# Eine neue Konstruktion der gewichteten Kohomologie

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Witold Ossa

aus

Krynica

Bonn 2005

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Referent: Prof. Dr. J. Franke
2. Referent: Prof. Dr. G. Harder

Tag der Promotion: 23.03.2007

Erscheinungsjahr: 2007

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Die gewichtete Kohomologie von arithmetischen Gruppen wurde erstmalig von M. Goresky, G. Harder und R. MacPherson in [**GHM94**] vorgestellt. Dort wird einer arithmetischen Untergruppe $\Gamma$ einer über $\mathbb{Q}$ definierten reduktiven algebraischen Gruppe $\mathcal{G}$ eine Invariante $\mathrm{W}^p\,\mathrm{H}^i(\Gamma, \mathfrak{E})$ zugeordnet, die von einem gewissen Parameter $p$, dem Gewichtsprofil, abhängt. Dabei liegen die Koeffizienten in einer rationalen algebraischen Darstellung $\mathfrak{E}$ von $\mathcal{G}$. Die gewichtete Kohomologie wird als Hyperkohomologie von bestimmten Garbenkomplexen $\mathrm{W}^p\mathrm{C}^\bullet(\mathfrak{E})$ realisiert, die aus einem zu $\mathrm{R}\,i_*\mathfrak{E}$ quasiisomorphen Komplex durch Abschneidung nach dem Parameter $p$ und der Wirkung der entsprechenden Tori auf den Randkomponenten der Kompaktifizierung entstehen. Hierbei ist $i : \Gamma\backslash X \to (\Gamma\backslash X)^*$ die Einbettung des lokalsymmetrischen Raumes zu $\Gamma$ in seine reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung. In [**GHM94**] werden zwei zu $\mathrm{R}\,i_*\mathfrak{E}$ quasiisomorphe Komplexe konstruiert (über $\mathbb{C}$ und über $\mathbb{Q}$), die so beschaffen sind, dass man die Abschneidung explizit anwenden kann. Es wird im weiteren dort nachgewiesen, dass die beiden Konstruktionen zum gleichen Ergebnis führen (allerdings gibt nur eine von ihnen den gewichteten Kohomologiegruppen eine rationale Struktur).

J. Franke hat in [**Fra98**] ausführlich gewichtete $L_2$-Kohomologie beschrieben und mit Hilfe von Eisensteinreihen berechnet. Damit wird dort unter anderem die Borelsche Vermutung bewiesen, nach der die Inklusion des Raumes der automorphen Formen in den Raum aller $C^\infty$-Funktionen einen Isomorphismus auf der Kohomologie mit Koeffizienten in einer endlichdimensionalen Darstellung von $\mathcal{G}$ induziert. Franke definiert die gewichtete $L_2$-Kohomologie für geeignete Gewichtsfunktionen $\rho$ mit Hilfe von Komplexen von Formen, die gewisse von $\rho$ abhängige Integrabilitätskriterien erfüllen. Zudem werden auch für bestimmte $\lambda \in \check{\mathfrak{a}}_0 = X^*(\mathcal{P}_0) \otimes \mathbb{R}$ Gewichtsfunktionen $\rho_\lambda$ definiert. Dabei ist $X^*(\mathcal{P}_0)$ die Gruppe der Charaktere einer fest gewählten minimalen parabolischen Untergruppe $\mathcal{P}_0$ von $\mathcal{G}$. Mit Hilfe dieser Gewichtsfunktionen werden u.a. die gewichteten Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^k_{\lambda\pm\log}(\Gamma\backslash X)$ berechnet.

An diesem Punkt knüpfte A. Nair an. Er zeigt in [**Nai99**], dass für eine geeignete Wahl von $p$ und $\lambda$ die Kohomologiegruppen aus [**GHM94**] und [**Fra98**] isomorph sind.

In dieser Arbeit möchte ich eine neue Konstruktion der gewichteten Kohomologie vorschlagen. Dazu konstruiere ich einen Abschneidefunktor in der derivierten Kategorie der Kategorie der $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivarianten Garben auf der adelischen reduktiven Borel-Serre-Kompaktifizierung $S^*$ von $\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ für den Fall einer über $\mathbb{Q}$ definierten halbeinfachen einfach zusammenhängenden algebraischen Gruppe $\mathcal{G}$. Mit Hilfe dieses Abschneidefunktors wird dann schlieSSlich die gewichtete Kohomologie definiert.

Im ersten Kapitel wird die adelische reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung beschrieben. Eine Darstellung des nicht adelischen Falles findet sich auch z.B. in [**GHM94**]. In [**Roh96**] wird der adelische nicht reduktive Fall behandelt.

Das zweite Kapitel ist der Untersuchung von $\mathcal{G}$–äquivarianten Garben gewidmet. Die Kategorie dieser Garben $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ wird im ersten Abschnitt für einen lokal kompakten Raum $X$, auf dem eine lokal kompakte Gruppe $\mathcal{G}$ wirkt, definiert. Es wird die Existenz von azyklischen Auflösungen für Objekte aus $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ gezeigt. AnschlieSSend werden die von stetigen Abbildungen auf den $\mathcal{G}$-äquivarianten Garben induzierten Morphismen untersucht, und es wird gezeigt, dass $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ eine Grothendieck-Kategorie ist. Die Resultate werden für die Konstruktion des Abschneidefunktors im nächsten Kapitel benötigt.

Im dritten Kapitel werden der Abschneidefunktor definiert und seine Eigenschaften untersucht. Im ersten Abschnitt geht es um die Definition von Unterkategorien $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \subseteq \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ für Systeme $M$ endlicher Mengen $M_{\mathcal{P}}$ von Charakteren bestimmter Tori. Diese $M$ sind mit den Gewichtsprofilen in [**GHM94**] vergleichbar. Im zweiten Abschnitt wird eine zu $M$ gehörige volle Unterkategorie $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \subseteq \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ definiert, die aus Komplexen mit Kohomologieobjekten aus $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(S^*)_M$ besteht. Aus dem Brownschen Darstellbarkeitssatz für triangulierte Kategorien ([**Fra01**]) folgt die Existenz eines zur Inklusion $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \subseteq \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ rechtsadjungierten Funktors $T_M$, der unser gesuchter Abschneidefunktor ist. Mit Hilfe dieses Funktors läSSt sich dann die gewichtete Kohomologie als Hyperkohomologie des abgeschnittenen Komplexes $T_M(\mathrm{R}\, i_* \mathfrak{E}) \in \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ definieren. Eine wichtige Anwendung der Konstruktion wird im Theorem des dritten Abschnitts formuliert. Der dritte Abschnitt beschäftigt sich dann mit dem Beweis des Theorems.

Im vierten Kapitel geht es um die Berechnung der lokalen gewichteten de Rham-Kohomologie. Zuerst werden in Anlehnung an [**Fra98**] $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivariante Garben von gewichteten $C^\infty$-Funktionen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Im zweiten Teil des Kapitels wird die lokale gewichtete Kohomologie berechnet. Aus dem Ergebnis der

Berechnung folgt, dass sich der in diesem Kapitel betrachtete gewichtete Komplex durch die Anwendung des Abschneidefunktors $T_M$ auf den nicht gewichteten Komplex für ein geeignetes $M$ darstellen lässt.

Es sollte möglich sein, mit den Resultaten aus dieser Arbeit und aus [**Nai99**] die Isomorphie der hier eingeführten gewichteten Kohomologie mit der aus [**GHM94**] zu zeigen. Eine sich ebenfalls anschlieSSende interessante Frage ist der Vergleich der beiden gewichteten Kohomologien über $\mathbb{Q}$. Beide Fragestellungen sind aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Meinen ganz herzlichen Dank möchte ich meinem Lehrer, Herrn Professor Dr. J. Franke, aussprechen. Er hatte immer ein offenes Ohr für mich und viel Geduld in Anbetracht der im Verlauf dieser Dissertation auftretenden Fragen und Probleme. Die Gespräche mit ihm und der Besuch seiner Lehrveranstaltungen waren für mich sehr bereichernd. Danken möchte ich auch allen, die mich in meinem Studium auf verschiedene Weise unterstützt und angeregt haben. Insbesondere danke ich dafür meiner Frau.

KAPITEL 1

# Die reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung

## 1. Präliminarien

In diesem Kapitel wird die adelische reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung dargestellt. Eine Darstellung des nicht adelischen Falles findet sich zum Beispiel in [**GHM94**]. Sei $\mathcal{G}$ eine halbeinfache einfach zusammenhängende algebraische Gruppe über $\mathbb{Q}$ . Sei $\mathfrak{P}$ die Menge aller $\mathbb{Q}$-parabolischen Untergruppen von $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G} \in \mathfrak{P}$.
Seien $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ das unipotente Radikal und $\mathcal{L}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}/\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ die Levigruppe von $\mathcal{P}$. $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ sei der maximale $\mathbb{Q}$-zerfallender Torus im Zentrum von $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$. Damit erhalten wir eine Langlands-Zerlegung $\mathcal{P} = \mathcal{M}_{\mathcal{P}}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$.
Für eine rationale Untergruppe $\mathcal{H}$ von $\mathcal{G}$ seien $X^*(\mathcal{H})$ die Gruppe der rationalen Charaktere von $\mathcal{H}$ und $X_*(\mathcal{H})$ die Gruppe der Ein-Parameter-Untergruppen von $\mathcal{H}$. Seien

$$\begin{aligned} &\check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} = X^*(\mathcal{P}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X^*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \text{ und} \\ &\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} = X_*(\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die beiden Vektorräume sind zueinander kanonisch dual. Für $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ induziert die Einschränkung von Charakteren von $\mathcal{Q}$ auf $\mathcal{P}$ einen Monomorphismus $\check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{Q}} \to \check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}$. Der kanonische Homomorphismus $\mathcal{A}_{\mathcal{Q}} \to \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ induziert einen Monorphismus $\mathfrak{a}_{\mathcal{Q}} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$. Diese Abbildungen definieren direkte Summenzerlegungen

$$\check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} = \check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{Q}} \oplus \check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}} \text{ und } \mathfrak{a}_{\mathcal{P}} = \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}} \oplus \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}.$$

Sei $\mathcal{P}_0 \in \mathfrak{P}$ minimal und $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$. Der Übersichtlichkeitshalber schreibe ich oft 0 statt $\mathcal{P}_0$ als Index. Sei $\Delta_0 = \Delta_{\mathcal{P}_0}$ die Menge der einfachen Wurzeln von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_0}$ in $\mathfrak{g}$, der Lie-Algebra von $\mathcal{G}$, bezüglich der durch $\mathcal{P}_0$ definierten Basis des Wurzelformsystems. Sei $\Delta_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}}$ die Menge derjenigen einfachen Wurzeln $\alpha$, für die $\alpha$ in der Levi-Komponente von $\mathcal{P}$ auftaucht. Es gilt $\Delta_{\mathcal{P}_0}^{\mathcal{P}} \subseteq \check{\mathfrak{a}}_0^{\mathcal{P}}$, aber für $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}$ gilt in der Regel nicht $\alpha \in \check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}$. Wir bezeichnen mit $\Delta_{\mathcal{P}}$ das Bild der Projektion von $\Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}$ auf $\check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}$. Sei $\{\omega_\alpha\}_{\alpha\in\Delta_0}$ die zu $\Delta_0$ duale Basis von $\mathfrak{a}_0$. Für $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}$ gilt $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$, aber für $\alpha \in \Delta_0^{\mathcal{P}}$ gilt in der Regel nicht $\omega_\alpha \in \mathfrak{a}_0^{\mathcal{P}}$. Für $\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}$ sei $\omega_\alpha := \omega_{\tilde{\alpha}}$, wobei $\tilde{\alpha} \in \Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}$ sich auf $\alpha$ einschränkt. Es gilt dann

$$\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} = \bigoplus_{\alpha\in\Delta_{\mathcal{P}}} \mathbb{R} \cdot \omega_\alpha.$$

Sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, wobei $\big\{\{t \in \mathbb{R} \mid t > \lambda\}\big\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ ein fundamentales System von Umgebungen von $\infty$ ist. Mit $t + \infty = \infty = \infty + t$ wird $\overline{\mathbb{R}}$ zu einer topologischen Halbgruppe. Sei $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \supset \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$ die topologische Halbgruppe $\bigoplus_{\alpha\in\Delta_{\mathcal{P}}} \overline{\mathbb{R}} \cdot \omega_\alpha$. Für $\beta \in \Delta_{\mathcal{P}}$ und $x = \sum_{\alpha\in\Delta_{\mathcal{P}}} t_\alpha\omega_\alpha$, $t_\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, sei $\langle\beta, x\rangle = t_\beta \in \overline{\mathbb{R}}$.

## 2. Die Teilkompaktifizierung $X^*$

**2.1. Die Randkomponente $\partial_{\mathcal{P}}X^*$.** Wir betrachten nun $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ und $\mathcal{P}_\infty = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sei $X$ die Menge der maximal kompakten Untergruppen von $\mathcal{G}_\infty = \mathcal{G}(\mathbb{R})$. Wähle eine maximal kompakte Untergruppe $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{K}_\infty(x_0)$. Sei

$$q_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$$

die Projektion, $\mathcal{L}_{\mathcal{P},\infty} = \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ und

$$\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty} = q_{\mathcal{P},\infty}(\mathcal{K}_\infty \cap \mathcal{P}_\infty).$$

Zu $\mathcal{K}_\infty$ gehört eine Cartan-Involution $\theta_{\mathcal{K}_\infty}$ der Lie-Gruppe $\mathcal{G}_\infty$. Durch

$$\mathcal{L}_\infty(x_0) = \mathcal{P}_\infty \cap \theta_{\mathcal{K}_\infty}(\mathcal{P}_\infty)$$

wird eine reelle Levi-Komponente für $\mathcal{P}$ definiert, d.h.

$$q_{\mathcal{P},\infty} : \mathcal{L}_\infty(x_0) \to \mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$$

ist ein Isomorphismus. Seien $\mathcal{A}_{\mathcal{P},\infty}(x_0)$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{P},\infty}(x_0)$ die zugehörigen Lifts von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{M}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ in $\mathcal{L}_\infty(x_0)$. Man hat dann bekanntermaSSen eine Langlands-Zerlegung

$$\mathcal{P}_\infty = \mathcal{M}_{\mathcal{P},\infty}(x_0)\mathcal{A}_{\mathcal{P},\infty}(x_0)\mathcal{N}_{\mathcal{P},\infty}(x_0).$$

Definition 1.1. *Sei $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$. Die Randkomponente $\partial_{\mathcal{P}}X^*$ sei definiert durch*

$$\begin{aligned}\partial_{\mathcal{P}}X^* = q_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})(\mathbb{R})\backslash X = \mathcal{N}_{\mathcal{P},\infty}\backslash\mathcal{P}_\infty/\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}(x_0)\mathcal{A}_{\mathcal{P},\infty}(x_0)\\ = \mathcal{L}_{\mathcal{P},\infty}/\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}\mathcal{A}_{\mathcal{P},\infty} \cong \mathcal{M}_{\mathcal{P},\infty}/\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}.\end{aligned}$$

Es gilt $X = \partial_{\mathcal{G}}X^*$. Da für $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathfrak{P}$ mit $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$

$$q_{\mathcal{Q}}^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}) \subseteq q_{\mathcal{P}}^{-1}(\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$$

gilt, bekommen wir Projektionen:

$$\pi^*_{\mathcal{Q},\mathcal{P}} : \partial_{\mathcal{Q}}X^* \to \partial_{\mathcal{P}}X^*.$$

Bemerkung 1.2. Für eine arithmetische Untergruppe $\Gamma \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ und $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ ist

$$\Gamma \cap \mathcal{P}(\mathbb{Q})\backslash\partial_{\mathcal{P}}X^*$$

das reduktive Borel-Serre-Stratum zu $\mathcal{P}$.

DEFINITION 1.3. *Seien* $X^* = \bigcup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \partial_{\mathcal{P}} X^*$ *zunächst als Menge betrachtet. Für* $x \in X^*$ *sei* $\mathcal{P}_x$ *das eindeutige* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *mit* $x \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$. *Für ein* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *sei* $X^*(\mathcal{P}) = \bigcup_{\mathcal{Q}\supset\mathcal{P},\ \mathcal{Q}\in\mathfrak{P}} \partial_{\mathcal{Q}} X^*$ *und* $\pi^*_{\mathcal{P}} : X^*(\mathcal{P}) \to \partial_{\mathcal{P}} X^*$ *die Projektion, deren Einschränkung auf* $\partial_{\mathcal{Q}} X^*$ *mit* $\pi^*_{\mathcal{Q},\mathcal{P}}$ *übereinstimmt. Sei* $\partial X^* = X^* - X$.

Für $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ gilt $X^*(\mathcal{P}) \supset X^*(\mathcal{Q})$ und $\pi^*_{\mathcal{Q},\mathcal{P}}\pi^*_{\mathcal{Q}} = \pi^*_{\mathcal{P}}$.

DEFINITION 1.4. *Für* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *sei*

$$\log_{\mathcal{P}} : \mathcal{P}_\infty \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$$

*definiert durch*

$$\langle \chi, \log_{\mathcal{P}}(p) \rangle = \log |\chi(p)|,$$

*wobei* $\chi$ *alle Charaktere* $X^*_{\mathbb{Q}}(\mathcal{P}) \subseteq \check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}$ *durchläuft. Sei dann* ${}^0\mathcal{P}_\infty = \ker(\log_{\mathcal{P}})$.

LEMMA 1.5. *Für jedes* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *wirken* ${}^0\mathcal{P}_\infty$ *transitiv auf* $\partial_{\mathcal{P}} X^*$, $\mathcal{P}_\infty$ *transitiv auf* $X^*(\mathcal{P})$ *und* $\pi^*_{\mathcal{P}}$ *ist* $\mathcal{P}_\infty$*-äquivariant.*

BEWEIS. Die Existenz und die Transitivität der $\mathcal{P}_\infty$-Wirkung sind klar, da $\mathcal{P}_\infty$ schon auf $X$ transitiv operiert. Ebenso ist die Äquivarianz von $\pi^*_{\mathcal{P}}$ offensichtlich. Um die Transitivität der Wirkung von ${}^0\mathcal{P}_\infty$ auf $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ zu zeigen, wählen wir $x, y \in X$. Es gibt ein $p \in \mathcal{P}_\infty$ mit $x = py$. Wir finden ein $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P},\infty}(y)$ mit $\log_{\mathcal{P}}(a) = \log_{\mathcal{P}}(p)$, nämlich $a = \exp_{\mathcal{A}_{\mathcal{P},\infty}(y)}(\log_{\mathcal{P}}(p))$. Es gilt dann $\pi^*_{\mathcal{G},\mathcal{P}}(y) = \pi^*_{\mathcal{G},\mathcal{P}}(ay)$ und

$$\pi^*_{\mathcal{G},\mathcal{P}}(x) = \pi^*_{\mathcal{G},\mathcal{P}}((pa^{-1})(ay)) = pa^{-1}\pi^*_{\mathcal{G},\mathcal{P}}(ay) = pa^{-1}\pi^*_{\mathcal{G},\mathcal{P}}(y)$$

mit $pa^{-1} \in {}^0\mathcal{P}_\infty$. □

Offenbar gibt es genau eine $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$-Wirkung auf $X^*$, welche die Wirkung auf $X$ (durch Konjugation) fortsetzt und folgende Eigenschaften besitzt:

$$\gamma : \partial_{\mathcal{P}} X^* \to \partial_{\gamma\mathcal{P}\gamma^{-1}} X^*, \text{ also}$$
$$\gamma : X^*(\mathcal{P}) \to X^*(\gamma\mathcal{P}\gamma^{-1}) \text{ und}$$
$$\pi^*_{\gamma\mathcal{P}\gamma^{-1}}(\gamma x) = \gamma\pi^*_{\mathcal{P}}(x),$$

wobei $\gamma(px) = (\gamma p\gamma^{-1})(\gamma x)$ mit $p \in \mathcal{P}_\infty$, $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$, $x \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$.

**2.2. Topologie von $X^*$.** $X^*$ wurde als $\bigcup_{\mathcal{P}\in\mathfrak{P}} \partial_{\mathcal{P}} X^*$ definiert, wobei $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ die Quotiententopologie der $\mathcal{P}_\infty$-Topologie trägt. Wir haben daher die disjunkte Vereinigungstopologie auf $X^*$. Sie ist aber nicht die ‚richtige' Topologie.
Um eine Topologie zu definieren, die die gewünschten Kompaktifizierung liefert, wird eine Abstandsfunktion $\mathrm{d}_{\mathcal{P}}$ benötigt.

DEFINITION 1.6. *Sei* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$. *Definiere*

$$d_{\mathcal{P}} : \{(x, y) \in X^*(\mathcal{P}) \times X^*(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P}_x \supseteq \mathcal{P}_y \supseteq \mathcal{P}\} \to \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}, \tag{1.1}$$

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) = \log_{\mathcal{P}}(p) + \infty_{\mathcal{P}_y}, \tag{1.2}$$

*wobei* $p \in \mathcal{P}_\infty$ *die Eigenschaft* $y = p\pi_{\mathcal{P}_y}(x)$ *hat und*

$$\infty_{\mathcal{P}_y} = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}_y}} \infty \cdot \omega_\alpha \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}.$$

Man prüft leicht nach, dass dies von der Auswahl von $p$ unabhängig ist. Es gilt

$$\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x, y) \in \{\lambda \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \mid \langle \alpha, \lambda \rangle = \infty \iff \alpha \in \Delta_{\mathcal{P}} - \Delta_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}_y}\}.$$

Lemma 1.7. *Seien* $x, y, z \in X^*$ *und* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *mit* $\mathcal{P}_x \supseteq \mathcal{P}_y \supseteq \mathcal{P}_z \supseteq \mathcal{P}$, $p \in \mathcal{P}_\infty$ *und* $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$. *Dann gilt:*

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) + d_{\mathcal{P}}(y, z) = d_{\mathcal{P}}(x, z), \tag{1.3}$$

$$d_{\mathcal{P}}(x, px) = \log_{\mathcal{P}}(p) + \infty_{\mathcal{P}_x}, \tag{1.4}$$

$$d_{\gamma\mathcal{P}\gamma^{-1}}(x, y) = \mathrm{Ad}(\gamma) d_{\mathcal{P}}(x, y). \tag{1.5}$$

Beweis. Exemplarisch wird (1.3) bewiesen. Die beiden anderen Aussagen folgen ähnlich direkt aus der Definition. Seien $p, q \in \mathcal{P}_\infty$ mit $y = p\pi^*_{\mathcal{P}_y}(x)$ und $z = q\pi^*_{\mathcal{P}_z}(y)$. Damit gilt

$$z = q\pi^*_{\mathcal{P}_z}(y) = q\pi^*_{\mathcal{P}_z}(p\pi^*_{\mathcal{P}_y}(x)) = qp\pi^*_{\mathcal{P}_z}(\pi^*_{\mathcal{P}_y}(x)) = qp\pi^*_{\mathcal{P}_z}(x)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x, y) + \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(y, z) &= \log_{\mathcal{P}}(p) + \infty_{\mathcal{P}_y} + \log_{\mathcal{P}}(q) + \infty_{\mathcal{P}_z} \\ &= \log_{\mathcal{P}}(qp) + \infty_{\mathcal{P}_z} = \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x, z). \end{aligned}$$

□

Für $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$ sei

$$\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) = \{x \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \mid \langle \alpha, x \rangle < \infty \text{ für } \alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}\}.$$

Die Projektion $\mathrm{p}_{\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}}$ setzt sich zu einer Projektion $\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \to \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{Q}}}$ fort, durch

$$\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \to \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{Q}}}(\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}} \lambda_\alpha \omega_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}} \lambda_\alpha \, \mathrm{p}_{\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}}(\omega_\alpha).$$

Dabei tritt der Fall "$\infty - \infty$" nicht auf, da $\mathrm{p}_{\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}}$ die positive Weyl-Kammer $\mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^+$ nach $\mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}^+$ abbildet. Wir erhalten auch eine Projektion $\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}$ durch

$$\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}(\sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}} \lambda_\alpha \omega_\alpha) = \sum_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}} \lambda_\alpha \, \mathrm{p}_{\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}(\omega_\alpha).$$

Diese ist nach der Definition von $\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q})$ wohldefiniert.

Lemma 1.8. *Seien $x, y \in X^*$ und $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathfrak{P}$ mit $\mathcal{P}_x \supseteq \mathcal{P}_y \supseteq \mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P}$. Dann gilt:*

$$d_{\mathcal{P}}(x, y) \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}), \tag{1.6}$$

$$\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \to \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{Q}}}(d_{\mathcal{P}}(x, y)) = d_{\mathcal{Q}}(x, y), \tag{1.7}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}(d_{\mathcal{P}}(x, y)) &= \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}(d_{\mathcal{P}}(\pi_{\mathcal{Q}}^*(x), \pi_{\mathcal{Q}}^*(y))) \\ &= \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}(d_{\mathcal{P}}(x, \pi_{\mathcal{Q}}^*(y))). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Beweis. Die erste Aussage folgt direkt aus der Definition. Für alle in den beiden letzten Aussagen auftretenden Abstände kann man dasselbe $p$ verwenden, welches in (1.2) verwendet wird. Dann folgt die zweite Behauptung aus

$$\mathrm{p}_{\mathfrak{a}_{\mathcal{P}} \to \mathfrak{a}_{\mathcal{Q}}}(\log_{\mathcal{P}}(p)) = \log_{\mathcal{Q}}(p)$$

für $p \in \mathcal{P}_\infty$. Die letzte Behauptung folgt aus

$$\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}^{\mathcal{Q}}}(\infty_{\mathcal{P}_{\infty, y}}) = 0$$

und der Tatsache, dass alle auftretenden Projektionen Halbgruppenhomomorphismen sind. □

Definition 1.9. *Sei $x_0 \in X$ fest aber beliebig gewählt.*

(i) *Sei $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, $x \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ und $V$ eine beschränkte offene Umgebung von $x$ in $\partial_{\mathcal{P}} X^*$, d.h. der Abschluss (bzgl. der Quotiententopologie) von $V$ in $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ ist kompakt. Dann sei eine Teilmenge $U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0)$ von $X^*$ definiert als die Menge aller $y \in X^*(\mathcal{P})$ mit $\pi_{\mathcal{P}}^*(y) \in V$ und $\langle \alpha, d_{\mathcal{P}}(x_0, y) \rangle > \lambda$ für alle $\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}$.*

(ii) *Eine Menge $U \subseteq X^*$ ist offen, falls zu jedem $x \in U$ eine beschränkte Umgebung $V$ von $x$ in $\partial_{\mathcal{P}_x} X^*$ und eine reelle Zahl $\lambda$ mit $U_{\mathcal{P}_x}^*(V, \lambda, x_0) \subseteq U$ existieren.*

Man sieht leicht, dass dies tatsächlich eine Topologie ist. Wegen (1.3) ist diese Topologie von der Auswahl von $x_0$ unabhängig.

