

Lösungen für das Stefan-Problem mit Gibbs–Thomson-Gesetz bei lokaler Minimierung

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

vorgelegt von

Matthias Röger

aus

Siegburg

Bonn 2003

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch–Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich–Wilhelms–Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr. Hans Wilhelm Alt

2. Referent: Prof. Dr. Reiner Schätzle

Tag der Promotion:

*Meiner Familie für die geduldige Unterstützung während des ganzen Studiums ...
Meinen Freunden für die stete Er- und Aufmunterung...
Meinen Kolleginnen und Kollegen für sach- und fachkundigen Rat und das
herzliche Miteinander...
Meinen Betreuern für die engagierte Anleitung, das interessante Thema und für
viele hilfreiche und spannende Diskussionen...*

ein dickes Dankeschön !!

Würfelchen machen, das war seine Arbeit.

Zuerst legte er die Kartoffel richtig auf das Rüstbrett. Nicht irgendwie, - richtig. Nun setzte er das Messer sorgfältig an, schaute nochmals über den Messerrücken - wie er früher beim Schreinern vor dem Ziehen links und rechts über das Sägeblatt geschaut hatte - und schnitt mit kurzen Bewegungen die erste Scheibe ab.

Bei den meisten Kartoffeln gelang es ihm, drei Scheiben zu machen. Die beiden äußeren waren gewölbt, die mittlere flach. Die mittlere zog er den anderen vor. Die gewölbten Randstücke ärgerten ihn jedesmal, weil sie aus der Reihe tanzten. Sie ergaben nur an der dicksten Stelle einigermaßen richtige Würfelchen.

Das Zeug außen herum war nichts als Gefieser.

Die mittlere Scheibe aber legte er zuletzt vor sich hin. Er schnitt sie in Streifen und schob diese mit dem Messerrücken von beiden Seiten nochmals zusammen, bevor er das Rüstbrett drehte.

Und dann machte er Würfelchen.

(Heinrich Kuhn, Schatz und Muus.)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Stefan-Gibbs-Thomson-Problem	5
3	Eine mittlere Krümmung für allgemeine Phasengrenzen	9
4	Ein neuer Existenzsatz für das Stefan-Gibbs-Thomson-Problem	21
5	Zeitdiskretisierung und lokale Minimierung	23
6	Konvergenz gegen Lösungen des Stefan-Gibbs-Thomson-Problems	31
7	Verhalten der Lösungen	35
8	Zusammenfassung	51
A	Verwendete Sätze	53
	A.1 Lipschitz-Approximation	53
	A.2 Konvergenz mittlerer Krümmungen, die als Spur gegeben sind. .	55
	Literaturverzeichnis	57

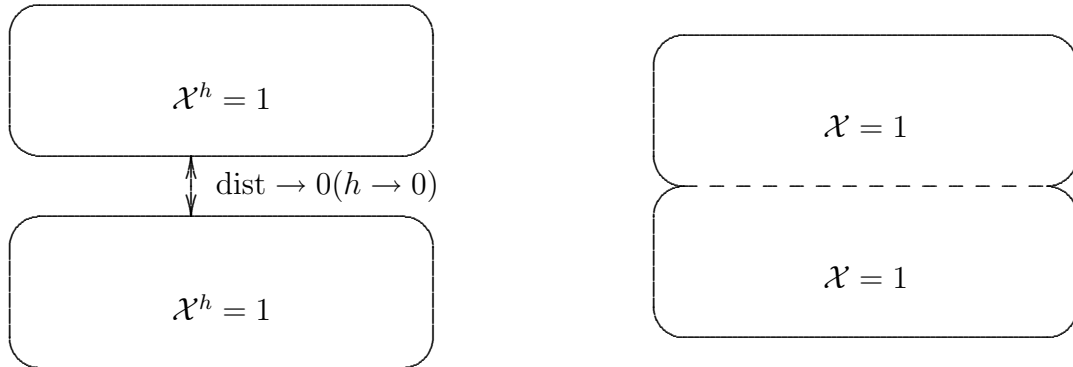
Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit stellen wir ein neues Existenzresultat für das Stefan-Problem mit Gibbs–Thomson-Gesetz für die Oberflächen vor. Dieses freie Randwertproblem verknüpft ein Evolutionsgesetz für eine Phasengrenze und eine Wärmeleitungsgleichung für die Temperatur mit einer geometrischen Bedingung, in die die mittlere Krümmung der Phasengrenze eingeht. Das legt die Kombination geometrischer und analytischer Methoden bei der Behandlung dieses Problems nahe.

Globale Existenz und Nichteindeutigkeit schwacher Lösungen wurde bereits von Luckhaus in [Luc91] gezeigt. Dort werden zeitdiskrete Näherungslösungen durch die globale Minimierung geeigneter Funktionale bestimmt. Aus dem Verschwinden der ersten Variation dieser Funktionale ergibt sich dann eine approximative Gibbs–Thomson-Gleichung. Durch die globale Minimierung kann für den Limes der approximativen Phasenfunktionen ein Massenverlust der Grenzflächen ausgeschlossen und die Konvergenz der Gibbs–Thomson-Gleichungen in einer Formulierung mit Funktionen beschränkter Variation nachgewiesen werden. Andererseits ist eine globale Minimierung thermodynamisch nicht unbedingt gerechtfertigt. Eine Folge dieses speziellen Vorgehens sind zusätzliche Regularitätseigenschaften der Grenzflächen, die das Verhalten der Lösungen beeinflussen und in einigen Situationen einer angemessenen Modellierung entgegenstehen.

Wir schlagen hier eine lokale Minimierung zur Bestimmung zeitdiskreter Näherungen vor. Das ist physikalisch besser motiviert, führt aber gleichzeitig zu Schwierigkeiten bei der Behandlung des Gibbs–Thomson-Gesetzes. Beim Grenzübergang kann ein Massenverlust von Grenzfläche nun nicht mehr ausgeschlossen werden. Damit kann die Konvergenz gegen das Gibbs–Thomson-Gesetz nicht innerhalb der BV-Formulierung aus [Luc91] gezeigt werden. Um die Situation zu verdeutlichen, betrachten wir die folgenden (zeitunabhängige) Situation:



Hier verschmelzen mit $h \rightarrow 0$ zwei Zusammenhangskomponenten einer Phase und es tritt ein „verdeckter“ Anteil der Grenzfläche auf, der nicht länger zwei verschiedene Phasen trennt. Die mittlere Krümmung wird in den beiden „Spitzen“, die durch die Auslöschung von Oberfläche entstehen, singular. In [Sch97] wird gezeigt, dass die BV-Formulierung des Gibbs–Thomson-Gesetzes hier zusammenbricht: Die erste Variation des Perimeter-Funktional hat in den Spitzen einen Dirac-Anteil, der in dieser Formulierung nicht kompensiert werden kann. Wir müssen hier also erklären, in welchem Sinne unsere Lösung der Gibbs–Thomson-Gleichung genügen soll. Um die Probleme durch mögliche Auslöschungen von Oberfläche im Grenzübergang $\mathcal{X}^h \rightarrow \mathcal{X}$ in $L^1(\Omega)$ zu umgehen und die Information über die „verdeckten“ Anteile nutzen zu können, wollen wir den Grenzübergang der Oberflächenmaße $|\nabla \mathcal{X}^h|$ betrachten. Im Limes dieser Maße tritt der verdeckte Anteil der Grenzfläche dann mit doppelter Dichte auf. Solche Maße mit mehrfachen Vielfachheiten und guten „Blow-up“-Eigenschaften sind als „integrale Varifaltigkeiten“ Gegenstand der geometrischen Maßtheorie. Insbesondere ist für diese Objekte der Begriff einer mittleren Krümmung erklärt. Um die Konvergenz der approximativen Gibbs–Thomson-Gleichungen zu zeigen, wollen wir ein Resultat von Schätzle aus [Sch01] benutzen. Dabei werden Flächen betrachtet, deren mittlere Krümmung als Spur von Sobolev-funktionen im umgebenden Raum dargestellt ist. Unter geeigneten Voraussetzungen ist das Limesmaß dann eine integrale Varifaltigkeit mit einer mittleren Krümmung, die als Spur des Grenzwertes der Sobolevfunktionen gegeben ist. Die Einbeziehung der verdeckten Anteile der Grenzflächen und der Übergang zu integralen Varifaltigkeiten ist bei der Konvergenzbetrachtung wesentlich, die Kontrolle über die verdeckten Anteile ist allerdings schlecht. Diese sind nur durch den (schwachen) Limes der Oberflächenmaße gegeben, während die wirklichen Phasengrenzen durch den (starken) Limes der Phasenfunktionen in $L^1(\Omega)$ bestimmt sind. Andererseits wollen wir das Gibbs–Thomson-Gesetz auch nur auf den wirklichen Grenzflächen erfüllen. Im Limes unserer Näherungslösungen werden die eventuell singulären Phasengrenzen durch den Grenzwert der Oberflächenmaße zu integralen Varifaltigkeiten, die eine mittleren Krümmung besitzen, ergänzt. In dieser Situation zeigen wir, dass die mitt-

lere Krümmung dieser Varifaltigkeiten auf den unverdeckten Anteilen unabhängig von der Ergänzung ist. Wir können daher der Phasengrenze selbst eine mittlere Krümmung zuordnen. Unsere Lösungen genügen dem Gibbs–Thomson-Gesetz dann in der Form, dass die mittlere Krümmung der Phasengrenze gerade durch die Spur der Temperatur gegeben ist.

Diese Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im zweiten Kapitel wird kurz das Stefan-Problem mit Gibbs–Thomson-Gesetz in der klassischen sowie in der schwachen Formulierung mit Funktionen beschränkter Variation vorgestellt und das Existenzresultat aus [Luc91] angegeben. Im dritten Kapitel zeigen wir, dass für Ränder von Caccioppoli-Mengen, die sich hinreichend regulär ergänzen lassen, eine verallgemeinerte mittlere Krümmung gegeben ist. Der angestrebte Existenzsatz wird dann im vierten Abschnitt formuliert. Das lokale Mimierungsverfahren zur Bestimmung der zeitdiskreten Lösungen wird in Kapitel 5 vorgestellt, die Konvergenz gegen Lösungen des Stefan–Gibbs–Thomson-Problems wird im sechsten Kapitel bewiesen. Schließlich folgen im siebten Kapitel eine Bemerkung zur zusätzlichen Regularität der Lösungen bei globaler Minimierung aus [Luc91] und zwei Beispiele zum unterschiedlichen Verhalten der Lösungen bei lokaler und globaler Minimierung. Im Anhang formulieren wir dann die von uns benutzte Version des Lipschitz-Approximationsatzes von Brakke aus [Bra78] und zitieren den Konvergenzsatz aus [Sch01], den wir an entscheidender Stelle verwenden werden.

Kapitel 2

Das Stefan-Gibbs-Thomson-Problem

Ein einfaches Modell zur Beschreibung von Phasenübergängen etwa beim Schmelzen oder Erstarren von Materialien, mit dem auch Effekte wie das Unterkühlen von Schmelzen, das Überhitzen von festen Phasen oder die Bildung komplizierter Verästelungen erklärt werden können, ist das Stefan-Problem mit Gibbs–Thomson-Gesetz für die Oberfläche, das wir im Folgenden kurz mit „Stefan–Gibbs–Thomson-Problem“ bezeichnen.

In der klassischen Formulierung wird dabei in einem Zeitintervall $(0, T)$ ein Körper $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen betrachtet, der zu einem Zeitpunkt $t \in (0, T)$ aus einer flüssigen Phase $\Omega_l(t)$ und einer festen Phase $\Omega_s(t)$ mit der gemeinsamen Oberfläche $\Gamma(t)$ besteht:

$$\begin{aligned}\Omega_l(t), \Omega_s(t) & \text{ offen,} \\ \overline{\Omega_l(t)} \cup \overline{\Omega_s(t)} & = \overline{\Omega}, \\ \Gamma(t) & = \partial\Omega_l(t) \cap \Omega = \partial\Omega_s(t) \cap \Omega.\end{aligned}$$

Auf $\Gamma(t)$ bezeichne $\nu(t)$ die äußere Normale von $\Omega_l(t)$, $v(t)$ die Geschwindigkeit der Grenzfläche in Richtung von $\nu(t)$ und $H(t)$ die mittlere Krümmung (positiv für konvexe flüssige Phasen). Wir betrachten weiter die Temperaturverteilung u und eine Wärmequelle f mit $u, f : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$. Unter geeigneten Normierungen der physikalischen Konstanten ergibt sich dann aus der Energieerhaltung, dass die Temperatur in jeder einzelnen Phase die Wärmeleitungsgleichung erfüllt:

$$u_t - \Delta u = f \quad \text{in } \Omega_T \setminus \bigcup_{t \in (0, T)} \{t\} \times \Gamma_t, \quad (2.1)$$

über den Rand $\Gamma(t)$ hinweg stetig ist und für die Normalengeschwindigkeit der Oberfläche

$$v(t) = -[\nabla u \cdot \nu](t) \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (2.2)$$

gilt, wobei der Ausdruck

$$[\nabla u \cdot \nu](t) = \nabla(u(t, \cdot)|_{\Omega_l(t)}) \cdot \nu(t) - \nabla(u(t, \cdot)|_{\Omega_s(t)}) \cdot \nu(t)$$

auf $\Gamma(t)$ den Sprung der Normalenableitung von u über den freien Rand hinweg bezeichnet. Im Gegensatz zu $u = 0$ beim klassischen Stefan-Problem wird mit dem Gibbs-Thomson-Gesetz die geometrische Bedingung

$$H(t) = u(t) \quad \text{auf } \Gamma(t) \quad (2.3)$$

für alle $t \in (0, T)$ gestellt. Eventuell wird noch eine Bedingung für den Kontaktwinkel zwischen $\partial\Omega$ und $\Gamma(t)$ formuliert. Befindet sich der Körper Ω im Vakuum, so soll $\Gamma(t)$ senkrecht auf $\partial\Omega$ treffen.

Ergänzt werden schließlich noch Anfangsbedingungen für u und Ω_l, Ω_s sowie Randbedingungen für u .

Eine Herleitung dieses Modells findet sich etwa bei Gurtin [Gur85] und Visintin [Vis96]. Radkevitch [Rad91] zeigt die Kurzzeitexistenz klassischer Lösungen für geeignete Anfangsbedingungen. Wegen der möglichen Herausbildung von Singularitäten ist keine globale Existenz klassischer Lösungen zu erwarten. Um an dieser Stelle weiterzukommen, muss der Lösungsbegriff abgeschwächt werden.

In [Luc91] werden dazu die Energiebilanzgleichungen (2.1), (2.2) im Distributionsinn und das Gibbs-Thomson-Gesetz im Kontext charakteristischer Funktionen beschränkter Variation formuliert. Eine gesuchte Funktion $\mathcal{X} : \Omega_T \rightarrow \{0, 1\}$ beschreibt dazu die Phasen durch $\Omega_l(t) = \{\mathcal{X}(t, \cdot) = 1\}$, $\Omega_s(t) = \Omega \setminus \Omega_l(t)$. Es bezeichne dann $\Gamma(t) = \Omega \cap \partial^* \{\mathcal{X}(t) = 1\}$ die Phasengrenze.

Sei $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ und Daten

$$\begin{aligned} u_0 &\in L^\infty(\Omega) \cap H^{1,2}(\Omega), \\ \mathcal{X}_0 &\in BV(\Omega; \{0, 1\}), \\ u_D &\in H^{1,2}(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T), \\ f &\in L^\infty(\Omega_T), \end{aligned}$$

gegeben. Wir definieren die (affinen) Unterräume $M_0 = \{u \in H^{1,2}(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}$, $M_{u_D} = u_D + M_0$. Dann heißen Funktionen $u, \mathcal{X} : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; M_{u_D}) \cap L^\infty(0, T; L^p(\Omega)), \\ \mathcal{X} &\in L^\infty(0, T; BV(\Omega; \{0, 1\})), \\ (u + \mathcal{X}) &\in C^0(0, T; L^p(\Omega)) \end{aligned}$$

für alle $1 \leq p < \infty$ schwache Lösungen des Stefan-Gibbs-Thomson-Problems mit Anfangswert $(u_0 + \mathcal{X}_0)$ für $(u + \mathcal{X})$ sowie Dirichlet-Randwerten u_D auf Γ_D und Neumann-Nullrandwerten auf $\partial\Omega \setminus \Gamma_D$, falls

$$\int_{\Omega_T} (u + \mathcal{X}) \partial_t \varphi + \int_{\Omega} (u_0 + \mathcal{X}_0) \varphi(0) - \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega_T} f \varphi \quad (2.4)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty([0, T] \times \overline{\Omega})$, $\varphi = 0$ auf Γ_D und

$$\int_{\Omega_T} \left(\nabla \cdot \xi - \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \cdot D\xi \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \right) |\nabla \mathcal{X}| - \int_{\Omega_T} \nabla \cdot (u\xi) \mathcal{X} = 0 \quad (2.5)$$

für alle $\xi \in C_c^\infty(\Omega_T; \mathbb{R}^3)$. In [Luc91] wird die Existenz solcher schwacher Lösungen bewiesen und gezeigt, dass diese im Allgemeinen nicht eindeutig sind.

