

Stochastische Synchronisation und Desynchronisation gekoppelter und ungekoppelter selbsterhaltender Oszillatoren

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Andy Müller

aus Neuwied

Bonn, 8. Mai 2008

Erstgutachter: Prof. Dr. Klaus Lehnertz
Zweitgutachter: Prof. Dr. Karl Maier

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Juli 2008

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online elektronisch publiziert.

Erschienen 2008

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Dissertation wird einerseits das der Intuition widersprechende Phänomen der Synchronisation selbsterhaltender Oszillatoren durch den Einfluss gemeinsamen externen Rauschens, die sogenannte stochastische Synchronisation, und andererseits das intuitiv leichter erfassbare Phänomen der stochastischen Desynchronisation selbsterhaltender Oszillatoren untersucht. Dabei wird nicht, wie es in der Literatur häufig der Fall ist, ausschließlich gaußsches weißes Rauschen sondern auch farbiges Rauschen verwendet, das durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert wird.

Zunächst wird die stochastische Synchronisation *ungekoppelter identischer periodischer* Oszillatoren durch *schwaches Rauschen* sowohl mit zustandsraumbasierten Analysen als auch mit Hilfe (eindimensionaler) approximativer Phasengleichungen betrachtet. Dazu werden zweidimensionale Oszillatoren mit einfacher mathematisch gut überschaubarer Dynamik, Oszillatoren mit zunehmend komplizierterer Dynamik bis hin zu vierdimensionalen leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodellen verwendet und sowohl der Einfluss der Intensität des Rauschens als auch die Interaktion der Korrelationszeit des Rauschens mit intrinsischen Zeitskalen der Oszillatoren numerisch untersucht. Insbesondere werden dabei auch Grenzen von in der Literatur auf diesem Gebiet bereits vorgestellten Ansätzen eruiert, wobei das Hauptaugenmerk auf eine mögliche sinnvolle Anwendbarkeit dieser Ansätze bei Modellierungen neuronaler Dynamiken liegt, die unter dem Einfluss von Rauschen stehen.

Motiviert durch die Bedeutung der Synchronisation *chaotischer Oszillatoren* in verschiedenen naturwissenschaftlichen Bereichen wird der Schritt zu Oszillatoren noch höherer Komplexität durch die Untersuchung stochastisch getriebener *ungekoppelter identischer chaotischer Oszillatoren* vollzogen. Hier wird am paradigmatischen Lorenzsystem insbesondere den Fragen nachgegangen, ob diese Oszillatoren durch farbiges Rauschen synchronisierbar sind und wie die Korrelationszeit des externen Rauschens mit intrinsischen Zeitskalen der chaotischen Oszillatoren interagiert.

Im Hinblick auf die zu erwartende größere Vielfalt an Phänomenen bei *moderatem bis starkem Rauschen* werden die Untersuchungen der mit schwachem Rauschen getriebenen *ungekoppelten periodischen Oszillatoren* dahingehend ausgedehnt. Hierbei wird insbesondere das Phänomen der stochastischen Desynchronisation hinsichtlich der Intensität und der Korrelationszeit des Rauschens untersucht.

Letztlich wird der Übergang von ungekoppelten Oszillatoren zum allgemeineren Fall *gekoppelter nicht identischer Oszillatoren* vollzogen und dabei thematisiert, wie sich weißes und farbiges Rauschen auf das Niveau der Phasensynchronisation solcher Oszillatoren auswirkt. Diese Analysen werden nicht, wie bei ungekoppelten Oszillatoren, nur in Bezug auf die statistischen Eigenschaften des Rauschens, sondern insbesondere auch hinsichtlich der Wechselwirkung dieser Eigenschaften mit der Kopplung der Oszillatoren untersucht. Diese Untersuchungen werden unter anderem auch an Oszillatoren durchgeführt, die in bestimmter Hinsicht prototypisch für Klassen von Oszillatoren sind.

Es wird gezeigt, dass die hier untersuchten ungekoppelten periodischen Oszillatoren unter dem Einfluss von schwachem Rauschen synchronisieren. Dabei zeigt sich in Form eines konstruktiven resonanzartigen Effekts ein wesentlicher Einfluss der Korrelationszeit des Rauschens auf die stochastische Synchronisation dieser Oszillatoren. Resonanzartige Effekte

werden ebenfalls bei ungekoppelten periodischen Oszillatoren beobachtet, die von moderatem bis starkem Rauschen getrieben werden. Hierbei werden in Abhängigkeit der Intensität des Rauschens sowohl konstruktive als auch destruktive resonanzartige Effekte beobachtet. Bei ungekoppelten chaotischen Systemen zeigt sich ebenfalls, dass die Korrelationszeit des Rauschens einen erheblichen Einfluss darauf haben kann, ob das Rauschen konstruktiv oder destruktiv wirkt. Letztlich werden bei gekoppelten nicht identischen Oszillatoren unter anderem konkurrierende Wechselwirkungen zwischen der Kopplung und dem Rauschen sowie Übergänge von konstruktiven zu destruktiven resonanzartigen Phänomenen beschrieben. Es werden vielfältige Ansatzpunkte zu weiterführenden Untersuchungen sowie potentielle Anwendungsmöglichkeiten bereits gewonnener Erkenntnisse diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	3
2. Theoretische Grundlagen	7
2.1. Dynamische Systeme	7
2.1.1. Zustandsraum eines dynamischen Systems	7
2.1.2. Fluss eines dynamischen Systems	7
2.1.3. Lyapunovexponenten	12
2.2. Stochastische dynamische Systeme	16
2.2.1. Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariablen	17
2.2.2. Stochastische Prozesse	18
2.2.3. Stochastische Differentialgleichungen	23
2.3. Synchronisation dynamischer Systeme	25
2.3.1. Phasensynchronisation	25
2.3.2. Verallgemeinerte Synchronisation	26
2.3.3. Versatzsynchronisation	26
2.3.4. Vollständige Synchronisation	26
2.3.5. Mechanismen der Synchronisation	27
2.4. Verwendete Neuronenmodelle	28
2.4.1. Das Hodgkin-Huxley Modell	28
2.4.2. Zweidimensionale Neuronenmodelle	33
2.5. Phasenreduktion periodischer Oszillatoren	39
2.5.1. Die Phase eines selbsterhaltenden periodischen Oszillators	39
2.5.2. Die Isochronen	39
2.5.3. Phasengleichung bei schwachen Störungen	42
2.5.4. Malkins Methode	43
3. Stochastische Synchronisation	47
3.1. Stabilität des synchronisierten Zustandes	48
3.2. Synchronisation mit weißem Rauschen	49
3.2.1. Zusammenfassung	63
3.3. Synchronisation mit farbigem Rauschen	65
3.3.1. Zusammenfassung	78
3.4. Stochastische Synchronisation chaotischer Oszillatoren	80
3.4.1. Zusammenfassung	83
4. Stochastische Desynchronisation	87

5. Gekoppelte Oszillatoren	95
5.1. Zirkuläre Statistik	95
5.2. Einfluss von weißem Rauschen	97
5.2.1. Zusammenfassung	106
5.3. Einfluss von farbigem Rauschen	107
5.3.1. Zusammenfassung	114
6. Zusammenfassung und Ausblick	119
A. Algorithmus zur Berechnung des maximalen Lyapunovexponenten	125
B. Integrationsalgorithmen	127
B.1. Integrationsalgorithmus für weißes Rauschen	127
B.2. Integrationsalgorithmus für farbiges Rauschen	128
B.3. Prädiktor-Korrektor-Algorithmus	131
C. Mittlerer Abstand zweier zufällig gewählter Punkte auf einem Kreis	133
D. Fourierdarstellung von $Z(\phi)$ und Berechnung von λ_ϕ	135
D.1. Weißes Rauschen	135
D.2. Farbiges Rauschen	136
E. Phasensensitivitäten	139
Eigene Veröffentlichungen	155
Danksagung	157

1. Einleitung

Die zeitlichen Zustandsentwicklungen vieler natürlicher und künstlicher Systeme folgen deterministischen dynamischen Gesetzmäßigkeiten. Solche Systeme werden mit Methoden und Konzepten der Theorie *deterministischer dynamischer Systeme* modelliert. Dazu gehören z. B. die hamiltonschen Systeme, deren Zustände durch die verallgemeinerten Koordinaten und die konjugierten Impulse beschrieben werden, während die hamiltonschen Gleichungen die Dynamik definieren. Neben den vollständig verstandenen linearen dynamischen Systemen waren in den letzten Dekaden zunehmend auch *nichtlineare Systeme* Gegenstand der Forschung. In der Physik treten nichtlineare Systeme z. B. in der nichtlinearen Optik [Hak83, Boy03], dem Dreikörperproblem, der Fluidynamik (Rayleigh-Bénard-Experiment [Cha81, SG81, CH93]) und der nichtlinearen Elektronik [Jos62, CDK87, ACFP01] auf. Aber auch in Wissenschaften außerhalb der Physik werden nichtlineare Systeme betrachtet. In der Biologie führen z. B. mathematische Untersuchungen und Modellierungen von Populationsdynamiken (Lotka-Volterra Jäger-Beute-Modell [Lot25, Vol26, Mur03]) oder neuronaler Aktivität (Hodgkin-Huxley-Modell [HH52d, Koc99, Izh07]) zu nichtlinearen dynamischen Systemen. Ein in der Natur aber auch in der Technik häufig vorkommendes Phänomen ist das periodischer und chaotischer selbsterhaltender Oszillationen, also solcher Oszillationen, die zu ihrer Aufrechterhaltung keiner von außen einwirkenden Kraft bedürfen. Selbsterhaltende Oszillationen treten z. B. bei Relaxationsoszillatoren (van-der-Pol-Oszillator [vdP26], Kippschwinger), bei chemischen Oszillatoren (Belousov-Zhabotinskii-Reaktion [Bel85, SWS82, BRR00]), bei periodisch blinkenden Leuchtkäfern, bei oszillierenden Populationsdynamiken, bei periodisch feuernenden Neuronen, als Herzschlag und als Tagesrhythmus von Lebewesen auf. Auch solche *selbsterhaltenden Oszillatoren* können durch nichtlineare dynamische Systeme modelliert werden. Durch die Beschreibung von Systemen als deterministische dynamische Systeme können also viele Phänomene adäquat behandelt werden. Andererseits jedoch können viele natürlich vorkommende Systeme mit einem rein *deterministischen* Ansatz nicht oder nur unzureichend beschrieben werden. So kann z. B. die Brownsche Bewegung auf makroskopischer Ebene nicht durch ein deterministisches dynamisches System beschrieben werden. Die suspendierten Teilchen kollidieren unentwegt mit Wassermolekülen, wodurch sich die Position der Teilchen *zufällig* ändert, sie muss also durch einen *stochastischen Prozess* beschrieben werden [Ein04, vS06]. In dynamischen Systemen, die deterministische Vielkörperprobleme beschreiben, tritt Rauschen durch die starke Reduzierung der Freiheitsgrade auf makroskopische Variablen in Form von thermischem Rauschen (z. B. Spannungschwankungen in elektrischen Widerständen [Joh28, Nyq28]) auf. Wird zusätzlich der Quantencharakter der Körper berücksichtigt, so liefert schon dieser Rauschen im System. Da diese Quellen des Rauschens systemintern sind, wird solches Rauschen als *internes Rauschen* bezeichnet. In Situationen, in denen ein dem Einfluss einer Umgebung ausgesetztes System betrachtet wird, kann dieser Einfluss tatsächlich stochas-

tisch sein oder bei hinreichend irregulärem deterministischem Verhalten als stochastisch modelliert werden. In solchen Fällen hat sich die Bezeichnung *externes Rauschen* eingebürgert. Alle diese Systeme unterliegen dem Einfluss von Rauschen und müssen daher als *stochastische dynamische Systeme* [Arn98] beschrieben werden.

Bei der Erforschung (stochastischer) dynamischer Systeme waren und sind insbesondere Phänomene, die die bereits oben erwähnten selbsterhaltenden Oszillatoren betreffen, wegen ihrer Relevanz auf verschiedensten wissenschaftlichen Gebieten (s. o.) von großem Interesse. Ein Phänomen, welchem besondere Aufmerksamkeit gewidmet wird, ist das der *Synchronisation* [PRK01] selbsterhaltender Oszillatoren. Unter dem Begriff der Synchronisation wird gemeinhin ein „ähnliches“ Verhalten der betrachteten Oszillatoren verstanden, wobei es jedoch vom Kontext abhängt, was als „ähnlich“ betrachtet wird. Die vermutlich erste Erwähnung des Phänomens der Synchronisation stammt aus dem 17. Jahrhundert von Christiaan Huygens [Huy73], der beschrieb, wie zwei an einem gemeinsamen Balken aufgehängte Uhren nach einer gewissen Zeit mit konstanter Phasenverschiebung von 180° pendelten. Er führte die Synchronisation auf die *Kopplung* der Uhren über winzige, mit dem Auge nicht erkennbare, Bewegungen des Balkens zurück. Heute ist die *Synchronisation durch Kopplung* als einer von zwei grundlegenden Synchronisationsmechanismen erkannt und ist auf einer Vielzahl von Teilgebieten der Physik bekannt. Dazu gehören etwa die Laserphysik [FCRL93, RT94], die Elektronik [vdPvdM27], die Festkörperphysik [PYW95], die Nachrichtentechnik [OSY94], die Physik der Josephsonübergänge [SK86, SM93, WS95] oder auch die Plasmaphysik [RPTM00, FKTW06]. Das Phänomen der Synchronisation durch Kopplung wird aber auch außerhalb der Physik, etwa beim synchronen Blinken von Leuchtkäfern [Win67] oder bei synchronisierendem Applaudieren [NRB⁺00] beobachtet.

Der andere grundlegende Synchronisationsmechanismus ist die Synchronisation *ungekoppelter Oszillatoren* durch *externe Kräfte*. Wohlbekannt ist die Synchronisation durch *externe deterministische Kräfte*. Diese wird z. B. in der Chemie bei der periodischen Stimulation von Reaktionen [KS95, POS97] mit Licht beobachtet, in der Biologie sind unter anderem die spontane Synchronisation des Gesangs von Grillen und die Synchronisation des Blinkens in Schwärmen von Leuchtkäfern [BB68, BBH⁺81] bekannt. In der Physik wurde die Synchronisation durch externe Signale schon früh an Kippschwingern [vdPvdM27] untersucht und ist heute auch auf verschiedenen anderen Feldern wie z. B. der Laserphysik [SWB94] und der Kontrolltheorie [Pyr92] bekannt. Die Synchronisierbarkeit von Oszillatoren durch externe Stimuli [Str86, Arn91, GL95, Gla01] ist in der Physiologie ein wohlbekanntes Phänomen. So wird die Synchronisierbarkeit von Nervenzellen des Herzens z. B. von Herzschrittmachern genutzt. Lange Zeit wurde der Einfluss von Rauschen in Synchronisationsphänomenen lediglich als störend betrachtet. In [Pik84] wurde jedoch gezeigt, dass bei einer Menge ungekoppelter selbsterhaltender Oszillatoren eine auf alle Oszillatoren gemeinsam wirkende *externe stochastische Kraft* Synchronisation hervorrufen kann. Das Rauschen hat also einen konstruktiven Effekt in dem Sinne, dass es Ordnung erzeugt. Dieses der Intuition widersprechende Phänomen wird als *stochastische Synchronisation* bezeichnet und wurde z. B. in der Laserphysik [UMR04], der Chemie [MI02, FNK03], den Neurowissenschaften [MS95, NR02, GFTEU06] und der Ökologie [JW94] beobachtet. In einem größeren Zusammenhang kann die stochastische Synchronisation einer Klasse von Phänomenen zugeordnet werden, bei denen Rauschen konstruktiv wirkt. Hier sind z. B. die durch Rauschen indu-

zierten Übergänge [HL84], das populäre Phänomen der stochastischen Resonanz [GHJM98], die Kohärenz-Resonanz [GDZH93, PK97a, AAN⁺02] und durch Rauschen erzeugte Transportphänomene [Rei02] zu nennen. Neben den konstruktiven Effekten der stochastischen Synchronisation kann gemeinsames Rauschen aber auch destruktiv wirken. In [GP05] wurde gezeigt, dass auch gemeinsames Rauschen desynchronisierend auf selbsterhaltende Oszillatoren wirken kann. Dieser Effekt wird in dieser Arbeit als *stochastische Desynchronisation* bezeichnet.

Im Zusammenhang mit stochastischen Synchronisations- bzw. Desynchronisationsphänomenen stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach dem Einfluss der statistischen Eigenschaften des Rauschens auf die Dynamik von selbsterhaltenden Oszillatoren. Zu diesen statistischen Eigenschaften gehören z. B. die Intensität aber auch die Korrelationszeit des Rauschens. Ist die Korrelationszeit sehr viel kleiner als die typischen Zeitskalen der dem Rauschen ausgesetzten Oszillatoren, kann das Rauschen als (unphysikalisches) *weißes Rauschen* modelliert werden. Diese Approximation ist jedoch oft nicht gerechtfertigt. Ist z. B. ein Neuron mit einem Neuronenverband synaptisch gekoppelt, so erhält dieses Neuron viele synaptische Ströme, die sich zu einem gaußschem Eingangssignal addieren. Dieses Signal ist typischerweise stark irregulär und kann oft als Rauschen modelliert werden (siehe z. B. [MS95]). Da jedoch die Dynamik der Neuronen im Neuronenverband ähnliche oder gar gleiche Zeitskalen aufweist wie das mit dem Verband gekoppelte Neuron, kann das Eingangssignal a priori nicht als weiß angenommen werden. Daraus resultiert die Notwendigkeit des Studiums des Einflusses von farbigem Rauschen [HJ95] auf die Dynamik selbsterhaltender Oszillatoren.

Synchronisationsphänomene spielen auch bei Modellbildungen in der Hirnforschung eine bedeutende Rolle. Synchronisation wird heute allgemein als der zentrale Mechanismus der Informationsverarbeitung im Gehirn [BRdRvSW91, BRdRvSW99, FKL⁺01, SS01] angesehen. Andererseits treten abnorm überhöhte Synchronisationen neuronaler Verbände [EP07] im Zusammenhang mit Krankheitsbildern wie der Epilepsie oder der Parkinsonschen Krankheit auf. Diese Aspekte führen zur Frage, ob es auch durch Rauschen induzierte Mechanismen gibt, die zu (normaler oder abnormer) Synchronisation bzw. Desynchronisation von Neuronen oder Neuronenverbänden führen.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung der Synchronisation und der Desynchronisation gekoppelter und ungekoppelter selbsterhaltender Oszillatoren unter dem Einfluss von weißem und farbigem Rauschen. Diese Untersuchungen werden insbesondere im Hinblick auf eine Modellierung neuronaler Dynamiken durchgeführt und sollen einen ersten Überblick über die verschiedenen Synchronisations- und Desynchronisationsphänomene liefern. Sollte dies gelingen, könnten die gewonnenen Erkenntnisse bei der weiteren Erforschung physiologischer aber auch pathologischer (z. B. epileptogener) neuronaler Aktivität nützlich sein.

Diese Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im zweiten Kapitel werden zunächst allgemeine theoretische Grundbegriffe und Konzepte deterministischer und stochastischer dynamischer Systeme vorgestellt. Hierzu gehören Lyapunovexponenten, stochastische Prozesse im Allgemeinen und stochastische Differentialgleichungen im Speziellen und die Phasenreduktion periodischer Oszillatoren. Ferner werden die hier verwendeten periodischen und chaotischen Oszillatoren vorgestellt. Dabei wird den verwendeten Neuronenmodellen ein eigener

Abschnitt gewidmet. Das dritte Kapitel umfasst hauptsächlich numerische Untersuchungen zu dem *konstruktiven* Phänomen der stochastischen Synchronisation *identischer ungekoppelter* periodischer Oszillatoren, welche von weißem und farbigem Rauschen getrieben sind. Dabei werden Oszillatoren verschiedener Komplexität, vom zweidimensionalen Landau-Stuart-Oszillator mit besonders einfacher Dynamik bis hin zum vierdimensionalen Hodgkin-Huxley-Oszillator, verwendet. Anschließend wird durch die Untersuchung der stochastischen Synchronisation *ungekoppelter chaotischer* Oszillatoren durch farbiges Rauschen der Schritt zu Systemen noch größerer Komplexität vollzogen. Diese Untersuchungen werden am Beispiel chaotischer Lorenzsysteme durchgeführt. Das vierte Kapitel ist einem *destruktiven* Effekt des Rauschens, nämlich der stochastischen Desynchronisation periodischer Oszillatoren unter dem Einfluss von farbigem Rauschen gewidmet. Im fünften Kapitel wird von ungekoppelten identischen Oszillatoren zu dem allgemeineren Fall *gekoppelter nicht identischer* Oszillatoren übergegangen. Hierbei wird der Einfluss von weißem und farbigem Rauschen auf die Phasensynchronisation *gekoppelter* periodischer Oszillatoren behandelt. Schließlich wird im sechsten Kapitel eine Zusammenfassung einschließlich einer Interpretation der erhaltenen Ergebnisse sowie ein Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen gegeben.

2. Theoretische Grundlagen

Dieses Kapitel erläutert die in dieser Arbeit benötigten mathematischen, physikalischen und biologischen Grundlagen. Die mathematisch-physikalischen Grundlagen bilden die Theorien der (stochastischen) dynamischen Systeme, der stochastischen Differentialgleichungen und der Synchronisation dynamischer Systeme. Auf biologischer Seite wird die Modellierung von Neuronen vorgestellt.

2.1. Dynamische Systeme

Ein System, dessen zeitliche Zustandsentwicklung einer deterministischen dynamischen Gesetzmäßigkeit folgt, wird als deterministisches dynamisches System bezeichnet. Natürlich bedarf diese Definition einer mathematischen Präzisierung. Dies leisten die nachfolgend definierten und erläuterten Begriffe des Zustandsraumes sowie des Flusses dynamischer Systeme. Die Theorie dynamischer Systeme ist ein weites Forschungsfeld. Der aktuelle Abschnitt führt nur in die in dieser Arbeit benötigten Aspekte dieser Theorie ein. Ausführlichere Abhandlungen sind in einer Vielzahl von Publikationen (z. B. [Bir27, ER85, Sch88, LKP89, Ott93, Buz94, Str94, ASY97, Wig03]) zu finden.

2.1.1. Zustandsraum eines dynamischen Systems

Der Zustandsraum eines dynamischen Systems ist die Menge aller Zustände, die das System annehmen kann. Diese Arbeit betrachtet lediglich Zustandsräume, die eine Teilmenge des \mathbb{R}^n sind. Demzufolge beziehen sich sämtliche folgende Abhandlungen und Definitionen auf diesen speziellen und nicht auf den allgemeineren Fall von C^n Mannigfaltigkeiten. Ein bekanntes Beispiel eines Zustandsraumes ist der aus den verallgemeinerten Koordinaten und kanonischen Impulsen gebildete Phasenraum der hamiltonschen Mechanik.

2.1.2. Fluss eines dynamischen Systems

Der Zustandsraum sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Familie von Diffeomorphismen

$$\varphi(t, \mathbf{x}) : \mathbb{R} \times M \rightarrow M \quad (2.1)$$

heißt Fluss auf M , wenn folgende Flussaxiome der Identität und Gruppeneigenschaft

$$\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad (2.2a)$$

$$\varphi(t, \varphi(s, \mathbf{x})) = \varphi(t + s, \mathbf{x}) \quad (2.2b)$$

erfüllt sind. Das Paar (φ, M) heißt dann *dynamisches System*.

Aus der Abbildung (2.1) werden zusätzlich die *Flussabbildung*

$$\varphi_t : M \rightarrow M \quad (2.3a)$$

$$x \mapsto \varphi(t, \mathbf{x}) \quad (2.3b)$$

und die *Flusslinie*

$$\alpha_{\mathbf{x}} : \mathbb{R} \rightarrow M \quad (2.4a)$$

$$t \mapsto \varphi_t(\mathbf{x}) \quad (2.4b)$$

gebildet. Das Bild $\alpha_{\mathbf{x}}(\mathbb{R})$ wird Bahn, Orbit oder Trajektorie genannt. Eine eindeutig determinierte Zeitentwicklung des Systems folgt aus den Flussaxiomen, da aus diesen folgt, dass Flusslinien konstant, periodisch oder injektiv sind und sich somit die Bahnen nicht kreuzen. In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen wird die Existenz einer eindeutigen Lösung von gewöhnlichen autonomen Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2.5)$$

gezeigt, falls $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ Lipschitz-stetig ist. Da die Lösung dann ein Fluss ist, kann eine solche Differentialgleichung ebenfalls zur Definition zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme herangezogen werden. In den Naturwissenschaften ist die Funktion $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ oft stetig differenzierbar und somit auch Lipschitz-stetig. Aus diesem Grunde treten dort dynamische Systeme meist auch tatsächlich in der durch Gleichung (2.5) gegebenen Form auf. Als Beispiel seien hier wieder die hamiltonschen Gleichungen angeführt.

Bei der theoretischen Untersuchung zeitkontinuierlicher Systeme wird ein kompliziertes System oft durch die Verwendung einer Poincaréabbildung auf ein einfacheres zeitdiskretes System reduziert. Ebenso liefern physikalische Messungen an einem dynamischen System meist nur zu bestimmten diskreten Zeitpunkten Messwerte. Solche zeitdiskreten Dynamiken motivieren die Betrachtung zeitdiskreter dynamischer Systeme. Solche Systeme sind durch Gleichungen der Form

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)); \quad t \in \mathbb{N} \quad (2.6)$$

gegeben.

Dynamische Systeme können grob in solche mit linearen und nichtlinearen Funktionen $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ eingeteilt werden. Entgegen den vollständig verstandenen linearen Systemen zeigt das Verhalten nichtlinearer Systeme eine weit größere Vielfalt. Nichtlineare Systeme treten in weiten Teilen moderner Naturwissenschaften auf. In der Physik finden sie sich, um nur einige Bereiche zu nennen, z. B. in der nichtlinearen Optik (z. B. [Hak83]), dem Dreikörperproblem, der allgemeinen Relativitätstheorie [Ein16] und der nichtlinearen Elektronik (van-der-Pol-Oszillator [vdPvdM27], Josephsonübergänge [Jos62]). In der mathematischen Biologie führt z. B. die mathematische Untersuchung und Modellierung von Populationsdynamiken (Lotka-Volterra Jäger-Beute-Modell [Lot25, Vol26, Mur03]) oder neuronaler Aktivität (Hodgkin-Huxley-Modell [HH52d]) zu nichtlinearen dynamischen Systemen.

Bei der Untersuchung dynamischer Systeme stellt sich in natürlicher Weise die Frage nach der Wirkung der Flussabbildung (2.3) auf Teilmengen des Zustandsraumes, denn die Betrachtung dieser Wirkung liefert einen groben, globalen Überblick über die möglichen Zeitentwicklungen des Systems. Insbesondere ist interessant, wie die Flussabbildung das Lebesguemaß (Volumen) $V(U)$ einer Teilmenge U des Zustandsraumes \mathbb{R}^n verändert. Im durch die Bewegungsgleichung (2.5) gegebenen zeitkontinuierlichen Fall beträgt die Volumenänderung pro Zeiteinheit $\frac{dV(t)}{dt}$ nach dem *Liouvilleschen Satz*

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{\varphi_t(U)} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) d^n x. \quad (2.7)$$

Im Falle *konservativer* Systeme bleibt das Zustandsraumvolumen erhalten (d. h. $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$), dies trifft z. B. bei hamiltonschen Systemen zu. Bei *dissipativen* Systemen ist $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) < 0$ und somit wird das Volumen $V(U)$ kontrahiert. Im zeitdiskreten Fall (2.6) ist die zeitliche Entwicklung des Volumens $V(U)$ durch die Ableitung \mathbf{DF} (Jacobimatrix) bestimmt. Nach der Transformationsformel für Integrale ist das Volumen $V(t)$ durch

$$V(t) = \int_{\varphi_t(U)} d^n x = \int_U |\det \mathbf{DF}| d^n x \quad (2.8)$$

gegeben. Systeme mit $|\det \mathbf{DF}| = 1$ sind offensichtlich konservativ, während $|\det \mathbf{DF}| < 1$ bei dissipativen Systemen gilt.

