

Äquivariante λ -Ringe und kommutative Multiplikationen auf Moore-Spektren

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Julia Singer
aus Hamburg

Bonn 2007

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Stefan Schwede
 2. Gutachterin: Prof. Dr. Birgit Richter
- Tag der Prüfung: 25. Februar 2008

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online elektronisch publiziert.

Erscheinungsjahr: 2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1. Mackey-Funktoren und Green-Funktoren	9
1.1. Beispiele für Green-Funktoren	10
1.2. Der Burnsidering als initiales Objekt	12
2. Äquivariante Wittvektoren	13
2.1. Notation und Vereinbarungen	14
2.2. Ein Endofunktor auf der Kategorie der Green-Funktoren	14
2.3. Die Cotripelstruktur von Σ	20
2.4. Cotripel in kommutativen Ringen	22
2.5. Große Wittvektoren	26
2.6. Zusammenfassung	33
3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe	37
3.1. Äquivariante stabile Homotopiegruppen	37
3.2. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion	38
3.3. Mackey-Eigenschaft	39
3.4. Isomorphismus mit dem Burnsidering	40
3.5. Pro-Kategorien und Pro-Morphismen	42
3.6. Die Segal-Vermutung	43
4. H_∞-Moore-Spektren	47
4.1. H_∞ -Spektren	47
4.2. Green-Funktor-Struktur auf Kohomologierungen	48
4.3. Σ -Coalgebrastruktur	49
4.4. Umkehrung: H_∞ -Strukturen für Moore-Spektren	53
5. Potenzen in äquivalenten Spektren	63
5.1. Kategorien von äquivalenten Spektren	63
5.2. Quillen-Adjunktionen	65
5.3. Potenzen mit Permutationsoperation	69
5.4. Induktion	72
6. G_∞-Multiplikationen	75
6.1. Kommutative Multiplikationen	75
6.2. Eingeschränkte Burnsideringe und eingeschränkte Green-Funktoren	77
6.3. Klassifizierende Räume für Familien von Untergruppen	80
6.4. Coalgebrastruktur für G_∞ -Spektren	81
6.5. Algebraische Beschreibung der äquivalenten Homotopiegruppen	83
6.6. Umkehrung: G_∞ -Strukturen aus Coalgebren	85

7. Algebraische Kriterien	93
7.1. λ -Ringe	93
7.2. Adamsoperationen	96
7.3. Vervollständigung am Augmentationsideal	99
7.4. Homotopieoperationen	101
A. Anhang	103
A.1. λ -Ringe und Wittvektoren	103
A.2. Die Hopfalgebra der symmetrischen Funktionen	105
A.3. Γ -Kohomologie für Zahlringe	106
Symbolverzeichnis	108
Literaturverzeichnis	111

Einleitung

Die vorliegende Arbeit lässt sich inhaltlich grob in drei Teile unterteilen, von denen einer rein algebraischer Natur ist und die anderen beiden Fragestellungen aus der Homotopietheorie behandeln, für die Ergebnisse aus dem algebraischen Teil verwendet werden.

Die ursprüngliche Motivation war die Frage nach kommutativen Multiplikationen auf Moore-Spektren. Anders als in der Algebra gibt es in der stabilen Homotopietheorie verschiedene Möglichkeiten, den Begriff der kommutativen Multiplikation auf Spektren zu formulieren. Zunächst lässt sich die stabile Homotopiekategorie durch ihr symmetrisch monoidales Smash-Produkt als Verallgemeinerung von algebraischen Kategorien auffassen: Es handelt sich um eine additive Kategorie wie die Kategorie der abelschen Gruppen oder Moduln über einem Ring, und die Monoide in dieser Kategorie entsprechen den Ringen oder Algebren der klassischen Algebra. Mit Hilfe des Eilenberg-Mac-Lane-Funktors wird die Kategorie der abelschen Gruppen bzw. Ringe in die Kategorie dieser Spektren bzw. Ringspektren eingebettet. In der einfachsten Version hat ein solches Ringspektrum demnach eine kommutative Multiplikation, wenn es ein kommutatives Monoid in der stabilen Homotopiekategorie ist.

Die Smash-Produkte, die in den letzten Jahren auf unterliegenden Modellen für die stabile Homotopiekategorie konstruiert wurden, liefern nun allerdings eine feinere Version von Kommutativität; in dieser ist ein Ringspektrum kommutativ, wenn es bereits in einer Modellkategorie von Spektren, etwa in symmetrischen oder orthogonalen Spektren, eine Struktur als kommutatives Monoid trägt.

Ein älterer, aber in einem geeigneten Sinne äquivalenter Begriff zu dieser Art von kommutativer Multiplikation ist der des E_∞ -Spektrums, der als Kommutativität bis auf Homotopie, aber mit allen höheren Kohärenzen aufgefasst werden kann. Formuliert man die gleichen Bedingungen in der stabilen Homotopiekategorie anstatt in einem der Modelle, so erhält man den schwächeren Begriff des H_∞ -Spektrums, der sich, wie wir sehen werden, gut für die Beschreibung mit rein algebraischen Mitteln eignet. Jedes solche Spektrum wird zu einem Monoid in der stabilen Homotopiekategorie, die H_∞ -Bedingung liegt also zwischen den beiden bereits genannten Begriffen.

Die Frage, warum man sich für kommutativen Multiplikationen ausgerechnet auf Moore-Spektren interessiert, lässt sich auf zwei Arten beantworten. Einerseits können wir für diese Spektren die gerade angesprochene algebraische Modellierung durchführen, andererseits kann man die Frage in diesem Fall auch aus einer anderen Perspektive betrachten.

Genau wie man sich in der kommutativen Algebra fragt, welche k -Algebren für einen kommutativen Ring k aus einem kommutativen Ring R als Skalarerweiterung $R \otimes k$ konstruiert werden können, kann man sich fragen, welche kommutativen Ringe K zum universellen Ringspektrum, dem Sphärenspektrum S , „absteigen“, also aus einem kommutativen Ringspektrum R durch „Skalarerweiterung“ entlang des Morphismus $S \rightarrow \mathbb{Z}$ entstehen. Den klassischen Ringen werden hier mit Hilfe des Eilenberg-Mac-Lane-Funktors H Ringspektren zugeordnet. Für das Ringspektrum R folgt aus der Bedingung

$R \wedge H\mathbb{Z} \cong HK$, dass es das Moore-Spektrum zu K sein muss. Per Definition haben Moore-Spektren nämlich die Eigenschaft, dass ihre Homologie in Grad 0 konzentriert ist. Das Moore-Spektrum mit Homologie K werden wir mit SK bezeichnen.

Für bestimmte Moore-Spektren ist bereits bekannt, welche Arten von Multiplikationen nicht existieren können. Im Fall des Moore-Spektrums $S(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ für eine beliebige Primzahl p findet man eine Begründung dafür, dass es nicht einmal eine assoziative (also A_∞ -)Multiplikation gibt, etwa in [Ang06, Ex. 3.3]. Den Fall von Ringen mit additiver Torsion werden wir hier also nicht betrachten.

Umgekehrt lässt sich für Zahlringe, also die Ganzheitsringe endlicher Erweiterungen von \mathbb{Q} , mit Hilfe einer Hindernistheorie ein hinreichendes Kriterium für die Existenz einer E_∞ -Multiplikation angeben: Sobald man alle verzweigten Primzahlen invertiert, verschwinden die betreffenden Hindernisgruppen in Γ -Kohomologie [RW02] und es gibt auf dem Moore-Spektrum eine E_∞ -Multiplikation.

Eine explizite Konstruktion einer solchen Multiplikation wird von Schwänzl, Vogt und Waldhausen im Fall der Adjunktion von Einheitswurzeln angegeben [SVW99]: Dafür nutzt man aus, dass sich die Quotientenbildung hier durch Bilden eines „Gruppenrings“ und Lokalisierung ersetzen lässt. Dass auf den Gauß’schen Zahlen keine E_∞ -Multiplikation existieren kann, wird in der gleichen Arbeit mit Hilfe von topologischer Hochschild-Homologie gezeigt.

Unser erstes Ziel wird es sein, notwendige Kriterien für die Existenz kommutativer Multiplikationen (E_∞ oder H_∞) anzugeben, die möglichst rein algebraisch formuliert werden können. Einen Hinweis, dass eine solche Beschreibung möglich ist, erhält man aus der unter dem Namen „Segal-Vermutung“ bekannten Aussage, deren Beweis in einem Artikel von G. Carlsson aus dem Jahr 1984 vollendet wurde: Dieser Satz stellt einen Zusammenhang her zwischen der stabilen Cohomotopie von klassifizierenden Räumen einer endlichen Gruppe und dem Burnside-Ring der Gruppe. Genauer existiert ein Isomorphismus

$$\pi^0(BG_+) \cong \hat{A}(G)$$

zu der Vervollständigung des Burnside-Rings am Augmentationsideal.

Unter günstigen Voraussetzungen an den Ring K , dessen Moore-Spektrum wir mit einer kommutativen Multiplikation versehen möchten, können wir mit Hilfe dieses Resultats nicht nur die stabile Cohomotopie

$$\pi^0(B\Sigma_{n+}) \cong [E\Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_n} S, S]$$

mit rein algebraischen Mitteln ausdrücken, sondern auch die SK -Kohomologie von $B\Sigma_n$.

Diese Beobachtungen führen zu der Definition der algebraischen Struktur in Teil 2. Diese Zusatzstruktur auf dem Ring K besteht in erster Näherung aus einem Ringhomomorphismus von K in einen Ring, der mit Hilfe von vervollständigten Burnside-Ringen aller symmetrischen Gruppen gebildet wird, zusammen mit einer weiteren Bedingung.

Da klassifizierende Räume endlicher Gruppen, also äquivariante Strukturen, in der Definition der H_∞ -Multiplikationen eine Rolle spielen und da Kommutativität eine Verträglichkeit mit der Operation symmetrischer Gruppen ausdrückt, ist es nicht überraschend, dass die beste Formulierung der algebraischen Bedingungen eine äquivariante ist. In dieser Darstellung wird aus dem Ringhomomorphismus eine Abbildung von „äquivarianten Ringen“, genauer von Green-Funktoren. An Stelle einer Abbildung auf $K = [S, SK]$ erhält man für jede endliche Gruppe G eine Abbildung aus $[BG_+, SK]$, die mit der Struktur, die man durch Variieren der Gruppe G erhält, kompatibel ist.

Durch Verallgemeinerung ergeben sich algebraische Bedingungen auf Green-Funktoren, die sich in Form einer Coalgebrastruktur über einem Cotripel formulieren lassen. In günstigen Fällen lassen sich solche Bedingungen aber wieder auf die Kategorie der Ringe zurückführen. Aus diesem Grund treffen wir am Ende von Kapitel 4 auf einen alten Bekannten: Einsetzen des Darstellungsrings-Funktors macht aus unserer Bedingung die Zusatz Eigenschaft von kommutativen Ringen, die als λ -Ringstruktur bekannt ist.

Im Fall derjenigen Kohomologietheorien SK , für die wir die Kohomologie der klassifizierenden Räume auf einfache Weise algebraisch beschreiben können, wenn also der Ring K als abelsche Gruppe frei ist, liefert die algebraische Zusatzstruktur nicht nur eine notwendige, sondern sogar eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer H_∞ -Struktur.

Zum Beweis der bereits erwähnten Segal-Vermutung, die beim Übergang von der Topologie zur Algebra eine Rolle spielt, führte letztendlich eine Formulierung der Aussage mit den Mitteln der äquivarianten stabilen Homotopietheorie. Das allgemeine Resultat sollte also besser formuliert werden als Isomorphismus

$$\pi^*(BG_+) \cong \pi_G^*(S^0)^\wedge$$

zwischen der stabilen Cohomotopie von BG und der G -äquivarianten stabilen Cohomotopie des Sphärenspektrums nach Vervollständigung am Augmentationsideal, also an $\ker(\text{Res}_1^G : \pi_G^0(S^0) \rightarrow \pi_G^0(G_+))$. Mit anderen Worten: Die Vervollständigung tritt auf, sobald man in der äquivarianten Theorie von S^0 zu EG_+ übergeht, oder auch zur nicht-äquivarianten Formulierung mit dem klassifizierenden Raum BG_+ .

Das legt den Verdacht nahe, dass es sich in manchen Fällen bei der n -fachen H_∞ -Multiplikation $\mu_n \in [E\Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_n} X^{\wedge n}, X]$ „eigentlich“ um das Abbild einer wirklichen äquivarianten Multiplikation, also eines Morphismus in einer Kategorie von Σ_n -äquivarianten Spektren, wie sie in der äquivarianten stabilen Homotopietheorie untersucht werden, handeln könnte.

In Kapitel 6 wird, motiviert durch diese Überlegungen, ein neuer Begriff einer kommutativen Multiplikation auf den hier betrachteten Moore-Spektren eingeführt, der die n -fache Multiplikation als Morphismus in der Homotopiekategorie von Σ_n -äquivarianten Spektren auffasst.

Durch das Verschwinden der Vervollständigung erhalten wir an Stelle der algebraischen Bedingungen für die Existenz einer H_∞ -Struktur nun einfachere Bedingungen: Als

ein Resultat sei schon einmal vorweggenommen, dass sich für die Klasse der Ringe, die als abelsche Gruppen frei sind, ergibt, dass eine solche echt äquivariant-kommutative Multiplikation auf dem Moore-Spektrum gleichbedeutend mit der Existenz einer λ -Struktur auf dem zugehörigen Ring ist. Die zugehörige Äquivalenz von Kategorien wird am Ende von Kapitel 6 beschrieben.

Auf der algebraischen Seite sind λ -Ringe bereits gründlich untersucht worden. Für die „vervollständigte“ Version, die sich beim Studium der H_∞ -Multiplikationen ergibt, übertragen wir im letzten Teil einige Eigenschaften, die man von λ -Ringen kennt. So formulieren wir zunächst, wie die Adams-Operationen in dieser Beschreibung aussehen, um eine „vollständige“ Version davon definieren zu können. Im Fall von Zahlringen sieht man mit Hilfe dieser Adams-Operationen für beide Arten von Multiplikationen, dass das zugehörige Moore-Spektrum vor dem Invertieren der verzweigten Primzahlen nicht mit einer solchen kommutativen Multiplikation versehen werden kann. Daraus ergibt sich insbesondere, dass es tatsächlich nur einen Zahlring gibt, dessen zugeordnetes Moore-Spektrum eine H_∞ -Struktur (oder die entsprechende äquivariante Version) besitzt, nämlich den Ring \mathbb{Z} mit dem Moore-Spektrum $S\mathbb{Z} = S$.

Aufgebaut ist der vorliegende Text wie folgt: Im ersten Abschnitt werden einige Eigenschaften von äquivarianten Moduln und Algebren, also von Mackey- und Green-Funktoren, wiederholt. Im zweiten Teil wird die oben angedeutete algebraische Struktur auf Green-Funktoren eingeführt und ihr Zusammenhang mit λ -Ringen beschrieben. Das dritte Kapitel dient der Vorbereitung auf den topologischen Teil der Arbeit und stellt einige der dort benötigten Hilfsmittel zusammen.

Im vierten Teil begeben wir uns dann auf die Suche nach H_∞ -Multiplikationen. Für bestimmte Moore-Spektren liefert die algebraische Struktur aus Teil 2 nicht nur ein notwendiges, sondern sogar ein hinreichendes algebraisches Kriterium für die Existenz einer solchen Multiplikation.

Das fünfte Kapitel ist als Vorbereitung auf die Variante im darauffolgenden sechsten Teil gedacht. Hier wird eine Version einer „kommutativen Multiplikation bis auf Homotopie“ eingeführt, die in äquivarianten Spektren lebt und mit der wir die gleichen Untersuchungen anstellen können wie mit H_∞ -Spektren.

Durch die topologischen Ergebnisse motiviert, knüpfen wir im siebten Kapitel noch einmal an den algebraischen Teil an. Aus den Kriterien in Kapitel 4 und 6 werden hier besser handhabbare Bedingungen gewonnen. Wir leiten aus unserer Definition von λ -Ringen die Adams-Operationen her und formulieren mit deren Hilfe algebraische Kriterien, die für die Existenz der hier untersuchten kommutativen Multiplikationen erfüllt sein müssen.

1. Mackey-Funktoren und Green-Funktoren

Mackey- und Green-Funktoren sind äquivariante Versionen von abelschen Gruppen (oder Moduln) und Ringen (oder Algebren). Als Beispiel ist es hilfreich, sich Darstellungsringe endlicher Gruppen vorzustellen; einige ihrer Eigenschaften werden durch diese Begriffe modelliert. Die Definitionen gehen zurück auf A. Dress [Dre86] und den Namensgeber für die multiplikative Variante [Gre71].

Definition 1.1. Ein Mackey-Funktor für die endliche Gruppe G ist ein Bifunktor M von der Kategorie der Untergruppen von G mit Inklusionen als Morphismen in die Kategorie \mathcal{Ab} der abelschen Gruppen. Der kovariante Teil wird mit „Ind“ für Induktion, der contravariante Teil mit „Res“ für Restriktion bezeichnet; auf Objekten stimmen beide überein. Die Gruppe G operiert durch Konjugation auf der Menge der Untergruppen, und wir fordern zusätzlich für jede Untergruppe H von G natürliche Transformationen $c_\sigma : M(H) \rightarrow M(\sigma H \sigma^{-1})$, sodass $c_{\sigma\sigma'} = c_\sigma c_{\sigma'}$ für alle $\sigma, \sigma' \in G$. Falls $\sigma \in H$, soll $c_\sigma = \text{id}$ auf $M(H)$ gelten.

Das letzte Axiom ist die Gültigkeit der Doppelnebenklassenformel: Für alle Untergruppen $H, K \subset \Sigma$ von G ist

$$\text{Res}_K^\Sigma \text{Ind}_H^\Sigma = \sum_{[\sigma] \in K \backslash \Sigma / H} \text{Ind}_{K \cap \sigma H \sigma^{-1}}^K c_\sigma \text{Res}_{\sigma^{-1} K \sigma \cap H}^H.$$

Das Element σ durchläuft dabei ein Repräsentantensystem der Doppelnebenklassen $K\sigma H$ in Σ .

Definition 1.2. Ein Green-Funktor ist ein Mackey-Funktor F , für den die Gruppen $F(H)$ jeweils eine Struktur als kommutativer Ring mit 1 besitzen, sodass die Restriktions- und Konjugationsabbildungen Ringhomomorphismen werden und sodass für Untergruppen $K \subset H$ von G alle Elemente $a \in F(K), b \in F(H)$ die Gleichung

$$\text{Ind}_K^H(a \cdot \text{Res}_K^H b) = \text{Ind}_K^H(a) \cdot b \quad (\text{Frobenius-Reziprozität})$$

erfüllen.

Bemerkung 1.3. Die letzte Bedingung lässt sich so verstehen, dass Ind_K^H ein $F(H)$ -Modulhomomorphismus wird, wenn $F(K)$ via Res_K^H als $F(H)$ -Modul aufgefasst wird. Mit der passenden Konstruktion eines monoidalen Produkts auf Mackey-Funktoren können Green-Funktoren auch als Monoide in dieser Kategorie definiert werden.

Alternativ können Mackey- und Green-Funktoren statt auf Untergruppen von G auch auf endlichen G -Mengen definiert werden [Bou97]. Von einem Green-Funktor M' in dieser Darstellung wird dann verlangt, dass es für je zwei G -Mengen X und Y eine Abbildung $M'(X) \times M'(Y) \rightarrow M'(X \times Y)$ gibt. Die Äquivalenz der beiden Kategorien erhält man mit Hilfe der Festsetzung

$$M'(G/H) = M(H).$$

1. Mackey-Funktoren und Green-Funktoren

Die Abbildung $M'(X) \times M'(Y) \rightarrow M'(X \times Y)$ erhält man durch

$$M'(G/H) \times M'(G/K) \rightarrow M'(G/H \times G/K) = \bigoplus_{[\sigma]} M'(G/(H \cap {}^\sigma K))$$

aus der Doppelnebenklassenformel.

Die Doppelnebenklassenformel nimmt dann eine etwas einfachere Form an [Web00, Lemma 2.1]: Falls

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\phi} & A \\ \psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ B & \xrightarrow{\Phi} & C \end{array}$$

ein Pullback-Quadrat von G -Mengen ist, fordert man in dieser Formulierung die Beziehung $\Phi^* \Psi_* = \psi_* \phi^*$, wobei Φ^* und ϕ^* für die zugehörigen Restriktionen und Ψ_* sowie ψ_* für die Induktionsabbildungen stehen.

1.1. Beispiele für Green-Funktoren

Ein triviales Beispiel ist der konstante Mackey- bzw. Green-Funktor, der jeder Gruppe denselben Modul bzw. Ring zuordnet, wobei alle Restriktions- und Konjugationsmorphismen Identitäten sind und Induktion jeweils Multiplikation mit dem Index der kleineren Gruppe in der größeren ist.

Beispiel 1.4. Ein typisches Beispiel für einen Green-Funktor ist der Darstellungsfunktor: Endlichdimensionale Darstellungen einer Gruppe G über einem Körper können addiert bzw. multipliziert werden, indem man die direkte Summe bzw. das Tensorprodukt der Vektorräume bildet. Der Darstellungsfunktor $R(G)$ ist die Grothendieck-Gruppe der Isomorphieklassen solcher Darstellungen. Wir werden als Grundkörper den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen verwenden. Durch Einschränken der Gruppenoperation auf Untergruppen und Induzieren von Darstellungen sowie Konjugieren mit Elementen aus G erhält man die Strukturabbildungen.

Außer dem Darstellungsfunktor ist das für uns wichtigste Beispiel der Burnside-Ring-Funktor, der mit Hilfe von G -Mengen an Stelle von G -Darstellungen gebildet wird:

Beispiel 1.5. Der Burnside-Ring $A(G)$ einer endlichen Gruppe G ist die Grothendieck-Gruppe des Semirings der G -Isomorphieklassen endlicher G -Mengen, wobei Addition durch disjunkte Vereinigung und Multiplikation durch cartesisches Produkt gegeben ist. Für eine Untergruppe H in G ist die Restriktionsabbildung auf G -Mengen durch Einschränkung der G -Operation auf die Untergruppe H definiert. Die Induktion ist auf H -Mengen X durch $X \mapsto G \times_H X$ gegeben.

Bemerkung 1.6. Der Burnside-Ring $A(G)$ lässt sich als Ring in ein Produkt von Kopien der ganzen Zahlen einbetten: Auf G -Mengen X wird diese Einbettung $A(G) \rightarrow \prod_{[H]} \mathbb{Z}$ definiert durch

$$X \mapsto (|X^H|)_{[H]},$$

wobei $[H]$ die Konjugationsklassen von Untergruppen von G durchläuft und $|X^H|$ für die Anzahl der Elemente der Fixpunktmenge steht. Die Elemente, die im Bild dieser Abbildung liegen, können durch die sogenannten Burnside-Ringkongruenzen [Die87, IV.5.7] charakterisiert werden.

Ein Morphismus von Mackey- bzw. Green-Funktoren ist ein Morphismus von Bifunktoren, der außerdem mit den Konjugationsabbildungen vertauscht. Ein Beispiel ist die Abbildung

$$\begin{aligned} A(G) &\rightarrow R(G) \\ X &\mapsto \mathbb{C}\{X\} \end{aligned}$$

von Green-Funktoren, die jeder G -Menge X den Vektorraum mit Basis X zuordnet: Diese Abbildung ist verträglich mit Induktions- und Restriktionsabbildungen sowie mit Multiplikation und Konjugation.

Die Restriktionsabbildungen Res_1^G bezeichnen wir in beiden Beispielen als Augmentation. Die explizite Beschreibung auf G -Mengen bzw. G -Darstellungen ist gegeben durch

$$\begin{array}{ccc} A(G) \rightarrow \mathbb{Z} & & R(G) \rightarrow \mathbb{Z} \\ X \mapsto |X| & \text{und} & V \mapsto \dim(V). \end{array}$$

Sowohl $F = A$ als auch $F = R$ sind Beispiele für Green-Funktoren, die sogar auf allen endlichen Gruppen definiert sind. Restriktionsabbildungen gibt es in diesen Beispielen nicht nur für Untergruppen: Für jeden Gruppenhomomorphismus $H \rightarrow G$ lässt sich aus einer G -Operation auf einer Menge oder einem Vektorraum eine H -Operation gewinnen.

Im Fall $F = R$ und $F = A$ haben wir für zwei Gruppen H_1 und H_2 jeweils einen Ringhomomorphismus

$$F(H_1) \otimes F(H_2) \rightarrow F(H_1 \times H_2) \tag{1}$$

der sich auch als Zusammensetzung der „Restriktionsabbildungen“ entlang der Projektionen $H_1 \times H_2 \rightarrow H_1$ und $H_1 \times H_2 \rightarrow H_2$ mit der Multiplikation in $F(H_1 \times H_2)$ auffassen lässt. Für den Darstellungsring ist diese Abbildung sogar ein Isomorphismus.

Die Abbildung ist verträglich mit der Green-Funktor-Struktur: Für jede Inklusion $H_1 \subset H_1'$ von Untergruppen von G_1 erhalten wir auch eine Inklusion $H_1 \times H_2 \subset H_1' \times H_2$, und die zugehörigen Restriktionsabbildungen vertauschen mit dem Ringhomomorphismus. Das gleiche gilt für Induktion. Konjugieren mit einem Element aus G_1 verträgt sich ebenfalls mit dieser Abbildung, und die Kompatibilität gilt natürlich auch für die entsprechenden drei Operationen auf dem zweiten Faktor.

Wir werden in den folgenden Kapiteln häufig Kategorien von Green-Funktoren betrachten, die auf einer bestimmten Klasse von Gruppen und deren Untergruppen definiert sind und die außerdem die Zusatzeigenschaft (1) haben.

1. Mackey-Funktoren und Green-Funktoren

1.2. Der Burnside-Ring als initiales Objekt

Der Burnside-Ring spielt als äquivarianter Ring die gleiche Rolle wie der Ring \mathbb{Z} der ganzen Zahlen im nichtäquivarianten Kontext.

Satz 1.7. *Der Burnside-Ring-Funktor A ist das initiale Objekt in der Kategorie der Green-Funktoren.*

Beweis. Additiv wird $A(G)$ von den G -Mengen der Form G/H für alle Untergruppen H erzeugt. Diese Mengen sind aber genau von der Form $\text{Ind}_H^G(1)$. Damit ist eine mit Induktion und der Gruppenstruktur verträgliche Abbildung von A in einen beliebigen Green-Funktor F schon festgelegt durch die Bilder der 1 in den verschiedenen Ringen. Da $1 \in A(H)$ auf $1 \in F(H)$ abgebildet wird, ist die Abbildung eindeutig.

Es bleibt nur zu zeigen, dass die Abbildung φ , die durch diese Festlegungen gegeben ist, wirklich immer ein Morphismus von Green-Funktoren ist.

Für die Multiplikativität vergleichen wir $\varphi(G/H \times G/K)$ mit Hilfe der Doppelnebenklassenformel mit $\varphi(G/H) \times \varphi(G/K)$ und rechnen die Aussage nach. Die Verträglichkeit mit Restriktion und Konjugation lässt sich ebenfalls auf den Mengen der Form $\text{Ind}_K^G(1)$ leicht prüfen. Die Verträglichkeit mit Induktion folgt direkt aus der Definition von φ und Transitivität der Induktion. \square

Nachdem in diesem Abschnitt die wesentlichen Eigenschaften von Mackey- und Green-Funktoren und der beiden Standardbeispiele A und R wiederholt wurden, können wir im nächsten Teil Zusatzeigenschaften auf solchen Objekten definieren.

2. Äquivariante Wittvektoren

In diesem Kapitel wird die grundlegende algebraische Struktur eingeführt, die wir in den folgenden Teilen als Hilfsmittel für die Untersuchung von Potenzen und Multiplikationen einsetzen möchten. Wie in der Überschrift bereits angedeutet, wird sich herausstellen, dass sie sich als äquivariante Verallgemeinerung eines aus der Algebra und Topologie bereits gut bekannten Funktors auffassen lässt. Nach der Definition in Abschnitt 2.2 weisen wir zunächst die Ringstruktur und dann Green-Funktor- sowie Cotripleigenschaften der Konstruktion nach und wenden uns dann den Beispielen und Vergleichen zu.

Die grundlegende Idee lässt sich sehr einfach motivieren: Falls X ein Objekt ist, dessen Potenzen wir bilden können (also zum Beispiel eine Menge, ein Vektorraum, ein Vektorraumbündel), erhält die n -te Potenz von X typischerweise eine Operation der symmetrischen Gruppe Σ_n , und es gibt „Potenzgesetze“ der Form

$$\triangleright X^i \times X^j = X^{i+j} \text{ (mit einer Operation von } \Sigma_i \times \Sigma_j \text{)}$$

$$\triangleright (X^k)^j = X^{kj} \text{ (mit einer Operation des Kranzprodukts von } \Sigma_k \text{ und } \Sigma_j \text{)}.$$

Das Kranzprodukt einer Gruppe G mit der symmetrischen Gruppe Σ_j stellt man sich am besten als diejenige Gruppe vor, die in natürlicher Weise auf X^j operiert, wenn X bereits eine G -Operation besitzt.

Diese Beobachtung lässt sich etwa im Fall von Vektorräumen so präzisieren, dass die Tensorpotenzen eines Raums V eine Folge

$$(V^{\otimes n})_n \in \prod_n R(\Sigma_n)$$

bestimmen, die für alle $i, j, k \in \mathbb{N}$ die Eigenschaften

$$\triangleright V^{\otimes i} \otimes V^{\otimes j} = \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_{i+j}}(V^{\otimes(i+j)})$$

$$\triangleright (V^{\otimes k})^{\otimes j} = \text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle}^{\Sigma_{jk}}(V^{\otimes jk})$$

besitzt, wobei wir das Kranzprodukt als $\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle$ notieren.

Verfolgt man diese Idee weiter, so ergibt sich auf natürliche Weise ein Cotripel Σ von äquivarianten Ringen, und die hier beschriebene Beobachtung entspricht der Tatsache, dass der Darstellungsring eine Σ -Coalgebra wird.

Da sich λ -Ringstrukturen häufig durch Potenzbildung ergeben, überrascht es nicht, dass sich diese als Spezialfall unserer viel allgemeineren Konstruktion ergeben. Trotz oder vielleicht gerade wegen der erstaunlichen Einfachheit der Idee kann diese Sichtweise als konzeptionelles Hilfsmittel benutzt werden, um zu verstehen, warum man in manchen Situationen λ -Ringe erhält, in anderen, auf den ersten Blick vergleichbaren Fällen dagegen nicht, und welche algebraische Struktur stattdessen vorliegt.

2. Äquivariante Wittvektoren

2.1. Notation und Vereinbarungen

Wir betrachten in den folgenden Abschnitten die Kategorie \mathcal{G} der Green-Funktoren, die wie der Darstellungsrings-Funktor auf allen endlichen Gruppen definiert sind; im Hinblick auf die Definitionen aus Abschnitt 1 verstehen wir darunter genauer die Untergruppen aller symmetrischen Gruppen, die wir auch als Permutationsgruppen bezeichnen. Außerdem setzen wir Eigenschaft (1) aus Abschnitt 1 voraus, für jeden Green-Funktor $F \in \mathcal{G}$ sind also Ringhomomorphismen

$$F(G) \otimes F(H) \rightarrow F(G \times H)$$

für alle G, H vorgegeben, die mit Restriktions-, Induktions- und Konjugationsabbildungen kompatibel sind. Falls G eine Untergruppe von Σ_m ist und H eine Untergruppe von Σ_n , wird das Produkt $G \times H$ als Untergruppe von Σ_{m+n} aufgefasst. Für $X \in F(G)$, $Y \in F(H)$ bezeichnen wir das Bild von $X \otimes Y$ in $F(G \times H)$ wieder mit $X \otimes Y$.

Bemerkung 2.1. An Stelle der Definition von Green-Funktoren aus Abschnitt 1 verwenden wir hier eigentlich eine Version von „globalen“ Mackey- und Green-Funktoren [Web00, §8]. Spätestens in Abschnitt 6 wird aber deutlich, dass es sinnvoll sein kann, sich für jede Gruppe eine zugehörige symmetrische Gruppe zu merken, als deren Untergruppe sie aufgefasst werden soll.

Mit Ringen sind immer kommutativen Ringe mit 1 gemeint. Mit \mathcal{R} bezeichnen wir die zugehörige Kategorie, K steht für einen Ring aus \mathcal{R} , G für eine endliche Gruppe, und das Kranzprodukt von G mit der symmetrischen Gruppe Σ_n wird als $\Sigma_n \langle G \rangle$ notiert. Das Symbol R steht für den Darstellungsrings-Funktor. Als Grundkörper verwenden wir den Körper \mathbb{C} der komplexen Zahlen. Da wir in erster Linie Darstellungsringe von symmetrischen Gruppen und deren Kranzprodukten verwenden, erhalten wir zum Beispiel für \mathbb{R} oder \mathbb{Q} aber das gleiche Ergebnis [JK81, 4.4.9].

Falls G eine Untergruppe von Σ_k ist, fassen wir das Kranzprodukt $\Sigma_n \langle G \rangle$ als Untergruppe von Σ_{nk} auf. Eine kanonische Inklusion $\Sigma_n \langle \Sigma_k \rangle \rightarrow \Sigma_{nk}$ ergibt sich, indem man Σ_k als Automorphismengruppe von $\mathbf{k} = \{1, \dots, k\}$ auffasst und die beiden Gruppen in natürlicher Weise auf der n -fachen disjunkten Vereinigung

$$\mathbf{k} \amalg \mathbf{k} \amalg \dots \amalg \mathbf{k} \cong \{1, \dots, k\} \amalg \{k+1, \dots, 2k\} \amalg \dots \cong \{1, \dots, nk\}$$

operieren lässt. Sobald für eine Gruppe \mathcal{S} eine Einbettung als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe Σ_n gewählt wird, lässt sich etwas allgemeiner auch das Kranzprodukt $\mathcal{S} \langle G \rangle$ bilden.

2.2. Ein Endofunktor auf der Kategorie der Green-Funktoren

Zunächst ist es hilfreich, sich an die Definition der Hopfalgebra Sym der symmetrischen Funktionen zu erinnern; einen Überblick bietet Anhang A.2 oder [Haz03, §2]. Als abelsche Gruppe ist sie definiert als direkte Summe über die Darstellungsringe der symmetrischen Gruppen:

$$Sym = \bigoplus_{n \geq 0} R(\Sigma_n)$$

2.2. Ein Endofunktor auf der Kategorie der Green-Funktoren

Multipliziert wird mit Hilfe des sogenannten Induktionsprodukts: Für $X \in R(\Sigma_m)$ und $Y \in R(\Sigma_n)$ setzt man

$$X \cdot Y = \text{Ind}_{\Sigma_m \times \Sigma_n}^{\Sigma_{m+n}} (X \otimes Y).$$

Wir ersetzen nun den Darstellungsring-Funktor durch einen beliebigen Green-Funktor $F \in \mathcal{G}$ und die direkte Summe durch ein Produkt; mit dem einleitenden Beispiel im Hinterkopf wird das Ziel sein, eine Addition und eine Multiplikation so zu definieren, dass die Potenzbildung zu einem Ringhomomorphismus wird. Da die Potenzen eines G -Objekts eine Operation von $\Sigma_n \langle G \rangle$ erhalten sollen, werden außerdem die symmetrischen Gruppen gegen diese etwas allgemeineren Kranzprodukte ausgetauscht.

Im Produkt

$$\prod_{j=0}^{\infty} F(\Sigma_j \langle G \rangle)$$

definieren wir nun für zwei Elemente (X_j) und (Y_j) die Verknüpfung \boxplus durch

$$(X \boxplus Y)_j = \sum_{j_1+j_2=j} \text{Ind}_{\Sigma_{j_1} \langle G \rangle \times \Sigma_{j_2} \langle G \rangle}^{\Sigma_j \langle G \rangle} (X_{j_1} \otimes Y_{j_2}).$$

Lemma 2.2. *Das Produkt $\prod_{j=0}^{\infty} F(\Sigma_j \langle G \rangle)$ wird zu einem Ring durch komponentenweise Addition und \boxplus als Multiplikation: Die Multiplikation ist assoziativ und distributiv über der Addition.*

Beweis. Die Assoziativität und Distributivität der Verknüpfung „ \boxplus “ lassen sich leicht nachrechnen: Für $X, Y, Z \in \prod_{j=0}^{\infty} F(\Sigma_j \langle G \rangle)$ gilt

$$\begin{aligned} ((X \boxplus Y) \boxplus Z)_n &= \sum_{k+l=n} \text{Ind}_{\Sigma_k \langle G \rangle \times \Sigma_l \langle G \rangle}^{\Sigma_n \langle G \rangle} (X \boxplus Y)_k \otimes Z_l \\ &= \sum_{k+l=n} \text{Ind}_{\Sigma_k \langle G \rangle \times \Sigma_l \langle G \rangle}^{\Sigma_n \langle G \rangle} \sum_{i+j=k} \text{Ind}_{\Sigma_i \langle G \rangle \times \Sigma_j \langle G \rangle}^{\Sigma_k \langle G \rangle} (X_i \otimes Y_j) \otimes Z_l \\ &= \sum_{i+j+l=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \langle G \rangle \times \Sigma_j \langle G \rangle \times \Sigma_l \langle G \rangle}^{\Sigma_n \langle G \rangle} X_i \otimes Y_j \otimes Z_l \\ &= (X \boxplus (Y \boxplus Z))_n. \end{aligned}$$

Genauso leicht sieht man, dass die Distributivität aus der entsprechenden Eigenschaft der Ringe $F(\Sigma_n \langle G \rangle)$ folgt. \square

Definition 2.3. Wir nennen ein Element $(X_j) \in \prod_{j=0}^{\infty} F(\Sigma_j \langle G \rangle)$ exponentiell, wenn für alle j und alle Zerlegungen $j = j_1 + j_2$ gilt, dass

$$\text{Res}_{\Sigma_{j_1} \langle G \rangle \times \Sigma_{j_2} \langle G \rangle}^{\Sigma_j \langle G \rangle} (X_j) = X_{j_1} \otimes X_{j_2}.$$

Wir schreiben als Abkürzung $\prod_n^e F(\Sigma_n \langle G \rangle)$ für die exponentiellen Elemente in diesem Produkt.

2. Äquivariante Wittvektoren

Bemerkung 2.4. Für die Definition von \boxplus benötigen wir schon die Eigenschaft (1) aus Abschnitt 1, die wir in der Kategorie \mathcal{G} voraussetzen. Die Bedingung aus Definition 2.3 erinnert an die definierende Eigenschaft von gruppenartigen Elementen in der Hopfalgebra Sym . Vor dem Übergang von der direkten Summe zum Produkt gibt es dort allerdings keine nichttrivialen gruppenartigen Elemente.

2.2.1. Potenzieren als Ringhomomorphismus

Auf der Teilmenge der exponentiellen Elemente von $\prod_{n=0}^{\infty} F(\Sigma_n \langle G \rangle)$ wählen wir neue Verknüpfungen, indem komponentenweise multipliziert wird und die oben definierte Verknüpfung \boxplus als Addition dient.

Satz 2.5. Die Menge $\prod_n^e F(\Sigma_n \langle G \rangle)$ wird durch diese Verknüpfungen zu einem kommutativen Ring.