Es seien noch einige Bemerkungen zu dieser schwachen Formulierung angefügt:

2.1 Bemerkung

- 1) Die Funktionen $t \mapsto u(t), \mathcal{X}(t)$ können „springen“, müssen also im Gegensatz zu $t \mapsto (u + \mathcal{X})(t)$ nicht stetig bezüglich der $L^1(\Omega)$ -Norm sein. Deshalb kann eine Anfangsbedingung nur für $(u + \mathcal{X})$ formuliert werden. Wir können so auch Lösungen für Anfangsdaten, die das Gibbs–Thomson-Gesetz nicht erfüllen, erhalten. Die schlechte separate Kontrolle über u und \mathcal{X} ist weiterhin ein Grund für die Uneindeutigkeit der Lösungen.
- 2) Als Integral über die Oberflächendivergenz von ξ entspricht der erste Term in (2.5) der ersten Variation des Flächeninhaltsfunktionals in Richtung ξ . Für glatte Flächen ist diese gerade durch die mittlere Krümmung bestimmt. Daher ist mit (2.5) eine schwache Formulierung des Gibbs–Thomson-Gesetzes gegeben. Wir nennen diese im Folgenden „BV-Formulierung“.
- 3) Im Kapitel 7 werden wir sehen, dass die spezielle Konstruktion (die „globale Minimierung“) in [Luc91] dazu führt, dass die Phasenfunktionen für fast alle Zeiten noch eine Minimierungseigenschaft besitzen. Diese impliziert unter anderem, dass die Phasengrenzen $\partial\{\mathcal{X}(t) = 1\} \cap \Omega$ für fast alle $t \in (0, T)$ glatte Hyperflächen sind.
- 4) Aufgrund der Minimierungseigenschaft der Phasenfunktionen kann gezeigt werden, dass die Phasengrenzen senkrecht auf $\partial\Omega$ treffen oder in einer kompakten Teilmenge von Ω liegen (siehe dazu [Vis96] Proposition VI.4.4).
- 5) In [Luc91] wird die Gleichung (2.5) für alle $\xi \in C^\infty((0, T) \times \overline{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ mit $\xi \cdot \nu_\Omega = 0$ auf $\partial\Omega$ gezeigt. Ist dann $x \in \partial\Omega \cap \overline{\Gamma(t)}$, ist $\Gamma(t)$ in einer Umgebung von x ein glattes zweidimensionales Flächenstück und besitzt $\Gamma(t)$ in x die äußere Co-Normale $\vec{n}(t, x)$, so folgt $\vec{n}(t, x) = \nu_\Omega(x)$. In diesem Sinne ist hier bereits die Kontaktwinkelbedingung formuliert. Es ist aber durch (2.5) nicht ausgeschlossen, dass in $x \in \partial\Omega \cap \overline{\Gamma(t)}$ mehrere glatte Flächenstücke, die jeweils eine äußere Co-Normale besitzen, zusammentreffen. Es folgt nur, dass diese äußeren Co-Normalen zu einem positiven Vielfachen von $\nu_\Omega(x)$ aufaddieren. Man braucht also die Minimierungseigenschaft der Lösungen, um die Kontaktwinkelbedingung zufriedenstellend erfüllen zu können.

Wir wollen mittels einer lokalen Minimierungsstrategie Lösungen des Gibbs-Thomson-Problems konstruieren, die den Energiebilanzgleichungen ebenfalls in der schwachen Formulierung (2.4) genügen. Das Gibbs-Thomson-Gesetz wird in einer verallgemeinerten Formulierung erfüllt, die wir im nächsten Kapitel erläutern.

Kapitel 3

Eine mittlere Krümmung für allgemeine Phasengrenzen

In diesem Abschnitt zeigen wir, dass Phasengrenzen, die sich durch verdeckte Anteile hinreichend regulär ergänzen lassen, eine (verallgemeinerte) mittlere Krümmung zugeordnet werden kann.

Diese ist im Sinne der geometrischen Maßtheorie erklärt. In der folgenden Bemerkung geben wir dazu einige Notationen und Definitionen an. Ansonsten sei auf die Bücher von Brakke [Bra78], Simon [Sim83], Federer [Fed69], Evans/Gariepy [EG92] und Ambrosio/Fusco/Pallara [AFP00] sowie die Arbeit von Allard [All72] verwiesen.

3.1 Bemerkung Sei das Volumen der k -dimensionalen Einheitskugel mit ω_k bezeichnet und für $(y, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ sowie $\varrho, \sigma > 0$ die Umgebungen

$$Z_{\varrho, \sigma}((y, t)) = B_{\varrho}^{n-1}(y) \times (t - \sigma, t + \sigma)$$

von (y, t) in \mathbb{R}^n definiert.

Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und μ ein Radonmaß auf Ω . Der Träger von μ ist durch

$$\text{spt}(\mu) = \overline{\{x \in \Omega : \mu(B_{\varrho}(x)) > 0 \text{ für alle } \varrho > 0\}} \cap \Omega$$

gegeben, „Konvergenz als Radonmaße“ meint schwach*-Konvergenz auf $C_c^0(\Omega)^*$.

Für $k \in \mathbb{N}$, eine Menge $A \subset \Omega$ und $x \in \Omega$ erklären wir die Dichten

$$\begin{aligned} \theta^k(\mu, x) &= \lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_{\varrho}(x))}{\omega_k \varrho^k}, \\ \theta^k(A, x) &= \theta^k(\mathcal{H}^k \llcorner A, x), \\ \theta(\mu, A, x) &= \lim_{\varrho \downarrow 0} \frac{\mu(B_{\varrho}(x) \cap A)}{\mu(B_{\varrho}(x))}, \end{aligned}$$

falls die jeweiligen Grenzwerte existieren.

Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ ein k -dimensionaler Unterraum und $\theta > 0$, so nennen wir P den

k -dimensionalen maßtheoretischen Tangentialraum $T_x\mu$ mit Vielfachheit θ von μ in $x \in \Omega$, falls für die skalierten Maße $\mu_{x,\lambda}$, definiert durch $\mu_{x,\lambda}(A) = \lambda^{-k}\mu(\lambda A + x)$, gilt:

$$\mu_{x,\lambda} \rightarrow \theta \mathcal{H}^k \llcorner P \text{ als Radonmaße.}$$

Für eine \mathcal{H}^k -messbare Menge $A \subset \Omega$ mit lokal endlichem \mathcal{H}^k -Maß ist der k -dimensionale maßtheoretische Tangentialraum in einem Punkt $x \in A$ definiert durch

$$T_x A = T_x(\mathcal{H}^k \llcorner A),$$

falls der letztere existiert.

Wir nennen μ rektifizierbare $(n-1)$ -Varifaltigkeit, wenn für μ -fast alle $x \in \Omega$ ein $(n-1)$ -dimensionaler maßtheoretischer Tangentialraum $T_x\mu$ existiert, und integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeit, falls zusätzlich die $(n-1)$ -dimensionale Dichte $\theta^{n-1}(\mu, \cdot)$ eine μ -fast überall ganzzahlige Funktion ist. Eine \mathcal{H}^{n-1} -messbare Menge $A \subset \Omega$ mit lokal endlichem \mathcal{H}^{n-1} -Maß heißt $(n-1)$ -rektifizierbar, falls $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner A$ eine rektifizierbare $(n-1)$ -Varifaltigkeit ist.

Wir nennen einen Punkt $x_0 \in \text{spt}(\mu)$ generisch bezüglich μ , falls gilt:

Es existiert der Tangentialraum $T_{x_0}\mu$,

$$\theta^{n-1}(\mu, x_0) = \theta_0 \in \mathbb{N},$$

$$\theta\left(\mu, \{\theta^{n-1}(\mu, \cdot) = \theta_0\}, x_0\right) = 1.$$

Ist $A \subset \Omega$, $x_0 \in \Omega$ und $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^m$, so nennen wir $y \in \mathbb{R}^m$ den approximativen Limes von φ in x_0 , falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\theta^n\left(\Omega \setminus \{|\varphi(\cdot) - y| < \varepsilon\}, x_0\right) = 0.$$

Wir schreiben dann $y = \text{ap-}\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)$.

Eine Funktion $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ heißt zweimal approximativ differenzierbar in $x_0 \in \Omega$, falls $b \in \mathbb{R}^n$ und eine symmetrische Matrix $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existieren, so dass

$$\text{ap-}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|\varphi(x) - \varphi(x_0) - b \cdot (x - x_0) - \frac{1}{2}(x - x_0)^T S (x - x_0)|}{|x - x_0|^2} = 0.$$

Wir setzen dann

$$\nabla\varphi(x_0) = b, \quad D^2\varphi(x_0) = S.$$

Einer rektifizierbaren $(n-1)$ -Varifaltigkeit μ auf Ω ordnen wir durch

$$V_\mu(\psi) = \int_\Omega \psi(x, T_x\mu) d\mu(x) \quad \text{für } \psi \in C_c^0(G^{n-1}\Omega)$$

ein Radonmaß V_μ auf

$$G^{n-1}\Omega := \Omega \times \{S \subset \mathbb{R}^n : S \text{ ist } (n-1)\text{-dimensionaler Unterraum}\},$$

zu. (Üblicherweise wird ein Radonmaß auf $G^{n-1}\Omega$ als allgemeine $(n-1)$ -Varifaltigkeit bezeichnet. Rektifizierbare $(n-1)$ -Varifaltigkeiten sind dann gerade die Radonmaße auf $G^{n-1}\Omega$, die sich wie oben durch eine rektifizierbare $(n-1)$ -Varifaltigkeit in unserem Sinne darstellen lassen. Wir identifizieren also die rektifizierbaren Varifaltigkeiten mit den zugrunde liegenden Radonmaßen auf Ω .)

Die erste Variation einer rektifizierbaren $(n-1)$ -Varifaltigkeit μ ist gegeben durch

$$\delta\mu(\xi) = \int_{\Omega} \operatorname{div}_{T_x\mu} \xi(x) d\mu(x) \quad \text{für } \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Wir sagen, dass μ lokal beschränkte erste Variation und einen mittleren Krümmungsvektor \vec{H}_μ hat, falls $\vec{H}_\mu \in L_{loc}^1(\mu)$ ist und

$$\delta\mu(\xi) = \int_{\Omega} -\vec{H}_\mu \cdot \xi d\mu \quad \text{für alle } \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$$

gilt.

„Konvergenz als Varifaltigkeiten“ meint die Konvergenz der (zugeordneten) Radonmaße auf $G^{n-1}\Omega$. Für rektifizierbare $(n-1)$ -Varifaltigkeiten folgt aus der Konvergenz als Varifaltigkeiten die Konvergenz als Radonmaße auf Ω . Für integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeiten mit gleichmäßig beschränkter Masse und gleichmäßig beschränkter erster Variation ergibt sich umgekehrt mit Hilfe des Integral-Kompaktheitssatzes von Allard [All72] aus der Konvergenz als Radonmaße auf Ω die Konvergenz als Varifaltigkeiten.

Ist $E \subset \Omega$ eine \mathcal{L}^n -messbare Menge beschränkter Variation, so bezeichne ∂^*E den reduzierten Rand, das ist die Menge der $x \in \operatorname{spt}(|\nabla \mathcal{X}_E|)$, für die die Radon-Nikodym-Ableitung $\nu(x) = \frac{\nabla \mathcal{X}_E}{|\nabla \mathcal{X}_E|}(x)$ mit $|\nu(x)| = 1$ existiert. Es ist $|\nabla \mathcal{X}_E| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^*E$ eine integrale (mit Dichte 1) $(n-1)$ -Varifaltigkeit auf Ω .

Wir betrachten nun Ränder von Caccioppoli-Mengen, die sich zu integralen Varifaltigkeiten mit einer hinreichend regulären mittleren Krümmung ergänzen lassen. Wir zeigen, dass die mittlere Krümmung auf dem reduzierten Rand dann unabhängig von der Ergänzung ist. In diesem Sinne besitzt der reduzierte Rand selbst eine mittlere Krümmung.

3.2 Proposition Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $E \subset \Omega$ und $\mathcal{X}_E \in BV(\Omega)$. Es gebe integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeiten μ_1, μ_2 auf Ω , so dass für $i = 1, 2$

$$\partial^* E \subset \text{spt}(\mu_i)$$

gilt und μ_i von lokal beschränkter erster Variation ist mit mittleren Krümmungsvektor \vec{H}_{μ_i} ,

$$\vec{H}_{\mu_i} \in L_{loc}^s(\mu_i), \quad s > n-1, \quad s \geq 2.$$

Dann ist

$$\vec{H}_{\mu_1} = \vec{H}_{\mu_2}$$

\mathcal{H}^{n-1} -fast überall auf $\partial^* E$.

Der Beweis ergibt sich aus folgendem Lemma, das auf Argumenten in [Sch01] und [Sch] beruht: Sind μ und \vec{H}_μ wie in der Proposition 3.2 und ist eine Teilmenge des Trägers von μ als Graph gegeben, so ist auf dieser Teilmenge die mittlere Krümmung von μ bereits durch die mittlere Krümmung der Graphenfunktion bestimmt:

3.3 Lemma Sei μ eine integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeit mit lokal beschränkter erster Variation und mittlerem Krümmungsvektor $\vec{H}_\mu \in L_{loc}^s(\mu)$, $s > n-1$, $s \geq 2$. Ist dann eine messbare Abbildung $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}^{n-1}$, gegeben mit

$$\Psi(y) := (y, \psi(y)) \in \text{spt}(\mu)$$

für alle $y \in Y$, so ist ψ in \mathcal{L}^{n-1} -fast allen $y \in Y$ zweimal approximativ differenzierbar und es gilt

$$\vec{H}_\mu(\Psi(y)) = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \psi}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}} \right)(y) \frac{(-\nabla \psi(y), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(y)|^2}}.$$

Beweis. Sei $\Sigma = \text{spt}(\mu)$. Im Folgenden bezeichne $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (durchaus verschiedene) Funktionen mit $\omega(\varrho) \rightarrow 0$ ($\varrho \rightarrow 0$).

Wir betrachten nun ein $y_0 \in Y$ mit

$$x_0 = \Psi(y_0) \text{ generischer Punkt bezüglich } \mu, \quad (3.1)$$

$$\lambda := |\nu_0 \cdot \vec{e}_n| > 0, \quad \nu_0 \perp T_{x_0} \mu, \quad |\nu_0| = 1, \quad (3.2)$$

$$\psi \text{ approximativ stetig in } y_0. \quad (3.3)$$

Es sei $t_0 := \psi(y_0)$ und $T_0 := T_{x_0} \mu$, weiter $\theta_0 = \theta^{n-1}(\mu, x_0)$ die $(n-1)$ -dimensionale Dichte von μ in x_0 und

$$m = m(\lambda) = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda}.$$

die „Steigung“ von T_0 bezüglich $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Mit [Sim83] Lemma 17.11 folgt aus der Existenz von $T_{x_0}\mu$ und $\vec{H}_\mu \in L^s_{loc}(\mu)$ mit $s > n - 1$:

$$\lim_{\varrho \rightarrow 0} \left(\sup \left\{ \frac{1}{\varrho} \text{dist}(x, x_0 + T_{x_0}\mu) : x \in B_\varrho^n(x_0) \cap \Sigma \right\} \right) = 0.$$

Damit können wir $\varrho_0 = \varrho_0(\lambda) > 0$ wählen, so dass $Z_{\varrho_0, 3m\varrho_0}(x_0) \subset\subset \Omega$ ist und für alle $0 < \varrho < \varrho_0$ gilt:

$$\Sigma \cap Z_{\varrho, 3m\varrho}(x_0) \subset Z_{\varrho, 2m\varrho}(x_0). \quad (3.4)$$

Wir definieren dann die obere und untere Höhenfunktion

$$\begin{aligned} \varphi_+ &: B_{\varrho_0}^{n-1}(y_0) \rightarrow [-\infty, \infty), \\ \varphi_- &: B_{\varrho_0}^{n-1}(y_0) \rightarrow (-\infty, \infty], \end{aligned}$$

durch

$$\begin{aligned} \varphi_+(y) &= \sup \{ t \in (t_0 - 3m\varrho_0, t_0 + 3m\varrho_0) : (y, t) \in \Sigma \}, \\ \varphi_-(y) &= \inf \{ t \in (t_0 - 3m\varrho_0, t_0 + 3m\varrho_0) : (y, t) \in \Sigma \}. \end{aligned}$$

Dann ist φ_+ oberhalb- und φ_- unterhalbstetig. Aus [Sch] Theorem 6.1 ergibt sich, dass \mathcal{L}^{n-1} -fast überall auf $B_{\varrho_0}^{n-1}(y_0)$ die Höhenfunktion φ_+ zweimal approximativ differenzierbar ist und für \mathcal{L}^{n-1} -fast alle Punkte $y \in B_{\varrho_0}^{n-1}(y_0) \cap \{\varphi_+ \in \mathbb{R}\}$ gilt:

$$\vec{H}_\mu \left((y, \varphi_+(y)) \right) = \left(\nabla \cdot \frac{\nabla \varphi_+}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi_+|^2}} \right) (y) \frac{(-\nabla \varphi_+(y), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \varphi_+(y)|^2}}. \quad (3.5)$$

Da φ_+ und ψ messbar sind und mit [Fed69] 2.9.11 \mathcal{L}^{n-1} -fast alle Punkte der Menge $\{\varphi_+ = \psi\}$ volle Dichte in dieser Menge haben, ergibt sich: In \mathcal{L}^{n-1} -fast allen Punkten aus $\{\varphi_+ = \psi\}$ ist auch ψ zweimal approximativ differenzierbar und erfüllt die Krümmungsgleichung

$$\vec{H}_\mu \left((y, \psi(y)) \right) = \left(\nabla \cdot \frac{\nabla \psi}{\sqrt{1 + |\nabla \psi|^2}} \right) (y) \frac{(-\nabla \psi(y), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(y)|^2}}. \quad (3.6)$$