Eine typische Eigenschaft dissipativer Systeme ist die Tatsache, dass die Flussabbildung den Zustandsraum auf eine oder mehrere Teilmengen kontrahiert. Die Trajektorien werden also gewissermaßen von diesen Teilmengen „angezogen“, dementsprechend werden diese Teilmengen auch *Attraktoren* genannt. Genauer ist ein Attraktor definiert als eine abgeschlossene Teilmenge A des Zustandsraums mit den folgenden Eigenschaften (vgl. [Str94]):

1. A ist invariant unter der Flussabbildung, d. h. für alle t gilt $\varphi_t(A) \subseteq A$.
2. Es existiert eine offene Umgebung $B(A)$ von A , sodass für alle $\mathbf{x}(0) \in B(A)$ der Abstand von $x(t)$ und A für $t \rightarrow \infty$ gegen Null geht. Die Menge $B(A)$ heißt Einzugsgebiet oder Bassin des Attraktors.
3. A ist minimal, d. h. es existiert keine echte Teilmenge $B \subset A$, sodass B die Kriterien 1 und 2 erfüllt.

Zu diesen Attraktoren gehören stabile Fixpunkte, Grenzyklen, quasiperiodische Attraktoren und chaotische Attraktoren.

Die Eigenschaften des Systems hängen entscheidend von der Wahrscheinlichkeit ab, mit der sich das System in Teilen des Attraktors A aufhält. Zur mathematischen Erfassung dieser Überlegung wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ (vgl. Abschnitt 2.2.2) eingeführt. Gilt die Identität

$$\mu(S) = \mu(\varphi_{-t}(S)), \quad S \subset A, \quad (2.9)$$

so wird μ als ein *invariantes Maß* bezüglich des Flusses φ_t bezeichnet. Bei *ergodischen* Systemen sind das Ensemblemittel und das Zeitmittel bekanntlich identisch. Bei solchen

Systemen ist ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß durch das sog. *natürliche Maß*

$$\mu(S) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(S, T)}{T} \quad (2.10)$$

gegeben. Dabei bezeichnet $\tau(S, T)$ die von der Flusslinie in S verbrachte Zeit. Mit dem natürlichen Maß wird die *natürliche Dichte* $\rho(\mathbf{x})$ durch das Lebesgueintegral

$$\mu(S) = \int_S \rho(\mathbf{x}) \, d^n x \quad (2.11)$$

definiert. In ergodischen Systemen kommt dem natürlichen Maß bei der Betrachtung von über zeitliche Mittelwerte definierten Größen (z. B. die Lyapunovexponenten, vgl. 2.1.3) besondere Bedeutung zu, da, wie oben bereits erwähnt, das Zeit- und Ensemblemittel identisch sind. Für Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist das Zeitmittel im zeitkontinuierlichen Fall durch

$$\langle f \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_t(\mathbf{x}_0)) \, dt \quad (2.12)$$

und im zeitdiskreten Fall durch

$$\langle f \rangle_t = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T f(\varphi_t(\mathbf{x}_0)) \quad (2.13)$$

definiert. Das Ensemblemittel $\langle f \rangle_\mu$ ist durch die Identität

$$\langle f \rangle_\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \, d^n x \quad (2.14)$$

gegeben und es gilt $\langle f \rangle_t = \langle f \rangle_\mu$.

Beispiel: Der van-der-Pol-Oszillator

Der *van-der-Pol-Oszillator* [vdPvdM27] ist durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{x} - 2\gamma(1 - \beta x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (2.15)$$

gegeben. Diese läßt sich durch Erhöhen der Dimension leicht auf die Form

$$\dot{x} = y \quad (2.16a)$$

$$\dot{y} = 2\gamma(1 - \beta x^2)y - \omega_0^2 x \quad (2.16b)$$

transformieren, welche der Gleichung (2.5) entspricht. Bis auf den elongationsabhängigen Dissipationsterm $2\gamma(1 - \beta x^2)\dot{x}$ ist dieser Oszillator identisch mit dem harmonischen Oszillator. Für positive γ gilt: Ist die Elongation $x^2 < 1/\beta$, so liegt negative Dissipation vor, d. h. dem Oszillator wird Energie zugeführt, ist $x^2 > 1/\beta$, so wird dem System Energie entzogen (positive Dissipation). Dies führt zu einer Verstärkung kleiner Oszillationen und zu einer Dämpfung großer Oszillationen. Aus dem Liénardschen Theorem (siehe z. B.: [Str94, Per91])

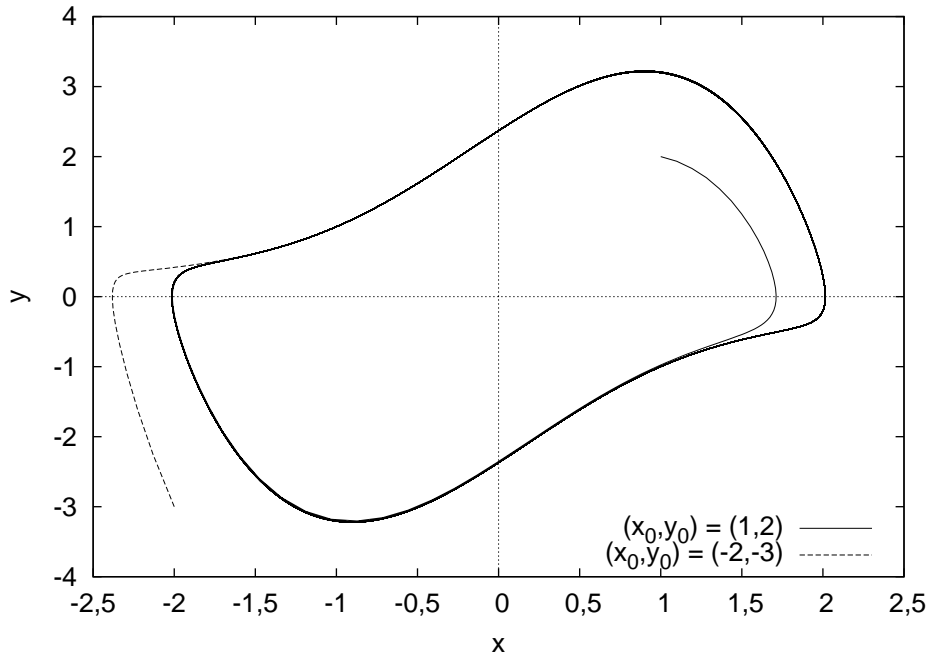


Abbildung 2.1.: Der van-der-Pol-Oszillator mit den Parametern $\gamma = 0,75$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 1$. Zwei Trajektorien laufen im Uhrzeigersinn auf den Grenzzzyklus zu. Die zugehörigen Anfangsbedingungen (x_0, y_0) sind der Legende zu entnehmen.

folgt dann, dass dieses System einen eindeutigen, stabilen Grenzzzyklus besitzt. Dieser ist gerade einer der oben erwähnten Attraktoren. Das Bassin des Grenzzzyklus ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, wobei der Koordinatenursprung 0 ein instabiler Fixpunkt ist. Da der zweidimensionale Oszillator auf einen eindimensionalen Attraktor zuläuft, muss das System dissipativ sein. Die Anwendung von Gleichung (2.7) bestätigt dies, da $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 2\gamma(1 - \beta x^2) < 0$ für $x^2 > 1/\beta$ gilt. Die Abbildung 2.1 stellt den Grenzzzyklus dar und demonstriert wie zwei Trajektorien von verschiedenen Anfangsbedingungen aus auf ihn zulaufen.

Beispiel: Das Lorenzsystem

Der Meteorologe Edward N. Lorenz entwickelte das nach ihm benannte *Lorenzsystem* [Lor63] als Vereinfachung der komplizierten, das Rayleigh-Bénard-Experiment [Cha81, SG81] beschreibenden hydrodynamischen Gleichungen. Das System ist durch die Gleichungen

$$\dot{x} = \varsigma(y - x) \tag{2.17a}$$

$$\dot{y} = rx - y - xz \tag{2.17b}$$

$$\dot{z} = xy - bz \tag{2.17c}$$

definiert, wobei ς mit der Prandtl-Zahl und r mit der Rayleigh-Zahl identifiziert werden kann und $b > 0$ gilt. Aus $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\varsigma - 1 - b < 0$ folgt nach dem Liouvilleschen Satz (2.7), dass das System dissipativ ist und somit Attraktoren besitzt. Die Attraktoren des Systems sind in Abhängigkeit von den Parametern ς , r und b Fixpunkte, periodische Orbits

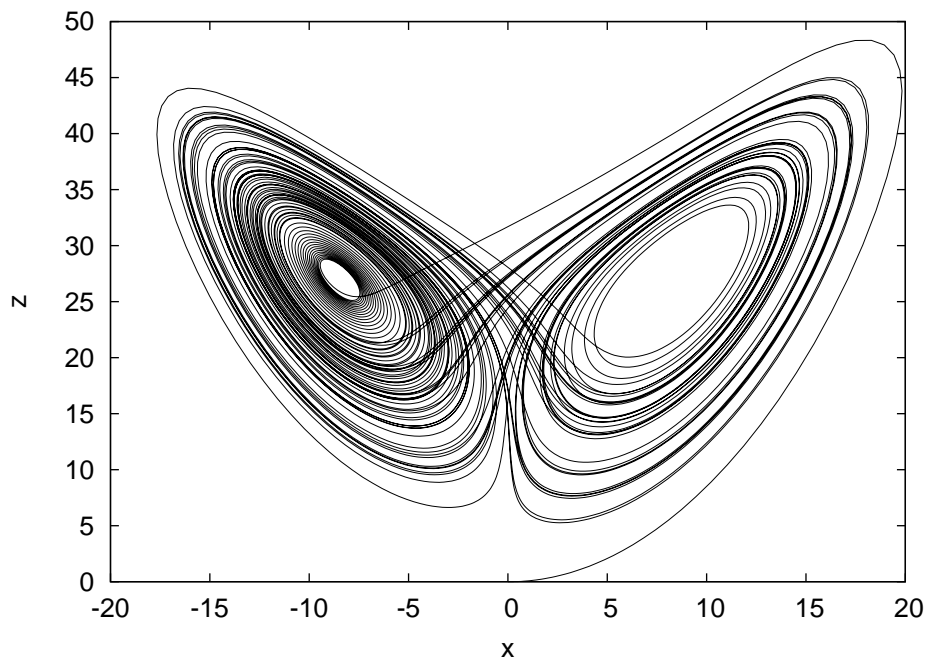


Abbildung 2.2.: Das Lorenzsystem mit den Parametern $\zeta = 10$, $r = 28$ und $b = 8/3$. Eine Trajektorie mit der Anfangsbedingung $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ läuft auf den chaotischen Attraktor zu.

oder chaotisch (seltsame) Attraktoren. Hier wird der chaotische Fall mit den Parametern $\zeta = 10$, $r = 28$ und $b = 8/3$ vorgestellt. Die Abbildung 2.2 zeigt die Projektion einer auf den chaotischen Attraktor zulaufenden Trajektorie auf die x - z -Ebene.

2.1.3. Lyapunovexponenten

In Abschnitt (2.1.2) wurde auf die Vielfalt des Verhaltens nichtlinearer dynamischer Systeme hingewiesen, jedoch wurde kein konkretes Kriterium zur Klassifizierung dieser Vielfalt angegeben. Ein wesentliches Kriterium zur Beurteilung dieses Verhaltens sind die Lyapunovexponenten (siehe z. B. [Lya47, Ose68]). Sie sind ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der sich der Abstand benachbarter Zustandsraumpunkte mit der Zeitentwicklung ändert. Sie geben also die Sensitivität von den Anfangsbedingungen an. Dies bedeutet auch, dass die Lyapunovexponenten eng mit dem Verlust von Information [SW49, Sha81] über das System verknüpft sind. Mathematisch sind die Lyapunovexponenten durch eine Formel von Pesin [Pes77] mit der Kolmogorov-Entropie [Kol58, Sin59] verknüpft. Ferner stützen numerische Untersuchungen die Kaplan-Yorke-Vermutung [KY79], wonach ein enger Zusammenhang zwischen den Lyapunovexponenten und der Informationsdimension [BR56] des Attraktors eines Systems besteht. Unmittelbar dienen die Lyapunovexponenten zur Klassifizierung der Stabilitätseigenschaften des Systems auf seinem Attraktor. Zur mathematischen Präzisierung sei ein Zustandsraumvektor \mathbf{x}_0 und eine kleine Verschiebung \mathbf{y}_0 betrachtet. Der Lyapunovexponent zu diesem Paar ist dann sowohl im zeitdiskreten als auch im zeitkonti-

nuierlichen Fall durch

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\mathbf{y}(t)\|}{\|\mathbf{y}_0\|} \quad (2.18)$$

gegeben. Im zeitdiskreten Fall kann dieser Ausdruck zu

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|\mathbf{DF}^t(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_0\| \quad (2.19)$$

umgeformt werden, wobei \mathbf{DF} die Ableitung (Jacobimatrix) von \mathbf{F} und $\mathbf{e}_0 = \mathbf{y}_0/\|\mathbf{y}_0\|$ die Richtung der Verschiebung bezeichnet. Dies kann mit der Transponierten der Jacobimatrix $(\mathbf{DF}^t(\mathbf{x}_0))^\dagger$ weiter zu

$$\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \|\mathbf{e}_0^\dagger \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_0\| \quad (2.20)$$

mit $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{DF}^t(\mathbf{x}_0))^\dagger (\mathbf{DF}^t(\mathbf{x}_0))$ umgeformt werden. Da $\mathbf{H}(\mathbf{x}_0)$ eine reelle nichtnegative symmetrische Abbildung (oder Matrix) ist, ist sie diagonalisierbar und alle Eigenwerte $\gamma_i(t, \mathbf{x}_0)$ sind reell und nichtnegativ. Ist nun \mathbf{y}_0 ein Eigenvektor zu $\gamma_i(t, \mathbf{x}_0)$, so ergibt sich der zugehörige Lyapunovexponent zu

$$\lambda_i(\mathbf{x}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \|\mathbf{e}_0^\dagger \cdot \gamma_i(t, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_0\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln \gamma_i(t, \mathbf{x}_0). \quad (2.21)$$

Aus dem multiplikativen Ergodentheorem von Oseledec (siehe z. B. [Ose68, ER85]) folgt, dass bei ergodischen Systemen $\lambda_i(\mathbf{x}_0)$ für fast alle \mathbf{x}_0 unabhängig von \mathbf{x}_0 ist. Somit kann von Lyapunovexponenten gesprochen werden, ohne auf die Anfangsbedingungen Bezug zu nehmen. Die n Lyapunovexponenten eines n -dimensionalen Systems bilden das sog. Spektrum der Lyapunovexponenten.

Im zeitkontinuierlichen Fall liefert Gleichung (2.5) in linearer Näherung die Beziehung

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{DF}(\mathbf{y}(t)) \cdot \mathbf{y}(t). \quad (2.22)$$

Mit der Einführung der Zeitentwicklungsmatrix $\mathbf{O}(t, \mathbf{x}_0)$ folgen die Gleichungen

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{O}(t, \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{y}_0 \quad \text{und} \quad (2.23a)$$

$$\dot{\mathbf{O}}(t, \mathbf{x}_0) = \mathbf{DF}(\mathbf{x}(t)) \cdot \mathbf{O}(t, \mathbf{x}_0) \quad (2.23b)$$

mit $\mathbf{O}(0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{1}$ (wobei $\mathbf{1}$ die Einheitsmatrix bezeichnet). Die Lyapunovexponenten folgen nun durch Ersetzung von $\mathbf{DF}^t(\mathbf{x}_0)$ durch $\mathbf{O}(t, \mathbf{x}_0)$ in den Gleichungen für den zeitdiskreten Fall.

Wie bereits erwähnt, liefern die Lyapunovexponenten Kriterien zur Klassifizierung von Attraktoren. Da sie die Änderung des Abstandes infinitesimal benachbarter Zustandsraumpunkte durch den Fluss quantifizieren, sind sie eng mit der zeitlichen Entwicklung des Zustandsraumvolumens verknüpft. Das Volumen eines infinitesimalen Ellipsoides entwickelt sich gemäß $\exp((\sum_{i=1}^n \lambda_i)t)$. Daraus folgt, dass bei konservativen Systemen die Summe der Exponenten gleich Null sein muss, während für dissipative Systeme diese Summe kleiner als Null ist. In der Literatur werden die Lyapunovexponenten λ_i meist der Größe nach

attraktiver Fixpunkt	$\lambda_1 < 0$
attraktiver Grenzzyklus	$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$
quasiperiodischer Attraktor	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
chaotischer Attraktor	$\lambda_1 > 0$

Tabelle 2.1.: Klassifizierung von Attraktoren zeitkontinuierlicher Systeme

angeordnet, sodass $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ gilt. Mit Hilfe dieser Konvention kann eine Klassifikation von Attraktoren zeitkontinuierlicher dynamischer Systeme gemäß der Tabelle 2.1 angegeben werden.

Zur numerischen Berechnung des Spektrums der Lyapunovexponenten von Systemen mit bekannten Gleichungen existieren verschiedene Methoden [BGGS80, SN79, WSSV85] (siehe auch Anhang A).

Beispiel: Das Rösslersystem

Als Beispiel für ein System mit chaotischem Attraktor dient das von Otto Rössler 1976 entwickelte *Rösslersystem* [Roe76]. Es ist durch die Differentialgleichung

$$\dot{x} = -\omega y - z \quad (2.24a)$$

$$\dot{y} = x + ay \quad (2.24b)$$

$$\dot{z} = b + z(x - c) \quad (2.24c)$$

definiert. Mit den Parametern $\omega = 1$, $a = 0,15$, $b = 0,2$ und $c = 10$ zeigt das System chaotisches Verhalten. Die Lyapunovexponenten sind nach [WSSV85] $\lambda_1 = 0,09$, $\lambda_2 = 0,00$ und $\lambda_3 = -9,77$. Da die Summe der Exponenten kleiner als Null und $\lambda_1 > 0$ ist, handelt es sich nach Tabelle 2.1 um ein dissipatives System mit chaotischem Attraktor. Eine Projektion eines Orbits auf die x - y -Ebene ist in Abbildung 2.3 dargestellt.

Beispiel: Der Landau-Stuart-Oszillator

Alle periodische Oszillatoren, welche aus einer superkritischen Hopfbifurkation (siehe z. B. [Str94]) hervorgegangen sind, zeigen für Bifurkationsparameter nahe oberhalb des kritischen Wertes ähnliches, bzw. universelles Verhalten. Diese Tatsache ermöglicht die Reduzierung der knapp superkritischen Systeme zu einer universellen Gleichung, der sog. Landau-Stuart-Gleichung [Stu58, Stu60, Kur84] (auch „ λ - ω -Modell“ genannt). In komplexer Notation ist dieses Modell durch die Gleichung

$$\dot{A} = (1 + i\eta)A - (1 + i\alpha)|A|^2 A \quad (2.25)$$

gegeben, wobei hier aus Konsistenzgründen nicht die Buchstaben λ bzw. ω , sondern α bzw. η gewählt wurden. In Polarkoordinaten ergibt sich das Gleichungssystem

$$\dot{R} = R(1 - R^2) \quad (2.26a)$$

$$\dot{\theta} = \eta - \alpha R^2, \quad (2.26b)$$

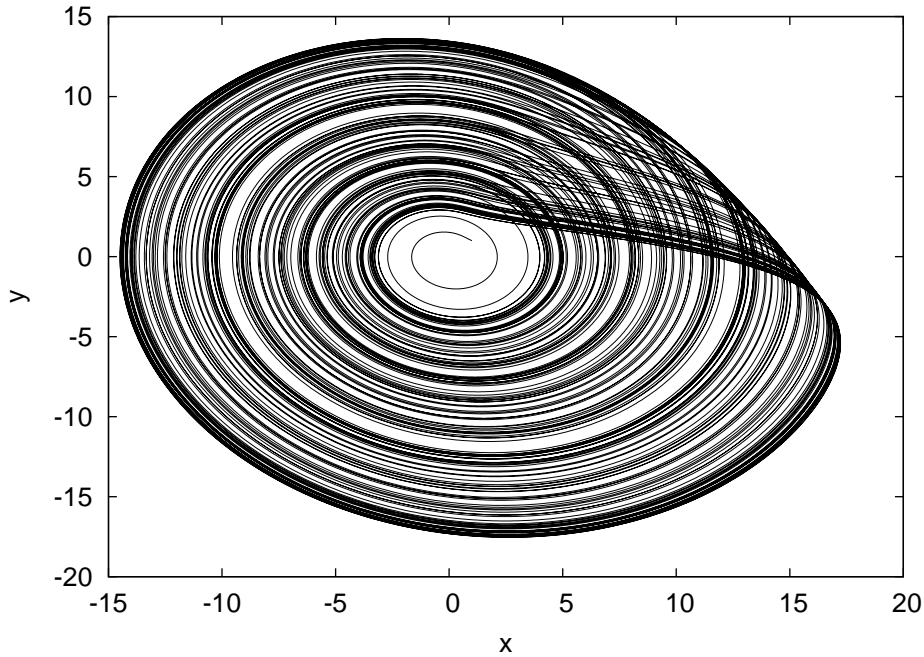


Abbildung 2.3.: Projektion einer Trajektorie des Rösslersystems mit den Parametern $\omega = 1$, $a = 0,15$, $b = 0,2$, $c = 10$ und Anfangsbedingung $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ auf die x - y -Ebene.

welches vollständig analytisch lösbar ist. Mit den Anfangsbedingungen $R_0 = R(0) \neq 0$ und $\theta_0 = \theta(0)$ folgt die Lösung

$$R(t) = \left(1 + \frac{1 - R_0^2}{R_0^2} e^{-2t} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.27a)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + (\eta - \alpha) - \frac{\alpha}{2} \ln R_0^2 + (1 - R_0^2) e^{-2t}. \quad (2.27b)$$

Offenkundig laufen alle Orbits (siehe Abbildung 2.4) mit den Anfangsbedingungen aus der Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf den stabilen Grenzzyklus $G = \{A \in \mathbb{C} \mid |A| = 1\}$ zu. Auf G rotiert die Phase mit der konstanten Geschwindigkeit $\dot{\theta} = \eta - \alpha$. Der Ursprung 0 ist ein instabiler Fixpunkt, der dem instabil gewordenen Fixpunkt einer Hopfbifurkation entspricht. Da das zweidimensionale System einen eindimensionalen Attraktor besitzt, ist es dissipativ. Nach einer Umformung in kartesische Koordinaten

$$\dot{x} = x - \eta y - (x^2 + y^2)(x - \alpha y) \quad (2.28a)$$

$$\dot{y} = y + \eta x - (x^2 + y^2)(y + \alpha x) \quad (2.28b)$$

kann der Wolalgorithmus [WSSV85] zur Schätzung der Lyapunovexponenten angewendet werden. Für die Parameter $\alpha = 0$ und $\eta = 1$ ergibt solch eine numerische Approximation der Lyapunovexponenten die Werte $\lambda_1 = 0,00$ und $\lambda_2 = -1,97$, deren Summe erwartungsgemäß kleiner als Null ist.

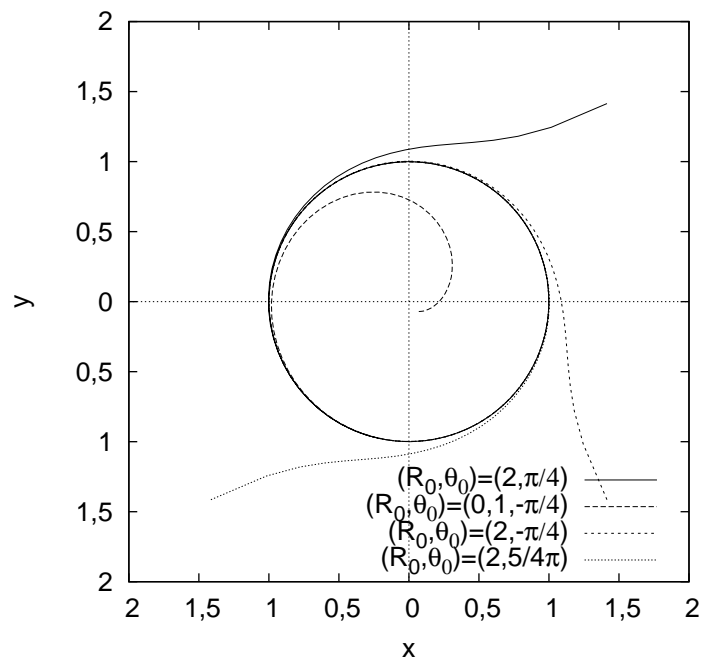


Abbildung 2.4.: Trajektorien des Landau-Stuart-Oszillators zu verschiedenen Anfangsbedingungen laufen auf den stabilen Grenzzyklus zu. Die verwendeten Parameter sind $\alpha = 0$ und $\eta = 1$.

2.2. Stochastische dynamische Systeme

Bereits in der Einleitung wurde dargelegt, dass in vielen natürlich vorkommenden Systemen Rauschen auftritt und sie somit durch einem rein *deterministischen* Ansatz nicht oder nur unzureichend beschrieben werden können. In dynamischen Systemen, die deterministische Vielkörperprobleme beschreiben, tritt Rauschen durch die starke Reduzierung der Freiheitsgrade auf wenige makroskopische Variablen in Form von thermischem Rauschen (z. B. die Brownsche Bewegung [Ein04, vS06] oder Spannungsschwankungen in elektrischen Widerständen [Joh28, Nyq28]) auf. Wird zusätzlich der Quantencharakter der Körper berücksichtigt, so liefert schon dieser Rauschen im System. Da diese Quellen des Rauschens systemintern sind, wird solches Rauschen als *internes Rauschen* bezeichnet. Von internem Rauschen ist das sogenannte *externe Rauschen*, dessen Quelle außerhalb des Systems liegt, zu unterscheiden. In Situationen, in denen ein dem Einfluss einer Umgebung ausgesetztes System betrachtet wird, kann dieser Einfluss tatsächlich stochastisch sein oder bei hinreichend irregulärem deterministischem Verhalten als stochastisch modelliert werden. Beispiele für solche Systeme sind Laser unter dem Einfluss externer elektromagnetischer Felder, wobei u. a. das populäre Phänomen der stochastischen Resonanz [BSV81] in einem Ringlaser beobachtet wurde [MWR88]. Sowohl internem als auch externem Rauschen unterliegende Systeme müssen als *stochastische Prozesse* beschrieben werden. Deshalb wird im Folgenden kurz der für diese Arbeit benötigte mathematische Formalismus stochastischer Dynamiken eingeführt. Für eine tiefere Behandlung dieses Gebietes sei auf die große Anzahl

vorhandener Bücher (z. B. [MM89a, MM89b, MM89c, AAN⁺02]) verwiesen.