Lemma 1.10. *Sei $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$. Dann gilt*

(i) *$X^*(\mathcal{P})$ ist offen. Insbesondere sind $X = X^*(\mathcal{G})$ offen und $\partial X^*$ abgeschlossen.*

(ii) *Für jedes offene beschränkte $V \subseteq \partial_{\mathcal{P}} X^*$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0)$ offen.*

(iii) *Folgende Abbildungen sind stetig:*
   (a) *$d_{\mathcal{P}}(x_0, -) : X^*(\mathcal{P}) \to \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}$,*
   (b) *$\pi_{\mathcal{P}}^* : X^*(\mathcal{P}) \to \partial_{\mathcal{P}} X^*$,*
   (c) *die Wirkung $X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \to X^*$,*
   (d) *die Wirkung $X^*(\mathcal{P}) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to X^*(\mathcal{P})$.*

Beweis. (i) Sei $x \in X^*(\mathcal{P})$, dann gilt für jede beschränkte Umgebung $V$ von $x$ in $\partial_{\mathcal{P}_x} X^*$ und jedes $\lambda$

$$U^*_{\mathcal{P}_x}(V, \lambda, x_0) \subseteq X^*(\mathcal{P}_x) \subseteq X^*(\mathcal{P}).$$

(ii) Sei $x \in U^*_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0)$ und $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_x \supset \mathcal{P}$. Wegen der Stetigkeit von $\pi^*_{\mathcal{P}}$ und $\mathrm{d}_{\mathcal{P}}$ in der disjunkten Vereinigungstopologie auf $X^*$ gibt es eine beschränkte offene Umgebung $V'$ von $x$ in $\partial_{\mathcal{Q}} X^*$ mit $\pi^*_{\mathcal{P}}(V') \subseteq V$ und $\langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, z) \rangle > \lambda$ für $\alpha \in \Delta^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}$ und $z \in V'$.
Es soll gezeigt werden, dass für hinreichend groSSes $\theta$ gilt

$$U^*_{\mathcal{Q}}(V', \theta, x_0) \subseteq U^*_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0).$$

Es gilt stets für alle $y$ aus der linken Seite

$$\pi^*_{\mathcal{P}}(y) = \pi^*_{\mathcal{P}}(\pi^*_{\mathcal{Q}}(y)) \in \pi^*_{\mathcal{P}}(V') \subseteq V,$$

d.h. die erste Bedingung der rechten Seite ist erfüllt. Um für $y$ die zweite Bedingung zu zeigen (für $\theta >> 0$), beachten wir, dass $y \in X^*(\mathcal{Q})$, also $\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, y) \in \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q})$. Betrachte die beiden Projektionen

$$\begin{aligned} r_1 &= \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}} \quad \text{und} \\ r_2 &= (\mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}} \to \overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{Q}}})_{|\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q})}. \end{aligned}$$

Es gilt $r_1 + r_2 = \mathrm{id}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q})}$.
Da $V' \subseteq \partial_{\mathcal{Q}} X^*$ beschränkt und $\mathrm{d}_{\mathcal{P}}$ in der disjunkten Vereinigungstopologie stetig ist, gibt es eine kompakte Teilmenge $C \subseteq \mathfrak{a}^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}$ mit

$$r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, V')) \subseteq C.$$

Sei $\theta \geq \lambda + \max\big(0, -\min\{\langle \alpha, c \rangle \mid \alpha \in \Delta_{\mathcal{P}} - \Delta^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}},\ c \in C\}\big)$. Für $\alpha \in \Delta^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}$ gilt nach (1.8) und (1.3)

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, y) \rangle = \langle \alpha, r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, y)) \rangle &= \langle \alpha, r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, \pi^*_{\mathcal{Q}}(y))) \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, \pi^*_{\mathcal{Q}}(y)) \rangle > \lambda, \end{aligned}$$

da $\pi^*_{\mathcal{Q}}(y) \in V'$. Für $\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}} - \Delta^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}$ gilt wieder nach (1.8)

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, y) \rangle &= \langle \alpha, r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, y)) \rangle + \langle \alpha, r_2(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, y)) \rangle \\ &= \langle \alpha, r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, \pi^*_{\mathcal{Q}}(y))) \rangle + \langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{Q}}(x_0, y) \rangle \\ &\geq \min\{\langle \alpha, c \rangle \mid c \in C,\ \alpha \in \Delta_{\mathcal{P}} - \Delta^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}\} + \theta \geq \lambda, \end{aligned}$$

da

$$\langle \alpha, r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, \pi^*_{\mathcal{Q}}(y))) \rangle \in \langle \alpha, r_1(\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, V')) \rangle \subseteq \langle \alpha, C \rangle.$$

Damit ist (ii) bewiesen.
(iii) ist offensichtlich. □

Korollar 1.11. *$X$ ist dicht in $X^*$.*

Beweis. Wenn $x \in \partial_{\mathcal{P}_x} X^*$ und $V$ eine beschränkte offene Umgebung von $x$ in $\partial_{\mathcal{P}_x} X^*$ sind, dann ist $U^*_{\mathcal{P}_x}(V, \lambda, x_0) \cap X \neq \emptyset$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus folgt die Dichtheit von $X$. □

## 3. Adelische Quotienten

In diesem Abschnitt soll die adelische reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung konstruiert werden. Dazu wird zunächst der folgende Raum betrachtet:

$$\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f) = X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)/\,\mathrm{R}^*,$$

wobei

$$(x, g)\,\mathrm{R}^*(y, h) \iff \exists \gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})\ (y, h) = (\gamma x, \gamma g).$$

Für $x \in X^*$ sei

$$\mathfrak{Z}^*_x = \{\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \mid \gamma x = x\}$$

und sei $Z^*_x$ der Abschluss von $\mathfrak{Z}^*_x$ in $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$. Es gilt

$$\mathcal{A}_{\mathcal{P}_x}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}_x}(\mathbb{A}_f) \subseteq Z^*_x \subseteq \mathcal{P}_x(\mathbb{A}_f),$$

da $\mathcal{A}_{\mathcal{P}_x}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}_x}(\mathbb{Q}) \subseteq \mathfrak{Z}^*_x \subseteq \mathcal{P}_x(\mathbb{Q})$ gilt, und $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_x}(\mathbb{Q})$ in $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_x}(\mathbb{A}_f)$ wegen der Unipotenz von $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_x}$ dicht ist. Mit $\bar{\mathrm{R}}^*$ bezeichne ich den Abschluss der Äquivalenzrelation $\mathrm{R}^*$.

Definition 1.12. *Die adelische reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung $S^*$ von $\mathcal{G}$ ist definiert durch*

$$S^* = (\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f))^* = X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)/\bar{\mathrm{R}}^*.$$

*Sei für ein $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$*

$$\partial_{\mathcal{P}} S^* = (\partial_{\mathcal{P}} X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f))\bar{\mathrm{R}}^*/\bar{\mathrm{R}}^*,$$

*und sei*

$$\partial S^* = (\partial X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f))\bar{\mathrm{R}}^*/\bar{\mathrm{R}}^*.$$

*$\partial_{\mathcal{G}} S^*$ wird mit $S$ bezeichnet.*

Theorem 1.13.
(i) *$(x, g), (y, h) \in X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ sind unter $\bar{\mathrm{R}}^*$ äquivalent, wenn es ein $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ und ein $m \in Z^*_x$ gibt, so dass $(y, h) = (\gamma x, \gamma m g)$ gilt.*
(ii) *$S^*$ ist ein kompakter Hausdorff-Raum.*

Bevor ich mit den Vorbereitungen für den Beweis des Theorems fortfahre, möchte ich einige Folgerungen daraus ziehen.

Korollar 1.14.
(i) *$S$ ist offen, $\partial S^*$ abgeschlossen in $S^*$.*
(ii) *$\partial S^* = \bigcup \partial_{\mathcal{P}} S^*$, wobei die disjunkte Vereinigung über alle echten standardparabolischen Untergruppen von $\mathcal{G}$ gebildet wird.*
(iii) *Für eine maximale echte standardparabolische Untergruppe $\mathcal{P}$ von $\mathcal{G}$ ist $\partial_{\mathcal{P}} S^*$ offen in $\partial S^*$.*

Beweis. Sei $p : X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \to X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)/\bar{\mathrm{R}}^* = S^*$ die Projektion. (i) Sei $(x, g) \in X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$. Da $X = X^*(\mathcal{G}) = \partial_{\mathcal{G}} X^*$ in $X^*$ offen ist, gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq X$ von $x$, und für eine offene und kompakte Untergruppe $\mathcal{K}_f$ von $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ ist $V \times g\mathcal{K}_f$ eine offene Umgebung von $(x, g)$ in $X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$. Es wird gezeigt, dass $p(V \times g\mathcal{K}_f)$ eine offene

Umgebung von $p(x,g)$ in $S^*$ ist. Nun folgt aus dem Theorem 1.13(i), dass

$$p^{-1}(p(V \times g\mathcal{K}_f)) = \bigcup_{y \in V} \mathcal{G}(\mathbb{Q})V \times \mathcal{G}(\mathbb{Q})Z_y^* g\mathcal{K}_f,$$

also lässt sich das Urbild der betrachteten Menge als eine Vereinigung von Translationen offener Mengen darstellen und ist daher selbst in der Quotiententopologie offen. Es gilt auch $\mathcal{G}(\mathbb{Q})V \subseteq X$. Damit ist $S$ offen in $S^*$.

Für alle $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$, alle $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ und alle $x \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$ ist $\gamma x \in \partial_{\gamma\mathcal{P}\gamma^{-1}} X^*$. Daher ist $\partial X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ unter der Wirkung von $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$ von links invariant. Es folgt also $\partial S^* = S^* - S$ und damit die Abgeschlossenheit von $\partial S^*$.

(ii) Da jede echte parabolische Untergruppe zu einer Standardparabolischen mit einem Element aus $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$ konjugiert ist, folgt aus dem obigen Abschnitt, dass die Randkomponenten einer Konjugationsklasse von parabolischen Untergruppen unter der Äquivalenzrelation $\bar{\mathrm{R}}^*$ zusammenfallen.

(iii) Da in diesem Fall $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ in $\partial X^*$ offen ist, folgt die Behauptung unter der Berücksichtigung des Beweises von (ii) mit den gleichen Argumenten wie beim Beweis von (i): Es wird eine offene Umgebung $V \subseteq X^*(\mathcal{P}) = X \cup \partial_{\mathcal{P}} X^*$ eines Punktes aus $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ gewählt, dann wie in (i) zu einer Umgebung $V \times g\mathcal{K}_f$ in $X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ erweitert und schlieSSlich das Urbild ihres Bildes unter $p$ betrachtet. Hier muss man nur beachten, dass

$$p^{-1}(p(V \times g\mathcal{K}_f)) \subseteq (X \cup \bigcup_{\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})} \partial_{\gamma\mathcal{P}\gamma^{-1}} X^*) \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f),$$

was aber an der Offenheit der Menge nichts ändert. □

KOROLLAR 1.15. *Für eine offene kompakte Untergruppe $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ ist*

$$S^*/\mathcal{K}_f = \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)/\mathcal{K}_f$$

*ein kompakter Hausdorff-Raum.*

BEWEIS. Nach Theorem 1.13(ii) ist der Raum auf der linken Seite Hausdorffsch. Sei $(x,g)\,\mathrm{R}^*_{\mathcal{K}_f}(y,h)$ genau dann, wenn die Bilder von $(x,g)$ und $(y,h)$ in der rechten Seite übereinstimmen, und sei $(x,g)\bar{\mathrm{R}}^*_{\mathcal{K}_f}(y,h)$ genau dann, wenn die Bilder von $(x,g)$ und $(y,h)$ in der linken Seite übereinstimmen.

Offenbar gilt $\mathrm{R}^*_{\mathcal{K}_f} \subseteq \bar{\mathrm{R}}^*_{\mathcal{K}_f}$. Es gilt $(x,g)\bar{\mathrm{R}}^*_{\mathcal{K}_f}(y,h)$ genau dann, wenn es ein $k \in \mathcal{K}_f$ mit $(x,gk)\bar{\mathrm{R}}^*(y,h)$ gibt. Das wiederum ist äquivalent mit der Existenz eines $k \in \mathcal{K}_f$, eines $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ und eines $m \in Z_x^*$ mit $(y,h) = (\gamma x, \gamma m g k)$.

Sei $\mu \in \mathfrak{Z}_x^*$ mit $\mu g \in mg\mathcal{K}_f$. Dann existiert ein $k' \in \mathcal{K}_f$ mit $(y,h) = (\gamma x, \gamma\mu g k') = (\gamma\mu x, \gamma\mu g k')$.

Damit erhalten wir die gewünschte Relation $(y,h)\,\mathrm{R}^*_{\mathcal{K}_f}(x,g)$. □

KOROLLAR 1.16. *Die natürlichen Projektionen $S^* \to S^*/\mathcal{K}_f$ induzieren Homöomorphismen*

$$S^* \xrightarrow{\cong} \lim_{\mathcal{K}_f} S^*/\mathcal{K}_f,$$

$$\partial S^* \xrightarrow{\cong} \lim_{\mathcal{K}_f} \partial S^*/\mathcal{K}_f,$$

$$S \xrightarrow{\cong} \lim_{\mathcal{K}_f} S/\mathcal{K}_f,$$

*wobei $\mathcal{K}_f$ die offenen und kompakten Untergruppen von $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ durchläuft.*

Für den Beweis wird das folgende Lemma gebraucht.

LEMMA 1.17. *Seien $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta\}_{\alpha,\beta\in I}$ und $\{Y_\alpha, \psi_\alpha^\beta\}_{\alpha,\beta\in I}$ inverse Systeme in der Kategorie der topologischen Hausdorff-Räume. Sei $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$ ein System stetiger surjektiver Abbildungen mit kompakten Fasern. Angenommen, dass $Y = \lim Y_\alpha \neq \emptyset$. Dann ist $f = \lim f_\alpha$ eine surjektive Abbildung mit kompakten Fasern.*

BEWEIS. Das Lemma und der Beweis finden sich in [**Roh96**][1.8.]. □

BEWEIS VON KOROLLAR 1.16. Der Beweis ähnelt dem Beweis einer vergleichbaren Aussage für die adelische Borel-Serre-Kompaktifizierung in [**Roh96**][1.9.]. Da nach dem Korollar 1.15 alle $S^*/\mathcal{K}_f$ kompakt sind, gilt $\lim S^*/\mathcal{K}_f \neq \emptyset$. Da außerdem alle natürlichen Projektionen $S^* \to S^*/\mathcal{K}_f$ kompakte Fasern haben, kann das obige Lemma angewandt werden. Wir erhalten stetige surjektive Abbildungen $S^* \to \lim S^*/\mathcal{K}_f$, $\partial S^* \to \lim \partial S^*/\mathcal{K}_f$. Für $s_1 \neq s_2$, $s_i \in S^*$ gibt es ein $\mathcal{K}_f$ mit $s_1 \notin s_2\mathcal{K}_f$. Aber damit ist die Abbildung $S^* \to \lim S^*/\mathcal{K}_f$ injektiv. Da $S^*$ nach dem Theorem 1.13 kompakt ist, ist diese Abbildung ein Homöomorphismus. Das Gleiche gilt für $\partial S^* \to \lim \partial S^*/\mathcal{K}_f$. Die Inklusion $S/\mathcal{K}_f \subseteq S^*/\mathcal{K}_f$ induziert eine Inklusion $\lim S/\mathcal{K}_f \subseteq \lim S^*/\mathcal{K}_f = S^*$, und $\lim S/\mathcal{K}_f$ trägt die Unterraumtopologie. Aus den Projektionen $S \to S/\mathcal{K}_f$ ergibt sich eine Inklusion $S \subseteq \lim S/\mathcal{K}_f$. Jetzt würde ein $s \in \partial S^* \cap \lim S/\mathcal{K}_f$ auf ein Element aus $\partial S^*/\mathcal{K}_f \cap S/\mathcal{K}_f = \emptyset$ abgebildet werden. Also ist $S$ zu $\lim S/\mathcal{K}_f$ homöomorph. □

Der Rest des Paragraphen beschäftigt sich mit dem Beweis des Theorems.

DEFINITION 1.18. *Sei $\mathcal{P}_0 \in \mathfrak{P}$ minimal, $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ offen und maximal kompakt mit $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) = \mathcal{P}_0(\mathbb{A}_f)\mathcal{K}_f$. Sei $\mathcal{K}_\infty$ der Stabilisator von $x_0 \in X$ und $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\infty\mathcal{K}_f$.*

(i) *Sei*

$$\log_0 : \mathcal{P}_0(\mathbb{A}) \to \mathfrak{a}_0$$

*definiert durch*

$$\langle \chi, \log_0(p) \rangle = \log(\prod_{v \in \hat{\mathbb{Q}}} |\chi(p_v)|_v),$$

*wobei dies für alle* $\chi \in X^*(\mathcal{P}_0) \subseteq \check{\mathfrak{a}}_0$ *gelten soll.*

(ii) *Sei*

$$\mathrm{H}(g) = \mathrm{H}_{0,\mathcal{K}}(g) = \log_0(p),$$

*wobei nach der Iwasawa-Zerlegung gilt*

$$g = pk \text{ mit } p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{A}), k \in \mathcal{K}.$$

(iii) *Für jedes* $D \in \mathbb{R}$ *sei* $\mathfrak{S}(D)$ *die Menge aller* $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$ *mit* $\langle \alpha, \mathrm{H}(g) \rangle > D$ *für alle* $\alpha \in \Delta_0$.

(iv) *Für* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *mit* $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ *und alle* $T, D \in \mathbb{R}$ *mit* $T > D$ *sei* $\mathfrak{S}(\mathcal{P}, D, T)$ *die Menge aller* $g \in \mathfrak{S}(D)$ *mit* $\langle \alpha, \mathrm{H}(g) \rangle > T$ *für alle* $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}$.

Sei

$$\mathfrak{a}_0^+ = \{x \in \mathfrak{a}_0 \mid \langle \alpha, x \rangle > 0 \text{ für alle } \alpha \in \Delta_0\}$$

die positive Weyl-Kammer in $\mathfrak{a}_0$. Es gibt zu jeder Wurzel $\alpha \in \Delta_0$ die zugehörige Kowurzel $\check{\alpha} \in \mathfrak{a}_0$. Sei dann

$$^+\mathfrak{a}_0 = \{\sum_{\alpha \in \Delta_0} \lambda_\alpha \check{\alpha} \mid \lambda_\alpha > 0\} \supseteq \mathfrak{a}_0^+$$

der von Kowurzeln erzeugte Kegel in $\mathfrak{a}_0$.
Es wird das folgende bekannte Resultat aus der Reduktionstheorie verwandt.

Satz 1.19. *Sei* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *mit* $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P}$ *und* $D \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

(i) *Es gibt ein von* $D$ *abhängiges* $\xi \in \mathfrak{a}_0$, *so dass für alle* $g \in \mathfrak{S}(D)$ *und* $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ *gilt*

$$\mathrm{H}(\gamma g) - \mathrm{H}(g) \in \xi - {}^+\mathfrak{a}_0.$$

(ii) *Es gibt eine von* $D$ *abhängige kompakte Menge* $\Omega \subseteq \mathfrak{a}_0$, *so dass aus* $g \in \mathfrak{S}(D)$ *und* $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ *mit* $\gamma g \in \mathfrak{S}(D)$ *folgt*

$$\mathrm{H}(\gamma g) - \mathrm{H}(g) \in \Omega.$$

(iii) *Es gibt ein von* $D$ *abhängiges* $T \in \mathbb{R}$, *so dass aus* $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ *und*

$$\gamma \mathfrak{S}(\mathcal{P}, D, T) \cap \mathfrak{S}(D) \neq \emptyset$$

*folgt*

$$\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}).$$

Beweis. [**Fra98**][2.1.]

□

Satz 1.20. *Sei* $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathfrak{P}$, $V \subseteq \partial_{\mathcal{P}} X^*$ *und* $W \subseteq \partial_{\mathcal{Q}} X^*$ *offen und beschränkt, und sei* $\Omega \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ *eine kompakte Teilmenge. Dann gibt es ein* $\lambda \in \mathbb{R}$, *so dass aus* $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ *und*

$$\gamma(U^*_{\mathcal{Q}}(W, \lambda, x_0) \times \Omega) \cap (U^*_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0) \times \Omega) \neq \emptyset$$

*folgt, dass* $\gamma \mathcal{Q} \gamma^{-1} = \mathcal{P}$ *gilt. Insbesondere folgt* $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ *für* $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

Beweis. Sei $\mathcal{P}_0$ ein minimales Element in $\mathfrak{P}$, $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ maximal kompakte Untergruppe mit $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f) = \mathcal{P}_0(\mathbb{A}_f)\mathcal{K}_f$. Ferner sei $\mathcal{K}_\infty$ der Stabilisator von $x_0 \in X$ und $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\infty \mathcal{K}_f$. Seien $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ mit $\epsilon_1 \mathcal{P} \epsilon_1^{-1} \supset \mathcal{P}_0$ und $\epsilon_2 \mathcal{Q} \epsilon_2^{-1} \supset \mathcal{P}_0$. Indem wir $\mathcal{P}$ durch $\epsilon_1 \mathcal{P} \epsilon_1^{-1}$, $\mathcal{Q}$ durch $\epsilon_2 \mathcal{Q} \epsilon_2^{-1}$ und $\Omega$ durch $\epsilon_1 \Omega \cup \epsilon_2 \Omega$ ersetzen, können wir $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \supset \mathcal{P}_0$ voraussetzen (dabei geht $\gamma$ in $\epsilon_1 \gamma \epsilon_2^{-1}$ über). Dann gibt es ein $D$ und ein $\delta$, die von $V$, $W$ und $\Omega$ abhängen, so dass aus $g = (g_\infty, g_f)$, mit $g_f \in \Omega$ und $g_\infty x_0 \in U^*_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0)$, $g \in \mathfrak{S}(\mathcal{P}, D, \lambda - \delta)$ folgt. Eine analoge Aussage gilt auch für $\mathcal{Q}$ statt $\mathcal{P}$ und $W$ statt $V$. Ich zeige die erste Behauptung. Sei $x = g_\infty x_0$. Es gibt kompakte $C$, $C' \subseteq \overline{\mathfrak{a}}_0$, so dass gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}(g) = \mathrm{H}(g_\infty) + \mathrm{H}(g_f) &\in \mathrm{d}_{\mathcal{P}_0}(x_0, x) + C \\
&\subseteq \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, x) + \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_0(\mathcal{P}) \to \mathfrak{a}_0^{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}_{\mathcal{P}_0}(x_0, x)) + C \\
&\subseteq \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, x) + \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_0(\mathcal{P}) \to \mathfrak{a}_0^{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}_{\mathcal{P}_0}(x_0, \pi^*_{\mathcal{P}}(x))) + C \\
&\subseteq \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, x) + C',
\end{aligned}$$

nach (1.8) und der Beschränktheit von $V$, da $\pi^*_{\mathcal{P}}(x) \in V$. Da aber

$$\langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, x) \rangle = \begin{cases} 0 & \alpha \in \Delta_0^{\mathcal{P}} \\ \geq \lambda & \alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}, \end{cases}$$

folgt daraus die erste Behauptung. Die zweite wird ganz analog bewiesen.