Beweis. Dass die exponentiellen Elemente eine abelsche Gruppe bezüglich \boxplus bilden, sieht man im Fall $F = R$ und $G = 1$ durch Einschränkung auf die endlichen Teilprodukte $\prod_{n=1}^N R(\Sigma_n \langle G \rangle)$, denn für den Ring Sym der symmetrischen Funktionen und seine Quotienten folgt diese Aussage aus der Hopfalgebra-Eigenschaft. Wir übertragen den Beweis hier noch einmal auf unseren allgemeineren Fall:

Zunächst folgt aus der Doppelnebenklassenformel in $\bigoplus F(\Sigma_n)$, dass für zwei exponentielle Folgen $X = (X_n)$, $Y = (Y_n)$ in der n -ten Komponente gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i+j=n} \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X \boxplus Y)_n &= \sum_{i+j=n} \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} \sum_{k+l=n} \text{Ind}_{\Sigma_k \times \Sigma_l}^{\Sigma_n} (X_k \otimes Y_l) \\
&= \sum_{a+b+c+d=n} \text{Ind}_{\Sigma_a \times \Sigma_b \times \Sigma_c \times \Sigma_d}^{\Sigma_{a+b+c+d}} (\text{Res}_{\Sigma_a \times \Sigma_c}^{\Sigma_{a+c}} (X_{a+c}) \otimes \text{Res}_{\Sigma_b \times \Sigma_d}^{\Sigma_{b+d}} (Y_{b+d})) \\
&= \sum_{a+b+c+d=n} \text{Ind}_{\Sigma_a \times \Sigma_b}^{\Sigma_{a+b}} (X_a \otimes Y_b) \otimes \text{Ind}_{\Sigma_c \times \Sigma_d}^{\Sigma_{c+d}} (X_c \otimes Y_d) \\
&= \sum_{i+j=n} (X \boxplus Y)_i \otimes (X \boxplus Y)_j \in \bigoplus_{i+j=n} F(\Sigma_i \times \Sigma_j)
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Summanden in $F(\Sigma_i \times \Sigma_j)$ sieht man, dass $X \boxplus Y$ wieder exponentiell ist. Das Inverse bezüglich \boxplus bestimmt man schrittweise in den einzelnen Komponenten; mit Hilfe der Doppelnebenklassenformel rechnet man nach, dass es ebenfalls in der Teilmenge der exponentiellen Elemente liegt.

Da die Restriktionen Ringhomomorphismen sind, ist diese Teilmenge abgeschlossen unter komponentenweiser Multiplikation.

Als letztes rechnen wir noch die Distributivität nach: Seien $X = (X_n)$, $Y = (Y_n)$ und

2.2. Ein Endofunktor auf der Kategorie der Green-Funktoren

$Z = (Z_n)$ drei Elemente aus $\prod_{n=0}^{\infty} F(\Sigma_n \langle G \rangle)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist dann

$$\begin{aligned}
 ((X \boxplus Y) \cdot Z)_n &= \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X_i \otimes Y_j) \otimes Z_n \\
 &= \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X_i \otimes Y_j \otimes \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} Z_n) \\
 &= \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X_i \otimes Y_j \otimes Z_i \otimes Z_j) \\
 &= \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} ((X \cdot Z)_i \otimes (Y \cdot Z)_j) \\
 &= (X \cdot Z \boxplus Y \cdot Z)_n.
 \end{aligned}$$

□

2.2.2. Nachweis der Green-Funktor-Eigenschaft

Als nächste Eigenschaft soll untersucht werden, wie sich die Konstruktion verhält, wenn die Gruppe G variiert. Um die verschiedenen Arten von Funktorialität besser ausdrücken zu können, führen wir zunächst eine neue Notation ein.

Definition 2.6. Die Menge der exponentiellen Elemente in $\prod_{n=0}^{\infty} F(\Sigma_n \langle G \rangle)$ bezeichnen wir mit $\Sigma^F(G)$.

Aus den Restriktions-, Konjugations- und Induktionsabbildungen von F , angewandt auf Kranzprodukte mit den symmetrischen Gruppen, ergeben sich auch für Σ^F Restriktions-, Konjugations- und Induktionsabbildungen: Falls H eine Untergruppe von G ist, setzen wir

$$\begin{aligned}
 \text{Res}_H^G : \Sigma^F(G) &\rightarrow \Sigma^F(H) \\
 (X_n) &\mapsto (\text{Res}_{\Sigma_n \langle H \rangle}^{\Sigma_n \langle G \rangle} X_n),
 \end{aligned}$$

und auf die gleiche Weise können Induktion und Konjugation gebildet werden.

Satz 2.7. Die Konstruktion Σ^F wird mit den auf diese Weise von F induzierten Induktions-, Restriktions- und Konjugationsabbildungen zu einem Green-Funktor.

Der restliche Teil dieses Unterabschnitts besteht aus einem Beweis dieser Aussage in Form einiger Hilfssätze.

Lemma 2.8. Seien $S' \subset S$ zwei Untergruppen von Σ_n , H eine Untergruppe der Gruppe G und F ein Mackey-Funktor. Dann gilt für die Induktions- und Restriktionsabbildungen von F , dass

$$\text{Res}_{S' \langle H \rangle}^{S \langle G \rangle} \text{Ind}_{S' \langle G \rangle}^{S \langle G \rangle} = \text{Ind}_{S' \langle H \rangle}^{S \langle H \rangle} \text{Res}_{S' \langle H \rangle}^{S' \langle G \rangle},$$

mit anderen Worten, in der Doppelnebenklassenformel tritt nur ein Summand auf.

2. Äquivariante Wittvektoren

Beweis. Den Beweis führen wir durch Betrachten der Doppelnebenklassenformel in einem einfachen bekannten Fall, nämlich für den Darstellungsring-Funktor und die eindimensionale triviale Darstellung. Da die angegebene Formel nicht von F , sondern nur von den Doppelnebenklassen abhängt, erhalten wir daraus die allgemeine Aussage.

Ein Vergleich der Dimensionen ergibt

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Res}_{\mathcal{S}\langle H \rangle}^{\mathcal{S}\langle G \rangle} \operatorname{Ind}_{\mathcal{S}'\langle G \rangle}^{\mathcal{S}\langle G \rangle} (1) &= [\mathcal{S}\langle G \rangle : \mathcal{S}'\langle G \rangle] \\ &= [\mathcal{S}\langle H \rangle : \mathcal{S}'\langle H \rangle] \\ &= [\mathcal{S}\langle H \rangle : \mathcal{S}'\langle G \rangle \cap \mathcal{S}\langle H \rangle] \\ &= \dim \operatorname{Ind}_{\mathcal{S}'\langle H \rangle}^{\mathcal{S}\langle H \rangle} (1) \\ &= \dim \operatorname{Ind}_{\mathcal{S}'\langle H \rangle}^{\mathcal{S}\langle H \rangle} \operatorname{Res}_{\mathcal{S}'\langle H \rangle}^{\mathcal{S}'\langle G \rangle} (1). \end{aligned}$$

Da die Dimensionen schon übereinstimmen, können in der Doppelnebenklassenformel keine weiteren Summanden auftreten. \square

Insbesondere gilt für alle Zerlegungen $n = i + j$ die Gleichung

$$\operatorname{Res}_{\Sigma_n\langle H \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} \operatorname{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} (X) = \operatorname{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle H \rangle}^{\Sigma_n\langle H \rangle} \operatorname{Res}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle H \rangle}^{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle} (X).$$

Satz 2.9. *Die Restriktionsabbildungen von Σ^F sind Ringhomomorphismen.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass die Restriktion verträglich mit der Verknüpfung \boxplus ist, dass also für $X, Y \in \Sigma^F(G)$ die Gleichung

$$\sum_{i+j=n} \operatorname{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j\langle H \rangle}^{\Sigma_n\langle H \rangle} (\operatorname{Res}_{\Sigma_i\langle H \rangle}^{\Sigma_i\langle G \rangle} X_i \otimes \operatorname{Res}_{\Sigma_j\langle H \rangle}^{\Sigma_j\langle G \rangle} Y_j) = \operatorname{Res}_{\Sigma_n\langle H \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} \sum_{i+j=n} \operatorname{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j\langle G \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} (X_i \otimes Y_j)$$

gilt. Das folgt aber direkt aus Lemma 2.8. \square

Einen Ringhomomorphismus $\Sigma^F(G) \otimes \Sigma^F(H) \rightarrow \Sigma^F(G \times H)$ erhält man durch Zusammensetzen der Abbildungen $F(\Sigma_n\langle G \rangle) \otimes F(\Sigma_n\langle H \rangle) \rightarrow F(\Sigma_n\langle G \rangle \times \Sigma_n\langle H \rangle)$ für alle n mit den Restriktionsabbildungen nach $F(\Sigma_n\langle G \times H \rangle)$.

Lemma 2.10. *Die Ringhomomorphismen der Form*

$$\Sigma^F(G) \otimes \Sigma^F(H) \rightarrow \Sigma^F(G \times H)$$

sind für alle Gruppen mit den Strukturabbildungen Restriktion, Induktion und Konjugation verträglich.

Beweis. Für Restriktion und Konjugation ist die Behauptung offensichtlich richtig. Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} \Sigma^F(G) \otimes \Sigma^F(H) & \longrightarrow & \Sigma^F(G \times H) \\ \downarrow \operatorname{Ind} & & \downarrow \operatorname{Ind} \\ \Sigma^F(G') \otimes \Sigma^F(H') & \longrightarrow & \Sigma^F(G' \times H') \end{array}$$

für Inklusionen $G \subset G'$ und $H \subset H'$ folgt wieder aus Lemma 2.8. \square

2.2. Ein Endofunktor auf der Kategorie der Green-Funktoren

Satz 2.11. Für Σ^F gilt die Mackey-Formel: Falls H und K zwei Untergruppen von G sind, ist

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G X = \bigsqcup_{\sigma} \text{Ind}_{H \cap \sigma K \sigma^{-1}}^H c_{\sigma}(\text{Res}_{\sigma^{-1} H \sigma \cap K}^K X),$$

wobei die Summe über ein Vertretersystem der Doppelnebenklassen läuft.

Für den Beweis untersuchen wir zunächst die Doppelnebenklassen, die für die auftretenden Untergruppen in den Kranzprodukten benötigt werden. Sei $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ ein vollständiges Repräsentantensystem für die Doppelnebenklassen $H\sigma K$ von H und K in G .

Lemma 2.12. Die Doppelnebenklassen von $\Sigma_n \langle H \rangle$ und $\Sigma_n \langle K \rangle$ in $\Sigma_n \langle G \rangle$ werden von den Elementen

$$\sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \dots \in G^{n_1} \times G^{n_2} \times \dots = G^n \subset \Sigma_n \langle G \rangle$$

repräsentiert, wobei (n_1, n_2, \dots) alle Zerlegungen $n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots$ mit $n_i \geq 0$ durchläuft.

Beweis. Als erstes notieren wir die Beobachtung, dass sich die Doppelnebenklassen immer durch Elemente aus G^n repräsentieren lassen, weil die Permutationsgruppe Σ_n in beiden Untergruppen enthalten ist. Man sieht ebenfalls sofort ein, dass die Doppelnebenklasse eines Elements $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$ nur von den Doppelnebenklassen bezüglich H und K abhängt, die von den g_i repräsentiert werden. Wir können also jede Doppelnebenklasse durch ein Element der Form $(\sigma_1, \dots, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_2, \dots)$ (oben als $\sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \dots$ notiert) repräsentieren, wobei diese Reihenfolge immer durch Anwenden einer geeigneten Permutation aus Σ_n erreicht werden kann. Alle diese Elemente gehören tatsächlich zu verschiedenen Doppelnebenklassen, da ein Produkt der Form $h\sigma_i k$ mit $h \in H$ und $k \in K$ nach Voraussetzung kein anderer Vertreter σ_j sein kann und da dies auch durch Vertauschen der Faktoren nicht erreicht werden kann. \square

Lemma 2.13. Für den Repräsentanten $g = \sigma_1^{n_1} \sigma_2^{n_2} \dots$ gilt

$$\Sigma_n \langle H \rangle \cap g \Sigma_n \langle K \rangle g^{-1} = \Sigma_{n_1} \langle H \cap \sigma_1 K \sigma_1^{-1} \rangle \times \Sigma_{n_2} \langle H \cap \sigma_2 K \sigma_2^{-1} \rangle \times \dots$$

Beweis. Man sieht sofort, dass

$$g K^n g^{-1} = (\sigma_1 K \sigma_1^{-1})^{n_1} \times (\sigma_2 K \sigma_2^{-1})^{n_2} \times \dots,$$

also bleibt nur zu untersuchen, warum von den Permutationen aus $\Sigma_n \subset \Sigma_n \langle K \rangle$ nur diejenigen aus $\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots$ auftreten. Der Grund ist, dass jedes andere Element $\tau \in \Sigma_n \subset \Sigma_n \langle G \rangle$ mit g und g^{-1} zusammengesetzt nicht in $\Sigma_n \langle H \rangle$ liegen kann, da die verschiedenen σ_i verschiedene Doppelnebenklassen repräsentieren. \square

2. Äquivariante Wittvektoren

Beweis von Satz 2.11. Mit diesen Hilfsmitteln können wir nun die Doppelnebenklassenformel nachrechnen. Sei $X = (X_n) \in \Sigma^F(K) = \prod^e F(\Sigma_j\langle K \rangle)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
(\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G X)_n &= \text{Res}_{\Sigma_n\langle H \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} \text{Ind}_{\Sigma_n\langle K \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} X_n \\
&= \sum_{n_1+n_2+\dots=n} \text{Ind}_{\Sigma_{n_1}\langle H \rangle \cap g \Sigma_{n_2}\langle K \rangle g^{-1}}^{\Sigma_n\langle H \rangle} c_g \text{Res}_{g^{-1}\Sigma_{n_1}\langle H \rangle g \cap \Sigma_{n_2}\langle K \rangle}^{\Sigma_n\langle K \rangle} X_n \\
&= \sum \text{Ind}_{\Sigma_{n_1}\langle H \cap \sigma_1 K \sigma_1^{-1} \rangle \times \Sigma_{n_2}\langle H \cap \sigma_2 K \sigma_2^{-1} \rangle \times \dots}^{\Sigma_n\langle H \rangle} c_g \text{Res}_{\Sigma_{n_1}\langle H \cap \sigma_1 K \sigma_1^{-1} \rangle \times \dots}^{\Sigma_n\langle K \rangle} X_n \\
&= \sum \text{Ind}_{\Sigma_{n_1}\langle H \rangle \times \dots}^{\Sigma_n\langle H \rangle} \bigotimes_i \text{Ind}_{\Sigma_{n_i}\langle H \cap \sigma_i K \sigma_i^{-1} \rangle}^{\Sigma_{n_i}\langle H \rangle} c_{\sigma_i} \text{Res}_{\Sigma_{n_i}\langle \sigma_i^{-1} H \sigma_i \cap K \rangle}^{\Sigma_{n_i}\langle K \rangle} X_{n_i} \\
&= \bigsqcup_i \text{Ind}_{H \cap \sigma_i K \sigma_i^{-1}}^H c_{\sigma_i} \text{Res}_{\sigma_i^{-1} H \sigma_i \cap K}^K X. \quad \square
\end{aligned}$$

Da die restlichen Eigenschaften von Restriktion, Induktion und Konjugation für Σ^F direkt aus den entsprechenden Eigenschaften für F folgen, ist damit auch Satz 2.7 bewiesen.

Bemerkung 2.14. Durch die Anwendung von Σ auf den Green-Funktor Σ^R , also durch Iterieren der Konstruktion, erhält man für $G = 1$ auf der Teilmenge der exponentiellen Elemente (in j - und k -Richtung) von $\prod_{j,k} R(\Sigma_j\langle \Sigma_k \rangle)$ eine Ringstruktur, bei der die Multiplikation wieder komponentenweise in den Darstellungsrings gebildet wird und für die Addition die folgende Formel gilt¹:

$$(X_{j,k}) \boxplus (Y_{j,k}) = \left(\sum_{(j)} \text{Ind} \left(\text{Ind}(X_{j_0,k,0} \otimes Y_{j_0,k,k}) \otimes \text{Ind}(X_{j_1,k-1,1} \otimes Y_{j_1,k-1,k-1}) \otimes \dots \right) \right)$$

Die Summe wird über die verschiedenen Zerlegungen von j als $j = j_{0,k} + j_{1,k-1} + \dots + j_{k,0}$ gebildet.

2.3. Die Cotripelstruktur von Σ

Der Funktor Σ kann auf einfache und natürliche Weise zu einem Cotripel gemacht werden. Als erstes folgt eine kurze Wiederholung der Definition:

Definition 2.15. Ein Cotripel in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein Endofunktor F zusammen mit zwei Morphismen $F \xrightarrow{\eta} \text{id}$ (Coeins) und $F \xrightarrow{\Delta} FF$ (Comultiplikation), sodass die folgenden Diagramme kommutieren (Coassoziativität, Neutralität der linken und rechten Coeins):

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{\Delta} & FF \\
\Delta \downarrow & & \downarrow \Delta \text{id} \\
FF & \xrightarrow{\text{id} \Delta} & FFF
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
& & \text{id} \eta & & \eta \text{id} \\
& & \swarrow & & \searrow \\
F & & FF & & F \\
& \swarrow & \uparrow \Delta & \searrow & \\
& & F & &
\end{array}$$

¹Quelle und Ziel der Induktionsabbildungen wurden hier zur besseren Lesbarkeit nicht notiert und ergeben sich automatisch aus den Graden der Komponenten.

Definition 2.16. Eine Coalgebra über dem Cotripel F ist ein Objekt $A \in \mathcal{C}$ zusammen mit einer Abbildung $\xi : A \rightarrow F(A)$, sodass die Diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\xi} & F(A) \\ \xi \downarrow & & \downarrow F(\xi) \\ F(A) & \xrightarrow{\Delta_A} & F(F(A)) \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\xi} & F(A) \\ & \searrow & \downarrow \eta_A \\ & & A \end{array}$$

kommutieren.

Satz 2.17. Die Konstruktion Σ ist funktoriell, und $\Sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ wird wie folgt zu einem Cotripel: Die Comultiplikation $\Sigma \rightarrow \Sigma\Sigma$ ergibt sich aus den Restriktionsabbildungen

$$F(\Sigma_{jk}\langle G \rangle) \rightarrow F(\Sigma_j\langle \Sigma_k\langle G \rangle \rangle)$$

für alle j, k und alle Gruppen G . Die Coeins erhält man durch Einschränkung auf die erste Komponente im Produkt:

$$\begin{aligned} \prod_n^e F(\Sigma_n\langle G \rangle) &\rightarrow F(\Sigma_1\langle G \rangle) = F(G) \\ (X_n)_n &\mapsto X_1 \end{aligned}$$

Beweis. Dass das Bild der Abbildung

$$\prod_n^e F(\Sigma_n\langle G \rangle) \xrightarrow{\text{Res}} \prod_{j,k} F(\Sigma_j\langle \Sigma_k\langle G \rangle \rangle)$$

wieder in der Teilmenge der exponentiellen Elemente liegt, ist offensichtlich, weil beides mit Hilfe der Restriktion definiert ist. Da die Restriktion mit den Strukturabbildungen der Green-Funktoren verträglich ist, handelt es sich tatsächlich um einen Morphismus von Green-Funktoren.

Die Eigenschaften aus Definition 2.16 lassen sich genauso leicht überprüfen: Dass das erste Diagramm kommutativ ist, folgt aus der Transitivität der Restriktionsabbildungen, die Kommutativität des zweiten Diagramms folgt direkt aus der Definition der Coeins. \square

Die Standardbeispiele für Green-Funktoren, die wir im ersten Teil betrachtet haben, sind auch Standardbeispiele für Coalgebren über diesem Cotripel.

Beispiel 2.18. Der Darstellungsrings-Funktor ist eine Σ -Coalgebra mit der Strukturabbildung

$$R(G) \rightarrow \Sigma^R(G) \cong \prod_n^e R(\Sigma_n\langle G \rangle),$$

die auf einer G -Darstellung V durch $V \mapsto (V^{\otimes n})_n$ definiert wird. Für zwei Darstellungen V und W einer Gruppe G gilt

$$(V \oplus W)^{\otimes n} \cong \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} V^{\otimes i} \otimes W^{\otimes j}$$

2. Äquivariante Wittvektoren

als Elemente in $R(\Sigma_n \langle G \rangle)$. Mit Hilfe dieser Beobachtung sieht man leicht ein, dass es sich um einen Ringhomomorphismus handelt. Dass das erste Diagramm aus Definition 2.15 kommutiert, folgt einfach aus der Tatsache, dass $\text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle}^{\Sigma_n \langle G \rangle}(V^{\otimes n}) = (V^{\otimes k})^{\otimes j}$ als $\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle$ -Darstellungen. Man sieht sofort, dass die restlichen Eigenschaften ebenfalls erfüllt sind.

Mit der gleichen Begründung erhält man die analoge Aussage für A statt R :

Beispiel 2.19. Der Burnside-Funktor ist eine Σ -Coalgebra mit der Strukturabbildung

$$A(G) \rightarrow \Sigma^A(G) \cong \prod^e A(\Sigma_n \langle G \rangle),$$

die auf einer G -Menge X durch $X \mapsto (X^n)_n$ definiert wird.

Die Coalgebrastruktur spiegelt in diesen beiden Beispielen ganz einfach wider, dass für G -Mengen und G -Darstellungen in natürlicher Weise Potenzen mit einer Operation des Krantzprodukts gebildet werden können und die üblichen „Potenzgesetze“ gelten.

Der Morphismus $A \rightarrow R$ von Green-Funktoren, der einer endlichen G -Menge den Vektorraum auf dieser Basis zuordnet, ist mit den Strukturabbildungen verträglich und wird zu einem Morphismus von Σ -Coalgebren.

2.4. Cotripel in kommutativen Ringen

Für eine vorgegebene Coalgebra F kann der Funktor Σ auf die Kategorie der kommutativen Ringe eingeschränkt werden, indem man ihn mit den Funktoren

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{G} & & \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{R} \\ K \mapsto F \otimes K & \text{und} & F \mapsto F(1) \end{array}$$

zusammensetzt. Dadurch ergibt sich im Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ F \otimes - \downarrow & & \uparrow \text{ev}(1) \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{G} \end{array}$$

der obere Pfeil. Da wir häufig lieber über Ringe als über Green-Funktoren sprechen, werden wir als nächstes den Versuch unternehmen, diesen Funktor zu einem Cotripel auf Ringen zu machen. Wir setzen für F zunächst kein bestimmtes Beispiel ein, sondern wählen einen etwas allgemeineren Ansatz, weil diese Konstruktion später auf zwei verschiedene Situationen angewandt werden soll.

Es gibt zunächst einmal keinen Grund für die Annahme, dass unser Ziel für alle Green-Funktoren F erreicht werden kann. Daher formulieren wir zusätzliche Bedingungen, die zum Beispiel der Darstellungsfunktor erfüllt. Für den Rest des Abschnitts setzen wir voraus, dass eine Σ -Coalgebra F mit Strukturabbildung $\tau = \{(\tau_n^G)_n\}$ vorgegeben ist, die für alle Gruppen G und H die folgenden Eigenschaften besitzt:

- ▷ Als \mathbb{Z} -Modul ist $F(G)$ endlich erzeugt und frei.
- ▷ Der Homomorphismus

$$F(G) \otimes F(H) \rightarrow F(G \times H)$$

ist immer ein Isomorphismus.

- ▷ Es gibt eine \mathbb{Z} -Basis $\{X_1, X_2, \dots, X_g\}$ von $F(G)$, sodass sich für alle n jedes Element aus $F(\Sigma_n \langle G \rangle)$ eindeutig als Summe von Elementen der Form

$$\text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \langle G \rangle \times \Sigma_{n_2} \langle G \rangle \times \dots}^{\Sigma_n \langle G \rangle} (\tau_{n_1}^G(X_1) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{n_1} \langle G \rangle}^{\Sigma_{n_1}} Y_1 \otimes \tau_{n_2}^G(X_2) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{n_2} \langle G \rangle}^{\Sigma_{n_2}} Y_2 \otimes \dots)$$

schreiben lässt, wobei (n_1, n_2, \dots, n_g) alle Zerlegungen von n als $n_1 + \dots + n_g$ durchläuft und $Y_i \in F(\Sigma_{n_i})$.

- ▷ Falls $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S} \subset \Sigma_n$, existiert auch ein Restriktionshomomorphismus entlang der Projektion $\mathcal{S} \langle G \rangle \rightarrow \mathcal{S}$, und es gilt

$$\text{Ind}_{\mathcal{S}' \langle G \rangle}^{\mathcal{S} \langle G \rangle} \circ \text{Res}_{\mathcal{S}' \langle G \rangle}^{\mathcal{S}' \langle G \rangle} = \text{Res}_{\mathcal{S} \langle G \rangle}^{\mathcal{S} \langle G \rangle} \circ \text{Ind}_{\mathcal{S}'}^{\mathcal{S}}.$$

Für die Zusammensetzung von Restriktionsabbildungen fordern wir weiterhin Transitivität.

Beispiel 2.20. Wir werden später sehen, dass von unseren beiden Standardbeispielen A und R nur der Darstellungsring diese Voraussetzungen erfüllt.

Das Tupel (n_1, n_2, \dots, n_g) nennen wir den *Typ* des Elements $X_1^{\otimes n_1} \otimes X_2^{\otimes n_2} \otimes \dots \otimes X_g^{\otimes n_g}$. Wegen der zweiten Bedingung entsprechen die verschiedenen Typen den Elementen einer Basis von $F(G^n)$. An Stelle von (n_1, n_2, \dots, n_g) schreiben wir im Folgenden auch einfach (n) und statt $\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots \times \Sigma_{n_g}$ auch $\Sigma_{(n)}$.

Dass die von $G \rightarrow 1$ induzierte „Restriktionsabbildung“

$$\Sigma^F(1) \rightarrow \Sigma^F(G)$$

ein Ringhomomorphismus ist, folgt aus der letzten Bedingung. Aus dieser Abbildung und der Σ -Coalgebrastruktur von F erhalten wir für jede Gruppe G einen Ringhomomorphismus

$$\alpha_G : F(G) \otimes \Sigma^F(1) \rightarrow \Sigma^F(G).$$

Lemma 2.21. *Die Abbildungen α_G setzen sich zu einem Morphismus von Green-Funktoren zusammen.*

Beweis. Falls $H \rightarrow G$ die Inklusion einer Untergruppe ist oder eine Projektion, für die eine Restriktion existiert, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(G) \otimes \left(\prod^e F(\Sigma_j) \otimes K \right) & \xrightarrow{\alpha_G} & \prod^e F(\Sigma_j \langle G \rangle) \otimes K \\ \downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Res} \\ F(H) \otimes \left(\prod^e F(\Sigma_j) \otimes K \right) & \xrightarrow{\alpha_H} & \prod^e F(\Sigma_j \langle H \rangle) \otimes K \end{array}$$

2. Äquivariante Wittvektoren

wegen der Transitivität der Restriktion. Die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} F(H) \otimes \left(\prod^e F(\Sigma_j) \otimes K \right) & \xrightarrow{\alpha_H} & \prod^e F(\Sigma_j \langle H \rangle) \otimes K \\ \downarrow \text{Ind} & & \downarrow \text{Ind} \\ F(G) \otimes \left(\prod^e F(\Sigma_j) \otimes K \right) & \xrightarrow{\alpha_G} & \prod^e F(\Sigma_j \langle G \rangle) \otimes K \end{array}$$

lässt sich mit Hilfe von Frobenius-Reziprozität aus der Coalgebra-Eigenschaft von F herleiten: Für $X \in F(G)$ und $Y = (Y^{(j)}) \in \Sigma^F(1)$ gilt für die j -te Komponente des Bilds

$$\begin{aligned} (\alpha_G(\text{Ind}_H^G(X) \otimes Y))_j &= \tau_j^G(\text{Ind}_H^G(X)) \otimes \text{Res}_{\Sigma_j \langle G \rangle}^{\Sigma_j} Y_j \\ &= \text{Ind}_{\Sigma_j \langle H \rangle}^{\Sigma_j \langle G \rangle}(\tau_j^H(X)) \otimes \text{Res}_{\Sigma_j \langle G \rangle}^{\Sigma_j} Y_j \\ &= \text{Ind}_{\Sigma_j \langle H \rangle}^{\Sigma_j \langle G \rangle}(\tau_j^H(X) \otimes \text{Res}_{\Sigma_j \langle H \rangle}^{\Sigma_j} Y_j) \\ &= \text{Ind}_{\Sigma_j \langle H \rangle}^{\Sigma_j \langle G \rangle}(\alpha_H(X \otimes Y)). \end{aligned}$$

Die Abbildung ist verträglich mit Konjugation, weil die Strukturabbildung von F ein Morphismus von Green-Funktoren ist. \square

Satz 2.22. Für jeden Ring K ist die Abbildung

$$\alpha_G : F(G) \otimes \Sigma^{F \otimes K}(1) \rightarrow \Sigma^{F \otimes K}(G)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Explizit ist das Bild einer Summe von Elementartensoren der Form

$$\sum_i X_i \otimes (Y_i^{(j)})_j \in F(G) \otimes \Sigma^F(1)$$

die Summe der Form

$$\sum_{j_1 + j_2 + \dots = j} \text{Ind}_{\Sigma_{j_1} \langle G \rangle \times \dots}^{\Sigma_j \langle G \rangle} ((\tau_{j_1}^G(X_1) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{j_1} \langle G \rangle}^{\Sigma_{j_1}}(Y_1^{(j_1)})) \otimes (\tau_{j_2}^G(X_2) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{j_2} \langle G \rangle}^{\Sigma_{j_2}}(Y_2^{(j_2)})) \otimes \dots),$$

wie man sich mit Hilfe der Definition von \boxplus auf $\Sigma^F(G)$ überlegt. Zu zeigen ist also, dass es für ein beliebiges vorgegebenes exponentielles Element $(A_n) \in \prod F(\Sigma_n \langle G \rangle) \otimes K$ eindeutig bestimmte exponentielle Elemente $W_i = (W_i^{(n)}) \in \prod F(\Sigma_n) \otimes K$ gibt, sodass

$$A_n = \sum_{(n)} \text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots \langle G \rangle}^{\Sigma_n \langle G \rangle} (\tau_{n_1}^G(X_1) \otimes W_1^{(n_1)} \otimes \tau_{n_2}^G(X_2) \otimes W_2^{(n_2)} \otimes \dots)$$

für alle n . Es ist nicht schwer zu erkennen, dass die dritte Bedingung an F genau zu diesem Zweck formuliert wurde.

2.4. Cotripel in kommutativen Ringen

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion. Es gilt zunächst $A_0 = 1$ und $W_0 = 1$. Für $n \geq 1$ nehmen wir an, dass passende $(W_i^{(m)})_{m < n}$ für die Komponenten A_1, A_2, \dots, A_{n-1} schon gewählt sind. Nach Voraussetzung gibt es in der n -ten Komponente A_n zu einem Typ $(n) = (n_1, n_2, \dots)$ einen eindeutig bestimmten Summanden der Form

$$\text{Ind}_{(\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots)(G)}^{\Sigma_n(G)}(C).$$

Zwei Fälle sind möglich: Im ersten Fall ist $n_i < n$ für alle i . Da A exponentiell ist, gilt

$$\text{Res}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots(G)}^{\Sigma_n(G)} A_n = A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \dots$$

In $F(\Sigma_{(n)}(G)) \otimes K \cong F(\Sigma_{n_1}(G)) \otimes F(\Sigma_{n_2}(G)) \otimes \dots \otimes K$ vergleichen wir nun die Summanden vom Typ $(n_1, 0, 0, \dots) \otimes (0, n_2, 0, \dots) \otimes \dots$:

In der Gleichung der Form $\text{Res Ind}(C) = \sum \text{Ind Res}(C)$ gehören diese Summanden zu der Doppelnebenklasse des Elements $1 \in \Sigma_n(G)$. Auf der rechten Seite der Gleichung haben wir den Summanden des o.g. Typs von $A_{n_1} \otimes A_{n_2} \otimes \dots$, der durch die Induktionsvoraussetzung schon festgelegt ist. Gleichsetzen ergibt also

$$C = \text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots(G)}^{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots(G)} \text{Res}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots(G)}^{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots(G)}(C) = \tau_{n_1}^G(X_1) \otimes W_1^{(n_1)} \otimes \tau_{n_2}^G(X_2) \otimes W_2^{(n_2)} \otimes \dots$$

Damit folgt aus den Bedingungen, dass die Komponente vom Typ (n_1, n_2, \dots) genau die gewünschte Form hat.

Im zweiten Fall gilt $n = n_i$ für einen Index i . Da der zugehörige Summand von A_n nach Voraussetzung die Form $\tau_{n_1}^G(X_i) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{n_1}(G)}^{\Sigma_n(G)} Y_i$ mit eindeutig bestimmtem Y_i hat, können wir nur $W_i^{(n)} = Y_i$ setzen. Dass dieses neue Element in die exponentielle Folge $(W_i^{(1)}, W_i^{(2)}, \dots, W_i^{(n-1)})$ passt, folgt aus den Restriktionsbedingungen für den Typ (n) . \square

Aus diesem Satz folgt nun, dass wir F verwenden können, um Σ wie angekündigt auf die Kategorie der Ringe einzuschränken:

Satz 2.23. *Die Zuordnung*

$$K \mapsto \Sigma^{F \otimes K}(1)$$

definiert ein Cotripel in kommutativen Ringen.

Beweis. Durch zweimalige Anwendung des Funktors wird dem Ring K der Ring

$$\Sigma^{F \otimes \Sigma^{F \otimes K}(1)}(1)$$

zugeordnet. Nach Satz 2.22 sind die Green-Funktoren $F \otimes \Sigma^{F \otimes K}(1)$ und $\Sigma^{F \otimes K}$ isomorph, und damit ist dieser Ring isomorph zu

$$\Sigma^{\Sigma^{F \otimes K}}(1).$$

2. Äquivariante Wittvektoren

Als Diagramm ausgedrückt bedeutet die Aussage, dass in der Abbildung

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{R} & \xrightarrow{\Sigma^{F \otimes -}(1)} & \mathcal{R} & \xrightarrow{\Sigma^{F \otimes -}(1)} & \mathcal{R} \\
 F \otimes - \downarrow & & F \otimes - \downarrow & \text{ev}(1) \uparrow & \text{ev}(1) \uparrow \\
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{G}
 \end{array}$$

in der nach Konstruktion die beiden inneren Quadrate kommutieren, auch das äußere Diagramm kommutiert.

Wenn wir den Funktor $K \mapsto \Sigma^{F \otimes K}(1)$, der ja einem Ring einen weiteren Ring zuordnet, mit \perp bezeichnen, induziert die Comultiplikation von Σ also eine Comultiplikation der Form

$$\perp \rightarrow \perp \circ \perp$$

und macht so den Funktor $\perp = \Sigma^{F \otimes -}(1)$ zu einem Cotripel auf der Kategorie der Ringe. Dass die Diagramme aus Definition 2.15 kommutieren, führt man auf die Diagramme für Σ zurück. \square

2.5. Große Wittvektoren

Wir greifen nun doch einen Spezialfall heraus und untersuchen das Beispiel $F = R$, also den komplexen Darstellungsring. In diesem Fall werden wir feststellen, dass sich eine alternative Definition eines bereits bekannten Cotripels ergibt.

Sei G eine Gruppe. Wir fixieren zunächst eine Reihenfolge X_1, X_2, \dots der irreduziblen Darstellungen von G . Die Darstellung $X_1^{n_1} \otimes X_2^{n_2} \otimes \dots$ ist dann eine irreduzible Darstellung von G^n , und zusammen bilden diese irreduziblen Darstellungen eine Basis von $R(G^n)$. Der Darstellungsring von $\Sigma_n \langle G \rangle$ lässt sich nun mit Hilfe des folgenden Resultats beschreiben [JK81, Theorem 4.4.3]:

Lemma 2.24. *Die irreduziblen Darstellungen des Kranzprodukts $\Sigma_n \langle G \rangle$ sind genau die Darstellungen der Form*

$$\text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \langle G \rangle \times \Sigma_{n_2} \langle G \rangle \times \dots}^{\Sigma_n \langle G \rangle} (X_1^{\otimes n_1} \otimes W_1 \otimes X_2^{\otimes n_2} \otimes W_2 \otimes \dots),$$

wobei für einen festen Typ (n_1, n_2, \dots) die Darstellungen W_i alle irreduziblen Darstellungen von Σ_{n_i} durchlaufen.

Da außerdem $R(G) \otimes R(H) \cong R(G \times H)$ für alle G und H , erfüllt der Darstellungsring die Voraussetzungen für die Anwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 2.4. Wir erhalten nach Satz 2.23 durch die Zuordnung $K \mapsto \Sigma^{R \otimes K}(1)$ ein Cotripel auf kommutativen Ringen.

Bemerkung 2.25. Ausgeschrieben bedeutet das Ergebnis im Fall $G = 1$, dass

$$\prod_{j,k}^e R(\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle) \cong \prod_k^e R(\Sigma_k) \otimes \left(\prod_j^e R(\Sigma_j) \right)$$

oder allgemeiner für jeden Ring K , dass

$$\prod_{j,k}^e R(\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle) \otimes K \cong \prod_k^e R(\Sigma_k) \otimes \left(\prod_j^e R(\Sigma_j) \otimes K \right).$$

2.5.1. Isomorphie mit den Wittvektoren

Als erstes identifizieren wir den Funktor, der sich aus Σ durch Vor- und Nachschalten mit Tensorieren mit R bzw. Auswerten an der trivialen Gruppe ergibt, mit dem Funktor W , dessen wichtigste Eigenschaften in Anhang A.1 nachzulesen sind. Für den Beweis verwenden wir die verschiedenen Darstellungen der Hopfalgebra Sym und verweisen noch einmal auf Anhang A.2.

Satz 2.26. *Der Funktor $K \mapsto \Sigma^{R \otimes K}(1)$ ist isomorph zu dem Funktor W , der einem kommutativen Ring K den Ring der großen Wittvektoren über K zuordnet.*

Behauptet wird also, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{W} & \mathcal{R} \\ R \otimes - \downarrow & & \uparrow ev(1) \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{G} \end{array}$$

Den Beweis unterteilen wir in mehrere Hilfssätze. Zunächst gibt es auf dem Darstellungsring jeder endlichen Gruppe G eine kanonische nicht ausgeartete Paarung, die sich zu einer Abbildung

$$\langle -, - \rangle : (R(G) \otimes K) \times R(G) \rightarrow K$$

fortsetzt.

Lemma 2.27. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \prod^e R(\Sigma_n) \otimes K &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}\left(\bigoplus_n R(\Sigma_n), K\right) \\ (X_n)_n &\mapsto \sum_n \langle X_n, - \rangle \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen.

Beweis. Für jedes Element aus $\bigoplus R(\Sigma_n)$ hat die Summe $\sum_n \langle X_n, - \rangle$ nur endlich viele nichtverschwindende Summanden. Die durch diese Summe gegebene Abbildung ist offenbar additiv. Dass sie auch multiplikativ ist, folgt mit Hilfe von Frobenius-Reziprozität

2. Äquivariante Wittvektoren

aus der Restriktionseigenschaft von (X_n) :

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle X_n, Y \boxplus Z \rangle &= \sum_n \langle X_n, \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} Y_i \otimes Z_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} X_n, Y_i \otimes Z_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle X_i \otimes X_j, Y_i \otimes Z_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle X_i, Y_i \rangle \cdot \langle X_j, Z_j \rangle \\
&= \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle \cdot \sum_j \langle X_j, Z_j \rangle
\end{aligned}$$

Für die Bijektivität von φ verwenden wir die Tatsache, dass sich jede lineare Abbildung $R(\Sigma_n) \rightarrow K$ eindeutig in der Form $\langle X_n, - \rangle$ schreiben lässt. Dass die Folge $(X_n)_n$, die man auf diese Weise erhält, exponentiell ist, sieht man, wenn man die obige Gleichungskette umgekehrt liest: Für alle $Y, Z \in \bigoplus R(\Sigma_n)$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \langle \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} X_n, Y_i \otimes Z_j \rangle &= \sum_n \langle X_n, Y \boxplus Z \rangle \\
&= \sum_i \langle X_i, Y_i \rangle \cdot \sum_j \langle X_j, Z_j \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle X_i \otimes X_j, Y_i \otimes Z_j \rangle.
\end{aligned}$$

Einsetzen solcher Folgen für Y und Z , die nur in einem einzigen Grad nicht verschwinden, ergibt für alle i und j die Gleichheit von $\langle X_i \otimes X_j, - \rangle$ und $\langle \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} X_n, - \rangle$ und damit die geforderte Eigenschaft.