Wir wollen nun zeigen, dass $\varphi_+ = \psi$ in einer Umgebung von y_0 mit voller Dichte ist. Für $(y, \psi(y)) \in Z_{\varrho_0, 3m\varrho_0}(x_0)$ erhalten wir

$$\varphi_-(y) \leq \psi(y) \leq \varphi_+(y). \quad (3.7)$$

Zunächst folgern wir mit Hilfe einer Version des Lipschitz-Approximationssatzes von Brakke (siehe Satz A.1 im Anhang) wie in [Sch01], dass die Menge

$$\Sigma_0 := \{(y, \varphi_\pm(y)) : y \in B_{\varrho_0}^{n-1}(y_0), \varphi_+(y) = \varphi_-(y)\}$$

volle Dichte in x_0 bezüglich μ hat. Dazu betrachten wir die skalierten Maße $\mu_{x_0, \varrho}$,

$$\mu_{x_0, \varrho}(A) = \varrho^{-n+1} \mu(x_0 + \varrho A).$$

Für $0 < \varrho \ll 1$ ist $\mu_{x_0, \varrho}$ integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeit in $B_7^n(0)$ und wir behaupten, dass mit $\varrho \rightarrow 0$ (vergleiche die Definitionen im Anhang)

$$\begin{aligned} \mu_{x_0, \varrho}(B_7^n(0)) &\leq 2\omega_{n-1} 7^{n-1} \theta_0, \\ \text{lipapp}_{\mu_{x_0, \varrho}}(0, 7, T_0) &= \text{lipapp}_{\mu}(x_0, 7\varrho, T_0) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

gilt. In der Tat erhalten wir aus der Existenz von $T_0 = T_{x_0} \mu$

$$\int_{B_7^n(0)} \text{dist}(x, T_0)^2 d\mu_{x_0, \varrho} \rightarrow \int_{B_7^n(0)} \text{dist}(x, T_0)^2 d(\theta_0 \mathcal{H}^{n-1} \llcorner T_0)(x) = 0,$$

und mit $U_r(x_0) = \{(x, S) \in G^{n-1}\Omega : x \in B_r(x_0), \|T_x \mu - S\| < r\}$, $r > 0$,

$$\begin{aligned} &(7\varrho)^{-n+1} \int_{B_{7\varrho}^n(x_0)} \|T_x \mu - T_0\|^2 d\mu(x) \\ &= \frac{\mu(B_{7\varrho}^n(x_0))}{(7\varrho)^{n-1}} \left(\int_{U_{7\varrho}(x_0)} 1 dV_{\mu}(x, S) \right)^{-1} \int_{U_{7\varrho}(x_0)} \|S - T_0\|^2 dV_{\mu}(x, S) \\ &\rightarrow \theta_0 \omega_{n-1} \|T_{x_0} \mu - T_0\|^2 = 0, \end{aligned}$$

da $(x, S) \mapsto \|S - T_0\|^2$ stetig auf $G^{n-1}\Omega$. Für den dritten Term der Lipschitz-Approximationskonstanten ergibt sich

$$\begin{aligned} &(7\varrho)^{-n+3} \int_{B_{7\varrho}^n(x_0)} |\vec{H}_{\mu}|^2 d\mu \\ &\leq (7\varrho)^{-n+3} \left(\int_{B_{7\varrho}^n(x_0)} |\vec{H}_{\mu}|^s d\mu \right)^{\frac{2}{s}} \mu(B_{7\varrho}^n(x_0))^{1-\frac{2}{s}} \\ &\leq C \left((7\varrho)^{-n+1} \mu(B_{7\varrho}^n(x_0)) \right)^{1-\frac{2}{s}} (7\varrho)^{2(1-\frac{n-1}{s})} \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen von Satz A.1 sind dann mit $\theta_0 = \theta^{n-1}(\mu, x_0)$ sowie $T_0 = T_{x_0} \mu$ erfüllt und es gilt

$$\text{lipapp}_{\mu_{x_0, \varrho}}(0, 7, T_0) \rightarrow 0 \quad (\varrho \rightarrow 0).$$

Wir erhalten somit eine von ϱ unabhängige Konstante δ_0 und θ_0 Lipschitzstetige Funktionen

$$f_i^{\varrho} : B_{\delta_0}^{n-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, \theta_0,$$

so dass für die Menge Y_0^ϱ aller $y \in B_{\delta_0}^{n-1}(0)$ mit

$$\theta^{n-1}(\mu_{x_0, \varrho}, (y, t)) = \#\{i : f_i^\varrho(y) = t\} \text{ für alle } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \quad (3.8)$$

und die Menge

$$X_0^\varrho := \text{spt}(\mu_{x_0, \varrho}) \cap (Y_0^\varrho \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

gilt:

$$\mu_{x_0, \varrho}(Z_{\delta_0, 1/2}(0) \setminus X_0^\varrho) + \mathcal{L}^{n-1}(B_{\delta_0}^{n-1}(0) \setminus Y_0^\varrho) \rightarrow 0 \quad (\varrho \rightarrow 0). \quad (3.9)$$

Verkleinern wir nun (falls nötig) δ_0 , so dass

$$0 < \delta_0 < \frac{1}{4m},$$

so gilt für alle $0 < \varrho \ll 1$

$$Z_{\varrho\delta_0, 2m\varrho\delta_0}(x_0) \subset Z_{\varrho\delta_0, \varrho/2}(x_0), \quad (3.10)$$

$$Z_{\varrho\delta_0, \varrho/2}(x_0) \subset Z_{\varrho_0, 3m\varrho_0}(x_0). \quad (3.11)$$

Für $x \in (x_0 + \varrho X_0^\varrho) \cap \{\theta^{n-1}(\mu, \cdot) = \theta_0\}$, $x = (y, t)$, ist dann wegen (3.8)

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \varrho f_1^\varrho\left(\frac{y - y_0}{\varrho}\right) = \dots = t_0 + \varrho f_{\theta_0}^\varrho\left(\frac{y - y_0}{\varrho}\right), \\ \{x\} &= \Sigma \cap \left(\{y\} \times (t_0 - \varrho/2, t_0 + \varrho/2)\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Aufgrund von (3.11) erhalten wir $x \in Z_{\varrho_0, 3m\varrho_0}(x_0)$ und daher $\varphi_+(y), \varphi_-(y) \in \mathbb{R}$. Weiterhin schließen wir mit (3.4) und (3.10)

$$\varphi_+(y), \varphi_-(y) \in \{y\} \times (t_0 - \varrho/2, t_0 + \varrho/2)$$

und es folgt aus (3.12), dass $\varphi_-(y) = \varphi_+(y)$ und $x \in \Sigma_0$ ist.

Schließlich berechnen wir mit $\alpha = \min(\delta_0, 1/2)$ für alle $0 < \varrho < \varrho_0$

$$\begin{aligned} &\mu(B_{\alpha\varrho}^n(x_0) \setminus \Sigma_0) \\ &\leq \mu\left(B_{\alpha\varrho}^n(x_0) \setminus ((x_0 + \varrho X_0^\varrho) \cap \{\theta^{n-1}(\mu, \cdot) = \theta_0\})\right) \\ &\leq \mu\left(B_{\alpha\varrho}^n(x_0) \setminus (x_0 + \varrho X_0^\varrho)\right) + \mu\left(B_{\alpha\varrho}^n(x_0) \setminus \{\theta^{n-1}(\mu, \cdot) = \theta_0\}\right) \\ &\leq \varrho^{n-1} \mu_{x_0, \varrho}(Z_{\delta_0, 1/2}(0) \setminus X_0^\varrho) + \mu\left(B_{\alpha\varrho}^n(x_0) \setminus \{\theta^{n-1}(\mu, \cdot) = \theta_0\}\right) \\ &= \varrho^{n-1} \omega(\varrho) + \theta_0 \omega_{n-1}(\alpha\varrho)^{n-1} \omega(\varrho) \end{aligned}$$

wegen (3.9), der Voraussetzung (3.1), die insbesondere volle Dichte bezüglich μ in x_0 für die Menge $\{\theta^{n-1}(\mu, \cdot) = \theta_0\}$ verlangt, und $\theta_0 = \theta^{n-1}(\mu, x_0)$. Damit ist

$$\mu(B_{\alpha\rho}^n(x_0) \setminus \Sigma_0) \leq \rho^{n-1}\omega(\rho). \quad (3.13)$$

Nun gilt wegen (3.7)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n-1}(\{\varphi_+ \neq \psi\} \cap B_\rho^{n-1}(y_0)) &\leq \mathcal{L}^{n-1}(\{\Psi \notin Z_{\rho, 3m\rho_0}(x_0)\}) \\ &\quad + \mathcal{L}^{n-1}(\{\Psi \in Z_{\rho, 3m\rho_0}(x_0)\} \cap \{\varphi_+ \neq \varphi_-\}). \end{aligned}$$

Aus der approximativen Stetigkeit von ψ in y_0 folgt

$$\mathcal{L}^{n-1}(\{\Psi \notin Z_{\rho, 3m\rho_0}(x_0)\}) = \rho^{n-1}\omega(\rho). \quad (3.14)$$

Für die orthogonale Projektion $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ und einen $(n-1)$ -dimensionalen Unterraum $T = \{\nu(T)\}^\perp$ des \mathbb{R}^n ergibt sich

$$J_T\pi = |\nu(T) \cdot \vec{e}_n|.$$

Aus der Koflächenformel und der Ungleichung (3.4) erhalten wir dann mit $\beta = 2 \max\{2m, 1\}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{n-1}(\{\Psi \in Z_{\rho, 3m\rho_0}(x_0)\} \cap \{\varphi_+ \neq \varphi_-\}) &\leq \mathcal{L}^{n-1}\left(\pi\left((\Sigma \cap Z_{\rho, 2m\rho}(x_0)) \setminus \Sigma_0\right)\right) \\ &\leq \int_{(\Sigma \cap Z_{\rho, 2m\rho}(x_0)) \setminus \Sigma_0} |\nu(T_x\mu) \cdot \vec{e}_n| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &\leq \int_{B_{\beta\rho}^n(x_0) \setminus \Sigma_0} 1 d\mu \\ &= \rho^{n-1}\omega(\rho), \end{aligned}$$

wobei hier (3.13) ausgenutzt wird. Insgesamt haben wir mit (3.14)

$$\theta^{n-1}(\{\varphi_+ \neq \psi\}, y_0) = 0,$$

insbesondere ist ψ auf einer Menge voller \mathcal{L}^{n-1} -Dichte in y_0 zweimal approximativ differenzierbar und es gilt (3.6). Betrachten wir nun die Menge

$$G := \{y \in Y : \psi \text{ ist in } y \text{ zweimal approximativ differenzierbar und erfüllt die Gleichung (3.6)}\}.$$

Dann ist G nach [Fed69] 3.1.4 messbar. Für \mathcal{L}^{n-1} -fast alle $y \in Y \setminus G$ folgt mit [Fed69] 2.9.11

$$\theta^{n-1}(G, y) = 0. \quad (3.15)$$

Andererseits sind für \mathcal{L}^{n-1} -fast alle $y \in Y$ die Voraussetzungen (3.1)-(3.3) erfüllt: Mit der Koflächenformel folgt

$$\mathcal{L}^{n-1}\left(\{y \in Y : \nu(T_{\Psi(y)}\mu) \cdot \vec{e}_n = 0\}\right) = 0$$

und

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{n-1}\left(\{y \in Y : \Psi(y) \text{ ist nicht generisch bezüglich } \mu\}\right) \\ & \leq \mu\left(\{x \in \Sigma \text{ ist nicht generisch bezüglich } \mu\}\right) \\ & = 0, \end{aligned}$$

wobei wir die Rektifizierbarkeit von μ und [Fed69] 2.9.11 benutzt haben. Weiterhin ist ψ in \mathcal{L}^{n-1} -fast allen Punkten $y \in Y$ approximativ stetig, da ψ messbar ist ([Fed69] 2.9.13).

Nach dem oben Gezeigten gilt somit

$$\theta^{n-1}(G, y) = 1$$

für \mathcal{L}^{n-1} -fast alle $y \in Y \setminus G$ und wegen (3.15) folgt schlussendlich

$$\mathcal{L}^{n-1}(Y \setminus G) = 0,$$

was den Beweis beschließt. □

Wir können nun die Proposition 3.2 beweisen:

Beweis Proposition 3.2. Da nach Voraussetzung $\mathcal{X}_E \in BV(\Omega)$ ist und damit der reduzierte Rand von E eine $(n-1)$ -rektifizierbare Menge ist, können wir ∂^*E bis auf eine \mathcal{H}^{n-1} -Nullmenge als Vereinigung abzählbar vieler Lipschitz-Graphen darstellen (siehe etwa [AFP00], Proposition 2.76). Lemma 3.3 sagt nun aus, dass auf jedem dieser Lipschitz-Graphen die mittleren Krümmungen \vec{H}_{μ_1} und \vec{H}_{μ_2} bereits \mathcal{H}^{n-1} -fast überall allein durch die Graphenfunktion eindeutig bestimmt und insbesondere gleich sind. Es folgt damit

$$\vec{H}_{\mu_1} = \vec{H}_{\mu_2}$$

\mathcal{H}^{n-1} -fast überall auf ∂^*E . □

Mit der Proposition 3.2 ist nun die folgende Definition gerechtfertigt:

3.4 Definition Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $E \subset \Omega$ und $\mathcal{X}_E \in BV(\Omega)$. Es existiere eine integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeit μ auf Ω , so dass

$$\partial^* E \subset \text{spt}(\mu),$$

μ von lokal beschränkter erster Variation ist und einen mittleren Krümmungsvektor \vec{H}_μ mit

$$\vec{H}_\mu \in L^s_{loc}(\mu), \quad s > n-1, \quad s \geq 2$$

besitzt. Dann nennen wir

$$\vec{H} = \vec{H}_\mu|_{\partial^* E}$$

den verallgemeinerten mittleren Krümmungsvektor von $\partial^* E$.

Verallgemeinerte Lösungen (u, \mathcal{X}) sollen das Gibbs–Thomson-Gesetz dann in der Form erfüllen, dass die Phasengrenze $\partial^* \{\mathcal{X} = 1\}$ im Sinne der Definition 3.4 eine mittlere Krümmung besitzt und diese \mathcal{H}^{n-1} -fast überall auf $\partial^* \{\mathcal{X} = 1\}$ durch die Spur von u als $\vec{H} = u \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|}$ gegeben ist. Diese Formulierung ist sinnvoll und erweitert die BV-Formulierung:

3.5 Bemerkung Seien $u \in H^{1,2}(\Omega)$ und $\mathcal{X} \in BV(\Omega)$.

1) Für \mathcal{H}^{n-1} -fast alle $x \in \Omega$ existiert der Limes der Mittelwerte von u

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} u(y) dy.$$

In diesem Sinne existieren für alle $(n-1)$ -rektifizierbaren Mengen \mathcal{H}^{n-1} -fast überall Spurwerte von u .

2) Ist $n = 2, 3$ und erfüllen u, \mathcal{X} das Gibbs–Thomson-Gesetz in der BV-Formulierung, so hat $\partial^* \{\mathcal{X} = 1\}$ eine mittlere Krümmung im Sinne der Definition 3.4 und es gilt \mathcal{H}^{n-1} -fast überall auf $\partial^* \{\mathcal{X} = 1\}$, dass $\vec{H} = u \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|}$ ist.

3) Ist $n = 2, 3$, weiter $\mu = |\nabla \mathcal{X}|$ bereits eine integrale Varifaltigkeit mit lokal beschränkter erster Variation und mittlerer Krümmung $\vec{H}_\mu \in L^s_{loc}(\mu)$, $s > n-1$, und gilt μ -fast überall $\vec{H}_\mu = u \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|}$, so erfüllen u, \mathcal{X} das Gibbs–Thomson-Gesetz in der BV-Formulierung.

Beweis. Die Existenz des Mittelwerte-Limes ergibt sich auf einer Menge von verschwindender 2-Kapazität und damit \mathcal{H}^{n-1} -fast überall mit [EG92], 4.7.2 und 4.8. Sei jetzt $n = 2, 3$. Für $\xi \in C_c^\infty(\Omega)$ und $\mu = |\nabla \mathcal{X}|$ gilt:

$$\delta\mu(\xi) = \int_{\Omega} \text{div}_{T_x\mu} \xi(x) d\mu(x) = \int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \xi - \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \cdot D\xi \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \right) |\nabla \mathcal{X}|.$$

Unter den Voraussetzungen von 2) folgt dann aus [Sch01] Theorem 1.3, dass μ von lokal beschränkter erster Variation ist, einen mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}_\mu \in L^s_{loc}(\mu)$, $s > n - 1$, besitzt und $u \in L^s_{loc}(\mu)$ ist. Damit ergibt sich

$$-\int_{\Omega} \vec{H}_\mu \cdot \xi \, d\mu = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u\xi) \mathcal{X} = -\int_{\Omega} u \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \cdot \xi \, d\mu$$

und die Behauptung.

Unter den Voraussetzungen von 3) folgt

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \cdot \xi - \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \cdot \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \right) |\nabla \mathcal{X}| = \int_{\Omega} -u \frac{\nabla \mathcal{X}}{|\nabla \mathcal{X}|} \cdot \xi \, d\mu = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u\xi) \mathcal{X}.$$

□

Kapitel 4

Ein neuer Existenzsatz für das Stefan-Gibbs- Thomson-Problem

In diesem Kapitel formulieren wir den angestrebten Existenzsatz. Wir müssen dabei voraussetzen, dass der Dirichlet-Rand Γ_D positives Hausdorff-Maß hat (siehe dazu die Bemerkung 5.9). Wir formulieren das Ergebnis hier für die Raumdimension $n = 3$.

4.1 Satz Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand, $T > 0$, weiter $\Gamma_D \subset \partial\Omega$, $\mathcal{H}^2(\Gamma_D) > 0$ und Daten

$$\begin{aligned} u_0 &\in L^\infty(\Omega) \cap H^{1,2}(\Omega), \\ \mathcal{X}_0 &\in BV(\Omega; \{0, 1\}), \\ u_D &\in H^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega), \\ f &\in L^\infty(\Omega) \end{aligned}$$

gegeben. Dann existieren Funktionen

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\in L^\infty(0, T; BV(\Omega; \{0, 1\})), \\ u &\in L^2(0, T; M_{u_D}) \cap L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \text{ für alle } 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

so dass

$$\int_{\Omega_T} (u + \mathcal{X}) \partial_t \varphi + \int_{\Omega} (u_0 + \mathcal{X}_0) \varphi(0) - \int_{\Omega_T} \nabla u \cdot \nabla \varphi = - \int_{\Omega_T} f \varphi \quad (4.1)$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty([0, T) \times \bar{\Omega})$, $\varphi = 0$ auf Γ_D gilt, und für fast alle $t \in (0, T)$ der reduzierte Rand von $E(t) = \{\mathcal{X}(t, \cdot) = 1\}$ einen verallgemeinerten mittleren Krümmungsvektor $\vec{H}(t)$ besitzt, der \mathcal{H}^2 -fast überall auf $\partial^* E(t)$ das Gibbs-Thomson-Gesetz

$$\vec{H}(t) = u(t) \nu(t) \quad (4.2)$$

mit $\nu(t) = \frac{\nabla \mathcal{X}(t)}{|\nabla \mathcal{X}(t)|}$ auf $\partial^* E(t)$ erfüllt.

Der Beweis des Existenzsatzes folgt in den nächsten Kapiteln.