Angenommen, es gibt ein $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ mit

$$\gamma(U^*_{\mathcal{Q}}(W, \lambda, x_0) \times \Omega) \cap (U^*_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0) \times \Omega) \neq \emptyset.$$

Da $X$ in $X^*$ dicht liegt, gilt

$$\gamma(X \cap U^*_{\mathcal{Q}}(W, \lambda, x_0) \times \Omega) \cap (U^*_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0) \times \Omega) \neq \emptyset.$$

Aus den beiden obigen Behauptungen folgt

$$\gamma \mathfrak{S}(\mathcal{Q}, D, \lambda - \delta) \cap \mathfrak{S}(\mathcal{P}, D, \lambda - \delta) \neq \emptyset.$$

Für großes $\lambda$ folgt aus 1.19(iii) $\gamma \in \mathcal{Q}(\mathbb{Q})$. Ebenso zeigt man $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Wir haben also $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{Q}(\mathbb{Q})$. Jetzt muss $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ gezeigt werden. Sei $\mathcal{R} = \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ und seien $\gamma_\infty$ und $\gamma_f$ die Bilder von $\gamma$ in $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$. Dann gilt $\gamma_f \Omega \cap \Omega \neq \emptyset$, also $\gamma_f \in \Omega\Omega^{-1}$. Es gibt ein $c$ mit $|| \log_{\mathcal{R}}(\gamma_f) || \leq c$ für eine Norm auf $\mathfrak{a}_0$. Außerdem gilt

$$\log_{\mathcal{R}}(\gamma_\infty) + \log_{\mathcal{R}}(\gamma_f) = \log_{\mathcal{R}}(\gamma) = 0,$$

denn für alle $\chi \in X^*(\mathcal{P}_0)$ gilt

$$\langle \chi, \log_{\mathcal{R}}(\gamma) \rangle = \log(\prod_{\nu} |\chi(\gamma)|_{\nu}) = \log(1) = 0.$$

Also ist $|| \log_{\mathcal{R}}(\gamma_\infty) ||$ beschränkt.
Angenommen $\mathcal{Q} \not\subseteq \mathcal{P}$. Dann gibt es ein $\alpha \in \Delta_0^{\mathcal{Q}} - \Delta_0^{\mathcal{P}}$. Sei $y$ ein Element aus $U_{\mathcal{Q}}(W, \lambda, x_0) \cap X$ und $x \in U_{\mathcal{P}}(V, \lambda, x_0)$, so dass $x = \gamma_\infty y$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \alpha, \log_{\mathcal{R}}(\gamma_\infty) \rangle &= \langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{R}}(x_0, x) - \mathrm{d}_{\mathcal{R}}(x_0, y) \rangle \\ &= \langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, x) \rangle + \langle \alpha, \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{P}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{P}}}(\mathrm{d}_{\mathcal{R}}(x_0, \pi_{\mathcal{P}}^*(x)) \rangle \\ &\qquad - \langle \alpha, \mathrm{p}_{\overline{\mathfrak{a}}_{\mathcal{R}}(\mathcal{Q}) \to \mathfrak{a}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{Q}}}(\mathrm{d}_{\mathcal{R}}(x_0, \pi_{\mathcal{Q}}^*(y)) \rangle = a + b + c, \end{aligned}$$

wobei $|b| < C'$, $|c| < C''$ und $a > \lambda$ wegen $x \in U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0)$. Daraus folgt für $\lambda >> 0$

$$|\langle \alpha, \log_{\mathcal{R}}(\gamma_\infty) \rangle| > \lambda - C' - C'',$$

was im Widerspruch zur Beschränktheit von $|| \log_{\mathcal{R}}(\gamma_\infty) ||$ steht.
Daraus folgt $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}$. Ebenso zeigt man $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$. Also $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$.

□

KOROLLAR 1.21. (i) *Für $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, offene beschränkte $V, W \subseteq \partial_{\mathcal{P}} X^*$ mit $V \cap W = \emptyset$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0) \cap U_{\mathcal{P}}^*(W, \lambda, x_0) = \emptyset.$$

(ii) *Für verschiedene $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathfrak{P}$ und offene beschränkte $V \subseteq \partial_{\mathcal{P}} X^*$, $W \subseteq \partial_{\mathcal{Q}} X^*$ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0) \cap U_{\mathcal{Q}}^*(W, \lambda, x_0) = \emptyset$.*

BEWEIS. (i) Es gilt für $V \cap W = \emptyset$, dass

$$U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0) \cap U_{\mathcal{P}}^*(W, \lambda, x_0) = U_{\mathcal{P}}^*(V \cap W, \lambda, x_0) = \emptyset.$$

(ii) Setze in 1.20 $\gamma = 1$ und $\Omega \neq \emptyset$. □

KOROLLAR 1.22. *$X^*$ ist ein Hausdorff-Raum.*

BEWEIS. Sei $x \in \partial_{\mathcal{P}_x} X^*$ und $y \in \partial_{\mathcal{P}_y} X^*$ mit $x \neq y$. Falls $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y$, wähle disjunkte beschränkte offene Umgebungen $V$ und $W$ von $x$ und $y$ in $\partial_{\mathcal{P}_x} X^*$. Nach 1.10 sind $U_{\mathcal{P}_x}^*(V, \lambda, x_0)$ und $U_{\mathcal{P}_x}^*(W, \lambda, x_0)$ Umgebungen von $x$ und $y$ in $X^*$, die nach 1.21 disjunkt sind.
Falls $\mathcal{P}_x \neq \mathcal{P}_y$ gilt, wähle beliebige beschränkte offene Umgebungen $V$ von $x$ in $\partial_{\mathcal{P}_x} X^*$ und $W$ von $y$ in $\partial_{\mathcal{P}_y} X^*$. Dann sind $U_{\mathcal{P}_x}^*(V, \lambda, x_0)$ und $U_{\mathcal{P}_y}^*(W, \lambda, x_0)$ nach 1.10 Umgebungen von $x$ bzw. $y$ in $X^*$, die für großes $\lambda \in \mathbb{R}$ nach 1.21 disjunkt sind. □

SATZ 1.23. *Sei $D$ klein genug, dann gilt $\mathcal{G}(\mathbb{A}) = \mathcal{G}(\mathbb{Q})\mathfrak{S}(D)$. Es gibt eine kompakte Teilmenge $\Omega \subseteq \mathcal{P}_0(\mathbb{A})$ mit*

$$\mathcal{G}(\mathbb{A}) = \mathcal{G}(\mathbb{Q})(\mathfrak{S}(D) \cap \Omega \mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \mathcal{K}).$$

BEWEIS. [**PR94**][Proposition 5.8]. □

Satz 1.24. *Sei* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$, $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ *eine offene und kompakte Untergruppe und* $x, y \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$. *Dann gibt es Umgebungen* $V_x$ *und* $V_y$ *von* $x$ *und* $y$ *in* $\partial_{\mathcal{P}} X^*$, *so dass aus*

$$\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$$

*und*

$$\gamma V_x \cap V_y \neq \emptyset$$

*folgt, dass* $\gamma x = y$ *gilt.*

Beweis. Sei $\mathcal{H} = \mathcal{L}_{\mathcal{P}}/\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$. Dann ist $\mathcal{H}(\mathbb{Q})$ in $\mathcal{H}(\mathbb{A})$ diskret. Da die Wirkung von $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ auf $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ über $\mathcal{H}(\mathbb{Q})$ faktorisiert, können wir $\mathcal{P}$ durch $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}_f$ durch eine offene und kompakte Untergruppe $\mathcal{K}'_f$ von $\mathcal{H}(\mathbb{A}_f)$ ersetzen, welches das Bild von $\mathcal{K}_f$ enthält. Sei $\Gamma = \mathcal{H}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}'_f$. $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ ist der Quotient von $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ nach einer kompakten Untergruppe. Seien $\tilde{V}_x$ und $\tilde{V}_y$ beschränkte Umgebungen von $x$ und $y$ in $\partial_{\mathcal{P}} X^*$. Dann ist

$$\mathcal{M} = \{g \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \mid g\tilde{V}_x \cap \tilde{V}_y \neq \emptyset\}$$

relativ kompakt in $\mathcal{H}(\mathbb{R})$. Also ist $\Gamma \cap \mathcal{M}$ endlich. Sei nun

$$\{\gamma \in \Gamma \cap \mathcal{M} \mid \gamma x \neq y\} = \{\gamma_1, \dots, \gamma_N\}.$$

Für $1 \leq i \leq N$ seien $V_{\gamma_i x}$ und $V_{\gamma_i y}$ disjunkte offene Umgebungen von $\gamma_i x$ und $\gamma_i y$. Dann leisten

$$V_x = \tilde{V}_x \cap (\bigcap_{i=1}^{N} \gamma_i^{-1} V_{\gamma_i x}) \quad \text{und} \quad V_y = \tilde{V}_y \cap (\bigcap_{i=1}^{N} \gamma_i^{-1} V_{\gamma_i y})$$

das Gewünschte. □

Beweis von Theorem 1.13. (i) Sei $(x, g)\bar{\mathrm{R}}^*(y, h)$. Weil in $X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ jeder Punkt eine abzählbare Umgebungsbasis hat, gibt es $y_n \in X^*$ und $h_n \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ mit $y_n \to y$, $h_n \to h$ und $(x, g)\,\mathrm{R}^*(y_n, h_n)$, also gibt es $\gamma_n \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ mit $(y_n, h_n) = (\gamma_n x, \gamma_n g)$. Nach 1.20 gilt für $n \geq n_0$

$$\gamma_n \mathcal{P}_x \gamma_n^{-1} = \mathcal{P}_y.$$

Indem wir $x$ durch $\gamma_{n_0} x$, $g$ durch $\gamma_{n_0} g$ und $\gamma_n$ durch $\gamma_n \gamma_{n_0}^{-1}$ für $n > n_0$ ersetzen, können wir $\mathcal{P}_x = \mathcal{P}_y = \mathcal{P}$ und $\gamma_n \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ für $n > n_0$ annehmen. Sei $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ eine offene und kompakte Untergruppe. Es gibt ein $n_1 > n_0$, so dass für alle $n \geq n_1$ die Folgenglieder $\gamma_n g$ in $\mathcal{K}_f h$ enthalten sind. Indem wir $x$ durch $\gamma_{n_1} x$, $g$ durch $\gamma_{n_1} g$ und $\gamma_n$ durch $\gamma_n \gamma_{n_1}^{-1}$ ersetzen, können wir $\gamma_n \in \mathcal{K}_f$ für $n \geq n_1$ voraussetzen. Aus 1.24 folgt $\gamma_n x = y$ für $n \geq n_2 \geq n_1$. Sei $\gamma = \gamma_{n_2}$, $m = \lim_{n \to \infty} \gamma^{-1} \gamma_n \in Z_x^*$. Dann gilt $y = \gamma x$, und $h = \lim_{n \to \infty} \gamma_n g = \gamma \lim_{n \to \infty} \gamma^{-1} \gamma_n g = \gamma m g$.
(ii) Nach dem Urysohnschen Metrisierbarkeitssatz ist $S^*$ metrisierbar. Also genügt es, Folgendes zu zeigen. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{G}(\mathbb{Q}) \backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$. Dann gibt es eine Teilfolge, die in $(\mathcal{G}(\mathbb{Q}) \backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f))^*$ einen Limes hat. Jedes $x_n$ lässt sich als das Bild von $((g_n)_\infty x_0, (g_n)_f)$ in $\mathcal{G}(\mathbb{Q}) \backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ mit einem festen $x_0 \in X$ darstellen. Nach 1.23 können

wir $g_n \in \mathfrak{S}(D) \cap (\Omega \mathcal{A}_0(\mathbb{R})\mathcal{K})$ mit einem kompakten $\Omega \subseteq \mathcal{P}_0(\mathbb{A})$ voraussetzen (evtl. durch Anwendung von $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$). Durch Auswahl einer Teilfolge können wir $(g_n)_f \to h_f \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ voraussetzen. Man prüft leicht die Existenz einer parabolischen Untergruppe $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$ und einer Teilfolge $(g'_i)$, so dass $\langle \alpha, \mathrm{H}(g'_i) \rangle$ für $\alpha \in \Delta_0^{\mathcal{P}}$ beschränkt ist und für $\alpha \in \Delta_0 - \Delta_0^{\mathcal{P}}$ gegen $\infty$ konvergiert. Sei o.B.d.A. $g_i = g'_i$. Sei nun $x_0$ so gewählt, dass $\mathcal{K}_\infty = \{g \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \mid gx_0 = x_0\}$ gilt und $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}_0(\mathbb{R}) \cap \theta_{\mathcal{K}_\infty}(\mathcal{P}_0(\mathbb{R}))$, wobei $\theta_{\mathcal{K}_\infty}$ die Cartan-Involution ist. Dann gilt ohne Einschränkung $(g_i)_\infty \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ für alle $i$. Sei $\tilde{g}_i = g_i \exp_{\mathcal{A}_0(\mathbb{R})}(-\log_{\mathcal{P}}((g_i)_\infty))$. Damit liegen alle $\tilde{g}_i$ in einer kompakten Teilmenge von $\mathcal{P}_0(\mathbb{R})$. Also kann man $\tilde{g}_i \to h_\infty \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R})$ annehmen. Sei $y = \pi^*_{\mathcal{P}}(h_\infty x_0)$, und sei $x$ das Bild von $(y, h_f)$ in $(\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f))^*$. Dann konvergiert $x_n$ nach $x$. $\square$

KAPITEL 2

# Äquivariante Garben

In diesem Kapitel sollen die Kategorie $\mathcal{G}$-äquivarianter Garben eingeführt und ihre grundlegenden Eigenschaften untersucht werden. $\mathcal{G}$ ist (wenn nicht anders vorausgesetzt) eine Untergruppe von $\mathcal{H}(\mathbb{A}_f)$, wobei $\mathcal{H}$ eine algebraische Gruppe und $\mathbb{A}_f$ der Ring der endlichen Adele sind. Ich bezeichne mit $\mathcal{G}^d$ die zugehörige Gruppe mit der diskreten Topologie. Sei $R$ ein kommutativer Ring mit Eins.

## 1. Die Kategorie der $\mathcal{G}$-äquivarianten Garben

DEFINITION 2.1. *Sei $X$ ein lokal kompakter topologischer Raum.*

(i) $\mathrm{Sh}(X)$ *bezeichne die Kategorie der Garben von $R$-Moduln auf $X$.*
(ii) *Sei $S$ eine $R$-Algebra.* $\mathrm{Sh}^S(X)$ *bezeichne die Kategorie der Garben von $S$-Moduln auf $X$.*

LEMMA 2.2. *Sei $X$ ein lokal kompakter Raum, auf dem $\mathcal{G}$ stetig von rechts operiert. Dann sind folgende Aussagen über ein $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(X)$ äquivalent:*

(i) *$\mathcal{G}$ operiert stetig von links auf dem étalen Raum $F$ zu $\mathfrak{F}$, so dass für alle $x \in X$, $g \in \mathcal{G}$ und $s \in F_x$ gilt:*

$$\pi(gs) = xg^{-1}, \tag{2.1}$$

*wobei $\pi : F \to X$ die Projektion ist.*

(ii) *Für ein $g \in \mathcal{G}$ bezeichne $g$ auch den Wirkungshomöomorphismus von $g$ auf $X$. Dann gibt es zu jedem $g \in \mathcal{G}$ einen Garbenisomorphismus*

$$R_g : \mathfrak{F} \to g_*\mathfrak{F}$$

*mit $R_{gh} = R_g R_h$. Zusätzlich gilt:*
*Für alle offenen $V \subseteq U \subseteq X$ (mit $\overline{V} \subseteq U$ und $\overline{V}$ kompakt) und für alle Schnitte $s \in \mathfrak{F}(U)$ gibt es eine offene kompakte Untergruppe $\mathcal{K}$ von $\mathcal{G}$ mit $\overline{V}k \subseteq U$ und $R_k(s_{|V}) = s_{|Vk^{-1}}$ für alle $k \in \mathcal{K}$.*

(iii) *Seien die Abbildungen $q_{ij}$, $m_{ij}$ von $X \times \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ nach $X \times \mathcal{G}$ folgendermaßen definiert:*

$$\begin{aligned} m_{12}((x,g,h)) &= (xg,h), \\ m_{23}((x,g,h)) &= (x,gh) \text{ und} \\ q_{12}((x,g,h)) &= (x,g). \end{aligned}$$

*Es gibt dann einen Isomorphismus $\varphi_{\mathfrak{F}} : p_1^*\mathfrak{F} \to m^*\mathfrak{F}$, wobei $p_1, m : X \times \mathcal{G} \to X$ die Projektion und die Wirkung sind, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} q_{12}^*(p_1^*\mathfrak{F}) \arrow[r, "q_{12}^*(\varphi_{\mathfrak{F}})"] \arrow[dr, "m_{23}^*(\varphi_{\mathfrak{F}})"'] & q_{12}^*(m^*\mathfrak{F}) \arrow[d, "m_{12}^*(\varphi_{\mathfrak{F}})"] \\ & m_{23}^*(m^*\mathfrak{F}) \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Beweis. (ii) und (iii) folgen direkt aus (i).
Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass (ii) und (iii) jeweils (i) implizieren.
a) Angenommen $\mathfrak{F}$ erfüllt (ii). Die Abbildungen $R_g$ induzieren eine Wirkung der Gruppe $\mathcal{G}$ auf dem étalen Raum $F$ zur Garbe $\mathfrak{F}$. Sie wird gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mu : \mathcal{G} \times F &\to F, \\ (g,s) &\mapsto (R_g)_{\pi(s)}(s). \end{aligned}$$

Die Eigenschaft (2.1) ist offensichtlich erfüllt. Dass es sich tatsächlich um eine Wirkung handelt, folgt aus der Multiplikativität von $R_-$. Jetzt müssen wir noch zeigen, dass die so erhaltene Wirkung stetig ist. Seien $(g, s_0) \in \mathcal{G} \times F$ und $t_0 := \mu(g, s_0) = (R_g)_{\pi(s_0)}(s_0) \in F_{\pi(s_0)g^{-1}}$. Es reicht, nur die offenen Basismengen der Topologie von $F$ zu betrachten. Eine solche Basisumgebung $U_t$ von $t_0$ ist von der Form $\{t_x\}_{x \in U}$ für eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von $\pi(t_0)$ und einen stetigen Schnitt $t \in \mathfrak{F}(U)$ mit $t_{\pi(t_0)} = t_0$. Sei jetzt $V \subseteq X$ offen, so dass $\overline{V} \subset U$ kompakt ist. Nach (ii) existiert eine offene kompakte Untergruppe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$, so dass für alle $k \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\overline{V}k \subseteq U \text{ und } R_k(t_{|V}) = t_{|Vk^{-1}}.$$

Seien nun $W := Vg$, $\mathfrak{L} := \mathcal{K}g$ und $s := R_g^{-1}(t_{|V}) \in \mathfrak{F}(W)$. Dann ist $\mathfrak{L} \times W_s$ eine offene Umgebung von $(g, s_0)$, und es gilt für alle $l = kg \in \mathfrak{L}$:

$$R_l(s) = R_{kg}(s) = R_k R_g R_g^{-1}(t_{|V}) = R_k(t_{|V}) = t_{|Vk^{-1}}.$$

Anders ausgedrückt: $\mu(\mathfrak{L} \times W_s) \subseteq U_t$. Also ist $\mu$ stetig. Damit sind (i) und (ii) äquivalent.
b) Sei (iii) erfüllt. $\varphi_{\mathfrak{F}} : p_1^*\mathfrak{F} \to m^*\mathfrak{F}$ induziert eine stetige Abbildung zwischen den zugehörigen étalen Räumen $\varphi_F : p_1^*F \to m^*F$. Es gilt

$$\varphi_F(((x, g^{-1}), s)) = ((x, g^{-1}), t)$$

mit $t \in \mathfrak{F}_{xg^{-1}}$. Dies definiert für alle $x \in X$ und $g \in \mathcal{G}$ einen Morphismus zwischen den Halmen

$$\mu_{x,g} : \mathfrak{F}_x \to \mathfrak{F}_{xg^{-1}}.$$

Damit läßt sich folgende Abbildung mit der Eigenschaft (2.1) definieren

$$\begin{aligned}\mu : \mathcal{G} \times F &\to F,\\ (g, s) &\mapsto \mu_{\pi(s),g}(s).\end{aligned}$$

Mit (2.2) sieht man leicht, dass diese Abbildung eine Wirkung darstellt. Es bleibt zu zeigen, dass $\mu$ stetig ist. Sei $(g, s_0) \in \mathcal{G} \times F$ und $x := \pi(s_0)$. Dann ist $((x, g^{-1}), s_0) \in p_1^* F$, und mit $t_0 := \mu_{x,g}(s_0) = \mu(g, s_0)$ gilt $((x, g^{-1}), t_0) = \varphi_F(((x, g^{-1}), s_0)) \in m^* F$. Sei $(Ug^{-1})_t$ eine Umgebung von $t_0$ in $F$, wobei $U$ eine offene Umgebung von $x$ in $X$ und $t$ ein Schnitt in $\mathfrak{F}(Ug^{-1})$ mit $t_{xg^{-1}} = t_0$ ist. Ferner wählt man eine kompakte Umgebung $\overline{V}$ von $x$ in $U$, zu der eine offene kompakte Untergruppe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$ exisitiert, für die $\overline{V}\mathcal{K} \subseteq U$ gilt. Mit Hilfe dieser Daten läßt sich eine offene Umgebung von $((x, g^{-1}), t_0)$ in $m^* F$ definieren, und zwar als $(V \times \mathcal{K}g^{-1})_\tau$ mit $\tau = m^*(t_{|V}) \in m^*\mathfrak{F}(V \times \mathcal{K}g^{-1})$. Da $\varphi_F$ stetig ist, gibt es eine offene Umgebung von $((x, g^{-1}), s_0)$ in $p_1^* F$ von der Form $(\tilde{W} \times \tilde{\mathcal{L}}g^{-1})_\sigma$ mit einer offenen Umgebung $\tilde{W}$ von $x$, einer offenen kompakten Untergruppe $\tilde{\mathcal{L}}$ und einem Schnitt $\sigma \in p_1^*\mathfrak{F}(\tilde{W} \times \tilde{\mathcal{L}}g^{-1})$, so dass gilt:

$$\varphi_{\mathfrak{F}}((\tilde{W} \times \tilde{\mathcal{L}}g^{-1})_\sigma) \subseteq (V \times \mathcal{K}g^{-1})_\tau.$$

Lokal, auf einer Umgebung $W \times \mathcal{L}g^{-1}$ von $(x, g^{-1})$, haben wir $\sigma_{|W \times \mathcal{L}g^{-1}} = p_1^*(s)$ mit einem Schnitt $s \in \mathfrak{F}(W)$, für den $s_x = s_0$ ist. Aus $\varphi_{\mathfrak{F}}((W \times \mathcal{L}g^{-1})_{\sigma_{|W \times \mathcal{L}g^{-1}}}) \subseteq (V \times \mathcal{K}g^{-1})_\tau$ folgt $\mu(\mathcal{L}g^{-1} \times W_s) \subseteq (Ug^{-1})_t$ und damit die Stetigkeit von $\mu$. $\square$

Bemerkung 2.3. Die Eigenschaft von $R_g$ aus (ii) ist äquivalent zu der lokalen Aussage:
*Für alle $x \in U$ und für alle Schnitte $s \in \mathfrak{F}(U)$ gibt es eine Umgebung $V_x$ von $x$ in $U$, die unter einer offenen kompakten Untergruppe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$ invariant ist, und $\overline{V_x} \subseteq U$ ist kompakt, so dass die Einschränkung $s_{|V_x}$ unter $\mathcal{K}$ invariant ist.*

Lemma 2.4. *Seien $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ Garben, die eine der äquivalenten Bedingungen aus 2.2 erfüllen. Dann sind folgende Aussagen für einen Garbenhomomorphismus $f : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ äquivalent:*

(i) *Der auf den étalen Räumen induzierte Morphismus $f : F \to G$ ist $\mathcal{G}$–äquivariant.*

(ii) *Für alle $g \in \mathcal{G}$ kommutiert das folgende Diagramm:*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{F} & \xrightarrow{R_g} & g_*\mathfrak{F} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_* f} \\ \mathfrak{G} & \xrightarrow{R_g} & g_*\mathfrak{G}. \end{array}$$

(iii) *Das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{array}{ccc} p_1^*\mathfrak{F} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{F}}} & m^*\mathfrak{F} \\ {\scriptstyle p_1^* f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle m^* f} \\ p_1^*\mathfrak{G} & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{G}}} & m^*\mathfrak{G}. \end{array}$$

Beweis. Klar. □

Definition 2.5. *Die Kategorie derjenigen Garben, die eine der äquivalenten Bedingungen aus 2.2 erfüllen, mit Morphismen, die einer der Bedingungen aus 2.4 genügen, werde mit* $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ *bezeichnet.*

## 2. Azyklische Auflösungen in $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$

Das Hauptziel dieses Abschnitts ist, in der Kategorie der $\mathcal{G}$-äquivarianten Garben azyklische Auflösungen zu konstruieren.

Definition 2.6. (i) *Für einen $R[\mathcal{G}^d]$-Modul $M$ sei durch*

$$M^\infty = \bigcup_{\mathcal{K}} M^{\mathcal{K}}$$

*ein Untermodul von $M$ definiert, wobei $\mathcal{K}$ die Menge der offenen und kompakten Untergruppen von $\mathcal{G}$ durchläuft.*

(ii) *Sei $X$ ein lokal kompakter $\mathcal{G}$-Raum und sei $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}^d}(X)$. Sei $U \subseteq X$ offen. Die Garbe $\mathfrak{F}^\infty$ bestehe aus allen Schnitten $s \in \mathfrak{F}(U)$, so dass für jedes $y \in U$ eine offene Umgebung $U_y$ in $U$ existiert, die von einer in $\mathcal{G}$ offenen und kompakten Untergruppe stabilisiert wird, so dass $s_{|U_y} \in \mathfrak{F}(U_y)^\infty$ gilt.*

Bemerkung 2.7. In der obigen Definition ist $M^\infty$ ein (stetiger) $R[\mathcal{G}]$-Modul und $\mathfrak{F}^\infty \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$.

Es reicht oft nicht, injektive Objekte einer abelschen Kategorie zu betrachten. Eine wichtige Rolle spielen auch Objekte, die *azyklisch* in Bezug auf einen Funktor sind, d.h. Objekte, auf denen die höheren abgeleiteten Funktoren dieses Funktors verschwinden. In der Kategorie der Garben gibt es die bekannte Klasse der welken Garben, für die die höhere Garbenkohomologie verschwindet. Auf einem lokal kompakten Raum sind auch andere Garben von Bedeutung wie etwa die unten definierten c-weichen Garben. Diese sind in Bezug auf den Funktor der globalen Schnitte mit kompaktem Träger azyklisch, also ist für sie die höhere Kohomologie mit kompaktem Träger trivial, die offensichtlich auf kompakten Räumen mit der gewöhnlichen Garbenkohomologie zusammenfällt. Ich werde exemplarisch eine Proposition beweisen, die dies veranschaulicht. Eine ausführliche Einführung zu diesem Thema liefert [**Ive86**].