Um zu zeigen, dass φ die Gruppenstruktur erhält, identifizieren wir (wieder durch Frobenius-Reziprozität) die Verknüpfung auf der Hom-Menge mit der Addition \boxplus auf $\prod^e R(\Sigma_n) \otimes K$:

$$\begin{aligned}
\sum_n \langle \sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} X_i \otimes X'_j, Y_n \rangle &= \sum_n \sum_{i+j=n} \langle X_i \otimes X'_j, \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} Y_n \rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle X_i \otimes X'_j, (\Delta Y)_{i,j} \rangle
\end{aligned}$$

□

Schreiben wir die Hopfalgebra Sym als Polynomialgebra, so ergibt sich eine Identifikation mit einer weiteren Gruppe:

Lemma 2.28. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots], K) &\rightarrow 1 + tK[[t]] \\ f &\mapsto 1 + \sum_n f(y_n)t^n \end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Auf der linken Seite entspricht ein Ringhomomorphismus offenbar der Wahl eines Elements aus K für jeden Erzeuger y_n , sodass die Abbildung bijektiv ist. Das Produkt zweier Homomorphismen f und g , für das wir die Comultiplikation $y_n \mapsto \sum_{i+j=n} y_i \otimes y_j$ auf dem Polynomring benutzen, bildet y_n auf $\sum_{i+j=n} f(y_i) \cdot g(y_j)$ ab, und die zugehörige Potenzreihe ist das Produkt von $1 + \sum_i f(y_i)t^i$ und $1 + \sum_j g(y_j)t^j$. \square

Lemma 2.29. *Für jede exponentielle Folge (X_n) gilt*

$$n \cdot \langle X_n, 1_n \rangle = \sum_{i+j=n} \text{tr}((1 \dots i), X_i) \cdot \langle X_j, 1_j \rangle,$$

wobei mit „tr“ hier die Fortsetzung des Spur-Homomorphismus zu einer Abbildung $\text{tr} : \Sigma_n \times (R(\Sigma_n) \otimes K) \rightarrow K$ gemeint ist.

Beweis. Nach der Definition der Paarung auf dem Darstellungsring gilt

$$n! \cdot \langle X_n, 1_n \rangle = \sum_{\sigma} \text{tr}(\sigma, X_n).$$

Wir schreiben jede Permutation σ in Zykelschreibweise, angefangen mit 1, und sortieren nach der Länge i des ersten Zyklus c :

$$\sum_{\sigma} \text{tr}(\sigma, X_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{c, \tau} \text{tr}(c \cdot \tau, X_n),$$

wobei τ aus allen weiteren Zykeln von σ besteht, also als Element von Σ_{n-i} aufgefasst werden kann. Die Spur $\text{tr}(c \cdot \tau, X_n)$ zerlegt sich mit Hilfe der Relation

$$\text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_{n-i}}^{\Sigma_n} X_n = X_i \otimes X_{n-i}$$

demnach als $\text{tr}(c, X_i) \cdot \text{tr}(\tau, X_{n-i})$.

Da für ein festes i alle i -Zykel konjugiert sind und damit die Spur für alle gleich, können wir für jedes i einen i -Zykel auswählen, o.B.d.A. $c_i = (1 \dots i)$, und die Summe schreiben als

$$\sum_{i+j=n} \binom{n-1}{i-1} \cdot (i-1)! \cdot \text{tr}(c_i, X_i) \cdot \sum_{\tau \in \Sigma_j} \text{tr}(\tau, X_j) = (n-1)! \sum_{i+j=n} \text{tr}(c_i, X_i) \cdot \langle X_j, 1_j \rangle.$$

Division durch $(n-1)!$ liefert die gewünschte Gleichung. \square

2. Äquivariante Wittvektoren

Beweis von Satz 2.26. Additiv lässt sich der Ring der großen Wittvektoren WK mit der multiplikativen Gruppe $1+tK[[t]]$ identifizieren. Aus Lemma 2.27 und Lemma 2.28 ergibt sich der Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \kappa : \prod^e R(\Sigma_n) \otimes K &\rightarrow 1+tK[[t]] \\ (X_n) &\mapsto 1 + \sum_n \langle X_n, 1_n \rangle \cdot t^n. \end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass κ auch die Multiplikation erhält, verwenden wir die Abbildung

$$-t \cdot \frac{d \cdot \log}{dt} : 1+tK[[t]] \rightarrow tK[[t]],$$

die multiplikativ ist bezüglich des Produkts in den Wittvektoren und der komponentenweisen Multiplikation der Koeffizienten von t^n .

Aus Lemma 2.29 lässt sich ablesen, dass die zusammengesetzte Abbildung

$$\prod^e R(\Sigma_n) \otimes K \xrightarrow{\kappa} 1+tK[[t]] \xrightarrow{-t \cdot \frac{d \cdot \log}{dt}} tK[[t]]$$

die komponentenweise Multiplikation, also das Produkt auf diesen beiden Mengen, erhält: Es gilt

$$-t \cdot \frac{d \log}{dt} \left(1 + \sum_n \langle X_n, 1_n \rangle t^n \right) = -t \frac{\kappa'(X)}{\kappa(X)},$$

und nach dem Lemma ist

$$\begin{aligned} -t \cdot \kappa'(X) &= - \sum_n n \cdot \langle X_n, 1_n \rangle \cdot t^n \\ &= - \sum_{i,j} \text{tr}((1 \dots i), X_i) \cdot \langle X_j, 1_j \rangle \cdot t^{i+j} \\ &= - \sum_i \text{tr}((1 \dots i), X_i) t^i \cdot \kappa(X). \end{aligned}$$

Da die Abbildungen $\text{tr}((1 \dots i), -) : R(\Sigma_i) \otimes K \rightarrow K$ Ringhomomorphismen sind, erhält man das Bild eines Produkts exponentieller Folgen, indem man jeweils die Koeffizienten der gleichen Potenz von t multipliziert. Damit ist die Multiplikativität bewiesen. \square

2.5.2. Identifikation als Cotripel

Als letztes soll jetzt noch gezeigt werden, dass das Cotripel

$$K \mapsto \Sigma^{R \otimes K}(1)$$

von Ringen auch tatsächlich als Cotripel mit dem Wittvektor-Funktor

$$K \mapsto 1+tK[[t]]$$

übereinstimmt, dass also Comultiplikation und Coeins unter dem Isomorphismus

$$\begin{aligned}\Sigma^{R \otimes K}(1) &\rightarrow 1 + tK[[t]] \\ (X_n) &\mapsto \sum \langle X_n, 1_n \rangle \cdot t^n\end{aligned}$$

identifiziert werden.

Die Coeins ist im ersten Fall durch Einschränkung auf den ersten Faktor gegeben, im zweiten Fall durch Abbilden auf den Koeffizienten von t . Man sieht sofort, dass sich die erste Abbildung mittels des Isomorphismus aus der zweiten ergibt.

Satz 2.30. *Die Comultiplikation $\Sigma^{R \otimes K}(1) \rightarrow \Sigma^{R \otimes \Sigma^{R \otimes K}(1)}(1)$, die explizit als*

$$\begin{aligned}\prod^e R(\Sigma_n) \otimes K &\rightarrow \prod^e R(\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle) \otimes K \cong \prod^e R(\Sigma_k) \otimes \prod^e R(\Sigma_j) \otimes K \\ (X_n) &\mapsto (\text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle}^{\Sigma_{jk}} X_{jk})_{j,k}\end{aligned}$$

gegeben ist, stimmt unter der oben angegebenen Identifikation der Funktoren überein mit der Comultiplikation des Witt-Cotripels

$$\begin{aligned}1 + tK[[t]] &\rightarrow 1 + x(1 + tK[[t]])[[x]] \\ 1 + at &\mapsto 1 + (1 + at)x + x^2 + x^3 + \dots\end{aligned}$$

Beweis. Unten genügt es, die Abbildung

$$\Lambda : 1 + tK[[t]] \rightarrow 1 + x(1 + tK[[t]])[[x]]$$

auf den Potenzreihen der Form $1 + at$ anzugeben, da durch „Additivität“ (Addition ist hier Multiplizieren von Potenzreihen) und die Bedingungen $\Lambda^0 = 1$, $\Lambda^1 = id$ die Abbildung schon eindeutig festgelegt wird [AT69].

Für die Identifikation genügt es also auch in $\Sigma^{R \otimes K}(1)$, diejenigen Elemente zu untersuchen, die den Potenzreihen der Form $1 + at$ entsprechen, und im Bild die Komponenten ab der zweiten zu betrachten. In der 0. und 1. Komponente sieht man leicht, dass die Abbildung bereits die gewünschte Form hat.

Das Urbild von $1 + at$ in $\Sigma^{R \otimes K}(1)$ ist die Folge

$$(1, aV, a^2V, a^3V, \dots),$$

wobei V jeweils für die Vorzeichendarstellung in den Darstellungsringen $R(\Sigma_n)$ steht: Dieses Element ist offenbar exponentiell, und für $n \geq 2$ ist die Vorzeichendarstellung von Σ_n orthogonal zur trivialen Darstellung.

Das Bild dieser Folge unter der Restriktionsabbildung hat im Grad j, k das Element $a^{jk}V \in R(\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle) \otimes K$. Als Element von $\prod^e R(\Sigma_k) \otimes \prod^e R(\Sigma_j) \otimes K \cong \prod^e R(\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle) \otimes K$ überlegt man sich jetzt, dass es die Darstellung

$$(1 \otimes (T), V \otimes (aV), V \otimes (a^2T), V \otimes (a^3V), V \otimes (a^4T), \dots)$$

2. Äquivariante Wittvektoren

hat, wobei (bT) für die Folge $(1, b, b^2, b^3, \dots)$ steht, (bV) für die Folge $(1, b, b^2V, b^3V, \dots)$, und die beiden Folgen abwechselnd in den geraden bzw. den ungeraden k auftreten.

In dieser Form können wir das Bild in

$$1 + x(1 + tK[[t]])[[x]] \cong 1 + x\left(\prod^e R(\Sigma_j) \otimes K\right)[[x]]$$

leicht bestimmen, und zwar hat es die Form

$$1 + 1 \cdot (aV) \cdot x + \sum_{k=2}^{\infty} \langle V, 1_k \rangle \cdot c_k \cdot x^k.$$

Der Koeffizient $\langle V, 1_k \rangle \cdot c_k$ der höheren Potenzen von x verschwindet jeweils, weil die Vorzeichendarstellung keine Fixpunkte besitzt. In der vorliegenden Situation erhalten wir also das neutrale Element der Addition in $1 + tK[[t]]$, wo es als 1 geschrieben wird. Damit haben wir auf den Elementen der Form $1 + at$ bzw. (aV) die beiden Comultiplikationen identifiziert. \square

Die Coalgebren über dem Cotripel der großen Wittvektoren sind auch unter dem Namen (spezielle) λ -Ringe bekannt [Haz03, Abschnitt 2]; eine Zusammenfassung einiger Eigenschaften findet man in Anhang A.1.

Mit Hilfe der Ergebnisse aus diesem Kapitel erhalten wir nun eine neue Definition von λ -Ringen: Zunächst erhält man für jeden Ring K durch die von der Einheit $\mathbb{Z} \rightarrow K$ induzierte Abbildung und die Strukturabbildung von R einen Morphismus

$$R \rightarrow \Sigma^R \rightarrow \Sigma^{R \otimes K}.$$

Falls nun ein Ringhomomorphismus $K \rightarrow \Sigma^{R \otimes K}(1)$ vorgegeben ist, ergibt sich daraus – wie bereits beschrieben nach „Restriktion“ entlang $G \rightarrow 1$ für jede Gruppe G – durch Tensorieren eine Abbildung

$$R \otimes K \rightarrow \Sigma^{R \otimes K}$$

von Green-Funktoren. Die folgende Aussage können wir als Definition auffassen:

Korollar 2.31. *Ein λ -Ring ist ein kommutativer Ring K zusammen mit einem Ringhomomorphismus $K \rightarrow \Sigma^{R \otimes K}(1)$, durch den $R \otimes K$ eine Σ -Coalgebra wird.*

Da wegen der Identifikation der beiden Cotripel auch die Coalgebren übereinstimmen, kann man das Ergebnis präziser als Äquivalenz von Kategorien formulieren: Die Morphismen $K \rightarrow K'$ von λ -Ringen sind genau diejenigen Ringhomomorphismen, die einen Morphismus $R \otimes K \rightarrow R \otimes K'$ von Coalgebren induzieren.

Obwohl unsere Formulierung des Begriffs λ -Ring scheinbar komplizierter ist, weil nicht nur Ringe, sondern Green-Funktoren auftreten, ist der auffälligste Vorteil, dass sie völlig ohne die Verwendung komplexer Formeln auskommt und speziell für die Comultiplikation eine natürliche auftretende Konstruktion verwendet.

Beispiel 2.32. Als erste Bewährungsprobe für unsere neue Definition untersuchen wir das Standardbeispiel „topologische K -Theorie“: Für einen kompakten Raum X ist $K(X)$ definiert als Grothendieckring der Äquivalenzklassen von Vektorraumbündeln auf X ; die λ -Operationen erhält man üblicherweise aus äußeren Potenzen der Vektorraumbündel. Eine äquivariante Version des K -Theorie-Rings ergibt sich aus Vektorraumbündeln mit Gruppenoperation [Seg68].

Satz 2.33. *Der Ring $K(X)$ trägt auf natürliche Weise die Struktur eines λ -Rings.*

Beweis. Da der Raum X keine Gruppenoperation besitzt, ist die kanonische Abbildung

$$R(G) \otimes K(X) \rightarrow K^G(X)$$

für jede Gruppe G ein Isomorphismus [Seg68, Proposition 2.2].

Wie für unser erstes Beispiel einer Σ -Coalgebra, den Darstellungsring-Funktor, erhalten wir auf dem Green-Funktor $G \mapsto K^G(X)$ durch Bilden der Tensorpotenzen von Vektorraumbündeln einen Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} K^G(X) & \longrightarrow & \prod_n^e K^{\Sigma_n(G)}(X) \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ R(G) \otimes K(X) & \longrightarrow & \prod_n^e R(\Sigma_n(G)) \otimes K(X) \end{array}$$

Die Strukturabbildung für den λ -Ring lässt sich nun in der unteren Zeile ablesen. Die Coalgebraeigenschaft ist aus dem gleichen Grund erfüllt wie im Fall des Darstellungsringes. Damit haben wir eine λ -Ringstruktur nachgewiesen. \square

Den Vergleich mit der üblichen λ -Struktur verschieben wir auf den Abschnitt über Adamsoperationen in Kapitel 7.

Bemerkung 2.34. Für die Beispiele A und R kann man ähnliche Überlegungen wie diejenigen, die zur Konstruktion des Funktors Σ führen, in der Literatur finden. In [Bou92] tritt etwa auch ein Produkt über alle Burnside-Ringe von Kranzprodukten symmetrischer Gruppen mit einer festen Gruppe auf. In [Hof79] wird im Grunde der gleiche Ansatz wie hier verfolgt, um zu zeigen, dass man λ -Ringstrukturen auch mit Hilfe von Darstellungsringen von symmetrischen Gruppen und ihrer Kranzprodukte verstehen kann. Unsere Konstruktion lässt sich in diesem Zusammenhang gleichzeitig als Verallgemeinerung und Vereinfachung der Definition eines τ -Rings auffassen.

2.6. Zusammenfassung

Da es zwischen den vielen zwar relativ elementaren, aber langwierigen Beweisschritten nicht leicht ist, den Eindruck zu vermitteln, dass sich die hier beschriebene Konstruktion ganz einfach und natürlich ergibt, fassen wir die wesentlichen Ergebnisse hier noch einmal kurz zusammen.

2. Äquivariante Wittvektoren

Formal arbeiten wir mit Green-Funktoren $F \in \mathcal{G}$, die auf allen Permutationsgruppen definiert sind, und für die außerdem kompatible Ringhomomorphismen

$$F(G) \otimes F(H) \rightarrow F(G \times H)$$

zu allen Gruppen G und H vorgegeben sind. Der Funktor $\Sigma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ ist auf F gegeben durch

$$\Sigma^F(G) = \prod_n^e F(\Sigma_n \langle G \rangle).$$

Auf dieser Menge der exponentiellen Elemente wird komponentenweise multipliziert und mit dem Induktionsprodukt „ \boxplus “ addiert. Hier hilft es, sich als Zielsetzung zu merken, dass ein Objekt so auf die Folge seiner Potenzen abgebildet werden soll, dass sich ein Ringhomomorphismus ergibt.

Durch Anwendung von Σ ergibt sich also aus F ein weiterer Green-Funktor Σ^F , den wir wieder in die Konstruktion hineinstecken können. Das Ergebnis sieht auf der Gruppe G so aus:

$$\Sigma^{\Sigma^F}(G) = \prod_{j,k}^e F(\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle).$$

Aus den Restriktionsabbildungen zu Inklusionen der Form $\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle \rightarrow \Sigma_{jk}$ erhält man auf Σ eine Comultiplikation

$$\Sigma \rightarrow \Sigma \circ \Sigma.$$

Im letzten Abschnitt wurde das Cotripel, das sich auf diese Weise ergibt, durch Einsetzen des Darstellungsring-Funktors R auf die Kategorie \mathcal{R} der kommutativen Ringe eingeschränkt. Das Ergebnis ist isomorph zum Funktor W , der einen Ring auf den zugehörigen Ring der großen Wittvektoren abbildet. Die Identifikation gilt sogar als Cotripel, sodass sich eine neue Beschreibung der W -Coalgebren, also der λ -Ringe ergibt.

Dieser Zusammenhang lässt sich auch so ausdrücken, dass im Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R} & \xrightarrow{W} & \mathcal{R} & \xrightarrow{W} & \mathcal{R} \\ R \otimes - \downarrow & & R \otimes - \downarrow & \text{ev}(1) \downarrow & \uparrow \text{ev}(1) \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\Sigma} & \mathcal{G}, \end{array}$$

nicht nur die beiden inneren Teile kommutieren, sondern auch der äußere, und dass zusätzlich durch das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\Delta} & WW \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \Sigma^{R \otimes -}(1) & \xrightarrow{\text{Res}} & \Sigma^{\Sigma^{R \otimes -}}(1) \end{array}$$

die beiden Comultiplikationen identifiziert werden.

Wenn man nun auf einem Ring eine λ -Ringstruktur nachweisen möchte, gibt diese Konstruktion eine Strategie vor, die wir anhand des Beispiels „topologische K -Theorie“ schon beschrieben haben und hier noch einmal kurz skizzieren.

Zunächst sucht man eine passende Konstruktion des Rings, die sich äquivariant verallgemeinern lässt, etwa als Grothendieck-Ring von Objekten, deren Potenzen Operationen von symmetrischen Gruppen tragen. Die Abbildung, die diese Objekte auf die Folge ihrer Potenzen sendet, hat dann gute Chancen, zu einer Σ -Coalgebrastruktur zu führen. Allerdings erhält man die λ -Struktur erst, wenn es gelingt, aus den äquivarianten Versionen des Rings die Darstellungsringe herauszuziehen.

Diese letzte, sehr restriktive Bedingung kann man als Grund dafür betrachten, warum sich in Situationen, wo Potenzen in ganz ähnlicher Weise gebildet werden können wie für Vektorräume, oft doch keine λ -Ringstruktur finden lässt. In [Knu73, II.4] wird etwa beklagt, dass der Grothendieck-Ring von algebraischen Varietäten über einem endlichen Körper kein λ -Ring ist – genau diese Bedingung können wir jetzt als konzeptionelle Begründung anführen. Wir werden aber in Kapitel 6 noch einen Fall untersuchen, in dem unsere hier entwickelte Methode zum Erfolg führt.

2. Äquivariante Wittvektoren

3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe

In der stabilen Homotopietheorie gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, Beispiele für Mackey- und Green-Funktoren zu konstruieren. Als Vorbereitung auf den topologischen Teil in den folgenden Kapiteln stellen wir hier mehrere nützliche Resultate zusammen und beschreiben einige bekannte Sachverhalte in diesem Kontext.

3.1. Äquivariante stabile Homotopiegruppen

Wir erinnern zunächst an einige grundlegende Begriffe aus der äquivarianten stabilen Homotopietheorie [Die87, Ada84]. Sei dafür G eine endliche Gruppe.

Definition 3.1. Ein reelles G -Universum ist ein abzählbar-dimensionaler reeller Vektorraum mit einer linearen G -Operation und einem G -invarianten Skalarprodukt, der eine triviale G -Darstellung als Summanden enthält und der für jede Darstellung, die als G -Unterraum vorkommt, auch jedes Vielfache als Unterraum enthält.

Häufig ist U etwa eine abzählbar unendliche direkte Summe von Kopien der regulären Darstellung von G ; da diese für endliche Gruppen alle irreduziblen Darstellungen als Summanden enthält, wird dieses Universum auch vollständiges Universum genannt. Wir fixieren für die nächsten Abschnitte ein G -Universum, das nicht unbedingt vollständig sein muss. Die Idee bei der Betrachtung „echter“ äquivarianter stabiler Homotopietheorie ist es, die Gruppe auch auf den Sphären operieren zu lassen, die zum Einhängen verwendet werden, und zwar in der Art, dass die Operation von einer linearen Operation auf dem Vektorraum herkommt, aus dem man die Sphäre durch Einpunktkompaktifizierung erhält. Wenn wir für U das triviale Universum \mathbb{R}^∞ ohne Gruppenoperation wählen, erhalten wir stattdessen eine „naive“ Version ohne G -Operation auf den Sphären.

Durch Einschränken der Operation auf eine Untergruppe H von G können wir U zu einem H -Universum machen.

Für jede Inklusion $V \subset W$ von G -Darstellungen aus U mit orthogonalem Komplement $W - V$ erhält man durch Bilden des Smashprodukts mit der Identität auf S^{W-V} eine Abbildung

$$[S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^G \rightarrow [S^W \wedge X, S^W \wedge Y]^G.$$

Definition 3.2. Für zwei G -Räume X und Y wird die Menge der G -äquivarianten stabilen Homotopieklassen definiert als Colimes über un stabile G -Homotopieklassen der Form

$$\varinjlim [S^V \wedge X, S^V \wedge Y]^G,$$

wobei V alle endlichdimensionalen G -invarianten Unterräume von U durchläuft.

Wir bezeichnen die Menge der stabilen Morphismen wieder mit $[X, Y]^G$; ob damit die stabile oder un stabile Version gemeint ist, ergibt sich im Folgenden jeweils aus dem Zusammenhang.

3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe

Die Konstruktion in den nächsten Unterabschnitten benötigen wir, um die Strukturabbildungen in einem topologischen Beispiel für einen Mackey-Funktor beschreiben zu können (vgl. [Tho99, §6-7]).

3.2. Die Pontrjagin-Thom-Konstruktion

Wir beschreiben in diesem Abschnitt kurz die Konstruktion der Pontrjagin-Thom-Abbildung in einem einfachen Fall, angelehnt an die Darstellung in [Ada78, 4.1]. Sei $X \rightarrow Y$ eine Überlagerung von topologischen Räumen mit endlichen Fasern. Als Beispiel kann man sich die Überlagerung $EG/H \rightarrow EG/G$ für eine Untergruppe $H \subset G$ vorstellen.

Bemerkung 3.3. Wenn eine konkrete Beschreibung des klassifizierenden Raums BG benötigt wird, bilden wir EG als geometrische Realisierung des Nervs der Kategorie \mathcal{G} , deren Objekte die Elemente der Gruppe G sind und deren Morphismenmengen jeweils einen Pfeil enthalten. Der Raum BG ergibt sich aus EG durch Herausteilen der G -Operation. Die Teilkomplexe $EG^{(n)}$ bzw. $BG^{(n)}$ bestehen aus den Simplexes der Dimensionen bis n .

Konstruktion 3.4. Für den ersten Schritt nehmen wir an, dass X und Y endlichdimensionale CW-Komplexe sind. Das Einheitsintervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit I . Wir können nun eine Zahl n so wählen, dass X sich in $Y \times \overset{\circ}{I}^n$ einbetten lässt, sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \times \overset{\circ}{I}^n \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

kommutiert.

Um X finden wir außerdem eine Würfelumgebung $X \times I^n$, die ebenfalls (wie in [Ada78, 4.1.1] parallel) in $Y \times \overset{\circ}{I}^n$ eingebettet werden kann.

Eine Abbildung in die umgekehrte Richtung erhalten wir nun, indem wir in $Y \times I^n$ alles zu einem Punkt identifizieren, was nicht im Inneren von $X \times I^n$ liegt. Das ergibt eine Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (Y \times I^n)/(Y \times \partial I^n) & \longrightarrow & (X \times I^n)/(X \times \partial I^n) \\ \parallel & & \parallel \\ \Sigma^n Y & \longrightarrow & \Sigma^n X \end{array}$$

Diese Abbildung hängt als Morphismus in der stabilen Homotopiekategorie nicht von der Wahl der Zahl n und der Einbettungen ab.

Falls X und Y unendlichdimensionale Räume sind, führt man die Konstruktion für die Skelette durch und prüft Verträglichkeitsbedingungen für den Übergang vom k -Skelett zum $(k+1)$ -Skelett.

Wir erhalten so also für jede Inklusion $H \subset G$ einer Untergruppe stabile Transferabbildungen $BG_+ \rightarrow BH_+$ zwischen den klassifizierenden Räumen. Die entsprechende Abbildung zwischen den klassifizierenden Räumen der Kranzprodukte $\Sigma_n \langle G \rangle$ und $\Sigma_n \langle H \rangle$

erhalten wir aus dieser Abbildung: Die zugehörige Überlagerung ist

$$E\Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_n} BH_+^{\wedge n} \rightarrow E\Sigma_{n+} \wedge_{\Sigma_n} BG_+^{\wedge n}$$

und die Transferabbildung erhalten wir ebenfalls durch Bilden der erweiterten n -Potenz der Transferabbildung $BG_+ \rightarrow BH_+$.

Für endliche X und Y benötigen wir Transferabbildungen auch im äquivarianten Fall.

3.2.1. Äquivariante Version der Pontrjagin-Thom-Konstruktion

Analog kann man diese Konstruktion auch äquivariant durchführen [Die87, II.6.13]: Seien X und Y der Einfachheit halber diesmal endliche (diskrete) G -Räume und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine surjektive G -Abbildung, zum Beispiel eine Abbildung der Form $G/H \rightarrow *$ für eine Untergruppe H . Dann finden wir eine G -Darstellung V , sodass X sich als G -Raum in $Y \times V$ einbetten lässt und die Komposition mit der Projektion nach Y die vorgegebene Abbildung φ ist. Um X herum finden wir dann wieder eine Würfelumgebung $X \times V$, die invariant unter der G -Operation ist und sich ebenfalls als G -Raum einbetten lässt.

Zieht man alle Punkte, die nicht im Inneren dieser Umgebung liegen, zu einem Punkt zusammen, ergibt sich eine G -Abbildung

$$\begin{array}{ccc} (Y \times V)/(Y \times \partial V) & \longrightarrow & (X \times V)/(X \times \partial V) \\ \parallel & & \parallel \\ \Sigma^V Y & \longrightarrow & \Sigma^V X. \end{array}$$

Insbesondere erhalten wir also für endliche G -Mengen solche stabilen G -Abbildungen, etwa $G/G_+ \rightarrow G/K_+$ für eine Untergruppe K von G .

3.3. Mackey-Eigenschaft

Mit Hilfe der Pontrjagin-Thom-Konstruktion können wir nun wie angekündigt alle Strukturabbildungen eines topologischen Beispiels beschreiben. Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.2.1 gilt:

Satz 3.5. *Der Funktor $H \mapsto [X, Y]^H$ ist ein Mackey-Funktor auf den Untergruppen von G .*

Beweis. Für zwei Untergruppen $H' \subset H$ von G ist die Restriktion $[X, Y]^H \rightarrow [X, Y]^{H'}$ durch Einschränken der Gruppenoperation gegeben. Ob in der Definition von $[X, Y]^H$ der Colimes über alle H -Unterräume des Universums gebildet wird oder nur über diejenigen, die unter der Operation der ganzen Gruppe G invariant sind, spielt keine Rolle, da beide Systeme von Darstellungen cofinal im Universum U sind.

Die Induktionsabbildung ist durch die Zusammensetzung

$$[X, Y]^H \rightarrow [G_+ \wedge_H X, G_+ \wedge_H Y]^G \xrightarrow{t^*} [X, G_+ \wedge_H Y]^G \rightarrow [X, Y]^G$$

3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe

gegeben. Der zweite Pfeil verwendet die oben konstruierte äquivariante Transferabbildung, die Zusammensetzung der ersten beiden Abbildungen ist also der sogenannte Wirthmüller-Isomorphismus. Der letzte Pfeil steht für die G -äquivariante Projektion $G_+ \wedge_H Y \rightarrow Y$, die auf Räumen durch $(g, y) \mapsto gy$ gegeben ist.

Die Doppelnebenklassenformel folgt aus der entsprechenden Beziehung für den Burnsidering: Es gilt

$$\text{Res}_H^G(G/K) \cong \coprod H/(H \cap \sigma K),$$

wobei σ die Doppelnebenklassen von H und K in G durchläuft. Für einen G -Raum Z ist $G_+ \wedge_H Z \cong G/H_+ \wedge Z$ durch den G -Homöomorphismus $(g, z) \mapsto (g, gz)$. \square

Satz 3.6. *Falls X ein G -Raum ist, bilden die stabilen äquivalenten Cohomotopiegruppen $\pi_H^0(X)$ einen Green-Funktor auf der Kategorie der Untergruppen $H \subset G$.*

Beweis. Durch die natürliche Ringstruktur des Sphärenspektrums erhalten wir eine Multiplikation auf den Cohomotopiegruppen. Die Restriktions- und Konjugationsabbildungen sind mit dieser Multiplikation verträglich. Für Frobenius-Reziprozität betrachtet man für $f \in [X_+, S]^G, g \in [X_+, S]^H$ und G -Darstellungen V und W das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} S^V \wedge X_+ \wedge S^W \wedge X_+ & \xrightarrow{t} & G_+ \wedge_H (S^V \wedge X_+) \wedge S^W \wedge X_+ & \longrightarrow & G_+ \wedge_H S^V \wedge S^W & \longrightarrow & S^V \wedge S^W \\ & \searrow & \uparrow & & \uparrow & & \nearrow \\ & & G_+ \wedge_H (S^V \wedge X_+ \wedge S^W \wedge X_+) & \longrightarrow & G_+ \wedge_H (S^V \wedge S^W) & & \end{array} .$$

Die senkrechten Pfeile sind die durch $(g, x, y) \mapsto (g, x, gy)$ (mit $x \in S^V \wedge X_+$ bzw. $x \in S^V$ etc.) gegebenen G -Isomorphismen. Aus der unteren Zeile dieses Diagramms ergibt sich durch Zusammensetzen mit der Diagonale $S^{V \oplus W} \wedge X_+ \xrightarrow{\text{id} \wedge \Delta} S^{V \oplus W} \wedge (X_+ \wedge X_+)$ die Abbildung $\text{Ind}_H^G(f \cdot \text{Res}_H^G g)$, aus der oberen Zeile wird dagegen $\text{Ind}_H^G(f) \cdot g$ gebildet. \square

Falls wir auf dem Einhängungsspektrum des G -Raums Y eine Multiplikation haben, zeigt man auf die gleiche Weise, dass die äquivalenten Homotopiegruppen von Y – bzw. die Zuordnung $H \mapsto [X, Y]^H$ – einen Green-Funktor auf den Untergruppen von G bilden [Car03, Tho99].

3.4. Isomorphismus mit dem Burnsidering

Wenn wir auf beiden Seiten das äquivariante Sphärenspektrum einsetzen, erhalten wir das initiale Objekt aus der Kategorie der Green-Funktoren zurück [Seg71, Die87]:

Satz 3.7. *Die eindeutige Abbildung von Green-Funktoren $\varphi_G : A(G) \rightarrow [S, S]^G$ ist ein Isomorphismus.*

Beweis. Zunächst beschreiben wir die Abbildung auf der additiven Basis $\{G/K\}$ von $A(G)$: Da das Bild von G/K unter φ_G genau das Element $\text{Ind}_K^G(1)$ ist, erhält man

3.4. Isomorphismus mit dem Burnsidering

einen zugehörigen Repräsentanten $f : S^V \rightarrow S^V$ durch Anwenden der G -äquivalenten Pontrjagin-Thom-Konstruktion auf G/K .

Für die Konstruktion des Inversen von φ betrachten wir zunächst die Abbildung

$$\deg_G : [S, S]^G \rightarrow \prod_{(H)} \mathbb{Z},$$

die einem Element $f \in [S, S]^G$, das durch eine G -Abbildung $f_V : S^V \rightarrow S^V$ repräsentiert wird, das Tupel

$$(\deg((f_V)^H : (S^V)^H \rightarrow (S^V)^H))_H$$

zuordnet, wobei $(-)^H$ wie üblich für die Fixpunkte steht. Im Produkt durchläuft H die Konjugationsklassen von Untergruppen von G , sodass sich $A(G)$ wie üblich als Unterring auffassen lässt.

Um diese Behauptung zu beweisen, ist folgendes zu zeigen:

- ▷ Die Abbildung \deg_G ist wohldefiniert.
- ▷ Die Abbildung ist ein Ringhomomorphismus.
- ▷ Die Zusammensetzung $\deg_G \circ \varphi_G : A(G) \rightarrow \prod_{(H)} \mathbb{Z}$ ist die Einbettung von $A(G)$ in das Produkt aus Bemerkung 1.6.
- ▷ Die Abbildung φ ist surjektiv.

Durch Zusammensetzen mit der Umkehrabbildung der Einbettung $A(G) \rightarrow \prod_{(H)} \mathbb{Z}$ liefert \deg_G dann auf dem Bild dieser Einbettung das Inverse der kanonischen Abbildung φ .

Die Abbildung ist wohldefiniert, denn durch Einhängen mit G -Darstellungen ändert sich der Abbildungsgrad auf den Fixpunkten nicht. Es gilt $(X \wedge S^V)^H = X^H \wedge (S^V)^H$. Die Abbildung ist ein Ringhomomorphismus, denn Fixpunkte und Abbildungsgrad sind additive und multiplikative Abbildungen.

Wir beweisen den vorletzten Punkt durch Nachrechnen auf der Basis $\{G/K\}$ von $A(G)$. Zunächst wird das Basiselement G/K in eine G -Darstellung eingebettet, etwa in den von dieser Menge erzeugten Vektorraum V . Durch die äquivalente Pontrjagin-Thom-Konstruktion ergibt sich nun eine Abbildung, die alle Basiselemente (und kein weiteres Element) auf dasselbe Element in S^V abbildet. Der Grad dieser Abbildung und der Abbildungen auf den Fixpunktmenge kann in diesem Punkt berechnet werden, indem man jeweils das Urbild betrachtet. Für eine beliebige Untergruppe H von G besteht das Urbild unter der H -Fixpunktabbildung aber genau aus der Menge der H -Fixpunkte von G/K . Damit stimmt die Zusammensetzung $\deg_G \circ \varphi_G$ mit der üblichen Abbildung $A(G) \rightarrow \prod_H \mathbb{Z}$ überein.

Für die Surjektivität von φ verwenden wir den folgenden Spaltungssatz von Segal und tom Dieck [Seg71, Prop. 4], dessen Beweis man in [Die87, II.7.7 und II.8.2] oder in [Die75] nachlesen kann:

3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe

Satz 3.8. *Es gilt $\pi_G^0(EG) \cong \bigoplus \pi_{W(H)}^0(EW(H))$, und für endliche Gruppen ist jeder Summand isomorph zu \mathbb{Z} .*

Eine additive Basis von $\pi_G^0(EG)$ enthält also für jede Konjugationsklasse von Untergruppen von G ein Element, genau wie der Burnsidering. Nach [Die75, Satz 4] bildet φ das Element G/H für einen Repräsentanten H einer solchen Konjugationsklasse genau auf einen Erzeuger von $\pi_{W(H)}^0(EW(H))$ ab. Damit folgt die Surjektivität von φ_G aus Satz 3.8. \square

3.5. Pro-Kategorien und Pro-Morphismen

Wir erinnern in diesem Abschnitt an einige Eigenschaften von Pro-Kategorien und Pro-Morphismen [AM69, A.2], die für das Verständnis der als Segal-Vermutung bekannten Aussage nützlich sein werden.

Definition 3.9. Ein Pro-System in einer Kategorie \mathcal{C} ist ein Funktor $X : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{C}$ von einer gerichteten Indexkategorie \mathcal{N} nach \mathcal{C} .

Als gerichtete Indexkategorie bezeichnen wir eine kleine Kategorie, in der zu je zwei Objekten n, n' ein Objekt m mit Morphismen sowohl nach n als auch nach n' existiert und zu je zwei Morphismen $n \rightrightarrows n'$ ein Morphismus $n' \rightarrow m$, sodass die Kompositionen übereinstimmen.

Wir betrachten also die allgemeinere Version von Pro-Kategorien, in denen verschiedene Pro-Objekte im Allgemeinen durch verschiedene Diagramme indiziert sind. Die Morphismen definiert man für zwei Pro-Systeme $X = \{X_m\}_{m \in \mathcal{M}}$ und $Y = \{Y_n\}_{n \in \mathcal{N}}$ als

$$\text{Pro-}\mathcal{C}(X, Y) = \varprojlim_{n \in \mathcal{N}} \varinjlim_{m \in \mathcal{M}} \mathcal{C}(X_m, Y_n).$$

Die Abbildungen zwischen den Hom-Mengen sind die offensichtlichen Abbildungen, die sich aus den Morphismen der Indexkategorien ergeben.

Falls $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathbb{N}$, falls also die Pro-Systeme aus einem Turm bestehen, können wir einen Pro-Morphismus durch die Angabe von kompatiblen Morphismen $X_{m_n} \rightarrow Y_n$ repräsentieren, wobei zu jedem Index $n \in \mathbb{N}$ ein passender Index $m_n \in \mathbb{N}$ gewählt wird.

Bemerkung 3.10. Ein Isomorphismus von Pro-Systemen induziert auch auf dem Limes und seinen abgeleiteten Funktoren Isomorphismen.

Ein Beispiel für ein Pro-System, das auf \mathbb{N} indiziert ist, bilden die Quotienten des Burnsiderings $A(G)$ nach den Potenzen des Augmentationsideals I_G . Die Strukturabbildungen des Green-Funktors A lassen sich dabei sogar auf die Pro-Systeme fortsetzen: Die Beziehung $\text{Res } I_G^k \subset I_H^k$ gilt für alle $H \subset G$, also liefert Restriktion immer einen Homomorphismus zwischen den Pro-Systemen. Da auch die Konjugationsabbildungen Ringhomomorphismen sind, induzieren sie dort ebenfalls Homomorphismen. Bei der Konstruktion der Induktionsabbildungen hilft die folgende Aussage [Lai79, Prop. 1.14]:

Lemma 3.11. *Falls H eine Untergruppe von G ist, definieren die absteigenden Folgen von Idealen $\{I_G^n \cdot A(H)\}$ und $\{I_H^n\}$ zwei Filtrierungen auf $A(H)$, die dieselbe Topologie induzieren.*

Aus dem Lemma folgt, dass die Pro-Systeme $\{A(H)/I_H^n\}_n$ und $\{A(H)/(I_G^n \cdot A(H))\}_n$ isomorph sind, und da die Induktionsabbildung als $A(G)$ -Modulhomomorphismus eine Abbildung $\{A(H)/(I_G^n \cdot A(H))\}_n \rightarrow \{A(G)/I_G^n\}_n$ induziert, erhalten wir auch einen Pro-Morphismus

$$\text{Ind} : \{A(H)/I_H^n\}_n \rightarrow \{A(G)/I_G^n\}_n.$$

Da die Verträglichkeitsbedingungen zwischen den Abbildungen für den Burnside-Funktor gelten und die Fortsetzungen eindeutig sind, gelten die gleichen Beziehungen auch für den entsprechenden Funktor nach *Pro-Ab*.

