn diese zeigt ein Maximum, welches am Detektor beobachtet wird. Diese Resonanzkurve gibt

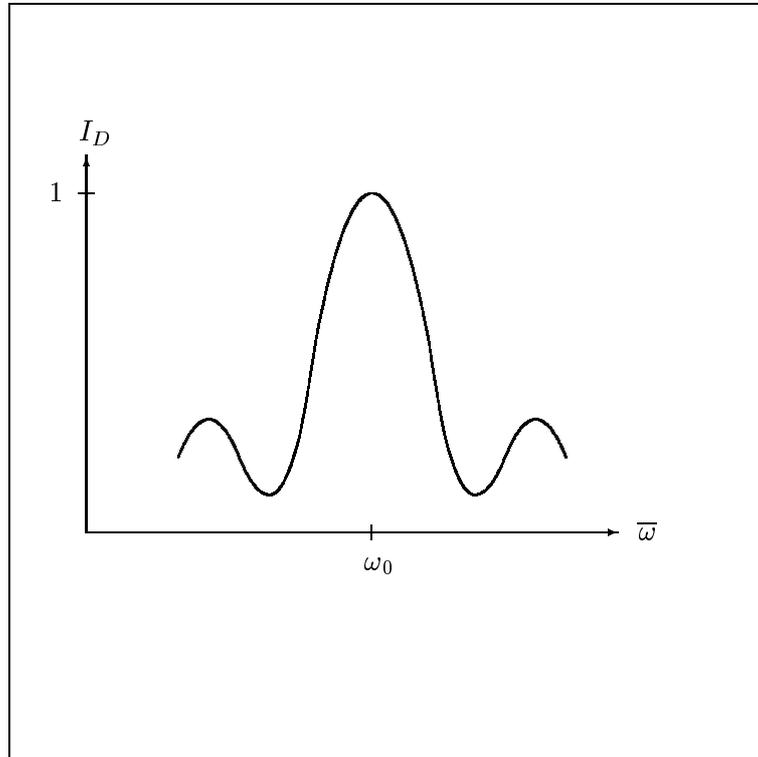


Abbildung 3.3.2–2: Messsignal auf 1 normiert (exemplarisch)

Auskunft über die Übereinstimmung von Resonanz- und Testfrequenz. Das bedeutet, aus dem Nachweissignal muss ein Regelsignal zur Steuerung von $\bar{\omega}$ erzeugt werden, so dass die Testfrequenz gradatim der Resonanzfrequenz angepasst wird. Optimal lässt sich die Resonanzfrequenz genau dann bestimmen, wenn die Linienbreite W , das heißt die gemessene Breite des Maximums in halber Höhe, klein ist. Für die **Linienbreite der Rabi-Resonanz** gilt zum Beispiel [vgl. hierzu VANIER/AUDOIN (1989), VOLUME 2, (5.2.29)]

$$W = 5,02/t, \quad t = l/v, \quad (3.3-5a)$$

wobei

$$t = \text{Wechselwirkungszeit der Atome mit dem Wechselfeld (2.2-26d)} \quad (3.3-5b)$$

$$v = \text{Geschwindigkeit der Atome} \quad (3.3-5c)$$

$$l = \text{geometrische Länge der Wechselwirkungsregion.} \quad (3.3-5d)$$

Gemäß (3.3–5a) ist die Linienbreite W genau dann klein, wenn t groß ist bzw. v klein und l groß. Allerdings lässt sich (3.3–5b) nicht beliebig variieren, sondern obliegt einer Restriktion, da die geometrische Länge der Wechselwirkungsregion, (3.3–5d), der Wellenlänge der Bestrahlung angepasst sein muss.

Die Rabi-Methode diene ursprünglich dem Zweck des Nachweises von magnetischen Dipolübergängen bzw. diene zum Studium der magnetischen Eigenschaften von Atomen und Molekülen sowie zur Analyse von magnetischen Wechselwirkungen innerhalb der Moleküle. Aufgrund dieser Zweckbestimmung hatte die Rabi-Methode im Hinblick auf die Nutzung zur hochgenauen Zeitbestimmung auch ihre Defizite, so dass RAMSEY dieses Verfahren weiterentwickelte. Die **Atomstrahlresonanz nach Ramsey** hat sich schließlich als Funktionsprinzip der konventionellen Cäsiumatomuhren etabliert [vgl. zur Atomstrahlresonanz nach Ramsey AUDOIN (1992)]. Dabei bleibt das Prinzip der Rabi-Methode grundsätzlich bestehen, allerdings erfährt diese dahingehend eine Modifikation, als dass die *HMF-Region* nicht nur ein transversales, magnetisches Wechselfeld WF integriert, sondern nunmehr zwei WF , eines am Anfang und eines am Ende der *HMF-Region*. Diese Anordnung ist in ABBILDUNG 3.3.2–3 [s. Seite 72] dargestellt, und sie verbessert die Leistungsfähigkeit einer Atomuhr wesentlich, da enge Resonanzlinien erzeugt werden können. Die **Linienbreite der Ramsey-Resonanz** wird von VANIER/AUDOIN (1989), VOLUME 2, (5.2.37), zum Beispiel mit

$$W \approx \pi/T, \quad T = L/v, \quad (3.3-6a)$$

$$T = \textit{Verweildauer im Resonator} \quad (3.3-6b)$$

$$v = \textit{Geschwindigkeit der Atome} \quad (3.3-6c)$$

$$L = \textit{Abstand der beiden WF (Resonatorlänge)} \quad (3.3-6d)$$

angegeben. So ist also die Linienbreite der Ramsey-Resonanzkurve genau dann klein, wenn die Verweildauer T im Resonator groß ist, das heißt, der Abstand L zwischen den beiden WF sollte groß sein, bzw. die Geschwindigkeit der Atome klein. Der Abstand l in der ABBILDUNG 3.3.2–3 [s. Seite 72] ist gemäß (3.3–5d). Aus (3.3–6a) folgt das Bestreben, Atomuhren möglichst groß zu bauen, da die Resonatorlänge wesentlich zur Genauigkeitssteigerung beiträgt. So ist die Resonatorlänge der Cäsiumuhr *NBS 6* des amerikanischen National Institute of Standards and Technology (NIST) $3,7\text{ m}$, wohingegen kommerzielle Cäsiumatomuhren lediglich eine Länge von $0,15\text{ m}$ aufweisen. Bei anderen Laboruhren ist $L = 0,80\text{ m}$, wie zum Beispiel bei den primären Uhren der PTB. Daraus resultiert dann eine Linienbreite [vgl. hierzu (3.3–5a,6a)] von 60 Hz , und bei den neueren Cäsiumuhren der PTB, *CS3* und *CS4*, konnte diese sogar auf 44 Hz herabgesetzt werden. Der Gesamttablauf gestaltet sich bei der Ramsey-Methode dann wie folgt. Der im Ofen O erzeugte, thermische Atomstrahl passiert den Magneten MF , der, wie auch bei der Rabi-Methode, Atome im Energiezustand E_2 herausfiltert, so dass ein zustandsselektierter Strahl entsteht. Dieser Strahl gelangt in die *HMF-Region* mit den zwei räumlich getrennten Wechselfeldern WF , wo ein Übergang zwischen den Hyperfeinstruktur-niveaus $E_1 \rightarrow E_2$ [vgl. hierzu (3.3–4)] induziert wird. Nach Austritt des Atomstrahls aus der *HMF-Region* werden durch einen zweiten Magneten MF , der dem ersten identisch ist, sämtliche Atome im Energiezustand E_2 zum Detektor gelenkt, wohingegen alle Teilchen im Zustand E_1 den Detektor nicht erreichen. Der Detektor erfasst somit ein Maximum einfallender Atome [vgl. hierzu ABBILDUNG 3.3.2–2 auf Seite 70]. Allgemein sind die konventionellen Cäsiumuhren weit verbreitet und bereits seit langer Zeit in Betrieb. So wird seit 1969 an der Physikalisch-Technischen Bundesanstalt (PTB) in Braunschweig die Zeiteinheit durch die Cäsiumuhr *CS1* realisiert. Die PTB entwickelte dann weitere Uhren bis hin zur *CS4*. Bei diesen Uhren wird in einem Ofen mit einer Temperatur von etwa 100° C ein thermischer Atomstrahl erzeugt, und, wie oben dargelegt, werden Magneten zur Geschwindigkeitsselektion eingesetzt, nämlich Quadrupol- und Hexapolmagneten bei *CS1* und *CS2*. Auf diese Weise werden für die Atome mittlere Geschwindigkeiten von $\leq 100\text{ m/s}$