DEFINITION 2.8. *Eine Garbe $\mathfrak{F}$ auf einem lokal kompakten Raum $X$ heißt* c-weich*, wenn für alle kompakten Mengen $M \subseteq X$ die Einschränkungsabbildung*

$$\mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}(M)$$

*surjektiv ist.*

PROPOSITION 2.9. *c-weiche Garben auf einem lokal kompakten Raum $X$ sind $\Gamma_c(X,-)$–azyklisch, wobei $\Gamma_c(X,-)$ den Funktor der globalen Schnitte mit kompaktem Träger bezeichnen soll.*

BEWEIS. Sei

$$0 \to \mathfrak{E} \xrightarrow{\epsilon} \mathfrak{F} \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{G} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von Garben auf $X$ und sei $\mathfrak{E}$ c-weich. Ich zeige zuerst, dass

$$\Gamma_c(X,\mathfrak{F}) \to \Gamma_c(X,\mathfrak{G})$$

surjektiv ist.
1. Fall. Sei $X$ kompakt und sei $w \in \mathfrak{G}(X)$. Dann gibt es für alle $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K_x \subseteq X$ von $x$ und einen Schnitt $v^x \in \mathfrak{F}(K_x)$, das unter $\varphi_{K_x}$ auf $w_{|K_x}$ abgebildet wird. $(\mathring{K}_x)_{x\in X}$ ist eine offene Überdeckung von $X$. Da $X$ als kompakt vorausgesetzt wurde, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $(\mathring{K}_i)_{i=1}^n$. Wir können also die Aussage folgendermaßen reduzieren. Seien $K, K' \subseteq X$ kompakt und $v \in \mathfrak{F}(K)$ sowie $v' \in \mathfrak{F}(K')$, die beide von $\varphi$ auf die entsprechenden Einschränkungen von $w$ abgebildet werden. Dann ist $v_{|K\cap K'} - v'_{|K\cap K'}$ das Bild eines $u \in \mathfrak{E}(K \cap K')$, das zu einem Schnitt $u \in \mathfrak{E}(K')$ ausgedehnt werden kann ($\mathfrak{E}$ ist c-weich). Betrachte die Schnitte $v \in \mathfrak{F}(K)$ und $v' + \epsilon_{K'}(u) \in \mathfrak{F}(K')$. Sie können zu einem Schnitt aus $\mathfrak{F}(K \cup K')$ verklebt werden, der mit $\varphi$ auf $w_{|K\cup K'}$ abgebildet wird. Auf diese Weise kann induktiv ein globaler Schnitt in $\mathfrak{F}$ konstruiert werden, der sich auf $w \in \mathfrak{G}(X)$ abbilden lässt.
2. Fall. Sei $X$ nicht kompakt und $w \in \Gamma_c(X,\mathfrak{G})$. Dann gibt es ein kompaktes $K \subseteq X$, in dessen Innerem der Träger von $w$ enthalten ist. Nach dem ersten Teil gibt es ein $v \in \mathfrak{F}(K)$, das sich auf $w_{|K}$ abbilden lässt. Es gibt ein $u \in \mathfrak{E}(\partial K)$ mit

$$v_{|\partial K} = \epsilon_{|\partial K}(u).$$

$u$ kann auf $K$ ausgedehnt werden. Sei

$$v' = v - \epsilon_K(u) \in \mathfrak{F}(K).$$

Da $v'_{|\partial K} = 0$, kann $v'$ durch 0 auf ganz $X$ erweitert werden und leistet das Gewünschte.
Wenn $\mathfrak{F}$ ebenfalls als c-weich vorausgesetzt wird, folgt, dass dann $\mathfrak{G}$ auch c-weich sein muss.
Nach diesen Vorbereitungen kann nun die Proposition bewiesen werden. Sei $\mathfrak{E}$ c-weich und

$$0 \to \mathfrak{E} \to \mathfrak{I} \to \mathfrak{G} \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz mit einer injektiven Garbe $\mathfrak{I}$. Da $\mathfrak{I}$ welk und somit c-weich ist, folgt die c-Weichheit von $\mathfrak{G}$. Dann ist die folgende Sequenz exakt.

$$0 \to \Gamma_c(X,\mathfrak{E}) \to \Gamma_c(X,\mathfrak{I}) \to \Gamma_c(X,\mathfrak{G}) \to \mathrm{H}^1_c(X,\mathfrak{E}) \to \mathrm{H}^1_c(X,\mathfrak{I}) = 0.$$

Da $\Gamma_c(X,\mathfrak{I}) \to \Gamma_c(X,\mathfrak{G})$ surjektiv ist, gilt

$$\mathrm{H}^1_c(X,\mathfrak{E}) = 0.$$

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to \mathrm{H}^n_c(X,\mathfrak{G}) \to \mathrm{H}^{n+1}_c(X,\mathfrak{E}) \to \mathrm{H}^{n+1}_c(X,\mathfrak{I}) = 0$$

folgt induktiv

$$\mathrm{H}^n_c(X,\mathfrak{E}) = 0$$

für alle $n \geq 1$. □

PROPOSITION 2.10. *Sei $\mathfrak{F}$ eine Garbe auf dem lokal kompakten Raum $X$. Wenn jeder Punkt eine offene Umgebung $U$ besitzt, so dass die Einschränkung von $\mathfrak{F}$ auf $U$ c-weich ist, dann ist $\mathfrak{F}$ c-weich.*

BEWEIS. [**Ive86**, 2.8] □

SATZ 2.11. *Sei $X$ lokal kompakt und $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$. Dann existiert ein $\mathfrak{F}^0 \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ und ein $\mathcal{G}$-Monomorphismus $u : \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}^0$, so dass $\mathfrak{F}^0$ c-weich ist. Vgl. auch* [**Roh96**]*[2.4.].*

BEWEIS. Sei $\tilde{\mathfrak{F}}$ die standardwelke Garbe zu $\mathfrak{F}$, d.h. für eine offenes $U \subseteq X$ gilt

$$\tilde{\mathfrak{F}}(U) = \prod_{x\in U} \mathfrak{F}_x.$$

Sei $u : \mathfrak{F} \to \tilde{\mathfrak{F}}$ die Standardeinbettung. $\tilde{\mathfrak{F}}$ und $u$ sind $\mathcal{G}^d$-äquivariant. Da $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\infty$ gilt, faktorisiert $u$ über $\mathfrak{F}^0 = \tilde{\mathfrak{F}}^\infty$.
Sei $M \subseteq X$ kompakt und $s \in \mathfrak{F}^0(M)$. Es gibt nun eine offene Umgebung $V$ von $M$, und ein $s' \in \mathfrak{F}^0(V)$ mit $s'_{|M} = s$. Da $M$ kompakt ist, gibt es eine offene Umgebung $V'$ von $M$ in $V$ und eine offene kompakte Untergruppe $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$ unter der $V'$ invariant ist, so dass gilt

$$s'_{|V'} \in \tilde{\mathfrak{F}}(V')^{\mathcal{K}}.$$

$s'$ kann außerhalb von $V'$ durch 0 zu $t \in \tilde{\mathfrak{F}}(X)$ fortgesetzt werden. Da $X - V'$ auch $\mathcal{K}$-stabil ist, gilt

$$t \in \tilde{\mathfrak{F}}(X)^{\mathcal{K}} \subseteq \tilde{\mathfrak{F}}(X)^\infty = \mathfrak{F}^0(X).$$

Daraus folgt die c-Weichheit von $\mathfrak{F}^0$. □

KOROLLAR 2.12. *Zu jeder Garbe* $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ *gibt es eine* $\Gamma_c(X,-)$-*azyklische Auflösung in* $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$. *Insbesondere ist die Auflösung* $\Gamma(X,-)$-*azyklisch, falls* $X$ *kompakt ist.*

SATZ 2.13. *Sei* $X$ *ein lokal kompakter* $\mathcal{G}$-*Raum. Sei* $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{G}$ *eine offene Untergruppe. Der Vergißfunktor* $V_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}} : \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X) \to \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(X)$ *besitzt in diesem Fall einen linksadjungierten Funktor* $\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}}$.

BEWEIS. Sei $\{g_i\}_{i\in I}$ ein Repräsentantensystem für $\mathcal{G}/\mathcal{K}$ und sei $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(X)$. Ich definiere den Funktor $\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}}$ durch

$$\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}} \mathfrak{F} := \coprod_{i\in I} g_{i*}\mathfrak{F}.$$

Später soll gezeigt werden, dass man für verschiedene Repräsentantensyteme kanonische Isomorphismen zwischen den so definierten Garben erhält. Zuerst gebe ich der Garbe $\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}} \mathfrak{F}$ eine $\mathcal{G}$–äquivariante Struktur. Sei $g \in \mathcal{G}$. Zu jedem $i \in I$ gibt es genau ein $j_g \in I$ mit $gg_i = g_{j_g}k_g$ für ein $k_g \in \mathcal{K}$. Dann gibt es zu jedem $i \in I$ Morphismen

$$g_{j_g*}\mathfrak{F} \xrightarrow{g_{j_g*}(R_{k_g})} g_{j_g*}k_{g*}\mathfrak{F} = (g_{j_g}k_g)_*\mathfrak{F} = g_*g_{i*}\mathfrak{F},$$

die ihrerseits einen Morphismus

$$R_g : \coprod_{i\in I} g_{i*}\mathfrak{F} \to g_* \coprod_{i\in I} g_{i*}\mathfrak{F}$$

induzieren. Diese Morphismen machen $\mathrm{ind}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{G}} \mathfrak{F}$ zu einer $\mathcal{G}$–äquivarianten Garbe. Die Stetigkeit folgt aus der Offenheit von $\mathcal{K}$. Die Adjunktionsmorphismen sind wie folgt gegeben:

$$\Lambda_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} = 1_*\mathfrak{F} \to \coprod_{i\in I} g_{i*}\mathfrak{F} \text{ und } P_{\mathfrak{G}} := \sum_{i\in I} R_{g_i}^{-1} : \coprod_{i\in I} g_{i*}\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Morphismen die erforderlichen Eigenschaften besitzen.
Sei $\{g_i'\}_{i\in I}$ ein anderes Repräsentantensystem für $\mathcal{G}/\mathcal{K}$. Es gibt dann zu jedem $i \in I$ genau ein $k_i \in \mathcal{H}$ mit $g_i' = g_ik_i$. Man erhält Isomorphismen:

$$g_{i*}\mathfrak{F} \xrightarrow{g_{i*}(R_{k_i})} g_{i*}k_{i*}\mathfrak{F} = g_i'\mathfrak{F},$$

die den gewünschten kanonischen Isomorphismus $\coprod_{i\in I} g_{i*}\mathfrak{F} \to \coprod_{i\in I} g_{i*}'\mathfrak{F}$ induzieren.
Damit ist der Satz 2.13 bewiesen. □

## 3. Induzierte Funktoren

In diesem Abschnitt werden die von $\mathcal{G}$-Morphismen zwischen $\mathcal{G}$-Räumen auf den $\mathcal{G}$-äquivarianten Garben induzierten Funktoren untersucht.

LEMMA 2.14. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige $\mathcal{G}$–Abbildung zwischen lokal kompakten $\mathcal{G}$–Räumen, und sei $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(Y)$. Dann ist $f^*\mathfrak{F}$ eine $\mathcal{G}$–äquivariante Garbe auf $X$.*

BEWEIS. Ich benutze die Bedingung (iii) aus 2.2. Nun betrachte ich die beiden kommutativen Diagramme:

$$\begin{tikzcd} X \times \mathcal{G} \arrow[r, "f \times id_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "p_1"'] & Y \times \mathcal{G}, \arrow[d, "p_1"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \times \mathcal{G} \arrow[r, "f \times id_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "m"'] & Y \times \mathcal{G} \arrow[d, "m"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

Es gilt dann für eine Garbe $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(Y)$:

$$\begin{aligned} p_1^* f^* \mathfrak{F} = (f \circ p_1)^* \mathfrak{F} = (p_1 \circ (f \times id_{\mathcal{G}}))^* \mathfrak{F} = \\ (f \times id_{\mathcal{G}})^* p_1^* \mathfrak{F} \xrightarrow[\cong]{(f \times id_{\mathcal{G}})^*(\varphi_{\mathfrak{F}})} (f \times id_{\mathcal{G}})^* m^* \mathfrak{F} \\ = (m \circ (f \times id_{\mathcal{G}}))^* \mathfrak{F} = (f \circ m)^* \mathfrak{F} = m^* f^* \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Der Isomorphismus $\varphi_{f^*\mathfrak{F}} := (f \times id_{\mathcal{G}})^*(\varphi_{\mathfrak{F}})$ hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

LEMMA 2.15. *Sei $U$ eine offene Teilmenge eines Raumes $X$ und seien $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} X - U$ die Einbettungen. Dann haben wir exakte Einschränkungsfunktoren*

$$\mathrm{Sh}(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Sh}(U) \text{ sowie}$$
$$\mathrm{Sh}(X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Sh}(X - U).$$

*Desweiteren besitzt $j^*$ einen exakten linksadjungierten Funktor $j_!$ und $i^*$ einen exakten rechtsadjungierten Funktor $i_*$.*

BEWEIS. Siehe [**Ive86**, 6.12]. $\square$

LEMMA 2.16. *Sei $X$ ein lokal kompakter $\mathcal{G}$-Raum. Sei $U \subseteq X$ eine $\mathcal{G}$–invariante offene Teilmenge, $U \xrightarrow{j} X$ die Einbettung und $\mathfrak{F}$ eine $\mathcal{G}$–äquivariante Garbe auf $U$. Dann ist $j_!\mathfrak{F}$ eine $\mathcal{G}$–äquivariante Garbe auf $X$.*

BEWEIS. Betrachte die beiden Diagramme:

$$\begin{tikzcd} U \times \mathcal{G} \arrow[r, "j \times id_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "p_1"'] & X \times \mathcal{G}, \arrow[d, "p_1"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} U \times \mathcal{G} \arrow[r, "j \times id_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "m"'] & X \times \mathcal{G} \arrow[d, "m"] \\ U \arrow[r, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

Die beiden natürlichen Homomorphismen

$$(j \times id_{\mathcal{G}})_! p_1^* \mathfrak{F} \to p_1^* j_! \mathfrak{F} \text{ und } (j \times id_{\mathcal{G}})_! m^* \mathfrak{F} \to m^* j_! \mathfrak{F},$$

die von

$$p_1^*(\mathfrak{F}) \to p_1^*(j^* j_! \mathfrak{F}) = (j \times \mathrm{id}_{\mathcal{G}})^* p_1^* j_! \mathfrak{F} \text{ bzw.}$$
$$m^*(\mathfrak{F}) \to m^*(j^* j_! \mathfrak{F}) = (j \times \mathrm{id}_{\mathcal{G}})^* m^* j_! \mathfrak{F}$$

induziert werden, sind Isomorphismen, was man leicht auf den Halmen nachprüft. Daraus ergibt sich folgender Isomorphismus $\phi_{j_!\mathfrak{F}}$:

$$p_1^* j_! \mathfrak{F} \cong (j \times id_{\mathcal{G}})_! p_1^* \mathfrak{F} \xrightarrow{(j \times id_{\mathcal{G}})_!(\varphi_{\mathfrak{F}})} (j \times id_{\mathcal{G}})_! m^* \mathfrak{F} \cong m^* j_! \mathfrak{F}.$$

□

Lemma 2.17. *Sei $X$ ein lokal kompakter $\mathcal{G}$-Raum. Sei $Z \subseteq X$ eine $\mathcal{G}$–invariante abgeschlossene Teilmenge, $Z \xrightarrow{i} X$ die Einbettung und $\mathfrak{F}$ eine $\mathcal{G}$–äquivariante Garbe auf $Z$. Dann ist $i_* \mathfrak{F}$ eine $\mathcal{G}$–äquivariante Garbe auf $X$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 2.16. □

Korollar 2.18. *Sei $X$ ein lokal kompakter $\mathcal{G}$-Raum. Seien $U \subseteq X$ eine $\mathcal{G}$–invariante offene Teilmenge und $U \xrightarrow{j} X \xleftarrow{i} X - U$ die Einbettungen. Dann haben wir exakte Einschränkungsfunktoren*

$$\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(U) \text{ und}$$
$$\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X - U).$$

*Desweiteren besitzt $j^*$ einen exakten linksadjungierten Funktor $j_!$ und $i^*$ einen exakten rechtsadjungierten Funktor $i_*$.*

Beweis. Aus 2.14, 2.17 und 2.16 folgt, dass die betrachteten Funktoren $\mathcal{G}$–äquivariante Garben auf ebensolche abbilden. Aus der Natürlichkeit der Konstruktionen in den Beweisen von 2.17, 2.14 und 2.16 folgt auch, dass die $\mathcal{G}$–Äquivarianz von Morphismen erhalten bleibt und dass die Adjunktionsbeziehungen weiterhin gelten. □

Lemma 2.19. *$\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ ist unter Koprodukten abgeschlossen.*

Beweis. Sei $\{\mathfrak{F}_k\}$ ein System von $\mathcal{G}$–äquivarianten Garben. Sei $f : Y \to X$ stetig. Zuerst zeige ich, dass $\coprod$ mit $f^*$ vertauscht. Wir haben die Einbettungen $\mathfrak{F}_k \xrightarrow{\iota_k} \coprod_k \mathfrak{F}_k$, die die Abbildungen $f^* \mathfrak{F}_k \xrightarrow{f^* \iota} f^* \coprod_k \mathfrak{F}_k$ induzieren. Wir erhalten also einen Garbenhomomorphismus $\coprod_k f^* \mathfrak{F}_k \to f^* \coprod_k \mathfrak{F}_k$, der Isomorphismen auf den Halmen induziert. Daraus ergibt sich folgender Isomorphismus $\varphi_{\coprod_k \mathfrak{F}_k}$:

$$p_1^* \coprod_k \mathfrak{F}_k \cong \coprod_k p_1^* \mathfrak{F}_k \xrightarrow{\coprod_k (\varphi_{\mathfrak{F}_k})} \coprod_k m^* \mathfrak{F}_k \cong m^* \coprod_k \mathfrak{F}_k,$$

der die Garbe $\coprod_k \mathfrak{F}_k$ zu einer $\mathcal{G}$–äquivarianten Garbe auf $X$ macht. □

DEFINITION 2.20. *Sei $\mathcal{G}$ eine topologische Gruppe, die auf einem Raum $X$ stetig operiert. Sei $\pi : X \to X/\mathcal{G}$ die Projektion. Der Invariantenfunktor* $\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}} : \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X) \to \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G})$ *wird folgendermaßen definiert:*

$$\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}}(\mathfrak{F})(V) := \mathfrak{F}(\pi^{-1}(V))^{\mathcal{G}}.$$

LEMMA 2.21. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige eigentliche Abbildung zwischen lokal kompakten Räumen. Dann gilt für eine Garbe $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(X)$ und ein $y \in Y$:*

$$(f_*\mathfrak{F})_y = \mathfrak{F}(f^{-1}(y)).$$

BEWEIS. Sei $\Upsilon$ die gerichtete Kategorie, die aus offenen Umgebungen von $f^{-1}(y)$ in $X$ besteht. $\Upsilon'$ sei die gerichtete Unterkategorie von $\Upsilon$, die aus den offenen Teilmengen von $X$ von der Form $f^{-1}(V)$ besteht, wobei $V$ eine offene Umgebung von $y$ in $Y$ ist. Es gilt

$$(f_*\mathfrak{F})_y = \operatorname*{colim}_{U' \in \Upsilon'} \mathfrak{F}(U'),$$
$$\mathfrak{F}(f^{-1}(y)) = \operatorname*{colim}_{U \in \Upsilon} \mathfrak{F}(U).$$

Ich zeige, dass $\Upsilon'$ in $\Upsilon$ kofinal ist. Sei dazu $U \in \Upsilon$ beliebig. Gesucht ist eine offene Umgebung $V$ von $y$ in $Y$ mit $f^{-1}(V) \subseteq U$. Sei $V_1$ eine offene Umgebung von $y$ in $Y$ mit $\overline{V}_1$ kompakt. Dann ist $Z_1 = f^{-1}(\overline{V}_1) - U$ kompakt und $V := V_1 - f(Z_1)$ ist die gesuchte offene Umgebung von $y$. $\square$

PROPOSITION 2.22. *Sei $\mathcal{G}$ kompakt und $X$ ein lokal kompakter $\mathcal{G}$-Raum. Sei $\pi : X \to X/\mathcal{G}$ die Projektion. Dann ist $\pi^* : \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G}) \to \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ linksadjungiert zu dem Funktor* $\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}} : \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X) \to \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G})$.

BEWEIS. Als erstes zeige ich, dass der Funktor $\pi^* : \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G}) \to \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ wohldefiniert ist. Sei $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G})$. Die $\mathcal{G}$–Äquivarianz von $\pi^*\mathfrak{F}$ ist gegeben durch den Isomorphismus

$$\varphi_{\pi^*\mathfrak{F}} : p_1^*\pi^*\mathfrak{F} = (\pi p_1)^*\mathfrak{F} \xrightarrow{=} (\pi m)^*\mathfrak{F} = m^*\pi^*\mathfrak{F}.$$

Für ein $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G})$ faktorisiert die natürliche Abbildung $\mathfrak{F} \to \pi_*\pi^*\mathfrak{F}$ über $\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}}\pi^*\mathfrak{F}$. Damit bekommen wir den Adjunktionsmorphismus $\Lambda_{\mathfrak{F}} : \mathfrak{F} \to \mathrm{Inv}^{\mathcal{G}}\pi^*\mathfrak{F}$. Für eine Garbe $\mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ induziert die Inklusion $\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}}\mathfrak{G} \hookrightarrow \pi_*\mathfrak{G}$ den anderen Adjunktionsmorphismus $P_{\mathfrak{G}} : \pi^*\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}}\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}$, der trivialerweise $\mathcal{G}$–äquivariant ist. Die beiden Morphismen sind nach Konstruktion natürlich. Es muss nun noch gezeigt werden, dass sie die Adjunktionseigenschaften erfüllen. Sei $x \in X$ und $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(X/\mathcal{G})$. Da $\mathcal{G}$ kompakt ist, ist nach 2.21 $(\mathrm{Inv}^{\mathcal{G}}\pi^*\mathfrak{F})_{\pi(x)}$ kanonisch isomorph zu $\pi^*\mathfrak{F}(x\mathcal{G})^{\mathcal{G}}$. Ich betrachte die erste Adjunktionseigenschaft, lokalisiert in

$x$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{\pi(x)} &\xrightarrow{\Lambda_{\mathfrak{F},\pi(x)}} (\operatorname{Inv}^{\mathcal{G}} \pi^* \mathfrak{F})_{\pi(x)} \xrightarrow{P_{\pi^*\mathfrak{F},\pi(x)}} \mathfrak{F}_{\pi(x)}, \\ s &\longmapsto \big(xg \mapsto (xg, s)\big) \longmapsto s. \end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass $(xg \mapsto (xg, s))$ ein Element in $\pi^*\mathfrak{G}(x\mathcal{G})^{\mathcal{G}}$ definiert. Folglich ist die Komposition der beiden Homomorphismen die Identität. Sei $\overline{x} \in X/\mathcal{G}$ und $\mathfrak{G} \in \operatorname{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ sowie $x \in X$ mit $\pi(x) = \overline{x}$. Jetzt betrachte ich die zweite Induktionseigenschaft, lokalisiert in $\overline{x}$. Es ist kanonisch isomorph zu:

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(x\mathcal{G})^{\mathcal{G}} &\xrightarrow{\Lambda_{\operatorname{Inv}^{\mathcal{G}} \mathfrak{G},\overline{x}}} \pi^* \operatorname{Inv}^{\mathcal{G}} \mathfrak{G}(x\mathcal{G})^{\mathcal{G}} \xrightarrow{P_{\mathfrak{G}}(x\mathcal{G})} \mathfrak{G}(x\mathcal{G})^{\mathcal{G}}, \\ (t : x\mathcal{G} \to \mathfrak{G}) &\longmapsto \big(xg \mapsto (xg, t)\big) \longmapsto \big(xg \mapsto t(xg)\big) = t. \end{aligned}$$

Auch hier egibt die Hintereinanderschaltung der beiden Morphismen die Identität. □

SATZ 2.23. *Die Kategorie* $\operatorname{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ *ist eine Grothendieck-Kategorie.*

BEWEIS. Es ist leicht zu sehen, dass $\operatorname{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ eine abelsche Kategorie ist. Nach 2.19 erfüllt sie auch AB3. Die Bedingung AB5 ist ebenfalls erfüllt, da sie in der Kategorie aller Garben erfüllt ist und da die Kategorie $\operatorname{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ unter gerichteten Colimites abgeschlossen ist. Es bleibt zu zeigen, dass $\operatorname{Sh}_{\mathcal{G}}(X)$ einen Erzeuger besitzt. Ein Kandidat für eine Erzeugermenge ist das System $\{\operatorname{ind}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}} j_{U!}\pi_{\mathcal{L}}^*\underline{\mathbb{Z}}\}$, wobei $\mathcal{L}$ offene und kompakte Untergruppen von $\mathcal{G}$ und $U$ unter $\mathcal{L}$ invariante Teilmengen von $X$ durchlaufen, $\pi_{\mathcal{L}} : U \to U/\mathcal{L}$, $j_U : U \hookrightarrow X$ die Projektion bzw. die Inklusion bezeichnen und $\underline{\mathbb{Z}}$ die lokal konstante Garbe auf $U/\mathcal{L}$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ ist. Sei ein $\mathcal{G}$–äquivarianter nicht verschwindender Morphismus $\phi : \mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ gegeben. Es kann angenommen werden, dass ein $x \in X$ und ein Keim $s_x \in \mathfrak{F}_x$ mit $s_x \notin \ker \phi_x$ existieren. $s_x$ wird durch einen Schnitt $s$ von $\mathfrak{F}$ auf einer offenen Umgebung $U \subseteq X$ von $x$ repräsentiert. Nach der Eigenschaft (ii) in 2.2 kann man $U$ so wählen, dass es invariant unter einer offenen und kompakten Untergruppe $\mathcal{L}$ von $\mathcal{G}$ ist und dass $s$ ebenfalls unter dieser Untergruppe invariant ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sh}_{\mathcal{G}}(X)}(\operatorname{ind}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}} j_{U!}\pi_{\mathcal{L}}^*\underline{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}) &\overset{2.13(\text{ii})}{\cong} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sh}_{\mathcal{L}}(X)}(j_{U!}\pi_{\mathcal{L}}^*\underline{\mathbb{Z}}, \mathfrak{F}) \\ \overset{2.18}{\cong} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sh}_{\mathcal{L}}(U)}(\pi_{\mathcal{L}}^*\underline{\mathbb{Z}}, j_U^*\mathfrak{F}) &\overset{2.22}{\cong} \operatorname{Hom}_{\operatorname{Sh}(U/\mathcal{L})}(\underline{\mathbb{Z}}, \operatorname{Inv}^{\mathcal{L}} j_U^*\mathfrak{F}) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\operatorname{P\,Sh}(U/\mathcal{L})}(\mathbb{Z}, \operatorname{Inv}^{\mathcal{L}} j_U^*\mathfrak{F}) \twoheadrightarrow \mathfrak{F}(U)^{\mathcal{L}} \ni s. \end{aligned}$$

Also existiert eine Abbildung von $\operatorname{ind}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}} j_{U!}\pi_{\mathcal{L}}^*\underline{\mathbb{Z}}$ nach $\mathfrak{F}$, deren Komposition mit $\phi$ nicht verschwindet. Damit ist $\coprod_{\mathcal{L},U} \operatorname{ind}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{G}} j_{U!}\pi_{\mathcal{L}}^*\underline{\mathbb{Z}}$ ($U$, $\mathcal{L}$ wie oben) ein Erzeuger für unsere Kategorie. □

KAPITEL 3

# Gewichtete Kohomologie

Ich verwende im Folgenden die Definitionen und Notation aus dem ersten Kapitel. Sei also $\mathcal{G}$ eine halbeinfache einfach zusammenhängende algebraische Gruppe. $S^* = S \cup \partial S^*$ die zugehörige adelische reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung, wobei $\partial S^* = \bigcup_{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}} S^*$ für Randkomponenten $\partial_{\mathcal{P}} S^*$, die zu rationalen standardparabolischen Untergruppen (StPUG) von $\mathcal{G}$ gehören. Seien $i : \partial S^* \to S^*$ und $j : S \to S^*$ die Einbettungen. $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ operiert von rechts auf $S^*$.