Wir haben durch die Fortsetzung der Abbildungen auf die Pro-Systeme schon alle Zutaten für die Green-Funktor-Struktur auf der Vervollständigung \hat{A} .

Satz 3.12. *Der Funktor $G \mapsto \hat{A}(G) = \varprojlim A(G)/I_G^n$, wobei I_G das Augmentationsideal bezeichnet, ist wieder ein Green-Funktor, und die Abbildung $A \rightarrow \hat{A}$ ein Morphismus von Green-Funktoren.*

Die Restriktions-, Induktions- und Konjugationsabbildungen ergeben sich sofort durch Übergang zum Limes aus der stärkeren Aussage, dass die Abbildungen schon auf den Pro-Systemen existieren und dort alle geforderten Eigenschaften besitzen.

3.6. Die Segal-Vermutung

In der einfachsten Variante stellt die sogenannte Segal-Vermutung, deren Beweis in [Car84] abgeschlossen wurde, einen Zusammenhang zwischen der stabilen Cohomotopie von klassifizierenden Räumen endlicher Gruppen und der Vervollständigung des Burnside-Funktors am Augmentationsideal her.

Sei G eine endliche Gruppe. Wir werden vor allem die folgende stärkere Formulierung der Aussage brauchen [GM95, 8.3]:

Satz 3.13. *Die zusammengesetzte Abbildung $A(G) \rightarrow [S, S]^G \rightarrow [EG_+, S]^G$ induziert einen Isomorphismus*

$$\{\pi_G^*(S^0)/I_G^n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \{\pi_G^*(EG_+^{(m)})\}_{m \in \mathbb{N}}$$

von Pro-Gruppen.

Die zweite Abbildung erhält man aus der Projektion $EG_+ \rightarrow S^0 = *_{+}$, die alle Punkte von EG auf einen Punkt sendet. Für EG und die Skelette $EG^{(n)}$ wählen wir die Konstruktion aus Bemerkung 3.3. Durch Übergang zu den Vervollständigungen ergibt sich nun die bekanntere Formulierung; hier ist die Abbildung außerdem verträglich mit der Zusatzstruktur:

3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe

Satz 3.14. *Die Abbildung $A(G) \rightarrow [EG_+, S]^G \cong [BG_+, S]$ faktorisiert in eindeutiger Weise über die Vervollständigung $\hat{A}(G)$ und induziert einen Isomorphismus $\hat{A}(G) \rightarrow [BG_+, S]$ von Green-Funktoren.*

Beweis. Sei I_G das Augmentationsideal von $A(G)$. Durch den Isomorphismus mit π_G^0 wird I_G mit dem Kern der Abbildung

$$[S, S]^G \rightarrow [S, S]^1 \cong [G_+, S]^G$$

identifiziert. Auf $\pi_G^0(G_+)$ operiert I_G trivial, und jede G -Menge X , auf der G frei operiert, ergibt sich durch Zusammenkleben von G -Mengen der Form $Y \wedge G_+$. Da sich die Eigenschaft, ein Modul über der Vervollständigung am Augmentationsideal zu sein, auf die Homotopie von Erweiterungen überträgt, ist $\pi_G^0(X)$ für jeden endlichen freien G -Komplex X ein Modul über dem vervollständigten Ring $\hat{A}(G)$.

Der Raum EG setzt sich aus solchen endlichen freien G -Räumen als $EG = \varinjlim EG^{(n)}$ zusammen. Aus der Isomorphie der Pro-Systeme $\{\pi_G^*(EG_+^{(n)})\}$ und $\{\pi_G^*/I^n\}$ folgt, dass der \lim^1 -Term verschwindet, da das zweite System die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllt. Damit gilt $\pi_G^0(EG_+) = \varinjlim \pi_G^0(EG_+^{(n)})$, und dieser $A(G)$ -Modul ändert sich bei Vervollständigung an I_G nicht [GM95, 6].

Die Abbildungen $\hat{A}(G) \rightarrow [BG_+, S]$ sind mit der Green-Funktor-Struktur verträglich:

Sei H eine Untergruppe von G . Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A(G) & \longrightarrow & [BG_+, S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A(H) & \longrightarrow & [BH_+, S] \end{array}$$

wird durch Vervollständigung am Augmentationsideal von $A(G)$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \hat{A}(G) & \longrightarrow & [BG_+, S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \hat{A}(H) & \longrightarrow & [BH_+, S], \end{array}$$

denn die Gruppen auf der rechten Seite sind schon $\hat{A}(G)$ -Moduln. Für die Induktions- und Konjugationsabbildungen argumentiert man genauso. \square

3.6.1. Moore-Spektren

Sei K eine freie abelsche Gruppe und SK ein zugehöriges Moore-Spektrum. Per Definition ist SK also ein konnektives Spektrum, dessen Homologie K in Grad 0 konzentriert ist. Für freie abelsche Gruppen gibt es eine besonders einfache Beschreibung: Falls $I = \{x_i\}$ eine Basis von K ist, wird das Spektrum $\bigvee_I S$, also die zugehörige Summe von Sphärenspektren, zu einem Moore-Spektrum mit Homologie K . Interessieren wird uns in den

nächsten Kapiteln, wie man auf einem solchen Spektrum auf verschiedene Arten eine vorgegebene Ringstruktur auf K realisieren kann.

Wir bezeichnen mit I_G in diesem Abschnitt den Kern der Abbildung $A(G) \otimes K \rightarrow K$, die durch Fortsetzen der Augmentation $A(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ entsteht.

Satz 3.15. *Die Pro-Systeme $\{(A(G) \otimes K)/I_G^n\}$ und $\{[BG_+^{(n)}, SK]\}$ sind isomorph.*

Beweis. Der Pro-Isomorphismus ergibt sich aus dem Ergebnis von Carlsson durch Tensorieren mit K für jeden Index: Da die Filtrierung von BG aus kompakten Teilkomplexen besteht und $SK \simeq \bigvee S$ eine Summe von Sphärenspektra ist, gilt

$$[BG_+^{(n)}, S]_* \otimes K \cong [BG_+^{(n)}, S]_* \otimes [S, SK] \cong [BG_+^{(n)}, SK]_*,$$

wobei die Abbildung $[BG_+^{(m)}, S]_* \otimes [S, SK] \rightarrow [BG_+^{(m)}, SK]_*$ durch Komposition von Morphismen induziert wird. Also haben wir sogar

$$\{[S, SK]_*^G/I_G^n\} \cong \{[BG_+^{(n)}, SK]_*\},$$

und insbesondere folgt der Isomorphismus der Pro-Systeme in Grad 0. □

Satz 3.16. *Der Limes*

$$\hat{A}_K(G) = \varprojlim (A(G) \otimes K)/I_G^n$$

ist als Mackey-Funktor isomorph zu $[BG_+, SK]$.

Beweis. Die Isomorphie folgt aus dem Beweis von Satz 3.15: Das System $\{[S, SK]_*^G/I_G^n\}$ erfüllt offenbar die Mittag-Leffler-Bedingung. Damit verschwindet auch $\lim^1 [BG_+^{(n)}, SK]_*$ und es gilt

$$[BG_+, SK] \cong \varprojlim_n [BG_+^{(n)}, SK].$$

Der Isomorphismus

$$\hat{A}_K(G) \rightarrow [BG_+, SK]$$

ergibt sich jetzt aus Satz 3.15 durch Übergang zu den Limites. □

3. Äquivariante stabile Homotopie und Burnsideringe

4. H_∞ -Moore-Spektren

Mit Hilfe von kommutativen Multiplikationen auf Spektren lassen sich topologisch definierte Beispiele für Coalgebren über dem Cotripel Σ bilden. Aus dem Isomorphismus in Abschnitt 3.6.1 kann in einem Spezialfall für Moore-Spektren eine rein algebraische Bedingung für die Existenz einer solchen Multiplikation hergeleitet werden.

4.1. H_∞ -Spektren

Eine Möglichkeit, H_∞ -Spektren zu definieren, ist als Spektren mit der Operation einer E_∞ -Operade in der stabilen Homotopiekategorie. Wir werden diese Formulierung in den folgenden Abschnitten gar nicht brauchen und geben sie hier nur zur Motivation und zur Einordnung der Begriffe in den richtigen Zusammenhang an.

Falls \mathcal{C} die Operade mit den Räumen $\mathcal{C}(n)$ für jeden Index n bezeichnet, besitzt ein H_∞ -Spektrum X demnach Strukturabbildungen der Form $\mu_n : \mathcal{C}(n)_+ \wedge X^{\wedge n} \rightarrow X$, die über $\mathcal{C}(n)_+ \wedge_{\Sigma_n} X^{\wedge n}$ faktorisieren. Außerdem haben wir kommutative Diagramme der Gestalt

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{C}(k) \times \mathcal{C}(n_1) \times \cdots \times \mathcal{C}(n_k))_+ \wedge X^{\wedge n_1} \wedge \cdots \wedge X^{\wedge n_k} & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{C}(n)_+ \wedge X^{\wedge n} \\
 \downarrow \mu_{n_1} \wedge \cdots \wedge \mu_{n_k} & & \downarrow \mu_n \\
 \mathcal{C}(k)_+ \wedge X^{\wedge k} & \xrightarrow{\mu_k} & X
 \end{array}$$

in der stabilen Homotopiekategorie für alle k und alle Zerlegungen $n = n_1 + \cdots + n_k$. Den oberen Pfeil erhält man aus der Strukturabbildung γ von \mathcal{C} . Dass es sich um eine E_∞ -Operade handelt, bedeutet, dass jeder der Räume $\mathcal{C}(n)$ ein zusammenziehbarer Raum ist, auf dem Σ_n frei operiert; wir können also $\mathcal{C}(n) \simeq E\Sigma_n$ schreiben.

Bemerkung 4.1. Aus den wie in 3.3 konstruierten Räumen $E\Sigma_n$ setzt sich die sogenannte Barratt-Eccles-Operade zusammen. Welche E_∞ -Operade man auswählt, spielt in der Theorie eigentlich keine Rolle, da sich für äquivalente Operaden auch die zugehörigen Kategorien von Algebren vergleichen lassen.

Für ein Spektrum X bezeichnen wir mit $D_j X$ nun die j -te erweiterte Potenz von X , also

$$D_j X = E\Sigma_{j+} \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j}.$$

Wie in [LMSM86, VII.1.6] beschrieben, erhalten wir aus den Strukturabbildungen der Operade für alle Indizes i, j, k, n und alle Spektren X, Y natürliche Transformationen

- ▷ $\iota_n : X^{\wedge n} \rightarrow D_n X$
- ▷ $\alpha_{i,j} : D_i X \wedge D_j X \rightarrow D_{i+j} X$
- ▷ $\beta_{j,k} : D_j D_k X \rightarrow D_{jk} X$

4. H_∞ -Moore-Spektren

und außerdem die Abbildung $\delta_n : D_n(X \wedge Y) \rightarrow D_n X \wedge D_n Y$. Für unsere konkrete Konstruktion der erweiterten Potenzen ergeben sich die Abbildungen aus den Inklusionen $\Sigma_1^n \subset \Sigma_n$, $\Sigma_i \times \Sigma_j \subset \Sigma_{i+j}$, $\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle \subset \Sigma_{jk}$ und der Diagonale $E\Sigma_n \rightarrow E\Sigma_n \times E\Sigma_n$.

Nach [LMSM86, Prop. VII.2.2] können wir für die Definition von H_∞ -Spektren alternativ auch zwei Spezialfälle des oben angegebenen Diagramms verwenden; daraus folgt dann schon die Kommutativität des allgemeineren Diagramms. Wir verwenden als Definition die folgende Formulierung aus [BMMS86, I.3.1], die für unsere Zwecke am besten geeignet ist:

Definition 4.2. Ein H_∞ -Spektrum ist ein Spektrum X mit Multiplikationsabbildungen

$$\mu_j \in [D_j X, X]$$

für $j \geq 0$, sodass $\mu_1 = id_X$ und sodass die folgenden Diagramme in der stabilen Homotopiekategorie kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} D_j X \wedge D_k X & \xrightarrow{\alpha_{j,k}} & D_{j+k} X \\ \mu_j \wedge \mu_k \downarrow & & \downarrow \mu_{j+k} \\ X \wedge X & \xrightarrow{\iota_2} D_2 X \xrightarrow{\mu_2} & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} D_j D_k X & \xrightarrow{\beta_{j,k}} & D_{jk} X \\ D_j \mu_k \downarrow & & \downarrow \mu_{jk} \\ D_j X & \xrightarrow{\mu_j} & X \end{array}$$

4.2. Green-Funktor-Struktur auf Kohomologierungen

Sei X ein kommutatives Ringspektrum in der Homotopiekategorie und $n \in \mathbb{N}$. Die Multiplikation auf X kann sich etwa aus einer H_∞ -Struktur ergeben, diese stärkere Bedingung wird aber im Moment noch nicht vorausgesetzt. Wir wählen außerdem einen Raum E mit disjunktem Basispunkt, auf dem die Gruppe G außerhalb des Basispunkts frei operiert, sodass $E/K \rightarrow E/H$ für je zwei Untergruppen $K \subset H$ von G eine Überlagerung ist. Für E werden wir später zum Beispiel den Raum EG_+ oder ein endliches Skelett davon einsetzen.

Für Untergruppen H von G schreiben wir als Abkürzung

$$\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}_X^E(H) = [E/H, X],$$

wobei mit $[-, -]$ wie schon im letzten Abschnitt die Abbildungen in der stabilen Homotopiekategorie bezeichnet werden und die Räume dann für die entsprechenden Einhängungsspektren stehen. Die folgende Aussage ist nach den Ergebnissen im letzten Kapitel nicht überraschend (vgl. [Mad78, §1]):

Satz 4.3. *Der Funktor \mathcal{B} ist ein Green-Funktor auf der Kategorie der Untergruppen von G .*

Die Restriktions- und Induktionsabbildungen werden für zwei Untergruppen $H \subset K$ von G durch die natürliche Abbildung $E/H \rightarrow E/K$ und durch die zugehörige Transferabbildung aus Abschnitt 3.2 induziert. Die Konjugation erhält man aus der Konjugationsoperation von G auf E . Durch die Multiplikation μ von X wird eine Produktstruktur auf $\mathcal{B}(H)$ definiert, die diese Homotopiegruppen wie üblich zu einem kommutativen Ring macht.

Bemerkung 4.4. Herleiten lässt sich die Aussage auch aus der äquivarianten Version in Satz 3.5, indem man die Isomorphie

$$[E, X]^H \cong [E/H, X]$$

für alle $H \subset G$ ausnutzt.

Falls wir $E = EG_+$ wählen, wird der Funktor $G \mapsto [E/G, X] = [BG_+, X]$ sogar zu einem Green-Funktor auf der Kategorie *aller* Permutationsgruppen. Wir erhalten durch die Multiplikation μ_2 außerdem natürliche Abbildungen

$$[BG_+, X] \otimes [BH_+, X] \rightarrow [BG_+ \wedge BH_+, X \wedge X] \xrightarrow{\mu_2} [B(G \times H)_+, X],$$

sodass die Voraussetzungen für die Anwendung der Konstruktion Σ erfüllt sind.

Bemerkung 4.5. Etwas allgemeiner erhalten wir für jeden punktierten Raum B einen Green-Funktor auf allen Permutationsgruppen, indem wir $G \subset \Sigma_n$ den Ring

$$[EG_+ \wedge_G B^{\wedge n}, X]$$

zuordnen (der auf natürliche Weise isomorph zu $[E\Sigma_{n+} \wedge_G B^{\wedge n}, X]$ ist), also $E = E\Sigma_{n+} \wedge B^{\wedge n}$ wählen. Falls $G \subset \Sigma_i$ und $H \subset \Sigma_j$, gilt

$$E\Sigma_{i+} \wedge_G B^{\wedge i} \wedge E\Sigma_{j+} \wedge_H B^{\wedge j} \simeq E(\Sigma_i \times \Sigma_j)_+ \wedge_{G \times H} B^{\wedge i} \wedge B^{\wedge j} \simeq E\Sigma_{(i+j)_+} \wedge_{G \times H} B^{\wedge i+j},$$

und in diesem Fall lässt sich die Konstruktion Σ ebenfalls durchführen.

Satz 4.6. *Sei K eine freie abelsche Gruppe und SK ein zugehöriges Moore-Spektrum. Außerdem besitze K eine Ringstruktur, sodass SK ein Ringspektrum (bis auf Homotopie) wird, das diese Multiplikation realisiert. Dann ist \hat{A}_K auch als Green-Funktor isomorph zu $G \mapsto [BG_+, SK]$.*

Beweis. In Satz 3.16 wurde schon der Isomorphismus als Mackey-Funktoren bewiesen. Da die Multiplikation auf K von der Ringstruktur auf SK induziert wird, folgt die Isomorphie als Green-Funktoren aus der Isomorphie der Green-Funktoren \hat{A} und $[B(-)_+, S]$. \square

4.3. Σ -Coalgebrastruktur

Wir setzen nun voraus, dass X nicht mehr nur ein kommutatives Ringspektrum, sondern sogar ein H_∞ -Spektrum mit Strukturabbildungen $\mu_n : D_n X \rightarrow X$ ist. Das Ziel in diesem Abschnitt ist es, den Green-Funktor

$$G \mapsto [BG_+, X],$$

der auf allen Permutationsgruppen G definiert ist, auf natürliche Weise zu einer Σ -Coalgebra zu machen. Wir brauchen aber später auch endliche Skelette des klassifizierenden Raums und formulieren deshalb erst einmal etwas allgemeinere Aussagen.

4. H_∞ -Moore-Spektren

Sei B ein beliebiger punktierter Raum. Nach Bemerkung 4.5 können wir Σ auf den Green-Funktor, der eine Untergruppe $G \subset \Sigma_n$ auf $[EG_+ \wedge_G B^{\wedge n}, X]$ sendet, anwenden. Durch

$$[B, X] \xrightarrow{D_n} [D_n B, D_n X] \xrightarrow{\mu_{n*}} [D_n B, X]$$

wird nun eine Abbildung

$$\tau = (\tau_n) : [B, X] \rightarrow \prod_n [D_n B, X]$$

definiert.

Satz 4.7. *Das Bild von τ liegt in der Teilmenge der exponentiellen Elemente von $\prod_n [D_n B, X]$, besteht also aus Folgen (X_n) mit $\text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(X_n) = X_i \otimes X_j$ für alle $i+j = n$.*

Beweis. Sei $x : B \rightarrow X$ ein Morphismus in der stabilen Homotopiekategorie. Für alle i, j folgt aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_i B \wedge D_j B & \xrightarrow{\alpha} & D_{i+j} B \\ \downarrow & & \downarrow D_{i+j} x \\ D_i X \wedge D_j X & \xrightarrow{\alpha} & D_{i+j} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \wedge X & \xrightarrow{\iota} D_2 X \xrightarrow{\mu} & X \end{array}$$

dass $\text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_{i+j}} \tau_{i+j}(x) = \tau_i(x) \otimes \tau_j(x)$. □

Satz 4.8. *Die Abbildung $\tau : [B, X] \rightarrow \prod_n^e [D_n B, X]$ ist ein Ringhomomorphismus.*

Beweis. Seien $x, y \in [B, X]$. Für die Additivität verwenden wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} D_n B & \longrightarrow & D_n(B \vee B) & \xrightarrow{D_n(x \vee y)} & D_n(X \vee X) & \longrightarrow & D_n X \longrightarrow X \\ & \searrow & \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq & \nearrow \vee \alpha & \uparrow \\ & & \bigvee_{i+j=n} D_i B \wedge D_j B & \longrightarrow & \bigvee_{i+j=n} D_i X \wedge D_j X & \longrightarrow & X \wedge X \longrightarrow D_2 X \end{array}$$

Die obere Zeile repräsentiert das Element $\tau_n(x + y)$, die untere Zeile die Summe

$$\sum_{i+j=n} \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (\tau_i(x) \cdot \tau_j(y)).$$

Um zu zeigen, dass τ die Multiplikation erhält, betrachten wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 D_n B & \longrightarrow & D_n(B \wedge B) & \xrightarrow{D_n(x \wedge y)} & D_n(X \wedge X) & \xrightarrow{D_n \iota} & D_n D_2 X & \xrightarrow{D_n \mu} & D_n X \\
 & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \beta & & \downarrow \\
 & & D_n B \wedge D_n B & \xrightarrow{D_n x \wedge D_n y} & D_n X \wedge D_n X & \xrightarrow{\alpha} & D_{2n} X & \longrightarrow & X \\
 & & & & \downarrow & & & \nearrow & \\
 & & & & X \wedge X & \longrightarrow & D_2 X & &
 \end{array}$$

Die beiden rechten Diagramme kommutieren wegen der H_∞ -Eigenschaft, das linke wegen der Natürlichkeit der Transformation δ und das mittlere einfach aus dem Grund, dass die Gruppenhomomorphismen $\Sigma_n \rightarrow \Sigma_n \langle \Sigma_2 \rangle \rightarrow \Sigma_{2n}$ und $\Sigma_n \xrightarrow{\Delta} \Sigma_n \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma_{2n}$ übereinstimmen.

Da xy durch die Zusammensetzung $B \rightarrow B \wedge B \rightarrow X \wedge X \rightarrow D_2 X \rightarrow X$ gegeben ist, entspricht die obere Zeile dem Element $\tau_n(xy)$. Die untere Zeile ist das Produkt der Elemente $\tau_n(x)$ und $\tau_n(y)$. \square

Durch Einsetzen von $B = BG_+$ in Satz 4.8 erhalten wir für jede Gruppe G einen Ringhomomorphismus

$$\tau^G : [BG_+, X] \rightarrow \prod_j^e [D_j BG_+, X] = \prod_j^e [B\Sigma_j \langle G \rangle_+, X].$$

Auf der rechten Seite steht in diesem Fall der Ring $\Sigma^{[B(-)_+, X]}(G)$, und damit ist der Homomorphismus τ ein Kandidat für die Strukturabbildung einer Σ -Coalgebra.

Um diese Eigenschaft zu verifizieren, muss noch gezeigt werden, dass die Abbildungen τ_G sich zu einem Morphismus von Green-Funktoren zusammensetzen, der die Bedingungen für eine solche Coalgebrastruktur erfüllt.

Satz 4.9. *Die Ringhomomorphismen τ_G sind verträglich mit den Strukturabbildungen der Green-Funktoren.*

Beweis. Sei $H \rightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus. Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 [BG_+, X] & \longrightarrow & \prod_j^e [D_j BG_+, X] \\
 \downarrow \text{Res} & & \downarrow \text{Res} \\
 [BH_+, X] & \longrightarrow & \prod_j^e [D_j BH_+, X]
 \end{array}$$

kommutiert offensichtlich. Der einzige Punkt, der eine genauere Untersuchung erfordert, ist die Verträglichkeit mit Induktion: Die in Abschnitt 3.2 beschriebene Transferabbildung erhält man aber für $\Sigma_j \langle G \rangle$ und $\Sigma_j \langle H \rangle$ genau durch Anwenden von D_j auf die Transferabbildung von G und H . Das gleiche gilt für Konjugation mit Elementen aus G . \square

4. H_∞ -Moore-Spektren

Satz 4.10. Sei $\mathcal{B}(G) = [BG_+, X]$. Die Kommutativität des zweiten H_∞ -Diagramms für X impliziert, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(G) & \xrightarrow{\tau} & \Sigma^{\mathcal{B}}(G) \\ \tau \downarrow & & \downarrow \text{Res} \\ \Sigma^{\mathcal{B}}(G) & \xrightarrow{\Sigma\tau} & \Sigma^{\Sigma^{\mathcal{B}}}(G) \end{array}$$

in der Kategorie der Ringe kommutiert.

Beweis. Für einen vorgegebenen Morphismus $x : BG_+ \rightarrow X$ ergibt sich das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_j D_k B G_+ & \longrightarrow & D_{jk} B G_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_j D_k X & \longrightarrow & D_{jk} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_j X & \longrightarrow & X. \end{array}$$

Die Komposition des rechten und des oberen Morphismus ist das Bild von x unter der Abbildung

$$[BG_+, X] \xrightarrow{D_{jk}} [D_{jk} B G_+, D_{jk} X] \xrightarrow{\mu_*} [D_{jk} B G_+, X] \xrightarrow{\beta^*} [D_j D_k B G_+, X]$$

und entspricht algebraisch damit $\text{Res } \tau_{jk}^G(x)$. Links erhält man das Bild von x unter der Abbildung

$$\begin{array}{ccc} [BG_+, X] & \xrightarrow{D_k} & [D_k B G_+, D_k X] \xrightarrow{D_j} [D_j D_k B G_+, D_j D_k X] \\ & & \downarrow \mu_* \qquad \qquad \downarrow (D_j \mu_k)_* \\ & & [D_k B G_+, X] \xrightarrow{D_j} [D_j D_k B G_+, D_j X] \\ & & \downarrow \mu_* \\ & & [D_j D_k B G_+, X] \end{array}$$

und damit $\tau_j^{\Sigma_k(G)}(\tau_k^G(x))$. □

Zusammengefasst erhalten wir das folgende Resultat:

Satz 4.11. Die H_∞ -Multiplikation auf X induziert auf dem Green-Funktor

$$G \mapsto [BG_+, X]$$

eine Σ -Coalgebrastruktur.

4.4. Umkehrung: H_∞ -Strukturen für Moore-Spektren

Insbesondere gilt dieser Satz für das Sphärenspektrum, und da A das initiale Objekt in Green-Funktoren ist, kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \Sigma^A \\ \downarrow & & \downarrow \\ [B(-)_+, S] & \longrightarrow & \Sigma[B(-)_+, S]. \end{array}$$

Die Coalgebrastruktur von $[B(-)_+, S]$ setzt also durch die Identifikation mit \hat{A} die Σ -Coalgebrastruktur auf A fort.

4.4. Umkehrung: H_∞ -Strukturen für Moore-Spektren

Sei K ein Ring, der als \mathbb{Z} -Modul frei ist, und SK ein zugehöriges Moore-Spektrum. Aus der vorgegebenen Multiplikation auf K erhalten wir auf $\hat{A}_K \cong [B(-)_+, SK]$ eine Green-Funktor-Struktur. Das Ziel ist es nun, die Multiplikation auf SK zu einer H_∞ -Struktur zu erweitern.

Aus der H_∞ -Struktur des Sphärenspektrums erhalten wir für jeden Raum B nach Satz 4.8 einen Ringhomomorphismus

$$\tau : [B, S] \rightarrow \prod_j^e [D_j B, S].$$

Wir können für B wieder einen klassifizierenden Raum oder ein endliches Skelett davon einsetzen. Im Spezialfall $B = BG_+$ wurde in Satz 4.11 schon gezeigt, dass sich die Ringhomomorphismen

$$\tau_G : [BG_+, S] \rightarrow \prod_j^e [D_j BG_+, S]$$

zu einer Σ -Coalgebrastruktur auf diesem Funktor zusammensetzen.

Lemma 4.12. *Die Strukturabbildung setzt sich aus den Limes der Abbildungen*

$$\tau_G^{(n)} : [BG_+^{(n)}, S] \rightarrow \prod_j [D_j(BG_+^{(n)}), S]$$

zusammen.

Beweis. Die Abbildungen $\tau_G^{(n)}$ ergeben sich offenbar durch Einschränkung von τ_G . Dass der Limes auf der linken Seite tatsächlich die Gruppe $[BG, S]$ ist, dass also der \lim^1 -Term verschwindet, folgt aus dem Pro-Isomorphismus aus Abschnitt 3.6.

Auf der rechten Seite erhalten wir genauso für jede der Gruppen die Gleichung

$$\varprojlim [(D_j BG_+)^{(n)}, S] = [D_j BG_+, S].$$

Da es für dieses System keine Phantomabbildungen gibt, gilt das auch für das Pro-System $\{[D_j(BG_+^{(n)}), S]\}$, denn jeder Morphismus aus $[D_j BG_+, S]$, dessen Einschränkung in

4. H_∞ -Moore-Spektren

$\{[D_j(BG_+^{(n)}), S]\}$ das Nullelement ist, schränkt sich in $\{[(D_j BG_+)^{(n)}, S]\}$ ebenfalls zu 0 ein.

Um zu zeigen, dass sich die Abbildung als Limes schreiben lässt, genügen jetzt die Beobachtungen, dass der Vergissfunktorkomplex von $\mathcal{A}b$ nach Mengen mit Limites vertauscht und dass Produktbildung und Einschränkung auf die exponentiellen Elemente als Limites ebenfalls mit dem projektiven Limes vertauschen. \square

Durch Zusammensetzung mit der Einheit $S \rightarrow SK$ ergeben sich Ringhomomorphismen

$$[BG_+^{(n)}, S] \rightarrow \prod_j^e [D_j(BG_+^{(n)}), SK],$$

deren Limes die Abbildung

$$[BG_+, S] \rightarrow \varprojlim_j \prod_j^e [D_j(BG_+^{(n)}), SK] = \prod_j^e \varprojlim [D_j(BG_+^{(n)}), SK]$$

ist.

Für einen beliebig vorgegebenen Ringhomomorphismus $K \rightarrow \Sigma^{\hat{A}_K}(1)$ erhalten wir durch Einschränken auf $\prod_j^e [D_j(BG_+^{(n)}), SK]$ und Zusammensetzen mit

$$[BG_+^{(n)}, S] \rightarrow \prod_j^e [D_j(BG_+^{(n)}), SK]$$

Homomorphismen der Form

$$[BG_+^{(n)}, S] \otimes K \rightarrow \prod_j^e [D_j(BG_+^{(n)}), SK].$$

Im Limes ergibt sich ein Ringhomomorphismus

$$\tau^G : [BG_+, SK] \rightarrow \prod_j^e [B\Sigma_j \langle G \rangle_+, SK].$$

Als Mackey-Funktorkomplex ist $G \mapsto [BG_+, SK]$ nach Satz 3.16 isomorph zu \hat{A}_K , und die hier angegebene Abbildung τ^G wird zu einer Kandidatin für die Strukturabbildung einer Σ -Coalgebra.

Satz 4.13. *Falls der Green-Funktorkomplex \hat{A}_K mit den Abbildungen τ^G eine Σ -Coalgebra ist, wird dadurch eine H_∞ -Struktur auf SK induziert, die die Multiplikation auf SK fortsetzt.*

Mit der Fortsetzung der Multiplikation ist gemeint, dass die Zusammensetzung

$$SK \wedge SK \rightarrow D_2 SK \xrightarrow{\mu_2} SK$$

wieder die Multiplikation des kommutativen Ringspektrums SK in der stabilen Homotopiekategorie ergibt.

Diesen Satz beweisen wir in den folgenden Abschnitten in drei Schritten: Zunächst werden die Multiplikationsabbildungen mit Hilfe der Coalgebrastruktur definiert, dann wird die Kommutativität des ersten und des zweiten H_∞ -Diagramms nachgewiesen.

4.4.1. Definition der H_∞ -Struktur

Sei $\tau = \tau^1$ die Abbildung für die triviale Gruppe,

$$\tau : K \rightarrow \prod_n^e [B\Sigma_{n+}, SK] = \prod_n^e [D_n S, SK].$$

Wir können „Inklusionsabbildungen“ $\iota_i : S \rightarrow SK$ so wählen, dass sie den Elementen einer \mathbb{Z} -Basis von K entsprechen. Das induziert eine Äquivalenz

$$D_n SK \simeq \bigvee D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots$$

Die (n_1, n_2, \dots) -Komponente² der Multiplikation $\mu_n \in \bigoplus [D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots, SK]$ wird nun definiert als das Bild von $(\tau_{n_1}(\iota_1), \tau_{n_2}(\iota_2), \dots)$ unter der Abbildung

$$[D_{n_1} S, SK] \times [D_{n_2} S, SK] \times \dots \rightarrow [D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots, SK].$$

Lemma 4.14. *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} K^{\otimes n} &\cong [S, SK] \otimes \dots \otimes [S, SK] \longrightarrow [S \wedge \dots \wedge S, SK \wedge \dots \wedge SK] \\ &\longrightarrow [S, D_n SK] \\ &\cong \bigoplus [S, D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots] \\ &\xrightarrow{\mu_{n*}} [S, SK] \cong K \end{aligned}$$

ist die Multiplikation in K .

Beweis. Es genügt wegen der Linearität der beiden Abbildungen, die additiven Erzeuger ι_i von K zu betrachten. Sei $\iota_1^{n_1} \wedge \dots \wedge \iota_r^{n_r}$ ein entsprechendes Element im Produkt (o.B.d.A. in dieser Reihenfolge, da alle auftretenden Ringe kommutativ sind). Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S \wedge \dots \wedge S & \xrightarrow{\iota_1^{n_1} \wedge \dots \wedge \iota_r^{n_r}} & SK \wedge \dots \wedge SK \\ \parallel & & \parallel \\ D_1 S \wedge \dots \wedge D_1 S & & D_1 SK \wedge \dots \wedge D_1 SK \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_{n_1} S \wedge \dots \wedge D_{n_r} S & \xrightarrow{\quad} & D_n SK \\ & \searrow & \swarrow \\ & SK & \end{array}$$

und der Restriktionseigenschaft der Abbildungen τ_{i_k} erhält man die Gleichung

$$\text{Res}(\tau_{n_1}(\iota_1) \otimes \dots \otimes \tau_{n_r}(\iota_r)) = \tau_1(\iota_1)^{n_1} \otimes \dots \otimes \tau_1(\iota_r)^{n_r} = \iota_1^{n_1} \dots \iota_r^{n_r},$$

²Obwohl die Schreibweise hier suggeriert, dass die Basis abzählbar ist, was nicht vorausgesetzt wurde, behalten wir sie zur besseren Lesbarkeit bei.

4. H_∞ -Moore-Spektren

und das ist genau die Behauptung für die Erzeuger. Dabei verwenden wir wieder die gleiche Konvention und schreiben $\tau_{n_1}(\iota_1) \otimes \tau_{n_2}(\iota_2) \otimes \dots$ für das Bild dieses Elements in $[D_{n_1}S \wedge D_{n_2}S \wedge \dots, SK]$. \square

Lemma 4.15. *Die Komposition*

$$[BG_+, SK] \xrightarrow{D_j} [D_jBG_+, D_jSK] \xrightarrow{\mu_{j*}} [D_jBG_+, SK]$$

ist für jede Gruppe G und $j \in \mathbb{N}$ die vorgegebene Abbildung τ_j^G .

Beweis. Da die Strukturabbildungen für G durch Übergang zu den Skeletten und Bildung des Limes konstruiert wurden, reicht es, die Behauptung für die Abbildungen

$$[BG_+^{(n)}, SK] \rightarrow [D_jBG_+^{(n)}, D_jSK] \xrightarrow{\mu_j} [D_jBG_+^{(n)}, SK]$$

nachzuweisen. Für die kompakten Skelette gilt aber

$$[BG_+^{(n)}, SK] \cong [BG_+^{(n)}, S] \otimes [S, SK],$$

daher können wir uns auf $G = 1$ einschränken. Sei also $a = \sum_i a_i \iota_i \in [S, SK]$. Dann lässt sich a zusammensetzen als $S \rightarrow S \vee \dots \vee S \rightarrow S \vee \dots \vee S \simeq SK$, wobei wir wie oben wieder nur die nicht-verschwindenden Summanden betrachten und daher annehmen, dass K nur endlich viele \mathbb{Z} -Summanden hat. Die erste Abbildung ist die Abklemmabbildung, die zweite ist auf dem i -ten Summanden Multiplikation mit dem Koeffizienten a_i .

Als Bild unter der oben angegebenen Komposition erhalten wir aus dieser Darstellung

$$D_jS \rightarrow D_j(S \vee \dots \vee S) \simeq \bigvee D_{j_1}S \wedge D_{j_2}S \wedge \dots \rightarrow \bigvee D_{j_1}S \wedge D_{j_2}S \wedge \dots \xrightarrow{\mu} SK.$$

Da die Komposition der ersten beiden Abbildungen algebraisch der Induktionsabbildung $\text{Ind}_{\Sigma_{j_1} \times \Sigma_{j_2} \times \dots}^{\Sigma_j}$ entspricht, die in der Verknüpfung \boxplus auftritt, genügt es, sich auf den Fall $a = a_i \iota_i$ einzuschränken. Nach Konstruktion von τ gilt die Behauptung für die Erzeuger, und aus der Multiplikativität von τ folgt das Ergebnis auch für das Produkt, da der Ringhomomorphismus auf dem von 1 erzeugten Unterring \mathbb{Z} eindeutig bestimmt ist. \square

Lemma 4.16. *Die Strukturabbildungen des Green-Funktors \hat{A}_K der Form*

$$\hat{A}_K(G) \times \hat{A}_K(H) \rightarrow \hat{A}_K(G \times H)$$

entsprechen unter dem Isomorphismus $\hat{A}_K \cong [BG_+, SK]$ der Zusammensetzung

$$[BG_+, SK] \times [BH_+, SK] \rightarrow [BG_+ \wedge BH_+, SK \wedge SK] \xrightarrow{\mu_{2*}} [B(G \times H)_+, SK].$$

Beweis. Da der Isomorphismus

$$[BG_+^{(n)}, S] \otimes [S, SK] \rightarrow [BG_+^{(n)}, SK]$$

durch Komposition von Abbildungen induziert wird, folgt die Aussage nach Übergang zu den n -Skeletten aus dem Spezialfall $G = H = 1$. Dieser Fall wurde aber in Satz 4.14 schon bewiesen. \square

4.4.2. Kommutativität des ersten H_∞ -Diagramms

Um die Kommutativität der beiden Diagramme nachzuweisen, wird ausgenutzt, dass sich die Kohomologie von $D_n SK$ nach Wahl einer Basis aus der Kohomologie klassifizierender Räume der Form $B(\Sigma_{n_1} \times \cdots \times \Sigma_{n_r})$ zusammensetzt, die durch unsere algebraischen Bedingungen beschrieben wird. In den nächsten beiden Unterabschnitten wird also eigentlich nur durch „Nachrechnen“ überprüft, dass diese Bedingungen tatsächlich das Richtige modellieren.

Satz 4.17. *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} D_i SK \wedge D_j SK & \longrightarrow & D_{i+j} SK \\ \downarrow & & \downarrow \\ SK \wedge SK & \longrightarrow & D_2 SK \longrightarrow SK \end{array}$$

kommutiert für alle i, j .