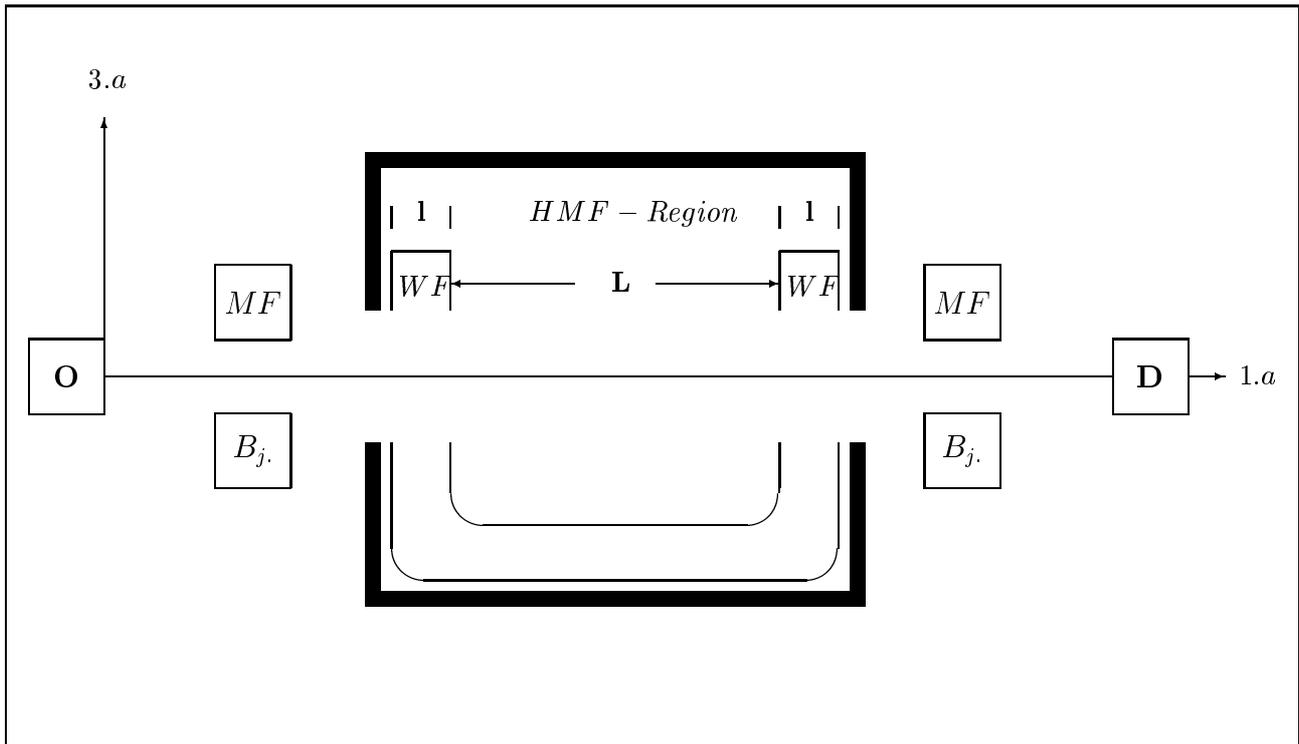


Abbildung 3.3.2-3: Atomstrahlresonanz-Apparatur nach Ramsey

generiert, und dies trägt, wie zu (3.3-5) und (3.3-6) beschrieben, zur Genauigkeitssteigerung bei. Ebenfalls werden damit systematische Frequenzfehler herabgesetzt, die proportional zur Geschwindigkeit der Atome sind.

3.3.3 Cäsiumatomuhr mit Fontärentechnik

Eine Cäsiumatomuhr auf Grundlage einer Atomfontäne, kurz Cäsiumfontäne genannt, unterscheidet sich in ihrem Funktionsprinzip nicht prinzipiell von einer herkömmlichen Cäsiumatomuhr, die nach der Atomstrahlresonanzmethode von Ramsey arbeitet. Allerdings verfahren einzelne Funktionselemente nach technisch anderen Prinzipien. Die ABBILDUNG 3.3.3-1 [s. Seite 73] zeigt schematisch den Aufbau einer Cäsiumfontäne. Zur Sammlung der Atome dient die **magneto-optische Falle** „MOT“ wie sie in ABSCHNITT 2.3.4 beschrieben ist, und nach Kollektion der Atome schließt sich eine **Melassenphase** an, um die Atome auf etwa $2 \mu K$ abzukühlen. Des Weiteren bedarf es, wie auch bei der herkömmlichen Cäsiumatomuhr, einer **Zustandsselektion**, die hier in der Weise erfolgt, dass die Atome in den Energiezustand E_2 gebracht werden. Derart aufbereitet werden die Atome in Zenitrichtung beschleunigt, wobei dem Start unmittelbar **die erste Passage des Mikrowellenresonators** folgt. Erreichen die Cäsiumatome auf ihrer ballistischen Bahn eine relative Flughöhe von etwa einem Meter, kehren sie schließlich unter Einwirkung der Schwerkraft um und durchfliegen den Mikrowellenresonator erneut, so dass der **Übergang vom Energiezustand E_2 nach E_1** induziert wird. Schließlich gelangen die Atome in die **Nachweiszone**, wo der Quantenzustand bestimmt und ein **Dektorsignal** ausgegeben wird, aus welchem die so genannte Resonanzkurve hervorgeht. Da die effektive Wechselwirkungszeit nun etwa $0,6 s$ beträgt, was im Vergleich zur herkömmlichen Cäsiumatomuhr recht lange ist, können Resonanzkurven mit einer **Linienbreite** von nur $0,8 Hz$

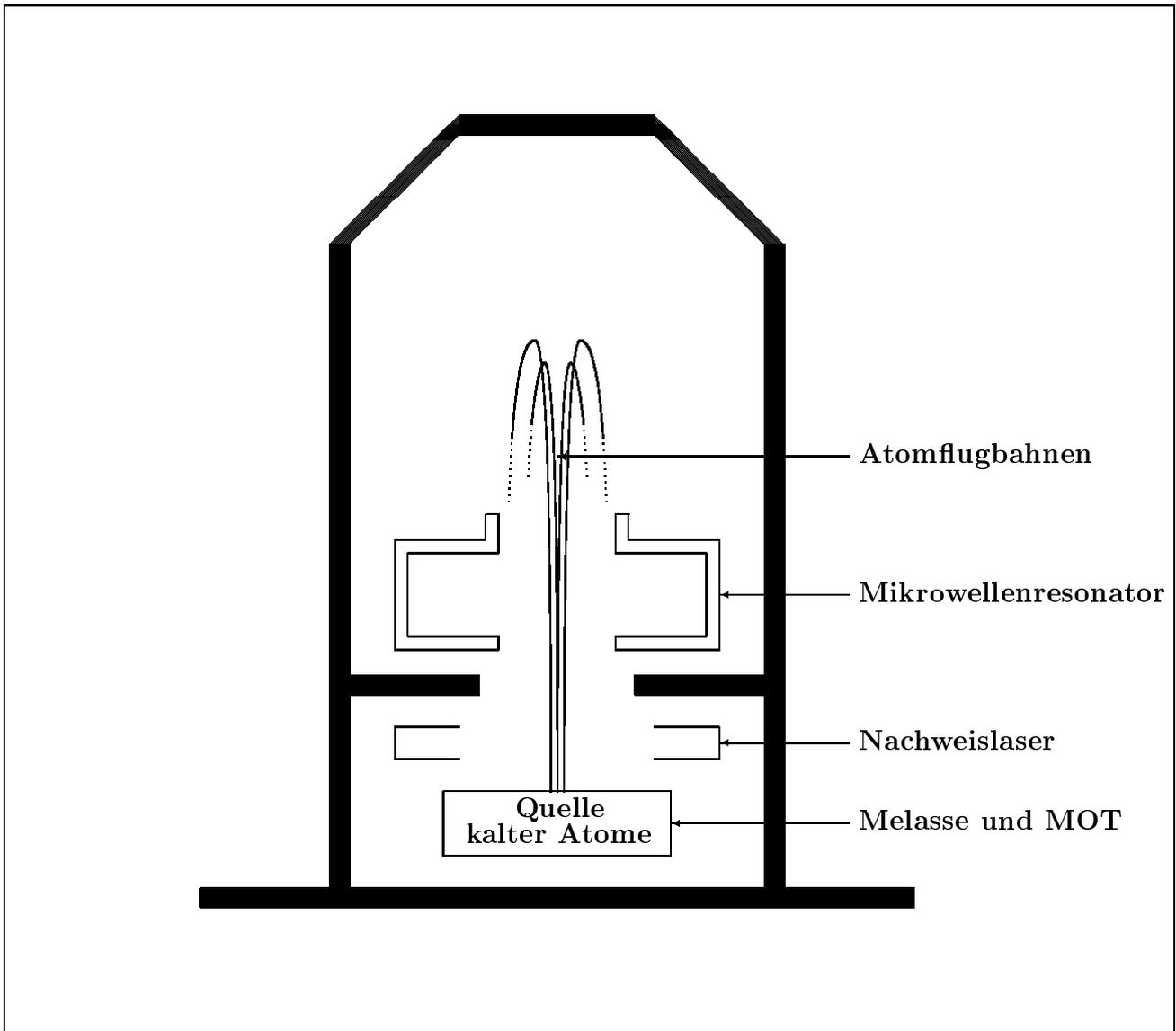


Abbildung 3.3.3–1: Schematischer Aufbau einer Cäsiumfontäne

erzeugt werden [im Hinblick auf eine umfassende Beschreibung der Cäsiumfontäne der PTB siehe BAUCH ET AL. (1999)].