2.2.1. Wahrscheinlichkeitsraum und Zufallsvariablen

Die grundlegenden Begriffe zur Beschreibung eines Zufallsexperiments sind die Menge aller Ergebnisse des Experimentes, der sog. Stichprobenraum Ω , eine Menge von Teilmengen \mathcal{S} des Stichprobenraums, deren Elemente die Ereignisse sind, und das Wahrscheinlichkeitsmaß P , das die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse beschreibt.

In der axiomatischen Wahrscheinlichkeitstheorie werden diese drei Begriffe zu dem Konzept des Wahrscheinlichkeitsraums zusammengefasst. Der *Wahrscheinlichkeitsraum* ist als das geordnete Tripel (Ω, \mathcal{S}, P) definiert, wobei \mathcal{S} eine σ -Algebra auf dem Raum Ω und $P : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum (Ω, \mathcal{S}) sind.

Eine *Zufallsvariable* \mathbf{X} ist eine $\mathcal{S} : \mathcal{L}^n$ -messbare Funktion von (Ω, \mathcal{S}) auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$

$$\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.29a)$$

$$\omega \mapsto \mathbf{x}, \quad (2.29b)$$

wobei \mathcal{L}^n die σ -Algebra der Lebesguemengen in \mathbb{R}^n bezeichnet. Der Funktionswert \mathbf{x} wird Realisation der Zufallsvariablen \mathbf{X} genannt.

Die *Verteilungsfunktion* $V_{\mathbf{X}}$ ist durch

$$V_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (2.30a)$$

$$V_{\mathbf{X}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \mapsto P(\{\omega \in \Omega | X_i(\omega) \leq x_i; i = 0, \dots, n-1\}). \quad (2.30b)$$

gegeben.

In Falle stetiger Zufallsvariablen ist die Verteilungsfunktion oft fast überall differenzierbar.

Die Ableitung

$$p_{\mathbf{X}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \frac{\partial^n V_{\mathbf{X}}}{\partial x_0 \cdots \partial x_{n-1}}(x_0, \dots, x_{n-1}) \quad (2.31a)$$

ist die sog. *Dichtefunktion* der Zufallsvariablen. Es folgt unmittelbar die Integraldarstellung

$$V_{\mathbf{X}}(x_0, \dots, x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{x_0} \cdots \int_{-\infty}^{x_{n-1}} p_{\mathbf{X}}(y_0, \dots, y_{n-1}) dy_0 \cdots dy_{n-1}, \quad (2.32)$$

aus der die Namensgebung offensichtlich wird.

Die Erwartungswerte $\epsilon_i(t)$ einer Zufallsvariablen \mathbf{X} sind durch das Integral

$$\epsilon_i = \langle X_i \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x_i p_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d^n x; \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.33)$$

gegeben.

Die Varianzen

$$\sigma_i^2 = \text{var}(X_i) = \langle (X_i - \epsilon_i)^2 \rangle \quad (2.34)$$

quantifizieren die Abweichungen von den Mittelwerten. Über die Korrelationen zwischen den Komponenten der Zufallsvariablen \mathbf{X} geben die sog. Kovarianzen

$$C_{ij} = \langle (X_i - \epsilon_i)(X_j - \epsilon_j) \rangle \quad (2.35)$$

Auskunft.

Beispiel: Die Gaußverteilung

Aufgrund des zentralen Grenzwertsatzes (siehe z. B. [Gar04]) ist die *Gauß-* oder *Normalverteilung* von besonderer Bedeutung. In n Dimensionen ist sie durch die Dichtefunktion

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det \mathbf{C}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\epsilon})^t \mathbf{C}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\epsilon})\right); \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.36)$$

definiert. Hierbei ist $\boldsymbol{\epsilon}$ der Vektor der Mittelwerte gemäß Gleichung (2.33) und \mathbf{C} ist die Kovarianzmatrix (2.35), deren Diagonalelemente die Varianzen (2.34) sind. Die eindimensionale Gaußverteilung oder *Standard Gaußverteilung* ergibt sich zu

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \epsilon)^2}{2\sigma^2}\right); x \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

2.2.2. Stochastische Prozesse

Ein *stochastischer Prozess* ist eine Familie von Zufallsvariablen

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{X}(t) \mid t \in T\} \quad (2.38a)$$

$$\mathbf{X}(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.38b)$$

mit gemeinsamem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{S}, P) und einer üblicherweise als Zeit interpretierte Indexmenge T , wobei die Menge Ω den Stichprobenraum, \mathcal{S} eine σ -Algebra über Ω (die Menge der Ereignisse) und $P : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{S}) bezeichnet. Ist die Indexmenge abzählbar, so ist der stochastische Prozess lediglich eine Folge von Zufallsvariablen und wird als diskret bezeichnet, andernfalls ist er kontinuierlich. In den meisten praktischen Situationen sind stochastische Prozesse nicht in der Form (2.38) sondern als zeitabhängige endlichdimensionale Verteilungsfunktionen $F(t_1, \mathbf{x}_1; \dots; t_n, \mathbf{x}_n)$ bzw. Dichtefunktionen $p(t_1, \mathbf{x}_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_n)$ gegeben. Selbst im zeitkontinuierlichen Fall kann ein Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{S}, P) und eine Zufallsvariable $\mathbf{X}(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ konstruiert werden, die alle gegebenen endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen liefert. Im allgemeinen können jedoch mehrere solcher Wahrscheinlichkeitsräume mit entsprechenden, untereinander verschiedenen Zufallsvariablen konstruiert werden. Jede dieser Zufallsvariablen besitzt jedoch die selben endlichdimensionalen Verteilungsfunktionen. Diese Zufallsvariablen können somit als äquivalent betrachtet bzw. identifiziert werden. In diesem Sinne definieren die endlichdimensionalen Verteilungen eine Zufallsvariable. Diese Darstellung eines stochastischen Prozesses wird nachfolgend auch in dieser Arbeit verwendet. Die einfachste Art stochastischer Prozesse sind die sog. *Bernoulli-Prozesse*, bei denen die Zufallsvariablen $\mathbf{X}(t)$ zu verschiedenen Zeitpunkten unabhängig sind. Die Dichtefunktionen können somit als Produkt der Dichtefunktionen der Zufallsvariablen zu den entsprechenden Zeiten

$$p(t_1, \mathbf{x}_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_n) = \prod_{i=1}^n p(t_i, \mathbf{x}_i) \quad (2.39)$$

geschrieben werden. Neben den Dichtefunktionen $p(t_1, \mathbf{x}_1, \dots, t_n, \mathbf{x}_n)$ geben die bedingten Dichtefunktionen Aufschluss über die Eigenschaften des Prozesses. Sie sind durch

$$p(t_1, \mathbf{x}_1; \dots; t_n, \mathbf{x}_n | s_1, \mathbf{y}_1; \dots; s_m, \mathbf{y}_m) = \frac{p(t_1, \mathbf{x}_1; \dots; t_n, \mathbf{x}_n; s_1, \mathbf{y}_1; \dots; s_m, \mathbf{y}_m)}{p(s_1, \mathbf{y}_1; \dots; s_m, \mathbf{y}_m)} \quad (2.40)$$

definiert, wobei üblicher- aber nicht notwendigerweise $t_1 \geq \dots \geq t_n \geq s_1 \dots \geq s_m$ gewählt wird. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten geben Auskunft über die benötigte Kenntnis der Vergangenheit eines Prozesses, um die zukünftige Entwicklung der Dichtefunktionen vorhersagen zu können. Bei Prozessen, für die

$$p(t_1, \mathbf{x}_1; \dots; t_n, \mathbf{x}_n | s_1, \mathbf{y}_1; \dots; s_m, \mathbf{y}_m) = p(t_1, \mathbf{x}_1; \dots; t_n, \mathbf{x}_n | s_1, \mathbf{y}_1) \quad (2.41)$$

gilt, determiniert lediglich die Dichtefunktion $p(s, \mathbf{x})$ zum Zeitpunkt s die Dichtefunktionen zu den Zeitpunkten $t > s$. Solche Prozesse werden *Markov-Prozesse* genannt und sind nach den Bernoulliprozessen die nächst einfachen.

Neben den Dichtefunktionen dienen auch aus ihnen abgeleitete Größen zur Charakterisierung des Prozesses. Dazu gehören die Erwartungswerte $\epsilon_i(t)$ und die Varianzen $\sigma_i^2(t)$ von $\mathbf{X}(t)$, sie ergeben sich gemäß den Gleichungen (2.34) und (2.33) mit der (eindimensionalen) Dichtefunktion $p(t, x)$. Informationen über das „Gedächtnis“ von \mathbf{X} liefern die Korrelations- oder Kovarianzfunktionen $C_{ij}(s, t)$, welche durch

$$C_{ij}(s, t) = \langle (X_i(s) - \epsilon_i(s))(X_j(t) - \epsilon_j(t)) \rangle \quad (2.42a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - \epsilon_i(s))(x_j - \epsilon_j(t)) p_{s,t}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.42b)$$

definiert sind. Hierbei wurde im zweiten Teil der Gleichung eine platzsparende Schreibweise mit den Zeitparametern als Indizes verwendet. In dieser Arbeit werden kontextabhängig beide Notationen verwendet.

Physikalische Messungen an stochastischen Systemen liefern in der Regel lediglich einzelne Realisationen $\mathbf{x}(t)$ des zugrundeliegenden Prozesses $\mathbf{X}(t)$. In natürlicher Weise stellt sich die Frage, ob und wie von einzelnen Realisationen auf Eigenschaften des Prozesses geschlossen werden kann. Zur Beleuchtung dieser Problematik ist es sinnvoll, eine Klassifikation stochastischer Prozesse vorzunehmen. Hierzu können sie in stationäre Prozesse, für welche

$$p_{t_1+\Delta, \dots, t_n+\Delta} = p_{t_1, \dots, t_n} \quad (2.43)$$

gilt und nicht-stationäre Prozesse unterteilt werden. Aus der Definition (2.43) folgt für die Erwartungswerte

$$\langle X_{i_1}(t_1) \cdots X_{i_n}(t_n) \rangle = \langle X_{i_1}(t_1 + \Delta) \cdots X_{i_n}(t_n + \Delta) \rangle. \quad (2.44)$$

Also sind insbesondere die Mittelwerte $\langle X_i(t) \rangle = \epsilon$ und die Varianzen $\langle X_i^2(t) \rangle$ konstant, während die Korrelationsfunktion $C_{ij}(s, t)$ nur von $t - s$ abhängt. Eine weitere wichtige Subklasse der stationären Prozesse sind die ergodischen Prozesse. Für diese ist das Ensemblemittel gleich dem Zeitmittel über eine Realisation, d. h. für jede Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und jede Realisation $\mathbf{x}(t)$ gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\mathbf{x}(t)) dt = \langle f(\mathbf{X}(T)) \rangle. \quad (2.45)$$

Somit können auch die Erwartungswerte (2.44) durch die Zeitmittel approximiert werden. Dazu gehören auch der Mittelwert (2.33), die Varianz (2.34) und die Korrelationsfunktion (2.35).

Für skalare stationäre Prozesse kann eine spektrale Dichte $S(\omega)$ durch

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} C(s)e^{-i\omega s} ds \quad (2.46)$$

definiert werden. Diese Definition stimmt nach dem *Wiener-Khinchin-Theorem* [Wie30, Khi34] mit der bekannteren Definition

$$y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.47a)$$

$$\tilde{S}(\omega) = |y(\omega)|^2 \quad (2.47b)$$

aus der Zeitreihenanalyse überein. Die Definition (2.46) ist also lediglich eine Anwendung des Wiener-Khinchin-Theorems. Die spektrale Dichte und die Varianz sind über die als *Parsevalsche Identität* bekannte Gleichung

$$\text{var}(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (2.48)$$

verbunden. In vielen natürlichen und technischen Systemen kann die Varianz als mittlere Leistung von $x(t)$ interpretiert werden (z. B. bei elektromagnetischen Wellen). Die spektrale Dichte $S(\omega)$ gibt somit die Ableitung der mittleren Leistung von $x(t)$ nach der Frequenz ω an.

Sowohl bei stationären wie auch nicht-stationären Prozessen sind solche, die gaußsch sind, wegen ihrer Häufigkeit von besonderer Bedeutung. Ein stochastischer Prozess ist definitionsgemäß gaußsch, wenn alle Dichtefunktionen $p_{t_1, \dots, t_n}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ gemäß der Gleichung (2.36) verteilt sind. Die folgenden Beispiele behandeln deshalb auch ausschließlich gaußsche Prozesse.

Beispiel: weißer Zufallsprozess (weißes Rauschen)

Ein stochastischer Prozess $\xi(t)$ ist genau dann ein weißer Zufallsprozess mit Varianz σ^2 und Mittelwert Null, falls

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad (2.49a)$$

$$C(t-s) = \sigma^2 \delta(t-s) \quad (2.49b)$$

gilt, wobei δ die Diracsche δ -Distribution bezeichnet. Die Gleichung (2.46) liefert zusammen mit (2.49b) die spektrale Dichte $S(\omega) = \sigma^2$, d. h. das Integral über $S(\omega)$, die gesamte mittlere Leistung, divergiert. Dieser Prozess ist also unphysikalisch, er dient aber häufig als Approximation realer Prozesse. Von besonderer Bedeutung unter den weißen Prozessen sind Sequenzen unabhängiger identisch verteilter *gaußscher* Zufallsvariablen. Diese stationären Prozesse werden als *gaußsches weißes Rauschen* bezeichnet.

Beispiel: Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Bei naturwissenschaftlichen Problemstellungen ist die Annahme von weißem Rauschen nur dann gerechtfertigt, wenn die zeitliche Korrelation des physikalischen Rauschens sehr viel schneller abfällt als die der anderen mit dem Rauschen interagierenden Größen. Das Problem muss also eine klare Trennung der Zeitskalen zulassen (eine umfangreiche Erörterung findet sich z. B. in [HJ95]). Da diese Annahme aber in vielen Situationen nicht gerechtfertigt ist, müssen auch sog. farbige (d. h. nicht δ -korrelierte) stochastische Prozesse betrachtet werden. Ein häufig verwendeter Prozess mit dieser Eigenschaft ist der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* [UO30], dessen Eigenschaften im folgenden erläutert werden.

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $\zeta(t)$ zum Anfangswert $\zeta(0) = 0$ ist ein stationärer gaußscher Markovprozess mit den Eigenschaften

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad (2.50a)$$

$$c(t-s) = \frac{D}{\tau} \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right), \quad (2.50b)$$

wobei τ die Korrelationszeit und D die Intensität bezeichnen. Aus der Gleichung (2.50b) folgt die Varianz $\sigma^2 = \frac{D}{\tau}$. Die Korrelationsfunktion (2.50b) liefert eingesetzt in (2.46) die spektrale Dichte

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\tau^{-1} + \omega^2\tau}, \quad (2.51)$$

die ebenfalls Gleichung (2.48) erfüllt. Im Gegensatz zum weißen Rauschen strebt die spektrale Dichte für große ω gegen Null (siehe Abbildungen 2.5 und 2.6). Es sind also nicht alle Frequenzen im Spektrum vertreten, was auch der Grund ist, warum dieser Prozess als farbig bezeichnet wird. Die spektrale Dichte (2.51) ist in der Nachrichtentechnik sehr gut als die Übertragungsfunktion eines Butterworthfilters [But30] erster Ordnung mit der Grenzfrequenz $\omega_G = \frac{1}{\tau}$ bekannt. Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess kann also durch eine Tiefpaßfilterung von weißem Rauschen erzeugt werden.

Farbiges Rauschen wurde in einer Vielzahl von Publikationen durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess simuliert. Unter anderem in Untersuchungen zur stochastischen Resonanz [BSV81, HJZM93], der durch Rauschen induzierten Strukturbildung [BHK01] und zu Dynamiken neuronaler Systeme [TWR02].

Der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess wird einerseits wegen seiner statistischen Eigenschaften verwendet, welche eine vergleichsweise einfache mathematische Behandlung von Problemen ermöglicht, in denen solches Rauschen auftritt, andererseits kann in natürlichen Systemen oftmals der zentrale Grenzwertsatz angewendet werden, woraus die Annahme einer gaußschen Fluktuation $\zeta(t)$ folgt. Aus der Forderung der Markoveigenschaft (2.41) folgt mit Doob's Theorem [Doo42, Doo44], dass $\zeta(t)$ ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist.

Beispiel: Standard Wienerprozess

Dieses Beispiel stellt den für die Theorie der stochastischen Prozesse im Allgemeinen und der Theorie der stochastischen Differentialgleichungen im Speziellen äußerst bedeutsamen

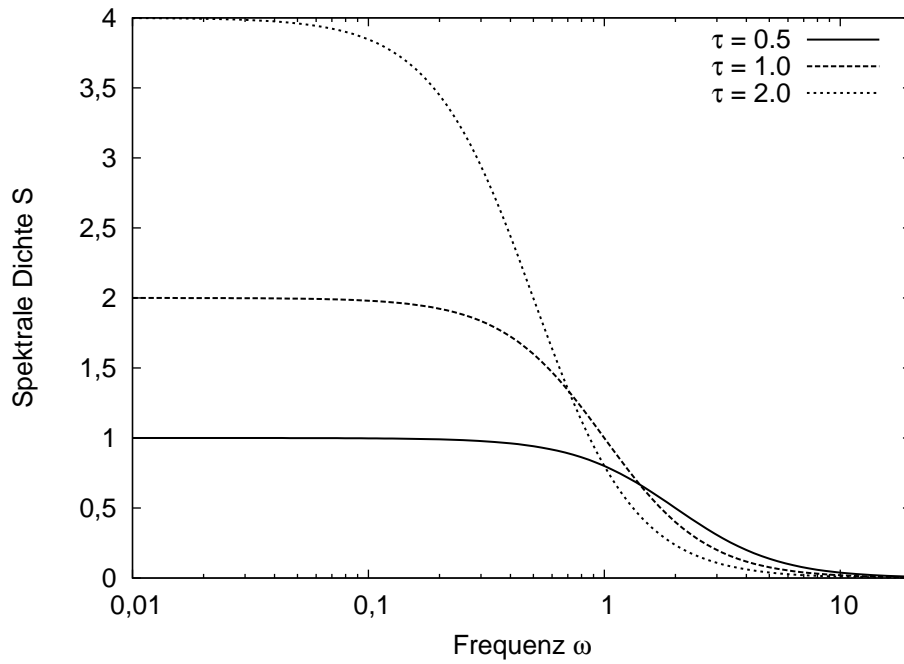


Abbildung 2.5.: Das Spektrum des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses zu verschiedenen Korrelationszeiten in Abhängigkeit von der Frequenz. Die Varianz ist jeweils eins.

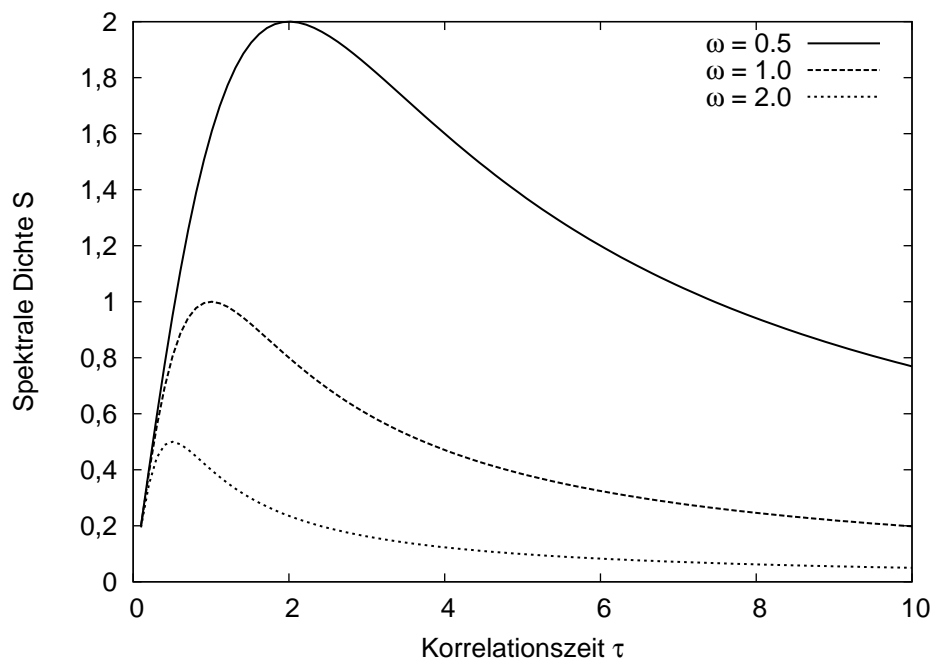


Abbildung 2.6.: Das Spektrum des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses zu verschiedenen Frequenzen in Abhängigkeit von der Korrelationszeit. Die Varianz ist jeweils eins.

Standard Wienerprozess W vor. Er gehört der Klasse der Markovprozesse mit unabhängigen Inkrementen an, d. h. für alle $s < t$ und $s' < t'$ gilt

$$\Delta W_t = W(t) - W(s) \quad (2.52a)$$

$$p(\Delta w_t, \Delta w_{t'}, w_0) = p(\Delta w_t)p(\Delta w_{t'})p(w_0). \quad (2.52b)$$

Zusätzlich ist W gaußsch und erfüllt die Bedingungen

$$W(0) = 0 \quad \text{m. W. 1} \quad (2.53a)$$

$$\langle W(t) \rangle = 0 \quad (2.53b)$$

$$\text{var}(W(t) - W(s)) = t - s, \quad (2.53c)$$

wobei „mit Wahrscheinlichkeit“ durch „m. W.“ abgekürzt wird.

Eine kurze Rechnung liefert für die Korrelationsfunktion das Ergebnis

$$C(s, t) = \min(s, t), \quad (2.54)$$

was zeigt, dass W nicht-stationär ist. Die Realisationen $w(t)$ sind fast nirgends differenzierbar und nicht rektifizierbar. Der Wienerprozess ist also wie weißes Rauschen unphysikalisch. Darüber hinaus besteht ein enger Zusammenhang zwischen dem Wienerprozess und gaußschem weißen Rauschen. Es sei der Prozess

$$X^h(t) = \frac{W(t+h) - W(t)}{h}, \quad (2.55)$$

betrachtet, der als Summe von gaußschen Prozessen mit Mittelwerten Null ebenfalls gaußsch mit Mittelwert Null ist. Die Gleichungen (2.54) und (2.46) liefern die spektrale Dichte

$$S_h(\omega) = 4 \left(\frac{\sin(\omega h)}{\omega h} \right)^2, \quad (2.56)$$

die im Grenzwert $h \rightarrow 0$ gegen die konstante Funktion $S_0(\omega) = 4$ konvergiert. Diese Eigenschaften charakterisieren nach (2.49) gaußsches weißes Rauschen. In diesem Sinne kann dieses Rauschen also als „Ableitung“ des Wienerprozesses betrachtet werden. Wiener führte W als formale mathematische Beschreibung der Brownschen Bewegung ein. Die Unabhängigkeit der Inkremente beschreibt die von Einstein postulierte Unabhängigkeit der Bewegung eines Teilchens zu unterschiedlichen Zeiten. Die Bedingung (2.53b) ist Ausdruck der räumlichen Symmetrie der Brownschen Bewegung. Die suspendierten Teilchen erhalten von allen Seiten mit gleicher Wahrscheinlichkeit Stöße. Die Gleichung (2.53c) ist ein Ergebnis von Einsteins Betrachtungen, die zeigten, dass die Brownsche Bewegung als Diffusionsprozess beschrieben werden kann.

2.2.3. Stochastische Differentialgleichungen

Die Entwicklung der Theorie stochastischer Differentialgleichungen begann mit einer zu Einsteins Methode [Ein04] alternativen Herangehensweise Langevins [Lan08] an das Problem der Brownschen Bewegung. Dabei führte er Differentialgleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}(t)) \quad (2.57)$$

ein, wobei $\boldsymbol{\xi}(t)$ ein die zufälligen Fluktuationen (oder auch Rauschen) beschreibender stochastischer Prozess ist. Die spezielle Form

$$\dot{x}_i = a_i(t, \mathbf{x}) + \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}(t, \mathbf{x}) \xi_j(t); \quad i = 0 \dots n-1, \quad (2.58)$$

bei der das Rauschen nur linear auftritt, wird häufig als *Langevingleichung* bezeichnet. Dabei ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, die $a_i(t, \mathbf{x})$ sowie die $b_{ij}(t, \mathbf{x})$ sind Funktionen, welche von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nach \mathbb{R} abbilden und m ist die Anzahl der involvierten stochastischen Prozesse $\xi_j(t)$. Ausgehend von der Gleichung (2.58) mit gaußschem weißen Rauschen wurde von Itô [Itô51a, Itô51b] die stochastische Analysis und die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen entwickelt. Die Gleichung (2.58) kann nicht als gewöhnliche Differentialgleichung interpretiert werden. Zur weiteren Formalisierung wird sie zunächst als Integralgleichung

$$X_i(t) = X_i(t_0) + \int_{t_0}^t a_i(s, \mathbf{x}) ds + \int_{t_0}^t \sum_{j=0}^{m-1} b_{ij}(s, \mathbf{x}) dW_j(s) \quad (2.59)$$

für den Prozess $\mathbf{X}(t)$ umgeschrieben, wobei $dW_j(s)$ das Inkrement des Wienerprozesses bedeutet. Weißes Rauschen wird dabei also als Ableitung des Wienerprozesses interpretiert. Das erste Integral in (2.59) ist ein gewöhnliches Lebesgueintegral, während das zweite Integral ein sog. stochastisches Integral ist. Es haben sich zwei Definitionen stochastischer Integrale durchgesetzt, das Itôintegral und das Stratonovichintegral [Str63]. Das Itôintegral von X_t nach Y_t ist als der Grenzwert

$$\int_{t_0}^t X(s) dY(s) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k X(t_{i-1})(Y(t_i) - Y(t_{i-1})) \quad (2.60)$$

und das Stratonovichintegral als der Grenzwert

$$\int_{t_0}^t X(s) \circ dY(s) := \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k X\left(\frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right)(Y(t_i) - Y(t_{i-1})) \quad (2.61)$$

definiert, wobei die Folgen im zweiten Mittel (mean square limit) [Gar04] konvergieren und $X(t)$ sowie $Y(t)$ eindimensionale stochastische Prozesse sind. Da beide Integrale i. a. nicht identisch sind, ist a priori nicht klar, welches zu wählen ist. In [WZ65a, WZ65b] wurde gezeigt, dass gewöhnliche Integralgleichungen in Stratonovich Integralgleichungen übergehen, falls die Fluktuationen gegen weißes Rauschen konvergieren. Aus diesem Grund wird in dieser Dissertation wie in der Physik meist das Stratonovichintegral gewählt. Im Falle *additiven* Rauschens, d. h. wenn die Funktionen $b_{ij}(t, \mathbf{x})$ nicht explizit von \mathbf{x} abhängen, sind die Itô- und die Stratonovichinterpretation der stochastischen Differentialgleichung identisch (siehe z. B. [vK07]). Zur Vollständigkeit sei erwähnt, dass in der Physik von *multiplikativem* Rauschen gesprochen wird, falls die Funktionen $b_{ij}(t, \mathbf{x})$ explizit von \mathbf{x} abhängen.