4.2 Bemerkung

- 1) Wir erhalten auch für zeitabhängige Daten $f \in L^\infty(\Omega_T)$ und $u_D \in H^{1,2}(\Omega_T) \cap L^\infty(\Omega_T)$ Existenz von Lösungen. Da die wesentlichen Teile des Existenzbeweises aber von den nötigen Änderungen unbeeinflusst bleiben, setzen wir der übersichtlicheren Darstellung halber zeitunabhängige Daten voraus.
- 2) Der Existenzsatz gilt auch für die Raumdimension $n = 2$, hier kann der Beweis analog geführt werden. Dagegen versagt ein entsprechendes Verfahren in den Dimensionen $n \geq 4$, da die Regularitätsvoraussetzungen des Konvergenzsatzes aus [Sch01], den wir an entscheidender Stelle benutzen, dann nicht erfüllt sind.
- 3) In dieser Formulierung ist keine Aussage über den Kontaktwinkel zwischen Phasengrenze und $\partial\Omega$ enthalten. Da unsere Lösungen keine Minimierungseigenschaft wie die aus [Luc91] besitzen, scheint eine solche Aussage mit den zur Zeit zur Verfügung stehenden Mitteln auch nicht möglich. Siehe dazu auch die Anmerkung im zweiten Kapitel zu den Lösungen aus [Luc91] und die Bemerkung 6.3.

Kapitel 5

Zeitdiskretisierung und lokale Minimierung

Zur Konstruktion von Lösungen des Stefan–Gibbs–Thomson-Problems bestimmen wir zeitdiskrete Approximationen. Dabei benutzen wir dieselben Funktionale, die in [Luc91] global minimiert werden, minimieren diese aber lokal.

Um zu einer vorgegeben Zeitschrittweite $h > 0$ Näherungslösungen

$$u^h : (0, T) \rightarrow M_{u_D} \cap L^\infty(\Omega), \mathcal{X}^h : (0, T) \rightarrow BV(\Omega; \{0, 1\})$$

zu erklären, setzen wir

$$u_t^h = u_0, \quad \mathcal{X}_t^h = \mathcal{X}_0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq h$$

und bestimmen iterativ zu bereits bekannten $u_{t-h}^h, \mathcal{X}_{t-h}^h$ die Werte u_t^h, \mathcal{X}_t^h .

Wir definieren dazu Funktionale $F_t^h : BV(\Omega; \{0, 1\}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F_t^h(\mathcal{X}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}| - \int_{\Omega} \left(K^h(u_{t-h}^h) \mathcal{X} - \frac{1}{2} K_0^h(\mathcal{X} - \mathcal{X}_{t-h}^h)(\mathcal{X} - \mathcal{X}_{t-h}^h) \right), \quad (5.1)$$

wobei $K_0^h(v), K^h(v)$ die Lösungen von

$$\begin{aligned} K_0^h(v) - h\Delta K_0^h(v) &= v, & K_0^h(v)|_{\Gamma_D} &= 0, & \nabla K_0^h(v) \cdot \nu_{\Omega}|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} &= 0 \\ K^h(v) - h\Delta K^h(v) &= v, & K^h(v)|_{\Gamma_D} &= u_D, & \nabla K^h(v) \cdot \nu_{\Omega}|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_D} &= 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

sind.

In [Luc91] wird \mathcal{X}_t^h als globaler Minimierer von F_t^h gewählt und

$$u_t^h = K^h(u_{t-h}^h) - K_0^h(\mathcal{X}_t^h - \mathcal{X}_{t-h}^h) + hK_0^h(f)$$

gesetzt. Einige Bemerkungen zu diesem Vorgehen:

- Die letzte Gleichung ist äquivalent zur zeitdiskreten Energiebilanzgleichung

$$\partial_t^{-h}(u^h + \mathcal{X}^h) - \Delta u^h = f, \quad u_t^h|_{\Gamma_D} = u_D,$$

was das Auftreten der Operatoren K^h, K_0^h motiviert.

- Betrachten wir die erste Variation von F_t^h , so ist diese für das erste Integral durch die mittlere Krümmung gegeben und wir erhalten für stationäre Punkte von F_t^h ein approximatives Gibbs–Thomson-Gesetz.
- Sind für $h < t \leq t_0$ die \mathcal{X}_t^h stationäre Punkte der Funktionale F_t^h und ist zusätzlich $F_t^h(\mathcal{X}_t^h) \leq F_t^h(\mathcal{X}_{t-h}^h)$, so bekommen wir eine Energieabschätzung

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_{t_0}^h| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{t_0}^h)^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{\Omega} |\nabla u_t^h|^2 dt \leq C$$

unabhängig von t_0, h .

- Der Term $\frac{1}{2} \int_{\Omega} K_0^h(\mathcal{X} - \mathcal{X}_{t-h}^h)(\mathcal{X} - \mathcal{X}_{t-h}^h)$ des Funktionals F_t^h ist nichtnegativ und „bestraft“ in gewisser Weise die Entfernung von \mathcal{X}_{t-h}^h . Dieser Strafterm ist aber vergleichsweise milde (zum Beispiel gleichmäßig beschränkt in h im Gegensatz zum entsprechenden Term in der üblichen Diskretisierung von Gradientenflüssen). Das führt einerseits dazu, dass bei einer globalen Minimierung von F_t^h die Grenzwerte der approximativen Lösungen eine Minimierungseigenschaft behalten und ein Massenverlust der Oberflächen ausgeschlossen werden kann. Andererseits werden Sprünge der Lösungen erleichtert.

Betrachten wir das Funktional F_t^h als eine Art Energie für unser System, so ist die Wahl von \mathcal{X}_t^h als globaler Minimierer thermodynamisch schwer zu rechtfertigen: Ein globales Minimum von F_t^h könnte weit entfernt von \mathcal{X}_{t-h}^h sein, ein großer Betrag an Energie könnte „dazwischen“ liegen. Trotzdem würde ein globales Minimum einem lokalen in der Nähe von \mathcal{X}_{t-h}^h mit eventuell nur geringfügig größerer Energie vorgezogen. Um diesen Bedenken Rechnung zu tragen, wollen wir statt eines globalen Minimierers einen stationären Punkt approximieren, der unter ständiger Verringerung der Energie F_t^h erreicht werden kann.

Die Idee dazu ist, einen Fluss $\tilde{\mathcal{X}}(\tau), \tau \geq 0$, mit

$$\tilde{\mathcal{X}}(0) = \mathcal{X}_{t-h}^h,$$

$$F_t^h(\tilde{\mathcal{X}}(\tau)) \text{ monoton fallend in } \tau,$$

$$\tilde{\mathcal{X}}(\tau) \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{\infty}, \text{ wobei } \tilde{\mathcal{X}}_{\infty} \text{ ein stationärer Punkt von } F_t^h \text{ ist,}$$

durch eine zweite zeitdiskrete Evolution $(\tilde{\mathcal{X}}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ anzunähern. Aufgrund dieses Vorgehens nennen wir die von uns erhaltenen Lösungen „Lösungen bei lokaler Minimierung“ im Gegensatz zu den „Lösungen bei globaler Minimierung“ aus [Luc91].

5.1 Definition (Definition der $\tilde{\mathcal{X}}_i$)

Seien

$$(\varepsilon_h)_{h>0} \text{ mit } \varepsilon_h \rightarrow 0 (h \rightarrow 0) \quad \text{„Zeitschrittweiten“},$$

$$(\lambda_h)_{h>0} \text{ mit } \lambda_h \rightarrow \infty (h \rightarrow 0) \quad \text{„Strafparameter“}.$$

Wir bestimmen jetzt iterativ $\tilde{\mathcal{X}}_i = \tilde{\mathcal{X}}_{t,i}^h \in BV(\Omega, \{0, 1\})$ mittels

$$\tilde{\mathcal{X}}_0 = \mathcal{X}_{t-h}^h,$$

$\tilde{\mathcal{X}}_i$ minimiere das Funktional $F_i = F_{t,i}^h$,

$$F_i(\mathcal{X}) = F_t^h(\mathcal{X}) + \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1})(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1}). \quad (5.3)$$

Dabei sei der Operator $\tilde{K}^{\varepsilon_h}$ für $\varepsilon_h > 0$ definiert durch

$$\tilde{K}^{\varepsilon_h}(v) - \varepsilon_h \Delta \tilde{K}^{\varepsilon_h}(v) = v, \quad \nabla \tilde{K}^{\varepsilon_h}(v) \cdot \nu_{\partial\Omega} = 0.$$

5.2 Bemerkung In der Definition des Funktionals F_i ist die Wahl des „Strafterms“ als $\lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1})(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1})$ nicht erzwungen. Dieser könnte zum Beispiel durch einen Term $S^h(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1}) \geq 0$ ersetzt werden, wobei $S^h : BV(\Omega, \{-1, 0, 1\}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ stetig bezüglich $L^1(\Omega)$ -Konvergenz sei und die erste Variation von S^h im Punkt 0 verschwinden müßte. Aufgrund dieser Einschränkungen können wir durch eine geschickte Wahl des Strafterms die unten hergeleiteten Abschätzungen für die Lösungen aber nicht verbessern. Allerdings bestimmt dieser Term den Begriff von „Entfernung“, bezüglich der bestraft wird, und kann damit die Auswahl des stationären Punktes von F_i^h beeinflussen.

5.3 Bemerkung Zu $\tilde{\mathcal{X}}_{i-1} \in BV(\Omega; \{0, 1\})$ existiert ein Minimierer $\tilde{\mathcal{X}}_i$ von F_i . Nach Änderung von $\tilde{\mathcal{X}}_i$ auf einer \mathcal{L}^3 -Nullmenge ist $\partial\{\tilde{\mathcal{X}}_i = 1\}$ eine $C^{1,1/2}$ -Hyperfläche.

Beweis. Die Existenz eines Minimierers folgt mit der direkten Methode der Variationsrechnung aus der $L^1(\Omega)$ -Präkompaktheit beschränkter Mengen in $BV(\Omega)$, der Abgeschlossenheit von $BV(\Omega; \{0, 1\})$ in $L^1(\Omega)$ und der Unterhalbstetigkeit von \tilde{F}_i bezüglich $L^1(\Omega)$ -Konvergenz. Zum Nachweis der Regularität des Randes zeigen wir, dass $\tilde{\mathcal{X}}_i$ einen $\frac{1}{2}$ -Fast-Minimalrand im Sinne von Almgren hat.

Sei dazu $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, $\psi \in BV(\Omega; \{0, 1\})$ mit $\tilde{\mathcal{X}}_i = \psi$ in $\Omega \setminus \overline{B_r(x)}$. Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\mathcal{X}}_i| - \int_{\Omega} |\nabla \psi| \\ & \leq \int_{\Omega} \left(-K^h(u_{t-h}^h) + \frac{1}{2}K^h(\tilde{\mathcal{X}}_i + \psi - 2\mathcal{X}_{t-h}^h) + \lambda_h \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_i + \psi - 2\tilde{\mathcal{X}}_{i-1}) \right) (\tilde{\mathcal{X}}_i - \psi) \\ & \leq \left(\|K^h(u_{t-h}^h)\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{1}{2} + \lambda_h \right) \omega_3 r^3 \end{aligned}$$

(aus $u_{t-h}^h \in L^\infty(\Omega)$ und dem Maximumprinzip folgt $K^h(u_{t-h}^h) \in L^\infty(\Omega)$). Nach [Vis96] XI.8 heißt das gerade, dass $\tilde{\mathcal{X}}_i$ einen $\frac{1}{2}$ -Fast-Minimalrand hat. Aus einem Regularitätssatz von Almgren ([Alm76], [Vis96]) folgt, dass $\partial^*\{\tilde{\mathcal{X}}_i = 1\}$ eine zwei-dimensionale $C^{1,1/2}$ -Fläche ist mit $\partial^*\{\tilde{\mathcal{X}}_i = 1\} = \partial\{\tilde{\mathcal{X}}_i = 1\}$ nach Änderung von $\tilde{\mathcal{X}}_i$

auf einer Menge vom Maß 0 (siehe dazu auch [Giu84] 3.1). □

Wir zeigen nun, dass die $\tilde{\mathcal{X}}_i$ für eine Teilfolge gegen einen stationären Punkt von F_t^h konvergieren.

5.4 Lemma (Grenzübergang $i \rightarrow \infty$)

Es gibt eine Teilfolge $i_k \rightarrow \infty$ und eine Funktion $\tilde{\mathcal{X}}_\infty \in BV(\Omega; \{0, 1\})$, so dass

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{X}}_{i_k} &\rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_\infty \text{ in } L^1(\Omega), \\ \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1} &\rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_\infty \text{ in } L^1(\Omega).\end{aligned}$$

Weiter ist

$$F_t^h(\tilde{\mathcal{X}}_\infty) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_i - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1})(\tilde{\mathcal{X}}_i - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1}) \leq F_t^h(\mathcal{X}_{t-h}^h) \quad (5.4)$$

und

$$F_t^h(\tilde{\mathcal{X}}_\infty) \leq F_t^h(\mathcal{X}) + \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty)(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty) \quad (5.5)$$

für alle $\mathcal{X} \in BV(\Omega; \{0, 1\})$.

Insbesondere ist $\tilde{\mathcal{X}}_\infty$ (globaler) Minimierer von

$$\tilde{F}(\mathcal{X}) = F_t^h(\mathcal{X}) + \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty)(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty)$$

und $\{\tilde{\mathcal{X}}_\infty = 1\}$ hat nach Änderung auf einer \mathcal{L}^3 -Nullmenge einen $C^{1,1/2}$ -Rand.

Beweis. Aus $F_j(\tilde{\mathcal{X}}_j) \leq F_j(\tilde{\mathcal{X}}_{j-1})$ und Summation über j folgt zunächst für beliebige $i \in \mathbb{N}$

$$F_t^h(\tilde{\mathcal{X}}_i) + \sum_{j=1}^i \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_j - \tilde{\mathcal{X}}_{j-1})(\tilde{\mathcal{X}}_j - \tilde{\mathcal{X}}_{j-1}) \leq F_t^h(\mathcal{X}_{t-h}^h), \quad (5.6)$$

und damit:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\mathcal{X}}_i| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} K_0^h(\tilde{\mathcal{X}}_i - \mathcal{X}_{t-h}^h)(\tilde{\mathcal{X}}_i - \mathcal{X}_{t-h}^h) \\
& + \sum_{j=1}^i \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_j - \tilde{\mathcal{X}}_{j-1})(\tilde{\mathcal{X}}_j - \tilde{\mathcal{X}}_{j-1}) \\
& \leq \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_{t-h}^h| + \int_{\Omega} K^h(u_{t-h}^h)(\tilde{\mathcal{X}}_i - \mathcal{X}_{t-h}^h) \\
& \leq \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_{t-h}^h| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (K^h(u_{t-h}^h)^2 + 1) \\
& \leq \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_{t-h}^h| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{t-h}^h)^2 + \frac{1}{2} |\Omega| \\
& \leq C,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

unabhängig von $i \in \mathbb{N}$. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit in $BV(\Omega)$ erhalten wir nach zweimaligem Übergang zu einer Teilfolge die Existenz von $(i_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty)$, $\tilde{\mathcal{X}}_{\infty}, \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty} \in BV(\Omega; \{0, 1\})$ mit

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{X}}_{i_k} & \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{\infty} \text{ in } L^1(\Omega), \\
\tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1} & \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty} \text{ in } L^1(\Omega),
\end{aligned}$$

und damit in jedem $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Aus (5.7) und der Stetigkeit der Abbildung $\tilde{K}^{\varepsilon_h} : L^2(\Omega) \rightarrow H^{1,2}(\Omega)$ folgt weiter

$$\begin{aligned}
0 & = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_{i_k} - \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1})(\tilde{\mathcal{X}}_{i_k} - \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1}) \\
& = \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_{\infty} - \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty})(\tilde{\mathcal{X}}_{\infty} - \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty}) \\
& = \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_{\infty} - \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty})^2 + \varepsilon_h \lambda_h \int_{\Omega} |\nabla \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_{\infty} - \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty})|^2
\end{aligned}$$

und daher $\tilde{\mathcal{X}}_{\infty} = \tilde{\mathcal{X}}'_{\infty}$. Nun ist F_t^h unterhalbstetig bezüglich L^1 -Konvergenz und wir erhalten mit (5.6) die Abschätzung (5.4). Für beliebiges $\mathcal{X} \in BV(\Omega; \{0, 1\})$ ist $F_{i_k}^h(\tilde{\mathcal{X}}_{i_k}) \leq F_{i_k}^h(\mathcal{X})$ für alle $i_k, k \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\begin{aligned}
& F_t^h(\tilde{\mathcal{X}}_{i_k}) + \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\tilde{\mathcal{X}}_{i_k} - \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1})(\tilde{\mathcal{X}}_{i_k} - \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1}) \\
& \leq F_t^h(\mathcal{X}) + \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1})(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i_k-1}),
\end{aligned}$$

und Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ in dieser Gleichung liefert die Behauptung (5.5). Die Regularität des Randes folgt wie in Bemerkung 5.3. \square

5.5 Definition Wir setzen nun

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_t^h &= \tilde{\mathcal{X}}_\infty \quad \text{für ein } \tilde{\mathcal{X}}_\infty \text{ wie in Lemma 5.4,} \\ u_t^h &= K^h(u_{t-h}^h) - K_0^h(\mathcal{X}_t^h - \mathcal{X}_{t-h}^h) + hK_0^h(f).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Aus $u_{t-h}^h \in L^\infty(\Omega)$ und dem Maximumprinzip für die Gleichung (5.8) erhalten wir $u_t^h \in L^\infty(\Omega)$ und darüber hinaus die folgende Aussage:

5.6 Lemma Es gilt

$$F_t^h(\mathcal{X}_t^h) \leq F_t^h(\mathcal{X}_{t-h}^h),\tag{5.9}$$

$u_t^h \in M_{u_D}$ und schwach in $H^{1,2}(\Omega)$

$$\nabla u_t^h \cdot \nu_\Omega = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \Gamma_D, \quad \partial_t^{-h} u^h - \Delta u^h = f.\tag{5.10}$$

Die Funktion \mathcal{X}_t^h ist stationärer Punkt von F_t^h , so dass für alle $\xi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ mit $\xi \cdot \nu_\Omega = 0$ auf $\partial\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}& \int_\Omega \left(\nabla \cdot \xi - \frac{\nabla \mathcal{X}_t^h}{|\nabla \mathcal{X}_t^h|} \cdot D\xi \frac{\nabla \mathcal{X}_t^h}{|\nabla \mathcal{X}_t^h|} \right) |\nabla \mathcal{X}_t^h| \\ &= \int_\Omega \mathcal{X}_t^h \nabla \cdot \left((u_t^h - hK_0^h(f)) \xi \right).\end{aligned}\tag{5.11}$$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Gleichung (5.4), die zweite ergibt sich aus der Definition von K_0^h, K^h in (5.2). Es ist $\mathcal{X}_t^h = \tilde{\mathcal{X}}_\infty$ globaler Minimierer und insbesondere stationärer Punkt von

$$\tilde{F}(\mathcal{X}) = F_t^h(\mathcal{X}) + \lambda_h \int_\Omega \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty)(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty).$$