Abschließend wird dargestellt, dass die Cäsiumfontäne einen enormen Fortschritt relativ zu den herkömmlichen Atomuhren bedeutet, wobei die Entwicklung dieser Uhren noch nicht abgeschlossen ist. Maßgeblich werden die **qualitativen Eigenschaften einer Atomuhr** beschrieben durch die Frequenzinstabilität und die Unsicherheit. Unter dem Begriff **Unsicherheit** versteht man im Kontext der Zeitmessung die Abweichung zwischen der festgelegten Dauer einer Sekunde (Sollwert der Sekundendefinition) und der realisierten Sekundendauer (Messwert). Die **Frequenzinstabilität** wird allgemein durch die Allan–Varianz zum Ausdruck gebracht, zum Beispiel in der Form

$$\sigma_y(\tau) = a [Q (S/N) \tau^{1/2}]^{-1}, \quad (3.3-7a)$$

Tabelle 3.3.3–1: Qualitätsmerkmale verschiedener Atomuhrentypen

Uhrentyp	Wechselwirkungszeit [s]	Linienbreite [Hz]	Instabilität $\sigma_y(\tau) \tau^{1/2}$	Unsicherheit
herkömmliche Cäsiumuhr	0,0085	60	$4 \cdot 10^{-12}$	$1,5 \cdot 10^{-14}$
Cäsiumfontäne	0,6	0,8	$1,3 \cdot 10^{-13}$	$1,1 \cdot 10^{-15}$

[vgl. hierzu z.B. GIBBLE/CHU (1992)]. Darin bedeuten

$$S/N = \text{Signal-Rausch Verhältnis} \quad (3.3-7b)$$

$$\tau = \text{Mittelungszeit} \quad (3.3-7c)$$

$$Q = \text{Liniengüte} . \quad (3.3-7d)$$

Die Größe a ist ein numerischer Faktor, und die Liniengüte ist über den Quotienten

$$Q = \nu/\Delta\nu , \quad \nu = \text{Resonanzfrequenz} , \quad (3.3-7e)$$

definiert, wobei

$$\Delta\nu = (2T_W)^{-1} = \text{Linienbreite der Resonanzkurve} . \quad (3.3-7f)$$

In (3.3–7f) ist T_W die **Wechselwirkungszeit**, und wie aus (3.3–7a,e) ersichtlich, ist die Frequenzinstabilität genau dann klein, wenn die effektive Wechselwirkungszeit groß und die Linienbreite der Resonanzkurve klein ist. Nun kann durch Sisyphus–gekühlte Atome eine Gaswolke bzw. eine optische Melasse erzeugt werden, die durch einen Stoß in Zenitrichtung einer ballistischen Flugbahn folgt, so dass für die Flugzeit der Melasse und damit für die Wechselwirkungszeit T_W in erster Näherung

$$T_W = 2v_S/g_S \quad (3.3-7g)$$

gilt. Der Parameter g_S bezeichnet die Schwerebeschleunigung der Erde und v_S kennzeichnet die Startgeschwindigkeit der Melasse, die bei etwa $2 - 4 \text{ m s}^{-1}$ liegt. Mittlerweile können Wechselwirkungszeiten von nahezu 1 s [vgl. hierzu COHEN–TANNOUJDI (1998)] erreicht werden, was in Relation zu den herkömmlichen Atomuhren eine erhebliche Steigerung bedeutet und, wie aus (3.3–7) folgend, zu einer kleineren Frequenzinstabilität führt. Zusammengefasst stellt die TABELLE 3.3.3–1 [s. Seite 74] die beschriebenen Größen für herkömmliche Cäsiumatomuhren und Cäsiumfontänen mit ihren numerischen Beträgen zum Vergleich gegenüber, wobei die eingetragenen Werte keine Spezifikationen, sondern typische Beträge sind, wie sie für die aufgeführten Uhrentypen in der Literatur angegeben werden. Des Weiteren ist zu berücksichtigen, dass die Entwicklung der Cäsiumfontänen noch nicht abgeschlossen ist, und aus diesem Grunde sind weitere Verbesserungen auch zukünftig zu erwarten [vgl. hierzu COHEN–TANNOUJDI (1998), ABSCHNITT IV.A.].

3.4 Quantenmechanisches Gravimeter

3.4.1 Atomfontäne als Interferometer

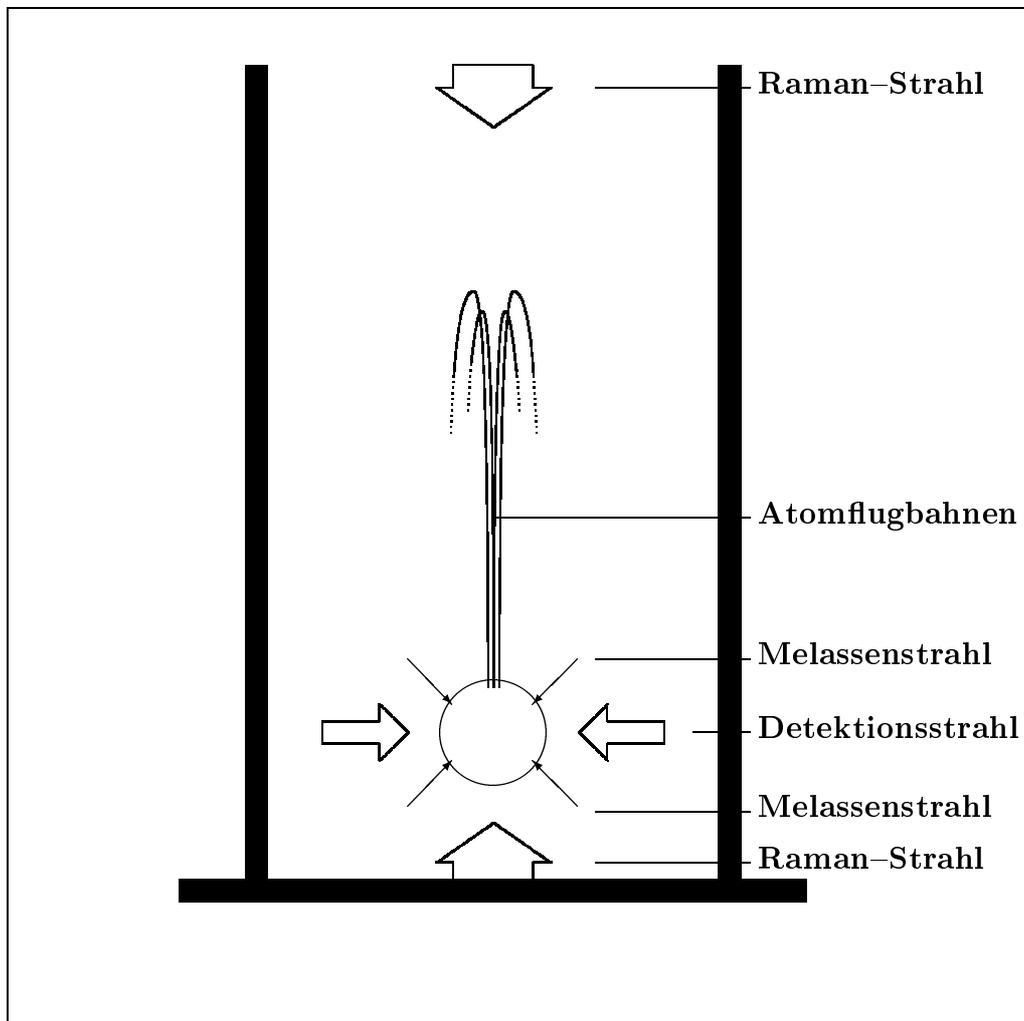


Abbildung 3.4.1–1: Schema einer Fontäne zur Nutzung als Atominterferometer

Zunächst muss erwähnt werden, dass das Verfahren der Atominterferometrie in Varianten umgesetzt ist. Es existieren Instrumente, die zur Grundlage die Beugung am Spalt oder die Beugung am Gitter haben. Ein vollkommen anderer Ansatz ist das Lichtpuls-Interferometer, das mechanische Effekte nutzt, um einen Materiestrahl räumlich zu trennen und um diesen zur Interferenz zu bringen. Solche Interferometer verwenden so genannte Raman-Übergänge, so dass man sie auch als **Raman-Interferometer** bezeichnet. Grundsätzlich kann auch eine Atomfontäne wie sie im ABSCHNITT 3.3.3 beschrieben worden ist als Raman-Interferometer eingesetzt werden. Auf diese Weise wird ein vertikales Raman-Interferometer realisiert, das frei fallende Atome nutzt. Diese Bauart führt zu „langen“ Beobachtungszeiten und macht damit hochgenaue Messungen möglich.

Die ABBILDUNG 3.4.1–1 [s. Seite 75] zeigt ein klassisches Schema eines Raman-Interferometers auf Grundlage einer Fontäne. Ein Messzyklus hat folgenden Ablauf. Zuerst werden die Atome

me in einer magneto-optischen Falle [vgl. hierzu ABSCHNITT 2.3.4] gesammelt. Nach Kollektion der Atome werden diese mit den im ABSCHNITT 2.3.3 beschriebenen Verfahren gekühlt. Mit Erreichen der Minimaltemperatur erhalten die Atome einen aufwärts gerichteten Stoß, so dass sie fortan einer ballistischen Bahn folgen [vgl. hierzu ABSCHNITT 2.3.1]. Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt etwa 3 m s^{-1} , und dem Experiment von PETERS, CHUNG und CHU (2001) folgend steigen die Atome etwa $0,46 \text{ m}$ hoch. Bei dieser Höhenmarke kehren die Atome infolge des Einflusses der Schwere um und gelangen schließlich in die Detektionszone, wo die Phasendifferenz (2.3–10) beobachtet wird.