Beispiel: Die SDGL des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses

Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess $\zeta(t)$ (2.50) ist eine Lösung der Gleichung

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\tau}\zeta + \frac{\sqrt{2D}}{\tau}\xi(t) \quad (2.62)$$

zu der Anfangsbedingung $\zeta(0) = 0$, wobei $\xi(t)$ gaußsches weißes Rauschen bezeichnet. Da das Rauschen in dieser SDGL additiv eingeht, liefern die Itô- und die Stratonovichinterpretation den selben stochastischen Prozess ζ . Die exakte Lösung der Gleichung (2.62) wird im Anhang B.2 vorgestellt.

2.3. Synchronisation dynamischer Systeme

Synchronisationsphänomene werden in einer Vielzahl wissenschaftlicher Gebiete beobachtet. Unter anderem in der Laserphysik, der Elektrotechnik, der Biologie, der Physiologie und den Sozialwissenschaften. In der Literatur (z. B. [PRK01]) finden sich verschiedene problemangepasste Definitionen der Synchronisation. Christiaan Huygens beobachtete im 17. Jahrhundert, dass zwei an einem gemeinsamen Balken aufgehängte Uhren nach einer gewissen Zeit mit konstanter Phasenverschiebung um 180° pendeln. Ausgehend von dieser Beobachtung gab er die vermutlich erste Definition einer Synchronisation. Nachfolgend werden die zur Zeit geläufigen Definitionen vorgestellt.

2.3.1. Phasensynchronisation

Dieser Synchronisationsbegriff geht auf Christiaan Huygens [Huy73] zurück und verwendet die Phasen selbsterhaltender periodischer Oszillatoren. Zwei Oszillatoren sind demnach synchronisiert, wenn ihre Phasen φ_1 und φ_2 die Gleichung

$$n\varphi_1 - m\varphi_2 = \text{const}; \quad n, m \in \mathbb{N}. \quad (2.63)$$

erfüllen. Dieses Phänomen wird auch als „phase locking“ bezeichnet.

Eine erweiterte, an nicht unbedingt periodische gekoppelte dynamische Systeme angepasste Definition führten Rosenblum et al. [RPK96] ein. Dabei wird nur noch die Beschränktheit der Differenz in der Gleichung (2.63) gefordert.

$$n\varphi_1 - m\varphi_2 < \text{const}; \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (2.64)$$

Eine weitere, heute kaum noch verwendete Verallgemeinerung bezieht sich auf die Zeitmittel der Frequenzen [RK98]. Die Oszillatoren sind synchronisiert, falls die Beziehung

$$n \left\langle \frac{d\varphi_1}{dt} \right\rangle_t = m \left\langle \frac{d\varphi_2}{dt} \right\rangle_t \quad (2.65)$$

gültig ist, wobei $\langle \cdot \rangle_t$ das Zeitmittel bezeichnet.

Diese Synchronisationsarten sind alle bzgl. einer Phase definiert. Bei den meisten physikalischen (nicht periodischen) Problemen ist eine geeignete Phasendefinition jedoch nicht offensichtlich. Synchronisationsdefinitionen, die keiner Phasendefinition bedürfen, werden nachfolgend aufgeführt.

2.3.2. Verallgemeinerte Synchronisation

Die verallgemeinerte Synchronisation oder „Generalized Synchronization“ [AVR86, ARS96, RSTA95] ist bzgl. der Zustandsraumvektoren dynamischer Systeme definiert. Die Systeme sind per Definition synchronisiert, falls der Zustandsvektor eines der Systeme zu jedem Zeitpunkt Wert einer Abbildung Ψ des Zustandsvektors des zweiten Systems ist.

$$\Psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (2.66a)$$

$$\mathbf{x}(t) \mapsto \mathbf{y}(t) \quad (2.66b)$$

Die an die Abbildung Ψ gestellten Forderungen [PCJ+97] unterscheiden sich bei den Automaten und werden den Eigenschaften der betrachteten Systeme angepasst, insbesondere kann die Zeit ein Parameter von Ψ sein. Darüber hinaus stellt sich bei unbekanntem System die Frage, ob überhaupt die Existenz von Ψ vorausgesetzt werden kann [AGLE99].

Sonderfälle der verallgemeinerten Synchronisation sind die nachfolgend beschriebene Versatzzynchronisation und die vollständige Synchronisation.

2.3.3. Versatzzynchronisation

Diese von Rosenblum et al. [RPK97] eingeführte Definition beschreibt eine zeitliche Verzögerung τ (der Versatz) zwischen den Systemen. Für die Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ wird die Identität

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t + \tau) \quad (2.67a)$$

gefordert. Mit der Flussabbildung (2.3) folgt sofort

$$\mathbf{y}(t) = \varphi_\tau(\mathbf{x}(t)). \quad (2.67b)$$

Diese Form der Synchronisation ist also lediglich ein Spezialfall der verallgemeinerten Synchronisation mit $\Psi(\mathbf{x}) = \varphi(\tau, \mathbf{x})$.

2.3.4. Vollständige Synchronisation

Die vollständige Synchronisation ist der Spezialfall der Versatzzynchronisation mit $\tau = 0$. Die Trajektorien der Systeme erfüllen die Bedingung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t), \quad (2.68)$$

welche äquivalent durch $\Psi = \text{id}$ beschrieben wird. Diese Form der Synchronisation wurde bei gekoppelten chaotischen Oszillatoren erstmals 1983 von Fujisaka und Yamada [FY83, YF83] betrachtet.

2.3.5. Mechanismen der Synchronisation

Der Synchronisation dynamischer Systeme liegen zwei grundlegende Mechanismen zu Grunde. Sie kann durch *Kopplung* [Kur75, PC90] der Systeme erreicht werden. Dieser Fall wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + \mathbf{p}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) \quad (2.69a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) + \mathbf{p}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(1)}) \quad (2.69b)$$

beschrieben, wobei die $\mathbf{F}^{(i)}$ die Eigendynamik und die $\mathbf{p}^{(i)}$ die Kopplung der Systeme beschreiben. Synchronisation durch Kopplung wird in der Biologie z. B. bei der spontanen Synchronisation des Gesangs von Grillen und der Synchronisation des Blinkens in Schwärmen von Leuchtkäfern [Win67] beobachtet. In der Mechanik ist die von Huygens beschriebene Phasensynchronisation [Huy73] zweier an einem gemeinsamen Balken aufgehängten Pendeluhrn ein populäres Beispiel für Synchronisation durch Kopplung. In der Laserphysik wird Phasensynchronisation [FCRL93] von Nd:YAG Lasern und vollständige Synchronisation [RT94] chaotischer Nd:YAG Laser beobachtet, bei denen die Kopplung durch überlappende Laserfelder innerhalb des Resonators realisiert ist. In der Physik der Josephsonübergänge [Jos62] ist die Phasensynchronisation gekoppelter Josephsonübergänge [SK86, SM93, WS95] ein vielbehandeltes Thema.

Der andere grundlegende Mechanismus ist die Synchronisation durch den Systemen *gemeinsame externe Kräfte*. Dieser Fall wird durch die Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}^{(1)} = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}^{(1)}) + \mathbf{p}(t) \quad (2.70a)$$

$$\dot{\mathbf{x}}^{(2)} = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}^{(2)}) + \mathbf{p}(t) \quad (2.70b)$$

beschrieben, wobei die $\mathbf{F}^{(i)}$ wiederum die Eigendynamik und $\mathbf{p}(t)$ die externe Kraft beschreiben. Die Synchronisation durch externe periodische Kräfte ist sehr bedeutend und ein gut untersuchtes Phänomen [Arn65, GP82], das in verschiedenen wissenschaftlichen Disziplinen auftritt. Dazu zählen unter anderem die Laserphysik, in der Phasensynchronisation z. B. bei periodisch modulierten NMR Lasern [SWB94] beobachtet wird. In der Chemie wird z. B. die Phasensynchronisation der periodischen Belousov-Zhabotinsky Reaktion [KS95] durch eine periodische Stimulation mit Licht [POS97] beobachtet. In der Elektrotechnik [vdPvdM27] wurde schon früh die Synchronisation von Kippschwingern mit einem externen periodischen Signal untersucht. Die Synchronisierbarkeit von Oszillatoren durch externe Stimuli [Str86, Arn91, GL95, Gla01] ist in der Physiologie ein wohlbekanntes Phänomen. Diese Synchronisierbarkeit von Nervenzellen des Herzens wird z. B. von Herzschrittmachern genutzt. In der Biologie ist die Synchronisation des Blinkens von Leuchtkäfern mit externen periodischen Lichtimpulsen [BB68, BBH⁺81] bekannt. Nicht nur periodische Kräfte vermögen zu synchronisieren, sondern auch unregelmäßigere deterministische Kräfte. So hat die Synchronisation durch deterministische chaotische Kräfte in den letzten zwei Dekaden viel Aufmerksamkeit erhalten [FY83, PC90, TTH⁺96, TTT⁺97, BKO⁺02], und es wurde seitdem eine umfassende Theorie (siehe z. B. [PRK01]) dazu entwickelt. Eine andere in der Natur allgegenwärtige unregelmäßige nicht deterministische sondern stochastische

Kraft ist Rauschen. Lange Zeit wurde der Einfluss von Rauschen in Synchronisationsphänomenen lediglich als störend betrachtet. In [Pik84] wurde jedoch gezeigt, dass bei einer Menge ungekoppelter selbsterhaltender Oszillatoren eine auf alle Oszillatoren wirkende stochastische Kraft Synchronisation hervorrufen kann. Dieses Phänomen wird als stochastische Synchronisation bezeichnet. Sie wurde z. B. in der Laserphysik [UMR04] und den Neurowissenschaften [MS95, NR02, GFTEU06] beobachtet, außerdem wurde sie in einer Reihe theoretischer Arbeiten (z. B. [Pik92, BLT01, TT04, GP05]) betrachtet. In Kapitel 3 wird die stochastische Synchronisation ausführlich behandelt.

2.4. Verwendete Neuronenmodelle

Neuronen (oder Nervenzellen) sind Zellen des Nervensystems. So wie alle anderen Zellen besitzen sie eine Zellmembran, die den intra- von dem extrazellulären Raum trennt. Da die Ionenkonzentration im Inneren der Zelle i. a. nicht gleich der in der extrazellulären Flüssigkeit ist, entsteht über der Zellmembran eine Potentialdifferenz, das sog. Ruhepotential. Bezogen auf die extrazelluläre Flüssigkeit als elektrische Masse ist das Ruhepotential meist negativ und liegt zwischen -55 mV und -100 mV [Hil01, Sch87]. Neben dem Ruhepotential können Neuronen bei Erregung abrupte, kurzlebige Änderungen des Membranpotentials, sog. Aktionspotentiale, erzeugen. Diese Aktionspotentiale haben die Form einer Spitze und treten auf, wenn das Membranpotential stark genug depolarisiert wird. Dieser Mechanismus ist die Grundlage der Fähigkeit des Nervensystems, Informationen zu verarbeiten. Eine schematische Darstellung eines Aktionspotentials zusammen mit seinen einzelnen Phasen gibt Abbildung 2.7. Die von Hodgkin und Huxley [HH52b, HH52a, HH52c, HH52d] gegebene Erklärung dieses Phänomens wird im folgenden Abschnitt dargestellt.

2.4.1. Das Hodgkin-Huxley Modell

Hodgkin und Huxley führten ihre Untersuchungen zur elektrischen Erregbarkeit der Neurone am Riesenaxon eines Tintenfisches durch. Sie vermuteten eine potentialabhängige Leitfähigkeit makromolekularer ionenselektiver Poren der Zellmembran. Diese Vermutung wurde durch weitere Forschungen bestätigt und diese Poren werden heute als Ionenkanäle bezeichnet. Als wesentliche Ladungsträger wurden Na^+ und K^+ Ionen identifiziert. Zur Entwicklung eines physikalisch-mathematischen Verständnisses der Entstehung von Aktionspotentialen modellierten Hodgkin und Huxley die Zellmembran als elektrischen Schaltkreis (Abbildung 2.8). In diesem Schaltkreis bezeichnen g_{Na} und g_{K} die spannungsabhängigen Leitfähigkeiten der Na^+ und K^+ Kanäle. Die spannungsunabhängigen Größen sind die zum Leckstrom gehörende Leitfähigkeit g_{L} und die Membrankapazität C_{M} . Im Leckstrom sind nicht näher spezifizierte Ströme anderer Ionen (hauptsächlich Cl^-) zusammengefasst. Die Größen E_{Na} , E_{K} und E_{L} sind die sog. Umkehrpotentiale, d. h. die Potentiale, welche im Zellinneren angelegt werden müssen, um die Stromrichtung der jeweiligen Ionen umzukehren. Die zugehörigen Stromdichten sind mit J_{Na} , J_{K} , J_{M} und J_{L} bezeichnet. Das Modell nimmt zusätzlich

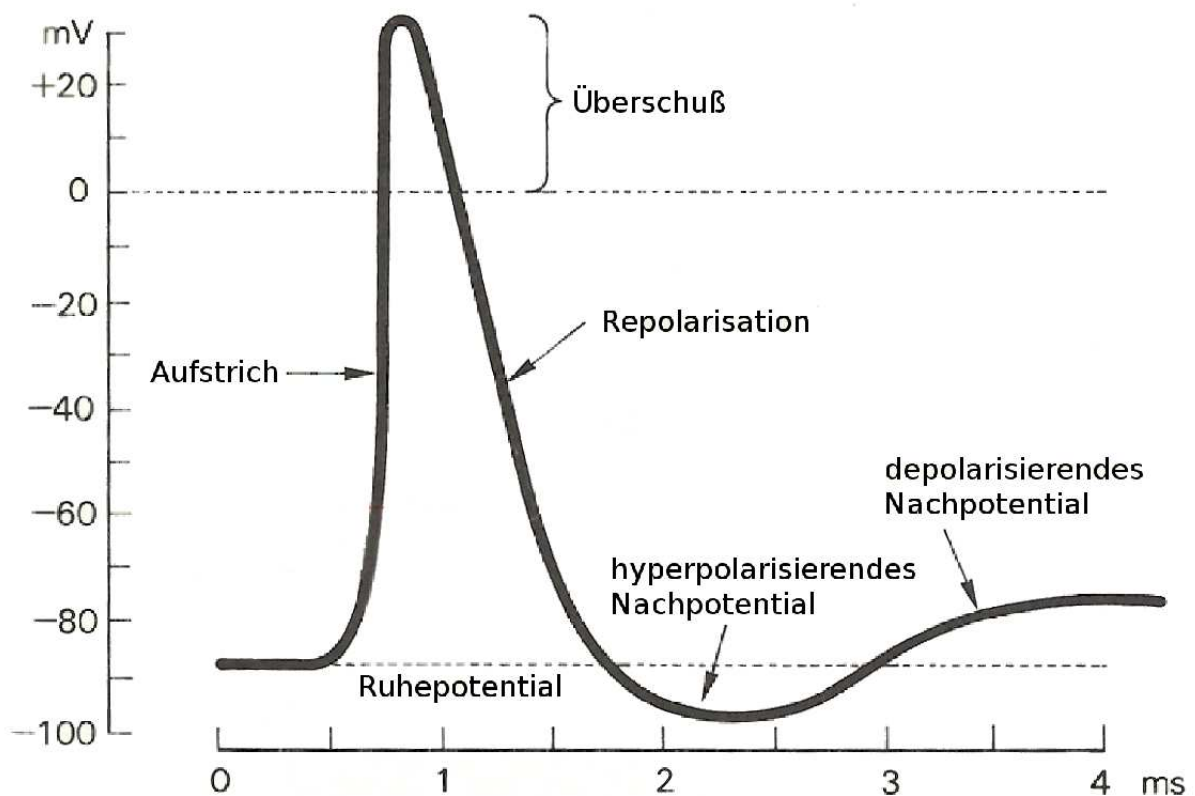


Abbildung 2.7.: Schematische Darstellung eines Aktionspotentials mit Bezeichnung der einzelnen Phasen (adaptiert aus [Sch87])

die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes

$$g_{\star} = \frac{J_{\star}}{E - E_{\star}} \quad (2.71)$$

für alle vier Stromdichten (hier mit J_{\star} abgekürzt) an. Auf der Grundlage dieser Annahmen untersuchten Hodgkin und Huxley die Reaktion der Leitfähigkeiten auf eine (künstliche) konstante Depolarisation des Neurons (voltage-clamp-Methode [Hil01]). Bei solchen Versuchen zeigen der Kaliumkanal und der Natriumkanal stark unterschiedliches Verhalten. Die Leitfähigkeit des Kaliumkanals steigt (*Aktivierung*) langsam bis zu einem Sättigungswert an, während die Leitfähigkeit des Natriumkanals schnell bis auf ein Maximum ansteigt, um dann wieder langsam auf Null zu sinken (*Inaktivierung*). Im Gegensatz zum Kaliumkanal zeigt der Natriumkanal neben der Aktivierung also auch das Phänomen der Inaktivierung. Dieses Verhalten wurde mit der Hilfe hypothetischer aktivierender und inaktivierender Teilchen (sog. Gatterteilchen) erklärt, welche ihre Position innerhalb der Kanäle unabhängig voneinander verändern können. Die aus diesen Hypothesen folgenden Kanaldynamiken werden nachfolgend beschrieben. Die dabei auftretenden Konstanten wurden von Hodgkin und Huxley experimentell bestimmt.

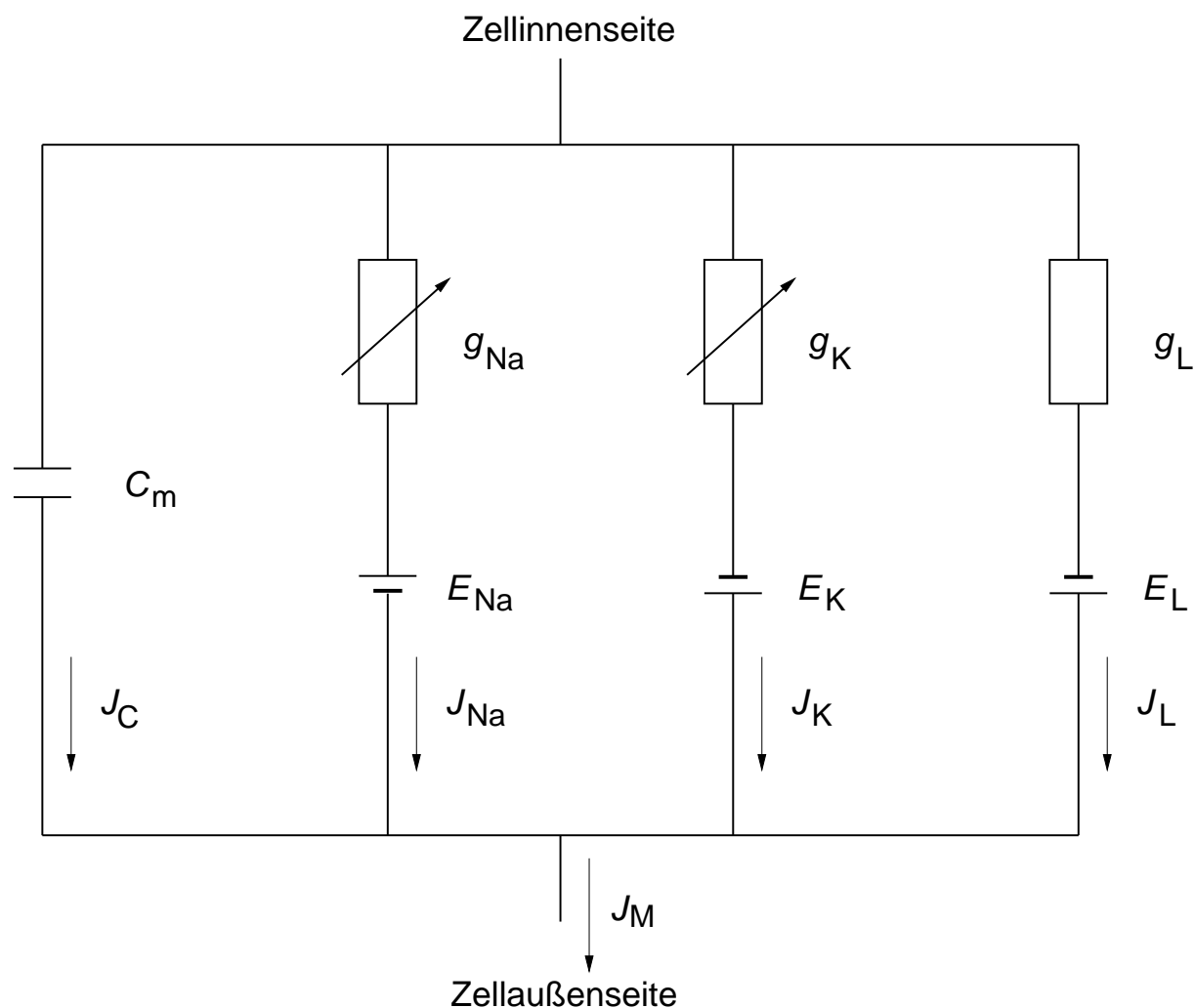


Abbildung 2.8.: Elektrischer Schaltkreis zur Modellierung eines Ausschnitts der Axonmembran

Der Kaliumkanal

Da der Kaliumkanal keine Inaktivierung zeigt, sind lediglich aktivierende Gatterteilchen beteiligt. Es werden vier unabhängige Gatterteilchen angenommen, die sich jeweils mit der Wahrscheinlichkeit n in der für die Öffnung des Kanals geeigneten Position befinden können. Der Kanal ist also mit der Wahrscheinlichkeit n^4 geöffnet. Mit der maximal erreichbaren Kaliumleitfähigkeit $\bar{g}_K = 36 \text{ mS/cm}^2$, $E_K = -12 \text{ mV}$ und der Gleichung (2.71) folgt also

$$J_K = n^4 \bar{g}_K (E - E_K) \quad (2.72)$$

für die Kaliumstromdichte. Die Dynamik von n wird durch die Reaktion erster Ordnung



bestimmt, mit spannungsabhängigen Übergangsraten $\alpha_n(E)$ und $\beta_n(E)$. Die zugehörige Differentialgleichung lautet

$$\dot{n} = \alpha_n(1 - n) - \beta_n n, \quad (2.74)$$

welche die Lösung

$$n = n_\infty - (n_\infty - n_0)e^{-\frac{t}{\tau_n}} \quad (2.75)$$

zur Anfangsbedingung $n(t = 0 \text{ s}) = n_0$ hat, wobei statt der Parameter α_n und β_n die Zeitkonstante τ_n und $\lim_{t \rightarrow \infty} n = n_\infty$ benutzt werden. Der Zusammenhang der Größen ist durch

$$\tau_n = \frac{1}{\alpha_n + \beta_n} \quad (2.76a)$$

$$n_\infty = \frac{\alpha_n}{\alpha_n + \beta_n} \quad (2.76b)$$

gegeben. Die Spannungsabhängigkeiten der Übergangsraten α_n und β_n wurden von Hodgkin und Huxley [HH52d] experimentell zu

$$\alpha_n(E) = \frac{10 - E}{100(e^{\frac{10-E}{10}} - 1)} \quad (2.77a)$$

und

$$\beta_n(E) = 0,125 e^{-\frac{E}{80}} \quad (2.77b)$$

bestimmt, wobei E das Membranpotential in Millivolt relativ zum Ruhepotential bezeichnet.

Der Natriumkanal

Bei der Beschreibung der Dynamik des Natriumkanals sind außer den aktivierenden auch inaktivierende Gatterteilchen zu berücksichtigen. Wie beim Kaliumkanal werden vier unabhängige, davon drei aktivierende (m) und ein inaktivierendes Gatterteilchen (h), angenommen. Die Natriumstromdichte folgt also der Gleichung

$$J_{\text{Na}} = m^3 h \bar{g}_{\text{Na}} (E - E_{\text{Na}}), \quad (2.78)$$

wobei $\bar{g}_{\text{Na}} = 120 \text{ mS/cm}^2$ die maximale Leitfähigkeit bezeichnet und $E_{\text{Na}} = 115 \text{ mV}$. Die Reaktion erster Ordnung für die aktivierenden Teilchen lautet



wobei m die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich das Teilchen im aktivierenden Zustand befindet. Analog gilt für das inaktivierende Teilchen



wobei h die Wahrscheinlichkeit ist, dass sich das Teilchen *nicht* im inaktivierenden Zustand befindet. Die zugehörigen Differentialgleichungen lauten

$$\dot{m} = \alpha_m(1 - m) - \beta_m m \quad (2.81)$$

und

$$\dot{h} = \alpha_h(1 - h) - \beta_h h. \quad (2.82)$$

Es folgen die Lösungen zu den Anfangsbedingungen $m(t = 0 \text{ s}) = m_0$ und $h(t = 0 \text{ s}) = h_0$

$$m = m_\infty - (m_\infty - m_0)e^{-\frac{t}{\tau_m}} \quad (2.83)$$

und

$$h = h_\infty - (h_\infty - h_0)e^{-\frac{t}{\tau_h}}, \quad (2.84)$$

mit

$$\tau_m = \frac{1}{\alpha_m + \beta_m} \quad (2.85a)$$

$$m_\infty = \frac{\alpha_m}{\alpha_m + \beta_m} \quad (2.85b)$$

und

$$\tau_h = \frac{1}{\alpha_h + \beta_h} \quad (2.86a)$$

$$h_\infty = \frac{\alpha_h}{\alpha_h + \beta_h}. \quad (2.86b)$$

Die experimentell ermittelten Spannungsabhängigkeiten der Übergangsraten lauten:

$$\alpha_m(E) = \frac{25 - E}{10(e^{\frac{25-E}{10}} - 1)} \quad (2.87)$$

$$\beta_m(E) = 4e^{-\frac{E}{18}} \quad (2.88)$$

$$\alpha_h(E) = 0,07e^{-\frac{E}{20}} \quad (2.89)$$

$$\beta_h(E) = \frac{1}{e^{\frac{30-E}{10}} - 1}. \quad (2.90)$$

Aus der Knotenregel folgt nun

$$J_M = C_M \frac{dE}{dt} + m^3 h \bar{g}_{\text{Na}}(E - E_{\text{Na}}) + n^4 \bar{g}_{\text{K}}(E - E_{\text{K}}) + g_{\text{L}}(E - E_{\text{L}}) \quad (2.91)$$

für die Membranstromdichte J_M mit $g_m = 0,3 \text{ mS/cm}^2$, $E_{\text{L}} = 10,613 \text{ mV}$ und $C_M = 1 \mu\text{F/cm}^2$. Zusammen mit den Funktionen für die Spannungsabhängigkeiten der Übergangsraten α_* und β_* bilden die Gleichungen (2.74),(2.81),(2.82) und (2.91) das Hodgkin-Huxley Modell. Zur Veranschaulichung der Dynamik des Modells zeigt Abbildung 2.9 die Reaktion des Membranpotentials auf einen extern injizierten rechteckigen Stromimpuls J_M . Der

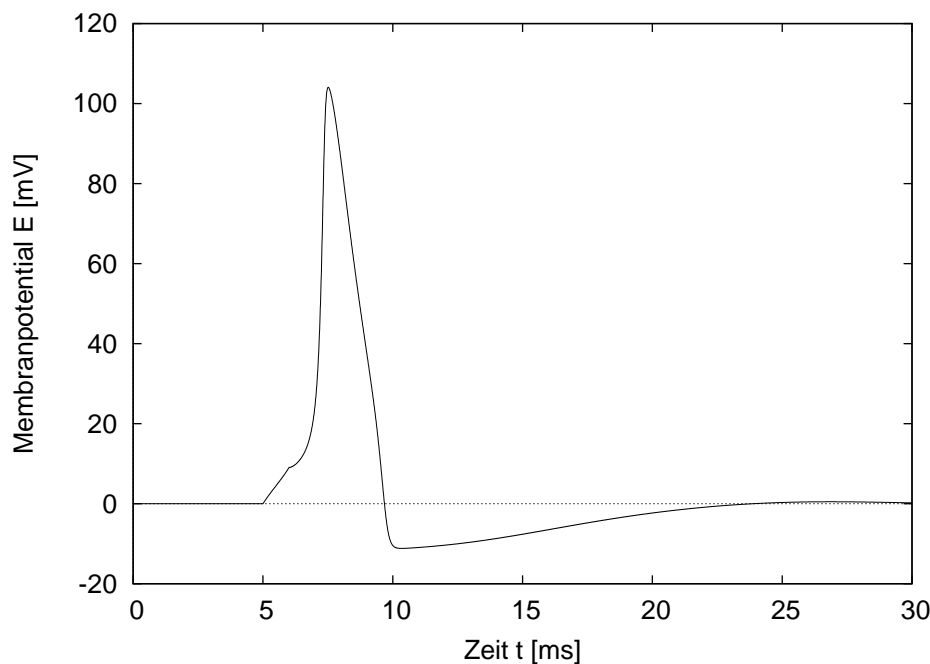


Abbildung 2.9.: Aktionspotential eines Hodgkin-Huxley-Neurons ausgelöst durch einen rechteckigen Stromimpuls der Dauer 1 ms und der Amplitude $10 \mu\text{A}/\text{cm}^2$

Impuls der Dauer $\Delta = 1$ ms setzt zum Zeitpunkt $t = 5$ ms ein und hat die Amplitude $10 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Dabei wurden alle Potentiale relativ zum Ruhepotential angegeben. Offenkundig ist das System erregbar und der in Abbildung 2.7 schematisch dargestellte Verlauf wird gut reproduziert. Das Hodgkin-Huxley Modell ist noch heute die Grundlage aller auf Ionenkanälen basierten detaillierten Neuronenmodelle. Diese Modelle haben den Vorteil, physiologische Daten sehr gut zu reproduzieren [KS98, Had02, Hor06], sie sind im Allgemeinen jedoch schwer zu konstruieren und erfordern eine detaillierte Kenntnis der Ionenströme. Darüber hinaus sind die daraus resultierenden hochdimensionalen Differentialgleichungssysteme schwer zu visualisieren und zu analysieren. Zweidimensionale dynamische Systeme sind einer wesentlich einfacheren (geometrischen) Analyse (vgl. z. B. [Str94, Koc99, GK02]) im Zustandsraum zugänglich. Untersuchungen, deren Schwerpunkt eher auf qualitativen Aspekten neuronaler Erregbarkeit beruhen, können also von einer Reduktion auf zwei Freiheitsgrade stark profitieren. Der nächste Abschnitt führt in zwei solcher zweidimensionalen Neuronenmodelle ein.