Beweis. Wir untersuchen die Abbildung eingeschränkt auf einen beliebigen Summanden der Form

$$D_{i_1} S \wedge D_{i_2} S \wedge \cdots \wedge D_{j_1} S \wedge D_{j_2} S \wedge \cdots$$

von $D_i SK \wedge D_j SK$, betrachten also stattdessen das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_{i_1} S \wedge D_{i_2} S \wedge \cdots \wedge D_{j_1} S \wedge D_{j_2} S \wedge \cdots & \longrightarrow & D_{i_1+j_1} S \wedge D_{i_2+j_2} S \wedge \cdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ SK \wedge SK & \longrightarrow & D_2 SK \longrightarrow SK \end{array}$$

Die rechte Komposition ergibt das Element

$$\text{Res}_{\Sigma_{i_1} \times \Sigma_{j_1} \times \Sigma_{i_2} \times \Sigma_{j_2} \times \cdots}^{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \cdots} (\tau_{n_1}(t_1) \otimes \tau_{n_2}(t_2) \otimes \cdots).$$

Die linke Komposition liefert nach Lemma 4.14 das Produkt

$$(\tau_{i_1}(t_1) \otimes \tau_{i_2}(t_2) \otimes \cdots) \otimes (\tau_{j_1}(t_1) \otimes \tau_{j_2}(t_2) \otimes \cdots) \in [D_{i_1} S \wedge D_{i_2} S \wedge \cdots \wedge D_{j_1} S \wedge D_{j_2} S \wedge \cdots, SK].$$

Da die $(\tau_n(t_i))_n$ jeweils exponentielle Folgen sind, stimmen diese Elemente überein. \square

4.4.3. Kommutativität des zweiten Diagramms

Lemma 4.18. *Für ein gegebenes Element $x \in K \cong [S, SK]$ entsprechen die Zusammensetzungen*

$$D_j D_k S \xrightarrow{D_j D_k x} D_j D_k SK \xrightarrow{D_j \mu_k} D_j SK \xrightarrow{\mu_j} SK$$

algebraisch dem Bild von x unter der Abbildung

$$[S, SK] \rightarrow \prod_k^e [B\Sigma_k, SK] \rightarrow \prod_{j,k}^e [B\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle_+, SK].$$

4. H_∞ -Moore-Spektren

Beweis. Die Aussage folgt aus Lemma 4.15. □

Satz 4.19. *Das folgende Diagramm kommutiert für alle j, k :*

$$\begin{array}{ccc} D_j D_k SK & \xrightarrow{\beta} & D_{jk} SK \\ D_j \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ D_j SK & \xrightarrow{\mu} & SK \end{array}$$

Beweis. Da SK die einfache Form $S \vee S \vee \dots$ hat, setzen sich beide Abbildungen aus Summanden zusammen, die sich mit Hilfe von τ beschreiben lassen. In dieser Beschreibung übersetzt sich die Coalgebrabedingung genau in die Kommutativität dieses Diagramms.

Diese Beweisidee führen wir nun genauer aus und zerlegen $D_j D_k SK$ zunächst als

$$\begin{aligned} D_j D_k SK &\simeq D_j \left(\bigvee_{(k)} D_{k_1} S \wedge D_{k_2} S \wedge \dots \right) \\ &\simeq \bigvee_{(j)} \bigwedge_{(k)} D_{j(k)} (D_{k_1} S \wedge D_{k_r} S \wedge \dots). \end{aligned}$$

Hier läuft (k) über die verschiedenen Zerlegungen von k als $k_1 + k_2 + \dots$ und (j) über die Zerlegungen der Form $j = \sum_{(k)} j(k)$; mit anderen Worten, (j) ordnet jeder Partition (k) von k eine Zahl $j(k)$ zu. Wir betrachten die Abbildungen nun auf jedem Summanden einzeln, fixieren also für die folgenden Überlegungen eine Zerlegung (j) von j .

Um die Komposition $\mu_j \circ D_j \mu_k$ auf der linken Seite zu beschreiben, wenden wir die Kommutativität des ersten H_∞ -Diagramms mehrfach an und erhalten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge_{(k)} D_{j(k)} (D_{k_1} S \wedge D_{k_2} S \wedge \dots) & & & & \\ \downarrow D_{k_1} \iota_1 \wedge \dots & \searrow & & & \\ \bigwedge_{(k)} D_{j(k)} (D_{k_1} SK \wedge D_{k_2} SK \wedge \dots) & \xrightarrow{\alpha} & \bigwedge_{(k)} D_{j(k)} D_k SK & \xrightarrow{\alpha} & D_j D_k SK \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ \bigwedge_{(k)} D_{j(k)} (SK \wedge SK \wedge \dots) & \longrightarrow & \bigwedge_{(k)} D_{j(k)} SK & \xrightarrow{\alpha} & D_j SK \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ & & SK \wedge SK \wedge \dots & \longrightarrow & SK. \end{array}$$

Hier kommen die unteren beiden Abbildung von der Zusammensetzung

$$SK \wedge SK \wedge \dots \rightarrow D_n SK \rightarrow SK$$

4.4. Umkehrung: H_∞ -Strukturen für Moore-Spektren

her. Die linke Seite ist darin jeweils ein endliches Smash-Produkt, da nur für die positiven Indizes k_i bzw. $j_{(k)}$ aus der Zeile darüber Faktoren auftreten. Die Kommutativität der beiden untersten Quadrate folgt jeweils aus der verallgemeinerten Version des ersten H_∞ -Diagramms für mehrere Summanden.

Aus dem Diagramm und Lemma 4.16 folgt, dass es genügt, die Abbildungen auf den einzelnen Faktoren zu untersuchen. Für jeden Index (k) erhalten wir auf der linken Seite auf dem entsprechenden Faktor nach Lemma 4.15 die Abbildung, die durch

$$\tau_{j_{(k)}}^{\Sigma_{k_1} \times \Sigma_{k_2} \times \dots} (\tau_{k_1}(t_1) \otimes \tau_{k_2}(t_2) \otimes \dots)$$

beschrieben wird.

Auf der rechten Seite zerlegen wir für die Beschreibung von $\mu_{jk} \circ \beta$ das Element $D_n SK$ in Summanden der Form $D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots$ und stellen fest, dass α den Summanden

$$\bigwedge_{(k)} D_{j_{(k)}} (D_{k_1} S \wedge D_{k_2} S \wedge \dots) \simeq \bigwedge_{(k)} D_{j_{(k)}} D_{k_1} S \wedge D_{j_{(k)}} D_{k_2} S \wedge \dots$$

von $D_j D_k SK$ in den Summanden von $D_n SK$ mit den Indizes $n_i = \sum_{(k)} k_i \cdot j_{(k)}$ abbildet. Um die Abbildung mit Hilfe von τ beschreiben zu können, betrachten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge_{(k)} D_{j_{(k)}} D_{k_1} S \wedge D_{j_{(k)}} D_{k_2} S \wedge \dots & \longrightarrow & \bigwedge_{(k)} D_{j_{(k) \cdot k_1}} S \wedge D_{j_{(k) \cdot k_2}} S \wedge \dots & \longrightarrow & D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge_{(k)} D_{j_{(k)}} D_{k_1} SK \wedge D_{j_{(k)}} D_{k_2} SK \wedge \dots & \longrightarrow & \bigwedge_{(k)} D_{j_{(k) \cdot k_1}} SK \wedge D_{j_{(k) \cdot k_2}} SK \wedge \dots & \longrightarrow & D_{n_1} SK \wedge D_{n_2} SK \wedge \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & SK \wedge SK \wedge \dots & & SK \wedge SK \wedge \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & D_r SK & \longrightarrow & SK. \end{array}$$

In der vorletzten Zeile sind die Smash-Produkte wieder endlich, weil man nur für die positiven Indizes in der Zeile darüber jeweils einen Faktor bekommt. Dass der untere Teil des Diagramms kommutativ ist, folgt wieder aus dem ersten H_∞ -Diagramm.

Aus diesem Diagramm lässt sich nun mit Hilfe von Lemma 4.15 die Abbildung auf dem Faktor zum Index (k) ablesen. Wir erhalten das Produkt

$$\text{Res}_{\Sigma_{j_{(k)}} \langle \Sigma_{k_1} \rangle}^{\Sigma_{j_{(k) \cdot k_1}}} \tau_{j_{(k)}}^{\Sigma_{k_1}}(t_1) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{j_{(k)}} \langle \Sigma_{k_2} \rangle}^{\Sigma_{j_{(k) \cdot k_2}}} \tau_{j_{(k)}}^{\Sigma_{k_2}}(t_2) \otimes \dots$$

in $[B(\Sigma_{j_{(k)}} \langle \Sigma_{(k)} \rangle)_+, SK]$.

Nach Voraussetzung gilt aber

$$\text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle}^{\Sigma_{jk}} \tau_{jk}(x) = \tau_j^{\Sigma_k}(\tau_k(x))$$

für alle $x \in K$ und alle Indizes. Die beiden Abbildungen stimmen also auf allen Summanden und deren Faktoren überein und sind damit gleich. \square

4. H_∞ -Moore-Spektren

Zusammengefasst ergibt sich der folgende Satz:

Satz 4.20. *Die H_∞ -Strukturen auf dem Moore-Spektrum SK entsprechen durch diese Zuordnung den Σ -Coalgebrastrukturen des Funktors $G \mapsto [BG_+, SK] \cong \hat{A}_K(G)$, die sich wie zu Beginn von Abschnitt 4.4 aus einem Ringhomomorphismus $K \rightarrow \Sigma^{\hat{A}_K}$ und der Coalgebrastruktur von \hat{A} ergeben.*

Für Morphismen erhalten wir ein ähnliches Ergebnis:

Satz 4.21. *Die H_∞ -Morphismen zwischen zwei H_∞ -Spektren SK und SK' in der stabilen Homotopiekategorie entsprechen durch π_0 genau den Ringhomomorphismen $K \rightarrow K'$, die mit den Strukturabbildungen verträglich sind, für die also das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & \Sigma^{\hat{A}_K}(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K' & \longrightarrow & \Sigma^{\hat{A}_{K'}}(1) \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Falls $SK \rightarrow SK'$ ein H_∞ -Morphismus ist, induziert er offenbar einen Morphismus von Σ -Coalgebren $[B(-)_+, SK] \rightarrow [B(-)_+, SK']$. Umgekehrt: Sei $\varphi : K \rightarrow K'$ ein Ringhomomorphismus, sodass

$$\begin{array}{ccc} K & \longrightarrow & [D_n S, SK] \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_* \\ K' & \longrightarrow & [D_n S, SK'] \end{array}$$

für alle n kommutiert. Dann ist zu zeigen, dass auch das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} D_n SK & \longrightarrow & SK \\ \downarrow & & \downarrow \\ D_n SK' & \longrightarrow & SK' \end{array}$$

für alle n kommutiert. Wir können die erweiterten Potenzen wieder aus Summen von Produkten von $D_i S$ zusammensetzen, sodass es genügt, die Aussage auf den Summanden nachzuweisen. Im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} & & D_{n_1} \iota_1 \wedge D_{n_2} \iota_2 \dots & & & & \\ D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots & \longrightarrow & D_{n_1} SK \wedge D_{n_2} SK \wedge \dots & \longrightarrow & D_n SK & \longrightarrow & SK \\ & \parallel & \downarrow D_n S \varphi \wedge \dots & & & & \downarrow S \varphi \\ D_{n_1} S \wedge D_{n_2} S \wedge \dots & \longrightarrow & D_{n_1} SK' \wedge D_{n_2} SK' \wedge \dots & \longrightarrow & D_n SK' & \longrightarrow & SK' \end{array}$$

setzen wir als Abbildungen $S \rightarrow SK$ die Elemente ι_1, ι_2, \dots aus einer Basis von K so ein, dass die Zusammensetzung der ersten beiden oberen Abbildungen die Inklusion

4.4. Umkehrung: H_∞ -Strukturen für Moore-Spektren

des Summanden ist. Die obere/rechte Zusammensetzung entspricht dann als Element von $[B(\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots)_+, SK']$ dem Bild von $\tau_{n_1}(\iota_1) \otimes \tau_{n_2}(\iota_2) \otimes \dots$ unter $\Sigma\varphi$. Die untere Zusammensetzung ist dagegen das Element $\tau'_{n_1}(\varphi(\iota_1)) \otimes \tau'_{n_2}(\varphi(\iota_2)) \otimes \dots$. Nach der Voraussetzung stimmen diese aber überein. \square

Das Resultat ist die durch π_0 induzierte Äquivalenz der folgenden beiden Kategorien:

- ▷ *Objekte:* Moore-Spektren zu den oben genannten Ringen, die eine H_∞ -Struktur besitzen
Morphismen: H_∞ -Morphismen (volle Unterkategorie der H_∞ -Spektren)
- ▷ *Objekte:* Ringe, die als \mathbb{Z} -Moduln frei sind, zusammen mit Strukturabbildungen $K \rightarrow \Sigma^{\hat{A}_K}(1)$, die \hat{A}_K zu einer Σ -Coalgebra machen
Morphismen: Ringhomomorphismen, die auf den zugehörigen Green-Funktoren Morphismen von Coalgebren induzieren

Falls K über \mathbb{Z} endlich erzeugt ist, lässt sich leicht einsehen, dass für $\hat{A}_K \cong \hat{A} \otimes K$ die Ringhomomorphismen $K \rightarrow \Sigma^{\hat{A}_K}$ genau den Homomorphismen $\hat{A}_K \rightarrow \Sigma^{\hat{A}_K}$ entsprechen, sodass sich die Morphismen in der ersten Kategorie noch etwas einfacher untersuchen lassen.

Beispiel 4.22. Falls $K = \mathbb{Z}[M]$ ein Monoidring ist, erhalten wir auf SK eine H_∞ -Struktur durch Fortsetzen der multiplikativen Abbildung

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \prod^e \hat{A}_K(\Sigma_n) \\ m &\mapsto (m^n)_n \end{aligned}$$

zu einem Ringhomomorphismus $K \rightarrow \prod^e \hat{A}_K(\Sigma_n)$: Die Kommutativität der Diagramme in der Definition einer Coalgebra ist für die Elemente aus M offensichtlich.

Da die Konstruktion eines „Gruppenrings“ oder allgemeiner eines „Monoidrings“ auch für Spektren durchgeführt werden kann und die gewünschten Koeffizienten liefert, kann man die Existenz einer H_∞ -Multiplikation oder E_∞ -Multiplikation hier auch direkt ohne diese algebraischen Hilfsmittel einsehen.

Bemerkung 4.23. Für das Moore-Spektrum zu den Gauß'schen Zahlen werden wir in Abschnitt 7 sehen, dass es hier keine H_∞ -Struktur geben kann. Anders formuliert gibt es für den Ring $\mathbb{Z}[x]/(x^2 + 1)$ im Gegensatz zu $\mathbb{Z}[x]/(x^2 - 1)$ keine solche Multiplikation. Das Hindernis liegt in der Verzweigung bei 2 begründet und kann, wie in [SVW99] beschrieben, durch Invertieren der betroffenen Primzahl beseitigt werden.

Um die hier entwickelte Theorie auf die Spektren nach Invertieren einer Primzahl p anwenden zu können, muss man sie allerdings erst zu einer entsprechenden relativen Version verallgemeinern: An die Stelle der stabilen Homotopiekategorie tritt dann die Homotopiekategorie der $S[\frac{1}{p}]$ -Moduln, und an Stelle eines Moore-Spektrums SK , das äquivalent zu einer Summe von Sphären ist, betrachten wir dann eine Summe $SK[\frac{1}{p}]$

4. H_∞ -Moore-Spektren

von Kopien von $S[\frac{1}{p}]$. Jetzt kann man wieder ausnutzen, dass sich die erweiterten Potenzen von $SK[\frac{1}{p}]$ durch die $D_n(S[\frac{1}{p}])$ ausdrücken lassen, um stattdessen mit Hilfe der Lokalisierung $[D_n(S[\frac{1}{p}]), SK[\frac{1}{p}]]$ algebraisch formulierbare Kriterien zu erhalten.

Alternativ lässt sich mit Hilfe der Konstruktion aus [SVW99] oder – wie in Anhang A.3 angedeutet – mit [RW02, Theorem 6.8 (3)] zeigen, dass es nach Invertieren der verzweigten Primzahl sogar eine E_∞ -Struktur gibt.

5. Potenzen in äquivarianten Spektren

Ähnlich wie die n -te Potenz einer Menge oder eines Vektorraums zu einem Objekt in einer Σ_n -äquivarianten Kategorie wird, möchten wir auch Potenzen von Spektren so bilden, dass sie zu äquivarianten Spektren über dem natürlichen Universum der zugehörigen symmetrischen Gruppe werden.

Wie im letzten Kapitel werden wir uns für die Formulierung von algebraischen Bedingungen wieder auf Moore-Spektren zu freien abelschen Gruppen konzentrieren. Wir brauchen also eigentlich nicht unbedingt eine Kategorie von G -äquivarianten Spektren, sondern könnten auch etwa in der von J. F. Adams in [Ada84] definierten stabile Kategorie arbeiten. Wir werden uns hier stattdessen auf eine jüngere Referenz beziehen, nämlich den Artikel [MM02] über äquivariante orthogonale Spektren. Da wir nur an Abbildungen bis auf Homotopie interessiert sind, reicht uns aber die Version, die dort als „Präspektren“ bezeichnet wird.

Häufig legt man für die Definition von äquivarianten Spektren ein vollständiges Universum zugrunde, also einen unendlichdimensionalen reellen Vektorraum mit linearer Gruppenoperation, der alle endlichdimensionalen Darstellungen der Gruppe als Unterräume enthält. Für symmetrische Gruppen gibt es außer dem vollständigen Universum noch eine andere kanonische Wahl, das so genannte natürliche Universum, das eine unendliche direkte Summe von Permutationsdarstellungen ist. Wir wählen hier dieses Universum, weil dort die Definition der Potenzen als äquivariante Spektren am natürlichsten erscheint.

So wie es bei einem vollständigen Universum genügt, die Spektren auf den Vielfachen der regulären Darstellung zu indizieren, können wir uns für die Indizierung von Σ_n -Spektren auf die Vielfachen der Permutationsdarstellung \mathbb{R}^n einschränken. Wir holen etwas weiter aus und beschreiben die Quillen-Äquivalenzen, die diese Vorgehensweise rechtfertigen, in den ersten beiden Abschnitten.

5.1. Kategorien von äquivarianten Spektren

In [MM02, III.4] wird sowohl für äquivariante orthogonale Spektren als auch für Präspektren eine stabile Modellstruktur definiert. Kleinere Verallgemeinerungen, die hier verwendet werden, ergeben sich ähnlich wie die Ergebnisse aus [MM02] als äquivariante Version der allgemeineren Ergebnisse in [MMSS01].

Wir übernehmen eine Konvention für die Bezeichnung von Kategorien im äquivarianten Kontext: Allgemein treten äquivariante Kategorien häufig in zwei Versionen auf. In der ersten Version betrachtet man nur äquivariante Abbildungen, in der zweiten Version lässt man alle Abbildungen zu und erhält durch Konjugation eine Gruppenoperation auf den Morphismenmengen. Falls \mathcal{C} die zugrunde liegende Kategorie bezeichnet, nennen wir die erste Kategorie $G\mathcal{C}$ und die zweite \mathcal{C}_G .

Sei U ein G -Universum und $\mathcal{V}(U)$ die Menge aller endlichdimensionalen G -Darstellungen $V \subset U$. Sei $\mathcal{V} = \mathcal{V}(U)$ oder eine Teilmenge davon, die abgeschlossen unter direkten

5. Potenzen in äquivarianten Spektren

Summen in U ist und eine G -Darstellung V mit $V^G \neq 0$ enthält, und $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ mit den gleichen Eigenschaften. Den trivialen Summanden benötigen wir jeweils für die additive Struktur, wir fordern aber nicht, dass \mathcal{V} eine triviale Darstellung enthält. Im Allgemeinen gibt es in \mathcal{V} auch keine eindimensionale Darstellung.

Üblicherweise werden äquivariante Spektren mit Hilfe von Strukturabbildungen definiert, die aus Einhängungen mit G -Darstellungen entstehen. Wir formulieren die Definition hier als Diagrammkategorie, wobei für die Indizierung die Kategorie $\mathcal{K} = \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}$ verwendet wird, die in [MM02, II.4.10] beschrieben ist. Für orthogonale Spektren ersetzt man \mathcal{K} durch die Kategorie $\mathcal{J}^{\mathcal{V}}$ aus [MM02, II.5].

In dieser Formulierung ist ein G -Spektrum also nichts anderes als ein \mathcal{K} -Raum. Um in Erinnerung zu rufen, an welchen Stellen G -äquivariante Abbildungen verwendet werden und wo alle (stetigen) Abbildungen zugelassen sind, wiederholen wir kurz die wesentlichen Teile der Definition:

Die Objekte von $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}$ sind die Räume aus \mathcal{V} , und die Morphismenräume sind definiert als $\mathcal{K}(V, W) = S^{W-V}$, falls $V \subset W$, und $\mathcal{K}(V, W) = *$ sonst. Auf den Morphismen operiert die Gruppe G durch die Operation auf den Vektorräumen.

Definition 5.1. Ein auf \mathcal{V} indiziertes G -Spektrum ist ein stetiger G -Funktorkomplex von der Kategorie $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}$ in die Kategorie \mathcal{T}_G der G -Räume (in der die Gruppe G ebenfalls auf den Morphismenräumen operiert).

Bemerkung 5.2. Die Einhängungen sieht man in dieser Formulierung wie üblich mit Hilfe der Adjunktion

$$GT(\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}(V, W), \mathcal{T}_G(X(V), X(W))) \cong GT(S^{W-V} \wedge X(V), X(W)).$$

Beispiel 5.3. Genau wie im nichtäquivarianten Fall bildet man die Einhängungsspektren: Zu einem (G -)Raum X ist $\Sigma_G^\infty X$ gegeben durch $(\Sigma_G^\infty X)(V) = S^V \wedge X$, also als Smash-Produkt mit dem durch $S_G^0(V) = S^V$ definierten G -Sphärenspektrum.

Für die Definition einer stabilen Modellstruktur auf G -Spektren wird nun eine äquivariante Version der Ergebnisse aus [MMSS01, II] verwendet. Wie in [MM02, V.1.7] können wir auch die Variante 6.10 mit relativen Level-Strukturen betrachten. Genauer (vgl. [MM02, III.2.3]):

Definition 5.4. Die Level-Modellstruktur auf $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}$ -Räumen relativ zu \mathcal{V}' wird folgendermaßen definiert: Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen zwei $\mathcal{K}_G^{\mathcal{V}}$ -Räumen ist

- ▷ eine Level-Äquivalenz, falls $f(V') : X(V') \rightarrow Y(V')$ für alle $V' \in \mathcal{V}'$ eine schwache Äquivalenz von G -Räumen ist
- ▷ eine Level-Faserung, falls $f(V') : X(V') \rightarrow Y(V')$ für alle $V' \in \mathcal{V}'$ eine Serre-Faserung von G -Räumen ist.

Durch die Hochhebungseigenschaft sind die Cofaserungen bereits eindeutig festgelegt.

Die zugrunde liegende Modellstruktur auf G -Räumen wird in [MM02, III.1] beschrieben. Eine schwache Äquivalenz ist in dieser Modellkategorie eine Abbildung von G -Räumen, die eingeschränkt auf die Fixpunkträume jeder Untergruppe $H \subset G$ eine schwache Äquivalenz ist.

Für die Konstruktion der stabilen Modellstruktur werden die π_* -Isomorphismen nun definiert als diejenigen Morphismen, die für jede Untergruppe H von G auf den folgenden Homotopiegruppen Isomorphismen induzieren:

$$\pi_r^{H, \mathcal{V}'}(X) = \varinjlim_{V' \in \mathcal{V}'} [S^{r+V'}, X(V')]^H = \varinjlim_{V' \in \mathcal{V}'} \pi_r^H(\Omega^{V'} X(V'))$$

wobei $V' \in \mathcal{V}'$ die Indexräume durchläuft und $r \geq 0$; ähnlich für negative Indizes:

$$\pi_{-r}^{H, \mathcal{V}'}(X) = \varinjlim_{V' \supseteq \mathbb{R}^r} [S^{V'-\mathbb{R}^r}, X(V')]^H = \varinjlim_{V' \supseteq \mathbb{R}^r} \pi_0^H(\Omega^{V'-\mathbb{R}^r} X(V')), \quad r > 0.$$

Falls X ein orthogonales G -Spektrum ist, wenden wir zunächst den Vergissfunktork an. Wenn \mathcal{V}' cofinal in \mathcal{V} ist, können wir die Homotopiegruppen auch mit Hilfe aller Räume aus \mathcal{V} definieren und erhalten das gleiche Ergebnis.

Mit den π_* -Isomorphismen relativ zu \mathcal{V}' als schwachen Äquivalenzen und denselben Cofaserungen wie in der Level-Struktur erhalten wir wie üblich die stabile Modellstruktur; mit anderen Worten, die Faserungen werden hier durch die Hochhebungseigenschaft definiert.

Für jede Wahl von $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ können wir nun drei verschiedene Modellkategorien bilden:

- (i) Die Kategorie der \mathcal{V} -Spektren mit der stabilen Modellstruktur, die durch die Wahl $\mathcal{V}' = \mathcal{V}$ für die Level-Struktur entsteht. Hier ist die Level-Struktur also durch die Bedingungen auf allen Indexräumen definiert.
- (ii) Die Modellkategorie der \mathcal{V} -Spektren, die durch Einschränkung auf \mathcal{V}' für die Level-Struktur entsteht.
- (iii) Die Modellkategorie der \mathcal{V}' -Spektren, bei der für die Definition der Level-Struktur ebenfalls \mathcal{V}' verwendet wird.

Als nächstes beschreiben wir die Beziehungen zwischen diesen Kategorien.

5.2. Quillen-Adjunktionen

Zwischen den drei Kategorien haben wir verschiedene Funktorpaare (vgl. [MM02, V.1.6-8]):

- (i) Die Identitätsfunktoren zwischen den unterliegenden Kategorien der ersten beiden Modellkategorien bilden ein Quillen-Paar.

5. Potenzen in äquivarianten Spektren

- (ii) Der Vergissfunktorkomplex von der zweiten in die dritte Kategorie bildet mit seinem Linksadjungierten eine Quillen-Äquivalenz.

Der linksadjungierte Funktor zum Vergissfunktorkomplex wird durch eine linke Kan-Erweiterung gebildet. Falls $\mathcal{K}' = \mathcal{K}_G^{\mathcal{V}'}$ die volle Unterkategorie von \mathcal{K} ist, deren Objekte die Räume aus \mathcal{V}' sind, haben wir das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}' & & \\ \downarrow i & \searrow X & \\ \mathcal{K} & \xrightarrow{i_! X} & \mathcal{T}_G, \end{array}$$

bestehend aus drei Kategorien, die jeweils über G -Räumen angereichert sind. Die Kan-Erweiterung verwenden wir in der angereicherten Version und erhalten für jedes G -Spektrum X , das auf \mathcal{V}' indiziert ist, ein G -Spektrum $i_! X$, das auf allen endlichdimensionalen Teilräumen des natürlichen Universums indiziert ist.

Sei nun G eine Untergruppe einer symmetrischen Gruppe und U das zugehörige natürliche Universum. Aus der oben beschriebenen Prozedur ergeben sich drei Modellkategorien von $\Sigma_n \langle G \rangle$ -Spektren, indem wir $\mathcal{V} = \mathcal{V}(U^n)$ und $\mathcal{V}' = \{V^n \mid V \subset U\}$ setzen:

- (i) Die Kategorie der äquivarianten Spektren, die auf dem natürlichen Universum von $\Sigma_n \langle G \rangle$ definiert sind, mit der üblichen Modellstruktur.
- (ii) Dieselbe Kategorie, wobei für die Level-Struktur nur die Permutationsdarstellungen berücksichtigt werden, also die Darstellungen der Form V^n mit Permutationsdarstellungen $V \subset U$.
- (iii) Diejenigen $\Sigma_n \langle G \rangle$ -Spektren, die nur auf den Permutationsdarstellungen definiert sind.

Da \mathcal{V}' eine cofinale Teilmenge im natürlichen Universum ist, sind in diesem Spezialfall sogar alle drei der oben beschriebenen Funktoren Quillen-Äquivalenzen, weil die stabilen Äquivalenzen in allen Modellstrukturen dieselben sind.

Aus den Ergebnissen dieses Abschnitts ziehen wir die Schlussfolgerung, dass wir für eine Abbildung in die Kategorie der äquivarianten Spektren auf dem natürlichen Universum (oder deren Homotopiekategorie) auch diejenigen Spektren verwenden können, die nur auf den Permutationsdarstellungen indiziert sind. Im Folgenden werden sich die Konstruktionen häufig in natürlicher Weise auf dieser Teilkategorie durchführen lassen; falls eine Fortsetzung auf alle endlichdimensionalen Teilräume des Universums benötigt wird, können die oben beschriebenen Quillen-Paare verwendet werden.

5.2.1. Wechseln des Universums

Wir betrachten in diesem Abschnitt äquivariante Spektren auf einem Universum, das aus einer unendlichen direkten Summe von Kopien einer endlichdimensionalen Darstellung besteht (mit nichttrivialer Fixpunktmenge). Nach den Ergebnissen aus dem letzten Abschnitt genügt es, die Spektren auf den Vielfachen dieser Darstellung zu indizieren.

Seien also $U = V^\infty$ und $U' = (V')^\infty$ zwei G -Universen, $i : V \rightarrow V'$ eine lineare G -Isometrie und \mathcal{V} und \mathcal{V}' die Indexkategorien, die jeweils aus den Vielfachen von V bzw. V' bestehen.

Zwischen den Kategorien von \mathcal{V} -Spektren und \mathcal{V}' -Spektren können wir wie folgt eine Adjunktion definieren: Der Linksadjungierte $L : \mathcal{V} - Sp \rightarrow \mathcal{V}' - Sp$ ist auf einem Spektrum X gegeben durch

$$LX((V')^r) = S^{(V')^r - V^r} \wedge X(V^r),$$

wobei mit $(V')^r - V^r$ das orthogonale Komplement gemeint ist. Der Rechtsadjungierte R ist entsprechend gegeben durch

$$RY(V^r) = \Omega^{(V')^r - V^r} X((V')^r).$$

Für Morphismen werden die Funktoren auf die offensichtliche Weise definiert.

Satz 5.5. *Die Adjunktion*

$$L : \mathcal{V} - Sp \rightleftarrows \mathcal{V}' - Sp : R$$

ist ein Quillen-Paar und induziert damit ein Funktorpaar zwischen den Homotopiekategorien.

Für den Beweis verwenden wir einige Hilfsaussagen aus [MM02]. Die azyklischen Faserungen sind in der stabilen Modellstruktur die gleichen wie in der Level-Struktur, da die gleichen Cofaserungen verwendet werden. Die Faserungen lassen sich wie in [MM02, III.4.8 und 4.12.iii] angegeben beschreiben:

Lemma 5.6. *Ein Morphismus $p : X \rightarrow Y$ zwischen äquivarianten Spektren, die auf \mathcal{V} indiziert sind, ist genau dann eine stabile Faserung, wenn er eine Level-Faserung ist und wenn das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} X(V) & \longrightarrow & \Omega^W X(V \oplus W) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y(V) & \longrightarrow & \Omega^W Y(V \oplus W) \end{array}$$

für alle Inderräume $V \perp W \in \mathcal{V}$ ein Homotopie-Pullbackdiagramm ist.

Beweis von Satz 5.5. Der Rechtsadjungierte erhält offenbar Level-Faserungen und Level-Äquivalenzen und damit auch die stabilen azyklischen Faserungen. Mit Lemma 5.6 folgt, dass er alle Faserungen erhält. Damit ist die Adjunktion eine Quillen-Adjunktion. \square

Bemerkung 5.7. Falls man Spektren verwendet, die auf allen endlichdimensionalen G -Unterräumen des Universums indiziert sind, ist ein offensichtlicher Funktor einfach durch die Einschränkung von dem größeren Universum U' auf das kleinere Universum U gegeben. Dieser Vergissfunktoren lässt sich mit der oben beschriebenen Adjunktion vergleichen, indem wir die Kette von Adjunktionen

$$\mathcal{V}' - Sp \rightleftarrows \mathcal{V}(U') - Sp \rightleftarrows \mathcal{V}(U) - Sp \rightleftarrows \mathcal{V} - Sp,$$

bilden. Das oben konstruierte Funktorpaar ergibt sich aus einer solchen Kette, indem man rechts statt des Linksadjungierten den Rechtsadjungierten des Vergissfunktors wählt.

5.2.2. Wechseln der Gruppe

Falls $H \subset G$ Untergruppen einer symmetrischen Gruppe Σ_n sind, erhalten wir durch Einschränkung der Gruppenoperationen aus einem G -Spektrum, das auf dem zugehörigen natürlichen Universum definiert ist, ein H -Spektrum auf dem gleichen Universum.

Dieser Einschränkungsfunktor i^* induziert einen Funktor zwischen den Homotopiekategorien von G -Spektren und H -Spektren bezüglich des natürlichen Universums. Da in beiden Fällen das gleiche Universum und die gleichen Permutationsdarstellungen, aus denen es sich zusammensetzt, zugrunde gelegt werden, ist der Wechsel der Gruppe völlig unproblematisch. Die zugehörigen Adjunktionen sind in [MM02, V.2.4] beschrieben:

Lemma 5.8. *Der Funktor i^* hat ein Links- und ein Rechtsadjungiertes, die durch $G_+ \wedge_H -$ bzw. durch den Funktor $F_H(G_+, -)$ gegeben sind. Beide Adjunktionen sind Quillen-Adjunktionen und induzieren Funktorpaare zwischen den Homotopiekategorien.*

Restriktionsabbildungen können wir nicht nur für Inklusionen von Untergruppen definieren: Sei $\phi : G' \rightarrow G$ ein beliebiger Morphismus von endlichen Gruppen, G eine Untergruppe von Σ_n mit zugehörigem G -Universum U und $\mathcal{V} = \mathcal{V}(U)$. Dann bekommen wir durch Restriktion entlang von ϕ einen Funktor von G -Spektren nach G' -Spektren, wobei wir die Elemente der Indexmenge \mathcal{V} via ϕ als G' -Darstellungen ansehen.

Diese Version benötigen wir in dem Fall, dass ϕ eine Projektion der Form $\mathcal{S}\langle G \rangle \rightarrow \mathcal{S}$ ist. Die Übertragung auf die Homotopiekategorie funktioniert genau wie für Inklusionen von Untergruppen; der einzige Punkt, der in [MM02, V.2.2] ein längeres Argument benötigt, ist für die Projektion $\mathcal{S}\langle G \rangle \rightarrow \mathcal{S}$ sogar einfacher, weil jede transitive \mathcal{S} -Menge \mathcal{S}/\mathcal{S}' durch Zurückziehen entlang der Projektion als $\mathcal{S}\langle G \rangle$ -Menge die Form $\mathcal{S}\langle G \rangle/\mathcal{S}'\langle G \rangle$ hat. Alle anderen Argumente lassen sich ohne wesentliche Veränderung übertragen. Der Linksadjungierte $\mathcal{S}_+ \wedge_{\mathcal{S}\langle G \rangle} -$ ist nun durch Herausteilen der G -Operation gegeben.

Wenn ϕ nicht injektiv ist und wir G' als Untergruppe einer anderen symmetrischen Gruppe Σ_m auffassen möchten, erhalten wir zunächst kein Spektrum auf dem gewünschten natürlichen Universum, sodass es in einem solchen Fall nötig sein wird, zusätzlich zur Gruppe auch das Universum zu wechseln. Sei etwa G eine Untergruppe einer symmetrischen Gruppe Σ_k und $\mathcal{S} = \Sigma_j$ oder eine Untergruppe davon. Dann erhalten wir aus einem \mathcal{S} -Spektrum X auf dem natürlichen Universum $(\mathbb{R}^\infty)^j$ durch „Restriktion“ entlang der Projektion

$$\mathcal{S}\langle G \rangle \rightarrow \mathcal{S}$$

ein Spektrum über dem Kranzprodukt, das auf dem Universum $(\mathbb{R}^\infty)^j$ mit trivialer G -Operation indiziert ist. Da das Kranzprodukt in natürlicher Weise eine Untergruppe von Σ_{jk} ist, sollte ein $\mathcal{S}\langle G \rangle$ -Spektrum aber auf den Vielfachen der Permutationsdarstellung \mathbb{R}^{jk} indiziert sein.

Die unterliegende \mathcal{S} -Darstellung \mathbb{R}^j lässt sich nun diagonal – mit passender Skalierung – in die unterliegende Darstellung \mathbb{R}^{jk} für das natürliche Universum der Gruppe $\mathcal{S}\langle G \rangle$

einbetten. Für diese Einbettung können wir den Linksadjungierten des Quillen-Paares aus Satz 5.5 anwenden und erhalten ein $\mathcal{S}\langle G \rangle$ -Spektrum auf den Vielfachen von \mathbb{R}^{jk} .

Insbesondere lässt sich auf diese Weise aus einem Spektrum X ohne Gruppenoperation ein G -Spektrum auf dem zugehörigen natürlichen Universum machen.

5.3. Potenzen mit Permutationsoperation

Das Kranzprodukt $\Sigma_n\langle G \rangle$ einer symmetrischen Gruppe mit der Gruppe G ist diejenige Gruppe, die in natürlicher Weise auf der n -ten Potenz eines Objekts mit einer G -Wirkung operiert. Um diese Vorstellung im Fall von äquivarianten Spektren zu präzisieren, eignen sich diejenigen Kategorien äquivarianter Spektren, die nur auf den Vielfachen einer Permutationsdarstellung indiziert sind, am besten.

Sei X ein G -äquivariantes Spektrum, das über einem natürlichen Universum U indiziert ist, mit Strukturabbildungen $\sigma_{V,W} : S^{W-V} \wedge X(V) \rightarrow X(W)$. Der Raum U ist also eine unendliche direkte Summe von Kopien einer Permutationsdarstellung N ($N = \mathbb{R}^k$, falls G als Untergruppe von Σ_k aufgefasst wird), und zum Indizieren verwenden wir $\mathcal{V} = \{N^{\oplus r} \mid r \in \mathbb{N}\}$. Wir definieren nun eine n -te Potenz so, dass sie zu einem $\Sigma_n\langle G \rangle$ -äquivarianten Spektrum über dem natürlichen Universum $U \oplus U \oplus \dots \oplus U$ wird, auf dem Σ_n durch Permutation operiert:

Definition 5.9. Auf der Indexkategorie, die aus den Permutationsdarstellungen von $\Sigma_n\langle G \rangle$ der Form $V^{\oplus n} = (N^{\oplus r})^{\oplus n}$ besteht, definieren wir die n -te Potenz von X als

$$X^{(n)}(V^{\oplus n}) = X(V)^{\wedge n},$$

wobei die Gruppe Σ_n durch Permutation operiert. Für zwei G -Darstellungen $V \subset W \in \mathcal{V}$ ist die Abbildung $\mathcal{K}(V^{\oplus n}, W^{\oplus n}) \rightarrow \mathcal{T}_G(X^{(n)}(V^{\oplus n}), X^{(n)}(W^{\oplus n}))$ von $\Sigma_n\langle G \rangle$ -Räumen dann das Adjungierte der Abbildung

$$S^{W^{\oplus n} - V^{\oplus n}} \wedge X(V)^{\wedge n} \cong (S^{W-V} \wedge X(V))^{\wedge n} \xrightarrow{(\sigma_{V,W})^{\wedge n}} X(W)^{\wedge n}.$$

Als Spezialfall erhalten wir für ein Spektrum X ohne Gruppenoperation ein Σ_n -Spektrum $X^{(n)}$.

Lemma 5.10. *Die Konstruktion*

$$\begin{aligned} Sp^G &\rightarrow Sp^{\Sigma_n\langle G \rangle} \\ X &\mapsto X^{(n)}, \end{aligned}$$

die jedem G -Spektrum auf diese Weise seine n -te Potenz als $\Sigma_n\langle G \rangle$ -Spektrum zuordnet, induziert durch Rechtsableitung einen Funktor zwischen den Homotopiekategorien.

5. Potenzen in äquivarianten Spektren

Beweis. Sei $\varphi : X \rightarrow Y$ eine schwache Äquivalenz zwischen zwei fasernden G -Spektren X und Y , also nach [MM02, III.4.12.ii und III.3.4] eine Level-Äquivalenz zwischen G - Ω -Spektren. Für jeden Indexraum V und jede Untergruppe H von G ist dann $\varphi_V^H : X(V)^H \rightarrow Y(V)^H$ eine schwache Äquivalenz. Damit sind auch die Abbildungen

$$(\varphi_V)^{\wedge n} : X(V)^{\wedge n} \rightarrow Y(V)^{\wedge n}$$

und

$$\Omega^{V^n} (\varphi_V)^{\wedge n} : \Omega^{V^n} X(V)^{\wedge n} \rightarrow \Omega^{V^n} Y(V)^{\wedge n}$$

schwache Äquivalenzen von $\Sigma_n \langle G \rangle$ -Räumen, also schwache Äquivalenzen auf den Fixpunkträumen: Nur die Untergruppen der Form $\Sigma_{n_1} \langle G_1 \rangle \times \Sigma_{n_2} \langle G_2 \rangle \times \dots$ von $\Sigma_n \langle G \rangle$ mit Untergruppen G_i von G und ihre Konjugierten können als Isotropiegruppen vorkommen. Daher reicht es, die Fixpunkte bezüglich solcher Untergruppen zu untersuchen. Es gilt $(Z^{\wedge n})^{\Sigma_{n_1} \langle G_1 \rangle \times \Sigma_{n_2} \langle G_2 \rangle \times \dots} \cong Z^{G_1} \wedge Z^{G_2} \wedge \dots$, genauer das Bild der Abbildung $\bigwedge_i (Z^{G_i}) \xrightarrow{\bigwedge_i \Delta} \bigwedge_i Z^{\wedge n_i}$. Falls wir also $X(V)$ und $Y(V)$ für Z einsetzen, wird wieder eine schwache Äquivalenz induziert.