3.4.2 Atominterferometrische Schweremessungen

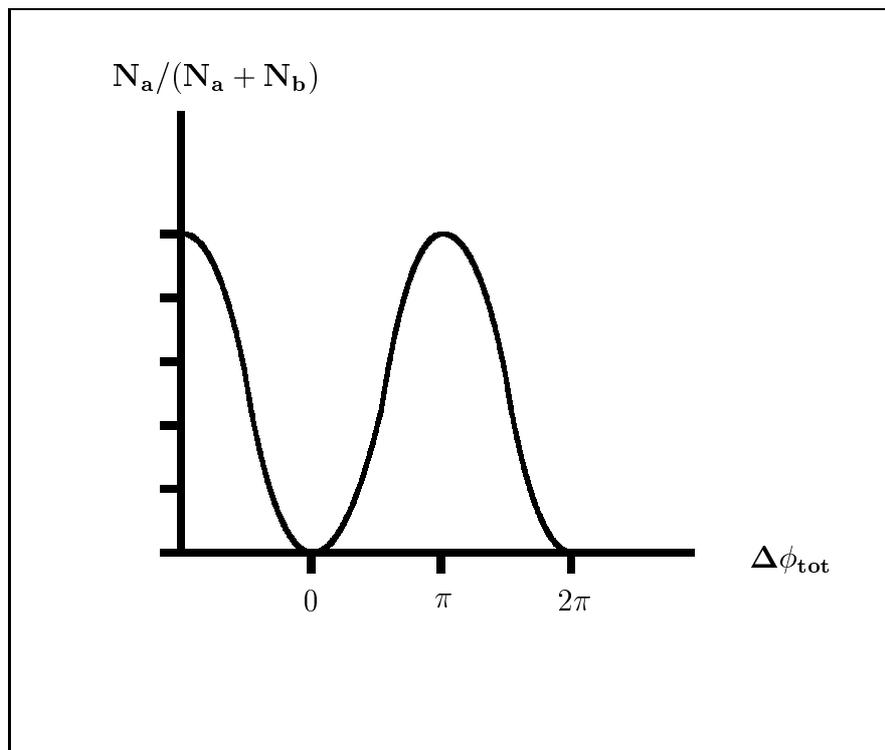


Abbildung 3.4.2–1: Typisches Interferenzmuster eines vertikalen Atominterferometers

Im Folgenden wird die Leistungsfähigkeit atominterferometrischer Schweremessungen dargestellt. Wie im ABSCHNITT 2.3.1 ausgeführt, ist die grundlegende Beobachtungsgröße der atominterferometrischen Fontäne die Phasendifferenz (2.3–10), und gemäß (2.3–11) wird diese erfasst durch Bestimmung der Besetzung der Zustände $|a\rangle$ und $|b\rangle$. Die Phasen des Lasers werden nun derart abgestimmt, dass

$$\varphi_1 = \varphi_0 \quad (3.4-1a)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 + \delta\varphi, \quad (3.4-1b)$$

was anstelle von (2.3–10) zu

$$\Delta\phi_{\text{tot}} = k_{\text{eff}}(-gT^2) - \delta\varphi \quad (3.4-1c)$$

führt. Die **Frequenzverschiebung** $\delta\varphi$ zwischen φ_2 und den Phasen (3.4–1a) dient dazu, die Phasendifferenz $\Delta\phi_{tot}$ zu variieren. Um diesen Sachverhalt zu veranschaulichen, wird von der Gleichung

$$\Delta\phi_{tot} = 0 \tag{3.4–1d}$$

ausgegangen. (3.4–1d) sagt aus, dass nach dem letzten Lichtpuls sämtliche Atome im Zustand $|a\rangle$ sind. Wird nun die Frequenz des letzten Lichtpulses und damit die Phase modifiziert, ändern sich folglich auch die Besetzungszustände, und es resultiert das Interferenzmuster der **ABBILDUNG 3.4.2-1** [s. Seite 76]. Schließlich wird die Zielgröße, nämlich die Schwerebeschleunigung g , aus der Datenanalyse der Interferenzsignale bestimmt.

Verschiedene Gruppen haben die Schwerebeschleunigung mit atominterferometrischen Verfahren bestimmt. So konnten zum Beispiel PETERS, CHUNG und CHU (2001) den Parameter g mit einer relativen Genauigkeit von $\Delta g/g = 3 \cdot 10^{-9}$ bestimmen. Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit dem Wert von einem klassischen Gravimeter brachte eine gute Übereinstimmung, nämlich eine Koinzidenz innerhalb $(7 \pm 7) \cdot 10^{-9}g$. Diese experimentellen Resultate illustrieren die Stärke der atominterferometrischen Methoden, zumal die Entwicklung in diesem Bereich noch nicht abgeschlossen ist. Man erwartet weitere Verbesserungen und damit verbunden relative Genauigkeiten von 10^{-10} und mehr. Abschließend wird herausgestellt, dass die Atominterferometrie auch für andere geodätische Zwecke, wie zum Beispiel zur Messung von Trägheitskräften oder zur Bestimmung der Erdrotation, von Bedeutung ist.

Kapitel 4

Zukünftige Entwicklungen

Nach wie vor wird auf den Gebieten der Atom- und Kernphysik intensiv und umfangreich geforscht. Das gilt nicht nur für die Physik, denn die **Quantenphysik ist interdisziplinär**. Das heißt, in den verschiedensten naturwissenschaftlichen Disziplinen ist allgemein ein Trend hin zu mikrophysikalischen Methoden festzustellen, um die klassischen Verfahren zu ergänzen. Erkennt man darüber hinaus in der Physik der kleinsten Teilchen die Wurzel für das Verständnis von Naturerscheinungen, so besitzt die Atomphysik als die Wissenschaft von der Erforschung der Struktur von Atomen und der Wechselwirkung von Atomen eine zentrale Stellung, was durch die **ABBILDUNG 4-1** [s. Seite 80], entnommen aus DEMTRÖDER (1996), **ABSCHNITT 1**, veranschaulicht wird. Das Schaubild lässt ebenfalls die verschiedenen Berührungspunkte der Atom- bzw. der Quantenphysik zur Geodäsie erkennen. Zum Beispiel bildet die Physikalische Geodäsie mit der Atmosphären- und der Geophysik eine inhaltliche Schnittmenge, so dass derzeitige wie auch zukünftige Ergebnisse atmosphären- und geophysikalischer Forschung, unter Berücksichtigung der Quantenphysik, auch **Erkenntnisgewinn und Weiterentwicklung für die Geodäsie** bedeuten werden. Denkbar sind zum Beispiel neue Sichtweisen und Aspekte in Bezug auf das Erdmagnetfeld oder auch die Ionosphäre und Troposphäre, denn letztlich beruhen die komplexen Vorgänge im gasförmigen Raumbereich der Erde auf der Wechselwirkung der Photonen des Sonnenlichtes mit den Molekülen der Luft sowie auf Stößen der Moleküle untereinander. Die **Bedeutung der Quantenphysik für die Metrologie** wurde bereits in **ABSCHNITT 1.2** herausgestellt und der Wandel von makroskopischen in atomare Maßeinheiten beschrieben.

In **KAPITEL 3** wurde im Hinblick auf derzeitige **Technische Anwendungen** und gerätetechnische Entwicklungen ein Überblick für die Geodäsie gegeben. Sieht man einmal von den herkömmlichen Atomuhren ab, so bedürfen sämtliche vorgestellten Instrumente der Weiterentwicklung bis hin zur industriellen bzw. kommerziellen Reife. Das gilt insbesondere für das Quantendynamometer [vgl. hierzu **ABSCHNITT 3.1**] sowie für das Quanteninterferometer [vgl. hierzu **ABSCHNITT 3.2**], weiter für die Cäsiumfontänen [vgl. hierzu **ABSCHNITT 3.3.3**] und nicht zuletzt für das Quantengravimeter [vgl. hierzu **ABSCHNITT 3.4**], die sämtlich derzeit lediglich als Prototypen existieren. Eine Beteiligung der Geodäsie an diesem Prozess der Vervollkommnung der Anwendungen würde theoretische wie auch praktische Arbeiten anregen, und rekurrierend auf den letztgenannten Gesichtspunkt vor allem dem geodätischen Instrumentenbau an den Hochschulen neue Perspektiven erschließen. Nicht unerwähnt bleiben soll in diesem Kontext der aktuelle Fortschritt im Bereich der hochgenauen Zeitmessung. So gelten diesbezüglich die **optischen Atomuhren** als aussichtsreiche Innovation. Essentielle Komponente einer solchen Uhr ist der optische Frequenzkamm, der die Schwingungen einer optischen Welle erfasst, die von einem Atom emittiert wird. Für seine Beiträge zur Entwicklung der optischen Frequenzkammtechnik wurde