Nun verschwindet die erste Variation von $\mathcal{X} \mapsto \lambda_h \int_\Omega \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty)(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_\infty)$ in $\tilde{\mathcal{X}}_\infty$ und wir erhalten, dass \mathcal{X}_t^h auch stationärer Punkt von F_t^h ist. Für die Variation von F_t^h ergibt sich:

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega \left(\nabla \cdot \xi - \frac{\nabla \mathcal{X}_t^h}{|\nabla \mathcal{X}_t^h|} \cdot D\xi \frac{\nabla \mathcal{X}_t^h}{|\nabla \mathcal{X}_t^h|} \right) |\nabla \mathcal{X}_t^h| \\ &\quad - \int_\Omega \mathcal{X}_t^h \nabla \cdot \left((K^h(u_{t-h}^h) - K_0^h(\mathcal{X}_t^h - \mathcal{X}_{t-h}^h)) \xi \right)\end{aligned}$$

und mit (5.8) die Behauptung. □

Wir bekommen nun alle Abschätzungen aus [Luc91], die nicht die globale Minimierungseigenschaft der \mathcal{X}_t^h voraussetzen. Insbesondere gelten die folgenden Aussagen, die in [Luc91] nur aus (5.8) und (5.9) gefolgert werden:

5.7 Lemma Die zeitdiskreten Lösungen (\mathcal{X}^h, u^h) erfüllen für beliebiges $t_0 \in (0, T)$, $t_0 = Mh$ die Energieungleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_{t_0}^h| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{t_0}^h)^2 + \sum_{j=1}^M \frac{h}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u_{jh}^h|^2 + |\nabla K^h(u_{(j-1)h}^h)|^2) \\ & \leq C(u_D, f, \Omega) + \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_0| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_0^2. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} & \mathcal{X}^h \text{ gleichmäßig beschränkt in } L^\infty(0, T; BV(\Omega)), \\ & u^h \text{ gleichmäßig beschränkt in } L^2(0, T; H^{1,2}(\Omega)) \\ & u^h \text{ gleichmäßig beschränkt in } L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \text{ für alle } 1 \leq p < \infty, \\ & \partial_t^{-h}(u^h + \mathcal{X}^h) \text{ gleichmäßig beschränkt in } L^2(0, T; H^{-1,2}(\Omega)). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Beweis. Siehe [Luc91]. □

Es ergibt sich weiterhin eine Abschätzung für Zeitdifferenzen:

5.8 Lemma Für alle $0 < \tau < T$ gilt gleichmäßig in $h > 0$:

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u_t^h - u_{t-\tau}^h| + |\mathcal{X}_t^h - \mathcal{X}_{t-\tau}^h| d\mathcal{L}^3 dt \leq C\tau^{\frac{1}{3}}.$$

Beweis. Der Beweis folgt ebenfalls aus den Rechnungen in [Luc91]. □

5.9 Bemerkung Im Beweis dieses Lemma geht die Voraussetzung $\mathcal{H}^2(\Gamma_D) \neq 0$ ein. In [Luc91] wird die Behauptung auch für den Fall reiner Neumannrandwerte gezeigt, dabei aber die globale Minimierungseigenschaft der \mathcal{X}_t^h benutzt, um insbesondere Oszillationen zwischen Zuständen \mathcal{X} und $1 - \mathcal{X}$ auszuschließen. Bei einer lokalen Minimierungsstrategie haben wir ein entsprechendes Argument nicht zur Verfügung.

Kapitel 6

Konvergenz gegen Lösungen des Stefan- Gibbs-Thomson-Problems

In diesem Abschnitt wollen wir die Existenz von Lösungen des Stefan–Gibbs–Thomson-Problems durch einen Grenzübergang in den Gleichungen (5.10) und (5.11) beweisen. Entscheidend dabei ist die Konvergenz der approximativen Gibbs–Thomson-Gleichungen. Während in [Luc91] wegen der globalen Minimierungseigenschaft der Lösungen ein Massenverlust der Oberflächen ausgeschlossen und daher mit dem Lemma von Reshetnyak [Res68] in der BV -Formulierung zur Grenze übergegangen werden kann, müssen wir hier anders argumentieren. Wir betrachten den Limes der Oberflächenmaße $|\nabla \mathcal{X}_t^h|$ und benutzen ein Konvergenzresultat aus [Sch01] für Flächen, deren mittlere Krümmung als Sobolev-Funktion im umgebenden Raum dargestellt ist (siehe Anhang, Satz A.2). Zunächst ergibt sich aus den Abschätzungen für die zeitdiskreten Lösungen:

6.1 Lemma *Es existieren Funktionen*

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &\in L^\infty(0, T; BV(\Omega; \{0, 1\})), \\ u &\in L^2(0, T; M_{u_D}) \cap L^\infty(0, T; L^p(\Omega)) \text{ für alle } 1 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

und eine Teilfolge $h \rightarrow 0$, so dass für alle $1 \leq p < \infty$ gilt:

$$u^h \rightarrow u, \quad \mathcal{X}^h \rightarrow \mathcal{X} \quad \text{in } L^p(\Omega_T), \quad (6.1)$$

$$u^h(t) \rightarrow u(t), \quad \mathcal{X}^h(t) \rightarrow \mathcal{X}(t) \quad \text{in } L^p(\Omega) \text{ für fast alle } t \in (0, T), \quad (6.2)$$

$$u^h \rightharpoonup u \quad \text{in } L^2(0, T; H^{1,2}(\Omega)). \quad (6.3)$$

Beweis. Die Präkompaktheit in $L^p(\Omega_T)$ ergibt sich mit dem Satz von Frechet-Kolmogorov-M.Riesz aus Lemma 5.7 und Lemma 5.8. Es folgt dann (6.2) und mit der Reflexivität von $L^2(0, T; H^{1,2}(\Omega))$ und Lemma 5.7 die Behauptung (6.3). \square

Im Folgenden seien u, \mathcal{X} wie in Lemma 6.1 und $h \rightarrow 0$ eine Folge, für die (6.1)- (6.3)

gilt. Wir setzen dann

$$\begin{aligned} E_t^h &= \{\mathcal{X}_t^h = 1\}, & E(t) &= \{\mathcal{X}(t) = 1\}, \\ \nu_t^h &= \begin{cases} \frac{\nabla \mathcal{X}_t^h}{|\nabla \mathcal{X}_t^h|} & \text{auf } \partial^* E_t^h, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\ \nu(t) &= \begin{cases} \frac{\nabla \mathcal{X}(t)}{|\nabla \mathcal{X}(t)|} & \text{auf } \partial^* E(t), \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \end{aligned}$$

und definieren integrale 2-Varifaltigkeiten μ_t^h auf Ω durch

$$\mu_t^h(\eta) = \int_{\Omega} \eta |\nabla \mathcal{X}_t^h| \quad \text{für } \eta \in C_c^0(\Omega).$$

Der folgende Satz beweist dann den Existenzsatz 4.1:

6.2 Satz *Für fast alle $t \in (0, T)$ gilt: Es existiert ein integrale 2-Varifaltigkeit μ_t mit*

$$\partial^* E(t) \subset \text{spt}(\mu_t) \cap \{\theta^2(\mu_t) \text{ ungerade}\},$$

μ_t hat lokal beschränkte erste Variation mit einem mittleren Krümmungsvektor

$$\vec{H}_{\mu_t} \in L_{loc}^4(\mu_t),$$

und es gilt

$$\begin{aligned} \mu_t^{h_i} &\rightarrow \mu_t \text{ als Varifaltigkeiten für eine Teilfolge } h_i(t) \rightarrow 0 \ (i \rightarrow \infty) & (6.4) \\ \vec{H}_{\mu_t} &= u(t)\nu(t) \quad \mu_t - \text{fast überall in } \Omega. \end{aligned}$$

Insbesondere besitzt $\partial^* E(t)$ für fast alle $t \in (0, T)$ einen verallgemeinerten Krümmungsvektor im Sinne von Definition 3.4 und erfüllt das Gibbs-Thomson-Gesetz (4.2).

Beweis. Wir beschränken uns im Folgenden auf Punkte $t \in (0, T)$, für die (6.2) gilt. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der u^h in $L^2(0, T; H^{1,2}(\Omega))$ (siehe Lemma 5.12) erhalten wir mit dem Lemma von Fatou

$$\left(t \mapsto \liminf_{h \rightarrow 0} \|u^h(t, \cdot)\|_{H^{1,2}(\Omega)} \right) \in L^2(0, T)$$

und damit für fast alle $t \in (0, T)$ die Existenz einer Teilfolge $h_i(t) \rightarrow 0 \ (i \rightarrow \infty)$ sowie einer Funktion $v \in H^{1,2}(\Omega)$ mit

$$u_t^{h_i} \rightharpoonup v \quad \text{schwach in } H^{1,2}(\Omega).$$

Aus dem Rellichschen Einbettungssatz sowie (6.2) folgt $v = u(t)$ und mit $\|hK_0^h(f)\|_{H^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0$

$$u_t^{h_i} + h_i K_0^{h_i}(f) \rightharpoonup u(t) \quad \text{schwach in } H^{1,2}(\Omega). \quad (6.5)$$

Weiterhin sind die $\mathcal{X}_t^{h_i}$ nach Lemma 5.7 für fast alle $t \in (0, T)$ gleichmäßig beschränkt in $BV(\Omega)$. Mit der schwach*-Präkompaktheit von Radonmaßen erhalten wir nach erneutem Übergang zu einer Teilfolge von $h_i \rightarrow 0$ für fast alle $t \in (0, T)$ Radonmaße V_t auf $G^2\Omega$ mit

$$V_{\mu_t^{h_i}} \rightarrow V_t \quad \text{als Varifaltigkeiten.} \quad (6.6)$$

Wegen der Krümmungsgleichung (5.11) gilt

$$\vec{H}_{\mu_t^{h_i}} = (u_t^{h_i} + h_i K_0^{h_i}(f)) \nu_t^{h_i}. \quad (6.7)$$

Mit (6.2), (6.5), (6.6) und (6.7) sind dann alle Voraussetzungen des Konvergenzsatzes aus [Sch01] (siehe Anhang, Satz A.2) nachgewiesen und wir erhalten die folgenden Aussagen:

Es existiert eine integrale 2-Varifaltigkeit μ_t auf Ω , so dass gilt:

$$\begin{aligned} V_t &= V_{\mu_t}, \\ \mu_t^{h_i} &\rightarrow \mu_t \quad \text{als Varifaltigkeiten.} \end{aligned}$$

Weiterhin ist $\partial^* E(t) \subset \text{spt}(\mu_t)$ und μ_t hat lokal beschränkte erste Variation mit mittlerem Krümmungsvektor

$$\vec{H}_{\mu_t} \in L_{loc}^4(\mu_t),$$

der μ_t -fast überall das Gibbs-Thomson-Gesetz

$$\vec{H}_{\mu_t} = u(t)\nu(t)$$

erfüllt. Ein Zusatz in [Sch01] (Theorem 1.2) liefert zusammen mit [EG92] 5.7 Lemma 2 noch

$$\partial^* E(t) \subset \{\theta^2(\mu_t, \cdot) \text{ ungerade}\},$$

was den Beweis vervollständigt. □

Die Lage der verdeckten Grenzflächen $\text{spt}(\mu_t) \setminus \partial^* E_t$ bleibt in Satz 6.2 abhängig von der Teilfolgenauswahl in (6.4), die wiederum vom jeweiligen Zeitpunkt $t \in (0, T)$ abhängt. Das zeigt noch einmal die schlechte Kontrolle über die verdeckten Anteile und die Bedeutung einer Definition von Krümmung für den Rand $\partial^* \{\mathcal{X}(t) = 1\}$.

6.3 Bemerkung Wir wollen an dieser Stelle noch auf die Schwierigkeiten bei der Formulierung einer Bedingung an den Kontaktwinkel zwischen der Phasengrenze und $\partial\Omega$ eingehen. Es gelte (6.4) für $t \in (0, T)$. Wir betrachten nun die integralen Varifaltigkeiten μ_t^h als Radonmaße auf $G^2\mathbb{R}^3$. Aus der gleichmäßigen Beschränktheit der Masse erhalten wir dann die Konvergenz einer Teilfolge $h \rightarrow 0$ der Folge aus (6.4) gegen eine allgemeine Varifaltigkeit $V_t \in G^2\mathbb{R}^3$,

$$\int_{\Omega} \eta(x, T_x \mu_t^h) d\mu_t^h(x) \rightarrow \int_{G^2\mathbb{R}^3} \eta(x, S) dV_t(x, S)$$

für alle $\eta \in C_c^0(G^2\mathbb{R}^3)$. Wegen (6.4) sind V_t und μ_t in Ω gleich, das heißt

$$\int_{\Omega} \eta(x, T_x \mu_t) d\mu_t(x) = \int_{G^2\mathbb{R}^3} \eta(x, S) dV_t(x, S)$$

für alle $\eta \in C_c^0(G^2\Omega)$. Wir erhalten mit (5.11) für die erste Variation von V_t die Gleichung

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathcal{X}(t) \nabla \cdot (u(t)\xi) \\ &= \delta V_t(\xi) \\ &= \int_{G^2\mathbb{R}^3} \operatorname{div}_S \xi(x) dV_t(x, S) \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_{T_x \mu_t} \xi(x) d\mu_t(x) + \int_{G^2(\partial\Omega)} \operatorname{div}_S \xi(x) dV_t(x, S) \end{aligned} \quad (6.8)$$

für alle $\xi \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ mit $\xi \cdot \nu_{\Omega} = 0$ auf $\partial\Omega$. Verschwindet der zweite Term der letzten Zeile, so entspricht (6.8) der Variationsformel (2.5) der Lösungen aus [Luc91], die ja in gewissem Sinne die Kontaktwinkelbedingung ergab (siehe dazu die Bemerkung 2.1). Im Allgemeinen können wir aber keine Aussage über das Aussehen von V_t auf $G^2(\partial\Omega)$ machen, insbesondere ist nicht klar, ob V_t rektifizierbar ist. Weiterhin ist schon in [Luc91] durch die Variationsgleichung (2.5) nicht ausgeschlossen, dass mehrere Anteile von $\partial^* \{\mathcal{X}(t) = 1\}$ in einem Punkt auf den Rand treffen und nur die Summe der jeweiligen äußeren Co-Normalen dieser Anteile senkrecht auf $\partial\Omega$ steht. Bei unseren Lösungen können noch zusätzlich „verdeckte“ Anteile auf den Rand treffen. Wir können dann nur erwarten, dass die jeweiligen Co-Normalen aller Anteile zu einem Vielfachen von ν_{Ω} addieren. Für die Phasengrenzen (die unverdeckten Anteile) selbst muss dies nicht gelten.

Wir wollen in dieser Arbeit die lokale Behandlung des Gibbs-Thomson-Gesetzes in den Vordergrund stellen und verzichten hier auf weitere Untersuchungen zum Verhalten unserer Lösungen an $\partial\Omega$.

Kapitel 7

Verhalten der Lösungen

Wir wollen in diesem Abschnitt Eigenschaften der Lösung durch das lokale Minimierungsverfahren und Unterschiede zu den Lösungen aus [Luc91] herausarbeiten. Zuerst gehen wir auf die spezielle Minimierungseigenschaft der Lösungen bei globaler Minimierung ein.

7.1 Bemerkung Die Zeitdiskretisierung in [Luc91] lässt noch einen zusätzlichen Strafterm zu und minimiert für $\Lambda > 0$ die Funktionale

$$F_t^{\Lambda,h}(\mathcal{X}) = F_t^h(\mathcal{X}) + \Lambda \int_{\Omega} K_0^h(\mathcal{X} - \mathcal{X}_{t-h}^h)(\mathcal{X} - \mathcal{X}_{t-h}^h).$$

Lösungen (u, \mathcal{X}) des Stefan–Gibbs–Thomson-Problems, die wir mittels einer globalen Minimierung der Funktionale $F_t^{\Lambda,h}$ konstruieren, erfüllen dann für alle Vergleichsfunktionen $\psi \in L^\infty(0, T; BV(\Omega; \{0, 1\}))$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}| - \int_{\Omega_T} u \mathcal{X} \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla \psi| - \int_{\Omega_T} u \psi + \left(\frac{1}{2} + \Lambda\right) \int_{\Omega_T} |\mathcal{X} - \psi|. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Für fast alle $t \in (0, T)$ ist damit $\mathcal{X}(t)$ globaler Minimierer von

$$F_t(\tilde{\mathcal{X}}) = \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\mathcal{X}}| - \int_{\Omega} \left(u + \mathcal{X} - \frac{1}{2} + 2\Lambda(\mathcal{X} - \frac{1}{2})\right)(t) \tilde{\mathcal{X}}$$

auf $BV(\Omega; \{0, 1\})$.

Daraus ergeben sich zusätzliche Regularitätseigenschaften. Da $u \in L^\infty(0, T; L^p(\Omega))$ für alle $1 \leq p < \infty$ ist (vergleiche Lemma 5.7), folgt wie in Bemerkung 5.3 für fast alle $t \in (0, T)$, alle $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ und $\tilde{\mathcal{X}} \in BV(\Omega; \{0, 1\})$ mit $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X}(t)$ in $\Omega \setminus \overline{B_r(x)}$ die Abschätzung

$$\int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}(t)| - \int_{\Omega} |\nabla \tilde{\mathcal{X}}| \leq \left(\|u\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega))} + C_{\Lambda,\Omega,p}\right) (\omega_3 r^3)^{1-1/p}. \quad (7.2)$$

Damit ist $\partial^*\{\mathcal{X}(t) = 1\}$ ein $C^{1,\alpha}$ -Fast-Minimalrand für alle $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und nach Änderung von $\mathcal{X}(t)$ auf einer \mathcal{L}^3 -Nullmenge ist $\partial\{\mathcal{X}(t) = 1\}$ eine $C^{1,\alpha}$ -Fläche. Weiterhin folgt aus einem Theorem von Tamanini ([Tam82], siehe [Vis96] Theorem XI.8.5) die Existenz von $r_0 > 0$ und $0 < c_0 < 1$ unabhängig von $t \in (0, T)$, so dass für alle $0 < r < r_0$ gilt:

$$c_0 \leq \frac{\mathcal{L}^3(\{\mathcal{X}(t) = 1\} \cap B_r(x))}{\omega_3 r^3} \leq 1 - c_0. \quad (7.3)$$

Diese Regularitätseigenschaften beeinflussen das Verhalten der Lösungen bei globaler Minimierung. Es folgt bereits, dass zwei monoton wachsende Eiskugeln nicht stetig zusammenstoßen können: Berühren sich die Kugeln für $t \nearrow t_0$, so ist für $t = t_0$ im Berührungspunkt die Ungleichung (7.3) verletzt. Sind die Bälle stetig gewachsen, finden wir für alle t in einem Zeitintervall $(t_0 - \varepsilon, t_0)$ Punkte, die (7.3) verletzen. Im Widerspruch dazu soll diese Ungleichung für fast alle $t \in (0, T)$ gelten. Wir werden diese Situation weiter unten noch genauer analysieren und sehen, wie sich die Lösungen bei lokaler Minimierung verhalten.