2.4.2. Zweidimensionale Neuronenmodelle

FitzHugh [Fit61] und Nagumo et. al. [NAY62] entwickelten in den 1960er Jahren beim Studium erregbarer Dynamiken unabhängig voneinander ein zweidimensionales Modell zur Erzeugung von Aktionspotentialen. Das Modell ist eine Modifikation der van-der-Pol-Glei-

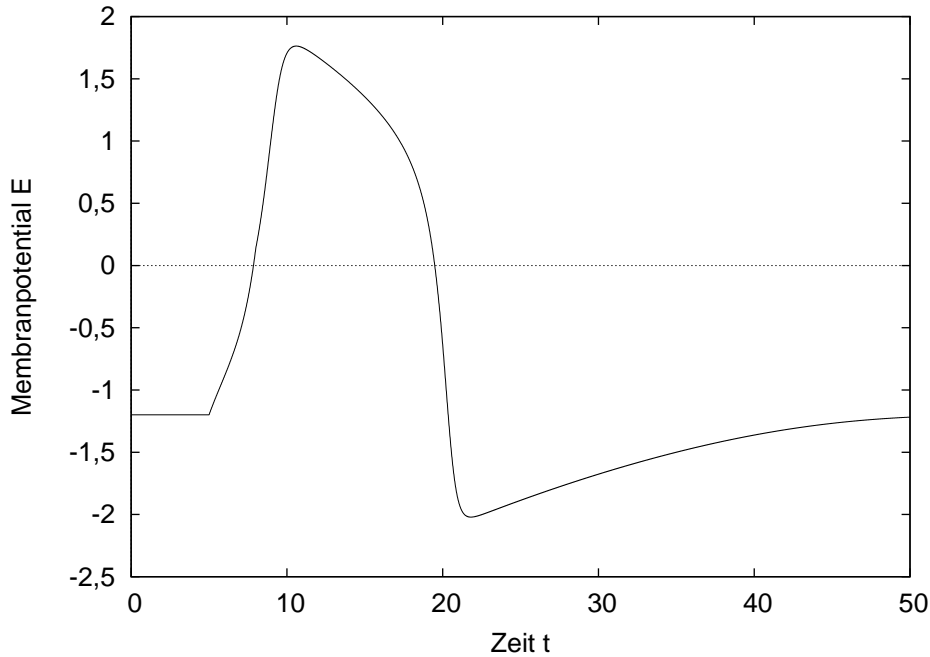


Abbildung 2.10.: Aktionspotential eines FitzHugh-Nagumo-Neurons ausgelöst durch einen rechteckigen Stromimpuls der Dauer 3 und der Amplitude 0,35.

chung (2.15) und ist durch die Gleichungen

$$\dot{E} = E - \frac{E^3}{3} - U + I \quad (2.92a)$$

$$\dot{U} = \varphi(E + a - bU) \quad (2.92b)$$

gegeben, wobei die Variable E das Äquivalent zum Membranpotential darstellt und U eine Erholungsvariable (engl. recovery variable) ist. Die Parameter a , b und φ sind positive dimensionslose Parameter, I ist der über die Zellmembran fließende Strom. Das Verhältnis der Änderungsgeschwindigkeiten von E und U wird durch φ bestimmt. In dieser Arbeit werden die Werte $a = 0,7$, $b = 0,8$ und $\varphi = 0,08$ [Cro87, Koc99] angenommen. Das Modell (2.92) besitzt für $I < I_C = 0,32$ einen stabilen Fixpunkt. Bei der kritischen Stromstärke I_C zeigt das Modell eine subkritische Hopfbifurkation [Str94] und ein stabiler Grenzzyklus mit von Null verschiedener Frequenz entsteht. Die Abbildung 2.10 zeigt die Erregung eines Aktionspotentials durch einen Stromimpuls I . Der Impuls der Dauer $\Delta = 3$ setzt zum Zeitpunkt $t = 5$ ein und hat die Amplitude 0,35. Das FitzHugh-Nagumo Modell hat viel zum Verständnis erregbarer Dynamiken beigetragen und ist heute nicht nur in den Neurowissenschaften ein Standardmodell. Obwohl das Aktionspotential des FitzHugh-Nagumo Modells eine qualitative Übereinstimmung mit dem Aktionspotential von Abbildung 2.9 aufweist, ist der Verlauf quantitativ stark von dem realer Membranpotentiale verschieden. Für Untersuchungen, die einer besseren Reproduktion physiologischer Daten bedürfen, ist dieses Modell somit nicht gut geeignet. Morris und Lecar [ML81] entwickelten 1981 bei Experimenten zur Erregbarkeit der Riesennervenfaser der Entenmuschel das nach ihnen

	Hopf	Sattel-Knoten
E_1	100 mV	100 mV
E_2	-70 mV	-70 mV
E_L	-50 mV	-50 mV
\bar{g}_1	1,1 mS/cm ²	1 mS/cm ²
\bar{g}_2	2,0 mS/cm ²	2,0 mS/cm ²
g_L	0,5 mS/cm ²	0,5 mS/cm ²
U_1	-1 mV	-1 mV
U_2	15 mV	15 mV
U_3	0 mV	10 mV
U_4	40 mV	14,5 mV
τ_w	5 ms	3 ms
C_m	1 μ F/cm ²	1 μ F/cm ²

Tabelle 2.2.: Parametersätze des Morris-Lecar-Modells nach [Koc99] und [RE98]

benannte zweidimensionale *leitfähigkeitsbasierte Morris-Lecar-Modell*, welches die physiologischen Daten deutlich besser reproduziert. Es ist durch die Differentialgleichungen

$$C_m \frac{dE}{dt} = \bar{g}_1 m_\infty(E)(E_1 - E) + \bar{g}_2 w(E_2 - E) + g_L(E_L - E) + J(t) \quad (2.93a)$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{w_\infty(E) - w}{\tau(E)} \quad (2.93b)$$

und die Funktionen

$$m_\infty(E) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{E - U_1}{U_2} \right) \right) \quad (2.93c)$$

$$w_\infty(E) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{E - U_3}{U_4} \right) \right) \quad (2.93d)$$

$$\tau(E) = \frac{\tau_w}{\cosh \left(\frac{E - U_3}{U_4} \right)} \quad (2.93e)$$

definiert. Die Variable E ist wie üblich das Membranpotential und w ist eine Erholungsvariable. Neben den bisher genannten Vorteilen zeigt dieses Modell in Abhängigkeit der gewählten Parameter neben einer subkritischen Hopfbifurkation auch eine Sattel-Knoten-Bifurkation [Str94], die Abfolgen von Aktionspotentialen (Oszillationen) mit beliebig kleinen Frequenzen erzeugt. Solche sehr langsamen Oszillationen werden z. B. in Pyramidalzellen [MN86] beobachtet. In Abhängigkeit konkreter Untersuchungen gibt es verschiedene Parametersätze für das Morris-Lecar-Modell. In dieser Arbeit werden die Parameter der Publikationen [Koc99] und [RE98] verwendet, welche nach den Bifurkationstypen getrennt in der Tabelle 2.2 aufgeführt sind. Die Abbildungen 2.11 und 2.12 demonstrieren die unterschiedliche Charakteristik der beiden Bifurkationen. Abbildung 2.11 zeigt aus einer Hopfbifurkation hervorgegangene Oszillationen bei der schwach überkritischen Stromdichte von

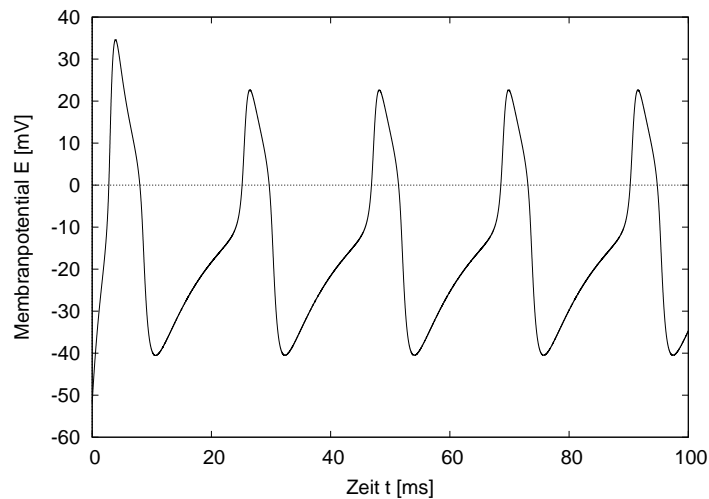


Abbildung 2.11.: Reaktion des Morris-Lecar-Modells auf eine bei $t = 0$ ms von $J = 0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ auf $J = 24,91 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ springende konstante Stromdichte. Für Zeiten $t < 0$ befindet sich das System auf seinem Fixpunkt, während es für $t > 0$ auf dem aus der subkritischen Hopfbifurkation hervorgegangenen Grenzzyklus rotiert. Das erste Aktionspotential ist aufgrund des Einschwingvorgangs etwas größer als die folgenden. Die Eigenschaft subkritischer Hopfbifurkationen, abrupt von Null verschiedene Oszillationsfrequenzen (hier ca. 50 Hz) zu erzeugen, ist gut zu erkennen.

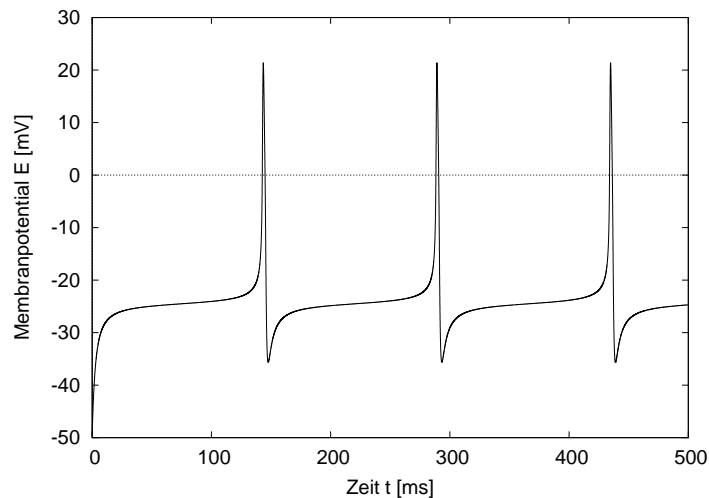


Abbildung 2.12.: Reaktion des Morris-Lecar-Modells auf eine bei $t = 0$ ms von $J = 0 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ auf $J = 8,34 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ springende konstante Stromdichte. Für Zeiten $t < 0$ befindet sich das System auf seinem Fixpunkt, während es für $t > 0$ auf dem aus der Sattel-Knoten-Bifurkation hervorgegangenen Grenzzyklus rotiert. Die Sattel-Knoten-Bifurkation erzeugt bei schwach überkritischen Stromdichten sehr langsame Oszillationen (hier ca. 6,5 Hz).

	Hopf	Sattel-Knoten
E_K	-90 mV	-90 mV
E_{Na}	60 mV	60 mV
E_L	-78 mV	-80 mV
\bar{g}_{Na}	20 mS/cm ²	20 mS/cm ²
\bar{g}_K	10 mS/cm ²	10 mS/cm ²
g_L	8 mS/cm ²	8 mS/cm ²
$E_{1/2Na}$	-20 mV	-1 mV
$E_{1/2K}$	-45 mV	15 mV
k_{Na}	15	15
k_K	5	5
τ_K	1 ms	1 ms
C_m	1 μ F/cm ²	1 μ F/cm ²

Tabelle 2.3.: Parametersätze des $I_{Na,p}+I_K$ -Modells nach [Izh07].

$J = 24,91 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Obwohl dieser Wert nur knapp oberhalb der kritischen Stromdichte $J_C = 24,9 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ liegt, beträgt die Frequenz schon ca. 50 Hz. Die in Abbildung 2.12 dargestellten Oszillationen sind aus einer Sattel-Knoten-Bifurkation hervorgegangen und haben lediglich eine Frequenz von ca. 6,5 Hz. Die Stromdichte $J = 8,34 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ liegt nur wenig über der kritischen Stromdichte $J_C = 8,326 \mu\text{A}/\text{cm}^2$.

Ein weiteres leitfähigkeitsbasiertes zweidimensionales Neuronenmodell ist das Modell des persistierenden Natrium- und Kalium- Kanals ($I_{Na,p}+I_K$ -Modell), welches häufig in dem Buch [Izh07] verwendet wird. Es besteht aus einem Leckstrom, einem (instantanen) persistierenden Na^+ -Strom und einem K^+ -Strom und wird durch die Differentialgleichungen

$$C_m \frac{dE}{dt} = \bar{g}_{Na} m_\infty(E) (E_{Na} - E) + \bar{g}_K n(E_K - E) + g_L (E_L - E) + J(t) \quad (2.94a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(E) - n}{\tau_K} \quad (2.94b)$$

und die Funktionen

$$m_\infty(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(E_{1/2Na} - E)}{k_{Na}}\right)} \quad (2.95a)$$

$$n_\infty(E) = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{(E_{1/2K} - E)}{k_K}\right)} \quad (2.95b)$$

beschrieben. Dieses Modell ist in verschiedener Hinsicht dem zuvor beschriebenen Morris-Lecar-Modell ähnlich, denn es zeigt ebenso in Abhängigkeit der gewählten Parameter eine Hopfbifurkation oder eine Sattel-Knoten-Bifurkation. Mit den in dieser Arbeit verwendeten Parametern, welche in der Tabelle 2.3 zusammengestellt sind, ist die Hopfbifurkation im Gegensatz zum Morris-Lecar-Modell superkritisch. Die Abbildungen 2.13 und 2.14 zeigen periodische Oszillationen bei leicht überkritischen Stromdichten. Die Abbildung 2.13 zeigt

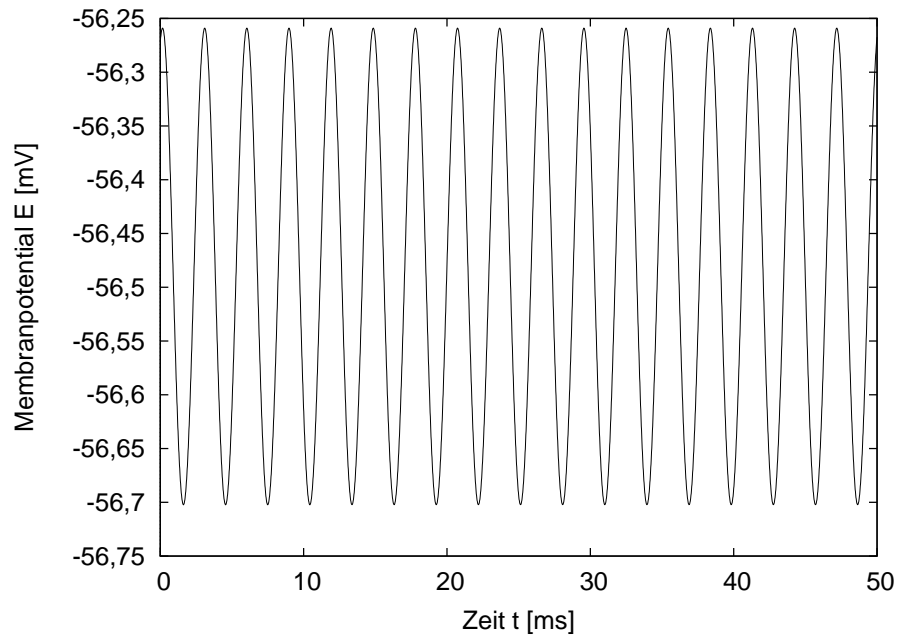


Abbildung 2.13.: Oszillation des $I_{Na,p}+I_K$ -Modells, welche durch eine superkritische Hopf-bifurkation entstanden sind. Die Stromdichte beträgt $J = 14,665 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Die kleine Amplitude der Oszillationen nahe der kritischen Stromdichte ist charakteristisch für superkritische Hopfbifurkationen.

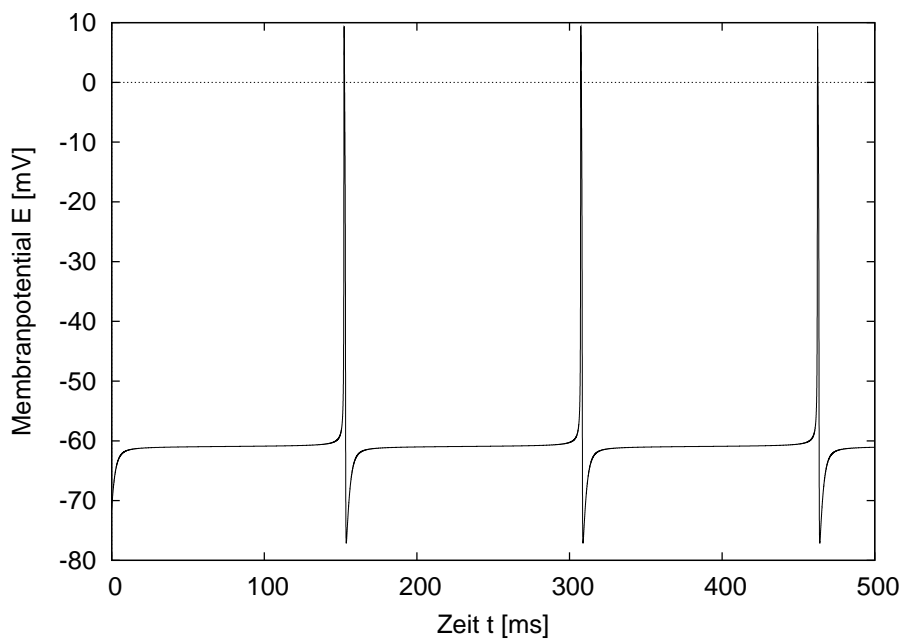


Abbildung 2.14.: Oszillation des $I_{Na,p}+I_K$ -Modells, welche durch eine Sattel-Knoten-Bifurkation hervorgegangen sind. Die Stromdichte beträgt $J = 4,515 \mu\text{A}/\text{cm}^2$.

die aus der superkritischen Hopfbifurkation hervorgegangenen Oszillationen bei der Stromdichte $J = 14,665 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Dieser Wert liegt knapp oberhalb der kritischen Stromdichte $J_C = 14,66 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Offensichtlich setzen die Oszillationen so wie bei der subkritischen Hopfbifurkation des Morris-Lecar-Modells abrupt mit einer von Null verschiedenen Frequenz ein. Allerdings ist die Abhängigkeit der Amplitude von der Stromdichte stetig, d. h. bei $J = J_C$ ist die Amplitude Null. Dies ist auch an der kleinen Amplitude in der Abbildung 2.13 erkennbar. Die in der Abbildung 2.14 dargestellten Oszillationen sind aus einer Sattel-Knoten-Bifurkation bei $J_C = 4,51 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ hervorgegangen. Die Stromdichte liegt bei $J = 4,515 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ und somit nur wenig oberhalb der kritischen Stromdichte. Erwartungsgemäß sind diese Oszillationen sehr niederfrequent.

2.5. Phasenreduktion periodischer Oszillatoren

Die Grenzzyklen nichtlinearer Differentialgleichungssysteme können im allgemeinen nicht als analytische Lösungen gefunden werden. Ihre Periodizität ermöglicht jedoch die Einführung einer mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Phase. Über das Konzept der Isochronen ist eine Erweiterung der Phasendefinition auf eine Umgebung des Grenzzyklus möglich. Die in diesem Abschnitt vorgestellte Methode der Phasenreduktion ermöglicht eine extrem vereinfachte Beschreibung der Dynamik *schwach* gestörter Oszillatoren mit Grenzzyklus. Es werden ausschließlich selbsterhaltende Grenzzyklen betrachtet. Im Gegensatz dazu sind Zyklen konservativer integrierbarer Systeme meist weder attraktiv noch isoliert.

2.5.1. Die Phase eines selbsterhaltenden periodischen Oszillators

Es sei ein N -dimensionales System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.96)$$

gegeben und $\mathbf{x}_O(t)$ sei eine Lösung mit der Periode T . D.h $\mathbf{x}_O(t)$ erfüllt die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}_O(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_O(t)) \quad (2.97a)$$

$$\mathbf{x}_O(t) = \mathbf{x}_O(t + T). \quad (2.97b)$$

Der Lösung $\mathbf{x}_O(t)$ kann nun die Phase

$$\phi = \frac{2\pi t}{T} \quad (2.98)$$

zugeordnet werden. Die Phase ϕ kann als neuer Kurvenparameter des Grenzzyklus betrachtet werden, mit dem die Lösung $\mathbf{x}_O(\phi)$ die Periode 2π annimmt.

2.5.2. Die Isochronen

Die bisherige Phase ϕ ist lediglich auf dem Grenzzyklus definiert. Jedoch können externe Störungen das System von diesem Zyklus stoßen. In diesen Fällen ist eine Erweiterung

der Phasendefinition auf eine Umgebung des Grenzzyklus nötig. Dies wird mit Hilfe des Konzeptes der Isochronen [Win67, Guc75] erreicht.

Sei \mathbf{y}_0 ein Punkt auf dem Attraktor des Grenzzyklus $\mathbf{x}_O(t)$. Die zugehörige Lösung $\mathbf{y}(t)$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}(t)) \quad (2.99a)$$

$$\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0 \quad (2.99b)$$

ist mithin im Allgemeinen nicht periodisch. Da jedoch \mathbf{y}_0 auf dem Attraktor des Zyklus liegt, strebt $\mathbf{y}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ auf ihn zu. Sei nun \mathbf{x}_0 ein Punkt auf dem Zyklus, die Menge aller Punkte \mathbf{y}_0 , für die

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}_0\| = 0 \quad (2.100)$$

gilt, ist die sog. stabile Mannigfaltigkeit oder *Isochrone* von \mathbf{x}_0 . Die Phase der Trajektorien $\mathbf{y}(t)$ zu Startwerten \mathbf{y}_0 auf der Isochronen von \mathbf{x}_0 ist als die Phase von $\mathbf{x}(t)$ mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ definiert. Mit dieser Phasendefinition folgt in der Umgebung des Grenzzyklus, in der die Isochronen definiert sind, die Gleichung für die Phasendynamik

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_O, \quad (2.101)$$

mit der Kreisfrequenz $\omega_O = 2\pi/T$.