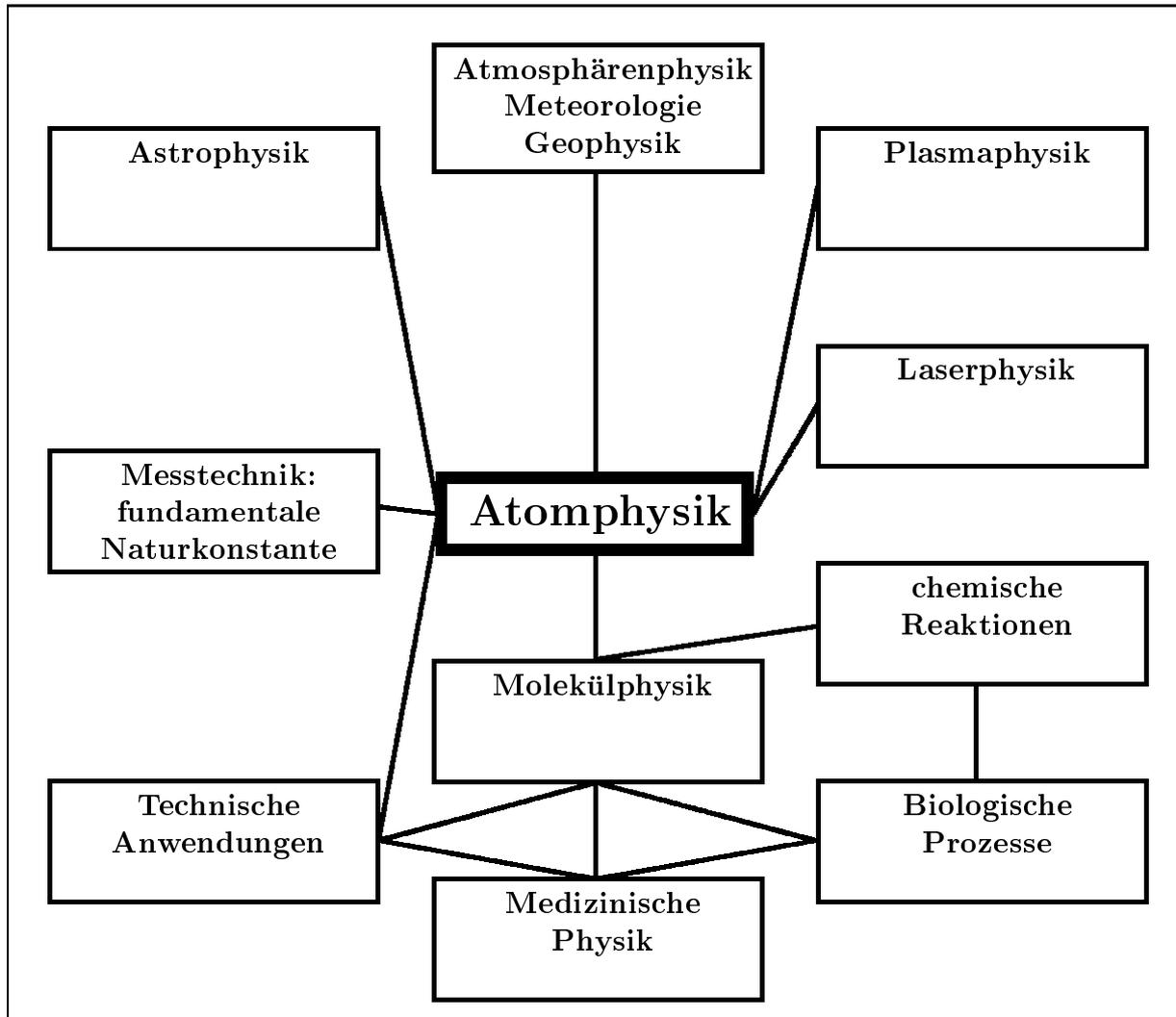


Abbildung 4-1: Zentrale Bedeutung der Atomphysik

THEODOR W. HÄNSCH vom Max-Planck Institut für Quantenoptik mit dem Physik-Nobelpreis 2005 gewürdigt.

Ein Blick in die Zukunft geht von der Situation aus, dass, wie eingangs dargestellt, die Quantenphysik auch weiterhin ein expandierendes Forschungsgebiet ist, so dass die diesbezüglichen Ergebnisse der Experimentalphysik permanent neue Arbeitsfelder eröffnen und intensivste Forschungsaktivitäten auslösen werden. Vor diesem Hintergrund werden, auch für die Geodäsie, bedeutsame und interessante Neuerungen durch die Quantenphysik erwartet. Die geäußerte Prognose soll am Beispiel der großen Fortschritte, die in Bezug auf die **Erzeugung von Bose-Einstein-Kondensaten** erzielt werden konnten, veranschaulicht werden. Ein Bose-Einstein-Kondensat ist ein ultra-kaltes Gas, bestehend aus bosonischen Atomen, die sich alle im Zustand niedrigster Energie befinden. Im Jahr 1938 stellte LONDON die Theorie auf, dass Helium 4 (${}^4\text{He}$), für das erstmals Superfluidität nachgewiesen werden konnte, ein Bose-Einstein-Kondensat sei. Eine Bestätigung der Theorie von LONDON gelang nicht zweifelsfrei, wohl rückte er mit seiner Hypothese diesen Materiezustand wieder in den Fokus der Wissenschaft. Die Herstellung reiner Bose-Einstein-Kondensate gelang allerdings erst im Jahre 1995 zwei unabhängigen Forscher-

gruppen. Die diesbezüglichen Arbeiten von ERIC CORNELL, CARL WIEMANN und WOLFGANG KETTERLE wurden in 2001 mit dem Nobelpreis für Physik gewürdigt. Grundlage für Bose–Einstein–Kondensate sind die ebenfalls Nobelpreis gewürdigten Entwicklungen von Verfahren zur Laserkühlung [vgl. hierzu auch die Ausführungen von ABSCHNITT 2.3.3]. Die Bose–Einstein–Kondensation als neuer Aggregatzustand der Materie bildet das Fundament für verschiedenste Nutzungsmöglichkeiten. In der **Atomoptik** befasst man sich beispielsweise mit der Erzeugung von Materiewellen, und es konnten Atomlaser hergestellt werden, die sich durch extrem hohe Fokussierbarkeit auszeichnen. Damit ergeben sich neue Strahlquellen, die auch für geodätische Zwecke von Bedeutung sein können. An den Universitäten von Heidelberg und München wurden Experimente mit „Atomchips“ durchgeführt, um Materiewellen zu manipulieren. In Fortführung bzw. Weiterentwicklung dieser Experimente erwartet man die Konstruktion von hochempfindlichen Beschleunigungsmessern. Die Interferenzfähigkeit von Bose–Einstein–Kondensaten wird in der **Atominterferometrie** [vgl. hierzu ABSCHNITT 2.3.1] exploriert. Auch auf diesem Gebiet werden interessante und hochpräzise Applikationen angekündigt. So ist der Bau von hochempfindlichen Interferometern beabsichtigt. Damit können dann zum Beispiel Drehbewegungen oder die Schwerebeschleunigung der Erde bestimmt werden, wie in ABSCHNITT 3.4 gezeigt. Eine weitere Verwendung ist der Einsatz als Instrument zur Bestimmung von Fundamentalkonstanten [vgl. zu Fundamentalkonstanten ABSCHNITT 1.2].

Zum Abschluss wird noch einmal an die Diskussion aus ABSCHNITT 1.1 angeknüpft. Dort wurden zu (1.1–3) im Zusammenhang mit den wissenschaftstheoretischen Erörterungen Überlegungen zur Weiterentwicklung der Geodäsie vorgestellt. Es wurde geäußert, dass die **Kombination von Allgemeiner Relativitätstheorie und Quantenphysik als neues Fundament geodätischer Forschung** ein Aufgabengebiet mit vielfältigen Möglichkeiten etablieren würde. Um diese Ansicht zu belegen, wird im Folgenden das HYPER–PROJEKT der europäischen Raumfahrtagentur (engl.: European Space Agency, ESA) vorgestellt. Der Projektname „HYPER“ steht für „hyperpräzise Atominterferometrie im Weltraum“, und es ist Ziel, durch hochgenaue Beschleunigungs– und Rotationsmessungen sowohl die Allgemeine Relativitätstheorie als auch die Quantenelektrodynamik zu verifizieren. Konkrete Missionsziele sind

- *die Bestimmung der räumlichen Struktur des gravitomagnetischen Feldes*
- *die Bestimmung der Feinstrukturkonstante ,*

und des Weiteren werden im Hinblick auf die Quantengravitation Experimente durchgeführt. Der **Gravitomagnetismus** ist ein typisches Phänomen der Allgemeinen Relativitätstheorie, verursacht durch rotierende Massen, die ein zusätzliches Gravitationsfeld erzeugen. Diese Analogie zur Elektrodynamik, wo rotierende Ladungen ein Magnetfeld verursachen, hat diesem Phänomen den Namen gegeben. Die Auswirkung des Phänomens wird auch als Lense–Thirring–Effekt oder englisch als „frame dragging“ bezeichnet. Mit der Mission HYPER soll nun erstmals ein räumliches Profil des Gravitomagnetismus erfasst werden, im Gegensatz zu anderen Projekten wie LAGEOS oder GRAVITY PROBE B, die lediglich einen mittleren Wert für den Lense–Thirring–Effekt bestimmen. Die **Feinstrukturkonstante** stellt ein Maß für die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung dar, und sie ist eine Funktion von drei Fundamentalkonstanten, nämlich der Lichtgeschwindigkeit, der Elementarladung und des Planckschen Wirkungsquantums. Da die Feinstrukturkonstante diese drei Fundamentalkonstanten miteinander verknüpft, ist deren numerischer Betrag von großer Bedeutung für die Metrologie [vgl. zu Fundamentalkonstanten ABSCHNITT 1.2]. Die derzeitigen Verfahren zur Bestimmung der Feinstrukturkonstanten basieren auf den Theorien der Quantenelektrodynamik, und sie führen im Vergleich zu unbefriedigen-

den Ergebnissen. HYPER misst das Verhältnis von Planckscher Konstante und atomarer Masse, so dass damit die genaueste und eine von der Quantenelektrodynamik unabhängige Wertbestimmung gegeben ist. Um die genannten Missionsziele zu erreichen, werden die entsprechenden Messungen im Weltraum durchgeführt. Zu diesem Zweck wird eine Raumsonde die Erde in einem niedrigen und einem nahezu polaren Orbit umkreisen. An Bord der Sonde befinden sich Atominterferometer als hochgenaue Messsensoren mit verschiedenen Funktionen. Zum einen dienen sie als inertielle Messsensoren zur Steuerung bzw. Navigation der Raumsonde, und zum anderen sind es diejenigen Sensoren zur Bestimmung der in den Missionszielen genannten Effekte. Für die letztgenannte Absicht arbeiten die Atominterferometer in verschiedenartigen Modi. In der sogenannten MACH-ZEHNDER-Konfiguration messen die Atominterferometer den Lense-Thirring-Effekt räumlich aus, und in der RAMSEY-BORDÉ-Konfiguration wird die Feinstrukturkonstante erfasst. Im Hinblick auf den Projektstatus befindet sich HYPER derzeit in der Phase der Vorbereitung, und die Realisierung ist für die nächste Dekade vorgesehen. Insgesamt vermittelt HYPER verschiedene Signale. Erstens zeigt sich hier der Beginn einer neuen Entwicklung. Zweitens stellt HYPER die Bedeutung der neuen quantenbasierten Inertialsensoren heraus, und drittens demonstriert HYPER die Zukunft der Dyade Allgemeine Relativitätstheorie und Quantenphysik.