Lösungen des Stefan-Gibbs-Thomson-Problems ohne die zusätzliche Minimierungseigenschaft (7.1) können wir nicht durch eine Abhängigkeit $\Lambda = \Lambda^h$ mit $\Lambda^h \rightarrow \infty$ in $F_t^{\Lambda, h}$ bekommen. Die der Ungleichung (7.1) bei unserem Verfahren entsprechende zeitdiskrete Ungleichung (5.5) enthält aber einen unendlich wachsenden Strafparameter.

Im folgenden betrachten wir die Lösungen bei globaler und bei lokaler Minimierung in zwei Beispielen. Wir beschränken uns dabei darauf, das Verhalten plausibel zu machen. Insbesondere rechnen wir der Einfachheit halber mit Neumann-Nullrandwerten, obwohl unser Existenzresultat diesen Fall nicht abdeckt.

Beispiel 1

Bei unserem Verfahren werden lokale Minima extrem bevorzugt. Dazu betrachten wir wie in [Luc91] die folgende Situation: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt mit Lipschitz-Rand, weiter

$$\begin{aligned} u_0 &= -1, \\ \mathcal{X}_0 &= 0, \\ f &= 1 \end{aligned}$$

konstant in Ω .

Beh.: Die globale Minimierung führt auf die zeitdiskreten Lösungen

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_t^h &= 0, & u_t^h &= -1 + [t/h] h & \text{für } t < \frac{3}{2} + \Lambda, \\ \mathcal{X}_t^h &= 1, & u_t^h &= -2 + [t/h] h & \text{für } t > \frac{3}{2} + \Lambda, \end{aligned}$$

die lokale Minimierung dagegen auf

$$\mathcal{X}_t^h = 0, \quad u_t^h = -1 + [t/h]h \quad \text{für } 0 < t < T.$$

Bew.: Sei $t \geq 0$ mit $\mathcal{X}_\tau^h = \mathcal{X}_0$, $u_\tau^h = -1 + [\tau/h]h$ für $\tau \leq t$. Um das absolute Minimum des Funktionals

$$F_{t+h}^h(\mathcal{X}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}| + (1 - [t/h]h) \int_{\Omega} \mathcal{X} + \left(\frac{1}{2} + \Lambda\right) \int_{\Omega} K^h(\mathcal{X})\mathcal{X},$$

zu bestimmen, müssen wir nur die Funktionen \mathcal{X}_0 und $\mathcal{X}_1 = 1$ betrachten: Das ist offensichtlich für $1 - [t/h]h \notin (-1/2 - \Lambda, 0)$. Ist $1 - [t/h]h \in (-1/2 - \Lambda, 0)$ so folgt dies für $\int_{\Omega} |\mathcal{X}|$ klein aus der isoperimetrischen Ungleichung und sonst aus $K^h(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}$ in $L^2(\Omega)$. Durch Vergleich von $F_{t+h}^h(\mathcal{X}_0)$ und $F_{t+h}^h(\mathcal{X}_1)$ erhalten wir die angegebene Lösung.

Im Falle der lokalen Minimierung sei wieder $t \geq 0$ wie oben und $i \in \mathbb{N}_0$ gegeben mit $\tilde{\mathcal{X}}_j = \mathcal{X}_0$ für $j \leq i$. Dann ist

$$F_i(\mathcal{X}_0) = 0 \quad \text{und} \\ F_i(\mathcal{X}) \geq \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}| + (1 - T) \int_{\Omega} \mathcal{X} + \left(\frac{1}{2} + \Lambda\right) \int_{\Omega} K^h(\mathcal{X})\mathcal{X} + \lambda_h \int_{\Omega} \tilde{K}^{\varepsilon_h}(\mathcal{X})\mathcal{X}.$$

Wieder kommen nur \mathcal{X}_0 und \mathcal{X}_1 als absolute Minimierer in Frage, nun ist aber für $h < h_0(T)$

$$F_i(\mathcal{X}_1) \geq \left(\lambda_h + \left(\frac{1}{2} + \Lambda\right) + (1 - T)\right)|\Omega| \\ > 0 \\ = F_i(\mathcal{X}_0).$$

Wir sehen auch, dass die Lösung bei lokaler Minimierung im Allgemeinen nicht die globale Minimierungseigenschaft (7.1) der Lösungen aus [Luc91] besitzt, wie die Vergleichsfunktion

$$\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < \frac{3}{2} + \Lambda, \\ 1 & \text{falls } t > \frac{3}{2} + \Lambda, \end{cases}$$

zeigt.

Das Verhalten der Lösungen bei lokaler Minimierung scheint hier noch weniger als das der Lösungen bei globaler Minimierung physikalisch vernünftig. Andererseits ist das Stefan–Gibbs–Thomson-Problem nur in der Nähe des Schmelzpunktes eine angemessene Modellierung und betrachtet eine stark idealisierte Situation. Das Vorhandensein von Kristallisationskeimen wird zum Beispiel nicht einbezogen.

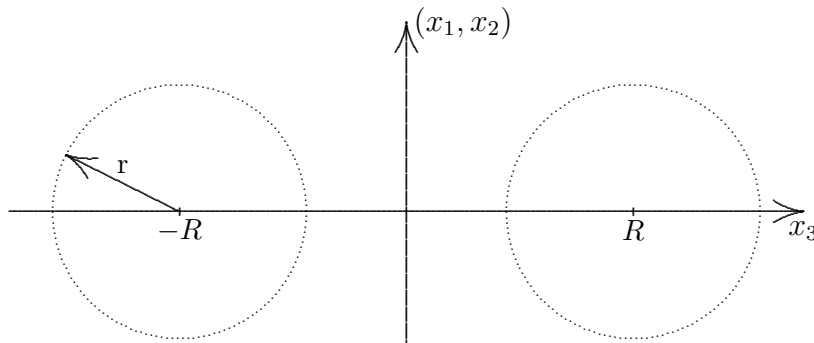
Beispiel 2

Wir betrachten in einem großen Flüssigkeitscontainer zwei feste Bälle (Eiskugeln), die mit der Zeit monoton wachsen. Wir wissen bereits aus Bemerkung 7.1, dass die Lösungen aus [Luc91] nicht stetig zusammenstoßen können. Wir wollen zeigen, dass diese Lösungen bei positiver Distanz eine Brücke bilden, während Lösungen bei lokaler Minimierung bis zur Berührung der Kugeln stetig wachsen. Da Lösungen aus [Luc91] für verschiedene Strafparameter Λ kein qualitativ anderes Verhalten aufweisen, beschränken wir uns hier auf $\Lambda = 0$.

Es sei $\Omega = B_L(0)$, $x_- = (0, 0, -R)$ und $x_+ = (0, 0, R)$ für $0 < R < \frac{L}{2}$ die Mittelpunkte der festen Bälle, zu $r \in (0, R)$ seien Kugellösungen $\bar{\mathcal{X}}(r)$ durch

$$E(r) = B_r(x_-) \cup B_r(x_+) \text{ und } \bar{\mathcal{X}}(r) = \mathcal{X}_{\Omega \setminus E(r)}$$

definiert:

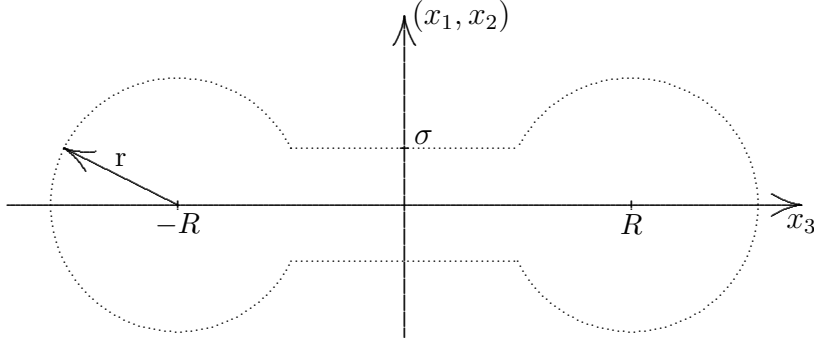


Weiter sei $f = 0$, Neumann-Nullrandwerte für die Temperatur verlangt und Anfangsradius $r_0 \in (0, R)$ sowie Anfangstemperatur $u_0 \in H^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ so gewählt, dass die festen Bälle monoton wachsen müssen (wir setzen hier ohne Beweis voraus, dass das möglich ist). Zur Analyse des qualitativen Verhaltens der verschiedenen Lösungen betrachten wir die Konkurrenz zwischen den Kugellösungen $\bar{\mathcal{X}}(r)$ und den durch $\psi(r, \sigma)$,

$$S_\sigma = \{(x_1, x_2, x_3) : |(x_1, x_2)| < \sigma, -R < x_3 < R\},$$

$$\psi(r, \sigma) = \mathcal{X}_{\Omega \setminus (E(r) \cup S_\sigma)}, \quad \sigma \in [0, r]$$

beschriebenen Brückenlösungen: (der von der gepunkteten Linie umschlossene Bereich stellt die Menge $\{\psi(r, \sigma) = 0\}$ dar)



Für die globale und die lokale Minimierung untersuchen wir jeweils die zeitdiskreten Evolutionen. Bei der Minimierung der Funktionale F_t^h beziehungsweise F_i beschränken wir uns auf den Vergleich von Kugellösungen und Brückenlösungen der Form $\bar{\mathcal{X}}(r)$ und $\psi(r, \sigma)$ für $r_{t-h}^h \leq r \leq R$ beziehungsweise $\tilde{r}_{i-1} \leq r \leq R$, da wir ein monotonen Wachsen der Eiskugeln vorausgesetzt haben. Wir behaupten nicht, dass die Minimierer in $BV(\Omega; \{0, 1\})$ tatsächlich von der Form $\bar{\mathcal{X}}(r)$ oder $\psi(r, \sigma)$ sind. Es ist aber plausibel, dass die Minimierer Brücken- beziehungsweise Kugel-ähnlich sind, falls die Brückenlösungen gegenüber den Kugellösungen bevorzugt werden beziehungsweise umgekehrt.

Zu einer Zeitschrittweite $h > 0$ seien bis zu einem Zeitpunkt $t \in (0, T)$ die Kugellösungen bevorzugt, $\mathcal{X}_\tau^h = \bar{\mathcal{X}}(r_\tau^h)$ für $\tau \leq t$ und r_τ^h monoton wachsend in τ . In [Luc91] ist nun \mathcal{X}_{t+h}^h als globaler Minimierer von

$$F_{t+h}^h(\mathcal{X}) = \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}| - \int_{\Omega} \left(K^h(u_t^h) \mathcal{X} - \frac{1}{2} K^h(\mathcal{X} - \bar{\mathcal{X}}(r_t^h)) (\mathcal{X} - \bar{\mathcal{X}}(r_t^h)) \right)$$

zu bestimmen. Wir behaupten nun, dass es bei der globalen Minimierung zur Ausbildung von Brücken kommen muss: Für Radien nahe $r = R$ sind bei der Minimierung der zeitdiskreten Funktionale Brückenlösungen bevorzugt. Diese müssen einen Mindestdurchmesser haben. Ist der Durchmesser dagegen zu klein, so sind die Kugellösungen günstiger.

7.2 Proposition *Bei der globalen Minimierung kommt es bei einer positiven Distanz zwischen den Eiskugeln zur Ausbildung einer Brücke. Es existieren $\delta > 0$ und $\sigma_0 > 0$, so daß für alle $h > 0$, $r_t^h \in (0, R)$ und $r \in (R - \delta, R)$, $r > r_t^h$, gilt:*

$$\min_{\sigma \in [0, r]} F_{t+h}^h(\psi(r, \sigma)) < \min_{\sigma \in [0, \sigma_0]} F_{t+h}^h(\psi(r, \sigma)) \leq F_{t+h}^h(\bar{\mathcal{X}}(r)).$$

Weiterhin existiert $\sigma_1 > 0$, so dass für alle $0 < \sigma < \min(\sigma_1, \frac{1}{3}(R - r))$

$$F_{t+h}^h(\bar{\mathcal{X}}(r)) - F_{t+h}^h(\psi(r, \sigma)) < 0 \tag{7.4}$$

erfüllt ist.

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} d(r, \sigma) &= d_{t+h}^h(r, \sigma) \\ &= F_{t+h}^h(\bar{\mathcal{X}}(r)) - F_{t+h}^h(\psi(r, \sigma)) \\ &= 4\pi \left(r^2 - r\sqrt{r^2 - \sigma^2} - (R - \sqrt{r^2 - \sigma^2})\sigma \right) - \int_{\Omega} K^h(u_t^h) \mathcal{X}_{S(\sigma) \setminus E(r)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} K^h(\mathcal{X}_{S(\sigma) \setminus E(r)}) \left(2(\bar{\mathcal{X}}(r_t^h) - \bar{\mathcal{X}}(r)) + \mathcal{X}_{S(\sigma) \setminus E(r)} \right). \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} d(r, \sigma) &= 4\pi \left(\sqrt{r^2 - \sigma^2} + \sigma \frac{\sqrt{r - \sigma}}{\sqrt{r + \sigma}} - R \right) - \int_{\Gamma_{r, \sigma}} K^h(u_t^h)(y) d\mathcal{H}^2(y) \\ &\quad - \int_{\Gamma_{r, \sigma}} K^h(\mathcal{X}_{S(r, \sigma) \setminus E(r)} + \bar{\mathcal{X}}(r_t^h) - \bar{\mathcal{X}}(r))(y) d\mathcal{H}^2(y), \end{aligned}$$

mit $\Gamma_{r, \sigma} = \{y : |(y_1, y_2)| = \sigma, y_3 \in (-R + \sqrt{r^2 - \sigma^2}, R - \sqrt{r^2 - \sigma^2})\}$.

Zuerst bemerken wir, dass für $r = R$ eine Brückenlösung günstiger ist:

Beh. 1: Es ist $\max_{\sigma \in [0, R]} d(R, \sigma) > 0$.

In der Tat haben wir $d(R, 0) = 0$ und

$$\begin{aligned} d(R, \sigma) &\geq 4\pi \left(R^2 - R\sqrt{R^2 - \sigma^2} - (R - \sqrt{R^2 - \sigma^2})\sigma \right) \\ &\quad - \|K^h(u_t^h)\|_2 \left(\frac{4\pi}{3} (R^2 - \sigma^2)^{3/2} + 2R\pi\sigma^2 - \frac{4\pi}{3} R^3 \right)^{1/2} \\ &\quad - \frac{9}{2} \left(\frac{4\pi}{3} (R^2 - \sigma^2)^{3/2} + 2R\pi\sigma^2 - \frac{4\pi}{3} R^3 \right). \\ &=: \tilde{d}(R, \sigma). \end{aligned}$$

Es ist dann $\sigma \mapsto \tilde{d}(R, \sigma) \in C^2(0, R)$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{d}(R, 0) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} \tilde{d}(R, \sigma) &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \Big|_{\sigma=0} \tilde{d}(R, \sigma) &> 0, \end{aligned}$$

und es folgt $d(R, \sigma) \geq \tilde{d}(R, \sigma) > 0$ für $\sigma > 0$ klein genug. \square Beh.

Mit Stetigkeitsargumenten wollen wir nun schließen, dass auch für Radien nahe $r = R$ die Brückenlösungen minimieren.

Beh. 2: Für alle $\sigma \in [0, r]$ ist $r \mapsto d(r, \sigma)$ stetig und für alle $r \in (0, R]$ ist $\sigma \mapsto d(r, \sigma)$

gleichmäßig in r Hölderstetig.

Dabei ist die Stetigkeit in r ist klar. Zum Beweis der gleichmäßigen Hölderstetigkeit in σ bemerken wir, dass für den ersten und dritten Term von $d(r, \sigma)$ die Ableitungen gleichmäßig in r und h abgeschätzt sind:

$$\left| 4\pi(\sqrt{r^2 - \sigma^2} + \sigma \frac{\sqrt{r - \sigma}}{\sqrt{r + \sigma}} - R) - \int_{\Gamma_{r,\sigma}} K^h(\mathcal{X}_{S(r,\sigma) \setminus E(r)} + \bar{\mathcal{X}}(r_t^h) - \bar{\mathcal{X}}(r))(y) d\mathcal{H}^2(y) \right| \leq 4\pi R + 8\pi R^2.$$

Für den zweiten Term von $d(r, \sigma)$ ist für alle $0 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq r$

$$\left| \int_{\Omega} K^h(u_t^h) \mathcal{X}_{S(\sigma_1) \setminus E(r)} - \int_{\Omega} K^h(u_t^h) \mathcal{X}_{S(\sigma_2) \setminus E(r)} \right| \leq \|K^h(u_t^h)\|_{L^2(\Omega)} \left(|S(\sigma_1) \setminus E(r)| - |S(\sigma_2) \setminus E(r)| \right)^{\frac{1}{2}}$$

und die geforderte Hölderstetigkeit ergibt sich aus der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von $\sigma \mapsto |S(\sigma) \setminus E(r)|$. \square Beh.