## 1. Die Unterkategorien $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$

In diesem Paragraphen werden ‚abgeschnittene' Unterkategorien $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ von $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ eingeführt sowie Abschneidefunktoren $R_M$, die zum Inklusionsfunktor rechtsadjungiert sind.

Definition 3.1. *Sei $\mathcal{P}$ eine standardparabolische Untergruppe von $\mathcal{G}$. Sei $\partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ das Bild von $\partial_{\mathcal{P}} X^* \times \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ in $\partial_{\mathcal{P}} S^*$. Dabei ist $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$ das unipotente Radikal von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ ein maximaler $\mathbb{Q}$-zerfallender Torus im Zentrum von $\mathcal{P}/\mathcal{N}_{\mathcal{P}}$.*

Bemerkung 3.2. Der Stabilisator von jedem $x \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ in $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ enthält $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$.

Definition 3.3. *Sei $M = \{M_{\mathcal{P}}\}$ ein System von endlichen Mengen von rationalen $\mathbb{Q}$–wertigen Charakteren von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ für standardparabolische Untergruppen von $\mathcal{G}$, das die folgende Bedingung erfüllt:*

$$\text{Für alle } \mathcal{Q} \supseteq \mathcal{P} \text{ und alle } \chi \in M_{\mathcal{P}} \text{ gilt } \chi_{|\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}(\mathbb{Q})} \in M_{\mathcal{Q}}.$$

*Für eine StPUG $\mathcal{P}$ und ein $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ sei*

$$\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a) := \prod_{\chi \in M_{\mathcal{P}}} (a - \chi(a)) \in \mathbb{Q}[\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})].$$

*Mit $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ bezeichne ich die volle Unterkategorie von $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$, die aus allen Garben $\mathfrak{F}$ besteht, für die für alle StPUG $\mathcal{P}$ gilt:*

- *Für alle $x \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ operiert $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ trivial auf $\mathfrak{F}_x$.*
- *Für alle $x \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ und alle $s \in \mathfrak{F}_x$ existiert eine Zahl $k_{\mathcal{P}} \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ gilt:*

$$\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k_{\mathcal{P}}} s = 0.$$

SATZ 3.4. (i) *Der exakte Inklusionsfunktor*

$$i_M : \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \to \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$$

*besitzt einen rechtsadjungierten Funktor $R_M$.*

(ii) *Die Kategorien $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ sind unter Koprodukt-, Untergarben- und Quotientengarbenbildung sowie unter Erweiterungen abgeschlossen.*

BEWEIS. (i) Konstruktion von $R_M$:
Sei $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$. Betrachte zu jeder StPUG $\mathcal{P}$ und zu jedem $x_0 \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ den Untermodul $\mathfrak{F}^M_{x_0}$ des Invariantenuntermoduls $\mathfrak{F}_{x_0}^{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)} \subseteq \mathfrak{F}_{x_0}$, der aus solchen $s \in \mathfrak{F}_{x_0}^{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}$ besteht, die von $\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k(s)}$ für ein $k(s) \in \mathbb{N}_0$ und alle $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ annulliert werden. Nach der Definition von $M$ sind diese Konstruktionen für verschiedene $\mathcal{P}$ verträglich. $R_M\mathfrak{F}$ soll als eine Untergarbe von $\mathfrak{F}$ definiert werden. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ sei $R_M\mathfrak{F}(U) := \mathfrak{F}(U)$. Sonst besteht $R_M\mathfrak{F}(U)$ aus denjenigen $s \in \mathfrak{F}(U)$, für deren Halm $s_{x_0g}$ an einer Stelle $x_0g \in U \cap \partial S^*$ gilt: $R_g(s_{x_0g}) \in \mathfrak{F}^M_{x_0}$. Es folgt nun direkt aus der Definition, dass wir eine Garbe aus $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ erhalten.
Jetzt zeige ich, dass $R_M$ rechtsadjungiert zu $i_M$ ist, d.h.:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(i_M\mathfrak{F}, \mathfrak{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M}(\mathfrak{F}, R_M\mathfrak{G}).$$

Sei $\phi : i_M\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ ein $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivarianter Morphismus. Für alle StPUG $\mathcal{P}$ und alle $x_0 \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ gilt $\mathrm{Im}(\phi_{x_0} : \mathfrak{F}_{x_0} \to \mathfrak{G}_{x_0}) \subseteq (R_M\mathfrak{G})_{x_0} \subseteq \mathfrak{G}_{x_0}$, denn für alle $n \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$, $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ und $s \in \mathfrak{F}(U)$ gilt $n\phi_{x_0}(s) = \phi_{x_0}(ns) = \phi_{x_0}(s)$ und

$$\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^k \phi_{x_0}(s) = \phi_{x_0}(\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^k s) = \phi_{x_0}(0) = 0.$$

Daher induziert $\phi$ einen Homomorphismus $\lambda_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}(\phi) : \mathfrak{F} \to R_M\mathfrak{G}$.
Sei $\psi : \mathfrak{F} \to R_M\mathfrak{G}$ gegeben. Man kann nun $\rho_{\mathfrak{F}\mathfrak{G}}(\psi) : i_M\mathfrak{F} \to \mathfrak{G}$ als die Komposition von $\psi$ mit der Inklusion $R_M\mathfrak{G} \hookrightarrow \mathfrak{G}$ definieren. $\lambda$ und $\rho$ sind zueinander invers und funktoriell.
(ii) $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ ist unter Koprodukten abgeschlossen.
Sei $\{\mathfrak{F}_i\}_{i\in I}$ ein System von Garben in $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$. Die Garbe $\coprod_{i\in I} \mathfrak{F}_i$ liegt nach Lemma 2.19 in $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$. Für ihren Halm an einer Stelle $x_0 \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ gilt $(\coprod \mathfrak{F}_i)_{x_0} = \bigoplus \mathfrak{F}_{i,x_0}$. Da von $\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^k$ jedes Element aus den einzelnen $\mathfrak{F}_i$ für geeignete $k$ annulliert wird, wird auch jedes Element aus dem Koprodukt auf diese Weise vernichtet. Es folgt $\coprod \mathfrak{F}_i \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$.
Sei $\mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ und $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ mit $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}$. Da auf den Halmen

$$\mathfrak{F}_{x_0} \subseteq \mathfrak{G}_{x_0} \text{ und } (\mathfrak{G}/\mathfrak{F})_{x_0} = \mathfrak{G}_{x_0}/\mathfrak{F}_{x_0}$$

gilt, ist die Kategorie $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ ebenfalls unter Unter- und Quotientengarben abgeschlossen.

Um zu zeigen, dass die Kategorie unter Erweiterungen stabil ist, nutze ich den Sachverhalt aus, dass $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ sich als aufsteigende Vereinigung proendlicher Gruppen $\bigcup_{i\in I}\mathcal{N}_i$ schreiben läßt. Sei

$$0 \to \mathfrak{F}' \xrightarrow{\iota} \mathfrak{F} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{F}'' \to 0$$

exakt mit $\mathfrak{F}', \mathfrak{F}'' \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M, \mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$. Wir bekommen dann für jedes $x_0 \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ zwei kurze exakte Sequenzen von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$–Moduln:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{F}'_{x_0} \arrow[r, "\iota"] & \mathfrak{F}_{x_0} \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{F}''_{x_0} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{F}'^{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}_{x_0} \arrow[u] \arrow[d, equal] \arrow[r, "\iota"] & \mathfrak{F}^{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}_{x_0} \arrow[u] \arrow[r, "\pi"] & \mathfrak{F}''^{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}_{x_0} \arrow[u] \arrow[d, equal] \arrow[r] & 0, \\
& \mathfrak{F}'_{x_0} & & \mathfrak{F}''_{x_0} &
\end{tikzcd}$$

da $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ trivial auf $\mathfrak{F}'_{x_0}, \mathfrak{F}''_{x_0}$ wirkt. Nach dem Fünfer-Lemma folgt $\mathfrak{F}^{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}_{x_0} = \mathfrak{F}_{x_0}$. Damit ist die Invarianz unter $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ gezeigt.
Sei jetzt $x_0 \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ und $s \in \mathfrak{F}_{x_0}$. Es existiert ein $k''$, so dass

$$0 = \wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k''}\pi s = \pi(\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k''} s)$$

für alle $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ gilt. Also existiert ein $s' \in \mathfrak{F}'_{x_0}$ mit $\iota s' = \wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k''} s$. Es gibt für alle $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ ein $k'$ mit $\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k'} s' = 0$. Es folgt

$$0 = \wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k'}\iota s' = \wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k'}\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k''} s = \wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^{k'+k''} s$$

für alle $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$. Also ist $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ stabil unter Erweiterungen. $\square$

Bemerkung 3.5. Die Halme einer Garbe $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ an Punkten $x = x_0 g \in \partial_{\mathcal{P}} S^* - \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ mit $x_0 \in \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ erfüllen analoge Bedingungen zu denen aus 3.3, allerdings mit $g^{-1}\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})g$ und $g^{-1}\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)g$ statt $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(Q)$ und $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$.

## 2. Der Abschneidefunktor $T_M$

Die im vorigen Paragraphen konstruierten Abschneidefunktoren lassen sich nicht in kanonischer Weise auf die abgeleiteten Kategorien fortsetzen. Es scheint, als würden die injektiven Objekte nicht von den Inklusionen $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ erhalten werden, und daher auch keine Inklusion der abgeleiteten Kategorien implizieren. Deshalb schlage ich hier einen anderen Weg ein, um die Abschneidefunktoren dennoch für die derivierte Kategorie definieren zu können.
Für den Rest des Kapitels sollen die Kategorie $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ der Garben mit $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-Operation und die zugehörige derivierte Kategorie $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ untersucht werden.

Definition 3.6. *Für ein System $M$ von Charakteren, das die Bedingungen aus der Definition 3.3 erfüllt, sei* $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \subseteq \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ *die volle Unterkategorie aller Komplexe mit Kohomologiegarben aus* $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$.

Bemerkung 3.7. Die Existenz der derivierten Kategorien folgt aus 2.23 und [**Fra01**, Theorem 2].

Es gilt das folgende

Theorem 3.8. *Sei $A$ eine Grothendieck-Kategorie und $T \subseteq A$ eine volle Unterkategorie, die AB3 erfüllt sowie die Eigenschaft besitzt, dass der Inklusionsfunktor $T \hookrightarrow A$ exakt ist und mit beliebigen Koprodukten kommutiert. Ferner sei $T$ stabil unter der Bildung von Unterobjekten. Betrachte die volle Unterkategorie $\mathrm{D}_T(A)$ der zugehörigen derivierten Kategorie $\mathrm{D}(A)$, deren Objekte Komplexe mit Kohomologieobjekten aus $T$ sind. Dann gilt für die Kategorie $\mathrm{D}_T(A)$ der Brownsche Darstellbarkeitssatz. Insbesondere besitzt der Inklusionsfunktor $\mathrm{D}_T(A) \hookrightarrow \mathrm{D}(A)$ einen rechtsadjungierten Funktor.*

Beweis. [**Fra01**, Theorem 3] □

Unsere Kategorien $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \subseteq \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ erfüllen die Voraussetzungen des Theorems. Wir können jetzt den Abschneidefunktor in der Kategorie $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ definieren:

Definition 3.9. *Sei $M$ ein System von Charakteren, das die Bedingungen aus der Definition 3.3 erfüllt. Der Abschneidefunktor*

$$T_M : \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*) \to \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$$

*ist der zum Inklusionsfunktor $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M \hookrightarrow \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ rechtsadjungierte Funktor.*

Korollar 3.10. *$T_M$ existiert.*

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus 3.8. □

Die Einschränkung von $T_M$ auf $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ ist kanonisch isomorph zur Identität.

Obwohl es nicht möglich war, den Abschneidefunktor aus dem ersten Abschnitt dieses Kapitels auf die abgeleitete Kategorie fortzusetzen, so konnte doch ein geeigneter Abschneidefunktor in dieser Kategorie definiert werden.
Dass der Funktor letztendlich die gewünschten Eigenschaften besitzt, wird durch die Gültigkeit des Theorems 3.12 im nächsten Abschnitt nahegelegt. Zuerst aber soll mit Hilfe des besagten Abschneidefunktors endlich die gewichtete Kohomologie definiert werden.

DEFINITION 3.11. *Sei* $\mathfrak{F} \in \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$. *Dann ist für jedes System* $M$ *von Charakteren (das Gewicht), das die Bedingungen aus der Definition 3.3 erfüllt, die gewichtete Kohomologie definiert als die Hyperkohomologie des abgeschnittenen Komplexes:*

$$\mathrm{WC}^i_M(S^*, \mathfrak{F}) := \mathbb{H}^i(S^*, T_M\mathfrak{F}),$$

*gebildet in der Kategorie aller Garben auf* $S^*$.
*Für eine rationale Darstellung* $E$ *von* $\mathcal{G}$ *sei* $\mathfrak{E}$ *das zugehörige lokale System auf* $S$. *Sei dann*

$$\mathrm{WC}^i_M(S^*, E) := \mathrm{WC}^i_M(S^*, \mathrm{R}\, j_*\mathfrak{E}),$$

*dabei ist* $j : S \to S^*$ *die Einbettung.*

## 3. Ein Theorem über $T_M$

Das folgende Theorem wird im nächsten Kapitel auf die de Rham-Kohomologie angewandt und stellt dadurch einen Bezug her zwischen der hier konstruierten gewichteten Kohomologie und der gewichteten de Rham-Kohomologie.

THEOREM 3.12. *Seien* $N$ *und* $M$ *disjunkte Systeme von Charakteren, die die Bedingungen aus der Definition 3.3 erfüllen. Weiterhin sei* $\mathfrak{F} \in \mathrm{D}^b_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_N$, *so dass* $\mathfrak{F}$ *außerhalb von* $\partial S^*$ *azyklisch ist. Dann ist* $T_M\mathfrak{F} = 0$.

Der Rest des Kapitels widmet sich dem Beweis des Theorems.

### 3.1. Vorbereitungen.

KOROLLAR 3.13. *Sei* $\mathfrak{A} \in \mathrm{D}_{\mathcal{G}}(S^*)$. *Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen*

$$0 \to j_! j^* \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \to i_* i^* \mathfrak{A} \to 0.$$

BEWEIS. Die Existenz folgt aus den Adjunktionsbeziehungen aus 2.18. Die Exaktheit lässt sich leicht auf den Halmen nachprüfen (vgl. auch [**Ive86**, 6.11]). □

LEMMA 3.14. *Sei* $\mathcal{P} \in \mathfrak{P}$ *standardparabolisch. Dann sind die Kategorien* $\mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial_{\mathcal{P}} S^*)$ *und* $\mathrm{D}^+_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)$ *äquivalent.*

BEWEIS. Seien $\mathcal{H} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$, $Z = \partial_{\mathcal{P}} S^*$ und $Y = \partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ mit der Einbettung $i : Y \hookrightarrow Z$. Einer Garbe $\mathfrak{F}$ wird ihre Einschränkung $\mathfrak{F}_{|Y} := i^*\mathfrak{F}$ auf $Y$ zugeordnet, die eine $\mathcal{H}$-äquivariante Garbe ist.
Um einer $\mathcal{H}$-äquivarianten Garbe auf $Y$ eine $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$–äquivariante Garbe auf $Z$ zuzuordnen, wähle ich zuerst für alle $y \in Y$ ein festes Repräsentantensystem $(g^y_x)_{x \in y\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)} \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ mit $xg^y_x = y$. Dann wird $\mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{H}}(Y)$ auf eine Garbe $\overline{\mathfrak{G}}$ abgebildet, die auf einem offenen $U \subseteq Z$ als die Menge aller $(s_x) \in \prod_{x \in U} \mathfrak{G}_{xg^y_x}$ gegeben ist, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

(i) Zu jedem $x \in U$ gibt es ein Stetigkeitspaar $(V, \mathfrak{L})$ bestehend aus einer offenen Umgebung $V$, so dass $\overline{V} \subseteq U$ kompakt ist, und einer offenen und kompakten Untergruppe $\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ mit $\overline{V}\mathfrak{L} \subseteq U$, so dass für alle $x' = y(g^y_{x'})^{-1} \in V$ und $l \in \mathfrak{L}$ gilt: $s_{x'l^{-1}} = R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1} l g^y_{x'}} s_{x'}$.

(ii) Für alle $y \in Y \cap U$ gibt es eine offenes $W \subseteq U$ und ein $t \in \mathfrak{G}(W \cap Y)$, so dass für alle $y' \in W \cap Y$ gilt $t_{y'} = s_{y'}$.

$R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1} l g^y_{x'}}$ in (i) ist wohldefiniert, da $(g^y_{x'l^{-1}})^{-1} l g^y_{x'}$ den Punkt $y \in Y$ stabilisiert, und somit in $\mathcal{H}$ enthalten ist. Wir erhalten eine $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$–äquivariante Garbe durch

$$(R_h s)_{xh^{-1}} := R_{(g^y_{xh^{-1}})^{-1} h g^y_x} s_x.$$

Das so definierte $R_h$ ist aus den gleichen Gründen wie oben wohldefiniert. Es gilt $R_{hg} = R_h R_g$, denn

$$\begin{aligned} R_h(R_g s_x) &= R_h(R_{(g^y_{xg^{-1}})^{-1} g g^y_x} s_x) \\ &= R_{(g^y_{xg^{-1}h^{-1}})^{-1} h g^y_{xg^{-1}}} R_{(g^y_{xg^{-1}})^{-1} g g^y_x} s_x \\ &= R_{(g^y_{xg^{-1}h^{-1}})^{-1} h g^y_{xg^{-1}} (g^y_{xg^{-1}})^{-1} g g^y_x} s_x \\ &= R_{(g^y_{x(hg)^{-1}})^{-1} (hg) g^y_x} s_x = R_{hg}(s_x). \end{aligned}$$

Außerdem liegt $R_h s$ tatsächlich in $\overline{\mathfrak{G}}(Uh^{-1})$. Um dies zu sehen, müssen wir für ein $xh^{-1} \in Uh^{-1}$ ein Stetigkeitspaar $(V', \mathfrak{L}')$ finden. Erst einmal ist es möglich für $s$ ein entsprechendes $(V, \mathfrak{L})$ zu finden. Man kann dann $V' := Vh^{-1}$ und $\mathfrak{L}' := h\mathfrak{L}h^{-1}$ wählen. Es gilt nun für alle $x' \in V$ und $l \in \mathfrak{L}$ :

$$\begin{aligned} (R_h s)_{x'h^{-1}(hlh^{-1})^{-1}} &= (R_h s)_{x'l^{-1}h^{-1}} = R_{(g^y_{x'l^{-1}h^{-1}})^{-1} h g^y_{x'l^{-1}}} s_{x'l^{-1}} \\ &= R_{(g^y_{x'l^{-1}h^{-1}})^{-1} h g^y_{x'l^{-1}}} R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1} l g^y_{x'}} s_{x'} = R_{(g^y_{x'l^{-1}h^{-1}})^{-1} h l g^y_{x'}} s_{x'} \\ &= R_{(g^y_{x'l^{-1}h^{-1}})^{-1} h l g^y_{x'}} R_{(g^y_{x'})^{-1} h^{-1} g^y_{x'h^{-1}}} (R_h s)_{x'h^{-1}} \\ &= R_{g^y_{x'h^{-1}(hlh^{-1})^{-1}} hlh^{-1} g^y_{x'h^{-1}}} (R_h s)_{x'h^{-1}}. \end{aligned}$$

Die Wirkung von $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ ist stetig nach der Konstruktion von $\overline{\mathfrak{G}}$. Die Wahl eines anderen Repräsentantensystems $(\tilde{g}^y_x)_{x \in y\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)} \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ liefert eine isomorphe Garbe.

Jetzt gebe ich einen Isomorphismus $\varphi : \mathfrak{F} \to \overline{\mathfrak{F}_{|Y}}$ an, der für ein offenes $U \subseteq Z$ gegeben ist durch:

$$s \mapsto (\mathrm{R}_{(g^y_x)^{-1}}(s_x)).$$

$\varphi$ ist wohldefiniert, denn wir können für ein $s \in \mathfrak{F}(U)$ und ein $x \in U$ ein Stetigkeitspaar $(V, \mathfrak{L})$ finden, so dass für alle $l \in \mathfrak{L}$ gilt:

$$R_l(s_{|V}) = s_{|Vl^{-1}}.$$

Daraus ergibt sich für alle $x'$ und $l \in \mathfrak{L}$:

$$\begin{aligned}(\varphi(s))_{x'l^{-1}} &= R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1}}(s_{x'l^{-1}}) = R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1}}(R_l(s_{x'})) \\ &= (R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1}} R_l R_{g^y_{x'}})(R_{(g^y_{x'})^{-1}}(s_{x'})) = R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1} l g^y_{x'}}(\varphi(s)_{x'}) \\ &= R_{(g^y_{x'l^{-1}})^{-1} l g^y_{x'}}(\varphi(s)_{x'}).\end{aligned}$$

$\varphi$ ist ein Homomorphismus $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivarianter Garben, denn

$$\begin{aligned}&\varphi(R_h s)_{xh^{-1}} = R_{(g^y_{xh^{-1}})^{-1}}(R_h s_x) = R_{(g^y_{xh^{-1}})^{-1}} R_h (R_{g^y_x} R_{(g^y_x)^{-1}} s_x) \\ &= R_{(g^y_{xh^{-1}})^{-1}} R_h R_{g^y_x}(R_{(g^y_x)^{-1}} s_x) = R_{(g^y_{xh^{-1}})^{-1} h g^y_x}(\varphi(s)_x) = R_h(\varphi(s))_{xh^{-1}}.\end{aligned}$$

$\varphi$ ist ein Isomorphismus auf den Halmen, denn für ein $x \in Z$ folgt $(\overline{\mathfrak{F}_{|Y}})_x = \mathfrak{F}_{xg^y_x}$ und $\varphi_x(s_x) = R_{(g^y_x)^{-1}}(s_x)$. Umgekehrt gilt für ein $\mathfrak{G} \in \mathrm{Sh}^{R[\mathcal{H}]}(Y)$ und ein offenes $V \subseteq Y$:

$$(\overline{\mathfrak{G}})_{|Y}(V) = \mathfrak{G}(V).$$

Also sind die beiden Funktoren invers zueinander. Sie sind außerdem exakt, weswegen wir eine Äquivalenz der zugehörigen derivierten Kategorien bekommen. □

Bemerkung 3.15. Für ein $\mathfrak{F} \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ gilt $T_M\mathfrak{F} \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$.