Verschiedene europäische Einrichtungen unterstützen HYPER und gestalten dieses Projekt. Darunter sind auch deutsche Forschungsstätten, vor allem physikalische Institute, wie zum Beispiel die Physikalisch-Technische Bundesanstalt in Braunschweig und das Institut für Quantenoptik in Hannover [vgl. hierzu RASEL (2000)]. Mit HYPER ist auch die Geodäsie, wie sie modern und zukunftsgerichtet zu (1.1–3) definiert worden ist, angesprochen und herausgefordert, um mit ihrer Kompetenz und ihren Fähigkeiten einen wichtigen Beitrag für die **Wissenschaft vom System Erde** [vgl. hierzu SCHNEIDER (1988)] zu leisten.

Kapitel 5

Bibliographie

- Abraham, A. (1989):** Principles of Nuclear Magnetism. Clarendon Press, Oxford.
- Audoin, C. (1992):** Caesium Beam Frequency Standards: Classical and Optically Pumped. Metrologia, 29, 113 – 134.
- Bauch, A. (1995):** Eine Notiz zur Geschichte der Cäsiumatomuhren. PTB-Mitteilungen, Nr. 105, Heft 5.
- Bauch, A. (1998):** Cäsium-Atomuhren: Stand der Technik und aktuelle Forschungsziele. PTB-Mitteilungen 108, Heft 1.
- Bauch, A. (2001):** Zeitmessung mit Fontänen. Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“, 32. Jg., Heft 6.
- Bauch, A., Dorenwendt, K., Hetzel, P. (1994):** Die Darstellung der Sekunde. PTB-Mitteilungen, Nr. 104, Heft 1.
- Bauch, A. et al. (1999):** Die neue Cäsiumfontäne der PTB. PTB-Mitteilungen 109, Heft 6.
- Bauch, A., Telle, H.R. (2002):** Frequency standards and frequency measurement. Reports on progress in physics, 65, 789 – 843.
- Becker, P., Gläser, M. (2001):** Kilogramm und Mol. Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“, 32. Jahrgang, Heft 6.
- Bergmann, L., Schaefer, C. (1980):** Aufbau der Materie. Lehrbuch der Experimentalphysik, Band IV, Teil 1 und Teil 2, de Gruyter, Berlin, New York.
- Bethge, K. (1978):** Quantenphysik. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich.
- Bethge, K., Gruber, G., Stöhlker, T. (2004):** Physik der Atome und Moleküle. Wiley-VCH, Weinheim.
- Blochinzew, D.I. (1988):** Grundlagen der Quantenmechanik. Deutsch, Thun, Frankfurt am Main.
- Börger, K. (2001):** Das Quantendynamometer – Ein Beispiel zur geodätischen Nutzung der Schrödingergleichung. Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 126. Jg., Heft 6.

- Börger, K. (2002):** Moderne Messtechnik auf Quantenbasis. In: Festschrift, Univ.–Prof. Dr.–Ing. Bertold Witte zur Emeritierung, Mitteilungen aus den Geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn, Nr. 89.
- Börger, K. (2003):** Erdrotationsbestimmung mittels Quanteninterferometrie. Zeitschrift „Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN)“, Heft 6.
- Börger, K. (2005):** Zur Theorie und Praxis herkömmlicher Cäsiumatomuhren. Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 130. Jg., Heft 1.
- Börger, K. (2005):** Hochgenaue Zeitbestimmung mit Cäsiumfontänen. Zeitschrift „Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN)“, Heft 2.
- Buckel, W. (1994):** Supraleitung. Verlag VCH, Weinheim, New York, Basel, Cambridge, Tokyo.
- Buschmann, E. (1992):** Gedanken über die Geodäsie. Wittwer, Stuttgart.
- Buschmann, E. (2002):** Diskussionsbeitrag zum Vortrag von H. Kautzleben: „Geodäsie am Beginn des 21. Jahrhunderts“. Heft „Vermessung Brandenburg“, Nr. 2.
- Buschmann, E. (2003):** Gedanken über Raum + Zeit Disziplinen. Zeitschrift „Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN)“, Heft 8–9.
- Campbell, J. (1979):** Die Radiointerferometrie auf langen Basen als geodätisches Meßprinzip hoher Genauigkeit. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 254, München.
- Chalmers, A.F. (2001):** Wege der Wissenschaft. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Chu, S. (1998):** The manipulation of neutral particles. Reviews of Modern Physics, Vol. 70, No. 3.
- Clauser, J.F. (1988):** Ultra–High Sensitivity Accelerometers And Gyroscopes Using Neutral Atom Matter–Wave Interferometry. Physica B 151: 262 – 272.
- Cohen–Tannoudji, C.N. (1998):** Manipulating atoms with photons. Reviews of Modern Physics, Vol. 70, No. 3.
- Demtröder, W. (1994–1998):** Experimentalphysik. 4 Bände, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Draheim, H. (1971):** Die Geodäsie ist die Wissenschaft von der Ausmessung und Abbildung der Erdoberfläche. Zeitschrift „Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN)“, Heft 7.
- Eska, G. (1999):** Suprafluide Helium–Gyrometer – ein Statusbericht. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Band 5, S. 179 – 190.
- Friesch, A. et al. (1999):** Stand des Projektes „Quantenrot“ in Tübingen. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Band 5, S. 191 – 194.
- Gibble, K., Chu, S. (1992):** Future Slow–atom Frequency Standards. Metrologia, 29, 201–212.

- Grimsehl, E. (1988):** Lehrbuch der Physik, Band 4, Struktur der Materie. Teubner, Leipzig.
- Groten, E. (2000):** Die Fundamentalkonstanten in der Geodäsie. Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 125. Jg., Heft 1.
- Joeckel, R., Stober, M. (1999):** Elektronische Richtungs- und Entfernungsmessung. Wittwer, Stuttgart.
- Haas, R., Nothnagel, A., Campbell, J., Gueguen, E. (2003):** Recent crustal movements observed with European VLBI network: geodetic analysis and results. Journal of Geodynamics, 35, 391–414.
- Haken, H., Wolf, H.C. (1993):** Atom- und Quantenphysik. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Hase, H. (1999):** Theorie und Praxis globaler Bezugssysteme. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Bd. 13.
- Heitz, S. (1980–1983):** Mechanik fester Körper. 2 Bände, Dümmler, Bonn.
- Heitz, S. (1986):** Grundlagen kinematischer und dynamischer Modelle der Geodäsie. Mitteilungen aus den geodätischen Instituten der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn, Nr. 63.
- Heitz, S., Stöcker–Meier, E. (1998):** Grundlagen der Physikalischen Geodäsie. Dümmler, Bonn. Neue, ergänzte Auflage unter <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html>.
- Heitz, S. (2003):** Grundlagen der Quantenfeldtheorie mit Anwendungen in der Quantenelektrodynamik. <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html>.
- Hugentobler, U., Schaer, S., Fridez, P. (Hrsg.) (2001):** Bernese GPS Software Version 4.2, Astronomisches Institut der Universität Bern.
- Ilk, K.H. (1983):** Ein Beitrag zur Dynamik ausgedehnter Körper – Gravitationswechselwirkung. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 288, München.
- Ilk, K.H. (1990):** Zukünftige Möglichkeiten der globalen hochauflösenden Schwerfeldbestimmung. In: Schneider, M. (1990): Satellitengeodäsie. Verlag VCH, Weinheim, Basel.
- Ilk, K.H. (1996):** Reference Systems in Geodesy. Lecture Notes, part 5, 2nd Tropical School of Geodesy, Indonesia, Bandung, Nov. 4–16, 1996, ITB Press, Bandung.
- Ilk, K.H. (Hrsg.) (1997):** Satellitengeodäsie und Langbasis–Interferometrie auf der Fundamentalstation Wettzell. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe B, Heft 305, München.
- Jones, T. (2000):** Splitting the second. Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia.
- Klügel, T., Schlüter, W., Schreiber, U., Schneider, M. (2005):** Großringlaser zur kontinuierlichen Beobachtung der Erdrotation. Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 130. Jg., Heft 2.
- Koch, K.R. (1997):** Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. 3. Auflage, Dümmler, Bonn. Neue, 4. Auflage unter <http://www.geod.uni-bonn.de/index.html>.