Beispiel

Eine analytische Bestimmung der Isochronen ist für die meisten Systeme nicht möglich. Eine Ausnahme ist der Landau-Stuart-Oszillator (2.26). Die Gleichungen (2.26a) und (2.26b) haben die Lösungen

$$R^2(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{R_0^2}\right) e^{-2t}} \quad (2.102a)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + (\eta - \alpha)t - \frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 - (R_0^2 - 1)e^{-2t}) \quad (2.102b)$$

zu den Anfangsbedingungen $R_0 = R(0)$ und $\theta_0 = \theta(0)$. Mit $R_0 = 1$ rotiert das System mit konstanter Phasengeschwindigkeit $\theta_{GZ} = \eta - \alpha$ auf dem Grenzzyklus. Für Startwerte $R_0 \neq 1$ folgt mit Gleichung (2.102b) die Phasendifferenz

$$\Delta(t) := \theta(t) - \theta_{GZ}(t) = -\frac{\alpha}{2} \ln(R_0^2 - (R_0^2 - 1)e^{-2t}), \quad (2.103)$$

deren asymptotischer Wert durch

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = -\alpha \ln R_0 \quad (2.104)$$

gegeben ist. Der Punkt (R_0, θ_0) liegt somit auf der Isochronen des Punktes $(1, \theta_0 - \alpha \ln R_0)$. Auf der gesamten Ebene kann also eine Phase ϕ durch

$$\phi := \theta - \alpha \ln R \quad (2.105)$$

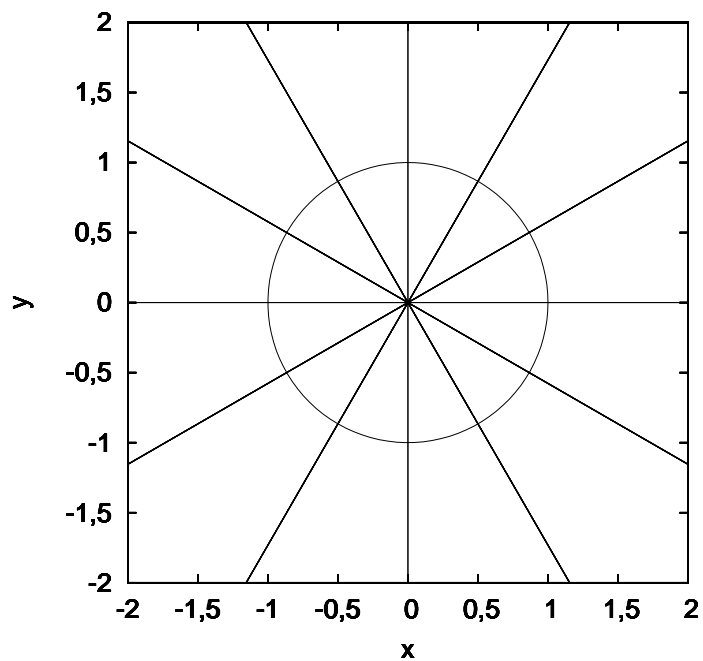


Abbildung 2.15.: Grenzyklus und Isochronen des Landau-Stuart-Oszillators mit Parameter $\alpha = 0$

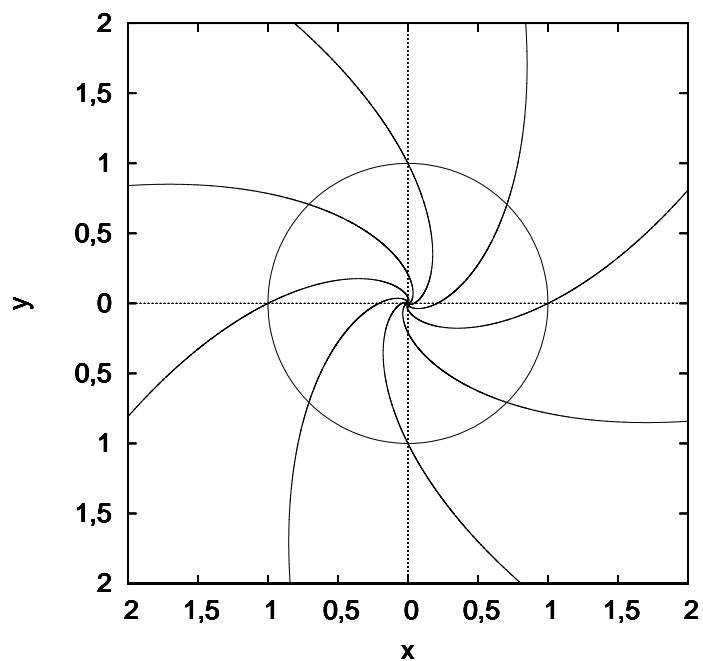


Abbildung 2.16.: Grenzyklus und Isochronen des Landau-Stuart-Oszillators mit Parameter $\alpha = 0,5$

definiert werden, welche mit konstanter Geschwindigkeit $\dot{\phi} = \eta - \alpha$ rotiert. Die Linien konstanter Phase ϕ sind die Isochronen. Diese sind nach Gleichung (2.105) durch

$$\theta - \alpha \ln R = \text{const} \quad (2.106)$$

gegeben. Im Falle $\alpha = 0$ sind die Isochronen durch den Koordinatenursprung laufende Geraden (vgl. Abbildung 2.15), während sie für $\alpha \neq 0$ gekrümmt sind. Die Abbildung 2.16 zeigt einige Isochronen für den Fall $\alpha = 0,5$.

2.5.3. Phasengleichung bei schwachen Störungen

Dieser Abschnitt betrachtet schwach gestörte Oszillatoren, für die, dem Ansatz Kuramotos [Kur84] folgend, eine approximative Phasengleichung hergeleitet wird. Die Systeme werden durch Gleichungen der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) + \epsilon \mathbf{p}(\mathbf{x}, t) \quad (2.107)$$

beschrieben, wobei der Parameter ϵ die Stärke der Störung bestimmt und $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t)$ eine Funktion ist, die die räumlich-zeitliche Abhängigkeit der Störung beschreibt. Das ungestörte System ($\epsilon = 0$) soll einen Grenzzyklus besitzen, in dessen Umgebung eine Phasendefinition gemäß Abschnitt 2.5.2 möglich ist. Für die Phase folgt dann

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.108)$$

wobei $\nabla_{\mathbf{x}}$ wie üblich den Gradienten bezüglich der Variablen \mathbf{x} bezeichnet. Die Substitution von Gleichung (2.107) in (2.108) ergibt die Beziehung

$$\frac{d\phi(\mathbf{x})}{dt} = \omega_O + \epsilon \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{x}, t). \quad (2.109)$$

Die Tatsache, dass die Störung schwach ist, ermöglicht es, eine geschlossene approximative Phasengleichung herzuleiten. Wegen der angenommenen schwachen Störung ist ein beliebiger auf der Isochronen $I(\phi)$ liegender Punkt \mathbf{x} nicht weit von $\mathbf{x}_O(\phi)$ entfernt, dem Schnittpunkt von $I(\phi)$ mit dem Grenzzyklus. Durch Ersetzung von \mathbf{x} durch $\mathbf{x}_O(\phi)$ auf der rechten Seite der Gleichung (2.109) folgt die geschlossene Gleichung für ϕ

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_O + \epsilon \Omega(\phi, t) \quad (2.110)$$

mit

$$\Omega(\phi, t) = \mathbf{Z}(\phi) \cdot \mathbf{\Pi}(\phi, t) \quad (2.111a)$$

$$\mathbf{Z}(\phi) = \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_O(\phi)} \quad (2.111b)$$

$$\mathbf{\Pi}(\phi, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}_O(\phi)). \quad (2.111c)$$

Die 2π -periodische Funktion $\mathbf{Z}(\phi)$ wird üblicherweise (phasenabhängige) Sensitivität oder Phasensensitivität [Win67, Kur84] genannt. Sie beschreibt die Empfindlichkeit der Phase

gegenüber der Störung und beschreibt neben ω_0 die intrinsischen Eigenschaften des Oszillators, d. h. sie ist unabhängig von der Störung und folgt alleine aus der Dynamik des *ungestörten* Systems. Die Sensitivität $\mathbf{Z}(\phi)$ ist für viele Oszillatoren analytisch nicht berechenbar und Kuramotos Ansatz liefert auch keine einfache numerische Berechnungsmethode. Diesen Nachteil hat die äquivalente Methode der Phasenreduktion, welche auf Malkin zurückgeht, nicht.

2.5.4. Malkins Methode

Dieser Abschnitt stellt die Methode von Malkin vor. Eine Herleitung kann z. B. auch in [HI97] gefunden werden.

Sei $\Delta\mathbf{x}$ eine infinitesimale Störung der Trajektorie $\mathbf{x}_O(t)$ (vgl. (2.97)) zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\mathbf{x}(t)$ sei die Trajektorie, welche von dieser gestörten Anfangsbedingung ausgeht. Mit der Definition $\Delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_O(t)$ folgt in erster Ordnung die Gleichung

$$\frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_O(t))\Delta\mathbf{x}(t), \quad (2.112)$$

wobei $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_O(t))$ die an der Stelle $\mathbf{x}_O(t)$ ausgewertete Jacobimatrix von \mathbf{F} bezeichnet. Die Phasenverschiebung sei durch $\Delta\phi = \phi(\mathbf{x}(t)) - \phi(\mathbf{x}_O(t))$ definiert. Eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung liefert

$$\Delta\phi(t) = \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t), \quad (2.113)$$

wobei $\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t))$ den an der Stelle $\mathbf{x}_O(t)$ ausgewerteten Gradienten von ϕ bezeichnet. Aus der Gleichung (2.101) folgt sofort die zeitliche Konstanz von $\Delta\phi$. Die Ableitung von Gleichung (2.113) nach der Zeit liefert somit

$$\begin{aligned} \frac{d\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t))}{dt} \cdot \Delta\mathbf{x}(t) &= -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t)) \cdot \frac{d\Delta\mathbf{x}(t)}{dt} \\ &= -\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t)) \cdot \mathbf{DF}(\mathbf{x}_O(t))\Delta\mathbf{x}(t) \\ &= -\mathbf{DF}^\dagger(\mathbf{x}_O(t))\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t)) \cdot \Delta\mathbf{x}(t), \end{aligned} \quad (2.114)$$

wobei \mathbf{DF}^\dagger die Transponierte der Jacobimatrix bezeichnet. Da diese Gleichung für beliebige infinitesimale Störungen Δx gelten muss, folgt die Identität

$$\frac{d\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t))}{dt} = -\mathbf{DF}^\dagger(\mathbf{x}_O(t))\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t)). \quad (2.115)$$

Ferner liefert (2.108) die Gleichung

$$\dot{\phi} = \nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(t)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_O(t)) = \omega_O, \quad (2.116)$$

welche für $t = 0$ die Anfangsbedingung für $\nabla_{\mathbf{x}}\phi$ liefert

$$\nabla_{\mathbf{x}}\phi(\mathbf{x}_O(0)) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_O(0)) = \omega_O. \quad (2.117)$$

Ein Vergleich mit (2.111b) liefert ein Differentialgleichungssystem mit einer Anfangsbedingung für $\mathbf{Z}(\phi)$

$$\frac{d\mathbf{Z}(\phi)}{d\phi} = -DF^\dagger(\mathbf{x}_O(\phi))\mathbf{Z}(\phi) \quad (2.118a)$$

$$\omega_O = \mathbf{Z}(0) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}_O(\phi = 0)). \quad (2.118b)$$

Da die Gleichungen (2.118) lediglich ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem sind, haben sie gegenüber Gleichung (2.111b) den Vorteil, numerisch leicht lösbar zu sein.

Beispiele

Im Falle des Landau-Stuart-Oszillators kann ein analytischer Ausdruck für $\mathbf{Z}(\phi)$ gefunden werden. Aus der Gleichung (2.105) folgt durch die Verwendung kartesischer Koordinaten

$$\phi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{\alpha}{2} \ln(x^2 + y^2). \quad (2.119)$$

Die Ableitungen

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} - \alpha \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (2.120a)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \alpha \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (2.120b)$$

liefern

$$\mathbf{Z}(\phi) = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) - \alpha \cos(\phi) \\ \cos(\phi) - \alpha \sin(\phi) \end{pmatrix}, \quad (2.121)$$

da auf dem Einheitskreis $\phi = \theta$ gilt.

In den Fällen des van-der-Pol-Oszillators (vgl. Gleichung (2.15)) und des Hodgkin-Huxley-Modells (vgl. Abschnitt 2.4.1) sind solche analytischen Berechnungen der Sensitivitäten nicht möglich. Numerisch sind sie jedoch nach der Gleichung (2.118) zu berechnen. Die Ergebnisse solcher Berechnung sind exemplarisch in den Abbildungen 2.18 und 2.19 dargestellt.

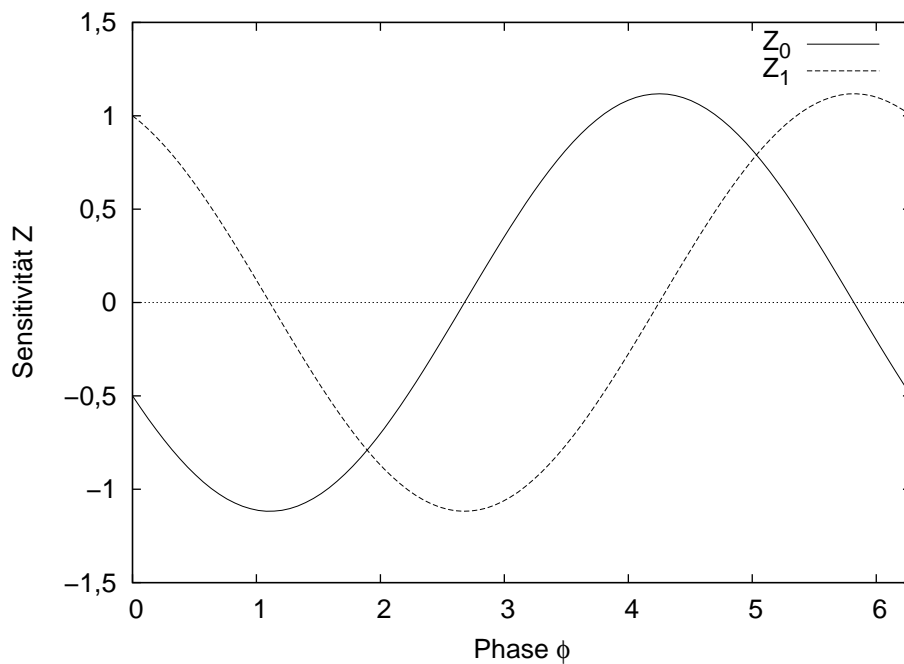


Abbildung 2.17.: Sensitivitäten des Landau-Stuart-Oszillators mit dem Parameter $\alpha = 0,5$. Die Größen Z_0 und Z_1 sind die beiden Komponenten des Vektors \mathbf{Z} (vgl. Abb. 2.16).

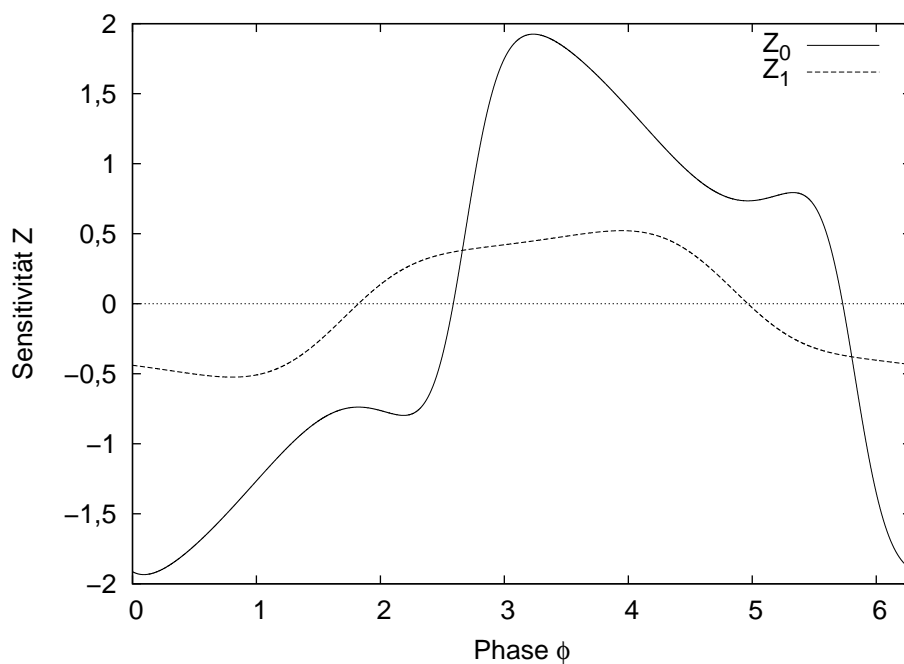


Abbildung 2.18.: Sensitivität des van-der-Pol-Oszillators mit den Parametern $\gamma = 0,75$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 1$ (vgl. Abb. 2.1).

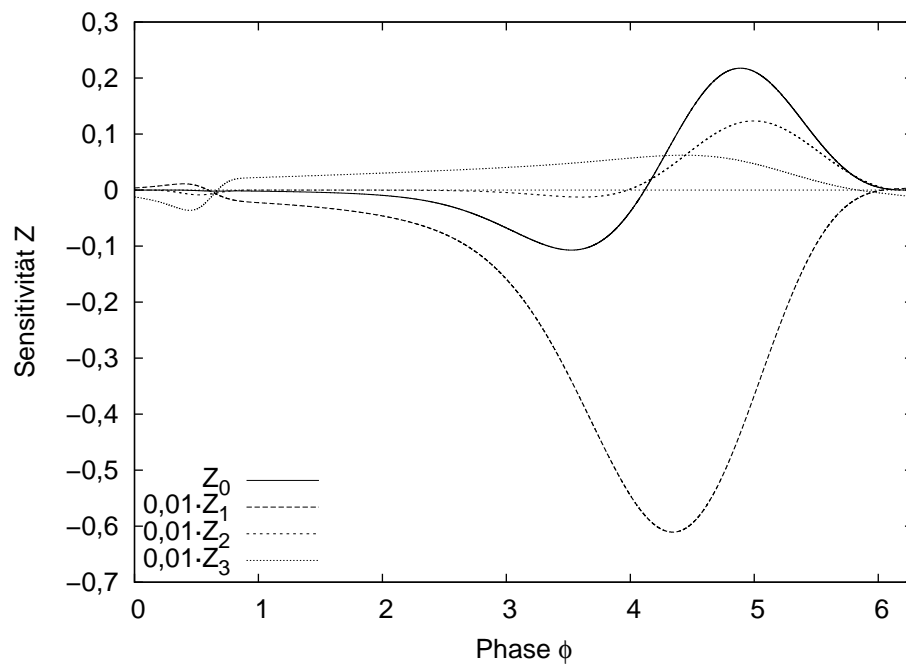


Abbildung 2.19.: Sensitivität des Hodgkin-Huxley-Modells bei einer Stromdichte $J_M = 10 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. (vgl. Abb. 2.9)

3. Stochastische Synchronisation

In diesem Kapitel wird ausführlich die bereits in Abschnitt 2.3.5 eingeführte stochastische Synchronisation behandelt. Gegenstand der folgenden Erläuterungen und Untersuchungen sind ungekoppelte oder nur schwach gekoppelte Systeme, welche einer *gemeinsamen externen* stochastischen Kraft ausgesetzt sind. Außer in der Physik [UMR04] und der Chemie [MI02, FNK03] sind solche Systeme insbesondere in den biologischen Wissenschaften von großer Bedeutung. Ökosysteme sind oft über große räumliche Ausdehnungen gleichen Fluktuationen der Umwelteinflüsse ausgesetzt. In [JW94] konnte gezeigt werden, dass externe stochastische Einflüsse einen synchronisierenden Effekt auf die Entwicklung des physiologischen Alters einer Baumpopulation haben.

Insbesondere in den Neurowissenschaften wurde in den letzten Jahren Augenmerk auf ähnliche Effekte gelegt. Im Gehirn sind häufig Neuronen mit einem Neuronenverband synaptisch gekoppelt und erhalten Eingangssignale in Form vieler unabhängiger synaptischer Ströme von diesem Verband. Diese Eingangssignale sind typischer Weise stark irregulär und können somit als stochastische Prozesse interpretiert werden. Die Summe dieser Eingangssignale ist nach dem zentralen Grenzwertsatz gaußverteilt. Folglich kann die Summe der synaptischen Ströme oftmals als *gaußscher stochastischer Prozess* modelliert werden.

In [MS95] wurde die Auswirkung von gaußischem Rauschen auf repetitiv spikende Neuronen aus dem Neocortex von Tieren *in vitro* untersucht. Die Neuronen wurden mit Gleichstromimpulsen zum periodischen Erzeugen von Aktionspotentialen angeregt und die mittleren Interspikeintervalle untersucht. Diese Untersuchungen wurden für mehrere Zellen wiederholt und die gemessenen mittleren Intervalle verglichen. Dabei stellte sich heraus, dass die Variabilität dieser mittleren Intervalle klein war. Jedoch summierten sich die Varianzen der Interspikeintervalle, so dass der Zeitpunkt des Auftretens des letzten Spikes der Sequenz einer starken Streuung unterlag. Nachdem ein computergeneriertes, gaußverteiltes Rauschen zu den konstanten Gleichstromimpulsen addiert wurde, konnten in wiederholten Experimenten nahezu gleiche Spikesequenzen erzeugt werden. Die Erkenntnis, dass neocorticale Neuronen die Fähigkeit besitzen, präzise zeitlich festgelegte Sequenzen von Aktionspotentialen erzeugen zu können, ist für die Untersuchung der Informationsverarbeitung [BRdRvSW91, BRdRvSW99] in Neuronen von Bedeutung.

Die Autoren von [NR02] untersuchten durch Rauschen induzierte Synchronisation ungekoppelter sensorischer Neurone. Diese Experimente führten sie *in vivo* an den Elektrozep-toren des Löffelstörs aus. Diese Rezeptoren sind spontan aktiv und führen biperiodische, verrauschte selbsterhaltende Oszillationen [NR01] aus. Da es darüber hinaus keine Anhaltspunkte für eine Kopplung der einzelnen Elektrozep-toren gibt, waren sie gut geeignete Studienobjekte. Die Axone (Afferenzen) der Rezeptoren leiten die Aktionspotentiale der Rezeptoren an das Gehirn weiter. Mit metallischen Mikroelektroden wurden die Aktionspotentiale an verschiedenen Afferenzen gemessen. Die Frequenz jeder einzelnen Afferenz war

nahezu konstant, jedoch streuten die Frequenzen verschiedener Afferenzen zwischen 30-80 Hz. Ein externes, computergeneriertes Rauschen mit Mittelwert Null wurde über an den Enden des Experimentalbeckens installierte Silberplatten als elektrisches Feld appliziert. Ab einer Standardabweichung $\sigma > 2,5 \mu\text{V}/\text{cm}$ des Rauschens änderte sich die Form der Spikesequenzen von verrauschten periodischen Oszillationen zu Bursts (schnelles Feuern wechselt sich mit Perioden der Ruhe ab). Für Werte $\sigma > 5-6 \mu\text{V}/\text{cm}$ traten diese Bursts in allen gemessenen Afferenzenpaaren nahezu gleichzeitig auf. Die Anzahl der Spikes innerhalb eines Burst war jedoch verschieden. Dieses Phänomen wird als Synchronisation durch Rauschen induzierter Bursts bezeichnet.

3.1. Stabilität des synchronisierten Zustandes

Entscheidend für die Synchronisierbarkeit zweier oder mehrerer Oszillatoren ist die Stabilität des Zustandes vollständiger Synchronisation (vgl. Abschnitt 2.3.4). Nachfolgend wird diese Stabilität für den Fall stochastischer Dynamiken behandelt. Das betrachtete System sei durch eine Langevingleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\xi}(t); \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

gegeben, wobei $\boldsymbol{\xi}(t)$ einen n -dimensionalen Zufallsprozess bezeichnet. Ferner seien zwei dicht benachbarte Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0)$ und $\mathbf{y}(0)$ gegeben und die Zeitentwicklung sei derselben Realisation des stochastischen Prozesses unterworfen. Die resultierenden Trajektorien seien mit $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ bezeichnet, die Differenz sei $\boldsymbol{\delta}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)$. Die Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ ist asymptotisch stabil, falls

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\delta}(t) = 0 \quad (3.2)$$

gilt, was nichts anderes bedeutet, als dass die Trajektorien vollständig synchronisieren. Die Differenzdynamik $\boldsymbol{\delta}(t)$ ist nicht explizit von $\boldsymbol{\xi}(t)$ abhängig, da $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ derselben Realisation von $\boldsymbol{\xi}(t)$ unterliegen und der stochastische Term somit bei der Differenzbildung verschwindet. Implizit hängt $\boldsymbol{\delta}(t)$ selbstverständlich über $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ von $\boldsymbol{\xi}(t)$ ab. Die zeitliche Entwicklung von $\boldsymbol{\delta}(t)$ ist durch die Gleichung

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{y}_{\boldsymbol{\xi}}(t)) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\xi}}(t)) \quad (3.3)$$

gegeben, wobei das tiefgestellte $\boldsymbol{\xi}$ die Abhängigkeit von $\boldsymbol{\xi}(t)$ hervorheben soll. Die Linearisierung um $\mathbf{x}(t)$ liefert

$$\dot{\boldsymbol{\delta}}(t) = \mathbf{DF}(\mathbf{x}_{\boldsymbol{\xi}}(t))\boldsymbol{\delta}(t), \quad (3.4)$$

wobei \mathbf{DF} die Jacobimatrix von \mathbf{F} bezeichnet. Das ist aber gerade die Gleichung (2.22). Somit gibt das Spektrum der Lyapunovexponenten Auskunft über die Vergrößerung oder Verkleinerung von $\boldsymbol{\delta}(t)$. Falls der maximale Lyapunovexponent λ_1 kleiner als Null ist, so gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} \boldsymbol{\delta}(t) = 0$ [Mar85, Pik92], d. h. die Trajektorien synchronisieren.

In diesem Zusammenhang sei darauf hingewiesen, dass es nicht a priori klar ist, ob sinnvolle Lyapunovexponenten einer stochastischen Dynamik definiert werden können, jedoch wird in [Arn98] gezeigt, dass dies für eine große Klasse stochastischer dynamischer Systeme der

Fall ist. Man beachte aber, dass die Lyapunovexponenten keine Auskunft über die zeitliche Entwicklung des Systems wie im deterministischen Fall geben, ob es also auf einen Fixpunkt zuläuft, periodisch oder chaotisch ist. Die Lyapunovexponenten haben lediglich Bedeutung hinsichtlich der *Differenzdynamik*, d. h. sie bestimmen nicht mehr die Entwicklung eines einzelnen Systems, sondern die Entwicklung eines Ensembles.

3.2. Synchronisation mit weißem Rauschen

Dieser Abschnitt behandelt die stochastische Synchronisation dynamischer Systeme durch externes gaußsches weißes Rauschen (vgl. Beispiel im Abschnitt 2.2.2). Viele natürlich vorkommende Systeme sind Fluktuationen ausgesetzt, welche verglichen mit den typischen Zeitskalen der Systeme sehr hochfrequent sind. D. h. die typische Zeitskala der Fluktuationen ist sehr viel kleiner als die der Systeme. In solchen Fällen können die Fluktuationen gut durch deltakorreliertes Rauschen, also weißes Rauschen, approximiert werden. Häufig sind diese Fluktuationen das Ergebnis von Überlagerungen vieler einzelner Einflüsse (vgl. z. B. die oben erwähnten synaptischen Ströme) und können somit nach dem zentralen Grenzwertsatz als gaußsch angenommen werden. Aus diesem Grunde werden in dieser Arbeit stets gaußsche Fluktuationen betrachtet.

Das in diesem Abschnitt verwendete Rauschen ist ein gaußscher stochastischer Prozess $\xi(t)$ mit Mittelwert Null, der Varianz σ^2 und der Autokorrelationsfunktion

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \sigma^2 \delta(t - s). \quad (3.5)$$

Da diese Arbeit neben anderen Oszillatoren auch Neuronenmodelle behandelt, deren synaptischen Ströme Fluktuationen unterliegen, werden hier lediglich stochastische Differentialgleichungen behandelt, bei denen das Rauschen nur in eine einzelne (die i -te) Komponente additiv einkoppelt. Die Langevingleichungen haben also die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit} \quad (3.6a)$$

$$\xi_j(t) = \begin{cases} \xi(t) & \text{falls } j = i \in \{0, \dots, n-1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.6b)$$

Im Falle eines Neuronenmodells repräsentiert diese i -te Komponente die Membranspannung. Da bei diesem Rauschen der einzige freie Parameter die Varianz σ^2 ist, werden im Folgenden die Synchronisationseigenschaften in Abhängigkeit von diesem Parameter an verschiedenen stochastischen dynamischen Systemen untersucht.