Beweis. Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ist die Abschneidung $\tau^{\leq n} : \mathrm{D} \to \mathrm{D}^{\leq n}$ rechtsadjungiert zur Einbettung $\mathrm{D}^{\leq n} \to \mathrm{D}$. Es gibt ein $n$, so dass $\tau^{\leq n}\mathfrak{F} = 0$. Es gilt für alle $\mathfrak{G} \in \mathrm{D}^{\leq n}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M}(\mathfrak{G}, T_M\mathfrak{F})) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^{\leq n}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(\mathfrak{G}, \tau^{\leq n}\mathfrak{F}) = 0.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $T_M\mathfrak{F}$ in $\mathrm{D}^{\geq n+1}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ und damit in $\mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ liegt. □

**3.2. Der Beweis des Theorems.** Seien $N$, $M$ und $\mathfrak{F}$ wie in Theorem 3.12 angegeben. Das Verschwinden von $T_M\mathfrak{F} \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ ist äquivalent zum Verschwinden der Gruppe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M}(\mathfrak{A}, T_M\mathfrak{F})$ für alle $\mathfrak{A} \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$. Damit gilt:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M}(\mathfrak{A}, T_M\mathfrak{F})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}).$$

Seien $j : S \to S^*$ und $i : \partial S^* \to S^*$ die Einbettungen. Nach 3.13 gibt es eine kurze exakte Sequenz von Kokettenkomplexen

$$0 \to j_! j^*\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \to i_* i^*\mathfrak{A} \to 0,$$

die ein ausgezeichnetes Dreieck in der derivierten Kategorie induziert. Es gilt dann:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(j_! j^*\mathfrak{A}, \mathfrak{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S)}(j^*\mathfrak{A}, j^*\mathfrak{F}) = 0,$$

da $\mathfrak{F}$ außerhalb von $\partial S^*$ als azyklisch vorausgesetzt wurde. Daraus folgt mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(i_* i^* \mathfrak{F}, \mathfrak{F}),$$

also ist $\mathfrak{F} \cong i_* \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E} = i^* \mathfrak{F} \in \mathrm{D}^b_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)_N$. Demnach gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(\mathfrak{A}, \mathfrak{F}) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)}(\mathfrak{A}, i_* \mathfrak{E}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(i^* \mathfrak{A}, \mathfrak{E}).\end{aligned}$$

Wir haben also die Behauptung auf das folgende Lemma reduziert.

LEMMA 3.16. *$M$ und $N$ mögen die Voraussetzungen des Theorems 3.12 erfüllen. Seien außerdem $\mathfrak{B} \in \mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)_M$ und $\mathfrak{E} \in \mathrm{D}^b_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)_N$. Dann verschwindet $Hom_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, \mathfrak{E})$.*

Um dies zu zeigen, beschränken wir uns zuerst auf eine Randkomponente von $S^*$.

3.2.1. *1.Schritt.* Sei $\mathcal{P}$ eine StPUG von $\mathcal{G}$. Nach 3.14 sind die Kategorien $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial_{\mathcal{P}} S^*)$ und $\mathrm{D}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)$ äquivalent. Deshalb ist es möglich, $\partial_{\mathcal{P}} S^*$ durch $\partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ und $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ durch $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ zu ersetzen. Das Verschwinden der fraglichen Gruppe folgt also aus dem Verschwinden der Morphismengruppe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)}(\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*}, \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})$.
Im Folgenden soll die derivierte Kategorie der Kategorie der Garben aus $\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)$ betrachtet werden. Wir dürfen annehmen, dass $\mathfrak{E}$ in Dimension 0 konzentriert ist.
Die Sequenz

$$0 \to \tau^{\leq k} \mathfrak{E}_{|\partial_{\mathcal{P}} S^*} \to \mathfrak{E}_{|\partial_{\mathcal{P}} S^*} \to \tau^{>k} \mathfrak{E}_{|\partial_{\mathcal{P}} S^*} \to 0$$

ist exakt, und bei geeigneter Wahl von $k$ sind die beiden äußeren Komplexe ‚kürzer' als der mittlere. Daraus folgt, dass man $\mathfrak{E}_{|\partial_{\mathcal{P}} S^*}$ konzentriert in 0 voraussetzen kann.
Die Kategorie der $\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$-äquivarianten Garben auf $\partial^0_{\mathcal{P}} S^*$ kann durch die Kategorie der $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$-äquivarianten Garben ersetzt werden. Dabei ist $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ die Levi-Komponente von $\mathcal{P}$. Dazu betrachte ich den Funktor der $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$–Koinvarianten

$$\begin{aligned}\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*) &\to \mathrm{Sh}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*), \\ \mathfrak{F} &\mapsto \mathfrak{F}_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)},\end{aligned}$$

der für jedes offene $U \subseteq \partial_{\mathcal{P}} S^*$ durch die Garbifizierung von

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(U) := \mathfrak{F}(U)_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}$$

gegeben ist. Er ist exakt (das folgt aus der Darstellung von $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ als aufsteigende Vereinigung proendlicher Gruppen), und außerdem ist er linksadjungiert zu dem Funktor, der $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)$ trivial auf einer $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$-äquivarianten Garbe wirken lässt. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)}(\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}}S^*}, \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}}S^*}) \\ \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)}((\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}}S^*})_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}, \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}}S^*}).\end{aligned}$$

LEMMA 3.17. *Es gibt ein $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$, so dass $\chi(a) \neq \xi(a)$ für alle $\chi \neq \xi \in M_{\mathcal{P}} \cup N_{\mathcal{P}}$. Insbesondere ist dann $\chi(a) \neq \xi(a)$ für alle $\chi \in M_{\mathcal{P}}$ und $\xi \in N_{\mathcal{P}}$.*

BEWEIS. Sei $\chi \neq \xi \in M_{\mathcal{P}} \cup N_{\mathcal{P}}$. Dann ist $\ker \chi\xi^{-1}$ ein Untertorus von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ der Codimension $\geq 1$, und da $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ $\mathbb{Q}$-zerfallend ist, sind seine $\mathbb{Q}$–wertigen Punkte dicht. Da man eine Varietät nicht als eine endliche Vereinigung von Untervarietäten niedriger Dimension darstellen kann, gibt es immer solch ein $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$. □

Ich wähle ein solches $a$ fest. Dann gilt das

LEMMA 3.18.
(i) *Auf jedem Modul aus $(\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})})_{M_{\mathcal{P}}}$, also einem $\mathbb{Q}[\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})]$-Modul, dessen Elemente von Potenzen von $\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)$ für alle $a \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ annulliert werden, wirkt $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ isomorph.*
(ii) *Die Multiplikation mit $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ induziert einen Automorphismus auf jeder Garbe aus $\mathrm{Sh}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)_M$.*
(iii) *Der von der Multiplikation mit $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ erzeugte Endomorphismus eines jeden Elements aus $\mathrm{D}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)_M$ ist ein Quasiisomorphismus.*

BEWEIS. (i) Sei $\mathfrak{C} \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})})_{M_{\mathcal{P}}}$. Zu jedem $m \in \mathfrak{C}$ existiert ein $k$ mit $\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^k m = 0$. Ich definiere eine Filtrierung von $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{C}_k := \{m \in \mathfrak{C} | \wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)^k m = 0\}.$$

Betrachte $\overline{m} \in \mathfrak{C}_{k+1}/\mathfrak{C}_k - \{0\}$. Sei $m \in \mathfrak{C}_{k+1} - \mathfrak{C}_k$ ein Repräsentant von $\overline{m}$. Dann liegt $\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)m$ in $\mathfrak{C}_k$, also gilt

$$\wp_{M_{\mathcal{P}}}(a)\overline{m} = 0 \in \mathfrak{C}_{k+1}/\mathfrak{C}_k,$$

d.h. $a$ operiert halbeinfach auf jedem Quotienten $\mathfrak{C}_{k+1}/\mathfrak{C}_k$. Daher muss $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ isomorph auf diesen Quotienten operieren. Mit Hilfe vollständiger Induktion folgt leicht, dass $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ auf ganz $\mathfrak{C}$ isomorph operiert.
(ii) Da $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ im Zentrum von $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ liegt, induziert die Multiplikation mit $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ einen Morphismus $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$-äquivarianter Garben. Sei $\mathfrak{C} \in \mathrm{Sh}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)_M$. Für alle $x \in \partial^0_{\mathcal{P}}S^*$ gilt $\mathfrak{C}_x \in (\mathrm{Mod}_{\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})})_{M_{\mathcal{P}}}$, da $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ $x$ stabilisiert. Also operiert nach (i) $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ isomorph auf $\mathfrak{C}_x$, also auch auf $\mathfrak{C}$.
(iii) Die Kohomologiegarben von Objekten aus $\mathrm{D}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)_M$ liegen in $\mathrm{Sh}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}}S^*)_M$. Also ist nach (ii) der durch die Multiplikation auf dem Kohomologieniveau induzierte Morphismus ein Isomorphismus. □

Wir wissen nun, dass $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ auf $(\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}$ quasiisomorph operiert. Da $\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*}$ ein Element von $\mathrm{Sh}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)_N$ ist, operiert $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ darauf lokal nilpotent. Ich möchte zeigen, dass man voraussetzen kann, dass $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ auf $\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*}$ als 0 operiert. Dazu definiere ich $(\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_k$ als die Untergarbe von $\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*}$, deren Schnitte von $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)^k$ annulliert werden. Wir erhalten für jedes $k \geq 1$ eine exakte Sequenz

$$0 \to (\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_k \to (\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{k+1} \to (\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{k+1}/(\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_k \to 0$$

Mit vollständiger Induktion folgt daraus die Behauptung.
Für ein

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)}((\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}, \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})$$

gibt es ein

$$\mathfrak{B}' \in \mathrm{D}_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)$$

und einen Quasiisomorphismus

$$s : \mathfrak{B}' \to (\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}$$

sowie einen Morphismus

$$g \in \mathrm{Hom}_{K_{\mathcal{P}(\mathbb{Q})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)}((\mathfrak{B}', \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})$$

in der Homotopiekategorie, so dass in dem Diagramm

$$\begin{tikzcd}
& & \mathfrak{B}' \arrow[dl, "\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)"'] \arrow[dr, "g"] & \\
& \mathfrak{B}' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "g"] & & \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*} \arrow[dl, "\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)"'] \\
(\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)} \arrow[rr, dotted, "f"] & & \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*} &
\end{tikzcd}$$

das Dreieck in der derivierten und das Quadrat in der Homotopiekategorie kommutieren. Hierbei bezeichnet $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ die von der Multiplikation mit $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ induzierten Morphismen in der derivierten Kategorie. Es gilt also

$$g\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a) = \wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)g = 0,$$

da $\wp_{N_{\mathcal{P}}}(a)$ auf $\mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*}$ als 0 wirkt. Daraus folgt

$$f = 0.$$

Also ist $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})}(\partial^0_{\mathcal{P}} S^*)}((\mathfrak{B}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{A}_f)}, \mathfrak{E}_{|\partial^0_{\mathcal{P}} S^*})$ trivial.

Jetzt können wir den allgemeinen Fall betrachten:

3.2.2. *2.Schritt.* Wir führen eine vollständige Induktion nach $n$, dem $\mathbb{Q}$–Rang von $\mathcal{G}$, bzw. der Anzahl der maximalen rationalen StPUG von $\mathcal{G}$. Der Induktionsanfang folgt direkt aus dem vorigen Teil.
Sei also $n \geq 2$. Der Rand besitzt die Zerlegung

$$\partial S^* = \bigcup_{\mathcal{P}} \partial_{\mathcal{P}} S^*,$$

wobei die disjunkte Vereinigung über alle StPUG gebildet wird. Für eine maximale StPUG $\mathcal{Q}$ ist $\partial_{\mathcal{Q}} S^*$ in $\partial S^*$ offen. Seien jetzt $j_{\mathcal{Q}} : \partial_{\mathcal{Q}} S^* \to \partial S^*$ und $i_{\mathcal{Q}} : \partial S^* - \partial_{\mathcal{Q}} S^* \to \partial S^*$ die offene bzw. abgeschlossene Einbettung.
Offenbar ist für $\mathfrak{A} \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)_M$ z.B. der Komplex $j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{A}$ wieder in $\mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)_M$ u.Ä. Wir können die kurze exakte Sequenz

$$0 \to j_! j^* \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \to i_* i^* \mathfrak{A} \to 0$$

aus 3.13 auf das $\mathfrak{E} \in \mathrm{D}^+_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)_N$ anwenden und erhalten die lange exakte Hom–Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}) \\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, i_{\mathcal{Q}*} i^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \to \cdots \end{aligned}$$

Nun gilt aber aufgrund der Adjunktionsbeziehungen:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, i_{\mathcal{Q}*} i^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^* - \partial_{\mathcal{Q}} S^*)}(i^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{B}, i^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}),$$

und die letzte Gruppe verschwindet nach der Induktionsvoraussetzung. Wir haben also

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, \mathfrak{E}).$$

Wir können demnach $\mathfrak{E}$ durch $j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}$ ersetzen. Sei $\mathcal{Q}'$ eine andere maximale StPUG. Ich wende 3.13 auf $j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}$ mit den entsprechenden Einbettungen für $\mathcal{Q}'$ an und erhalte eine weitere lange exakte Hom–Sequenz:

$$\begin{aligned} 0 &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}'!} j^*_{\mathcal{Q}'} j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \\ &\to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, i_{\mathcal{Q}'*} i^*_{\mathcal{Q}'} j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \to \cdots \end{aligned}$$

Nun gilt aber aufgrund der Adjunktionsbeziehungen:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, i_{\mathcal{Q}'*} i^*_{\mathcal{Q}'} j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \cong \\ &\qquad \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^* - \partial_{\mathcal{Q}'} S^*)}(i^*_{\mathcal{Q}'} \mathfrak{B}, i^*_{\mathcal{Q}'} j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}), \end{aligned}$$

und die letzte Gruppe verschwindet nach Induktionsvoraussetzung. Wir haben also

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}'!} j^*_{\mathcal{Q}'} j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}!} j^*_{\mathcal{Q}} \mathfrak{E}),$$

aber da $\partial_{\mathcal{Q}} S^*$ und $\partial_{\mathcal{Q}'} S^*$ disjunkt sind, gilt

$$j^*_{\mathcal{Q}'} j_{\mathcal{Q}!} = 0,$$

also

$$j_{\mathcal{Q}'!}j^*_{\mathcal{Q}'}j_{\mathcal{Q}!}j^*_{\mathcal{Q}}\mathfrak{E} = 0$$

und somit

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}!}j^*_{\mathcal{Q}}\mathfrak{E}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(\partial S^*)}(\mathfrak{B}, j_{\mathcal{Q}'!}j^*_{\mathcal{Q}'}j_{\mathcal{Q}!}j^*_{\mathcal{Q}}\mathfrak{E}) = 0.$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

KAPITEL 4

# Gewichtete de Rham-Kohomologie

In diesem Kapitel werden weiterhin die Bezeichnungen und Annahmen des ersten Kapitels verwendet. Sei also $\mathcal{G}$ eine halbeinfache einfach zusammenhängende algebraische Gruppe und $\mathcal{K}_\infty = \mathcal{K}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{R})$ eine maximal kompakte Untergruppe. Sei $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von $\mathcal{G}(\mathbb{R})$. Wähle eine minimale parabolische Untergruppe $\mathcal{P}_0$ von $\mathcal{G}$. Sei $S^*$ die adelische reduktive Borel-Serre-Kompaktifizierung von

$$S = (\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A})/\mathcal{K}_\infty).$$

Wir haben eine Projektion

$$q : \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})/\mathcal{K}_\infty = S.$$

## 1. Grundlagen und Definitionen

DEFINITION 4.1. *Sei $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ eine offene und kompakte Untergruppe, $\mathcal{K} := \mathcal{K}_\infty \times \mathcal{K}_f$. Sei ferner $V \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$ eine offene und $\mathcal{K}$-invariante Teilmenge und $\tilde{V}$ das Urbild von $V$ in $\mathcal{G}(\mathbb{A})$. Ich definiere eine Menge $C^\infty(V)$, die aus denjenigen Funktionen $f : \tilde{V} \to \mathbb{C}$ besteht, die linksinvariant unter $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$, rechtsinvariant unter einer offenen Untergruppe $\widetilde{\mathcal{K}}_f$ von $\mathcal{K}_f$, $\mathcal{K}_\infty$-endlich und unendlich oft differenzierbar auf $\tilde{V}/\widetilde{\mathcal{K}}_f$ sind.*

DEFINITION 4.2. *Sei $G$ eine reelle Lie-Gruppe, $K$ eine kompakte Untergruppe und $\mathfrak{g}$ die Lie-Algebra von $G$. Ein vollständiger lokalkonvexer Hausdorffscher $\mathbb{C}$-Vektorraum $V$ heißt $(\mathfrak{g}, K)$-Modul, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

- *$V$ ist sowohl $\mathfrak{g}$-Modul als auch $K$-Modul.*
- *$V$ ist lokal endlicher $K$-Modul, d.h. für jedes $v \in V$ ist $\sum_{k\in K} \mathbb{C}kv$ ein endlichdimensionaler $K$-stabiler Untervektorraum.*
- *Für jeden $K$-stabilen endlichdimensionalen Untervektorraum $W$ von $V$ ist die Wirkung von $K$ auf $W$ differenzierbar, d.h. für jedes $w \in W$ ist $k \mapsto kw$ $C^\infty$-differenzierbar, und die Ableitung der Wirkung von $K$ stimmt mit der Wirkung von $\mathfrak{k}$, der Lie-Algebra von $K$, als Einschränkung derjenigen von $\mathfrak{g}$ überein, anders ausgedrückt gilt für $A \in \mathfrak{k}$ und $w \in W$*

$$Aw = \frac{d}{dt}(\exp(tA)w)_{|t=0}.$$

- *Für $A \in \mathfrak{g}$, $k \in K$ und $v \in V$ gilt*

$$kAv = (\mathrm{Ad}(k)A)kv$$

DEFINITION 4.3. *Sei $X$ ein lokal kompakter topologischer Raum. Eine Garbe $\mathfrak{F} \in \mathrm{Sh}(X)$ heißt eine Garbe von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln, wenn $\mathfrak{F}(U)$ für jedes offene $U \subseteq X$ ein $(\mathfrak{g}, K)$-Modul ist und für jede endlichdimensionale Darstellung $V$ von $K$*

$$U \mapsto Hom_K(V, \mathfrak{F}(U))$$

*eine Garbe von $\mathbb{C}$-Vektorräumen ist.*

DEFINITION 4.4. *Für einen $(\mathfrak{g}, K)$-Modul $M$ wird der $(\mathfrak{g}, K)$-Kokettenkomplex folgendermaßen definiert:*

$$C^i_{(\mathfrak{g},K)}(M) = Hom_K(\Lambda^i(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), M),$$

*und für ein $\omega \in C^{k-1}_{(\mathfrak{g},K)}(M)$*

$$\begin{aligned}(d\omega)(\gamma_1, \ldots, \gamma_k) = &\sum_{i=1}^{k} (-1)^{(i+1)} \gamma_i \omega(\gamma_1, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_k) \\ &- \sum_{1 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j+1} \omega([\gamma_i, \gamma_j], \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \hat{\gamma}_j, \ldots, \gamma_k).\end{aligned}$$

*Für eine $(\mathfrak{g}, K)$-Modulgarbe $\mathfrak{F}$ wird der $(\mathfrak{g}, K)$-Kokettenkomplex durch die Garbifizierung von*

$$U \mapsto C^i_{(\mathfrak{g},K)}(\mathfrak{F}(U))$$

*definiert.*

Es gilt der wohlbekannte Fakt (vgl. z.B. [**Fra98**][2.3.]).

FAKT 4.5. *Sei $E$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung von $\mathcal{G}$. Sei $p : \mathcal{G}(\mathbb{A})/\mathcal{K}_\infty \to S$ die Projektion. Dann wird ein $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivariantes lokales System $\mathfrak{E}$ auf $S$ wie folgt definiert. Für jedes offene $U \subseteq S$ bestehe $\mathfrak{E}(U)$ aus lokal konstanten Funktionen $f : p^{-1}(U) \to E$, die von links $\mathcal{G}(\mathbb{Q})$-äquivariant sind. Dann definiert die Abbildung*

$$\omega \mapsto (\tau_\omega(\vec{\gamma}_1, \ldots, \vec{\gamma}_k))(\tilde{g}_\infty, g_f) = g_\infty \omega(\gamma_1 \ldots, \gamma_k)$$

*einen Kokettenisomorphismus zwischen $C^*_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}(C^\infty(\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})) \otimes E)$ und dem de Rham-Komplex von $\mathfrak{E}$ auf der pro-Mannigfaltigkeit $S$. Dabei sind $\vec{\gamma}_i$ die zu $\gamma_i$ gehörenden linksinvarianten Vektorfelder auf $\mathcal{G}(\mathbb{R})$, und $\tilde{g} \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{R})/\mathcal{K}_\infty$ ist das Bild von $g \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$.*

Die Theorie der $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln wird ausführlich in [**Vog81**] behandelt. Nach 1.23 gibt es ein $D$ mit $\mathcal{G}(\mathbb{A}) = \mathcal{G}(\mathbb{Q})\mathfrak{S}(D)$. Sei im Folgenden $D$ so gewählt.

SATZ 4.6. *Zu jedem $\lambda \in \check{\mathfrak{a}}_0$ gibt es eine bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Gewichtsfunktion $\rho_\lambda$ mit*

$$\rho_\lambda(x) \sim \exp(\langle \lambda, \mathrm{H}_0(x)\rangle)$$

*für alle $x \in \mathfrak{S}(D)$, so dass für eine von $A$ abhängige Konstante $c_A$*

$$|A\rho_\lambda| < c_A \rho_\lambda$$

*für alle $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ gilt.*

BEWEIS. [**Fra98**][Proposition 2.1] □

DEFINITION 4.7. (i) *Eine Funktion $\rho : \mathcal{G}(\mathbb{A}) \to \mathbb{R}^+$ heiße zulässig, wenn es zu jedem kompakten $\Omega \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A})$ ein $c_\Omega$ gibt, so dass für alle $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$ und alle $\omega \in \Omega$ gilt*

$$\rho(g\omega) < c_\Omega \rho(g).$$

(ii) *Für ein $\epsilon \in {}^+\check{\mathfrak{a}}_0$ definiere*

$$\omega_1(g) = \log(\rho_\epsilon(g)) \text{ und}$$
$$\omega_n = \omega_1^n.$$

*Dabei wird $\rho_\epsilon$ so gewählt, dass $\rho_\epsilon \geq 3$ gilt.*

BEMERKUNG 4.8. $\omega_1$ ist zulässig und $A(\omega_1)$ ist für alle $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ beschränkt.

Sei so ein $\omega_1$ für den Rest des Kapitels fest gewählt.

DEFINITION 4.9. *Sei $U \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$ offen, $\mathcal{K}$-invariant, $\tilde{U}$ das Urbild von $U$ in $\mathcal{G}(\mathbb{A})$,$\rho_0$ die halbe Summe der Wurzeln von $\mathcal{P}_0$ in $\mathcal{N}_{\mathcal{P}_0}$ und $\rho$ eine zulässige Gewichtsfunktion.*

(i) *$C^\infty_\rho(U)$ bestehe aus denjenigen Funktionen aus $C^\infty(U)$, die die folgende Bedingung erfüllen:*

$$|(Af)(g)| < c_A \rho(g)\rho_{\rho_0}(g)$$

*für alle $g \in \mathfrak{S}(D) \cap \tilde{U}$ und alle $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und eine von $A$ abhängige Konstante $c_A$.*

(ii) *$C^\infty_{\rho+\log}(U)$ bestehe aus denjenigen Funktionen aus $C^\infty(U)$, die die folgende Bedingung für ein passendes $k \in \mathbb{Z}$ erfüllen:*

$$|(Af)(g)| < c_{A,k}\rho(g)\omega_k(g)\rho_{\rho_0}(g)$$

*für alle $g \in \mathfrak{S}(D) \cap \tilde{U}$ und alle $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und eine von $A$ und $k$ abhängige Konstante $c_{A,k}$.*

(iii) *$C^\infty_{\rho-\log}(U)$ wird analog definiert, wobei die obige Bedingung für alle $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein muss.*

(iv) *$C^\infty_{\mathrm{umg}}(U)$ bestehe aus denjenigen Funktionen aus $C^\infty(U)$, für die $\lambda_f \in \check{\mathfrak{a}}$ existieren mit:*

$$|(Af)(g)| < c_A \rho_{\lambda_f}(g)$$

*für alle $g \in \mathfrak{S}(D) \cap \tilde{U}$ und alle $A \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ und eine von $A$ abhängige Konstante $c_A$ .*

BEMERKUNG 4.10. $C^\infty(U)$ und dessen oben definierten Unterräume sind $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Moduln und $\mathcal{H}$-Moduln, falls $U$ $\mathcal{H}$-invariant ist für eine Untergruppe $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$.

Sei $p : \mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}) \to S^*$ die Zusammensetzung der Projektion $\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A}) \to S$ mit der Inklusion $S \to S^*$.

DEFINITION 4.11. *Für $? \in \{-, \mathrm{umg}, \rho, \rho + \log, \rho - \log\}$*[1] *seien $\mathfrak{C}^\infty_? \in \mathrm{Sh}(S^*)$ die Garbifizierungen der Prägarben:*

$$U \mapsto C^\infty_?(p^{-1}(U)).$$

BEMERKUNG 4.12.
(i) $\mathfrak{C}^\infty_?$ sind $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivariante Garben von $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Moduln. Die $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-Äquivarianz ist für jedes $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ gegeben durch Garbenisomorphismen $\mathrm{R}_g : \mathfrak{C}^\infty_? \to g_*\mathfrak{C}^\infty_?$, die für jedes offene $U \subseteq S^*$ ein $f \in \mathfrak{C}^\infty_?(U)$ auf $f(\cdot g^{-1}) \in \mathfrak{C}^\infty_?(Ug^{-1})$ abbilden. Die Stetigkeit von $\mathrm{R}_g$ folgt direkt aus der Definition von $\mathfrak{C}^\infty_?$.
(ii) Sei $U \subseteq S^*$ offen. Dann gilt

$$\mathfrak{C}^\infty_?(U) = \lim_{\overline{V} \subseteq U, V \text{ offen}} C^\infty_?(p^{-1}(V)),$$

also sind es Funktionen $f$ auf $p^{-1}(U)$ mit

$$f_{|p^{-1}(V)} \in C^\infty_?(p^{-1}(V))$$

für alle offenen $V$, deren Abschluss in $U$ enthalten ist.