- Kose, V., Melchert, F. (1991):** Quantenmaße in der elektrischen Meßtechnik. Verlag VCH, Weinheim, New York, Basel, Cambridge, Tokyo.
- Kuhn, T.S. (1979):** Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen. Suhrkamp, Frankfurt/Main.
- Landau, L.D., Lifschitz, E.M. (1979):** Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band III, Quantenmechanik. Akademie-Verlag, Berlin.
- Metcalf, H.J., van der Straten, P. (1999):** Laser Cooling and Trapping. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Müller, J. (1991):** Analyse von Lasermessungen zum Mond im Rahmen einer post-Newton-schen Theorie, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 383, München.
- Müller, J. (Hrsg.) (2004):** Berichte zur XXIII. Generalversammlung der IUGG. Zeitschrift für Vermessungswesen (ZfV), 129. Jg., Heft 1.
- Packard, R.E., Vitale, S. (1992):** Principles of superfluid-helium gyroscopes. Physical Review B, volume 46, number 6, pp. 3540–3549.
- Phillips, W.D. (1998):** Laser cooling and trapping of neutral atoms. Reviews of Modern Physics, Vol. 70, No. 3.
- Popper, K.R. (1994):** Die Logik der Forschung. Mohr, Tübingen.
- Popper, K.R. (2000):** Vermutungen und Widerlegungen. Das Wachstum der wissenschaftlichen Erkenntnis. Mohr Siebeck, Tübingen.
- Rasel, E.M. (2000):** Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space. ESA Assessment Study Report, ESA-SCI 10.
- Richter, B. (1987):** Das supraleitende Gravimeter. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 329, München.
- Schlüter, W. (1988):** Zeit und Frequenz im Meßverfahren der Geodäsie. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C, Heft 337, München.
- Schmutzer, E. (1989):** Grundlagen der Theoretischen Physik. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich.
- Schneider, M. (1988):** Satellitengeodäsie. Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich.
- Schneider, M. (Hrsg.) (1990):** Satellitengeodäsie – Ergebnisse aus dem gleichnamigen Sonderforschungsbereich der Technischen Universität München. VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim.
- Schneider, M. (1992–1999):** Himmelsmechanik, Band I – IV. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin.
- Schödlbauer, A. (2000):** Geodätische Astronomie. De Gruyter, Berlin, New York.
- Schow, E. (2001):** Die Suche nach dem richtigen Maß. Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“, 32. Jg., Heft 6.

- Schpolski, E.W. (1978):** Atomphysik, Band II. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Schpolski, E.W. (1979):** Atomphysik, Band I. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.
- Schreiber, U. (2000):** Ringlasertechnologie für geowissenschaftliche Anwendungen. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Bd. 8.
- Schreiber, U. (2005):** private Kommunikation
- Simmonds, R., Marchenkov, A., Hoskinson, E., Davis, J.C., Packard, R.E. (2001):** Quantum interference of superfluid ^3He . Zeitschrift „nature“, volume 412, pp. 55–58.
- Tilley, D.R., Tilley, J. (1990):** Superfluidity and Superconductivity. Adam Hilger, Bristol, New York.
- Torge, W. (2003):** Geodäsie. de Gruyter, Berlin.
- Vanier, J., Audoin, C. (1989):** The quantum physics of atomic frequency standards. Volume 1 and 2. Adam Hilger, Bristol, Philadelphia.
- Wäckerle, G., Mehring, M., Sorg, H. (1996):** Der Kernkreisler – Ein dualer Rotations- und Magnetfeldsensor. Zeitschrift „Allgemeine Vermessungsnachrichten (AVN)“, Heft 2.
- Witte, B., Schmidt, H. (2000):** Vermessungskunde und Grundlagen der Statistik für das Bauwesen. Wittwer, Stuttgart.
- Ziegler, T. (2001):** Quanteninterferenz bei superfluidem ^3He . Zeitschrift „Physik in unserer Zeit“, 32. Jg., Heft 5, S. 199 – 200.

Sachregister

- Absorption, 52, 57
Allan-Varianz, 73
Anregung, 20
Anthropoinformation, 10
Anthroposphäre, 9, 10
Aristoteles, 11, 12
Atmosphäre, 10
Atom, 15, 19, 21, 22, 35, 36, 40–45, 49, 50, 52–56, 67–72, 74–77, 79, 80
 Zwei-Niveau-, 41, 54, 57
Atomfontäne, 72, 75, 76
Atominterferometrie, 41, 50, 75, 77, 81
Atomkühlung, 50, 52, 81
Atomkern, 16, 19, 20, 22, 25, 37, 38
Atommasse, 23
 absolute, 22, 51, 52, 64
 relative, 22, 52
Atommodell
 Bohrsches, 15, 20, 21
 Rutherfordsches, 20
Atomoptik, 81
Atomphysik, 22, 79
Atomstrahl, 51
 thermischer, 50, 68, 71
 zustandsselektierter, 69, 71
Atomstrahlresonanzmethode, 16
 nach Rabi, 68, 71
 nach Ramsey, 71, 72
Atomuhr, 16, 51, 56, 71, 74, 79
Ausgleichsrechnung und Statistik, 10

Baryonenzahl, 21
Baryosphäre, 10
Basiseinheit, 16, 17
Basisgröße, 16, 18
BCS-Theorie, 31
Beugung am Gitter, 75
Beugung am Spalt, 75
Bezugsrahmen, 14
Bezugssystem, 14

Bodenordnung, 10
Bohr, 27
Boltzmann, 50
Boltzmann-Konstante, 51
Born, 28
Bose-Einstein Kondensat, 81
Bose-Einstein-Kondensat, 16, 80, 81
Bosonen, 16, 80
Boyle-Mariotte
 Gesetz von, 50
Breit-Rabi-Formel, 36

Cäsium, 51–53, 56, 67, 68
Cäsiumatomuhr, 17, 50, 67, 71, 72
Cäsiumfontäne, 56, 72–74, 79
Cooperpaar, 31–33
Cooperpaarstromdichte, 33, 46, 48

de Broglie, 27
DGPS, 13
Dipol, 37, 41, 71
Distanzmessung, 15
Dopplerkühlung, 52, 53
Dopplerverschiebung, 53
Drehimpuls, 23–25, 34–38, 54, 68
Drehimpulssatz, 34
Drehmoment, 34, 37

Eichmaß, 15, 17
Eigenfunktion, 23, 24
Eigenwert, 23, 24
Eigenwertgleichung, 23, 24, 30
Eigenzeit, 14
Einelektronensystem, 21, 36
Einheitensystem, 16, 17
Einstein, 11, 12, 52
Elektrodynamik, 13, 28, 81
Elektron, 15, 19–23, 25, 26, 34, 35, 37
Elektronendichte, 32
Elektronenhülle, 20–23, 35, 36, 67

- Elementarteilchen, 19, 21, 23–27, 36
 Emission, 52, 54
 Induzierte, 15, 21
 Spontane, 15, 21, 42, 55
 Empirismus, 11
 Energie, 27, 29, 37, 52, 54–57, 80
 Feinstruktur–, 54
 Gesamt–, 20, 29, 55, 56, 60, 62
 Hyperfeinstruktur–, 36, 68, 71
 kinetische, 20, 27, 29, 39, 51, 55, 61
 potentielle, 20, 29, 31, 33, 39, 55, 56, 61
 potentielle magnetische, 34
 Spin–Bahn–Kopplungs–, 34
 Energieoperator, 33
 Energiesatz, 50, 52
 Energiezustand, 15, 20, 21, 41, 42, 45, 54, 55,
 57, 68, 69, 71, 72
 Entartung, 54
 Ephemeridensekunde, 17, 68
 Erddeformation, 14
 Erdmagnetfeld, 79
 Erdmasse, 60
 Erdrotation, 3, 10, 11, 14, 15, 17, 63–65, 67,
 77
 Eulersche Gleichung, 30
 Experiment, 11, 12, 26, 28, 36, 40, 64, 66, 76,
 77, 81

 Falsifikationismus, 11, 12
 Feinstrukturaufspaltung, 35
 Feinstrukturkonstante, 81, 82
 Feld
 elektrisches, 32
 elektromagnetisches, 19
 Gravitations–, 81
 metrisches, 13, 14
 Feldquanten, 20
 Feldstärke
 elektrische, 28
 Fernerkundung, 10
 FKP, 13
 Fluidodynamik, 30
 Fluss
 magnetischer, 46–48, 66
 rotatorischer, 65
 Flussquant, 47, 48
 Fluxoid, 46

 Frequenz, 42, 45, 52, 53, 68, 69, 72
 –instabilität, 73
 –verschiebung, 77
 Larmor–, 39
 Frequenzkamm
 optischer, 79
 Fundamentalkonstante, 17, 18, 81

 g–Faktor, 25, 26, 34, 37
 Galilei, 12
 Gas, 53, 80
 ideales, 50
 Gasgleichung, 50, 51
 Gaußverteilung, 51
 Geodäsie, 3, 9–16, 79–82
 Geodynamik, 14
 Geoinformatik, 10, 12
 Geoinformation, 10–12
 Geophysik, 79
 Geosphäre, 9, 10, 14
 Geschwindigkeit, 17, 30, 41, 44, 50–53, 56,
 70, 71, 74, 76
 –selektion, 71
 Generalisierte, 61
 Phasen–, 28
 RMS–, 51, 52, 54, 56
 Geschwindigkeitsverteilung, 51, 54
 Ginzburg–Landau Theorie, 32
 GNSS, 13
 GPS, 13
 Gravimeter, 3, 16, 63, 75, 77
 Gravitation, 60, 64
 Gravitomagnetismus, 81
 Grundzustand, 21, 54, 55, 67
 gyromagnetisches Verhältnis, 24, 26, 37

 Hadronen, 19, 20
 Halbwertszeit, 21
 Hamilton–Jacobi Theorie, 59
 Hamiltonfunktion, 61
 Hamiltonoperator, 32, 59, 61, 62
 Helium, 16, 29, 48–50, 64, 67, 80
 Helmert, 3, 9
 Hydrosphäre, 10
 HYPER, 81, 82
 Hyperfein–Zeemann–Effekt, 36
 Hyperfeinfaktor, 21, 36, 68
 Hyperfeinstrukturaufspaltung, 35