Zunächst wird die stochastische Synchronisation von Landau-Stuart-Systemen durch gaußsches weißes Rauschen beschrieben. Dieser Oszillator ist aufgrund seiner einfachen Dynamik der Startpunkt der Untersuchungen. Die betrachtete Dynamik ist durch die stochastische Differentialgleichung

$$\dot{x} = x - \eta y - (x^2 + y^2)(x - \alpha y) + \xi(t) \quad (3.7a)$$

$$\dot{y} = y + \eta x - (x^2 + y^2)(y + \alpha x) \quad (3.7b)$$

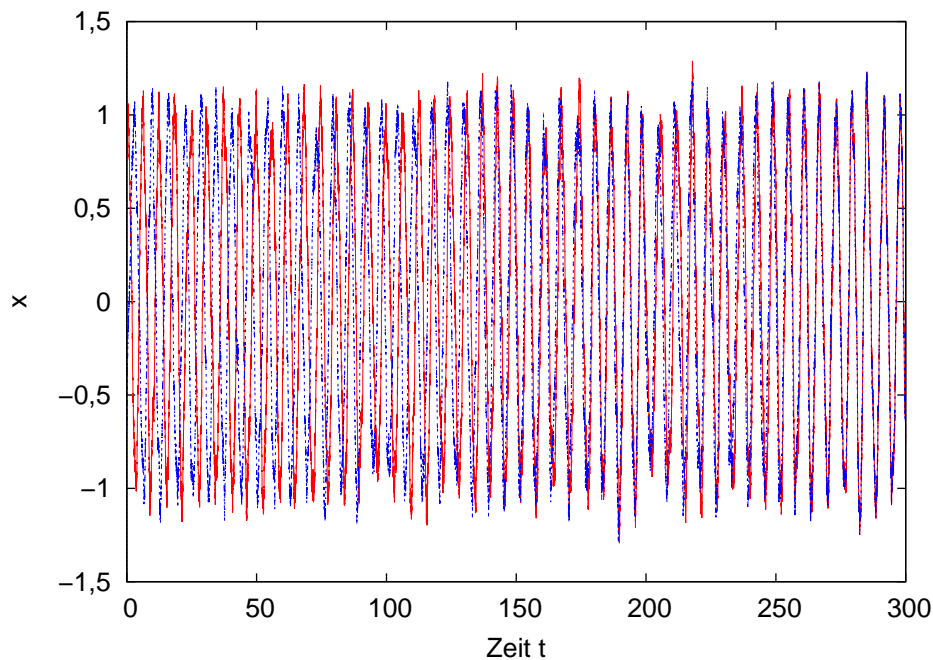


Abbildung 3.1.: Zeitentwicklung der x -Komponenten zweier Landau-Stuart-Oszillatoren, welche einem gemeinsamen Rauschen der Standardabweichung $\sigma = 0,2$ ausgesetzt sind und mit verschiedenen Anfangsbedingungen starten. Die Oszillatoren synchronisieren.

mit $\langle \xi(t) \rangle = 0$ und $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \sigma^2 \delta(t-s)$ definiert. Bei sämtlichen folgenden numerischen Untersuchungen wurde der Prädiktor-Korrektor-Integrationsalgorithmus aus dem Anhang B.3 zusammen mit dem Algorithmus für weißes Rauschen aus dem Anhang B.1 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ verwendet. Als erstes wird die Zeitentwicklung zweier identischer Landau-Stuart-Oszillatoren betrachtet, welche dem gleichen Rauschen ausgesetzt sind, jedoch mit verschiedenen Anfangsbedingungen starten. Die Abbildung 3.1 stellt exemplarisch eine solche Zeitentwicklung dar. Dabei wurde ein relativ starkes Rauschen mit der Standardabweichung $\sigma = 0,2$ verwendet. Wie der Abbildung zu entnehmen ist, verursacht dieses Rauschen eine deutliche Abweichung vom sinusförmigen Verlauf der Zeitreihe $x(t)$ eines ungestörten Landau-Stuart-Oszillators. Die Anfangsbedingungen beider Oszillatoren liegen auf dem Einheitskreis und sind um $\pi/4$ voneinander verschoben. Es ist gut zu erkennen, dass sich beide Zeitreihen mit zunehmender Zeit annähern, d. h. die beiden Oszillatoren synchronisieren unter dem Einfluss des gemeinsamen Rauschens. Zur weiteren Untersuchung des Phänomens wurde die zeitliche Entwicklung des metrischen Abstandes zweier Oszillatoren untersucht. Dabei startete einer der Oszillatoren auf dem Einheitskreis und der andere in einer zufälligen Richtung um 0,01 verschoben. Die zeitliche Entwicklung des Abstandes wurde für verschiedene Realisationen des Rauschens mit jeweils der Standardabweichung $\sigma = 0,2$ verfolgt. Die Abbildung 3.2 stellt mehrere Verläufe des Abstandes dar. Gut zu erkennen ist der mittlere exponentielle Abfall (man beachte die logarithmische Teilung der Ordinate) des Abstandes bei großen Zeiten. Dieses Verhalten ist mit der Tatsache erklärbar,

dass sich der Abstand δ für große Zeiten t im Mittel gemäß

$$\delta(t + \Delta t) = \delta(t) \exp(\lambda_1 \Delta t) \quad (3.8)$$

entwickelt, wobei λ_1 den größten Lyapunovexponenten bezeichnet. Die in Abbildung 3.2 zusätzlich eingezeichnete Gerade stellt den Verlauf der Funktion

$$\delta(t) = 0,01 \exp(\lambda_1 t) \quad (3.9)$$

dar, wobei der maximale Lyapunovexponent λ_1 über die numerische Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - \eta y - (x^2 + y^2)(x - \alpha y) + \xi(t) \\ \dot{y} &= y + \eta x - (x^2 + y^2)(y + \alpha x) \\ \dot{v}_0 &= [1 - (2x(x - \alpha y) + (x^2 + y^2))] v_0 - [\eta + (2y(x - \alpha y) - \alpha(x^2 + y^2))] v_1 \\ \dot{v}_1 &= [\eta - (2x(y + \alpha x) + \alpha(x^2 + y^2))] v_0 + [1 - (2y(y + \alpha x) + (x^2 + y^2))] v_1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

berechnet wurde (vgl. [WSSV85] und Anhang A). Dazu wurde (3.10) für $N = 36$ zufälligen Anfangsbedingungen mit $\|\mathbf{v}(0)\| = 1$ über eine Zeitspanne von $\Delta = 6283$ Zeiteinheiten integriert und jeweils die Größe

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln \|\mathbf{v}(\Delta)\| \quad (3.11)$$

gebildet. Das arithmetische Mittel $\lambda_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i$ wurde dann als maximaler Lyapunovexponent genommen. Die Gerade in Abbildung 3.2 scheint für große Zeiten gut den mittleren Abstand $\delta(t)$ zu approximieren. Eine deutliche Abweichung besteht lediglich bei Zeiten unterhalb von 200 Zeiteinheiten. Diese Abweichung bei kleinen Zeiten kann durch den Einfluss des zweiten Lyapunovexponenten λ_2 verstanden werden. Der Wert $\lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ aus der Definition (2.18) (vgl. Abschnitt 2.1.3) kann in einem n -dimensionalen System abhängig von der Orientierung des Vektors maximal n verschiedene Werte annehmen, nämlich gerade die n Lyapunovexponenten. Seien im vorliegenden zweidimensionalen System \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 die bis auf das Vorzeichen bestimmten Einheitsvektoren, welche $\lambda_1 = \lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_1)$ bzw. $\lambda_2 = \lambda(\mathbf{x}_0, \mathbf{e}_2)$ liefern, und $\boldsymbol{\delta}_0$ (vgl. Abschnitt 3.1) sei die Differenz der Oszillatoren zum Zeitpunkt Null. Die Differenz entwickelt sich dann gemäß

$$\boldsymbol{\delta}(t) \approx d_1 \exp(\lambda_1 t) \mathbf{e}_1 + d_2 \exp(\lambda_2 t) \mathbf{e}_2, \quad (3.12)$$

wobei $d_i = \boldsymbol{\delta}_0 \cdot \mathbf{e}_i$ gilt. Da $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ gilt, folgt für große Zeiten $\delta(t) = \|\boldsymbol{\delta}(t)\| \approx \delta_1 \exp(\lambda_1 t) \mathbf{e}_1$. Für kleine Zeiten fällt $\delta(t)$ aufgrund des λ_2 -abhängigen Terms in (3.12) schneller ab.

Der maximale Lyapunovexponent ist also offenkundig ein Maß für die Geschwindigkeit, mit der die Trajektorien der Systeme konvergieren. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage, wie λ_1 vom externen Rauschen ξ abhängt. Da die Varianz σ^2 der einzige frei wählbare Parameter bei dem hier verwendeten Rauschen ist, wird im Folgenden die Abhängigkeit von λ_1 von σ^2 behandelt. Die Abbildung 3.3 zeigt die Abhängigkeit von λ_1 von σ^2 für den Landau-Stuart-Oszillator mit verschiedenen Parametern α und η , die so gewählt sind, dass

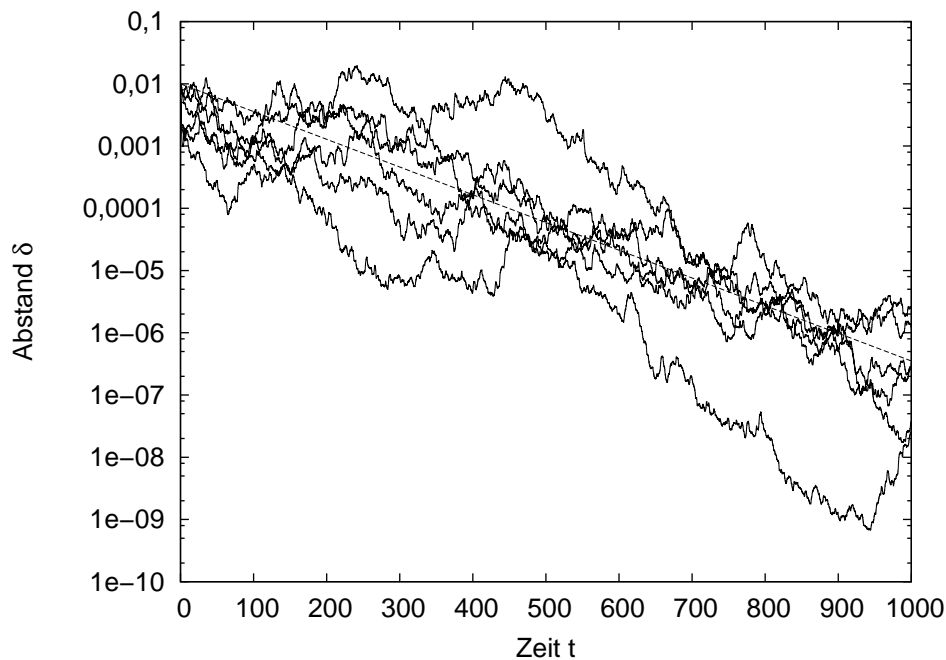


Abbildung 3.2.: Zeitliche Entwicklung der Abstandes zweier Landau-Stuart-Oszillatoren für verschiedene Realisationen des Rauschens zu verschiedenen Anfangsbedingungen mit dem Abstand 0,01.

die Phasengeschwindigkeit $\omega_O = \eta - \alpha = 1$ konstant bleibt. Für alle Parameterpaare α und η nimmt λ_1 näherungsweise linear mit σ^2 ab. Zusätzlich ist zu erkennen, dass λ_1 mit zunehmendem α negativer wird. Zur weiteren Untersuchung dieses Phänomens wurde die Abhängigkeit von λ_1 von η bei konstantem α betrachtet. Die Abbildung 3.4 zeigt exemplarisch diese Abhängigkeit für die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = 0,5$. Für kleine Varianzen σ^2 sind die zu einem gemeinsamen α gehörenden funktionellen Zusammenhänge nahezu identisch, unabhängig vom Parameter η , d. h. der maximale Lyapunovexponent hängt bei kleinen Intensitäten des Rauschens nur von σ^2 und α , nicht aber von seiner Frequenz $\omega_O = \eta - \alpha$ ab. Der Umstand, dass die Frequenz des Oszillators keine Rolle spielt, liegt an der Tatsache, dass die spektrale Dichte von weißem Rauschen über alle Frequenzen konstant ist. Das gilt bei der Verwendung von farbigem Rauschen nicht mehr und in Abschnitt 3.3 wird eine Frequenzabhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten nachgewiesen.

Während der Entstehung dieser Arbeit arbeiteten unabhängig auch andere Gruppen an diesem Thema. Die Autoren von [TT04] betrachteten die stochastische Synchronisation selbsterhaltender periodischer Oszillatoren in der Methode der Phasenreduktion (vgl. 2.5). Da die dort gewonnen Erkenntnisse auch zum Verständnis der hier gemachten Beobachtungen beitragen, werden die dort durchgeführten Betrachtungen und Berechnungen in einer an diese Arbeit angepassten Form vorgestellt.

Der Ausgangspunkt ist die Phasenreduktion des durch die Gleichungen (3.5) und (3.6) gegebenen Oszillators. Da das Rauschen lediglich in die nullte Komponente der stochastischen Differentialgleichung (3.6) einkoppelt, lautet die resultierende Gleichung der Phasendyna-

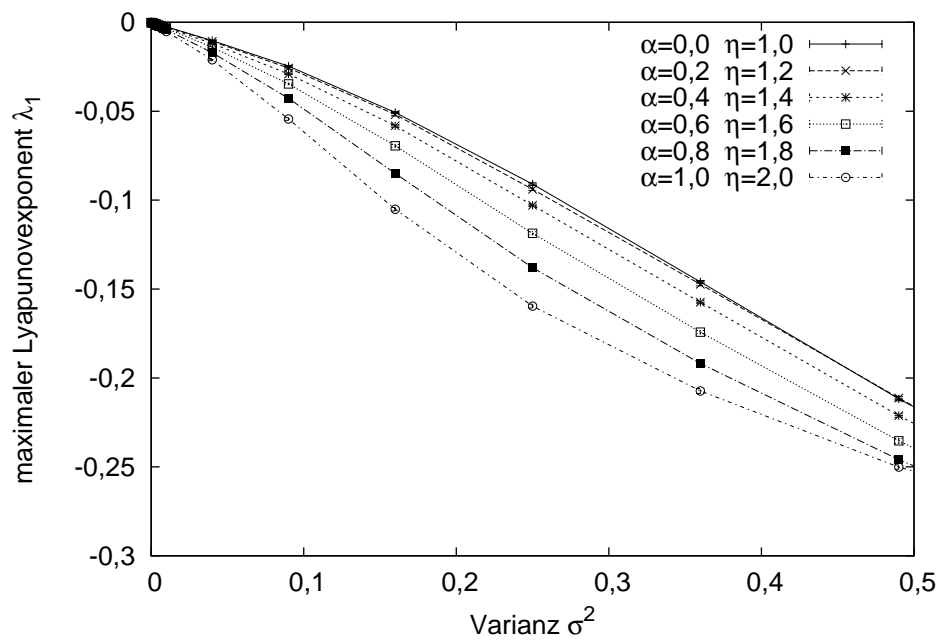


Abbildung 3.3.: Abhängigkeit von λ_1 von σ^2 für den Landau-Stuart-Oszillator mit verschiedenen Parametern α und η bei konstanter Phasengeschwindigkeit $\omega_O = 1$.

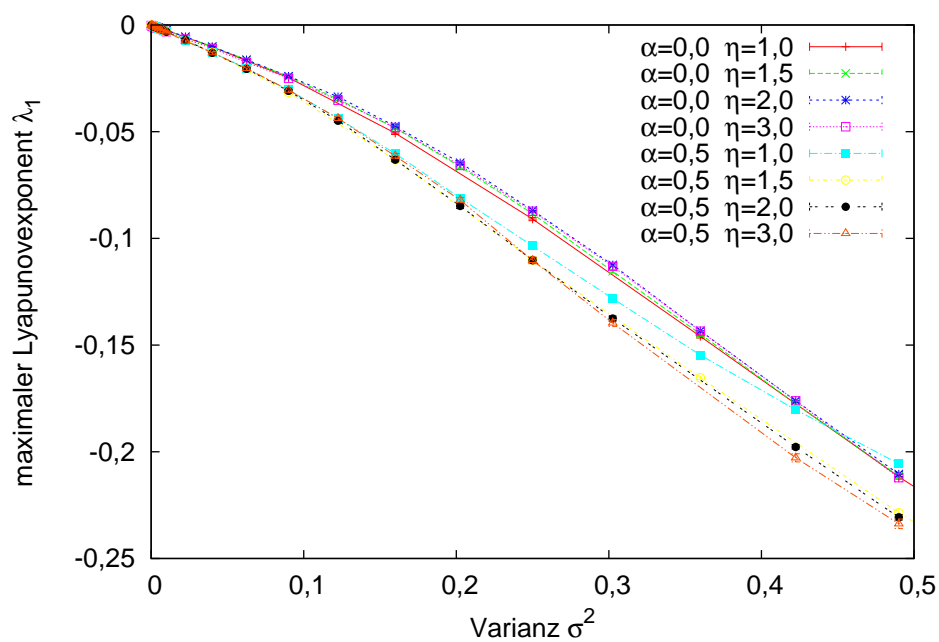


Abbildung 3.4.: Für kleine Varianzen σ^2 hängt λ_1 beim Landau-Stuart-Oszillator nicht von η ab. Diese Abhängigkeit ist für die Werte $\alpha = 0$ und $\alpha = 0,5$ mit jeweils mehreren Werten für η demonstriert.

mik

$$\dot{\phi} = \omega_O + Z_0(\phi)\xi, \quad (3.13)$$

wobei Z_0 die nullte Komponente der Phasensensitivität \mathbf{Z} (vgl. Gleichungen (2.111b) bzw. (2.118)) bezeichnet. Da hier weißes Rauschen als eine Idealisierung von farbigem Rauschen mit sehr kleiner Autokorrelationszeit betrachtet wird, wird (3.13) als Stratonovich SDGL interpretiert. Aus der Stratonovich-Interpretation folgt die äquivalente SDGL [KP92] für (3.13) in der Ito-Interpretation

$$\dot{\phi} = \omega_O + \frac{1}{2}Z_0 \frac{dZ_0}{d\phi} + Z_0(\phi)\xi. \quad (3.14)$$

Sei zusätzlich ein identischer Oszillator mit der Phase $\tilde{\phi}$ und $\chi = \tilde{\phi} - \phi \ll 1$ gegeben. Die Linearisierung der Gleichung für $\chi(t)$ um $\phi(t)$ liefert die Gleichung

$$\dot{\chi} = \left(\frac{1}{2}\sigma^2 (Z'_0 Z_0)' + Z'_0 \xi \right) \chi, \quad (3.15)$$

wobei der Strich ' die Ableitung nach ϕ bezeichnet. Der Lyapunovexponent ist nach 2.18 als

$$\lambda_\phi = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\chi(t)}{\chi(0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\ln(\chi(t)) - \ln(\chi(0))) \quad (3.16)$$

definiert. Der Lyapunovexponent ist also der zeitliche Mittelwert der Größe $\dot{y} := \frac{d \ln \chi}{dt}$. Mit der Variablentransformation $y := \ln \chi$ folgt aus der Gleichung (3.15) unter Beachtung der Ito-Formel (siehe z. B. [Gar04, KP92])

$$\dot{y} = \frac{1}{2}\sigma^2 ((Z'_0 Z_0)' - Z_0'^2) + Z'_0 \xi. \quad (3.17)$$

Nach der Ersetzung des zeitlichen Mittelwertes durch den Mittelwert von \dot{y} bezüglich des stochastischen Prozesses $\phi(t)$ ergibt sich der Lyapunovexponent zu

$$\begin{aligned} \lambda_\phi &= \frac{1}{2}\sigma^2 \langle ((Z'_0 Z_0)' - Z_0'^2) + Z'_0 \xi \rangle \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 \langle (Z'_0 Z_0)' - Z_0'^2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Dabei folgt die zweite Zeile aus der Identität $\langle Z'(\phi)\xi \rangle = 0$, welche gilt, da in der Ito-Interpretation ϕ und ξ statistisch unabhängig sind. Nachdem anfängliche Transienten abgeklungen sind, kann $\phi(t)$ als stationärer stochastischer Prozess mit der Dichtefunktion $p(\phi)$ betrachtet werden. Der Erwartungswert (3.18) kann nach der Gleichung (2.33) gemäß

$$\lambda_\phi = \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^{2\pi} p(\phi) ((Z'_0 Z_0)' - Z_0'^2) d\phi \quad (3.19)$$

berechnet werden. Die Dichtefunktion $p(\phi)$ ist im Allgemeinen unbekannt, mit der Annahme schwachen Rauschens kann die Phasengeschwindigkeit jedoch als näherungsweise konstant

betrachtet werden. Daraus folgt die Approximation von $p(\phi)$ durch die gleichverteilte Dichtefunktion $p(\phi) = \frac{1}{2\pi}$. Aus dieser Näherung folgt

$$\lambda_\phi \approx -\frac{1}{4\pi}\sigma^2 \int_0^{2\pi} Z_0'^2 d\phi \leq 0. \quad (3.20)$$

Dabei folgt der Wegfall des Terms $(Z_0'Z_0)'$ von (3.19) aus seiner 2π -Periodizität in ϕ . Mit diesem Ergebnis bewiesen die Autoren von [TT04], dass der synchronisierte Zustand stabil ist. Da darüber hinaus das Volumen des Phasenraums auf $0 \leq \phi, \tilde{\phi} < 2\pi$ begrenzt ist, besteht eine endliche Wahrscheinlichkeit, dass zwei Phasen, welche von beliebigen Anfangsbedingungen starten, nach endlicher Zeit in die Nähe des synchronisierten Zustandes gelangen, d. h. in physikalischen Situationen synchronisieren die Oszillatoren.

Die Gleichung (3.20) liefert zusammen mit dem analytischen Ausdruck für die Phasensensitivität \mathbf{Z} (2.121) des Landau-Stuart-Oszillators die Gleichung

$$\lambda_\phi = -\frac{\sigma^2}{4} (1 + \alpha^2). \quad (3.21)$$

Die Abbildung 3.5 zeigt die Abhängigkeit von λ_ϕ von σ^2 für verschiedene Parameter α und η . Die Geraden sind die theoretischen Verläufe nach der Gleichung (3.21). Die experimentellen Datenpunkte wurden durch die numerische Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega_O + Z_0(\phi)\xi \\ \dot{v} &= Z_0'(\phi)\xi v \end{aligned} \quad (3.22)$$

berechnet. Dazu wurde für $N = 36$ zufällige Anfangsbedingungen $0 \leq \phi < 2\pi$ und $v(0) = 1$ über eine Zeitspanne $\Delta = 1000 \frac{2\pi}{\eta - \alpha}$, also eintausend Perioden integriert und jeweils die Größe

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln |v(\Delta)| \quad (3.23)$$

gebildet. Das arithmetische Mittel $\lambda_\phi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i$ wurde dann als Lyapunovexponent genommen. Der Abbildung 3.5 ist zu entnehmen, dass die Formel (3.21) für kleine σ^2 eine gute Approximation darstellt. Mit diesem Ergebnis sind die Ergebnisse der Abbildungen 3.3 und 3.4 besser zu verstehen. Aus der Gleichung (3.21) geht die lineare Abhängigkeit von λ_ϕ von σ^2 hervor. Da bei einer nicht zu starken Krümmung der Isochronen angenommen werden kann, dass λ_1 monoton von λ_ϕ abhängt, ist die monotone Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten von der Varianz verständlich. Ferner ist λ_ϕ nach Gleichung (3.21) von α , nicht aber von η abhängig. Dies erklärt, warum der maximale Lyapunovexponent λ_1 bei kleinen σ^2 nicht von η abhängt und mit zunehmendem α negativer wird (vgl. Abbildung 3.4).

Von großer Bedeutung ist die Frage nach der strukturellen Stabilität des Phänomens der stochastische Synchronisation. Insbesondere die Robustheit des Phänomens gegenüber kleinen Unterschieden der Systeme, welche synchronisiert werden sollen, ist wichtig. In realen Systemen existieren niemals zwei völlig identische Oszillatoren. Die Beobachtbarkeit der stochastischen Synchronisation in Laborexperimenten hängt also entscheidend von dieser

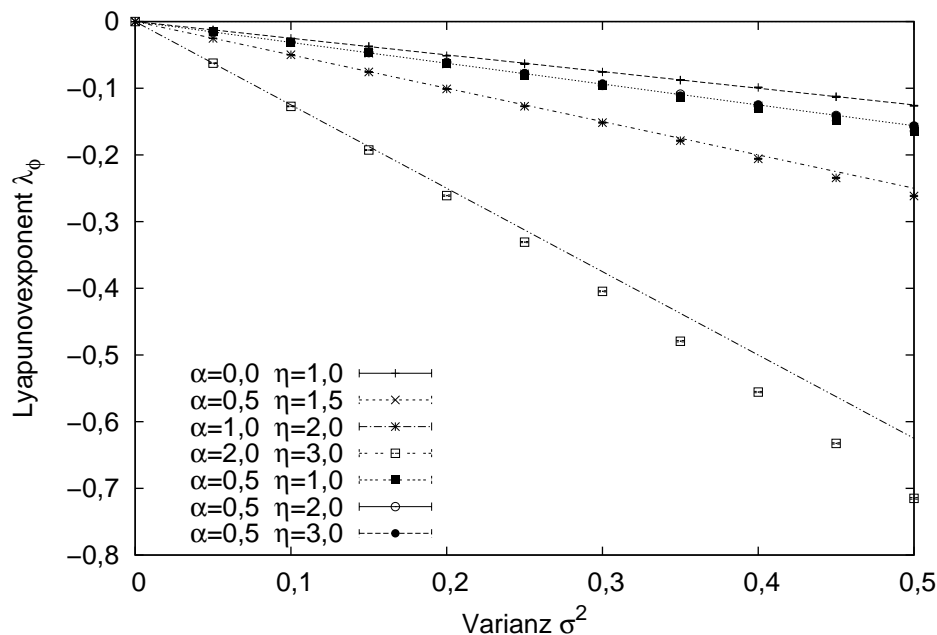


Abbildung 3.5.: Abhängigkeit des Lyapunovexponenten λ_ϕ von σ^2 für verschiedene Parameter α und η des Landau-Stuart-Oszillators. Die Geraden sind die theoretischen Verläufe nach der Gleichung (3.21).