LEMMA 4.13. *Sei $U \subseteq S^*$ offen und $f \in \mathfrak{C}^\infty_?(U)$. Wenn für jedes $x \in U$ eine Umgebung $V$ existiert, so dass $|f|$ auf $[V]$ von unten beschränkt ist, so ist $f$ eine Einheit in $\mathfrak{C}^\infty_?(U)$. $f$ heiße dann auf $V$ von unten beschränkt.*

BEWEIS. $Af^{-1} = P(A, f)f^{-k}$, wenn $A$ vom Grad $k$ ist. $P$ ist dabei ein Polynom. □

PROPOSITION 4.14. *Die Garben $\mathfrak{C}^\infty_{\mathrm{umg}}$, $\mathfrak{C}^\infty_\rho$ und $\mathfrak{C}^\infty_{\rho\pm\log}$ besitzen auf $S^*$ Zerlegungen der Einheit und sind damit azyklisch.*

BEWEIS. Es genügt, den folgenden Fakt zu zeigen:

FAKT 4.15. *Sei $x \in S^*$ und $U$ eine Umgebung von $x$. Dann gibt es ein nicht negatives $\phi_x \in \mathfrak{C}^\infty(S^*)$, das auf einer Umgebung $V_x$ von $x$ in $U$ von unten beschränkt ist, dessen Träger in $U$ enthalten ist und für das gilt*

$$|A\phi_x(s)| \le c_A$$

*für alle $A \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ und $s \in S$, wobei $c_A$ eine von $A$ abhängige Konstante ist.*

[1] Das erste Aufzählungsglied soll symbolisieren, dass dort nichts steht

Ist nämlich eine Überdeckung

$$S^* = \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U$$

gegeben, wähle ich für jedes $x \in S^*$ ein $U_x \in \mathfrak{U}$ und $\phi_x$, $V_x$ wie oben. Dann gibt es $x_1, \ldots, x_N$ mit

$$S^* = \bigcup_{i=1}^{N} V_{x_i}.$$

Setze dann für jedes $U \in \mathfrak{U}$

$$f_U = \frac{\sum_{i=1,\ U=U_{x_i}}^{N} \phi_{x_i}}{\sum_{i=1}^{N} \phi_{x_i}}.$$

Das liefert die gesuchte Zerlegung der Eins.
Es bleibt uns also noch der Beweis des Fakts: Sei $x$ das Bild von $(y, g)$ in $S^*$, wobei $y \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$ und $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ mit $\mathcal{P} \supset \mathcal{P}_0$. Sei $V$ eine beschränkte Umgebung von $y$ in $\partial_{\mathcal{P}} X^*$, $\Omega \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ eine offene Teilmenge der Form $\mathcal{K}_f g$ mit einer offenen kompakten Untergruppe $\mathcal{K}_f \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass das Bild der Umgebung $U^*(V, \lambda, x_0) \times \Omega$ von $(y, g)$ in $U$ enhalten ist. Nach 1.20 und 1.24 können $V$ und $\mathcal{K}_f$ so klein gewählt werden, dass es eine beschränkte Umgebung $W$ von $\overline{V}$ in $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ gibt, so dass aus $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ und $\gamma(W \times \Omega) \cap (W \times \Omega) \neq \emptyset$ $\gamma \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ folgt. Außerdem kann $\lambda$ so großgewählt werden, dass aus $\gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q})$ und $\gamma(U^*(W, \lambda - \frac{1}{2}, x_0) \times \Omega) \cap (U^*(W, \lambda - \frac{1}{2}, x_0) \times \Omega) \neq \emptyset$ $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ und daher auch $\gamma \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$ folgt. Sei $\chi_\Omega$ die charakteristische Funktion von $\Omega$ und $\xi$ eine nichtnegative $C^\infty$-Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Träger in $\mathbb{R}^+$, welche 1 auf $1+\mathbb{R}^+$ ist. Sei $\beta$ eine nichtnegative $C^\infty$-Funktion auf $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ mit Träger in $V$ mit $\beta(y) = 1$. Sei $f$ auf $X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ gegeben durch

$$f(z, g_f) = \chi_\Omega(g_f) \beta(\pi_{\mathcal{P}}^*(z)) \prod_{\alpha \in \Delta_{\mathcal{P}}} \xi(\langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, z) \rangle - \lambda).$$

Dann gilt für $\gamma \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$

$$f(\gamma z, \gamma g_f) = f(z, g_f).$$

Sei $\phi : \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \backslash X \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\phi(z, g_f) = \sum_{\gamma \in (\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f) \backslash \mathcal{G}(\mathbb{Q})} f(\gamma z, \gamma g_f).$$

Da der Träger von $f$ in $U_{\mathcal{P}}^*(V, \lambda, x_0) \subseteq U_{\mathcal{P}}^*(W, \lambda - \frac{1}{2}, x_0)$ enthalten ist, hat $\phi$ in der obigen Darstellung in einer Umgebung eines jeden Punktes nur einen von 0 verschiedenen Summanden.
Seien für $g \in \mathcal{G}(\mathbb{A})$ folgende Funktionen definiert

$$\tilde{f}(g) = f(q(\bar{g})),$$
$$\tilde{\phi}(g) = \phi(q(\bar{g})).$$

Dabei ist $\bar{g}$ das Bild von $g$ in $\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$. Ich behaupte, dass $A(\tilde{\phi})$ für jedes $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ beschränkt ist. Es genügt, das für $A(\tilde{f})$ zu zeigen. Dazu sei für jedes $\mathcal{Q} \supset \mathcal{P}$ eine Funktion $f_{\mathcal{Q}}$ wie folgt definiert:

$$f_{\mathcal{Q}}(z, g_f) = \chi_{\Omega}(g_f)\beta(\pi^*_{\mathcal{P}}(z)) \prod_{\alpha \in \Delta^{\mathcal{Q}}_{\mathcal{P}}} \xi(\langle \alpha, \mathrm{d}_{\mathcal{P}}(x_0, z)\rangle - \lambda)$$

und

$$\tilde{f}_{\mathcal{Q}}(g) = f_{\mathcal{Q}}(q(\bar{g})).$$

Da $\Omega$ kompakt ist, gibt es eine Konstante $C$ mit

$$||\mathrm{d}_{\mathcal{P}}(q(g_\infty), x_0) - \mathrm{H}_{\mathcal{P}}(g)|| \leq C$$

für $g = (g_\infty, g_f) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}) \times \Omega$. Außerdem gibt es eine Konstante $C'$ mit

$$||p_{\mathfrak{a}_0 \to \mathfrak{a}_0^{\mathcal{P}}}(\mathrm{H}_0(g))|| \leq C'$$

für $g \in q^{-1}(\pi^*_{\mathcal{Q}})^{-1}(V) \times \Omega$. Wir dürfen zudem annehmen, dass die Norm

$$|\langle \alpha, x\rangle| \leq ||x||$$

erfüllt. Sei $T = \lambda + C + C' + 1$. Dann gilt

(i) $\tilde{f} = \tilde{f}_{\mathcal{Q}}$ auf $\mathfrak{S}(\mathcal{Q}, D, T)$ und
(ii) $\tilde{f}_{\mathcal{Q}}$ ist linksinvariant unter $(\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}\mathcal{N}_{\mathcal{P}})(\mathbb{R})$.

Wegen des ersten Punktes genügt es, eine Konstante $C_{A,\mathcal{Q}}$ mit

$$|(A\tilde{f}_{\mathcal{Q}})|(g) \leq C_{A,\mathcal{Q}} \tag{4.1}$$

für

$$g \in (\mathfrak{S}(\mathcal{Q}, D, T) - \bigcup_{\mathcal{Q}' \subseteq \mathcal{Q}} \mathfrak{S}(\mathcal{Q}', D, T)) \cap q^{-1}(\pi^*_{\mathcal{Q}})^{-1}(V) \times \Omega \tag{4.2}$$

zu finden. (4.1) ist aber unter $(\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}\mathcal{N}_{\mathcal{P}})(\mathbb{R})$ linksinvariant und das Bild von (4.2) in $(\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}\mathcal{N}_{\mathcal{P}})(\mathbb{R})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$ ist kompakt. Daraus folgt die Behauptung. □

## 2. Die Berechnung der lokalen Kohomologie

Sei $\mathfrak{E}$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung von $\mathcal{G}$. Sei $x$ das Bild von $(y, g) \in X^* \times \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ in $S^*$. Wir wollen die Kohomologie von

$$(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log})_x \otimes \mathfrak{E} \tag{4.3}$$

berechnen. Es genügt anzunehmen, dass $g$ das neutrale Element ist, und $x \in \partial_{\mathcal{P}} X^*$ für eine standardparabolische Untergruppe $\mathcal{P}$ gilt. Es ist notwendig, die Berechnung auf eine Art durchzuführen, die es erlaubt, eine Wirkung von $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$ auf (4.3) zu beschreiben. Dabei ist $\mathcal{S}$ das Urbild von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \subseteq (\mathcal{P}/\mathcal{N}_{\mathcal{P}})(\mathbb{A}_f)$ in $\mathcal{P}(\mathbb{A}_f)$. $\mathcal{S}$ ist in dem Stabilisator von $x$ enhalten.

Sei $\mathfrak{p}$ die Lie-Algebra von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, und sei $\mathfrak{n}$ die Lie-Algebra dessen unipotenten Radikals. Wir setzen $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_{\mathcal{P}}$ und $\check{\mathfrak{a}} = \check{\mathfrak{a}}_{\mathcal{P}}$. Sei $\rho = \rho_{\mathcal{P}}$, dies stimmt mit der Projektion von $\rho_0$ nach $\check{\mathfrak{a}}$ überein.

Für jeden rationalen Charakter $\chi$ der algebraischen Gruppe $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ sei ein Homomorphismus $\tilde{\chi}: \mathcal{S} \to \mathbb{Q}^*$ als die Verknüpfung der Projektion $\mathcal{S} \to \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q})$ mit dem durch $\chi$ gegebenen Homomorphismus $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^*$ definiert. Wenn $V$ eine endlichdimensionale algebraische Darstellung von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ ist, wird mit $V_\chi$ der Unterraum bezeichnet, auf dem $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ durch die Multiplikation mit $\chi$ wirkt. Es ist bekannt, dass $V$ sich als die Summe solcher Unterräume darstellen lässt. Wir können und werden die Gruppe der rationalen Charaktere von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ mit einem Gitter in $\check{\mathfrak{a}}$ identifizieren. Das Resultat der Berechnungen ist das folgende

THEOREM 4.16. (i) *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^p_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}((\mathfrak{C}^\infty_{umg})_x \otimes \mathfrak{E}) \cong \mathrm{H}^p_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}(\mathfrak{C}^\infty_x \otimes \mathfrak{E}) \cong \mathrm{H}^p_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E}). \tag{4.4}$$

*Dieser Isomorphismus ist $\mathcal{S}$-äquivariant, wenn $s \in \mathcal{S}$ durch die Multiplikation mit $\chi(s)$ auf $\mathrm{H}^p_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E})_\chi$ wirkt.*

(ii) *Der Morphismus*

$$(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda+\log})_x \to \mathfrak{C}^\infty_x$$

*definiert eine injektive Abbildung auf der $(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)$-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathfrak{E}$, und die Verknüpfung dieser Abbildung mit* (4.4) *ist ein ein Isomorphismus auf den Unterraum*

$$\bigoplus_{\chi \in \overline{^+\check{\mathfrak{a}}}-\lambda-\rho} \mathrm{H}^p_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E})_\chi, \tag{4.5}$$

*wobei die Summe über alle algebraischen Charaktere von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ gebildet wird, die die angegebenen Forderungen erfüllen.*

(iii) *Der Morphismus*

$$(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda-\log})_x \to \mathfrak{C}^\infty_x$$

*definiert eine injektive Abbildung auf der $(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)$-Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathfrak{E}$, und die Verknüpfung dieser Abbildung mit* (4.4) *ist ein Isomorphismus auf den Unterraum*

$$\bigoplus_{\chi \in {}^+\check{\mathfrak{a}}-\lambda-\rho} \mathrm{H}^p_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E})_\chi. \tag{4.6}$$

Unmittelbar aus dem obigen Theorem und Theorem 3.12 folgt das

KOROLLAR 4.17. *Seien $M^\pm$ Systeme endlicher Mengen $M^\pm_{\mathcal{P}}$ von Charakteren für standardparabolische Untergruppen $\mathcal{P}$ von $\mathcal{G}$. Dabei besteht jedes $M^\pm_{\mathcal{P}}$ aus den Gewichten von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, die in* (4.5) *bzw.* (4.6) *auftreten. Sei $N$ auch ein System endlicher Mengen $N_{\mathcal{P}}$ von Charakteren. Dabei bestehe $N_{\mathcal{P}}$ aus den Gewichten von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, die in* (4.4), *aber nicht in* (4.5) *und* (4.6) *auftreten. Wenn $C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})} = C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})}(\mathfrak{C}^\infty \otimes \mathfrak{E})$ und $C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm} = C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})}(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda\pm\log} \otimes \mathfrak{E})$ die zugehörigen Komplexe der $(\mathfrak{g},\mathcal{K})$-Garben auf $S^*$ sind, dann gilt $C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm} \in \mathrm{D}^b_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_{M^\pm}$ und*

$C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})} \in \mathrm{D}^b_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_{M^\pm \cup N}$ *sowie* $C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})}/C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm} \in \mathrm{D}^b_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_N$. *Außerhalb von* $\partial S^*$ *ist* $C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})}/C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm}$ *azyklisch. Das Theorem 3.12 ist dann auf* $C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})}/C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm}$ *anwendbar und ergibt* $T_{M^\pm}(C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})}/C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm}) = 0$, *also* $T_{M^\pm} C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K})} = C^\bullet_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}),\pm}$.

Der erste Schritt in der Berechnung von (4.3) ist,

$$(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log})_x \tag{4.7}$$

als einen induzierten $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Modul auszudrücken. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, die unter der Wirkung von $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{R})$ von links invariant ist, sei $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(U)$ die Menge aller $C^\infty$-Funktionen $f$ auf $U$, die $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{K}_\infty$-endlich von rechts sowie $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$-endlich von links sind und die Ungleichung

$$|Af(g)| \leq c_{A,k,f}\,\rho_{\lambda+\rho_0}(g)\omega_1(g)^k \tag{4.8}$$

für alle $g \in U$ und $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{p})$ erfüllen. In der Definition von $C^\infty_{\rho_\lambda + \log}(U)$ wird verlangt, dass die Abschätzung für eine geeignete ganze Zahl $k$ gilt, die von $f$ abhängt, aber unabhängig von $A$ sein muss. In der Definition von $C^\infty_{\rho_\lambda - \log}(U)$ soll (4.8) dagegen für alle $k \in \mathbb{Z}$ gelten.
Es ist leicht zu sehen, dass $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(U)$ ein $(\mathfrak{p}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Modul ist mit $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty} = \mathcal{K}_\infty \cap \mathcal{P}(\mathbb{R})$, und dass die Einschränkung auf eine Teilmenge von $U$, die immer noch unsere Voraussetzungen erfüllt, ein $(\mathfrak{p}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Modulmorphismus ist. Damit kann man den $(\mathfrak{p}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Modul

$$C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log, x, \mathcal{P}} = \operatorname{colim} C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V}) \tag{4.9}$$

definieren, wobei der Limes über reelle Zahlen $T \to \infty$ und alle Umgebungen $V$ von $y$ in $\partial_\mathcal{P} X^*$ genommen wird und $W_{T,V}$ das Urbild von $U^*(V, T, x_0)$ in $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist. Wenn $\gamma \in \mathcal{S}$ und $\phi$ zu (4.9) gehört, können wir $T, V$ und $f \in C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V})$ so wählen, dass das Bild von $f$ in (4.9) $\phi$ ist. Wegen der $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$-Endlichkeit von $f$ gibt es eine offene Untergruppe $\Omega \subseteq \mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{A}_f) \cap \mathcal{K}_f$, so dass $f$ unter der $\Omega \cap \mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q})$-Wirkung von links invariant ist. Wir wählen $\tilde{\gamma} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ mit $\gamma \in \tilde{\gamma}\Omega$, ein reelles $\tilde{T}$ mit $\tilde{\gamma} W_{T,V} \subseteq W_{\tilde{T},V}$ und definieren $\gamma\phi$ als das Bild in (4.9) der Einschränkung auf $W_{\tilde{T},V}$ von

$$f(\tilde{\gamma}^{-1}\cdot). \tag{4.10}$$

Es ist leicht zu sehen, dass dies von der Wahl von $\Omega$, $f$, $\tilde{\gamma}$ und $\tilde{T}$ unabhängig ist und eine Wirkung von $\mathcal{S}$ auf (4.9) definiert. Diese Konstruktion definiert ebenfalls eine Wirkung von $\mathcal{S}$ auf

$$\operatorname*{colim}_{T \to \infty} C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V}). \tag{4.11}$$

Bezeichne mit $\operatorname{Ind}^{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}$ den Funktor von der Kategorie der $(\mathfrak{p}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Moduln in die Kategorie der $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Moduln, der zum Einschränkungsfunktor rechtsadjungiert ist. Der $\operatorname{Ind}^{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})} V$ zugrundeliegende Vektorraum besteht aus Funktionen $f : \mathcal{K}_\infty \to V$, deren Bilder in einem endlichdimensionalen Unterraum von $V$ enhalten sind, auf dem $\mathcal{K}_\infty$ glatt wirkt, und die für alle $\kappa \in \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}$ und $k \in \mathcal{K}_\infty$

$$f(\kappa k) = \kappa f(k) \tag{4.12}$$

erfüllen. Aus der Endlichkeitsbedingung folgt, dass $\operatorname{Ind}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}^{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}$ mit direkten Limites kommutiert.

Proposition 4.18. *Wir haben einen kanonischen Isomorphismus*

$$(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log})_x \cong \operatorname{Ind}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}^{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)} C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log, x, \mathcal{P}} \tag{4.13}$$

*zwischen* $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$*-Moduln mit* $\mathcal{S}$*-Wirkung.*

Beweis. Sei $\phi \in (\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log})_x$. Dann gibt es eine Umgebung $W$ von $x$ in $S^*$ und einen Schnitt $f$ der Garbe $\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}$ auf $W$, so dass $\phi$ das Bild von $f$ ist. Durch eine eventuelle Verkleinerung von $W$ kann die Existenz einer offenen Untergruppe $\Omega \subseteq \mathcal{K}_f$ angenommen werden, derart dass f durch eine $\mathcal{K}_\infty$-endliche $\Omega$-invariante $C^\infty$-Funktion $\tilde{f}$ auf dem Urbild $\tilde{W}$ von $W$ in $\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$ gegeben ist. Wenn $T$ großgenug und $V$ klein genug sind, dann ist $W_{T,V}\mathcal{K}_\infty$ in $\tilde{W}$ enthalten. Für $k \in \mathcal{K}_\infty$ definiert die Einschränkung $f_k$ von $\tilde{f}(\cdot k)$ auf $W_{T,V}$ ein Element von $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V})$. Die $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$-Endlichkeit von links von $f_k$ folgt daraus, dass es unter $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \Omega$ invariant ist. Die anderen Anforderungen folgen leicht aus der Definition der Garbe $\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}$. Sei $\psi(k)$ das Bild von $f_k$ im induktiven Limes (4.9). Es ist leicht zu sehen, das dies unabhängig von den getroffenen Wahlen ist, und dass die Abbildung $\psi$ ein Element der rechten Seite von (4.13) definiert.

Umgekehrt sei $\psi$ ein Element der rechten Seite. Da der Induktionsfunktor mit direkten Limites kommutiert, gibt es eine Zahl $T$, eine Umgebung $V$ von $y$ in $\partial_\mathcal{P} X^*$ und eine Funktion

$$\tilde{\psi} \in \operatorname{Ind}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}^{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)} C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V}),$$

so dass das Bild von $\tilde{\psi}(k)$ im Kolimes (4.9) $\psi(k)$ ist. Da die lineare Hülle des Bildes von $\tilde{\psi}$ endlichdimensional ist, und da die Elemente von $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V})$ $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \mathcal{K}_f$-endlich sind, gibt es eine offene Untergruppe $\Omega \subseteq \mathcal{K}_f$, so dass $\tilde{\psi}(k)$ für jedes $k \in \mathcal{K}_\infty$ von links $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q}) \cap \Omega$-invariant ist. Wegen (1.20), der Diskretheit von $\mathcal{L}(\mathbb{Q})$ in $\mathcal{L}(\mathbb{A})/\mathcal{A}_\mathcal{P}(\mathbb{R})$ und der Eigentlichkeit der Abbildung $\partial_\mathcal{P} X^* \times (\mathcal{L}(\mathbb{R})/\mathcal{A}_\mathcal{P}(\mathbb{R})) \to \partial_\mathcal{P} X^* \times \partial_\mathcal{P} X^*$, $(x, g) \mapsto (x, gx)$, können wir annehmen, dass $T$ so großund $V$ und $\Omega$ so klein sind, dass die Projektion von

$$\big(\Omega \cap \mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{Q})\big) \setminus W_{T,V} K_\infty \times \Omega$$

auf sein Bild $\tilde{W}$ in $\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$ eins zu eins ist. Dann gibt es eine eindeutige Funktion $f$ auf $\tilde{W}$ mit $f(z) = \tilde{\psi}(k)(\zeta)$, wobei $z \in \tilde{W}$ das Bild von $\zeta k k'$ ist mit $\zeta \in W_{T,V}$, $k \in \mathcal{K}_\infty$ und $k' \in \Omega \subseteq \mathcal{K}_f$. Es gibt eine offene Umgebung $W$ von $x$ in $S^*$, so dass $\tilde{W}$ das Urbild von $W$ in

$\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})$ ist. Sei $\phi$ das Bild von $f \in \mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W)$ in $(\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda \pm \log})_x$. Es ist nicht schwer zu überprüfen, dass $\phi$ nur von $\psi$ abhängt, und dass die von uns konstruierten Morphismen für die beiden Richtungen von (4.13) invers zueinander sind, und dass sie $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Modulmorphismen mit einer $\mathcal{S}$-Wirkung sind. □

Aus der Frobenius-Reziprozität folgt die Existenz eines kanonischen Isomorphismus

$$\mathrm{H}^*_{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}\big(\mathrm{Ind}^{(\mathfrak{g},\mathcal{K}_\infty)}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})} V \otimes \mathfrak{E}\big) \cong \mathrm{H}^*_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(V \otimes \mathfrak{E}\big),$$

der die Wirkung von $\mathcal{S}$ erhält. Zusammen mit der Proposition 4.18 und dem Umstand, dass die $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Kohomologie mit direkten Limites kommutiert, reduziert das unsere Untersuchung der $(\mathfrak{g}, \mathcal{K}_\infty)$-Kohomologie von (4.3) auf die Untersuchung der $(\mathfrak{p}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Kohomologie von $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V}) \otimes \mathfrak{E}$. Als einen ersten Reduktionsschritt werden wir die $\mathcal{N}_\mathcal{P}$-Richtung los. Für jede Untergruppe $\mathcal{H}$ von $\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{R})$, bezeichnen wir mit $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{H}\backslash W_{T,V})$ den Unterraum von $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V})$, der aus allen Funktionen besteht, die von links $\mathcal{H}$-invariant sind.

PROPOSITION 4.19. *Für jede beschränkte offene Teilmenge $V \subseteq X^*_\mathcal{P}$ und jede reelle Zahl $T$ definiert die Inklusion*

$$C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_\mathcal{P}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \subseteq C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V}) \tag{4.14}$$

*einen Isomorphismus auf der $(\mathfrak{p}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Kohomologie mit Koeffizienten in einer algebraischen Darstellung $\mathfrak{F}$ von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

BEWEIS. Sei $\mathfrak{n}$ die Lie-Algebra von $\mathcal{N}_\mathcal{P}$, und sei $\mathfrak{l} \cong \mathfrak{p}/\mathfrak{n}$ die Lie-Algebra von $\mathcal{L}$. Wir haben eine Hochschild-Serre-Spektralsequenz

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p_{(\mathfrak{l},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(\mathrm{H}^q_\mathfrak{n}(\mathfrak{V})\big) \Rightarrow \mathrm{H}^{p+q}_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}(\mathfrak{V}).$$

Ein Beweis der Existenz der Hochschild-Serre-Spektralsequenz findet sich zum Beispiel in [**Fra98**][Appendix A]. Deshalb reicht es aus, die analoge Behauptung für die $\mathfrak{n}$-Kohomologie zu beweisen. Da die einzige irreduzible Darstellung einer unipotenten algebraischen Gruppe trivial ist, gibt es eine Filtrierung von $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{n}$-invariante Unterräume mit eindimensionalen Filtrierungsquotienten, auf denen $\mathfrak{n}$ trivial wirkt. Deshalb genügt es zu beweisen, dass (4.14) einen Isomorphismus auf der $\mathfrak{n}$-Kohomologie ohne Koeffizienten definiert.