Für die Homotopiegruppen der n -ten Potenzen, die ja für eine natürliche Zahl r und eine Untergruppe H von $\Sigma_n \langle G \rangle$ als

$$\pi_r^H(X^{\wedge n}) = \varinjlim_V \pi_r((\Omega^{V^n} X(V)^{\wedge n})^H)$$

definiert sind, haben wir deshalb schon in jedem Term des Colimes einen Isomorphismus. Das gleiche gilt auf den Homotopiegruppen mit negativem Index. Insgesamt erhalten wir eine schwache Äquivalenz von $\Sigma_n \langle G \rangle$ -Spektren. Wir haben also gezeigt, dass schwache Äquivalenzen zwischen fasernden Objekten erhalten bleiben, und können deshalb die Rechtsableitung bilden. \square

Etwas einfacher als die äquivarianten Potenzen lassen sich externe Smash-Produkte bilden. Seien $G \subset \Sigma_i$, $G' \subset \Sigma_j$, X ein G -Spektrum und Y ein G' -Spektrum über den natürlichen Universen U_i und U_j , die jeweils eine unendliche direkte Summe von Kopien der Permutationsdarstellungen V_i und V_j sind. Es gilt also etwa $V_i \cong \mathbb{R}^i$ mit der Permutationsoperation von Σ_i . Dann können wir ein externes Smash-Produkt $X \wedge Y$ so bilden, dass es ein $G \times G'$ -Spektrum über dem Universum $U_i \oplus U_j$ wird. Da wir uns wieder auf die Indexmenge einschränken, die nur aus den Vielfachen der $G \times G'$ -Darstellung $V_i \oplus V_j$ besteht, setzen wir

$$X \wedge Y((V_i \oplus V_j)^{\oplus r}) = X(V_i^{\oplus r}) \wedge Y(V_j^{\oplus r}).$$

Lemma 5.11. *Durch Bilden der Rechtsableitung in der Produkt-Modellstruktur von G -Spektren und G' -Spektren erhalten wir einen induzierten Funktor*

$$- \wedge - : Ho(Sp_{Nat}^G) \times Ho(Sp_{Nat}^{G'}) \rightarrow Ho(Sp_{Nat}^{G \times G'})$$

zwischen den Homotopiekategorien.

5.3. Potenzen mit Permutationsoperation

Beweis. Wie im Fall von Produkten untersuchen wir wieder, ob schwache Äquivalenzen zwischen fasernden Objekten erhalten bleiben. Seien X ein G - Ω -Spektrum und Y ein G' - Ω -Spektrum. Dann gilt für zwei Untergruppen $H \subset G$ und $H' \subset G'$ und jeden Indexraum $(V_i \oplus V_j)^{\oplus r}$, dass

$$(X(V_i^{\oplus r}) \wedge Y(V_j^{\oplus r}))^{H \times H'} = X(V_i^{\oplus r})^H \wedge Y(V_j^{\oplus r})^{H'}.$$

Die anderen Untergruppen treten wieder nicht als Isotropie auf.

Um zu zeigen, dass die $G \times G'$ -äquivariante Homotopiegruppen nur vom Homotopietyp der Ω -Spektren X und Y abhängen, argumentiert man jetzt genauso wie für Potenzen und erhält auf den Homotopiegruppen bereits für jeden Term im Colimes einen Isomorphismus. \square

Bemerkung 5.12. Alle hier beschriebenen Funktoren mit Ausnahme des Rechtsadjungierten zum Vergissfunktors aus Bemerkung 5.7 bilden das äquivariante Einhängungsspektrum eines Raums ohne Gruppenoperation auf das entsprechende Einhängungsspektrum in der zweiten Kategorie ab. Insbesondere gilt diese Beobachtung für äquivariante Sphärenspektren.

Für Einhängungsspektren von Räumen ist der fasernde Ersatz gar nicht notwendig, wie man sich mit Hilfe des Freudenthal'schen Einhängungssatzes oder der äquivarianten Version [Die87, II.2.10] überlegen kann: Falls X ein Raum ist, $\Sigma^\infty X$ das zugehörige Einhängungsspektrum und

$$\Sigma^\infty X \simeq (\Sigma^\infty X)^f \rightarrow *$$

die fasernde Ersetzung, gibt es für jedes n eine Zahl k , ab der

$$\pi_{n+k}(\Sigma^k X) \cong \pi_n(\Sigma^\infty X) \cong \pi_n((\Sigma^\infty X)^f) \cong \pi_{n+k}((\Sigma^\infty X)_k^f).$$

Jetzt lässt sich das Argument aus dem Beweis von Lemma 5.10 anwenden, um zu zeigen, dass $\Sigma^\infty X^{(j)} \rightarrow ((\Sigma^\infty X)^f)^{(j)}$ eine schwache Äquivalenz ist.

Insbesondere erhalten wir im Fall des Sphärenspektrums auch nach Übergang zur Homotopiekategorie durch Bilden der n -ten Potenz das Σ_n -äquivariante Sphärenspektrum. Auch dieser Umweg führt uns also für Räume glücklicherweise wieder zu einer Kategorie wie der aus [Ada84] zurück.

Falls X ein G -Spektrum auf einem zugehörigen natürlichen Universum ist, ist $(X^{(k)})^{(j)}$ äquivalent zu $\text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle}^{\Sigma_{jk} \langle G \rangle}(X^{(jk)})$ in der Kategorie der $\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle$ -Spektren, und $X^{(i)} \wedge X^{(j)}$ ist äquivalent zu $\text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j \langle G \rangle}^{\Sigma_{i+j} \langle G \rangle}(X^{(i+j)})$ in der Kategorie der $(\Sigma_i \times \Sigma_j) \langle G \rangle$ -Spektren. Bei Übergang zu den Homotopiekategorien ergibt sich nun die Schwierigkeit, dass die beiden Rechtsableitungen der Funktoren $(-)^{(n)}$ und \wedge nicht als Quillen-Funktoren abgeleitet wurden und wir daher keine Äquivalenz von $X^{(i)} \wedge X^{(j)}$ und $\text{Res}(X^{(i+j)})$ erhalten.

Wir haben aber gerade gesehen, dass dieses Problem im Fall von Einhängungsspektren nicht auftritt, weil die Potenzen auch ohne fasernden Ersatz den richtigen Homotopietyp

5. Potenzen in äquivarianten Spektren

haben. Da uns im nächsten Teil ohnehin vor allem Einhängungsspektren interessieren, werden wir uns ab jetzt auf solche Spektren einschränken.

Wir notieren noch, dass die Potenzen und externen Smash-Produkte von Einhängungsspektren auch äquivariante Versionen der in 4.1 beschriebenen Transformationen α , β , δ besitzen, die wieder mit Hilfe der entsprechenden Inklusionen der Gruppen gebildet werden.

5.4. Induktion

Falls X und Y zwei G -Räume sind, gibt es einen Isomorphismus

$$\bigvee_{i+j=n} \text{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} (X^{\wedge i} \wedge Y^{\wedge j}) \rightarrow (X \vee Y)^{\wedge n}$$

von $\Sigma_n\langle G \rangle$ -Räumen, der auf dem Summanden des Anteils $\text{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} (X^{\wedge i} \wedge Y^{\wedge j}) \cong \Sigma_{n+}\langle G \rangle \wedge_{\Sigma_i \times \Sigma_j\langle G \rangle} X^{\wedge i} \wedge Y^{\wedge j}$, der zu $1 \in \Sigma_n$ gehört, durch die offensichtliche Abbildung

$$X^{\wedge i} \wedge Y^{\wedge j} \rightarrow (X \vee Y)^{\wedge i} \wedge (X \vee Y)^{\wedge j}$$

gegeben ist und auf den restlichen Summanden zu einer äquivarianten Abbildung fortgesetzt wird.

Für G -Spektren leiten wir aus der Definition der Potenzen damit die analoge Aussage her, indem wir den Isomorphismus für jeden Indexraum $V^{\oplus n}$ ausnutzen:

Lemma 5.13. *Seien X und Y zwei G -Spektren. Dann ist die Abbildung*

$$\bigvee_{i+j=n} \text{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle}^{\Sigma_n\langle G \rangle} (X^{(i)} \wedge Y^{(j)}) \rightarrow (X \vee Y)^{(n)},$$

die von den oben genannten Abbildungen von Räumen induziert wird, ein Isomorphismus von $\Sigma_n\langle G \rangle$ -Spektren.

Eine für uns besonders nützliche Version dieser Aussage ergibt sich, wenn man eine r -fache Summe von Kopien des gleichen Spektrums einsetzt: Für jedes G -Spektrum E gilt dann

$$(E \vee \dots \vee E)^{(j)} \cong \bigvee_{(j)} \Sigma_j\langle G \rangle_+ \wedge_{\Sigma_{(j)}\langle G \rangle} E^{((j))}$$

als $\Sigma_j\langle G \rangle$ -Spektren, wobei (j) die Zerlegungen von j der Form $j = j_1 + j_2 + \dots + j_r$ durchläuft.

Mit Hilfe dieser Beziehung können wir die äquivariante Pontrjagin-Thom-Abbildung aus Abschnitt 3.2.1 für die Gruppen Σ_j und $\Sigma_{(j)}$ in einem Spezialfall auch anders beschreiben [LMSM86, VII.1.10]:

Sei $\pi_{(j)}$ die Projektion von $(S \vee \dots \vee S)^{\wedge j}$ auf den Summanden zur Zerlegung (j) . Dann entspricht die Pontrjagin-Thom-Abbildung zur Projektion $\Sigma_j/\Sigma_{(j)} \rightarrow \Sigma_j/\Sigma_j$, die

durch die un stabile Abbildung $S^V \rightarrow \Sigma_j \wedge_{\Sigma(j)} S^V$ mit der j -dimensionalen Permutationsdarstellung $V \cong \mathbb{R}^j$ repräsentiert wird, der Zusammensetzung

$$(S^1)^{\wedge j} \rightarrow (S^1 \vee \dots \vee S^1)^{\wedge j} \xrightarrow{\pi(j)} \Sigma_j \wedge_{\Sigma(j)} (S^1)^{\wedge j}.$$

5. *Potenzen in äquivarianten Spektren*

6. G_∞ -Multiplikationen

Anstelle von H_∞ -Strukturen betrachten wir in diesem Abschnitt eine Entsprechung in äquivarianten Spektren; der naheliegende Name für diese Multiplikationen ist nach dem Vorgänger im Alphabet und der Gruppe die Bezeichnung „ G_∞ “. Der Vorteil auf der algebraischen Seite liegt im Verschwinden der Vervollständigung, die ja nach der Segal-Vermutung beim Übergang von $\pi_G^*(S)$ zu $\pi^*(BG_+)$ hinzukommt.

Da uns wegen der algebraischen Beschreibung wieder Moore-Spektren zu freien abelschen Gruppen interessieren, schränken wir uns auf Einhängungsspektren ein. Der Vorteil bei der Bildung von Potenzen und externen Smash-Produkten ist, wie bereits beschrieben, dass der fasernde Ersatz nicht notwendig ist und wir mit den Objekten in der unterliegenden Kategorie arbeiten können. Dafür wählen wir wieder die Kategorie der „Präspektren“ aus [MM02].

Sei \mathcal{S} eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe Σ_n und U das Universum der natürlichen Darstellungen von Σ_n , also eine unendliche direkte Summe von Permutationsdarstellungen \mathbb{R}^n mit Σ_n -Operation durch Vertauschen der Koordinaten. Durch Restriktion erhalten wir ein entsprechendes Universum für die Gruppe \mathcal{S} ; die Zuordnung eines natürlichen Universums zu \mathcal{S} hängt dabei von der Wahl von n und der Inklusion $\mathcal{S} \rightarrow \Sigma_n$ ab.

Falls G eine weitere Gruppe mit zugeordnetem natürlichem Universum U ist, können wir das Kranzprodukt $\mathcal{S}\langle G \rangle$ bilden und als natürliches $\mathcal{S}\langle G \rangle$ -Universum das Universum U^n bezeichnen, auf dem Σ_n durch Permutation der Faktoren operiert.

6.1. Kommutative Multiplikationen

Äquivariante Spektren bestehen nicht nur aus einer Folge von Räumen mit Gruppenoperation, sondern erhalten durch die Einhängung mit Sphären, auf denen die Gruppe in nichttrivialer Weise operiert, mehr äquivariante Struktur.

Um eine stärkere Form von Kommutativität auszudrücken, möchte man von einer echten kommutativen Multiplikation also an Stelle der Bedingung, dass sie mit dem Vertauschen der Faktoren in $X \wedge X \rightarrow X$ verträglich ist, eine Bedingung fordern, die diese zusätzliche Äquivarianz berücksichtigt. In Abschnitt 5 wurde bereits eine Struktur als Σ_n -Spektrum auf der n -fachen Potenz eines Spektrums vorgeschlagen. Dementsprechend erwarten wir jetzt von einer wirklich kommutativen Multiplikation, dass sie in dieser Kategorie lebt.

Das Spektrum X wird zu einem Spektrum über einer beliebigen Gruppe $G \subset \Sigma_n$ bezüglich des natürlichen Universums, indem man, wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben, zunächst die Gruppe wechselt und das Spektrum dann durch Wechseln des Universums entlang der isometrischen Diagonalabbildung $\iota_n : \mathbb{R}^\infty \rightarrow (\mathbb{R}^\infty)^n$ vom trivialen auf das natürliche Universum ausdehnt. Auf diese Weise fassen wir X im Fall $n = 2$ als Σ_2 -Spektrum auf, sodass die zweifache Multiplikation $\mu^{(2)}$ ein Element aus $[X \wedge X, \iota_{2*} X]^{\Sigma_2}$

6. G_∞ -Multiplikationen

wird. Wir können auf Einhängungsspektren auch eine ganz konkrete Beschreibung angeben: $\iota_{2*}\Sigma^\infty Y$ ist wieder isomorph zum Einhängungsspektrum $\Sigma_{\Sigma_2}^\infty Y$.

Zur Definition der G_∞ -Multiplikationen folgen wir nun genau dem gleichen Muster wie bei den H_∞ -Strukturen, werden allerdings noch etwas zur Auswahl der passenden Universenwechsel-Funktoren sagen. Sei X ein Einhängungsspektrum.

Definition 6.1. Eine G_∞ -Struktur auf X besteht aus Morphismen

$$\mu^{(n)} : X^{(n)} \rightarrow i_{n*}X$$

in der Homotopiekategorie von Σ_n -Spektren über dem natürlichen Universum, sodass $\mu^{(1)} = \text{id}$ und sodass die folgenden beiden Diagramme kommutieren:

$$\begin{array}{ccc} X^{(i)} \wedge X^{(j)} & \longrightarrow & X^{(i+j)} \\ \mu^{(i)} \wedge \mu^{(j)} \downarrow & & \downarrow \mu^{(i+j)} \\ \iota_{i*}X \wedge \iota_{j*}X & \longrightarrow & \iota_{(i+j)*}X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (X^{(k)})^{(j)} & \longrightarrow & X^{(jk)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\iota_{k*}X)^{(j)} & \longrightarrow & \iota_{jk*}X \end{array}$$

Genauer kommutiert das erste Diagramm in der Homotopiekategorie von $\Sigma_i \times \Sigma_j$ -Spektren auf dem Universum $(\mathbb{R}^\infty)^i \oplus (\mathbb{R}^\infty)^j$ und das zweite in der Homotopiekategorie von $\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle$ -Spektren auf dem Universum $((\mathbb{R}^\infty)^k)^j$.

Diese Bedingungen bilden das äquivariante Analogon zur Definition eines H_∞ -Spektrums aus Abschnitt 4.1.

6.1.1. Universenwechsel-Funktoren

Ein Punkt, der noch genauer erläutert werden sollte, ist das Wechseln der Universen, da in der unteren Zeile des ersten Diagramms zwei verschiedene Einbettungen von \mathbb{R}^∞ in $(\mathbb{R}^\infty)^{i+j}$ auftreten. Ein Ziel dieses Unterabschnitts ist es, sich selbst überflüssig zu machen – also zu begründen, warum wir derartige Fragen in den folgenden Abschnitten ignorieren werden.

Wir wählen die Bezeichnung $\iota_{i \oplus j}$ für die Summe $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^j$ der beiden diagonalen Isometrien. Der untere Morphismus im ersten Diagramm setzt sich genauer aus den Abbildungen im folgenden Diagramm zusammen:

$$\begin{array}{ccc} \iota_{i*}X \wedge \iota_{j*}X & \longrightarrow & \iota_{(i+j)*}X \\ \downarrow \cong & & \cong \uparrow \\ \iota_{(i \oplus j)*}X^{(2)} & \xrightarrow{\iota_* \mu^{(2)}} & \iota_{(i \oplus j)*} \iota_{2*}X \end{array}$$

Das Spektrum X wird auf zwei verschiedene Arten zu einem $\Sigma_i \times \Sigma_j$ -Spektrum gemacht: Oben rechts verwenden wir die diagonale Einbettung $\iota_{i+j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{i+j}$, die mit dem Faktor $\sqrt{\frac{1}{i+j}}$ skaliert wird. Unten wird die zusammengesetzte Isometrie

$$\iota_{i \oplus j} \circ \iota_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^j$$

6.2. Eingeschränkte Burnside-Ringe und eingeschränkte Green-Funktoren

verwendet, die zunächst \mathbb{R} diagonal skaliert in $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ und dann jeden Summanden wieder diagonal und skaliert in \mathbb{R}^i bzw. \mathbb{R}^j einbettet. Die Faktoren für die Skalierung sind hier allerdings verschieden.

Es ist aber nicht schwer, eine kanonische lineare Isometrie zwischen den beiden orthogonalen Komplementen von \mathbb{R} in $\mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^j$ anzugeben. Beide Inklusionen bilden \mathbb{R} in die Fixpunkte von $\mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^j$ unter der $\Sigma_i \times \Sigma_j$ -Operation ab, und wir können auch die erste Abbildung als Zusammensetzung

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong (\mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^j)^{\Sigma_i \times \Sigma_j} \xrightarrow{\iota_{i \oplus j}} \mathbb{R}^i \oplus \mathbb{R}^j$$

schreiben, indem wir x auf $\left(\sqrt{\frac{i}{i+j}} \cdot x, \sqrt{\frac{j}{i+j}} \cdot x \right)$ abbilden.

Nun gibt es eine kanonische Wahl einer Drehung des Raums \mathbb{R}^2 , der die diagonale Einbettung $\iota_2 : x \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x, \frac{1}{\sqrt{2}}x \right)$ in diese überführt. Diese verwenden wir zur Identifikation der beiden Universenwechsel für X .

Im zweiten Diagramm sind alle Einbettungen, die für die Universenwechsel verwendet werden, diagonal; es gilt etwa $\iota_k^j \circ \iota_j = \iota_{jk}$ und $(\iota_{k*} X)^{\langle j \rangle} \cong \iota_{k*}^j X^{\langle j \rangle}$, und der zugehörige Universenwechsel ist die Identität.

Nachdem wir hier einen expliziten Isomorphismus angegeben haben, werden wir diesen in Zukunft stillschweigend verwenden und solche Fragen ignorieren. Kompatibilitätsprobleme treten nicht auf, weil immer mit einer Diagonalabbildung verglichen wird. Beim Übergang zu den Homotopiegruppen $[S, S]^G \cong A(G)$ sieht man deutlich, dass das Austauschen eines Universums gegen ein dazu isomorphes keine Rolle spielt.

Um sich die Bedingungen für eine G_∞ -Multiplikation auf Einhängungsspektren etwas expliziter vorstellen zu können, kann man sich etwa das erste Diagramm für das Einhängungsspektrum zum Raum Y vor dem Übergang zur Homotopiekategorie auf einem Indexraum V ansehen:

$$\begin{array}{ccc} S^{V^i} \wedge Y^{\wedge i} \wedge S^{V^j} \wedge Y^{\wedge j} & \longrightarrow & S^{V^{i+j}} \wedge Y^{\wedge(i+j)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{V^{i-V}} \wedge S^V \wedge Y \wedge S^{V^{j-V}} \wedge S^V \wedge Y & \longrightarrow & S^{V^i \oplus V^j - V} \wedge S^V \wedge Y \end{array}$$

Die G_∞ -Abbildungen sollten allerdings als Morphismen in der Homotopiekategorie verstanden werden und existieren für den Indexraum V nicht unbedingt. Der Universenwechsel ist in diesem Diagramm im unteren Morphismus versteckt; er entspricht einem Isomorphismus zwischen $S^{V^i \oplus V^j - V}$ und $S^{V^i \oplus V^j - V \oplus V} \wedge S^{V^2 - V}$.

6.2. Eingeschränkte Burnside-Ringe und eingeschränkte Green-Funktoren

Um die Spektren von einem vollständigen Universum auf ein kleineres, also etwa ein natürliches Universum, einschränken zu können, benötigen wir auch auf der algebraischen Seite eingeschränkte Versionen der Objekte und Definitionen aus Abschnitt 3.4.

6. G_∞ -Multiplikationen

Definition 6.2. Eine Menge von Untergruppen von G heißt Isotropiefamilie, wenn sie abgeschlossen unter Konjugation und Schnittbildung ist.

Beispiel 6.3. Für jede G -Darstellung V ist die Menge der Isotropiegruppen der Unterräume von V eine Isotropiefamilie: Falls H die Isotropiegruppe von $W \subset V$ ist, ist gHg^{-1} die Isotropiegruppe von gW . Der Schnitt der Isotropiegruppen zweier Räume W und W' tritt als Isotropie von $W + W'$ auf, der „leere“ Schnitt G ist die Isotropiegruppe von 0 . Mit der Isotropiegruppe eines Unterraums ist hier diejenige Gruppe gemeint, die alle Punkte des Unterraums stabilisiert. Da in unserem Fall der Grundkörper \mathbb{R} unendlich viele Elemente hat, können wir statt der Unterräume auch die Isotropiegruppen der Punkte von V betrachten.

Die Isotropiefamilie, die auf diese Weise einer G -Darstellung V zugeordnet ist, bezeichnen wir mit $\mathcal{F}(V)$.

In der Definition des Burnside-Rings einer Gruppe können wir an Stelle aller endlichen G -Mengen alternativ auch nur diejenigen verwenden, deren Isotropiegruppen in einer bestimmten Isotropiefamilie \mathcal{F} liegen [Dre86].

Definition 6.4. Die Grothendieck-Gruppe der Isomorphieklassen von G -Mengen, deren Isotropie in \mathcal{F} liegt, bezeichnen wir mit $A(G, \mathcal{F})$.

Für eine Untergruppe G von H erhalten wir eine entsprechende Familie \mathcal{F}_H durch Schneiden aller Gruppen aus \mathcal{F} mit H .

Die eingeschränkten Burnside-Ringe lassen sich schon als Teilringe eines kleineren Produkts von Kopien von \mathbb{Z} auffassen [Dre86, 1.v]:

Lemma 6.5. *Der Ring $A(G, \mathcal{F})$ lässt sich mit Hilfe der Komposition*

$$A(G, \mathcal{F}) \rightarrow A(G) \rightarrow \prod_{[H \in \mathcal{F}]} \mathbb{Z}$$

als Teilring in das eingeschränkte Produkt einbetten, bei dem H nur die Äquivalenzklassen der Untergruppen aus \mathcal{F} durchläuft.

Der Funktor $H \mapsto A(H, \mathcal{F}_H)$ auf den Untergruppen von G hat die folgenden Eigenschaften:

- ▷ Alle Restriktionsabbildungen von A schränken sich zu Abbildungen zwischen den Teilringen $A(H, \mathcal{F}_H)$ ein.
- ▷ Die Induktionsabbildungen lassen sich zu Abbildungen $A(H, \mathcal{F}_H) \rightarrow A(H', \mathcal{F}_{H'})$ einschränken, falls $H \in \mathcal{F}_{H'}$, also falls H von der Form $U \cap H'$ für ein Element $U \in \mathcal{F}$ ist.

Für die restlichen Untergruppen liegt das Bild der Induktionsabbildungen im Allgemeinen nicht in der richtigen Teilmenge.

6.2. Eingeschränkte Burnsideringe und eingeschränkte Green-Funktoren

Zu jeder gegebenen Isotropiefamilie können wir eine zugehörige Kategorie von eingeschränkten Mackey- oder Green-Funktoren bilden, die nur die oben angegebenen Induktionsabbildungen besitzen und die für alle definierten Abbildungen die Axiome erfüllen. In der Doppelnebenklassenformel

$$\text{Res}_H^G \text{Ind}_K^G(x) = \sum_{\sigma} \text{Ind}_{H \cap {}^\sigma K}^H c_{\sigma} \text{Res}_{\sigma^{-1} H \cap K}^K(x)$$

für zwei Untergruppen H und K von G sind alle Induktionsabbildungen auf der rechten Seite definiert, wenn Ind_K^G existiert, da mit $K \in \mathcal{F}_G$ auch $H \cap {}^\sigma K \in \mathcal{F}_H$ gilt.

Bemerkung 6.6. Genauso, wie der Burnsidering-Funktor das initiale Objekt in der Kategorie aller Green-Funktoren ist, ist der eingeschränkte Burnsidering-Funktor initial in der zugehörigen Kategorie von eingeschränkten Green-Funktoren.

In den nächsten Abschnitten werden wir den folgenden Spezialfall betrachten:

Beispiel 6.7. Sei $G \subset \Sigma_n$ eine Untergruppe einer symmetrischen Gruppe, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ die Menge der Untergruppen von Σ_n , die als Isotropiegruppen von Elementen aus der Permutationsdarstellung \mathbb{R}^n vorkommen, und \mathcal{F}_G die zugehörige Menge von Untergruppen von G . Die Menge \mathcal{F} besteht genau aus den Untergruppen, die konjugiert zu Untergruppen der Form $\Sigma_{n_1} \times \cdots \times \Sigma_{n_r}$ sind.

Für diese Wahl von \mathcal{F} schreiben wir $A^{\text{res}}(G)$ statt $A(G, \mathcal{F}_G)$. Dieser eingeschränkte Burnsidering-Funktor hat die folgenden Eigenschaften:

▷ Die Induktionsabbildungen

$$\text{Ind}_{(\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle}^{\Sigma_{i+j}\langle G \rangle} : A^{\text{res}}((\Sigma_i \times \Sigma_j)\langle G \rangle) \rightarrow A^{\text{res}}(\Sigma_{i+j}\langle G \rangle)$$

existieren für alle i, j .

▷ Falls $G \subset \Sigma_i, H \subset \Sigma_j$, haben wir $G \times H \subset \Sigma_{i+j}$ und der Homomorphismus $A(G) \otimes A(H) \rightarrow A(G \times H)$ schränkt sich zu einer Abbildung

$$A^{\text{res}}(G) \otimes A^{\text{res}}(H) \xrightarrow{\cong} A^{\text{res}}(G \times H)$$

ein.

In [Dre86, §3] wird bewiesen, dass sich der Funktor auf symmetrischen Gruppen mit dem Darstellungsfunktor identifizieren lässt:

Satz 6.8. *Der Ringhomomorphismus*

$$A^{\text{res}}(\Sigma_n) = A(\Sigma_n, \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)) \rightarrow R(\Sigma_n),$$

der einer Σ_n -Menge X den komplexen Vektorraum mit Basis X zuordnet, ist ein Isomorphismus.

6. G_∞ -Multiplikationen

Bemerkung 6.9. Der Darstellungsring der symmetrischen Gruppe Σ_n ist, wie bereits angemerkt, für jeden Grundkörper der Charakteristik 0 isomorph zum komplexen Darstellungsring. Daher stimmt die Aussage zum Beispiel auch für \mathbb{R} oder \mathbb{Q} statt \mathbb{C} .

Eine Untersuchung der Abbildungen, die für die Definition von Σ benötigt werden, zeigt, dass die Eigenschaften des eingeschränkten Green-Funktors bereits ausreichen. Wir können also Σ auch als Cotripel auf der Kategorie der eingeschränkten Green-Funktoren auffassen, die auf Untergruppen von Σ_n der Familie $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ zugeordnet sind. Die Funktoren sind wieder auf allen Permutationsgruppen definiert.

Bemerkung 6.10. Für die Definition von \mathcal{F}_G wird die Einbettung von G in eine symmetrische Gruppe benötigt. Man sieht hier also, anders als bei den Green-Funktoren in Kapitel 4, dass für jede Gruppe darüber Buch geführt werden muss, in welcher Weise wir sie als Untergruppe einer symmetrischen Gruppe auffassen möchten.

Topologisch erhält man Beispiele für eingeschränkte Green-Funktoren dieser Bauart durch Verwendung des natürlichen Universums an Stelle des vollständigen. Die Zuordnung eines natürlichen Universums zu einer endlichen Gruppe G hängt dabei wieder von der Einbettung in eine symmetrische Gruppe ab.

Satz 6.11. *Seien X ein G -Spektrum und Y ein G -Ringspektrum. Dann ist der Funktor $\mathcal{F} \rightarrow \text{Ab}$, der jeder Gruppe H die Gruppe $[X, Y]_{\text{Nat}}^H$, also die stabilen H -Morphismen über dem natürlichen Universum, zuordnet, ein eingeschränkter Green-Funktor.*

Beweis. Der Beweis funktioniert genau wie im Fall des vollständigen Universums mit allen Untergruppen. Als einzigen Punkt muss man hier beachten, dass es für die Konstruktion der Induktionsabbildungen mit Hilfe des Wirthmüller-Isomorphismus möglich sein muss, jede G -Menge der Form G/H mit $H \in \mathcal{F}$ in die Permutationsdarstellung einzubetten. Die Menge \mathcal{F} wurde aber gerade so gewählt, dass sie genau die Untergruppen mit dieser Eigenschaft enthält. \square

6.3. Klassifizierende Räume für Familien von Untergruppen

Für klassifizierende Räume von Gruppen gibt es ebenfalls allgemeinere Versionen, die von einer vorher gewählten Menge von Untergruppen abhängen.

Definition 6.12. [Die87, I.6.6] Ein klassifizierender Raum einer Isotropiefamilie \mathcal{F} für G ist ein G -CW-Komplex $E\mathcal{F}$ mit den Eigenschaften

- (i) Alle Isotropiegruppen von $E\mathcal{F}$ liegen in \mathcal{F} .
- (ii) Für jeden G -CW-Komplex X mit Isotropiegruppen in \mathcal{F} gibt es bis auf G -Homotopie genau eine Abbildung $X \rightarrow E\mathcal{F}$.

Klassifizierende Räume existieren für alle Familien, eindeutig bis auf G -Homotopieäquivalenz [Die87, I.6.6].

Aus den Eigenschaften folgt insbesondere: Falls \mathcal{F} wie in Beispiel 6.7 definiert ist und V eine Darstellung aus dem natürlichen Universum, gilt für G -Räume X , dass

$$[S^{V+r}, S^V \wedge X]^G \cong [S^{V+r}, S^V \wedge E\mathcal{F}_+ \wedge X]^G.$$

Also ist auch für die stabilen G -Homotopiegruppen auf dem natürlichen Universum

$$\pi_*^G(X) \cong \pi_*^G(X \wedge E\mathcal{F}_+).$$

6.4. Coalgebrastruktur für G_∞ -Spektren

Wir bewegen uns ab jetzt immer in natürlichen Universen von symmetrischen Gruppen Σ_n und deren Untergruppen. Die entsprechenden eingeschränkten Green-Funktoren gehören zu der Familie \mathcal{F} von Untergruppen, die als Isotropie von Punkten aus \mathbb{R}^n vorkommen. Die Induktionsabbildungen sind also wie in Abschnitt 6.2 nicht für alle Inklusionen von Untergruppen definiert.

Der Universenwechsel, der aus einem Spektrum auf dem trivialen Universum ein Spektrum auf dem natürlichen Universum macht, wird in den folgenden Abschnitten nicht immer explizit notiert. Es ist aber immer aus dem Zusammenhang zu erkennen, ob mit X das Spektrum selbst gemeint ist oder dasjenige G -Spektrum für eine endliche Gruppe G , das zunächst als G -Spektrum über dem trivialen Universum mit trivialer Gruppenoperation aufgefasst wird und auf das dann ein Universenwechsel ι_* angewandt wird. Mit S bezeichnen wir immer das Sphärenspektrum in der jeweiligen Kategorie.

Jedes Einhängungsspektrum X mit G_∞ -Multiplikation wird durch Anwenden von $\text{Res}_1^{\Sigma_2}$ auf die zweifache Multiplikation $\mu^{(2)}$ zu einem kommutativen Ringspektrum bis auf Homotopie. Auf den Homotopiegruppen $\pi_0^G(X)$ erhält man dadurch eine Ringstruktur. Falls sich im Fall eines Moore-Spektrums SK so die vorgegebene Multiplikation auf K ergibt, werden wir wie im H_∞ -Fall davon sprechen, dass die G_∞ -Struktur die Multiplikation von K realisiert.

Durch Bilden der n -ten Potenzen für alle n und Zusammensetzen mit den Multiplikationsabbildungen $\mu^{(n)}$ ergibt sich eine Abbildung

$$[S, X]^G \xrightarrow{(-)^{(n)}} \prod_n [S^{(n)}, X^{(n)}]_{\text{Nat}}^{\Sigma_n \langle G \rangle} \xrightarrow{(\mu^{(n)})_*} \prod_n [S, X]_{\text{Nat}}^{\Sigma_n \langle G \rangle}.$$

Satz 6.13. *Diese Abbildung definiert einen Ringhomomorphismus*

$$\tau^G : \pi_0^G(X) \rightarrow \Sigma^{\pi_0^{(-)}(X)}(G).$$

Beweis. Dass das Bild in der Teilmenge der exponentiellen Elemente liegt, folgt aus der Kommutativität des ersten G_∞ -Diagramms, zusammen mit der Beobachtung, dass für ein Element $x \in [S, X]^G$ und $i + j = n$ die Restriktion von $x^{(n)} \in [S^{(n)}, X^{(n)}]_{\text{Nat}}^{\Sigma_n \langle G \rangle}$ auf $[S^{(n)}, X^{(n)}]_{(\Sigma_i \times \Sigma_j) \langle G \rangle}$ mit dem Bild von $(x^{(i)}, x^{(j)})$ unter

$$[S^{(i)}, X^{(i)}]_{\text{Nat}}^{\Sigma_i \langle G \rangle} \times [S^{(j)}, X^{(j)}]_{\text{Nat}}^{\Sigma_j \langle G \rangle} \rightarrow [S^{(n)}, X^{(n)}]_{(\Sigma_i \times \Sigma_j) \langle G \rangle}$$

übereinstimmt. Der Übersichtlichkeit halber werden wir die Gruppe G nicht in allen Diagrammen hinschreiben.

6. G_∞ -Multiplikationen

Die Additivität erhalten wir ebenfalls aus dem ersten Diagramm: Aus dessen Kommutativität folgt die Kommutativität des adjungierten Diagramms von Σ_n -Spektren

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X^{(i)} \wedge X^{(j)}) & \longrightarrow & X^{(n)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X \wedge X) & \longrightarrow & X \end{array}$$

und zusammen mit Lemma 5.13 erhalten wir für zwei Elemente $x, y \in [S, X]^G$ das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} S^{(n)} & \xrightarrow{\quad} & X^{(n)} & \xrightarrow{\quad} & X \\ \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ (S \vee S)^{(n)} & \xrightarrow{(x \vee y)^{(n)}} & (X \vee X)^{(n)} & & \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \\ \bigvee_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (S^{(i)} \wedge S^{(j)}) & \longrightarrow & \bigvee_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X^{(i)} \wedge X^{(j)}) & \longrightarrow & \bigvee_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (X \wedge X) \end{array}$$

von $\Sigma_n \langle G \rangle$ -Spektren. In der oberen Zeile liest man das Element $\tau_n(x + y)$ ab, in der unteren das Element $\sum_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} (\tau_i(x) \otimes \tau_j(y))$.

Multiplikativität folgt direkt aus der Multiplikativität der n -ten Potenz. \square

Lemma 6.14. *Die Ringhomomorphismen τ^G setzen sich zu einem Morphismus von Green-Funktoren zusammen.*

Beweis. Die Verträglichkeit mit Restriktion und Konjugation ist leicht zu sehen. Um die Verträglichkeit mit Induktion zu zeigen, stellen wir zunächst fest, dass sich aus einer Transferabbildung der Form $G/H_+ \wedge S^V \rightarrow S^V$ durch Bilden der n -fachen Smash-Potenz der Räume eine Transferabbildung zu der Abbildung

$$\Sigma_n \langle G \rangle / \Sigma_n \langle H \rangle_+ \wedge S^{V^{\oplus n}} \cong (G/H_+ \wedge S^V)^{\wedge n} \rightarrow (S^V)^{\wedge n} \cong S^{V^{\oplus n}}$$

ergibt. Da diese Transferabbildungen jeweils für die Konstruktion der Induktionsabbildungen verwendet werden, folgt die Aussage. \square

Satz 6.15. *Falls X ein Spektrum mit einer G_∞ -Multiplikation ist, werden die äquivariante Homotopiegruppen $\pi_0^G(X) = [S, X]_{\mathrm{Nat}}^G$ durch τ zu einer Σ -Coalgebra.*

Beweis. Zum Beweis der Coalgebraeigenschaft müssen wir für alle j, k die Beziehung

$$\tau_j^{\Sigma_k \langle G \rangle} \circ \tau_k^G = \mathrm{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle}^{\Sigma_{jk} \langle G \rangle} \circ \tau_{jk}^G$$

6.5. Algebraische Beschreibung der äquivarianten Homotopiegruppen

nachweisen. In $\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle$ -Spektren haben wir für jedes Element $x \in [S, X]_{Nat}^G$ aber das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 (S^{(k)})^{(j)} & \longrightarrow & S^{(jk)} \\
 (x^{(k)})^{(j)} \downarrow & & \downarrow x^{(jk)} \\
 (X^{(k)})^{(j)} & \longrightarrow & X^{(jk)} \\
 (\mu^{(k)})^{(j)} \downarrow & & \downarrow \mu^{(jk)} \\
 X^{(j)} & \xrightarrow{\mu^{(j)}} & X.
 \end{array}$$

Die rechte Komposition entspricht genau dem Element $\text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \langle G \rangle \rangle}^{\Sigma_{jk} \langle G \rangle} (\tau_{jk}^G(x))$, und links liest man das Element $\tau_j^{\Sigma_k \langle G \rangle} (\tau_k^G(x))$ ab. \square

6.5. Algebraische Beschreibung der äquivarianten Homotopiegruppen

Ähnlich wie in Abschnitt 3.4 ergibt sich auch für das natürliche Universum ein Zusammenhang mit dem Burnside-Ring:

Satz 6.16. *Sei G eine Untergruppe einer symmetrischen Gruppe und Nat das zugehörige natürliche Universum. Dann ist die Abbildung $\varphi_G : A^{res}(G) \rightarrow [S, S]_{Nat}^G$ ein Isomorphismus.*

Die Aussage wird wie ihre Entsprechung in Abschnitt 3.4 mit Hilfe eines Analogons von Satz 3.8 bewiesen. In der Darstellung des Beweises konzentrieren wir uns daher auf die Aspekte, die sich auf die Änderung des Universums beziehen.