- Impuls, 27, 30, 41, 43, 44, 52, 61
- Impulssatz, 50, 52
- Induktion
 - magnetische, 28, 31, 32
- Induktionskonstante, 35
- Inertialsensor, 59
- Inertialsystem, 30, 49, 59, 60, 65
- Interferenz, 43, 62, 75, 81
- Interferometer, 75, 81
 - Atom-, 41, 43, 45, 82
 - Quanten-, 48, 66, 79
 - Raman-, 75
- Ionosphäre, 13, 79
- Isotop, 22, 29, 49, 52, 67

- Josephson-Effekt, 33, 67
- Josephson-Gleichung, 33, 48
- Josephson-Schwachstelle, 48, 49, 67
- Josephson-Tunnelement, 46–48

- Kartographie, 10
- Kernphysik, 22, 79
- Kernspin, 25, 26, 35, 38–40, 68, 69
- Kernspinresonanz, 16, 38, 43, 67
- Kinetische Gastheorie, 50, 51
- Kondensation, 52
- Kontinuitätsgleichung, 30
- Koordinaten, 61, 62
 - sphärische, 23
- Kopernikus, 11, 12
- Kraft, 19
- Kreisel, 16, 37, 66, 67
 - Großringlaser, 67
 - Großringlaser-, 15
 - Helium-, 16, 67
 - Laser-, 15, 67
 - NMR-, 16, 67
- Kreisfrequenz, 27, 40

- Ladung, 19–21, 24–26, 32, 81
- Lagrangefunktion, 61
- Larmorpräzession, 37
- Laser, 15, 42, 45, 52–54, 57, 76, 81
- Laserscanning, 15
- Legendresche Polynome, 24
- Leitfähigkeit
 - elektrische, 16, 31
- Lense-Thirring-Effekt, 14, 81, 82

- Leptonen, 19, 20
- Leptonenzahl, 21
- Licht, 25, 27, 28, 43, 45, 52, 54, 55, 57, 64, 77
- Lichtgeschwindigkeit, 17, 18, 28, 32, 42, 81
- Linienbreite, 70–72, 74
- Lithosphäre, 10
- LLR, 15
- Londonsche Materialgleichung, 32
- Londonsche Theorie, 31

- Magnet, 37, 68, 71
- Magnetfeld, 16, 24, 34–38, 40, 41, 47, 57, 69, 81
- magneto-optische Falle, 57, 72, 76
- Magnetometer, 16
- Magneton
 - Bohrsches, 21, 25
 - Kern-, 21, 25
- Magnetostatik, 34, 40
- Makrowellenfunktion, 31
- Masse, 10, 16, 17, 21, 23, 25, 27, 29, 32, 51, 52, 59, 60, 67, 81, 82
- Massendefekt, 23
- Massenzahl, 22
- Materie, 19–21, 27, 28, 81
- Materiestrahl, 44, 62, 75
- Maxwell, 50, 51
- Mechanik, 13
 - klassische, 26, 34, 40, 50, 59
- Mehrelektronensystem, 21, 68
- Meißner-Ochsenfeld-Effekt, 31, 32
- Melasse, 53, 54, 56, 72, 74
- Mikrowellenresonator, 72
- Molekül, 50, 71, 79
- Moment
 - magnetisches, 19, 21, 23–26, 34–37, 69
 - mechanisches, 24
- Multiplizität, 21

- Natrium, 64
- Navigation, 3, 10, 12, 67, 82
 - Trägheits-, 63
- Neutron, 19, 20, 22, 23, 25, 26
- Neutronenzahl, 22
- Newton, 12, 50
- NMR
 - siehe auch Kernspinresonanz, 38

- Normalverteilung, 51
 Normierungsbedingung, 28, 40
 Nukleonen, 18, 22, 25
 Nuklid, 22
 Operator, 39, 61
 Bahndrehimpuls-, 23, 24
 des Drehimpulsquadrates, 23
 Operatorregeln, 23, 61
 Optisches Pumpen, 54–56
 Ordnungszahl, 22
 Oszillator
 harmonischer, 39
 Paradigma, 12, 13
 Paulische Spinmatrizen, 39
 Periodensystem der Elemente, 22
 Phase, 29, 31, 33, 40, 43–47, 49, 62–64, 76, 77
 Phasenfaktor, 45
 Photogrammetrie, 10
 Photon, 15, 20, 21, 27, 41, 42, 45, 52, 53, 55, 56, 79
 Photonenenergie, 27
 Photonenspin, 25
 Planck, 12, 27
 Plancksche Konstante, 27, 42, 82
 Plattentektonik, 14
 Plejade, 22
 Polarisierung, 54, 55
 Polarisationsgradientenkühlung, 54
 Popper, 11
 Positivismus, 11
 Potential, 55, 56, 60, 63
 chemisches, 29
 elektrodynamisches, 32
 magnetisches, 34
 Skalar-, 31
 Vektor-, 46, 47
 Präzession, 37, 38, 69
 Proton, 19, 20, 22, 23, 25, 26
 Protonenzahl, 22, 35
 Ptolemäus, 11, 12
 Quantendynamometer, 3, 59, 62, 63, 79
 Quantengravimeter, 79
 Quanteninterferenz, 16, 46–48, 50, 64, 65
 Quantenmaß, 16, 17
 Quantenphysik, 3, 9, 13–16, 19, 26, 35, 79–82
 Quantensprung, 21
 Quantenzahl, 20, 21, 24–26, 34–36, 54, 57, 68
 Quarks, 26
 Quarzuhr, 17
 Rückstoßlimit, 56
 Raman-Übergang, 41, 42, 44, 75
 Raman-Puls, 41–44
 Relativitätstheorie
 Allgemeine, 13, 14, 81, 82
 Resonanzkurve, 70–72, 74
 Ring
 supraleitender, 47, 48
 Rotverschiebung, 53
 Sagnac-Effekt, 14, 67
 Satellitengeodäsie, 12, 13
 Schrödinger, 12, 28
 Schrödingergleichung, 31, 33, 59, 61, 62
 zeitabhängige, 29, 38–40
 zeitunabhängige, 28, 62
 Schwere, 10, 16, 44, 72, 74, 76, 77, 81
 Schwingungsgleichung, 39
 Shapiro-Effekt, 14
 Signal-Rausch-Verhältnis, 74
 Sisyphus-Kühlung, 54–56, 74
 SLR, 15
 Spannung, 33
 Spin, 21, 23–25, 34, 35
 Spin-Bahn-Kopplung, 34
 SQUID, 16, 66
 Städtebau, 10
 Stark-Effekt, 54
 Statistische Physik, 50
 Stokes, 46, 50
 Strahlungsfrequenz, 27
 Strahlungstheorie, 52
 Strom
 elektrischer, 25, 47, 48, 50, 66
 Gesamt-, 48
 Stromdichte
 kritische, 33, 48
 Stromstärke
 elektrische, 16
 kritische, 48
 Ring-, 48
 Sub-Doppler-Kühlung, 54

- Superfluid–Bewegungsgleichung, 30
 Superfluidität, 16, 29, 48, 50, 80
 Supraflüssigkeit, 29, 30, 65, 67
 Supraleiter, 31–33
 Supraleitung, 16, 31, 33, 48
 Suprastrom, 46, 47

 Teilchendichte, 33
 Teilchenmodell, 26, 27
 Termschema, 21
 Troposphäre, 79

 Unschärferelation, 17
 Unsicherheit, 73

 Vermessungswesen, 10
 Vertauschungsrelation, 23
 Vielteilchensystem, 29, 32
 Viskosität, 16, 30
 VLBI, 11, 15, 67
 VRS, 13

 Wärmeleitfähigkeit, 16
 Wahrscheinlichkeit, 28, 52, 53, 55, 70
 Wahrscheinlichkeitsstromdichte, 32, 46
 Wasserstoff, 21
 Wechselfeld, 16, 69, 71
 magnetisches, 38
 Wechselwirkung, 19, 20, 31, 32, 34, 35, 43,
 45, 52, 71, 79, 81
 elektromagnetische, 19, 20
 Gravitations–, 19, 20
 schwache, 19, 20
 starke, 19, 20
 Welle, 26, 27
 ebene, 43
 elektromagnetische, 28
 Materie–, 28, 41, 44, 61, 62, 64, 81
 Wellenfunktion, 28, 29, 31, 33, 38–40, 42, 43,
 46, 49, 61
 Wellengleichung, 28
 Wellenlänge, 27, 52, 54, 64, 70
 de Broglie–, 27
 Wellenmodell, 26–28
 Wellenvektor, 42, 45, 62
 Wellenzahl, 27, 52
 Widerstand
 elektrischer, 16, 31

 Winkelgeschwindigkeit, 30, 60, 63, 65
 Wirbelstärke, 30
 Wissenschaft, 3, 9, 11–14, 79, 82
 Wissenschaftstheorie, 3, 9, 10, 12, 81

 Zeemann–Effekt, 57
 anomaler, 35
 normaler, 35
 Zeit, 10, 16, 17, 45
 Zirkulation, 30, 31
 Zustand, 76, 77
 angeregter, 15, 42, 52–55, 57, 68
 Zwei–Elektronen–Modell, 31

In der Schriftenreihe des Instituts für Geodäsie und Geoinformation
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn sind erschienen:

Heft 1
2007

Klaus Börger
Geodäsie und Quantenphysik

Vertrieb: Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn
Institut für Geodäsie und Geoinformation
- Bibliothek -
Nußallee 17
53115 Bonn

Tel.: +49 (0)228 73-3566

Fax: +49 (0)228 73-2988

Internet: <http://www.igg.uni-bonn.de>