Die erste Behauptung liefert uns nun ein $\sigma_* \in (0, R]$ mit

$$0 < m_* := d(R, \sigma_*),$$

weiterhin existiert wegen der gleichmäßiger Hölderstetigkeit von $d(r, \cdot)$ und wegen $d(r, 0) = 0$ ein $\sigma_0 > 0$ unabhängig von r mit

$$d(r, \sigma) < \frac{m_*}{2} \quad \text{für alle } \sigma \leq \sigma_0.$$

Aus der Stetigkeit von $d(\cdot, \sigma_*)$ folgt ausserdem die Existenz von $\delta > 0$ mit

$$d(r, \sigma_*) > \frac{m_*}{2} \quad \text{für alle } r < R - \delta.$$

Damit haben wir schließlich für alle $r < R - \delta$

$$\max_{\sigma \in [0, r]} d(r, \sigma) > \max_{\sigma \in [0, \sigma_0]} d(r, \sigma) \geq 0.$$

Zum Beweis von (7.4) berechnen wir für $r > r_t^h$

$$\begin{aligned} d(r, \sigma) &\leq \int_{\Omega} |\nabla \bar{\mathcal{X}}(r)| - \int_{\Omega} |\nabla \psi(r, \sigma)| - \int_{\Omega} K^h(u_t^h)(\bar{\mathcal{X}}(r) - \psi(r, \sigma)) \\ &\leq -\mathcal{H}^2(\partial(S(\sigma) \setminus E(r))) + 2\mathcal{H}^2(\partial E(r) \cap S(\sigma)) \\ &\quad + \|K^h(u_t^h)\|_{L^4(\Omega)} |S(\sigma) \setminus E(r)|^{3/4}. \end{aligned}$$

Nun existiert $C > 0$ unabhängig von t, h mit $\|K^h(u_t^h)\|_{L^4(\Omega)} \leq C$, denn es ist $u^h \in L^\infty(L^4(\Omega))$ (siehe Lemma 5.7) und mit (5.8)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} K^h(u_t^h)^4 &= \int_{\Omega} K^h(u_t^h)^3 u_t^h - 3h K^h(u_t^h)^2 |\nabla K^h(u_t^h)|^2 \\ &\leq \left(\int_{\Omega} K^h(u_t^h)^4 \right)^{3/4} \|u_t^h\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned}$$

Aus der isoperimetrischen Ungleichung folgt weiter

$$\begin{aligned} &-\mathcal{H}^2(\partial(S(\sigma) \setminus E(r))) + \|K^h(u_t^h)\|_{L^4(\Omega)} (\mathcal{L}^3(S(\sigma) \setminus E(r)))^{3/4} \\ &\leq \left(-1 + C \mathcal{H}^2(\partial(S(\sigma) \setminus E(r)))^{1/8} \right) \mathcal{H}^2(\partial(S(\sigma) \setminus E(r))). \end{aligned}$$

Wir können nun $\sigma_1 > 0$ wählen, so dass für alle $r > r_t^h$, $\sigma < \sigma_1$ gilt:

$$\mathcal{H}^2(\partial(S(\sigma) \setminus E(r)))^{1/8} \leq \frac{1}{2C},$$

dann erhalten wir

$$\begin{aligned} d(r, \sigma) &\leq -\frac{1}{2} \mathcal{H}^2(\partial(S(\sigma) \setminus E(r))) + 2\mathcal{H}^2(\partial E(r) \cap S(\sigma)) \\ &= -\frac{1}{2} \mathcal{H}^2(\partial S(\sigma) \setminus E(r)) + \frac{3}{2} \mathcal{H}^2(\partial E(r) \cap S(\sigma)) \\ &= -\pi(R - \sqrt{r^2 - \sigma^2})\sigma + 3\pi r(r - \sqrt{r^2 - \sigma^2}) \\ &\leq -\pi(R - r)\sigma + 3\pi r\left(r - \left(r - \frac{1}{2r}\sigma^2\right)\right) \\ &< -\frac{\pi}{2}(R - r)\sigma \end{aligned}$$

für $0 < \sigma < \frac{1}{3}(R - r)$, was den Beweis der Proposition beendet. \square

Wir untersuchen nun unter Einschränkungen an die Anfangsdaten eine spezielle Situation und zeigen (im Rahmen unseres Vergleichs zwischen Kugel- und Brückenlösungen), dass es bei der lokalen Minimierung nicht zu einer Ausbildung von Brücken kommen kann und die Brücken stetig zusammenstoßen müssen.

7.3 Proposition *Seien Anfangsdaten $0 \ll r_0 < R$, $u_0 \in H^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ mit $u_0 > -1/2$ gegeben. Dann bilden Lösungen des Stefan-Gibbs-Thomson-Problems bei der lokalen Minimierungsstrategie keine Brücken, bevor sich die festen Bälle berührt haben.*

Bei der lokalen Minimierungsstrategie haben wir zur Bestimmung von \mathcal{X}_{t+h}^h induktiv Minimierer $\tilde{\mathcal{X}}_i$ der Funktionale

$$F_i(\mathcal{X}) = F_t^h(\mathcal{X}) + \lambda_h \int_{\Omega} K^{\varepsilon_h}(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1})(\mathcal{X} - \tilde{\mathcal{X}}_{i-1})$$

zu bestimmen. Sei wieder $\mathcal{X}_t^h = \bar{\mathcal{X}}(r_t^h)$ und $\tilde{\mathcal{X}}_{i-1} = \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_{i-1})$, wir setzen

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i(r, \sigma) &= F_i(\bar{\mathcal{X}}(r)) - F_i(\psi(r, \sigma)) \\ &= d(r, \sigma) - \lambda_h \int_{\Omega} K^{\varepsilon_h}(\mathcal{X}_{S(\sigma) \setminus E(r)}) (\mathcal{X}_{S(\sigma) \setminus E(r)} + 2\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_{i-1}) - 2\bar{\mathcal{X}}(r)). \end{aligned}$$

In einem ersten Schritt wollen wir zeigen, dass die Brückenlösungen nur in einer kleinen Umgebung von $r = R$ konkurrieren können, die mit $h \rightarrow 0$ verschwindet:

7.4 Lemma *Es existiert eine Funktion $\omega : (0, h_0) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), so dass für alle $\tilde{r}_{i-1} \leq r < R - \omega(h)$ und $0 < \sigma \leq r$ gilt:*

$$F_i(\bar{\mathcal{X}}(r)) < F_i(\psi(r, \sigma)).$$

Beweis. Nach (7.4) ist für $\sigma < \sigma_1(r) := \min(\sigma_1, \frac{1}{3}(R - r))$

$$\tilde{d}_i(r, \sigma) \leq d(r, \sigma) < 0.$$

Für $\sigma > \sigma_1(r)$ berechnen wir mit $d(r, \sigma) \leq C(R)$ für alle r, σ :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_i(r, \sigma) &\leq C(R) - \lambda_h \int_{\Omega} K^{\varepsilon_h}(\mathcal{X}_{S(\sigma_1(r)) \setminus E(r)}) \mathcal{X}_{S(\sigma_1(r)) \setminus E(r)} \\ &\leq C(R) - \lambda_h \int_{\Omega} K^{\varepsilon_h}(\mathcal{X}_{B_{\sigma_1(r)}(0)}) \mathcal{X}_{B_{\sigma_1(r)}(0)}. \end{aligned}$$

Nun folgen für $\alpha > 0$ und $0 < m < L$ beliebig, Φ_α Fundamentallösung von $(id - \alpha\Delta)$ auf \mathbb{R}^3 aus Eigenschaften der Φ_α und dem Maximumprinzip für

$$\begin{aligned} 0 &= (id - \alpha\Delta) (K^\alpha(\mathcal{X}_{B_m(0)}) - \mathcal{X}_{B_m(0)} * \Phi_\alpha) \text{ in } \Omega, \\ 0 &\leq \nu_\Omega \cdot \nabla (K^\alpha(\mathcal{X}_{B_m(0)}) - \mathcal{X}_{B_m(0)} * \Phi_\alpha) \text{ auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

die Abschätzungen $K^\alpha(\mathcal{X}_{B_m(0)}) \geq \mathcal{X}_{B_m(0)} * \Phi_\alpha$,

$$\begin{aligned} \int_{B_m(0)} K^\alpha(\mathcal{X}_{B_m(0)}) &\geq \int_{B_m(0)} \mathcal{X}_{B_m(0)} * \Phi_\alpha, \\ &= m^3 \int_{B_1(0)} \mathcal{X}_{B_1(0)} * \Phi_{\alpha m^{-2}}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$\tilde{d}_i(r, \sigma) \leq C(R) - \lambda_h \sigma_1(r)^3 \int_{B_1(0)} \mathcal{X}_{B_1(0)} * \Phi_{\varepsilon_h \sigma_1(r)^{-2}}$$

und insbesondere

$$\tilde{d}_i(r, \sigma) \leq 0$$

für $r < R - \omega(h)$, falls wir $\omega(h) > 0$ so wählen, dass

$$\lambda_h \sigma_1(r)^3 \rightarrow \infty, \quad \frac{\varepsilon_h}{\sigma_1(r)^2} \rightarrow 0$$

ist. Wegen

$$\lambda_h \sigma_1(r)^3 \geq \min \left\{ \lambda_h \sigma_1^3, \frac{1}{27} \lambda_h \omega(h)^3 \right\}$$

und

$$\frac{\varepsilon_h}{\sigma_1(r)^2} \leq \max \left\{ \frac{\varepsilon_h}{\sigma_1^2}, \frac{9\varepsilon_h}{\omega(h)^2} \right\}$$

können wir $\omega(h)$ so wählen, dass $\omega(h) \rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$) gilt. □

Lemma 7.4 zeigt bereits, dass die Ausbildung einer Brücke bei positiver Distanz der Kugeln einen Sprung des Radius erfordert. Das nächste Lemma besagt, dass dieser Sprung der Radien nicht allein innerhalb einer der zweiten zeitdiskreten Evolutionen $\{\tilde{\mathcal{X}}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ geschehen kann:

7.5 Lemma Falls zu $t \in (0, T)$ und einer Teilfolge $h \rightarrow 0$ natürliche Zahlen $\alpha(h)$ existieren mit

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{t+\alpha(h)h}^h &= \bar{\mathcal{X}}(r_{t+\alpha(h)h}^h), \\ \mathcal{X}_{t+\alpha(h)h+h}^h &\text{ ist Brückenlösung,} \end{aligned}$$

so gilt

$$r_{t+\alpha(h)h}^h \rightarrow R \quad (h \rightarrow 0).$$

Beweis. Nach Lemma 7.4 existiert eine Folge $i(h)$, so dass

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}_{t+\alpha(h)h, i(h)}^h &= \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_{t+\alpha(h)h, i(h)}^h), \\ \tilde{r}_{t+\alpha(h)h, i(h)}^h &> R - \omega(h). \end{aligned}$$

Wir schreiben im Folgenden kurz

$$\tilde{r}_i^h = \tilde{r}_{t+\alpha(h)h, i(h)}^h, \quad \tilde{r}_0^h = r_{t+\alpha(h)h}^h.$$

Wäre die Behauptung des Lemmas falsch, so erhielten wir für eine Teilfolge $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\tilde{r}_i^h - \tilde{r}_0^h) > 0.$$

Daraus folgt

$$K^h(\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h) - \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h)) \approx \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h) - \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h)$$

Wegen des Maximumprinzips für (5.8) und der Annahme, dass r_τ^h monoton wächst, gilt $K^h(u_\tau^h) \geq \inf_\Omega u_0$. Im Widerspruch zu $F_{t+\alpha(h)h}^h(\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h)) \leq F_{t+\alpha(h)h}^h(\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h))$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} & 6\omega_3(\tilde{r}_i^h)^2 - 6\omega_3(\tilde{r}_0^h)^2 - \int_\Omega K^h(u_{t+\alpha(h)h}^h)(\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h) - \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h)) \\ & + \frac{1}{2} \int_\Omega K^h(\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h) - \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h))(\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h) - \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h)) \\ & > \int_\Omega (\inf_\Omega u_0 + \frac{1}{2}) |\bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_i^h) - \bar{\mathcal{X}}(\tilde{r}_0^h)| \\ & > 0 \end{aligned}$$

nach der Annahme $\inf_\Omega u_0 > -\frac{1}{2}$.

□

Mit Hilfe der letzten beiden Lemmata können wir nun ausschliessen, dass unsere Lösungen springen oder eine Brücke bilden, bevor sich die Flüssigkeitskugeln berührt haben. Dazu benutzen wir, dass $(u + \mathcal{X}) \in C^0(0, T; L^p(\Omega))$ für alle $1 \leq p < \infty$ ist (siehe [Luc91], [Luc]), und dass $t \mapsto \int_\Omega |\nabla \mathcal{X}(t)| + \frac{1}{2} \int_\Omega u(t)^2$ monoton fallend auf $(0, T)$ ist (die Konstante $C(u_D, f, \Omega)$ aus 5.12 verschwindet für $\Gamma_D = \emptyset, f = 0$).

Wir orientieren uns nun an folgender Idee: Falls eine wachsende Kugel zum Zeitpunkt t springt, also

$$r(t+) - r(t-) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (r(t + \delta) - r(t - \delta)) > 0$$

gilt, so folgt aus $(u + \mathcal{X}) \in C^0(0, T; L^p(\Omega))$, dass auch u springt:

$$u(t+) = u(t-) - (\mathcal{X}(t+) - \mathcal{X}(t-)).$$

Mit einem Maximumprinzip folgt weiterhin

$$u(t-) \geq \inf_\Omega u_0 > -\frac{1}{2}.$$

Dann ist aber

$$3\omega_3(r(t+)^2 - r(t-)^2) + \frac{1}{2} \int_\Omega (u(t+)^2 - u(t-)^2) > 0,$$

im Widerspruch zur Monotonie der Energie.

Diese Schlußweise wollen wir nun auf unseren Fall übertragen. Wir wissen dabei aus Lemma 7.4, dass bei einer Brückenbildung vor dem Berühren auch der Radius springen muss, und aus Lemma 7.5, dass wir diesen Sprung der Radien auch in Kugellösungen der zeitdiskreten Entwicklung \mathcal{X}^h wiederfinden müssen. Wir werden zeigen, dass das der Monotonie der Energie widerspricht.

Wegen der $L^p(\Omega)$ -Konvergenz der u_t^h, \mathcal{X}_t^h für eine Teilfolge $h \rightarrow 0$ und fast alle $t \in (0, T)$ und $(u + \mathcal{X}) \in C^0(0, T; L^p(\Omega))$ beschränken wir uns auf folgende Situation:

Vor.: Es gelte für Teilfolgen $h \searrow 0$ und $\delta \searrow 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{t \pm \delta}^h &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \mathcal{X}(t \pm \delta) && \text{in } L^p(\Omega), \\ u_{t \pm \delta}^h &\xrightarrow{h \rightarrow 0} u(t \pm \delta) && \text{in } L^p(\Omega), \\ \mathcal{X}(t - \delta) &\rightarrow \mathcal{X}(t-), \quad \mathcal{X}(t + \delta) \rightarrow \mathcal{X}(t+) && \text{in } L^p(\Omega), \\ \mathcal{X}_{t-\delta}^h &= \bar{\mathcal{X}}(r_{t-\delta}^h), \quad \mathcal{X}(t - \delta) = \bar{\mathcal{X}}(r(t - \delta)), \quad r(t - \delta) \rightarrow r(t-) < R. \end{aligned}$$

(Falls $r(t-) = R$ ist, so sind die Kugeln stetig zusammengestoßen und die Proposition ist bewiesen.)

Beh.: Dann existiert $\delta_0 > 0$ mit

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(t + \delta) &= \bar{\mathcal{X}}(r(t + \delta)) \quad \text{für alle } \delta < \delta_0, \\ r(t + \delta) &\rightarrow r(t-). \end{aligned}$$

Zum Beweis nehmen wir an, die Behauptung wäre falsch. Es existiert dann eine Teilfolge $\delta \rightarrow 0$ und $h_\delta > 0$, so dass

$$\begin{aligned} &\mathcal{X}_{t+\delta}^{h_\delta} \text{ für alle } h < h_\delta \text{ Brückenlösung, oder} \\ r(t+) - r(t-) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} (r_{t+\delta}^h - r_{t-\delta}^h) > 0. \end{aligned}$$

Im ersten Fall bekommen wir wegen $r(t-) < R$ und den vorangegangenen zwei Lemmata die Existenz von $\alpha_\delta^h \leq \delta$, so dass

$$\mathcal{X}_{t+\alpha_\delta^h}^h = \bar{\mathcal{X}}(r_{t+\alpha_\delta^h}^h) \text{ für alle } h < h_\delta, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} (r_{t+\alpha_\delta^h}^h - r_{t-\delta}^h) = R - r(t-) > 0.$$

Damit können wir beide Fälle analog zum Widerspruch zu führen. Betrachten wir etwa den zweiten Fall. Mit $N = [\delta/h] + [\alpha_\delta^h/h]$ ist wegen (5.8)

$$u_{t+\alpha_\delta^h}^h = (K^h)^N(u_{t-\delta}^h) - \sum_{j=1}^N (K^h)^{N-j+1}(\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h). \quad (7.5)$$

Wir wollen $\int_{\Omega}(u_{t+\alpha^h}^h)^2 - \int_{\Omega}(u_{t-\delta}^h)^2$ abschätzen. Mit einer $L^2(\Omega)$ -Orthonormalbasis $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ von Eigenvektoren

$$\begin{aligned} -\Delta w_k &= \mu_k w_k \text{ in } \Omega, \quad \nabla w_k \cdot \nu_{\Omega} = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \\ w_0 &= \frac{1}{|\Omega|}, \quad \mu_k \geq 0, \quad \mu_k \rightarrow \infty (k \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

ergibt sich aus der Selbstadjungiertheit von K^h und $K^h(w_k) = (1 + h\mu_k)^{-1}w_k$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} (K^h)^N (u_{t-\delta}^h)^2 - \int_{\Omega} (u_{t-\delta}^h)^2 \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega} (K^h)^N (u_{t-\delta}^h) w_k \right)^2 - \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\int_{\Omega} u_{t-\delta}^h w_k \right)^2 \right| \\ &= \left| \sum_k \left((1 + h\mu_k)^{-2N} - 1 \right) \left(\int_{\Omega} u_{t-\delta}^h w_k \right)^2 \right| \\ &\geq \sum_k \left(1 - e^{-\frac{4\delta}{h} \ln(1+h\mu_k)} \right) \left(\int_{\Omega} u_{t-\delta}^h w_k \right)^2 \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_k (1 - e^{-4\delta\mu_k}) \left(\int_{\Omega} u(t-\delta) w_k \right)^2 \\ &\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