Der Spaltungssatz 3.8 lässt sich inklusive Beweis auf diese Situation übertragen; da in Abschnitt 3.4 auf den Beweis nur verwiesen wurde, werden wir hier die entscheidenden Schritte des angepassten Beweises kurz nachvollziehen.

Sei $H \in \mathcal{F}$ eine Untergruppe von G , sei N der Normalisator von H in G und $W = W(H)$ die Weylgruppe N/H . Die Zusammensetzung der Abbildungen

$$[S, EW_+ \wedge X^H]_{Nat}^W \rightarrow [S, EW_+ \wedge X]_{Nat}^N \rightarrow [S, (G \times_N EW_+) \wedge X]_{Nat}^G \rightarrow [S, X]_{Nat}^G$$

bezeichnen wir mit ζ_H .

Die dritte Abbildung ist die Projektion auf X , die zweite Abbildung ist der Wirthmüller-Isomorphismus:

Lemma 6.17. *Der von Wirthmüller konstruierte Erweiterungsisomorphismus*

$$[X, Y]_{Res_H^G(U)}^H \longrightarrow [X, G_+ \wedge_H Y]_U^G$$

existiert für jedes G -Universum U , in das sich G/H äquivariant einbetten lässt.

Insbesondere haben wir also einen solchen Isomorphismus für jede Untergruppe H aus \mathcal{F} .

6. G_∞ -Multiplikationen

Satz 6.18 (Spaltungssatz für das natürliche Universum). *Die Abbildung*

$$\zeta = \bigoplus_H \zeta_H : \bigoplus_H [S, EW(H)_+ \wedge X^H]_{Nat}^{W,*} \longrightarrow [S, X]_{Nat}^{G,*}$$

wobei H die Konjugationsklassen von Untergruppen aus \mathcal{F} durchläuft, ist ein Isomorphismus.

Beweisskizze. Wir gehen die einzelnen Schritte aus dem Beweis von Satz II.7.7 in [Die87] durch:

- (a) Als erstes wird gezeigt, dass die Aussage nur für spezielle X bewiesen werden muss, und zwar nur für $X = E\mathcal{F}_1/E\mathcal{F}_2 \wedge Y$, wobei $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ zwei Familien von Untergruppen von G sind, die sich genau um die zu einer Untergruppe H konjugierten Untergruppen unterscheiden. Für die Begründung [Die87, Prop. II.7.1] werden nur Eigenschaften von äquivarianten Homologietheorien benötigt.

Im Fall des natürlichen Universums genügt es, solche Familien \mathcal{F}_1 und \mathcal{F}_2 zu untersuchen, für die die Gruppe H in \mathcal{F} liegt, da wir S^0 , wie am Ende von Abschnitt 6.3 angedeutet, durch den klassifizierenden Raum von \mathcal{F} ersetzen können und für diesen Raum nur Erweiterungen durch Untergruppen in \mathcal{F} benötigt werden.

- (b) In diesem Fall ist nur die Gruppe $[S, EW_+ \wedge X^H]$ nicht 0, die zu der entsprechenden Untergruppe gehört. Das Argument funktioniert schon unstabil in der Kategorie der G -Räume und lässt sich daher direkt übertragen. Es muss also nur gezeigt werden, dass ζ_H ein Isomorphismus ist.
- (c) Die letzte Abbildung in der Definition von ζ_H ist ein Isomorphismus. Hierfür benötigt man Ausschneidung und einige weitere Argumente für G -Räume.
- (d) Die erste Abbildung ist in diesem Fall ebenfalls ein Isomorphismus. Das wird mit Hilfe eines Satzes über unstabile äquivariante Homotopiegruppen bewiesen. [Die87, Prop. II.7.4]. \square

Beweis von Satz 6.16. Wir führen die gleichen Schritte durch wie für den Beweis von Satz 3.7. Das Inverse zu $\varphi_G : A^{res}(G) \rightarrow [S, S]_{Nat}^G$ wird mit Hilfe der Abbildung

$$\deg_G : [S, S]_{Nat}^G \rightarrow \prod_{[H]} \mathbb{Z}$$

gebildet, die einem Element $f \in [S, S]_{Nat}^G$, das durch eine G -Abbildung $f_V : S^V \rightarrow S^V$ repräsentiert wird, das Tupel

$$(\deg((f_V)^H : (S^V)^H \rightarrow (S^V)^H))_H$$

zuordnet.

6.6. Umkehrung: G_∞ -Strukturen aus Coalgebren

Hier durchläuft H nur die Konjugationsklassen von Untergruppen von G , die in \mathcal{F} liegen. Nach Lemma 6.5 lässt sich der eingeschränkte Burnside-Ring schon in dieses Produkt einbetten.

Der einzige Punkt im Beweis, der noch untersucht werden muss, ist also der Beweis der Surjektivität von φ . Wie im Fall des vollständigen Universums gilt auch hier wieder, dass für $X = S^0$ jeder der Summanden $[S, EW_+]_{Nat}^W$ einen Faktor beiträgt, der isomorph zu \mathbb{Z} ist. Wir müssen also zeigen, dass für jede Untergruppe H aus \mathcal{F} jeweils das Element erreicht wird, das in der Zerlegung aus Satz 6.18 einem Erzeuger entspricht. Mit dem Argument aus [Die87, Prop. II.8.5] sind diese Elemente aber von der Form $\text{Ind}_H^G(1)$ und damit die Bilder von $\text{Ind}_H^G(1) \in A^{res}(G)$. \square

Mit diesen Ergebnissen können wir nun die äquivariante Homotopie einiger Moore-Spektren über dem natürlichen Universum algebraisch beschreiben: Sei K ein kommutativer Ring, der als \mathbb{Z} -Modul frei ist. Dann können wir das zugehörige Moore-Spektrum SK wieder als Summe von Sphärenspektren schreiben.

Satz 6.19. *Die Mackey-Funktoren $G \mapsto [S, SK]_{Nat}^G$ und $G \mapsto A^{res}(G) \otimes K$, die auf allen Permutationsgruppen definiert sind, sind isomorph.*

Beweis. Für $K = \mathbb{Z}$ folgt die Aussage aus Satz 6.16. Die allgemeinere Aussage zeigt man mit Hilfe des Isomorphismus

$$[S, S]_{Nat}^G \otimes [S, SK]^1 \rightarrow [S, SK]_{Nat}^G,$$

der sich durch Komposition von Morphismen ergibt. Auf den Morphismus aus $[S, SK]$ wird dafür zunächst der Universenwechsel nach $[S, SK]_{Nat}^G$ angewandt.

Die Abbildung ist ein Isomorphismus, da nach Wahl einer Basis $\{\iota_i\}$ von K beide Seiten mit der Gruppe $\bigoplus_i [S, S]_{Nat}^G$ identifiziert werden können. Dass die Abbildungen verschiedener Gruppen sich zu einem Morphismus von Mackey-Funktoren zusammensetzen, zeigt man etwa für die Verträglichkeit mit Induktion für $H \subset G \subset \Sigma_n$ und $\varphi \otimes x \in [S, S]^H \otimes [S, SK]$ durch das folgende kommutative Diagramm in G -Spektren auf dem natürlichen Universum:

$$\begin{array}{ccccccc} S & \longrightarrow & G_+ \wedge_H S & \xrightarrow{G_+ \wedge_H \varphi} & G_+ \wedge_H S & \longrightarrow & S \\ & \searrow & \downarrow = & & \downarrow G_+ \wedge_H x & & \downarrow x \\ & & G_+ \wedge_H S & \xrightarrow{G_+ \wedge_H (x \circ \varphi)} & G_+ \wedge_H SK & \longrightarrow & SK \end{array}$$

Die untere Zeile beschreibt die Induktionsabbildung Ind_H^G angewandt auf das Tensorprodukt, die obere diejenige von $G \mapsto [S, SK]^G$. \square

6.6. Umkehrung: G_∞ -Strukturen aus Coalgebren

In Abschnitt 6.4 wurde bewiesen, dass die äquivarianten Homotopiegruppen eines G_∞ -Spektrums eine Σ -Coalgebrastruktur tragen. Wir betrachten nun wie im Kapitel über

6. G_∞ -Multiplikationen

H_∞ -Spektren einen Fall, in dem sich die Homotopiegruppen rein algebraisch beschreiben lassen, und fragen nach einer Umkehrung dieser Aussage.

Aus dem Isomorphismus in Satz 6.19 erhalten wir für jeden Ring K , der frei über \mathbb{Z} ist, eine Green-Funktor-Struktur auf $G \mapsto [S, SK]_{Nat}^G$. Wir können diese Konstruktion auf den Untergruppen jeder symmetrischen Gruppe durchführen und erhalten ein Objekt aus \mathcal{G} . Die G -äquivalente Version des Moore-Spektrums SK erhält man wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben durch Wechseln der Gruppe und des Universums.

Satz 6.20. *Falls $G \mapsto \pi_0^G(SK)$ eine Σ -Coalgebrastruktur besitzt, wird auf dem Moore-Spektrum SK eine G_∞ -Multiplikation induziert.*

Die n -te Komponente $\pi_0(SK) \rightarrow \pi_0^{\Sigma_n}(SK)$ der Strukturabbildung für die triviale Gruppe bezeichnen wir wieder mit τ_n .

Die G_∞ -Struktur wird wie in Abschnitt 4 definiert: Zunächst wählen wir eine \mathbb{Z} -Basis ι_1, ι_2, \dots für $[S, SK] \cong K$ und zerlegen $SK^{\langle n \rangle}$ als Σ_n -Spektrum in der Form

$$SK^{\langle n \rangle} \simeq \bigvee \text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots}^{\Sigma_n} S^{\langle n_1 \rangle} \wedge S^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots$$

Um eine Σ_n -äquivalente Multiplikation $\mu^{\langle n \rangle} : SK^{\langle n \rangle} \rightarrow SK$ zu bestimmen, können wir also für jeden Summanden eine Abbildung in

$$[\text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots}^{\Sigma_n} S^{\langle n_1 \rangle} \wedge S^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots, SK]^{\Sigma_n} \cong [S^{\langle n_1 \rangle} \wedge S^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots, SK]^{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots}$$

angeben. Als (n_1, n_2, \dots) -Komponente der Multiplikation $\mu^{\langle n \rangle}$ wählen wir das Element

$$\tau_{n_1}(\iota_1) \otimes \tau_{n_2}(\iota_2) \otimes \dots \in [S^{\langle n_1 \rangle} \wedge S^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots, SK]^{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots}.$$

Beim Nachweis der Eigenschaften für die hier definierten Multiplikationsabbildungen fassen wir uns an einigen Stellen etwas kürzer als in Kapitel 4, weil die Beweisschritte genau die gleichen sind.

Lemma 6.21. *Die Abbildung*

$$K^{\otimes n} \cong [S, SK] \otimes \dots \otimes [S, SK] \longrightarrow [S^{\langle n \rangle}, SK^{\langle n \rangle}]_{Nat}^1 \xrightarrow{\text{Res}_1^{\Sigma_n(\mu^{\langle n \rangle})_*}} [S, SK]_{Nat}^1 \cong K,$$

wobei $Nat = (\mathbb{R}^\infty)^n$ das natürliche Universum zu $(\Sigma_1)^n \subset \Sigma_n$ bezeichnet, ist die Multiplikation in K .

Beweis. Die erste Abbildung ist das n -fache externe Smash-Produkt wie in Abschnitt 5.3. Die Aussage beweist man nun wie im Beweis von Lemma 4.14 zunächst für die Erzeuger. Die Multiplikation $\mu^{\langle n \rangle}$ ist mit Hilfe der Multiplikation von K definiert, und die hier angegebene Abbildung und die Multiplikation in K sind jeweils linear in jeder Komponente. Damit folgt die Aussage für alle Elemente. \square

6.6. Umkehrung: G_∞ -Strukturen aus Coalgebren

Lemma 6.22. *Die Komposition*

$$[S, SK]^G \rightarrow [S^{(n)}, SK^{(n)}]_{\Sigma_n \langle G \rangle} \xrightarrow{\mu_*^{(n)}} [S, SK]_{\Sigma_n \langle G \rangle}$$

ist für jede Gruppe G und alle $n \in \mathbb{N}$ die vorgegebene Abbildung τ_n^G .

Beweis. Nach Voraussetzung gilt die Behauptung auf den Basiselementen ι_i von K . Wie im Beweis von Lemma 4.15 kann man sich auf diesen Fall zurückziehen, wobei das Einschränken auf endliche Skelette hier wegfällt, weil S in äquivarianten Spektren schon kompakt ist. \square

Lemma 6.23. *Die Strukturabbildungen des Green-Funktors A_K^{res} der Form*

$$A_K^{res}(G) \times A_K^{res}(H) \rightarrow A_K^{res}(G \times H)$$

werden durch den Isomorphismus $A_K^{res}(G) \cong [S, SK]^G$ mit der Zusammensetzung

$$[S, SK]^G \times [S, SK]^H \rightarrow [S \wedge S, SK \wedge SK]^{G \times H} \xrightarrow{\mu_*^{(2)}} [S, SK]^{G \times H}$$

identifiziert.

Beweis. Die Multiplikation $\mu^{(2)}$ wird hier zunächst wie in 6.1 zu einem Morphismus von $G \times H$ -Spektren gemacht. Die Aussage folgt dann mit Hilfe des Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 6.19 wieder aus dem Spezialfall $G = H = 1$, der schon bewiesen wurde. \square

Für den Beweis von Satz 6.20 fehlt uns noch die Kommutativität der beiden Diagramme. Wieder ist der Beweis recht lang und scheinbar kompliziert, aber wie in Kapitel 4 wird nur ausgenutzt, dass es nach Wahl einer Basis für K und der zugehörigen Zerlegung von SK als Summe von Sphärenspektren ausreicht, Multiplikationsabbildungen auf Potenzen von S vorzugeben. Genau diese kommen in der algebraischen Beschreibung vor, und der Beweis besteht wie in Abschnitt 4.4 nur noch aus dem Zusammensetzen der algebraisch gegebenen Informationen.

Lemma 6.24. *Die Diagramme*

$$\begin{array}{ccc} SK^{(i)} \wedge SK^{(j)} & \longrightarrow & SK^{(i+j)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ SK \wedge SK & \longrightarrow & SK \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} (SK^{(k)})^{(j)} & \longrightarrow & SK^{(jk)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ SK^{(j)} & \longrightarrow & SK \end{array}$$

mit den gerade definierten Multiplikationen $\mu^{(-)}$ kommutieren in $\Sigma_i \times \Sigma_j$ -Spektren bzw. in $\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle$ -Spektren.

6. G_∞ -Multiplikationen

Beweis. Für das erste Diagramm betrachten wir nur den Summanden zu zwei Zerlegungen (i) von i und (j) von j und weisen die Kommutativität des adjungierten Diagramms von $\Sigma_{(i)} \times \Sigma_{(j)}$ -Spektren nach:

$$\begin{array}{ccc} S^{\langle i_1 \rangle} \wedge S^{\langle i_2 \rangle} \wedge \dots \wedge S^{\langle j_1 \rangle} \wedge S^{\langle j_2 \rangle} \wedge \dots & \longrightarrow & S^{\langle i_1+j_1 \rangle} \wedge S^{\langle i_2+j_2 \rangle} \wedge \dots \\ \downarrow & & \downarrow \\ SK \wedge SK & \longrightarrow & SK \end{array}$$

Die rechte Komposition ergibt das Element

$$\text{Res}_{\Sigma_{(i_1)} \times \Sigma_{(j_1)} \times \Sigma_{(i_2)} \times \Sigma_{(j_2)} \times \dots}^{\Sigma_{(n_1)} \times \Sigma_{(n_2)} \times \dots} (\tau_{n_1}(t_1) \otimes \tau_{n_2}(t_2) \otimes \dots).$$

Auf der linken Seite erhält man nach Lemma 6.23 das Produkt

$$(\tau_{i_1}(t_1) \otimes \tau_{i_2}(t_2) \otimes \dots) \otimes (\tau_{j_1}(t_1) \otimes \tau_{j_2}(t_2) \otimes \dots) \in [S^{\langle i_1 \rangle} \wedge S^{\langle i_2 \rangle} \wedge \dots \wedge S^{\langle j_1 \rangle} \wedge S^{\langle j_2 \rangle} \wedge \dots, SK].$$

Da die $(\tau_n(t_i))_n$ exponentielle Folgen sind, stimmen diese Elemente überein.

Für das zweite Diagramm zerlegen wir $(SK^{\langle k \rangle})^{\langle j \rangle}$ als

$$\begin{aligned} (SK^{\langle k \rangle})^{\langle j \rangle} &\simeq \left(\bigvee_{(k)} \text{Ind}_{\Sigma_{(k)}}^{\Sigma_k} S^{\langle k_1 \rangle} \wedge S^{\langle k_2 \rangle} \wedge \dots \right)^{\langle j \rangle} \\ &\simeq \bigvee_{(j)} \text{Ind}_{\times \Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle}^{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle} \bigwedge_{(k)} (S^{\langle k_1 \rangle} \wedge S^{\langle k_r \rangle} \wedge \dots)^{j(k)}. \end{aligned}$$

Hier läuft (k) über die verschiedenen Zerlegungen von k als $k_1 + k_2 + \dots$ und (j) über die Zerlegungen der Form $j = \sum_{(k)} j(k)$. Wir betrachten die Abbildungen nun auf jedem Summanden einzeln, fixieren also eine Zerlegung (j) von j , und gehen durch Weglassen von „Ind“ auf der linken Seite zum adjungierten Diagramm über.

Um die Komposition auf der linken Seite zu beschreiben, nutzen wir die Kommutativität des ersten G_∞ -Diagramms an mehreren Stellen aus und erhalten ein kommutatives Diagramm von $\prod \Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle$ -Spektren:

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge_{(k)} (S^{\langle k_1 \rangle} \wedge S^{\langle k_2 \rangle} \wedge \dots)^{\langle j(k) \rangle} & & & & \\ \downarrow \iota_1^{\langle k_1 \rangle} \wedge \iota_2^{\langle k_2 \rangle} \wedge \dots & & & \searrow & \\ \bigwedge_{(k)} (SK^{\langle k_1 \rangle} \wedge SK^{\langle k_2 \rangle} \wedge \dots)^{\langle j(k) \rangle} & \xrightarrow{\alpha} & \bigwedge_{(k)} (SK^{\langle k \rangle})^{\langle j(k) \rangle} & \xrightarrow{\alpha} & (SK^{\langle k \rangle})^{\langle j \rangle} \\ \downarrow \mu & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ \bigwedge_{(k)} (SK \wedge SK \wedge \dots)^{\langle j(k) \rangle} & \xrightarrow{\wedge \mu} & \bigwedge_{(k)} SK^{\langle j(k) \rangle} & \xrightarrow{\alpha} & SK^{\langle j \rangle} \\ & & \downarrow \mu & & \downarrow \mu \\ & & SK \wedge SK \wedge \dots & \xrightarrow{\mu} & SK \end{array}$$

6.6. Umkehrung: G_∞ -Strukturen aus Coalgebren

Der Einfachheit halber wurden die Restriktionen aus der Notation gestrichen und die Namen der Morphismen nur angedeutet.

Aus dem Diagramm und Lemma 6.23 folgt, dass es genügt, die Abbildungen auf den einzelnen Faktoren zu untersuchen. Für jeden Index (k) erhalten wir auf der linken Seite auf dem zugehörigen Faktor nach Lemma 6.22 die Abbildung, die durch

$$\tau_{j(k)}^{\Sigma_{(k_1)} \times \Sigma_{(k_2)} \times \dots} (\tau_{k_1}(t_1) \otimes \tau_{k_2}(t_2) \otimes \dots)$$

beschrieben wird.

Auf der rechten Seite zerlegen wir das Element $SK^{(n)}$ in Summanden der Form

$$\text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots}^{\Sigma_n} (S^{(n_1)} \wedge S^{(n_2)} \wedge \dots)$$

und stellen fest, dass die Abbildung α den Summanden

$$\bigwedge_{(k)} (S^{(k_1)} \wedge S^{(k_2)} \wedge \dots)^{j(k)} \simeq \bigwedge_{(k)} (S^{(k_1)})^{j(k)} \wedge (S^{(k_2)})^{j(k)} \wedge \dots$$

von $(SK^{(k)})^{j(k)}$ in den Summanden von

$$\text{Res}_{\prod \Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle}^{\Sigma_n} SK^{(n)} = \text{Res}_{\prod \Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle}^{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle} \text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle}^{\Sigma_n} \bigvee_{(n)} \text{Ind}_{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots}^{\Sigma_n} (S^{(n_1)} \wedge S^{(n_2)} \wedge \dots)$$

der Form

$$\text{Res}_{\prod \Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle}^{\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots} (S^{(n_1)} \wedge S^{(n_2)} \wedge \dots)$$

mit den Indizes $n_i = \sum_{(k)} k_i \cdot j(k)$ abbildet. Zur Beschreibung mit Hilfe von τ betrachten wir das folgende kommutative Diagramm in $\prod \Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle$ -Spektren:

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge_{(k)} (S^{(k_1)})^{j(k)} \wedge (S^{(k_2)})^{j(k)} \wedge \dots & \longrightarrow & \bigwedge_{(k)} S^{(j(k) \cdot k_1)} \wedge S^{(j(k) \cdot k_2)} & \longrightarrow & S^{(n_1)} \wedge S^{(n_2)} \wedge \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigwedge_{(k)} (SK^{(k_1)})^{j(k)} \wedge (SK^{(k_2)})^{j(k)} \wedge \dots & \longrightarrow & \bigwedge_{(k)} SK^{(j(k) \cdot k_1)} \wedge SK^{(j(k) \cdot k_2)} & \longrightarrow & SK^{(n_1)} \wedge SK^{(n_2)} \wedge \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & SK \wedge SK \wedge \dots & & SK \wedge SK \wedge \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & SK^r & \longrightarrow & SK \end{array}$$

Die Smash-Produkte in der vorletzten Zeile sind endlich, weil es nur für die positiven Indizes in der Zeile darüber jeweils einen Faktor gibt.

Aus diesem Diagramm lässt sich nun mit Hilfe von Lemma 6.22 die Abbildung auf dem Faktor zum Index (k) ablesen. Wir erhalten das Produkt

$$\text{Res}_{\Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{k_1} \rangle}^{\Sigma_{j(k) \cdot k_1}} \tau_{j(k)}^{\Sigma_{k_1}}(t_1) \otimes \text{Res}_{\Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{k_2} \rangle}^{\Sigma_{j(k) \cdot k_2}} \tau_{j(k)}^{\Sigma_{k_2}}(t_2) \otimes \dots$$

6. G_∞ -Multiplikationen

in $[S, SK]^{\Sigma_{j(k)} \langle \Sigma_{(k)} \rangle}$.

Wegen der Voraussetzung

$$\text{Res}_{\Sigma_j \langle \Sigma_k \rangle}^{\Sigma_{jk}} \tau_{jk}(x) = \tau_j^{\Sigma_k}(\tau_k(x))$$

für alle $x \in K$ und alle Indizes sind die beiden Abbildungen gleich. \square

Wir wissen also, dass G_∞ -Strukturen auf dem Moore-Spektrum SK mit Hilfe von Σ beschrieben werden können. Auf der algebraischen Seite lassen sich die Bedingungen mit Hilfe der Ergebnisse aus 2.4 auch kürzer formulieren.

Satz 6.25. *Durch Zusammensetzen von Σ mit den Funktoren $A^{res} \otimes -$ und $ev(1)$ erhält man ein Cotripel auf Ringen, das isomorph zum Witt-Cotripel ist.*

Beweis. Dass die Zusammensetzung ein Cotripel ergibt, folgt aus Satz 2.23, weil der eingeschränkte Burnsidering die Voraussetzungen an den Green-Funktor erfüllt:

- ▷ Die Ringe sind als \mathbb{Z} -Moduln endlich erzeugt und frei.
- ▷ Die Abbildungen

$$A^{res}(G) \otimes A^{res}(H) \rightarrow A^{res}(G \times H)$$

sind Isomorphismen: Eine Basis von $A^{res}(G \times H)$ ist durch die Konjugationsklassen von Isotropiegruppen des $G \times H$ -Raums $\mathbb{R}^i \times \mathbb{R}^j$ gegeben, falls $G \subset \Sigma_i$ und $H \subset \Sigma_j$. Diese Basis ist aber genau das Produkt der entsprechenden Basen von $A^{res}(G)$ und $A^{res}(H)$.

- ▷ Eine Basis für $A^{res}(\Sigma_n \langle G \rangle)$ enthält für jede Untergruppe der Form $\Sigma_{n_1} \langle G_1 \rangle \times \cdots \times \Sigma_{n_r} \langle G_r \rangle$ den entsprechenden Quotienten, wobei die G_i die Untergruppen aus der zugehörigen Isotropiefamilie von G durchlaufen.
- ▷ Wir haben Restriktionsabbildungen entlang von Projektionen der Form $\mathcal{S} \langle G \rangle \rightarrow \mathcal{S}$.

Da für die Konstruktion des Cotripels von Ringen der Funktor nur auf symmetrische Gruppen angewandt wird und der Morphismus von Green-Funktoren $A^{res} \rightarrow R$ in diesen Komponenten aus Isomorphismen besteht, erhalten wir denselben Funktor auf Ringen wie in Abschnitt 2.5 für den Darstellungsring. Dieses Cotripel haben wir aber schon mit dem Witt-Cotripel identifiziert. \square

Als Folgerung erhalten wir ein einfach zu formulierendes Kriterium dafür, wann es auf SK eine G_∞ -Multiplikation geben kann:

Satz 6.26. *Das Moore-Spektrum SK hat genau dann eine G_∞ -Struktur, wenn K ein λ -Ring ist.*

6.6. Umkehrung: G_∞ -Strukturen aus Coalgebren

Beweis. Das Spektrum SK ist genau dann ein G_∞ -Spektrum, wenn der Ring K eine Coalgebra über dem zugehörigen Cotripel auf der Kategorie der Ringe ist. Für diese Einschränkung von Σ wird der Funktor aber nur auf symmetrische Gruppen angewendet, und für diese Gruppen gilt $A^{res}(\Sigma_n) \cong R(\Sigma_n)$ nach Satz 6.8. Da die Abbildung $A^{res} \rightarrow R$ ein Morphismus der eingeschränkten Green-Funktoren ist, ist dieses Cotripel isomorph zu dem mit Hilfe von R gebildeten. Die Coalgebren darüber sind aber nach Satz 2.26 genau die Coalgebren über dem Witt-Cotripel, also genau die λ -Ringe. \square

Für Morphismen erhält man eine ähnliche Aussage wie in Abschnitt 4.4, die sich sogar einfacher formulieren lässt:

Satz 6.27. *Sei π_0^Λ der Funktor, der jedem G_∞ -Spektrum X den Ring $\pi_0(X)$ mit der induzierten λ -Struktur zuordnet. Die Einschränkung von π_0^Λ auf Moore-Spektren zu freien abelschen Gruppen ist eine Äquivalenz von Kategorien zwischen der Homotopiekategorie dieser G_∞ -Moore-Spektren SK und den zugehörigen λ -Ringen K .*

Beweis. Wie in Abschnitt 4.4 zeigt man, dass ein Homomorphismus $K \rightarrow K'$ zwischen λ -Ringen aus der ersten Kategorie einem G_∞ -Morphismus der entsprechenden Moore-Spektren entspricht. Dafür wird SK mit Hilfe einer \mathbb{Z} -Basis von K in Summanden zerlegt, und für jede Zerlegung $n = n_1 + n_2 + \dots$ wird im Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 S^{\langle n_1 \rangle} \wedge S^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots & \xrightarrow{\iota_1^{n_1} \wedge \iota_2^{n_2} \wedge \dots} & SK^{\langle n_1 \rangle} \wedge SK^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots & \longrightarrow & SK^{\langle n \rangle} & \longrightarrow & SK \\
 \parallel & & \downarrow & & & & \downarrow S\varphi \\
 S^{\langle n_1 \rangle} \wedge S^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots & \longrightarrow & SK'^{\langle n_1 \rangle} \wedge SK'^{\langle n_2 \rangle} \wedge \dots & \longrightarrow & SK'^{\langle n \rangle} & \longrightarrow & SK'
 \end{array}$$

von $\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots$ -Spektren die Abbildung $\iota_1^{n_1} \wedge \iota_2^{n_2} \wedge \dots$ eingesetzt. Hier folgt die Kommutativität dann wieder aus der algebraischen Bedingung. \square

6. G_∞ -Multiplikationen

7. Algebraische Kriterien

Die Äquivalenz von Kategorien aus dem letzten Abschnitt und die entsprechenden algebraischen Bedingungen für H_∞ -Moore-Spektren liefern notwendige Kriterien für die Existenz dieser kommutativen Multiplikationen. Wir untersuchen daher in diesem Kapitel für beide Fälle die algebraische Zusatzstruktur auf den Ringen etwas genauer.

7.1. λ -Ringe

Im nicht-vervollständigten Fall ist über die Theorie der betreffenden Ringe aus der Literatur über λ -Ringe schon viel bekannt, daher ist es unser Ziel, einige dieser Ergebnisse so zu formulieren, dass sie sich auf die Vervollständigung übertragen lassen. Alle in diesem Kapitel betrachteten Ringe haben die Charakteristik 0. Zunächst formulieren wir ein Kriterium, das sich recht einfach aus den Adamsoperationen gewinnen lässt.

Lemma 7.1. *Sei K ein λ -Ring. Dann induzieren die λ -Operationen auf K für jede Primzahl p eine Abbildung $\varphi_p : K \rightarrow K$ mit den Eigenschaften*

$$\varphi_p(x + y) = \varphi_p(x) + \varphi_p(y) - \frac{1}{p}((x + y)^p - x^p - y^p)$$

und

$$\varphi_p(xy) = x^p \varphi_p(y) + y^p \varphi_p(x) + p \varphi_p(x) \varphi_p(y).$$

In der Formulierung mit den großen Wittvektoren erhält man die Abbildung als Projektion auf die p -te Komponente; die Eigenschaften rechnet man dann mit Hilfe der Geisterkomponenten

$$WK \rightarrow K^{\mathbb{N}}, (a_n)_n \mapsto \left(\sum_{d|n} da_d^{\frac{n}{d}} \right)_n$$

leicht nach. Addition und Multiplikation auf WK sind durch die Festlegung, dass die Abbildung in jeder der Geisterkomponenten ein natürlicher Ringhomomorphismus sein soll, eindeutig bestimmt.

Wir werden für den Beweis hier einen Ansatz mit Hilfe unserer alternativen Definition von λ -Ringern wählen, um ihn anschließend auf den Fall des vervollständigten Darstellungsrings übertragen zu können.

7. Algebraische Kriterien

Nach den Ergebnissen aus Abschnitt 2.5 haben wir eine Kette von Isomorphismen

$$\begin{array}{ccccc}
 WK & & (k_n) & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 + tK[[t]] & & \prod_n (1 - k_n t^n) & & 1 + \sum_n f(y_n) t^n \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots], K) & & y_n & & f \\
 \uparrow & & \downarrow & & \\
 \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\bigoplus_n R(\Sigma_n), K) & & 1_n & & \sum_n \langle X_n, - \rangle \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \prod_n^e R(\Sigma_n) \otimes K & & & & (X_n)_n
 \end{array} \tag{2}$$

Als erstes beschreiben wir das Element $Z_n \in \prod_n^e R(\Sigma_i)$, das unter dem Isomorphismus

$$\prod_n^e R(\Sigma_i) \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots], \mathbb{Z})$$

aus Lemma 2.27 dem Ringhomomorphismus ξ_n entspricht, der y_n auf 1 und alle anderen Erzeuger auf 0 abbildet.

Lemma 7.2. *Unter dem Isomorphismus*

$$WK \rightarrow 1 + tK[[t]] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots], K)$$

wird ξ_n mit der Folge $(0, \dots, 0, -1, 0, \dots)$ mit -1 an der n -ten Stelle identifiziert, und das Quadrat dieses Elements hat die Form $(0, \dots, 0, n, \dots)$.

Beweis. Die Darstellung von ξ_n in den Wittvektoren ergibt sich direkt aus der Definition der Isomorphismen. Für die Untersuchung des Quadrats kann man wie oben beschrieben die Geisterkomponenten verwenden. \square

Lemma 7.3. *Die Komponenten der Folge $Z_n \in \prod_m R(\Sigma_m)$ verschwinden für alle Indizes, die keine Vielfachen von n sind, und die n -te Komponente $z_n \in R(\Sigma_n)$ hat die folgenden Eigenschaften:*

(a) $\langle z_n, 1_n \rangle = 1.$

(b) $z_n^2 = -n \cdot z_n.$

(c) *Der Kern der Restriktionsabbildung $R(\Sigma_n) \xrightarrow{\text{Res}} \prod_{i=1}^{n-1} R(\Sigma_i \times \Sigma_{n-i})$ besteht genau aus den ganzzahligen Vielfachen von z_n .*

(d) Für jede nichttriviale Zerlegung (n) von n und alle $A \in R(\Sigma_{(n)})$ ist

$$\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(A) \cdot z_n = 0.$$

Beweis. In Diagramm (2) liest man ab, dass der zusammengesetzte Isomorphismus $\prod_i^e R(\Sigma_i) \rightarrow 1 + t\mathbb{Z}[[t]]$ die Form $(X_i) \mapsto \sum_i \langle X_i, 1_i \rangle t^i$ hat. Die i -te Komponente der Folge Z_n ist also verantwortlich für die Abbildung ξ_n in Grad i . Da ξ_n auf den Elementen, deren Grad kein Vielfaches von n ist, verschwindet, sind auch die Komponenten von Z_n in diesen Graden 0. Die n -te Komponente hat tatsächlich die angegebenen Eigenschaften:

- (a) Das Element $Z_n = (0, \dots, 0, z_n, \dots)$ entspricht unter dem Isomorphismus einer Potenzreihe der Form $1 + \langle z_n, 1_n \rangle t^n + \dots$. Der Koeffizient von t^n ist das Bild von y_n als Abbildung auf dem Polynomring und damit nach Definition 1.
- (b) Die Aussage folgt mit Lemma 7.2 aus der Darstellung von Z_n als Element der Wittvektoren $W\mathbb{Z}$.
- (c) Aus dem Isomorphismus $\bigoplus R(\Sigma_i) \cong \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$ lässt sich sofort eine \mathbb{Z} -Basis von $R(\Sigma_n)$ ablesen: Da die Monome in den y_i vom Grad n genau den Partitionen (n) von n entsprechen, sind die entsprechenden Basiselemente gegeben durch $\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1)$. In $R(\Sigma_i \times \Sigma_j)$ erhält man als Basis analog die Menge $\{\text{Ind}_{\Sigma_{(i)} \times \Sigma_{(j)}}^{\Sigma_i \times \Sigma_j}(1)\}$, wobei (i) und (j) die Zerlegungen von i bzw. j durchlaufen.

Für solche Zerlegungen von i und j mit $i + j = n$ gilt nun

$$\langle \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} z_n, \text{Ind}_{\Sigma_{(i)} \times \Sigma_{(j)}}^{\Sigma_i \times \Sigma_j}(1) \rangle = \langle z_n, \text{Ind}_{\Sigma_{(i)} \times \Sigma_{(j)}}^{\Sigma_n}(1) \rangle = \xi_n(y^{(i)}y^{(j)}),$$

wobei $y^{(i)}y^{(j)} = y_{i_1}y_{i_2} \cdots y_{j_1} \cdots$ das Monom zur Partition $(i_1, i_2, \dots, j_1, j_2, \dots)$ von n ist. Da alle Erzeuger der Polynomalgebra außer y_n auf 0 abgebildet werden, verschwindet dieses Element für alle nichttrivialen Partitionen von n , und damit gilt $\text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} z_n = 0$, wenn $i, j > 0$.

Für ein beliebiges Element x aus dem Kern haben wir

$$\langle x - \langle x, 1_n \rangle \cdot z_n, \text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1) \rangle = \langle \text{Res}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(x), 1 \rangle - \langle x, 1_n \rangle \langle z_n, \text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1) \rangle = 0$$

für alle Elemente aus der Basis von $R(\Sigma_n)$ inklusive 1, und damit ist $x = \langle x, 1_n \rangle \cdot z_n$.

- (d) Nach dem letzten Punkt gilt zunächst $\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(A) \cdot z_n = \alpha z_n$ für eine passende ganze Zahl α und außerdem $\langle z_n, \alpha z_n \rangle = 0$. Da $\langle z_n, z_n \rangle = \langle z_n \cdot z_n, 1_n \rangle = \langle -nz_n, 1_n \rangle = -n$, bleibt nur die Möglichkeit $\alpha = 0$. \square

Sei \mathcal{S} die additive Untergruppe von $R(\Sigma_n)$, die von den Elementen der Form $\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1)$ für nichttriviale Partitionen (n) von n erzeugt wird, sodass sich $R(\Sigma_n)$ additiv also als $\mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathcal{S}$ zerlegt. Wir kürzen außerdem $\mathcal{S} \cap \ker \varepsilon$ mit \mathcal{J} ab.

7. Algebraische Kriterien

Satz 7.4. *Die Menge \mathcal{I} ist ein Ideal, und es gilt $z_n + n \in \mathcal{I}$. Falls n eine Primzahl ist, zerlegt sich das Augmentationsideal von $R(\Sigma_n)$ als*

$$\ker \varepsilon = (\mathcal{I} \cap \ker \varepsilon) \times (z_n) = \mathcal{I} \times (z_n).$$

Beweis. Mit Hilfe von Frobenius-Reziprozität lässt sich leicht nachrechnen, dass ein Produkt der Form $\text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(A) \cdot B = \text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}(A \cdot \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} B)$ mit $i, j < n$ wieder in \mathcal{I} liegt.

Wegen der additiven Zerlegung $R(\Sigma_n) = \mathbb{Z} \cdot 1 \oplus \mathcal{I}$ können wir z_n eindeutig als $z_n = \alpha + I$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}$ und $I \in \mathcal{I}$ schreiben. Aus Lemma 7.3 folgt, dass $(z_n) \cdot \mathcal{I} = 0$, aber $z_n^2 \neq 0$, und damit $z_n \notin \mathcal{I}$. Es gilt

$$-n \cdot z_n = z_n^2 = (\alpha + I) \cdot z_n \in \alpha \cdot z_n + \mathcal{I},$$

also erhalten wir wegen $(\alpha + n) \cdot z_n \in \mathcal{I}$ die Gleichungen $\alpha = -n$ und $n = I - z_n$.

Das Augmentationsideal wird additiv von den Elementen $\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1) - \dim(\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1))$ erzeugt, wobei (n) die nichttrivialen Partitionen von n durchläuft. Wenn n eine Primzahl ist, ist die Dimension $\frac{n!}{n_1!n_2! \dots}$ jeweils ein Vielfaches von n , also liegt das Element tatsächlich in $(\mathcal{I} + (z_n)) \cap \ker \varepsilon = \mathcal{I} + (z_n)$.

Die Eindeutigkeit der Zerlegung folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $n = I - z_n$. Dass die Zerlegung nicht nur additiv gilt, folgt aus Lemma 7.3, denn $(z_n) \cdot \mathcal{I} = 0$. \square

Insgesamt haben wir für jede Primzahl p also die Zerlegung

$$R(\Sigma_p) \cong \mathbb{Z} \oplus \ker \varepsilon \cong \mathbb{Z} \oplus (\mathcal{I} \times \mathbb{Z} \cdot z_p).$$

Wir erhalten eine ähnliche Zerlegung von $R(\Sigma_n) \otimes K$ für einen Ring K , wenn wir die Augmentationsabbildung ε durch $\varepsilon : R(\Sigma_n) \otimes K \rightarrow K$ ersetzen. Die Untergruppe \mathcal{I} wird durch den von den entsprechenden Elementen erzeugten K -Modul ersetzt und \mathcal{I} ist wieder der Schnitt mit dem Augmentationsideal. Dann ergibt sich die analoge Aussage:

Satz 7.5. *Für jede Primzahl p und jeden Ring K gilt*

$$R(\Sigma_p) \otimes K \cong K \oplus \ker \varepsilon \cong K \oplus (\mathcal{I} \times K \cdot z_p).$$

7.2. Adamsoperationen

Wie im letzten Abschnitt bezeichnen wir mit \mathcal{I} oder \mathcal{I}_n den K -Untermodul von $R(\Sigma_n) \otimes K$, der von den Elementen der Form $\text{Ind}_{\Sigma_{(n)}}^{\Sigma_n}(1)$ für die nichttrivialen Zerlegungen (n) von n erzeugt wird.