Sei $\mathcal{N}_0 = \{0\}$. Wenn $\mathcal{N}_i$ definiert ist, sei $\mathcal{N}_{i+1}$ das Urbild in $\mathcal{N}_\mathcal{P}$ des Zentrums von $\mathcal{N}_\mathcal{P}/\mathcal{N}_i$. Alle Untergruppen $\mathcal{N}_i$ sind zusammenhängende algebraische Normalteiler von $\mathcal{N}_\mathcal{P}$, und es gibt ein $i$ mit $\mathcal{N}_i = \mathcal{N}_\mathcal{P}$. Es genügt also zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl $i$

$$C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{i+1}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \subseteq C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_i(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \tag{4.15}$$

einen Isomorphismus auf der $\mathfrak{n}$-Kohomologie induziert. Sei $\mathfrak{n}_i$ die Lie-Algebra und $N_i$ die Menge der reellen Punkte von $\mathcal{N}_i$. Durch die Anwendung der Hochschild-Serre-Spektralsequenz, und weil $\mathfrak{n}_i$ auf den beiden

Räumen aus (4.15) trivial wirkt, wird ersichtlich, dass es zu zeigen reicht, dass (4.15) einen Isomorphismus auf der $\mathfrak{n}_{i+1}/\mathfrak{n}_i$-Kohomologie definiert. Es genügt also zu zeigen, dass für jedes ganze $i \geq 0$ und für beliebige offene Untergruppen $\Omega \subseteq \mathcal{K}_f$ die Behauptung für die Inklusion

$$C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\Gamma N_{i+1} \backslash W_{T,V}) \subseteq C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\Gamma N_i \backslash W_{T,V}) \tag{4.16}$$

gilt, wobei $\Gamma = \mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \cap \Omega$ ist. Dem ist so, weil die Einbettung (4.15) der direkte Limes der Einbettungen (4.16) über alle offene Untergruppen $\Omega \subseteq \mathcal{K}_f$ ist. Sei

$$\begin{aligned}(4.17) \quad \mathfrak{X} = \big\{ f \in C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\Gamma N_i \backslash W_{T,V}) \bigm| \\ \int_{N_{i+1}/(\Gamma \cap N_{i+1}) N_i} f(np)\, dn = 0 \text{ für alle } p \in W_{T,V} \big\},\end{aligned}$$

dann ist $\mathfrak{X}$ ein $\mathfrak{n}_{i+1}/\mathfrak{n}_i$-Untermodul des größeren Unterraums aus (4.16), der diese Einbettung spaltet. Es reicht zu zeigen, dass die $\mathfrak{n}_{i+1}/\mathfrak{n}_i$-Kohomologie von $\mathfrak{X}$ verschwindet. Sei $\nu_1, \ldots, \nu_n$ eine orthonormale Basis von $V = \mathfrak{n}_{i+1}/\mathfrak{n}_i$, ausgestattet mit einer euklidischen Norm, die unter $\mathrm{Ad}(\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$ invariant ist. Es reicht zu beweisen, dass $\Delta = \sum_{i=1}^n \nu_i^2$ einen Automorphismus von $\mathfrak{X}$ definiert. Das ist so, da $\Delta$ den trivialen Endomorphismus der Kohomologie eines beliebigen $\mathfrak{n}_{i+1}/\mathfrak{n}_i$-Moduls induziert. Im Rest des Beweises wird gezeigt, dass $\Delta$ einen invertierbaren Endomorphismus von (4.17) definiert. Damit wird die Proposition bewiesen sein.

Sei $\mathfrak{Z}$ der Raum aller $C^\infty$-Funktionen $f$ auf $\Gamma N_i \backslash W_{T,V}$ die

$$\int_{N_{i+1}/(\Gamma \cap N_{i+1}) N_i} f(np)\, dn = 0$$

für alle $p \in W_{T,V}$ erfüllen. Wir werden zeigen, dass $\Delta$ einen Automorphismus von $\mathfrak{Z}$ definiert. Das ist eine einfache Folgerung aus der Theorie der multidimensionalen Fourier-Reihen. Für jedes $p \in W_{T,V}$ besitzt demnach der Laplace-Operator auf dem Raum der $C^\infty$-Funktionen mit verschwindenden Mittelwerten auf dem Torus $\big(p^{-1}\Gamma p \cap N_{i+1}\big) N_i \backslash N_{i+1}$ eine Inverse, und diese Inverse kann auf $f(p\cdot)$, das eine Funktion auf diesem Torus ist, angewendet werden. Wir erhalten die Umkehrungsformel

(4.18)

$$(\Delta^{-1} f)(p) = - \sum_{\xi \in X^* - \{0\}} \frac{1}{|\mathrm{Ad}(p)^* \xi|^2} \int_{V/X} f(\exp(n)p) \exp\big(i\xi(n)\big)\, dn.$$

Dabei wurden folgende Bezeichnungen verwendet: $X \subseteq V$ ist das Urbild von $(\Gamma \cap N_{i+1}) N_i / N_i$ unter der Exponentialabbildung $\exp: \ V = \mathfrak{n}_{i+1}/\mathfrak{n}_i \to N_{i+1}/N_i$, die Norm auf $V^*$ ist dual zu der Norm aus der Definition von $\Delta$, und $X^*$ ist das duale Gitter von $X$, das aus allen $\xi \in V^*$ mit $\xi(X) \subseteq 2\pi\mathbb{Z}$ besteht. Das Lebesgue-Maßauf $V$ wird mit $\int_{V/X} dn = 1$ normalisiert. Die Konvergenz von (4.18) für eine $C^\infty$-Funktion mit verschwindendem nulltem Fourier-Koeffizienten ist wohlbekannt und kann auf ähnliche Weise hergeleitet werden, wie die Abschätzung, die weiter unten für die Behandlung von $\mathfrak{Z}_k$ benutzt wird. Sei $\mathfrak{Z}' \subseteq \mathfrak{Z}$ der Unterraum aller $f \in \mathfrak{Z}$, die $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}$-endlich sind in Bezug auf die Wirkung dieser Gruppe durch Translationen von rechts auf $\mathfrak{Z}$. Da in der Definition von $\Delta$ eine $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}$-invariante Metrik auf $V$ verwendet wurde, kommutiert es mit $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}$. Deshalb kommutiert auch $\Delta^{-1}$ mit $\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}$ und lässt $\mathfrak{Z}'$ invariant.

Für eine ganze Zahl $k$ sei $\mathfrak{Z}_k \subseteq \mathfrak{Z}'$ der Unterraum aller Funktionen $f$, die einer Abschätzung in der Art von (4.8) für jedes $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{n}_{i+1})$ genügen. Wir behaupten, $\mathfrak{Z}_k$ ist $\Delta^{-1}$-invariant. Da $\Delta$ und $\mathfrak{U}(\mathfrak{n}_{i+1})$ kommutieren, reicht es, (4.8) für $\Delta^{-1} f$ im Falle $A = 1$ zu zeigen. Aus der elementaren Theorie der Fourier-Reihen folgt, dass der $\xi$-te Fourier-Koeffizient in (4.18) durch

$$\int_{V/X} f(\exp(n)p) \exp\bigl(i\xi(n)\bigr)\, dn = (-1)^l \left|\mathrm{Ad}(p)^*\xi\right|^{-2l} \int_{V/X} (\Delta^l f)(\exp(n)p) \exp\bigl(i\xi(n)\bigr)\, dn$$

gegeben ist, und (4.18) wird zu

$$(-1)^{l+1} \sum_{\xi \in X^* - \{0\}} \frac{1}{\left|\mathrm{Ad}(p)^*\xi\right|^{2l+2}} \int_{V/X} (\Delta^l f)(\exp(n)p) \exp\bigl(i\xi(n)\bigr)\, dn.$$

Nach der Definition von $W_{T,V}$ und der Beschränktheit von $V$ ist die Menge

$$\{\mathrm{Ad}(p)^{-1} | p \in W_{T,V}\}$$

der Endomorphismen von $\mathfrak{n}$ beschränkt. Deshalb gibt es eine endliche Konstante $C$ mit der Eigenschaft, dass die Norm der letzten Summe

$$\leq \sum_{\xi \in X^* - \{0\}} \frac{C}{|\xi|^{2l+2}} \max_{n \in N_{i+1}} \left|\Delta^l f(pn)\right| \leq \Bigl( \sum_{\xi \in X^* - \{0\}} \frac{C'}{|\xi|^{2l+2}} \Bigr) \cdot \rho_{\lambda+\rho_o}(p) \omega_1(p)^k,$$

wobei sich die letzte Abschätzung aus der Anwendung von (4.8) auf $\Delta^l f$ ergibt. Wenn $2l + 2 > \dim(V)$ gilt, dann konvergiert die Summe in den Klammern und wir erhalten

$$\left|\Delta^{-1} f(p)\right| \leq C'' \rho_{\lambda+\rho_o}(p) \omega_1(p)^k$$

mit einer nur von $f$ abhängigen Konstanten. Das beweist unsere Behauptung, dass $\mathfrak{Z}_k$ $\Delta^{-1}$-invariant ist.

Sei $\mathfrak{Z}_{k,l}$ die Menge aller $f \in \mathfrak{Z}$ mit $Af \in \mathfrak{Z}_k$ für alle $A \in \mathfrak{U}^{\leq l}(\mathfrak{p})$. Aus $[\mathfrak{p}, \mathfrak{n}_{k+1}] \subseteq \mathfrak{n}_{k+1}$ folgt $\mathfrak{U}^{\leq l}(\mathfrak{p})\mathfrak{U}(n_{k+1}) = \mathfrak{U}(n_{k+1})\mathfrak{U}^{\leq l}(\mathfrak{p})$. Zusammen mit dem Fakt, dass $Af \in \mathfrak{Z}_k$ per definitionem $\mathfrak{U}(n_{k+1})$-invariant ist, beweist dies die $\mathfrak{U}(n_{k+1})$-Invarianz von $\mathfrak{Z}_{k,l}$. Wir behaupten, dass $\mathfrak{Z}_{k,l}$ $\Delta^{-1}$-invariant ist. Dies wird durch vollständige Induktion bewiesen.

Dabei ist der Fall $l = 0$ die im letzten Abschnitt bewiesene Behauptung. Sei $\pi \in \mathfrak{p}$, dann folgt wegen $[\pi, \mathfrak{n}_{k+1}] \subseteq \mathfrak{n}_{k+1}$

$$\pi\Delta = \Delta\pi + N$$

mit einem von $\pi$ abhängigen $N \in \mathfrak{U}^{\leq 2}(\mathfrak{n}_{k+1})$. Es folgt, dass

$$\pi\Delta^{-1} f = \Delta^{-1}\pi f - \Delta^{-1} N \Delta^{-1} f.$$

Nach Induktionsvoraussetzung und der $N$-Invarianz von $\mathfrak{Z}_{k,l}$, lässt der Operator im Subtrahend auf der rechten Seite $\mathfrak{Z}_{k,l}$ invariant. Wenn $f$ zu $\mathfrak{Z}_{k,l+1}$ gehört, dann ist der erste Summand nach der Induktionsvoraussetzung auch in $\mathfrak{Z}_{k,l}$. Da dies für alle $\pi \in \mathfrak{p}$ gilt, ist $\mathfrak{Z}_{k,l+1}$ $\Delta^{-1}$-invariant. Sei $\mathfrak{Y}_k$ die Menge aller $f \in \mathfrak{Z}'$, die (4.8) für alle $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{p})$ erfüllen. Es gilt $\mathfrak{Y}_k = \bigcap_{l=0}^{\infty} \mathfrak{Z}_{k,l}$. Daraus resultiert, dass $\mathfrak{Y}_k$ $\Delta^{-1}$-invariant ist. Die gleiche Behauptung folgt auch für $\mathfrak{X}$, weil $\mathfrak{X} = \bigcap_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{Y}_k$, wenn $C^\infty_{\rho_\lambda - \log}$ betrachtet wird, und $\mathfrak{X} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{Y}_k$, wenn $C^\infty_{\rho_\lambda, + \log}$ betrachtet wird. Unsere Behauptung über (4.17) folgt daraus. $\square$

Nach der letzten Proposition haben wir

$$\begin{aligned}(4.19)\quad \mathrm{H}^*_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{E}\big) &\cong \\ &\cong \mathrm{H}^*_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(W_{T,V}) \otimes \mathfrak{E}\big).\end{aligned}$$

Dieser Isomorphismus erhält die $\mathcal{S}$-Wirkung, da, wie man einfach sieht, der erste Raum in (4.14) $\mathcal{S}$-invariant ist. Da $\mathfrak{n}$ auf diesem Raum trivial operiert, haben wir

$$\mathrm{H}^*_{\mathfrak{n}}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{E}\big) \cong \mathrm{H}^*_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E}) \otimes C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}).$$

Diesen Isomorphismus gibt es auch auf dem Niveau der kanonischen Kokettenkomplexe, und $\mathrm{H}^*_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E})$ spaltet $C^*_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E})$ auf eine $\mathcal{L}$-äquivariante Weise, da dieser Kokettenkomplex endlichdimensional ist und $\mathcal{L}$ reduktiv ist. Daher entartet die Hochschild-Serre-Spektralsequenz zu einem $\mathcal{S}$-äquivariant spaltenden Komplex

$$\begin{aligned}(4.20)\quad \mathrm{H}^r_{(\mathfrak{p},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{E}\big) &\cong \\ &\cong \bigoplus_{r=p+q} \mathrm{H}^p_{(\mathfrak{l},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathrm{H}^q_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{E})\big).\end{aligned}$$

Zur Berechnung der $(\mathfrak{l}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Kohomologie wird die Hochschild-Serre-Spektralsequenz

$$\begin{aligned}(4.21)\quad E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p_{(\mathfrak{m},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\Big(H^q_{\mathfrak{a}}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big)\Big) \\ \to \mathrm{H}^{p+q}_{(\mathfrak{l},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big)\end{aligned}$$

verwendet.

Es reicht, den Fall zu betrachten, bei dem $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ auf $\mathfrak{F}$ über einen algebraischen Charakter $\chi$ wirkt. Sei $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})^o$ die Einszusammenhangskomponente von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$, und sei $\mathcal{S}^o$ das Urbild dieser Gruppe unter dem kanonischen Morphismus $\mathcal{S} \to \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$.

Proposition 4.20. *Es wirke $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ auf $\mathfrak{F}$ durch einen algebraischen Charakter $\chi$. Dann gibt es einen $(\mathfrak{m}, \mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})$-Modulisomorphismus*
(4.22)

$$\mathrm{H}^0_{\mathfrak{a}}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big) \cong \begin{cases} C^\infty\big(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})^o\backslash W_{-\infty,V}\big) \otimes \mathfrak{F} \\ 0, \end{cases}$$

*wobei der erste Fall genau dann auftritt, wenn:*

- *$C^\infty_{\rho_\lambda + \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V})$ betrachtet wird, und $\chi \in \overline{{}^+\check{\mathfrak{a}}} - \lambda - \rho$.*
- *$C^\infty_{\rho_\lambda - \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V})$ betrachtet wird, und $\chi \in {}^+\check{\mathfrak{a}} - \lambda - \rho$.*

*Die höhere $\mathfrak{a}$-Kohomologie verschwindet.*
*Der Isomorphismus (4.22) kommutiert mit der Einschränkung auf $W_{T',V}$ mit $T' > T$. Daher definiert er einen Isomorphismus von*

$$\operatorname*{colim}_T \mathrm{H}^q_{\mathfrak{a}}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big) \cong \mathrm{H}^q_{\mathfrak{a}}\big(\operatorname*{colim}_T C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big) \tag{4.23}$$

*mit der rechten Seite von* (4.22). *Die Gruppe $\mathcal{S}^o$ wirkt auf* (4.23) *durch die Multiplikation mit $\tilde{\chi}$.*

Korollar 4.21. *Unter den gleichen Voraussetzungen gibt es einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathrm{H}^q_{\mathfrak{a}}\big(C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big) \cong \begin{cases} \mathrm{H}^*_{\mathrm{dR}}(V, \mathfrak{F}) \\ 0, \end{cases} \tag{4.24}$$

*wobei die beiden Fälle sich genauso wie in* (4.22) *unterscheiden. Die de Rham-Kohomologie wird mit Hilfe des de Rahm-Komplexes beschränkter Formen auf der relativ kompakten Teilmenge $V$ von $\partial_{\mathcal{P}} X^*$ berechnet. Das gleiche gilt für den Kolimes von* (4.24) *für $T \to \infty$, und die Gruppe $\mathcal{S}$ wirkt auf diesem Kolimes durch die Multiplikation mit $\tilde{\chi}$.*

Beweis. Die Existenz des Isomorphismus (4.24) folgt aus der Tatsache, dass

$$C^*_{(\mathfrak{m},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(C^\infty(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})^o\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big)$$

mit dem de Rham-Komplex auf $V$ mit Koeffizienten im von $\mathfrak{F}$ definierten lokalen System identifiziert werden kann.
Die Proposition enthält bereits die Behauptung über die Wirkung von $\mathcal{S}^o$, aber es ist noch notwendig, das Gleiche für alle Elemente von $\mathcal{S}$ zu zeigen. Da ein beliebiges Element aus $\mathcal{S}$ sich als das Produkt von einem Element aus $\mathcal{S}^o$ und einem 2-Torsionselement darstellen lässt, kann $s^2 = 1$ angenommen werden. Dann existiert ein Element $k$ aus

$\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}$, so dass die Bilder von $s$ und $k$ in $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ übereinstimmen und zu $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ gehören. Es ist leicht zu sehen, dass $k$ auf $\mathfrak{F}$ durch die Multiplikation mit $\tilde{\chi}(s)$ wirkt. $s$ wirkt auf (4.11) durch die Multiplikation von rechts mit der Inversen einer rationalen Approximation von $s$. Für die folgende Berechung sei diese Wirkung mit $R_s$ bezeichnet. Da hier die Teilmengen des Quotienten $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ von $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ durch $\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ betrachtet werden, stimmen die Pullbacks mit der linken und rechten Multiplikationen mit Elementen aus $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ überein. Es bezeichne $L_{k^{-1}}$ den Pullback der linken Multiplikation mit $k^{-1}$ und $\mathfrak{k}_{\mathcal{P}}$ das Bild von $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{p}$ in $\mathfrak{m}$. Dann gelten für jedes Element $f$ aus

$$C^p_{(\mathfrak{l},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}\big(\operatorname*{colim}_{T\to\infty} C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}) \otimes \mathfrak{F}\big) \cong$$
$$\cong \Big(\operatorname*{colim}_{T\to\infty} C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}\big(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V}\big) \otimes \operatorname{Hom}\big(\Lambda^p(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}_{\mathcal{P}}), \mathfrak{F}\big)\Big)^{\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty}}$$

die folgenden Gleichungen:

$$(R_s \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{V}})f = (L_{k^{-1}} \otimes \mathrm{id}_{\mathfrak{V}})f = \tilde{\chi}(s)(L_{k^{-1}} \otimes [k^{-1}]_{\mathfrak{V}})f = \tilde{\chi}(s),$$

wobei $\mathfrak{V}$ als eine Abkürzung für $\operatorname{Hom}(\Lambda^p(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}_{\mathcal{P}}), \mathfrak{F})$ verwendet wurde. Die dritte der Gleichungen folgt aus der Definition von $C^p_{(\mathfrak{l},\mathcal{K}_{\mathcal{P},\infty})}$. Die Zweite folgt aus der Tatsache, dass $k^{-1}$, dessen Projektion auf $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ zu $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})$ gehört, auf $\mathfrak{m}/\mathfrak{k}_{\mathcal{P}}$ und dessen äußeren Potenzen trivial operiert, während es auf $\mathfrak{F}$ durch $\tilde{\chi}(s)$ wirkt. Die Behauptung über die $\mathcal{S}$-Wirkung folgt. □

Die Beschreibung von (4.3), die im Theorem enhalten ist, folgt aus dem klassischen Poincaré-Lemma, dem letzten Korollar, (4.20), (4.19) und (4.13). Die analoge Behauptung über $\mathfrak{C}^\infty_{\mathrm{umg}}$ folgt, da $\mathfrak{C}^\infty_{\mathrm{umg}}$ der direkte Limes der Garben $\mathfrak{C}^\infty_{\rho_\lambda + \log}$ ist. Die Behauptung über $\mathfrak{C}^\infty_x$ kann genauso beweisen werden, wobei beachtet werden muss, dass die vorigen Betrachtungen mit kleinen Modifikationen auch dann funktionieren, wenn alle Wachstumsbedingungen fallen gelassen werden. Es bleibt, die Proposition 4.20 zu zeigen.

Beweis der Proposition 4.20. Die einfachen Wurzeln $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ bilden eine Basis von $\check{\mathfrak{a}}$. Sei $\omega_1, \dots, \omega_n$ die duale Basis von $\mathfrak{a}$. Die Paarung zwischen $\mathfrak{a}$ und $\check{\mathfrak{a}}$ sei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet.
Der Standardkomplex für die Berechnung der $\mathfrak{a}$-Kohomologie kann mit dem Koszul-Komplex, der aus den Endomorphismen $D_i = \frac{\partial}{\partial \omega_i} + \langle \chi, \omega_i \rangle$ von $\mathfrak{V} = C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V})$ besteht, identifiziert werden. Der Durchschnitt der Kerne dieser Operatoren ist die Menge der Elemente aus $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V})$, die die Form

$$\exp\big(-\langle \chi, H_{\mathcal{P}}(g)\rangle\big) f(g) \tag{4.25}$$

für $f \in C^\infty(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})^o\backslash W_{T,V})$ haben. Außerdem ist es leicht zu sehen, dass die Menge aller $f \in C^\infty(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})^o\backslash W_{T,V})$, für die (4.25) zu $C^\infty_{\rho_\lambda \pm \log}(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\backslash W_{T,V})$ gehört, entweder $C^\infty(\mathcal{N}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})\mathcal{A}_{\mathcal{P}}(\mathbb{R})^o\backslash W_{T,V})$

oder $\{0\}$ ist, und dass diese beiden Fälle sich auf die gleiche Weise wie die beiden Fälle in (4.22) unterscheiden lassen. Es folgt aus (4.10), dass $s \in \mathcal{S}^o$ auf (4.25) durch die Multiplikation mit $\tilde{\chi}(s)$ wirkt.
Die Proposition wird daher bewiesen sein, wenn gezeigt wurde, dass $D_i$ ein Epimorphismus sowohl auf $\mathfrak{V}$ als auch auf

$$\bigcap_{j \in X} \ker(D_j) \tag{4.26}$$

ist, wobei $X \subset \{1; \dots ; n\}$ eine $i$ nicht enthaltende Teilmenge ist. Um dies zu zeigen, wird eine Rechtsinverse explizit angegeben. Es ist notwendig, zwei Fälle zu unterscheiden. Fall A: $\langle \lambda + \chi + \rho, \omega_i \rangle < 0$ und Fall B: $\langle \lambda + \chi + \rho, \omega_i \rangle > 0$. Wenn $\langle \lambda + \chi + \rho, \omega_i \rangle = 0$, dann sind wir im Falle A, falls $C^\infty_{\rho_\lambda - \log}$ betrachtet wird, und im Falle B, falls $C^\infty_{\rho_\lambda + \log}$ betrachtet wird.
Im Fall A ist eine Rechtsinverse $R_i$ von $D_i$ gegeben durch

$$\big(R_i f\big)(g) = \int_0^\infty \exp(-\langle t\chi, \omega_i \rangle) f\big(g \exp(t\omega_i)\big)\, dt.$$

Im Fall B ist eine Rechtsinverse $R_i$ von $D_i$ gegeben durch

$$\big(R_i f\big)(g) = \int_0^{\langle \omega, \mathrm{H}_P(g)\rangle - T} \exp(\langle t\chi, \omega_i \rangle) f\big(g \exp(-t\omega_i)\big)\, dt.$$

Die Operatoren sind wohldefiniert und erhalten $\mathfrak{V}$. Es ist leicht zu sehen, dass sie auch (4.26) erhalten und rechtsinvers zu $D_i$ sind. $\square$

## Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist eine neue Konstruktion der gewichteten Kohomologie von Kongruenzuntergruppen einer halbeinfachen einfach zusammenhängenden algebraischen Gruppe $\mathcal{G}$. Die Konstruktion verwendet einen Abschneidefunktor $T_M$ in der derivierten Kategorie $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ der Kategorie der $\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)$-äquivarianten Garben $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ auf der adelischen reduktiven Borel-Serre-Kompaktifizierung $S^*$ des Raumes $\mathcal{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{G}(\mathbb{A})/\mathcal{K}_\infty$ für eine maximal kompakte Untergruppe $\mathcal{K}_\infty$ von $\mathcal{G}(\mathbb{R})$. Zuerst wird die genannte Kompaktifizierung definiert und untersucht. Anschließend wird die Kategorie $\mathrm{Sh}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ behandelt.
Um $T_M$ definieren zu können, werden zu einem Gewicht $M$, das ein System endlicher Mengen von Charakteren von Tori ist, Unterkategorien $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)_M$ von $\mathrm{D}_{\mathcal{G}(\mathbb{A}_f)}(S^*)$ definiert und die Existenz des Abschneidefunktors als eines zum Inklusionsfunktor rechtsadjungierten Funktors gezeigt.
Aus einer Verschwindungsaussage für $T_M$ und aus den Ergebnissen der Berechnung der lokalen gewichteten de Rham-Kohomologie wird schließlich gefolgert, dass sich diese als die Kohomologie des Bildes des nicht gewichteten de Rham-Komplexes unter dem Abschneidefunktor $T_M$ darstellen lässt.

# Literaturverzeichnis


[Fra98] Jens Franke. Harmonic Analysis in Weighted $L_2$-Spaces. *Annales Scientifiques De L'École Normale Supérieure*, 31:181–279, 1998.

[Fra01] Jens Franke. On the Brown Representability Theorem for Triangulated Categories. *Topology*, 40, no. 4:667–680, 2001.

[GHM94] M. Goresky, G. Harder, and R. MacPherson. Weighted cohomology. *Inventiones mathematicae*, 116:139–213, 1994.

[Ive86] Birger Iversen. *Cohomology of Sheaves.* Springer, 1986.

[Nai99] Arvind Nair. Weighted cohomology of arithmetic groups. *Annals of Mathematics*, 150:1–31, 1999.

[PR94] V. Platonov and A. Rapinchuk. *Algebraic Groups and Number Theory.* Academic Press, 1994.

[Roh96] Jürgen Rohlfs. Projective limits of locally symmetric spaces and cohomology. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 479:149–182, 1996.

[Vog81] D. A. Vogan. *Representations of Real Reductive Lie Groups.* Birkhäuser, 1981.