(es sind jeweils $|\int_{\Omega} u_{t-\delta}^h w_k|^2$ und $|\int_{\Omega} u(t-\delta) w_k|^2$ konvergente Majoranten). Da wir voraussetzen, dass r_{τ}^h monoton wächst, bekommen wir die Abschätzung $(K^h)^N(u_{t-\delta}^h) \geq \inf_{\Omega} u_0$, weiterhin ist $\int_{\Omega} (K^h)^l(g) = \int_{\Omega} g$ für $l \in \mathbb{N}$ und $g \in L^2(\Omega)$. So erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} -2 \int_{\Omega} (K^h)^N (u_{t-\delta}^h) \cdot \sum_{j=1}^N (K^h)^{N-j+1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h) \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} -2(\inf_{\Omega} u_0) \cdot \sum_{j=1}^N (K^h)^{N-j+1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h) \\ &= 2(\inf_{\Omega} u_0) \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\mathcal{X}_{t+\alpha^h}^h - \mathcal{X}_{t-\delta}^h| \\ &= 2(\inf_{\Omega} u_0) \int_{\Omega} |\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t-)| \end{aligned} \tag{7.7}$$

und

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^N (K^h)^{N-j+1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h) \right|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (K^h)^{N-j+1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h) w_k \right|^2 \\
&= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \int_{\Omega} \sum_{j=1}^N (1 + h\mu_k)^{-N+j-1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h) w_k \right|^2 \\
&= \sum_k \left| \int_{\Omega} g_k^{h,\delta} (\mathcal{X}_{t+\alpha}^h - \mathcal{X}_{t-\delta}^h) w_k \right|^2
\end{aligned}$$

mit einer Funktion $g_k^{h,\delta}$ auf Ω ,

$$\begin{aligned}
g_k^{h,\delta} (\mathcal{X}_{t+\alpha}^h - \mathcal{X}_{t-\delta}^h) &= \sum_{j=1}^N (1 + h\mu_k)^{-N+j-1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h), \\
(1 + h\mu_k)^{-N} &\leq g_k^{h,\delta} \leq 1.
\end{aligned}$$

Für eine Teilfolge $h \rightarrow 0$ gilt dann für alle $1 \leq p < \infty$

$$g_k^{h,\delta} (\mathcal{X}_{t+\alpha}^h - \mathcal{X}_{t-\delta}^h) \rightharpoonup g_k^{\delta} (\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t - \delta))$$

für ein $e^{-2\delta\mu_k} \leq g_k^{\delta} \leq 1$ und damit

$$\begin{aligned}
& \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^N (K^h)^{N-j+1} (\mathcal{X}_{t-\delta+jh}^h - \mathcal{X}_{t-\delta+(j-1)h}^h) \right|^2 \\
&\geq \sum_k \left| \int_{\Omega} g_k^{\delta} (\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t - \delta)) w_k \right|^2 \\
&\stackrel{\delta \rightarrow 0}{\rightarrow} \sum_k \left| \int_{\Omega} (\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t-)) w_k \right|^2 \\
&= \int_{\Omega} |\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t-)|. \tag{7.8}
\end{aligned}$$

Es ergibt sich mit (7.5)-(7.8)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} (u_{t+\alpha^h}^h)^2 - (u_{t-\delta}^h)^2 \geq 2(\inf_{\Omega} u_0) \int_{\Omega} |\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t-)| > 0$$

und schließlich mit $u_0 > -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
0 &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{h \rightarrow 0} \left(6\omega_3(r_{t+\alpha_\delta^h}^h)^2 - 6\omega_3(r_{t-\delta}^h)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_{t+\alpha_\delta^h}^h)^2 - (u_{t-\delta}^h)^2 \right) \\
&\geq 6\omega_3(R^2 - r(t-)^2) + (\inf_{\Omega} u_0) \int_{\Omega} |\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t-)| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{\mathcal{X}}(R) - \mathcal{X}(t-)| \\
&> 0.
\end{aligned}$$

Das widerspricht der Monotonie der Energie, was die Behauptung beweist. \square

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein neues Existenzresultat für das Stefan-Problem mit Gibbs–Thomson-Gesetz bewiesen. Im Unterschied zu einem Artikel von Luckhaus [Luc91], in dem Langzeitexistenz und Uneindeutigkeit schwacher Lösungen dieses Problems gezeigt wurden, verwenden wir hier eine lokale Minimierung zur Bestimmung zeitdiskreter Näherungslösungen. Dieses Vorgehen ist thermodynamisch besser motiviert als die globale Minimierung in [Luc91]. Die Lösungen, die wir erhalten, erlauben singuläre Phasengrenzen, wie sie etwa beim Zusammenschluss mehrerer Anteile einer Phase entstehen können. Durch zusätzliche Regularitätseigenschaften der Lösungen bei globaler Minimierung waren solche Singularitäten bisher ausgeschlossen und eine angemessene Modellierung bestimmter physikalischer Situationen nicht möglich. Wollen wir allgemeinere Phasengrenzen zulassen, ist eine Erweiterung der Formulierung des Gibbs–Thomson-Gesetzes nötig. Weiterhin kann bei der lokalen Minimierung ein Verlust von Oberflächenmasse und das Auftreten verdeckter Anteile der Grenzflächen im Limes der zeitdiskreten Approximationen nicht ausgeschlossen werden. Um die damit verbundenen Schwierigkeiten zu überwinden, betrachten wir den Grenzwert der Oberflächenmaße. Dieser liefert uns eine Ergänzung der eventuell singulären Phasengrenzen zu einer integralen Varifaltigkeit, die in einem maßtheoretischen Sinne eine mittlere Krümmung besitzt. Wir beweisen, dass letztere auf dem unverdeckten Anteil der Oberfläche unabhängig von der Ergänzung ist. Mit einem Konvergenzsatz von Schätzle aus [Sch01] zeigen wir für fast alle Zeiten, dass diese mittlere Krümmung der Phasengrenze das Gibbs-Thomson-Gesetz punktweise \mathcal{H}^{n-1} -fast überall erfüllt.

Das Existenzresultat ist auf die (physikalisch relevanten) Raumdimensionen $n = 2, 3$ beschränkt: Die mittlere Krümmung ist für das Stefan–Gibbs–Thomson-Problem natürlicherweise als Spur einer $H^{1,2}(\Omega)$ -Funktion (der Temperatur) gegeben. Die stetige Einbettung dieses Raums nach $L^s(\Gamma)$ für $(n-1)$ -dimensionale Hyperflächen $\Gamma \subset \Omega$ mit $s > n - 1$ ist eine wesentliche Voraussetzung für den verwendeten Konvergenzsatz aus [Sch01]. Offen bleibt hier, ob das Existenzresultat auf den Fall

reiner Neumannrandwerte ausgedehnt werden kann. Dazu muss eine Abschätzung für Zeitdifferenzen der zeitdiskreten Näherungslösungen ohne die globale Minimierungseigenschaft hergeleitet werden. Da in dieser Arbeit der Konvergenzbeweis für das Gibbs–Thomson-Gesetz und die Einbeziehung von Methoden der geometrischen Maßtheorie im Vordergrund stehen soll, verzichten wir hier auf weitere Untersuchungen zum Fall reiner Neumannrandwerte.

Aus dieser Arbeit ergeben sich einige interessante Fragestellungen. So bleibt hier bei der lokalen Minimierung eine große Auswahl für den „Strafterm“ in der „zweiten“ zeitdiskreten Evolution. Letztere könnte man als Entwicklung auf einer feineren Skala verstehen und nach einer physikalisch motivierten Wahl der Evolution fragen. Weiterhin kann das Verhalten unserer Lösungen an $\partial\Omega$ (insbesondere der Kontaktwinkel) im Moment noch nicht beschrieben werden. Dazu wäre eine Weiterentwicklung der in dieser Arbeit verwendeten Methoden und Sätze nötig. Schließlich bieten sich Untersuchungen des hier entwickelten Begriffs einer mittleren Krümmung für Ränder von Caccioppoli-Mengen an.

Das in dieser Arbeit vorgestellte Vorgehen verspricht auch bei andere Problemen eine erfolgreiche Anwendung. Ein unbedingtes Langzeit-Existenzresultat für das Mullins–Sekerka-Problem scheint damit in Reichweite. Eine erfolgreiche Anwendung auf Probleme wie dem mittleren Krümmungsfluss ist dagegen unwahrscheinlich. Die Regularität des Geschwindigkeitsfeldes reicht hier wohl nicht aus, da andernfalls die mittlere Krümmung besser als quadratintegrierbar sein müsste, was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

Anhang A

Verwendete Sätze

Wir geben hier die von uns benutzte Version des Lipschitz-Approximationssatzes von Brakke ([Bra78] Theorem 5.4, siehe auch [Sch]) und den Konvergenzsatz von Schätzle aus [Sch01] an, den wir im Beweis unseres Existenzsatzes benutzen.

A.1 Lipschitz-Approximation

Für eine integrale $(n - 1)$ -Varifaltigkeit μ in $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sowie $x_0 \in \Omega$, $\varrho > 0$ mit $B_\varrho^n(x_0) \subset \Omega$ und einen $(n - 1)$ -dimensionalen Unterraum $T \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$\begin{aligned} \text{tilt}_\mu(x_0, \varrho, T) &= \varrho^{-n-1} \int_{B_\varrho^n(x_0)} \text{dist}(x - x_0, T)^2 d\mu(x), \\ \text{tiltex}_\mu(x_0, \varrho, T) &= \varrho^{-n+1} \int_{B_\varrho^n(x_0)} \|T_x\mu - T\|^2 d\mu(x), \\ \text{lipapp}_\mu(x_0, \varrho, T) &= \text{tilt}_\mu(x_0, \varrho, T) + \text{tiltex}_\mu(x_0, \varrho, T) + \varrho^{3-n} \int_{B_\varrho^n(x_0)} |\vec{H}_\mu|^2 d\mu, \end{aligned}$$

wobei wir $\text{lipapp}_\mu(x_0, \varrho, T) = \infty$ setzen, falls $\vec{H}_\mu \notin L^2(\mu|_{B_\varrho^n(x_0)})$.

Wir wollen den Lipschitz-Approximationssatz von Brakke in einer Vereinfachung der Version aus [Sch] benutzen: Wird eine integrale $(n - 1)$ -Varifaltigkeit im Sinne der oben definierten Lipschitz-Approximationskonstanten gut durch eine Hyperebene T angenähert, so lässt sie sich über jede auf T nicht senkrecht stehende Ebene in einer grossen Menge als Vereinigung von Lipschitzgraphen schreiben:

A.1 Satz Sei μ eine integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeit in $B_7^n(0)$, $\theta_0 \in \mathbb{N}$ und $T_0 = \{\nu_0\}^\perp$ ein $(n-1)$ -dimensionaler Unterraum des \mathbb{R}^n mit

$$|\vec{e}_n \cdot \nu_0| \geq \lambda > 0.$$

Die lineare Abbildung $\mathcal{T}_0 : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stelle T_0 als Graph über $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ dar:

$$(y, \mathcal{T}_0 y) \in T_0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Ist dann

$$\begin{aligned} \mu(B_7^n(0)) &\leq \Gamma, \\ \mu(B_3^n(0)) &\leq (\theta_0 + \frac{1}{2})3^n \omega_n, \\ (\theta_0 - \frac{1}{2})\omega_n &\leq \mu(B_1^n(0)), \\ \text{lipapp}_\mu(0, 7, T_0) &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

so existieren von Γ, λ, n und θ_0 abhängige Konstanten $\delta_0 > 0$ und $c, C > 0$, eine Funktion $\omega : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\omega(s) \rightarrow 0$ ($s \rightarrow 0$), sowie θ_0 Lipschitzstetige Abbildungen

$$f_i : B_{\delta_0}^{n-1}(0) \rightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, \theta_0$$

mit

$$\text{Lip}(f_i) \leq c, \quad \|f_i - \mathcal{T}_0\|_{L^\infty(B_{\delta_0}^{n-1}(0))} \leq \omega(\varepsilon),$$

so dass gilt:

Die Menge $Y_0 \subset B_{\delta_0}^{n-1}(0)$ der Punkte $y \in B_{\delta_0}^{n-1}(0)$ mit der Eigenschaft

$$\theta^{n-1}(\mu, (y, t)) = \#\{i : f_i(y) = t\} \quad \text{für alle } -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2},$$

und die Menge

$$X_0 := \text{spt}(\mu) \cap (Y_0 \times (-1/2, 1/2)) = \{(y, f_i(y)) : y \in Y_0, 1 \leq i \leq \theta_0\}$$

erfüllen die Abschätzung

$$\mu\left(\left(B_{\delta_0}^{n-1}(0) \times (-1/2, 1/2)\right) \setminus X_0\right) + L^{n-1}\left(B_{\delta_0}^{n-1}(0) \setminus Y_0\right) \leq C\varepsilon.$$

A.2 Konvergenz mittlerer Krümmungen, die als Spur gegeben sind.

Wir zitieren nun den Konvergenzsatz aus [Sch01]) für Hyperflächen, deren mittlere Krümmung als Spur einer Sobolevfunktion gegeben ist.

Vor.: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $n \geq 2$. Für $j \in \mathbb{N}$ seien Teilmengen $E_j \subset \Omega$ mit endlichem Perimeter gegeben und

$$\mu_j = |\nabla \mathcal{X}_{E_j}|, \quad \nu_j = \frac{\nabla \mathcal{X}_{E_j}}{|\nabla \mathcal{X}_{E_j}|} \quad \text{auf } \partial^* E_j.$$

Es sei angenommen, dass die integralen $(n-1)$ -Varifaltigkeiten μ_j eine mittlere Krümmung \vec{H}_{μ_j} besitzen, die als Spur von Funktionen $u_j \in H^{1,p}(\Omega)$, $\frac{n}{2} < p < n$ gegeben sei, das heißt

$$\vec{H}_{\mu_j} = u_j \nu_j \quad \text{auf } \partial^* E_j$$

im schwachen Sinne von

$$\int_{\Omega} \left(\nabla \eta - \frac{\nabla \mathcal{X}_{E_j}}{|\nabla \mathcal{X}_{E_j}|} D\eta \frac{\nabla \mathcal{X}_{E_j}}{|\nabla \mathcal{X}_{E_j}|} \right) |\nabla \mathcal{X}_{E_j}| = \int_{\Omega} \mathcal{X}_{E_j} \nabla \cdot (u_j \eta)$$

für alle $\eta \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$. Es gebe nun $\Lambda > 0$ mit

$$\|u_j\|_{H^{1,p}(\Omega)}, \int_{\Omega} |\nabla \mathcal{X}_{E_j}| \leq \Lambda,$$

weiter $u \in H^{1,p}(\Omega)$, $E \subset \Omega$ und ein Radonmaß V auf $G^{n-1}\Omega$ mit

$$\begin{aligned} u_j &\rightharpoonup u \text{ schwach in } H^{1,p}(\Omega) \\ \mathcal{X}_{E_j} &\rightarrow \mathcal{X}_E \text{ in } L^1(\Omega), \\ V_{\mu_j} &\rightarrow V \text{ als Varifaltigkeiten.} \end{aligned}$$

A.2 Satz *Unter obigen Voraussetzungen gilt dann: Es ist $V = V_{\mu}$ für eine integrale $(n-1)$ -Varifaltigkeit μ mit lokal beschränkter erster Variation und mittlerem Krümmungsvektor*

$$\vec{H}_{\mu} \in L_{loc}^s(\mu_V), \quad 1 - \frac{n}{p} = -\frac{n-1}{s}.$$

Weiterhin hat E endlichen Perimeter, es ist $\partial^* E \subset \text{spt}(\mu)$ und der mittlere Krümmungsvektor von μ erfüllt

$$\vec{H}_{\mu} = u \nu_E \quad \mu - \text{fast überall,}$$

wobei

$$\nu_E(x) = \begin{cases} \frac{\nabla \mathcal{X}_E}{|\nabla \mathcal{X}_E|}(x) & \text{auf } \partial^* E, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Literaturverzeichnis

- [AFP00] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara. *Functions of Bounded Variaton and Free Discontinuity Problems*. Oxford Science Publications, 2000.
- [All72] W. K. Allard. On the first variation of a varifold. *Annals of Mathematics*, 95:417–491, 1972.
- [Alm76] F. Almgren. Existence and Regularity Almost Everywhere of Elliptic Variational Problems with Constraints. *Memoirs A.M.S.*, 165, 1976.
- [Bra78] K. Brakke. *The motion of a surface by its mean curvature*. Princeton University Press, 1978.
- [EG92] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Boca Raton - Ann Arbor - London, 1992.
- [Fed69] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, 1969.
- [Giu84] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*. Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 1984.
- [Gur85] M. E. Gurtin. On the two-phase Stefan problem with interfacial energy and entropy. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 87:187–212, 1985.
- [Luc91] S. Luckhaus. The Stefan Problem with Gibbs-Thomson law. *Sezione di Analisi Matematica e Probabilitita, Universita di Pisa*, 2.75 (591), 1991.
- [Luc] S. Luckhaus. Ergänzung zu [Luc91]: Stetigkeit von $(u + \mathcal{X})$. mündliche Mitteilung.
- [Rad91] E. Radkevitch. Gibbs-Thomson law and existence of classical solution of the modified Stefan problem. *Soviet Dokl. Acad. Sci.*, 43:274–278, 1991.
- [Res68] Y. G. Reshetnyak. Weak convergence of completely additive vector functions on a set. *Siberian Math. J.*, 9:1039–1045, 1968.

-
- [Sch97] R. Schätzle. A counterexample for an approximation of the Gibbs–Thomson law. *Advances in Math. Sciences and Appl.*, 7, No. 1:25–36, 1997.
- [Sch01] R. Schätzle. Hypersurfaces with mean curvature given by an ambient Sobolev function. *J. Differential Geometry*, 58:371–420, 2001.
- [Sch] R. Schätzle. Quadratic tilt-excess decay and strong maximum principle for varifolds. submitted.
- [Sim83] L. Simon. Lectures on Geometric Measure Theory. Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis Australian National University Vol. 3, 1983.
- [Tam82] I. Tamanini. Boundary of Caccioppoli sets with Hölder continuous normal vectors. *J. Reine Angew. Math.*, 334:27–39, 1982.
- [Vis96] A. Visintin. *Models of Phase Transition*. Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 1996.