Lemma 7.6. *Die Menge \mathcal{I} ist ein Ideal in $R(\Sigma_n)$, und es gilt*

$$R(\Sigma_n) \otimes K / \mathcal{I} \cong K.$$

Beweis. Die Menge \mathcal{I} besteht nach Lemma 7.3 genau aus den Elementen, deren Produkt mit z_n verschwindet. In dieser Beschreibung kann man die Idealeigenschaft sofort ablesen. Da sich der Ring additiv als $K \oplus \mathcal{I}$ zerlegt, folgt auch die zweite Behauptung sofort. \square

Satz 7.7. *Die Zusammensetzung*

$$\Sigma^{R \otimes K}(1) \xrightarrow{pr_n} R(\Sigma_n) \otimes K \rightarrow R(\Sigma_n) \otimes K / \mathcal{I} \cong K$$

ist für jedes n ein Ringhomomorphismus.

Insbesondere erhält man für jeden λ -Ring K und jede Zahl n durch Zusammensetzen mit der Strukturabbildung $K \rightarrow \Sigma^{R \otimes K}(1)$ einen Ringhomomorphismus $\psi_n : K \rightarrow K$.

Beweis. Da das Produkt in $\Sigma^{R \otimes K}$ komponentenweise definiert ist, sieht man sofort die Verträglichkeit mit der Multiplikation. Für die Addition genügt es zu beobachten, dass für zwei Elemente (X_n) und (Y_n) aus $\prod^e R(\Sigma_n) \otimes K$ in der n -ten Komponente von $X \boxplus Y$ zusätzlich zu X_n und Y_n nur Summanden aus \mathcal{I} auftreten. \square

Wir können die Isomorphismenkette aus Abschnitt 7.1 zu einer Erweiterung des Diagramms im Anhang A.1 fortsetzen, wobei die oberen beiden horizontalen Abbildungen die Geisterkomponenten bzw. Adamsoperationen sind und die untere horizontale Abbildung aus den in Satz 7.7 beschriebenen Ringhomomorphismen besteht.

$$\begin{array}{ccc}
 WK & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \prod_n K \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 1 + tK[[t]] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & tK[[t]] \\
 \uparrow & & \downarrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots], K) & & \prod_p K \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\bigoplus_n R(\Sigma_n), K) & & \prod_p pr_p \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \prod_n R(\Sigma_n) \otimes K & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \prod_n (R(\Sigma_n) \otimes K) / \mathcal{I}_n \cong \prod_n K
 \end{array}$$

Satz 7.8. *Der untere Teil des Diagramms kommutiert, mit anderen Worten, wir erhalten die Adamsoperation ψ^p zu einer Primzahl p für jeden λ -Ring K auch als Zusammensetzung*

$$K \rightarrow \prod_n R(\Sigma_n) \otimes K \rightarrow R(\Sigma_p) \otimes K / \mathcal{I}_p \cong K$$

der Strukturabbildung von K mit der p -ten Projektion aus Satz 7.7.

Beweis. Der hier angegebene Ringhomomorphismus $\prod_n R(\Sigma_n) \otimes K \rightarrow K$ lässt sich mit der p -ten Geisterkomponente $WK \rightarrow K$ am einfachsten vergleichen, indem man die Bilder auf den Ringhomomorphismen $k \cdot \xi_n$ aus $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots], K)$ ausrechnet. Durch

7. Algebraische Kriterien

den Isomorphismus aus Diagramm (2) werden diese in WK den Folgen zugeordnet, die nur in der n -ten Komponente eine 1 haben. Für beide Zusammensetzungen ergibt sich als Bild von $k \cdot \xi_p$ in der p -ten Komponente das Element k . Für $k \cdot \xi_n$ mit $n \neq p$ sind beide Kompositionen 0, da in der entsprechenden Folge Z_n nur die Komponenten nicht verschwinden, deren Indizes Vielfache von n sind.

Da es für die Berechnung der p -ten Projektion bzw. der p -ten Geisterkomponente ausreicht, die ersten p Komponenten der Folgen aus $\prod_n R(\Sigma_n) \otimes K$ bzw. aus WK zu kennen, genügt es, die Gleichung auf diesen Elementen nachzurechnen. \square

Die p -te Adamsoperation ergibt sich in unserer Beschreibung von λ -Ringern also einfach aus der Projektion auf die p -te Komponente im Produkt. Aus dieser gewinnt man einen Ringhomomorphismus, indem der Anteil aus dem Weg geräumt wird, der dafür verantwortlich ist, dass nicht komponentenweise addiert werden kann.

Als erste Anwendung dieses Satzes vergleichen wir nun mit Hilfe der Adamsoperationen die λ -Ringstruktur auf topologischer K -Theorie eines kompakten Raums X , die in Satz 2.33 mit Hilfe von Σ definiert wurde, mit der in [AT69] beschriebenen λ -Ringstruktur auf $K(X)$.

Satz 7.9. *Für die Σ -Coalgebrastruktur auf topologischer K -Theorie, die sich aus den Potenzen von Vektorraumbündeln ergibt, gilt für jedes Geradenbündel L , dass $\psi^p(L) = L^{\otimes p}$. Die Adamsoperationen sind also genau die „klassischen“ Adamsoperationen und wir erhalten die übliche λ -Ringstruktur auf topologischer K -Theorie.*

Beweis. Das Bild von L unter der Abbildung

$$K(X) \rightarrow \prod^e R(\Sigma_n) \otimes K(X)$$

ist die Folge $(L^{\otimes n})_n = (1 \otimes L^{\otimes n})_n$. Übergang von $R(\Sigma_n) \otimes K(X)$ zum Quotienten $R(\Sigma_n) \otimes K(X) / \mathcal{I}_n \cong K(X)$ ergibt das Element $L^{\otimes n}$. Da die Adamsoperationen für jeden Raum X übereinstimmen, ergibt sich aus der Σ -Coalgebrastruktur von $K^{(-)}(X)$ die übliche λ -Ringstruktur auf $K(X)$. \square

Mit Hilfe der Ringhomomorphismen ψ_p können wir nun einen Beweis von Lemma 7.1 formulieren: Sei K ein λ -Ring K mit Strukturabbildungen $\tau_n : K \rightarrow R(\Sigma_n) \otimes K \cong K \oplus (\mathcal{J} \times K z_p)$. Als φ_p wählen wir die Abbildung, die jedem Element $x \in K$ die z_p -Komponente von $\tau_p(x)$ zuordnet.

Die Adamsoperation ergibt sich nach Satz 7.8 als die Komposition

$$\begin{aligned} \psi_p : K \rightarrow K \oplus (\mathcal{J} \times K z_p) &\rightarrow K \oplus (\mathcal{J} \times K z_p) / \mathcal{I} \cong K \\ x \mapsto x^p + (j, \varphi_p(x) \cdot z_p) &\mapsto x^p + p \cdot \varphi_p(x). \end{aligned}$$

Den Faktor p erhalten wir, weil wir aus Satz 7.4 wissen, dass $z_p + p \in \mathcal{I}$. Den Zusammenhang mit der Abbildung ψ_p erhält man aus der Gleichung $\varphi_p(x) = \frac{1}{p}(\psi_p(x) - x^p)$. Als Definition von φ_p verwenden wir die explizite Konstruktion, weil man so erkennt, dass

7.3. Vervollständigung am Augmentationsideal

$\psi_p(x) - x^p$ in K ein Vielfaches von p ist. Mit Hilfe der Ringhomomorphismeigenschaft von ψ_p lassen sich die zwei Gleichungen leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned}\varphi_p(x+y) &= \frac{1}{p}(\psi_p(x+y) - (x+y)^p) \\ &= \frac{1}{p}(\psi_p(x) + \psi_p(y) - x^p - y^p - ((x+y)^p - x^p - y^p)) \\ &= \varphi_p(x) + \varphi_p(y) - \frac{1}{p}((x+y)^p - x^p - y^p) \\ \varphi_p(xy) &= \frac{1}{p}(\psi_p(xy) - (xy)^p) \\ &= \frac{1}{p}(\psi_p(x)\psi_p(y) - x^p y^p) \\ &= \frac{1}{p}((\psi_p(x) - x^p)(\psi_p(y) - y^p) + x^p(\psi_p(y) - y^p) + y^p(\psi_p(x) - x^p)) \\ &= p\varphi_p(x)\varphi_p(y) + x^p\varphi_p(y) + y^p\varphi_p(x).\end{aligned}$$

Lemma 7.1 liefert nun notwendige Bedingungen an den Ring K für die Existenz einer λ -Ring-Struktur:

Satz 7.10. *Falls der Ring K an der Primzahl p verzweigt ist, es also ein Ideal $\mathfrak{p} \neq K$ gibt, dessen Quadrat p enthält, hat K keine λ -Ring-Struktur.*

Beweis. Angenommen, \mathfrak{p} ist ein Ideal mit $p \in \mathfrak{p}^2$, und $\varphi_p : K \rightarrow K$ ist eine Abbildung, die man wie in Lemma 7.1 aus einer λ -Ring-Struktur von K erhält. Zunächst gilt $\varphi_p(\mathfrak{p}^2) \subset \mathfrak{p}^2$, wie man anhand der beiden Gleichungen für Summen und Produkte ablesen kann. Außerdem ist aber

$$\varphi_p(p) = \varphi_p(1 + 1 + \cdots + 1) = p \cdot \varphi_p(1) - \frac{1}{p}(p^p - p) = 1 + p \cdot (\varphi_p(1) - p^{p-1}).$$

Da $p \in \mathfrak{p}^2$ vorausgesetzt wurde, bleibt nur die Möglichkeit $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^2 = (1)$. □

7.3. Vervollständigung am Augmentationsideal

Die Zerlegung von $R(\Sigma_p) \otimes K$ lässt sich für jede Primzahl p auf die Vervollständigung

$$\hat{R}_K(\Sigma_p) = \varprojlim_n (R(\Sigma_p) \otimes K) / (\ker \varepsilon)^n$$

des Darstellungsrings am Augmentationsideal übertragen. Wir verwenden wieder dieselben Bezeichnungen wie im letzten Abschnitt.

Satz 7.11. *Für die Vervollständigung von $R(\Sigma_p) \otimes K$ erhalten wir die Zerlegung*

$$\hat{R}_K(\Sigma_p) \cong K \oplus (\ker \varepsilon)_{\ker \varepsilon} \cong K \oplus ((\mathcal{J})_{\mathcal{J}} \times K_p \cdot z_p).$$

7. Algebraische Kriterien

Beweis. Da \mathcal{J} orthogonal zu z_p ist, können wir die n -te Potenz des Augmentationsideals in beiden Komponenten einzeln bilden und erhalten

$$\begin{aligned} (R(\Sigma_p) \otimes K) / \ker \varepsilon^n &= (K \oplus (\mathcal{J} \times K \cdot z_p)) / (\mathcal{J}^n \times p^{n-1} \cdot K \cdot z_p) \\ &= K \oplus (\mathcal{J} / \mathcal{J}^n) \times (K / p^{n-1} K) \cdot z_p. \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Limes ergibt sich die Behauptung. \square

Wir können also aus einer Σ -Coalgebrastruktur von \hat{R}_K wieder eine ähnliche Abbildung φ_p konstruieren:

Satz 7.12. *Sei K ein Ring, sodass es einen Ringhomomorphismus*

$$K \rightarrow \prod^e \hat{R}_K(\Sigma_n)$$

gibt. Dann existiert für jede Primzahl p eine Abbildung $\varphi_p : K \rightarrow K_p^\wedge$ mit den Eigenschaften

$$\varphi_p(x + y) = \varphi_p(x) + \varphi_p(y) - \frac{1}{p}((x + y)^p - x^p - y^p)$$

und

$$\varphi_p(xy) = x^p \varphi_p(y) + y^p \varphi_p(x) + p \varphi_p(x) \varphi_p(y).$$

Beweis. Addition und Multiplikation in \hat{R} bzw. $\Sigma^{\hat{R}}$ ergeben sich aus den entsprechenden Abbildungen von R , und $\text{Ind}_{\Sigma(n)}^{\Sigma^n}$ bildet für nichttriviale Partitionen (n) von n in das Ideal $\mathcal{J} \cdot (R(\Sigma_n) \otimes K)_{\ker \varepsilon}^\wedge$ ab. Analog zum „unvollständigen“ Fall erhält man den Isomorphismus

$$(R(\Sigma_n) \otimes K)_{\ker \varepsilon}^\wedge / \mathcal{J} \cdot (R(\Sigma_n) \otimes K)_{\ker \varepsilon}^\wedge \cong (K \oplus K_p^\wedge \cdot z_p) / (p + z_p) \cong K_p^\wedge$$

und durch Zusammensetzung mit der Quotientenabbildung einen Ringhomomorphismus $\psi_p : K \rightarrow K_p^\wedge$. Durch $\varphi_p(x) = \frac{1}{p}(\psi_p(x) - x^p) \in K_p^\wedge$ ergibt sich die Abbildung, die ein Element x auf den Koeffizienten von z_p des Bildes sendet, und man erhält wieder die gleichen Formeln für Summe und Produkt. \square

Korollar 7.13. *Wenn der Ring K bei einer Primzahl verzweigt ist, kann das zugehörige Moore-Spektrum SK keine H_∞ -Struktur haben, die die Multiplikation von K realisiert.*

Beweis. Wenn SK ein H_∞ -Spektrum ist, erhalten wir Abbildungen φ_p mit den angegebenen Eigenschaften aus Satz 4.11: Die Σ -Coalgebrastruktur von $[B(-)_+, SK]$ liefert mit Hilfe der Abbildung $\hat{A} \rightarrow \hat{R}$ von Green-Funktoren einen Ringhomomorphismus

$$K \rightarrow \prod^e \hat{A}_K(\Sigma_n) \rightarrow \prod^e \hat{R}_K(\Sigma_n).$$

Wir setzen nun φ_p mit der Quotientenabbildung $K_p^\wedge \rightarrow K_p^\wedge / (p) \cong K / (p)$ zusammen und argumentieren genau wie im Beweis von Satz 7.10: Wir haben eine Abbildung $\bar{\varphi}_p : K \rightarrow K / (p)$ mit den Eigenschaften

$$\bar{\varphi}_p(x + y) = \bar{\varphi}_p(x) + \bar{\varphi}_p(y) - \overline{\frac{1}{p}((x + y)^p - x^p - y^p)}$$

und

$$\bar{\varphi}_p(xy) = \bar{x}^p \bar{\varphi}_p(y) + \bar{y}^p \bar{\varphi}_p(x).$$

Für jedes Ideal \mathfrak{p} von K gilt $\varphi_p(\mathfrak{p}^2) \subset \bar{\mathfrak{p}}^2$ und $\bar{\varphi}_p(p) = 1$. Falls $p \in \mathfrak{p}^2$, ist also wieder nur $\mathfrak{p} = K$ möglich. \square

7.4. Homotopieoperationen

Mit Hilfe der Homotopieoperationen, die in Kapitel 5 von [BMMS86] untersucht werden, können wir solche Kriterien, wie sie in den Abschnitten 7.2 und 7.3 beschrieben wurden, ebenfalls herleiten; der Vollständigkeit halber soll hier zum Abschluss auch dieser alternative Weg skizziert werden. Wir betrachten dafür wieder die Abbildungen

$$[S, SK] \rightarrow [D_p S, D_p SK] \rightarrow [D_p S, SK]$$

und erhalten für jedes Element α aus $\pi_m(D_p S) = [S^m, D_p S]$ durch Komposition eine Homotopieoperation

$$\alpha^* : \pi_0(SK) \rightarrow \pi_m(SK).$$

Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall $p = 2$. Als Operation wählen wir P^1 aus [BMMS86, V §1]. Anschaulich entspricht das zugehörige Element α dem Abspalten der 1-Zelle von $D_2 S$. Da P^1 nur als Klasse im E_2 -Term einer Adams-Spektralsequenz definiert ist, bestimmt diese Wahl eigentlich noch kein Element der Homotopiegruppe, sondern eine Äquivalenzklasse von Elementen aus $[S^1, D_2 S]$. Genauer lässt sich aus Tabelle 1.3 im gleichen Abschnitt ablesen, dass die Unbestimmtheit der Operation P^1 in diesem Fall η ist.

Für das Moore-Spektrum SK induziert die Multiplikation mit η einen Isomorphismus $K/(2) \cong \pi_0(SK)/(2) \rightarrow \pi_1(SK)$. Wir erhalten für alle Moore-Spektren SK mit H_∞ -Struktur Homotopieoperationen der Form

$$P^1 : \pi_0(SK) \rightarrow \pi_1(SK)$$

und damit Abbildungen $\varphi : K \rightarrow K/(2)$. Für die Operation können wir einen Vertreter $\alpha \in [S^1, D_2 S]$ so auswählen, dass $P^1(1) = 0$ gilt.

Die folgenden Eigenschaften von P^1 werden in [BMMS86, V §1] hergeleitet:

- ▷ $P^1(2) = \eta$
- ▷ $P^1(xy) = P^1(x)y^2 + x^2P^1(y) + c_{0,0}\eta x^2y^2$

mit einem Koeffizienten $c_{0,0}$, der nicht von $x, y \in \pi_0(SK)$ abhängt.

Für das Verhalten der Abbildung auf Summen verwenden wir wieder das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} S^m & \longrightarrow & D_2 S & \longrightarrow & D_2(S \vee S) & \longrightarrow & D_2(SK) \\ & \searrow & & & \downarrow \simeq & & \downarrow \\ & & & & D_2 S \vee (D_1 S \wedge D_1 S) \vee D_2 S & \longrightarrow & SK \end{array}$$

7. Algebraische Kriterien

(oder alternativ [BMMS86, II.2.2]) und erhalten

$$P^1(x + y) = P^1(x) + P^1(y) + s$$

mit einem Summanden s , der sich durch Zusammensetzen der Abbildung $S^1 \rightarrow D_1S \wedge D_1S \simeq S^0$ und dem Produkt xy zusammensetzt. Dass der erste Teil der Abbildung η ist, lässt sich mit Hilfe der Gleichung $P^1(2) = \eta$ durch Einsetzen von $x = y = 1$ sofort einsehen. Damit ergibt sich die Formel

$$P^1(x + y) = P^1(x) + P^1(y) + \eta xy.$$

Aus unserer Wahl des Vertreters für P^1 folgt genauso, dass der Koeffizient $c_{0,0}$ verschwindet. Es ergibt sich wieder das folgende Ergebnis:

Satz 7.14. *Falls SK eine H_∞ -Struktur besitzt, liefert die Homotopieoperation P^1 eine Abbildung*

$$\varphi : K \rightarrow K/(2)$$

mit den Eigenschaften $\varphi(xy) = \varphi(x)y^2 + x^2\varphi(y)$ und $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) + xy$.

Dass hier Verzweigung auftreten kann, haben wir also auch auf diese Weise ohne Verwendung der Segal-Vermutung ausgeschlossen.

A. Anhang

A.1. λ -Ringe und Wittvektoren

Für einen beliebigen kommutativen Ring K wird der Ring der großen Wittvektoren über K folgendermaßen konstruiert [Lan02, AT69]: Als Menge ist WK isomorph zu einem abzählbar unendlichen Produkt von Kopien von K , die Ringstruktur ist durch die Eigenschaft bestimmt, dass die sogenannten „Geisterkomponenten“

$$WK = K^{\mathbb{N}} \rightarrow K^{\mathbb{N}}$$

$$(x_n) \mapsto \left(\sum_{d|n} d \cdot x_{\frac{n}{d}} \right)_n$$

sich zu einem in K natürlichen Ringhomomorphismus zusammensetzen.

Bemerkung A.1. Die p -typischen Wittvektoren erhält man, indem man sich auf solche Folgen einschränkt, deren Komponenten nur für die Vielfachen einer vorgegebenen Primzahl p nicht verschwinden. Wittvektoren der Länge n ergeben sich dadurch, dass man die Folgen nach n Komponenten abschneidet.

Nützlich ist bei der Untersuchung von Wittvektoren das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} WK & \longrightarrow & 1 + tK[[t]] \\ \downarrow & & \downarrow -t \frac{d \log}{dt} \\ K^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & tK[[t]]. \end{array}$$

Die obere Abbildung ist durch $(x_n) \mapsto \prod_n (1 - x_n t^n)$ gegeben, die linke Abbildung durch die Geisterkomponenten und die untere Abbildung sendet eine Folge $(x^{(n)})_n$ auf die zugehörige Potenzreihe $\sum_n x^{(n)} t^n$ mit diesen Koeffizienten. Die obere Abbildung ist ein Isomorphismus von abelschen Gruppen und induziert auf der Gruppe der Potenzreihen mit konstantem Term 1 eine Multiplikation.

Die Zuordnung $K \mapsto WK$ ist funktoriell. Die Comultiplikation, die diesen Funktor zu einem Cotripel macht, ist in der Beschreibung als Potenzreihen mit konstantem Term 1 eindeutig dadurch bestimmt, dass man die Bilder aller Elemente der Form $1 + at$ angibt; hier ist die Abbildung gegeben als

$$\Lambda : 1 + tK[[t]] \rightarrow 1 + x(1 + tK[[t]])[[x]],$$

$$1 + at \mapsto 1 + (1 + at)x.$$

Wie die Comultiplikation auf den restlichen Elementen definiert werden kann und wie die Multiplikation auf den Potenzreihen mit konstantem Term 1 aussieht, soll hier ebenfalls kurz angedeutet werden [AT69, 1 §1]:

Seien s_i und s'_i jeweils die i -ten elementarsymmetrischen Polynome in den Variablen x_1, x_2, \dots, x_q bzw. x'_1, x'_2, \dots, x'_r . Dann lassen sich die Polynome $Q = \prod_{i,j} (1 + x_i x'_j t)$ und $Q_m = \prod_{i_1 < \dots < i_m} (1 + x_{i_1} \dots x_{i_m} t)$ als Polynome in der Variablen t so ausdrücken,

A. Anhang

dass die Koeffizienten Polynome in s_i und s'_i sind. Sei also $P_n(s_1, \dots, s_n, s'_1, \dots, s'_n)$ der Koeffizient von t^n in Q und $P_{n,m}(s_1, \dots, s_{mn})$ der Koeffizient von t^n in Q_m .

Das Produkt von zwei Elementen aus $1 + tK[[t]]$ ist dann gegeben durch die Formel

$$(1 + \sum_n a_n t^n) \cdot (1 + \sum_n b_n t^n) = 1 + \sum_n P_n(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) t^n$$

und die Comultiplikation

$$\Lambda : 1 + tK[[t]] \rightarrow 1 + x(1 + tK[[t]])[[x]]$$

des Witt-Cotripels hat allgemein die Form

$$\Lambda(1 + \sum_n a_n t^n) = 1 + \sum_m (1 + \sum_n P_{n,m}(a_1, \dots, a_{mn}) t^n) x^m.$$

Definition A.2. Ein λ -Ring ist ein Ring K zusammen mit einem Ringhomomorphismus

$$\lambda_t : K \rightarrow 1 + tK[[t]], \quad \lambda_t(x) = \sum_n \lambda^n(x) t^n,$$

der K zu einer Coalgebra über dem Cotripel W macht.

In der Literatur wird diese Struktur auch manchmal als „spezieller λ -Ring“ bezeichnet; in dieser Terminologie ist mit „ λ -Ring“ dann einfach ein Ring mit einem additiven Homomorphismus $K \rightarrow 1 + tK[[t]]$ gemeint (wobei die Addition rechts wieder durch Multiplizieren von Potenzreihen gegeben ist).

Die Abbildungen $\lambda^n : K \rightarrow K$ erhält man etwa für topologische K -Theorie aus äußeren Potenzen von Vektorraumbündeln.

Alternativ kann eine λ -Ring-Struktur im torsionsfreien Fall auch durch die Angabe der Adamsoperationen beschrieben werden.

Definition A.3. Die Adamsoperationen $\psi^n : K \rightarrow K$ des λ -Rings K sind durch die Formel

$$\psi_t(x) = \sum_{n \geq 1} \psi^n(x) t^n = -t \frac{d \log}{dt} (\lambda_t(x))$$

gegeben.

Wie man mit Hilfe des kommutativen Diagramms A.1 sofort sehen kann, erhält man hier genau die Geisterkomponenten, die ψ^n sind also Ringhomomorphismen.

Bemerkung A.4. In der Literatur findet man an Stelle der Abbildung $WK \rightarrow 1 + tK[[t]]$ manchmal eine Abbildung, die sich von der hier angegebenen um ein Vorzeichen unterscheidet. Die vier Möglichkeiten entsprechen den vier Automorphismen $(1+t) \mapsto (1 \pm t)^{\pm 1}$ von $1 + tK[[t]]$. Entsprechend erhält man auch für die Adamsoperation vier Möglichkeiten, indem man an zwei Stellen die Vorzeichen variiert, sodass sich wieder ein kommutatives Diagramm ergibt.

A.2. Die Hopfalgebra der symmetrischen Funktionen

Die Hopfalgebra Sym der symmetrischen Funktionen tritt in verschiedenen Gestalten auf, von denen im vorliegenden Text zwei verwendet werden. Die einfachste Beschreibung ist sicherlich die folgende:

Definition A.5. Als Ring ist Sym eine Polynomalgebra

$$\mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots]$$

in abzählbar vielen Variablen, und die Comultiplikation ist auf den Erzeugern gegeben durch

$$\Delta y_n = \sum_{i+j=n} y_i \otimes y_j,$$

wobei y_0 hier für 1 steht.

Eine andere Darstellung ergibt sich als $\bigoplus_{n \geq 0} R(\Sigma_n)$ mit komponentenweiser Addition, wobei als Multiplikation das graduierte Induktionsprodukt verwendet wird: Für $X \in R(\Sigma_m)$ und $Y \in R(\Sigma_n)$ ist

$$X \cdot Y = \text{Ind}_{\Sigma_m \times \Sigma_n}^{\Sigma_{m+n}} (X \otimes Y).$$

Für die Comultiplikation benutzt man, dass die Abbildung

$$R(\Sigma_i) \otimes R(\Sigma_j) \rightarrow R(\Sigma_i \times \Sigma_j), (V, W) \mapsto V \otimes W$$

für alle i, j ein Isomorphismus von kommutativen Ringen ist, und definiert für $V \in R(\Sigma_n)$, indem diese Identifikation stillschweigend vorausgesetzt wird,

$$\Delta(V) = \sum_{i+j=n} \text{Res}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n} V.$$

Bemerkung A.6. An dieser Bedingung kann man erkennen, dass sich die Konstruktion nicht allgemein auf andere Green-Funktoren an der Stelle von R übertragen lässt; man erhält zwar immer einen Ring, aber die Comultiplikation hängt von dieser Zusatzeigenschaft ab.

Satz A.7. *Der Ringhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[y_1, y_2, \dots] &\rightarrow \bigoplus_n R(\Sigma_n), \\ y_n &\mapsto 1_n \in R(\Sigma_n) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von Hopfalgebren.

Durch die Comultiplikation erhalten die Ringhomomorphismen aus Sym wie üblich eine Gruppenstruktur. Mehr über diese Hopfalgebra, etwa einen Beweis der hier zitierten

A. Anhang

Identifikation oder die Definition der Antipode, die für unsere Zwecke nicht benötigt wird, findet man in [Knu73, III.1] oder [Haz03].

Anhand der zweiten Darstellung lässt sich leicht ablesen, dass es in dieser Hopfalgebra keine nichttrivialen gruppenartigen Elemente geben kann. Allgemein sind diese in einer Hopfalgebra mit Comultiplikation Δ definiert als die Elemente X mit der Eigenschaft $\Delta X = X \otimes X$. Bezüglich der Multiplikation bilden diese Elemente eine Gruppe.

Falls nämlich $X = \sum_n X_n \in \bigoplus R(\Sigma_n)$ diese Eigenschaft hat, gilt insbesondere

$$\text{Res}_{\Sigma_n \times \dots \times \Sigma_n}^{\Sigma_{nk}}(X_{nk}) = (X_n)^{\otimes k},$$

und da höchstens endlich viele Summanden nicht verschwinden, bleibt nur die Möglichkeit $X_n = 0$ für alle $n > 0$.

A.3. Γ -Kohomologie für Zahlringe

Die von A. Robinson und S. Whitehouse in [RW02] entwickelte Hindernistheorie stellt für die Konstruktion von E_∞ -Strukturen die folgende Aussage als Hilfsmittel bereit [Rob03, Theorem 5.6]:

Satz A.8. *Falls V ein kommutatives Ringspektrum (bis auf Homotopie) ist, sodass $\Lambda = V_*V$ flach über $R = V_*$ ist und sodass*

$$V^*(V^{\wedge n}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_R(\Lambda^{\otimes n}, R) \quad (\text{universelle Koeffizienten}),$$

liegen die Hindernisse für die Existenz einer E_∞ -Multiplikation in den Γ -Kohomologiegruppen

$$H\Gamma^{**}(\Lambda|R, R).$$

Um tatsächlich in konkreten Fällen Aussagen über eine solche Struktur machen zu können, hilft der folgende Satz weiter [RW02, Theorem 6.8 (3)]:

Satz A.9. *Falls B/A eine étale Erweiterung von Ringen ist, verschwinden die Γ -Kohomologiegruppen $H\Gamma^*(B|A, M)$ für jeden B -Modul M .*

Diese Aussage können wir auf die Moore-Spektren SK nach Invertieren einer Primzahl anwenden. Zunächst überprüft man die Voraussetzungen über Flachheit und universelle Koeffizienten und argumentiert wie in [BR07, §2.2], dass

$$H\Gamma^{**}(SK[\frac{1}{p}]_*SK[\frac{1}{p}] | SK[\frac{1}{p}]_*, SK[\frac{1}{p}]_*)$$

verschwindet, wenn $K[\frac{1}{p}]$ étale über $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ ist. Die Existenz einer E_∞ -Multiplikation folgt dann aus Satz A.8.

Symbolverzeichnis

- $A(G)$ Burnsidering der Gruppe G , Seite 10
 $A(G, \mathcal{F})$ eingeschränkter Burnsidering zur Isotropiefamilie \mathcal{F} , Seite 78
 $A^{res}(\Sigma_n)$ eingeschränkter Burnsidering zur Isotropiefamilie $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, Seite 79
 $\hat{A}(G)$ Vervollständigung des Burnsiderings am Augmentationsideal, Seite 43
 Ab Kategorie der abelschen Gruppen, Seite 9
 BG klassifizierender Raum von G , Seite 38
 $\mathcal{F}(V)$ Isotropiegruppen der Punkte von V , Seite 78
 \mathcal{G} Kategorie der Green-Funktoren, Seite 14
 I_G Augmentationsideal des Burnsiderings, Seite 42
 \mathcal{I} Bild der nichttrivialen Induktionsabbildungen $\text{Ind}_{\Sigma_i \times \Sigma_j}^{\Sigma_n}$, Seite 95
 \mathcal{J} Schnitt von \mathcal{I} mit dem Augmentationsideal, Seite 95
 \mathcal{H}_G^Y Indexkategorie für äquivariante Spektren, Seite 64
 $K^G(X)$ äquivarianter K -Theorie-Ring, Seite 33
 \mathcal{R} Kategorie der kommutativen Ringe mit Einheit, Seite 14
 $R(G)$ Darstellungsring der Gruppe G , Seite 10
 $\hat{R}(G)$ Vervollständigung des Darstellungsrings am Augmentationsideal, Seite 99
 S^V Einpunktkompaktifizierung des reellen Vektorraums V , Seite 37
 SK Moore-Spektrum zur abelschen Gruppe K , Seite 44
 Sym Hopfalgebra der symmetrischen Funktionen, Seite 14
 tr Spur-Abbildung auf dem Darstellungsring, Seite 29
 WK Ring der großen Wittvektoren von K , Seite 103
 Z_n Bild der Abbildung ξ_n in $\Sigma^R(1)$, Seite 94
 z_n n -te Komponente von Z_n , Seite 94
 $\alpha_{i,j}$ Abbildung zwischen erweiterten Potenzen, Seite 47
 $\beta_{j,k}$ Abbildung zwischen erweiterten Potenzen, Seite 47
 δ_n Abbildung zwischen erweiterten Potenzen, Seite 48

A. Anhang

- ζ_H Teil der Spaltungsabbildung für äquivariante stabile Homotopiegruppen, Seite 83
- μ_j H_∞ -Multiplikation, Seite 48
- $\mu^{(j)}$ G_∞ -Multiplikation, Seite 76
- ξ_n Abbildung auf dem Polynomring mit $y_n \mapsto 1$, Seite 94
- Σ Cotripel auf der Kategorie der Green-Funktoren, Seite 17
- $\Sigma_n \langle G \rangle$ Kranzprodukt von G mit der symmetrischen Gruppe Σ_n , Seite 14
- $\Sigma_{(n)}$ $\Sigma_{n_1} \times \Sigma_{n_2} \times \dots$ für eine Zerlegung $(n) = (n_1, n_2, \dots)$ von n , Seite 23
- τ Strukturabbildung der Σ -Coalgebra, Seite 50
- φ_p Abbildung auf die p -te Komponente in den Wittvektoren, Seite 93
- ψ_p Adamsoperationen, Seite 97
- \boxplus Induktionsprodukt als Addition, Seite 15
- $\langle -, - \rangle$ nichtausgeartete Paarung auf dem Darstellungsring, Seite 27
- \prod^e Teilmenge der exponentiellen Folgen, Seite 15

Literatur

- [Ada78] ADAMS, J. F.: *Infinite loop spaces*. Princeton, N.J. : Princeton University Press, 1978
- [Ada84] ADAMS, J. F.: Prerequisites (on equivariant stable homotopy) for Carlsson's lecture. In: *Algebraic topology, Aarhus 1982* Bd. 1051. Berlin : Springer-Verlag, 1984, S. 483–532
- [AM69] ARTIN, M. ; MAZUR, B.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 100: *Étale homotopy*. Berlin : Springer-Verlag, 1969
- [Ang06] ANGELTVEIT, V.: Topological Hochschild homology and cohomology of A_∞ ring spectra. (2006). – URL: <http://arxiv.org/abs/math/0612164v1>
- [AT69] ATIYAH, M. F. ; TALL, D. O.: Group representations, λ -rings and the J -homomorphism. In: *Topology* 8 (1969), S. 253–297
- [BMMS86] BRUNER, R. R. ; MAY, J. P. ; McCLURE, J. E. ; STEINBERGER, M.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1176: *H_∞ ring spectra and their applications*. Berlin : Springer-Verlag, 1986
- [Bou92] BOUC, S.: Exponentielle et modules de Steinberg. In: *J. Algebra* 150 (1992), Nr. 1, S. 118–157
- [Bou97] BOUC, S.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1671: *Green functors and G -sets*. Berlin : Springer-Verlag, 1997
- [BR07] BAKER, A. ; RICHTER, B.: Realizability of algebraic Galois extensions by strictly commutative ring spectra. In: *Trans. Amer. Math. Soc.* 359 (2007), Nr. 2, S. 827–857
- [Car84] CARLSSON, G.: Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture. In: *Ann. of Math. (2)* 120 (1984), Nr. 2, S. 189–224
- [Car03] CARLSSON, G.: Derived representation theory and the algebraic K -theory of fields. (2003). – URL: <http://math.stanford.edu/gunnar/>
- [Die75] DIECK, T. tom: Orbitsypen und äquivariante Homologie. II. In: *Arch. Math. (Basel)* 26 (1975), Nr. 6, S. 650–662
- [Die87] DIECK, T. tom: *de Gruyter Studies in Mathematics*. Bd. 8: *Transformation groups*. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1987
- [Dre86] DRESS, A. W. M.: Congruence relations characterizing the representation ring of the symmetric group. In: *J. Algebra* 101 (1986), Nr. 2, S. 350–364
- [GM95] GREENLEES, J. P. C. ; MAY, J. P.: Equivariant stable homotopy theory. In: *Handbook of algebraic topology*. Amsterdam : North-Holland, 1995, S. 277–323

Literatur

- [Gre71] GREEN, J. A.: Axiomatic representation theory for finite groups. In: *J. Pure Appl. Algebra* 1 (1971), Nr. 1, S. 41–77
- [Haz03] HAZEWINDEL, M.: Symmetric functions, noncommutative symmetric functions, and quasisymmetric functions. In: *Acta Appl. Math.* 75 (2003), Nr. 1-3, S. 55–83
- [Hof79] HOFFMAN, P.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 746: τ -rings and wreath product representations. Berlin : Springer-Verlag, 1979
- [JK81] JAMES, G. ; KERBER, A.: *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Bd. 16: *The representation theory of the symmetric group*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981
- [Knu73] KNUTSON, D.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 308: λ -rings and the representation theory of the symmetric group. Berlin : Springer-Verlag, 1973
- [Lai79] LAITINEN, E.: On the Burnside ring and stable cohomotopy of a finite group. In: *Math. Scand.* 44 (1979), Nr. 1, S. 37–72
- [Lan02] LANG, S.: *Graduate Texts in Mathematics*. Bd. 211: *Algebra*. 3. Aufl. New York : Springer-Verlag, 2002
- [LMSM86] LEWIS, L. G. ; MAY, J. P. ; STEINBERGER, M. ; MCCLURE, J. E.: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1213: *Equivariant stable homotopy theory*. Berlin : Springer-Verlag, 1986
- [Mad78] MADSEN, I.: Smooth spherical space forms. In: *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977)*, I Bd. 657. Berlin : Springer-Verlag, 1978, S. 303–352
- [May96] MAY, J. P.: *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Bd. 91: *Equivariant homotopy and cohomology theory*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1996. – With contributions by M. Cole, G. Comezana, S. Costenoble, A. D. Elmendorf, J. P. C. Greenlees, L. G. Lewis, Jr., R. J. Piacenza, G. Triantafyllou, and S. Waner
- [MM02] MANDELL, M. A. ; MAY, J. P.: Equivariant orthogonal spectra and S -modules. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 159 (2002), Nr. 755
- [MMSS01] MANDELL, M. A. ; MAY, J. P. ; SCHWEDE, S. ; SHIPLEY, B.: Model categories of diagram spectra. In: *Proc. London Math. Soc.* (3) 82 (2001), Nr. 2, S. 441–512
- [Rob03] ROBINSON, A.: Gamma homology, Lie representations and E_∞ multiplications. In: *Invent. Math.* 152 (2003), Nr. 2, S. 331–348
- [RW02] ROBINSON, A. ; WHITEHOUSE, S.: Operads and Γ -homology of commutative rings. In: *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 132 (2002), Nr. 2, S. 197–234

- [Seg68] SEGAL, G.: Equivariant K -theory. In: *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1968), Nr. 34, S. 129–151
- [Seg71] SEGAL, G. B.: Equivariant stable homotopy theory. In: *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 2*. Paris : Gauthier-Villars, 1971, S. 59–63
- [SVW99] SCHWÄNZL, R. ; VOGT, R. M. ; WALDHAUSEN, F.: Adjoining roots of unity to E_∞ ring spectra in good cases—a remark. In: *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)* Bd. 239. Providence, RI : Amer. Math. Soc., 1999, S. 245–249
- [Tho99] THOMAS, C. B.: *Elliptic cohomology*. New York : Kluwer Academic Publishers, 1999
- [Web00] WEBB, P.: A guide to Mackey functors. In: *Handbook of algebra, Vol. 2*. Amsterdam : North-Holland, 2000, S. 805–836