Robustheit ab. Zur Untersuchung der strukturellen Stabilität wurde der mittlere Synchronisationsfehler \mathcal{E} zweier Oszillatoren mit leicht unterschiedlichen Parametern α und η untersucht. Der mittlere Synchronisationsfehler \mathcal{E} zwischen zwei Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ und $\mathbf{y}(t)$ zweier Oszillatoren ist durch

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\mathcal{T}} \sum_{i=0}^{\mathcal{T}-1} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_i\| \quad (3.24)$$

definiert, wobei \mathcal{T} die Anzahl der berechneten Punkte der Trajektorien und \mathbf{x}_i der i -te Punkt der Trajektorie ist. Die Abbildung 3.6 zeigt für verschiedene Parameter die Abhängigkeit des auf den Erwartungswert des Abstandes zweier zufällig auf dem Einheitskreis ausgewählten Punkte (siehe Anhang C) normierten Synchronisationsfehlers von der Standardabweichung σ . Der Parameter η des zweiten Systems wich bei den Berechnungen um jeweils 0,001, also um 0,1 %, von dem des ersten ab. In diesem Beispiel liegt der Synchronisationsfehler ab einer Standardabweichung $\sigma = 0,4$ unter 10 %. Zusätzlich ist zu erkennen, dass für $\sigma < 0,5$ der Synchronisationsfehler mit zunehmenden α abnimmt. Dies spiegelt die Beobachtung wider, dass λ_1 mit zunehmendem α negativer wird. Zusätzlich zu diesen Berechnungen zeigt die Abbildung 3.7 die Unabhängigkeit des Synchronisationsfehlers von η . Der Aufbau der Berechnungen war derselbe wie der oben erwähnte. Im Rahmen der Ungenauigkeiten können alle drei Kurven als identisch betrachtet werden. Somit kann das Phänomen der stochastischen Synchronisation von Landau-Stuart-Oszillatoren als strukturell stabil angesehen werden. Zusätzlich könnten bei einem Experiment die qualitativen Abhängigkeiten des maximalen Lyapunovexponenten von den Parametern α und η ermittelt

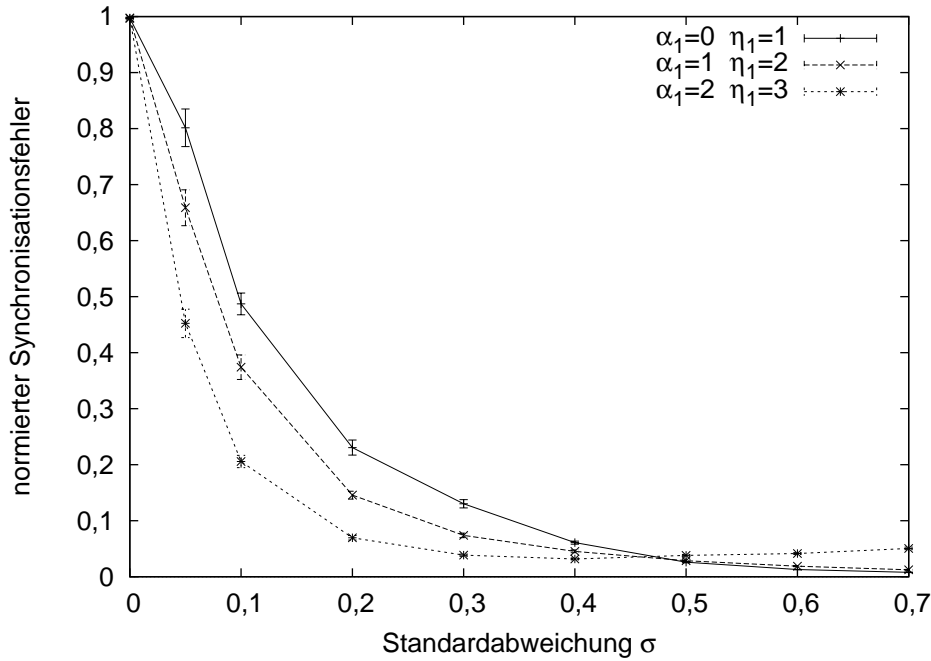


Abbildung 3.6.: Der normierte Synchronisationsfehler \mathcal{E} jeweils zweier schwach nichtidentischer Landau-Stuart-Oszillatoren in Abhängigkeit von σ . Die Werte für α sind identisch ($\alpha_1 = \alpha_2$), die Werte von η weichen jeweils um 0,001 voneinander ab ($\eta_1 - \eta_2 = 0,001$). Für $\sigma < 0,5$ nimmt der Synchronisationsfehler mit zunehmenden α ab, dies spiegelt die Beobachtung wider, dass λ_1 mit zunehmendem α negativer wird.

werden.

Bisher wurde lediglich der Landau-Stuart-Oszillator wegen seiner überschaubaren mathematischen Eigenschaften eingehend betrachtet. Das Phänomen der stochastischen Synchronisation ist keineswegs auf den Landau-Stuart-Oszillator beschränkt. Die Gleichung (3.21) impliziert unter sehr allgemeinen Bedingungen die stochastische Synchronisation von Oszillatoren unter dem Einfluss von schwachem weißem Rauschen. Die einzige Voraussetzung ist die Differenzierbarkeit der Phasensensitivität Z_0 .

Um zu untersuchen, inwieweit die bisher gewonnenen Erkenntnisse auf andere Oszillatoren, insbesondere auf Neuronenmodelle, übertragbar sind, werden im Folgenden sowohl der maximale Lyapunovexponent λ_1 als auch der Lyapunovexponent λ_ϕ zusammen mit dem theoretischen Wert aus der Gleichung (3.21) für vier verschiedene Oszillatoren behandelt. Die Phasensensitivitäten Z_0 wurden dabei jeweils gemäß der Gleichung (2.118) berechnet und sind im Anhang E graphisch dargestellt. Da Z_0 periodisch in 2π ist, kann Z_0 durch eine Fourierreihe dargestellt werden. Weil die Fourierkoeffizienten mit steigender Ordnung sehr schnell kleiner werden, kann Z_0 sehr gut mit einer geringen Anzahl Koeffizienten approximiert werden (s. Anhang D), welche bei den numerischen Untersuchungen durch eine diskrete Fouriertransformation [PTVF02, Bri92, FJ98] ermittelt wurden. Typischer Weise liegt die Anzahl der Koeffizienten zwischen eins und fünfzig. Diese so approximierten

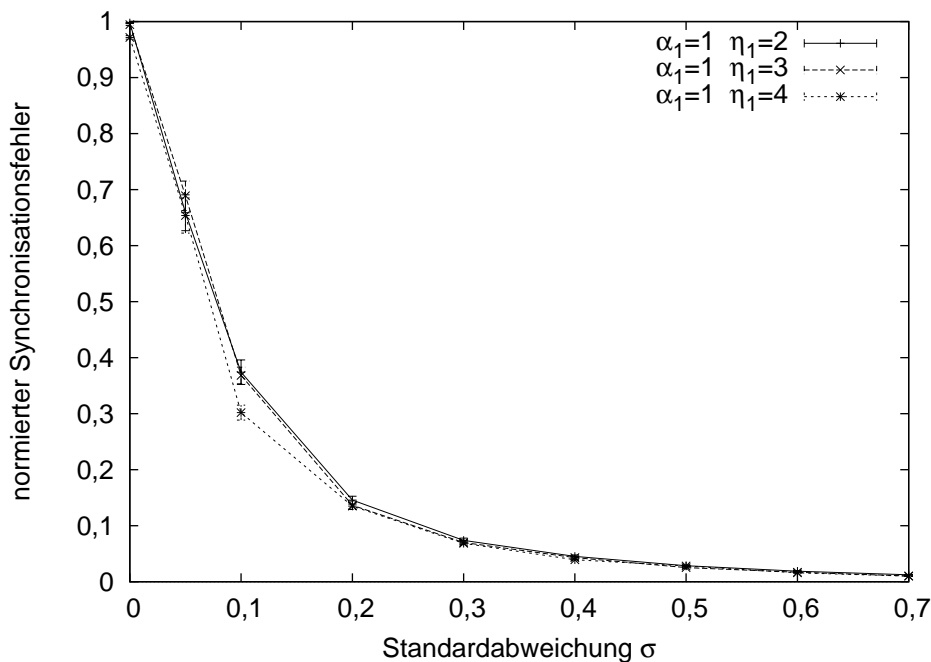


Abbildung 3.7.: Die Versuchsparameter sind wie in der Abbildung 3.6. Es ist gut die Unabhängigkeit des normierten Synchronisationsfehlers \mathcal{E} jeweils zweier schwach nichtidentischer Landau-Stuart-Oszillatoren von dem Parameter η zu erkennen. Die Tatsache, dass λ_1 nur von α , nicht aber von η abhängt, erweist sich somit als strukturell stabil.

Phasensensitivitäten wurden bei der Lösung der Gleichung (3.22) eingesetzt.

Als erster Oszillator sei hier das stochastisch getriebene van-der-Pol-System angeführt. Es wird durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y} = 2\gamma(1 - \beta y^2)\dot{y} - \omega_0^2 y + \xi(t) \quad (3.25)$$

(vgl. Gleichung (2.15)) beschrieben. Im Gegensatz zur Gleichung (2.15) wird die Elongation hier mit y statt x bezeichnet, damit im äquivalenten zweidimensionalen Differentialgleichungssystem erster Ordnung das Rauschen in der ersten Gleichung statt in der zweiten Gleichung einkoppelt. Dies hat offenkundig keine physikalischen Gründe, sondern stellt lediglich die Konsistenz mit bisherigen Ausführungen sicher. Bei den numerischen Untersuchungen wurden die „Standardparameter“ $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 1$ verwendet. Das resultierende äquivalente Gleichungssystem lautet somit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (1 - y^2)x - y + \xi(t) \\ \dot{y} &= x. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Somit folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= (1 - y^2)x - y + \xi(t) \\
 \dot{y} &= x \\
 \dot{v}_0 &= (1 - y^2)v_0 - (2xy + 1)v_1 \\
 \dot{v}_1 &= v_0
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

zur Berechnung des maximalen Lyapunovexponenten (vgl. Gleichung (3.10)) gemäß der im Anhang A erläuterten Methode. Dazu wurden die Gleichungen 3.27 mit einer Integrations-schrittweite $h = 0,001$ über 1000 Perioden integriert und die Größe Λ von Gleichung (3.11) gebildet. Der in Abbildung 3.8 abgebildete maximale Lyapunovexponent λ_1 ist der Mittelwert über 16 Anfangsbedingungen. Die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar. Der Lyapunovexponent λ_1 hängt wie bei dem Landau-Stuart-Oszillator nahezu linear von σ^2 ab. Der Lyapunovexponent λ_ϕ ist ebenfalls der Mittelwert zu 16 verschiedenen Anfangsbedingungen. Die experimentellen Werte stimmen für alle untersuchten Varianzen σ^2 sehr gut mit dem analytischen Verlauf gemäß der Gleichung (3.20) überein. Wie bei dem Landau-Stuart-Oszillator besteht eine klare Korrelation zwischen dem maximalen Lyapunovexponenten und dem Exponenten λ_ϕ und sie haben darüber hinaus die gleiche Größenordnung.

Als weiterer Oszillator wurde der FitzHugh-Nagumo-Oszillator (vgl. (2.92)) untersucht, wobei das Rauschen in die erste Komponente, also die des Membranpotentials E eingekoppelt wurde. Das Rauschen ist somit als Rauschen des Membranstroms I zu interpretieren. Die E -Komponente des FitzHugh-Nagumo-Oszillators mit den Parametern $I = 0,875$, $\varphi = 0,08$, $a = 0,7$ und $b = 0,8$ hat dieselbe Größenordnung (vgl. 2.10) wie die x -Komponente des van-der-Pol-Systems mit den oben angegebenen Parametern. Intuitiv könnte daher vermutet werden, dass Varianzen des Rauschens, die sich beim van der Pol-System als schwach herausgestellt haben (im Sinne der Anwendbarkeit der Gleichung (3.20)) auch für diesen Oszillator als schwach angesehen werden können. Ein Blick auf die Abbildung 3.8 verrät jedoch, dass der numerisch berechnete Wert für λ_ϕ schon für relativ kleine Varianzen $\sigma^2 > 0,05$ stark von dem theoretischen Wert nach der Formel (3.21) abweicht. Um numerische Fehler bei der Berechnung von λ_ϕ auszuschließen, wurde die zeitliche Entwicklung der Phasendifferenz $\chi(t) = \phi_2(t) - \phi_1(t)$ mit $\chi(0) = 0,1$ betrachtet. Die Zeitentwicklung der Phasen erfolgte dabei gemäß der Phasenapproximationsgleichung $\dot{\phi}_i = \omega + Z_0^{\text{FHN}}(\phi_i)\xi(t)$, mit der Phasensensitivität Z_0^{FHN} , welche dem FitzHugh-Nagumo-System mit obigen Parametern zugeordnet ist. Die Varianz des Rauschens betrug dabei $\sigma^2 = 0,1$. Die Abbildung 3.9 stellt die zeitliche Entwicklung von $\chi(t)$ zusammen mit den Funktionen $\chi^{\text{theo}}(t) = \chi(0) \exp(\lambda_\phi^{\text{theo}} t)$ bzw. $\chi^{\text{num}}(t) = \chi(0) \exp(\lambda_\phi^{\text{num}} t)$ dar, wobei der Wert $\lambda_\phi^{\text{theo}}$ nach der Gleichung (3.20) berechnet ist und $\lambda_\phi^{\text{num}}$ dem Datensatz, welcher in der Abbildung 3.8 rechts unten dargestellt ist, entnommen ist. Offenkundig gibt χ^{num} den mittleren zeitlichen Verlauf von $\chi(t)$ sehr viel besser wieder als der Abstand χ^{ana} , welcher deutlich (die Ordinate ist logarithmisch geteilt) zu langsam abfällt. Dies zeigt, dass der numerisch für λ_ϕ ermittelte Wert richtig ist und die Formel (3.20) also im Falle des FitzHugh-Nagumo-Oszillators (betragsmäßig) zu kleine Werte liefert.

Die Abhängigkeiten der Lyapunovexponenten λ_1 und λ_ϕ von der Standardabweichung des

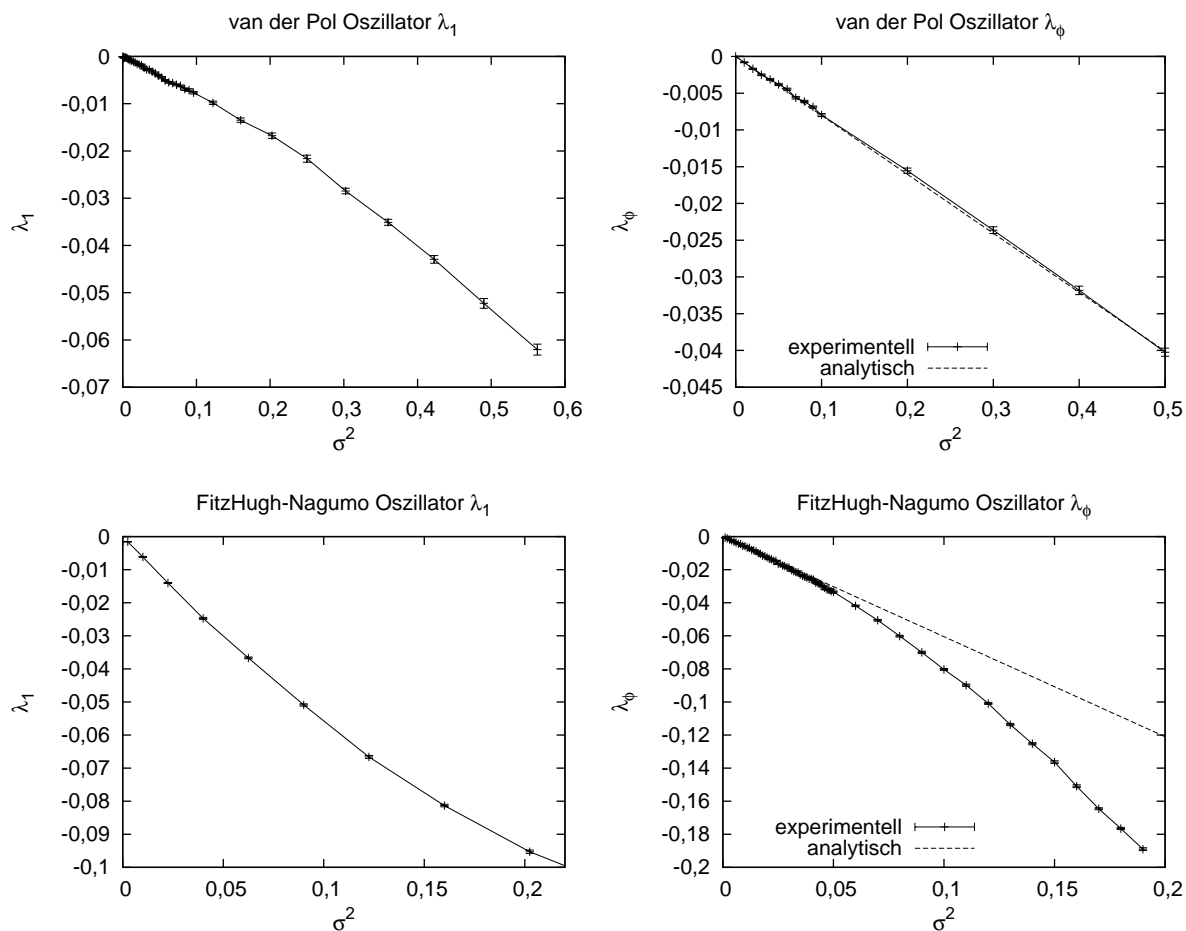


Abbildung 3.8.: Die obere Reihe zeigt die Lyapunovexponenten λ_1 bzw. λ_ϕ für den van-der-Pol-Oszillator mit den Parametern $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 1$. Der Wert λ_1 ist der Mittelwert über Werte von 16 verschiedenen Anfangsbedingungen, die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar. λ_1 hängt wie bei dem Landau-Stuart-Oszillator nahezu linear von σ^2 ab. Der Lyapunovexponent λ_ϕ ist ebenfalls der Mittelwert zu 16 verschiedenen Anfangsbedingungen. Die experimentellen Werte stimmen für alle untersuchten Varianzen σ^2 sehr gut mit dem analytischen Verlauf gemäß der Gleichung (3.20) überein. Die untere Reihe zeigt die Lyapunovexponenten λ_1 bzw. λ_ϕ für den FitzHugh-Nagumo-Oszillator mit den Parametern $I = 0,875$, $\varphi = 0,08$, $a = 0,7$ und $b = 0,8$. Der maximale Lyapunovexponent λ_1 verläuft für kleine σ^2 wiederum fast linear, dies gilt ebenso für den Lyapunovexponenten λ_ϕ , dieser weicht für größere σ^2 jedoch systematisch zu kleineren Werten hin ab. Dieses Phänomen wird im Text diskutiert.

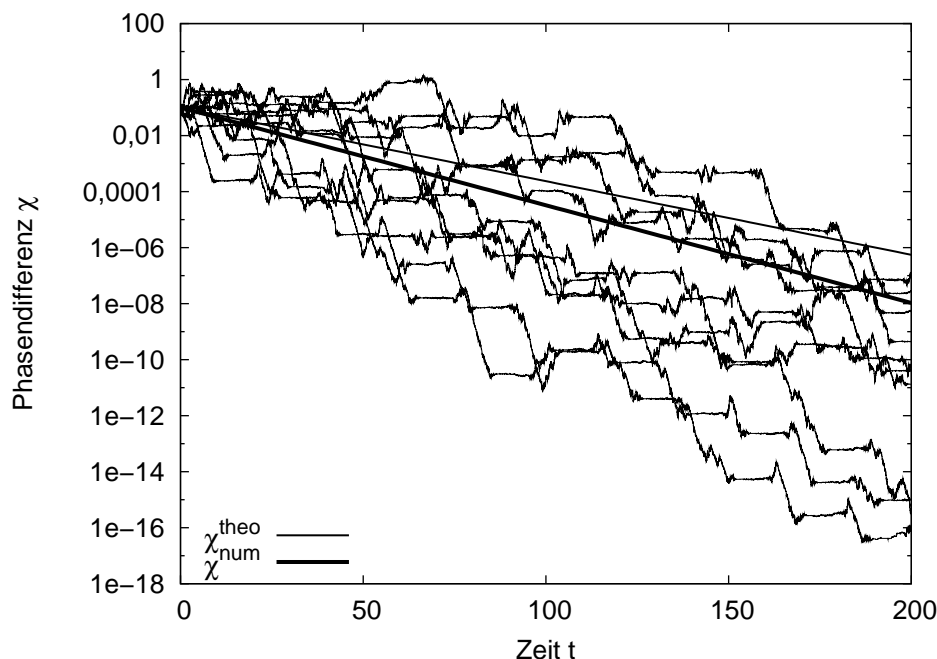


Abbildung 3.9.: Zeitliche Entwicklung der Phasendifferenz $\chi(t)$ der Phasen zweier von dem selben Rauschen getriebener FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren.

Rauschens σ^2 wurde noch bei zwei weiteren leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodellen untersucht, dem Hodgkin-Huxley-Neuron und dem Morris-Lecar-Neuron. Die Amplituden der Oszillationen beider Systeme liegen im Bereich 60 - 110 mV (vgl. die Abbildungen 2.10 und 2.11) relativ zum Ruhepotential, also deutlich höher als die des van der Pol- und des FitzHugh-Nagumo-Oszillators. Aus diesem Grunde wurden für die nachfolgend vorgestellten numerischen Untersuchungen, welche in der Abbildung 3.10 graphisch zusammengefasst sind, ein deutlich größeres Intervall für Werte der Varianz gewählt.

Im Falle des Hodgkin-Huxley-Neurons wurden die in Abschnitt 2.4.1 eingeführten „Standardparameter“ zusammen mit einer Membranstromdichte $J = 20 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ verwendet und das weiße Rauschen in die erste Komponente als Rauschen des Membranstroms eingekoppelt. Der maximale Lyapunovexponent λ_1 hängt bei kleinen Varianzen erwartungsgemäß näherungsweise linear von σ^2 ab. Der Lyapunovexponent λ_ϕ wird bis $\sigma^2 \approx 10 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$ gut durch die Formel (3.20) approximiert. Darüber hinaus liefert die Näherungsformel ebenso wie bei dem FitzHugh-Nagumo-Oszillator (betragsmäßig) zu kleine Werte.

Für das Morris-Lecar-Neuron wurde der zur Hopfbifurkation gehörende Parametersatz, welcher in der Tabelle 2.2 aufgelistet ist, gewählt und eine Membranstromdichte $J = 30 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ verwendet. Wie bei den anderen Systemen wurde ein Rauschen des Membranstroms in die erste Komponente eingekoppelt. Wiederum hängt λ_1 für niedrige Varianzen linear von σ^2 ab. Der Lyapunovexponent λ_ϕ ist für $\sigma^2 < 5 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$ ebenfalls eine lineare Funktion der Varianz, die von der Näherungsformel (3.20) sehr gut approximiert wird. Bei größeren Varianzen weichen die numerisch berechneten λ_ϕ zu negativeren Werten hin von der theoretischen Geraden ab. Dieses Verhalten ist auch bei dem Hodgkin-Huxley-Neuron zu

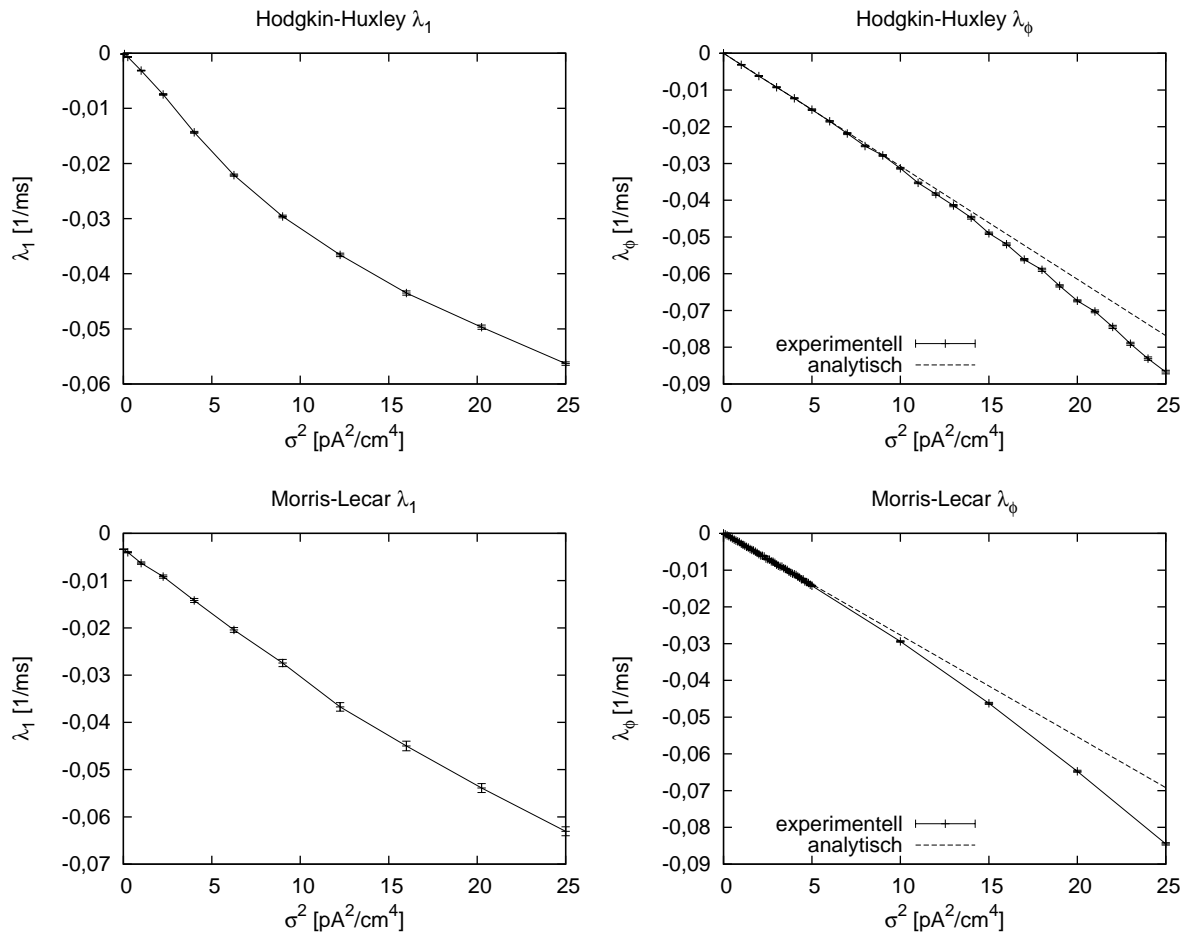


Abbildung 3.10.: Die obere Reihe zeigt die Lyapunovexponenten λ_1 und λ_ϕ für das Hodgkin-Huxley-System mit den Standardparametern aus dem Abschnitt 2.4.1 bei einer Stromdichte $J = 20 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Die untere Reihe zeigt die Lyapunovexponenten für das Morris-Lecar-Modell mit dem Parametersatz zur Hopf-Bifurkation bei einer Stromdichte von $J = 30 \mu\text{A}/\text{cm}^2$. Sowohl λ_1 bzw. λ_ϕ sind die Mittelwerte über Werte von 16 verschiedenen Anfangsbedingungen, die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar. Wie bei den anderen untersuchten Oszillatoren hängt für kleine Varianzen λ_1 linear von σ^2 ab. Bei dem Hodgkin-Huxley-System stellt die Gleichung (3.21) eine gute Approximation bei Varianzen $\sigma^2 < 10 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$ dar. Beim Morris-Lecar-System approximiert die Näherungsformel λ_ϕ nur gut bei Varianzen unterhalb von $5 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$, darüber hinaus gibt es deutliche Abweichungen.

beobachten, jedoch gibt es dort erst bei doppelt so hohen Varianzen eine klare Abweichung von den theoretischen Werten. Die bisher vorgestellten Untersuchungen zeigen, dass bei allen Oszillatoren sowohl λ_1 als auch λ_ϕ für nicht zu große Varianzen des Rauschens linear von σ^2 abhängen. Der nach der Formel (3.20) bestimmte Exponent λ_ϕ kann bei Oszillatoren,

deren Amplituden die gleiche Größenordnung haben, allerdings Approximationen deutlich verschiedener Güte liefern. Weiterhin weichen die numerisch berechneten Lyapunovexponenten λ_ϕ bei allen untersuchten Oszillatoren systematisch zu negativeren Werten hin von den durch Gleichung (3.20) definierten Geraden ab. Es stellt sich in natürlicher Weise die Frage, welche Faktoren dieses Verhalten verursachen. Eine Analyse der Herleitung der Näherungsformel zeigt, dass alle Schritte bis inklusive der Gleichung (3.19) exakt sind. Lediglich beim Übergang zur Gleichung (3.20) wird die Dichtefunktion $p(\phi)$ durch Gleichverteilung $p(\phi) = 1/2\pi$ angenähert. Die Vermutung, dass diese Näherung bei manchen Oszillatoren, so z. B. die oben betrachteten FitzHugh-Nagumo- und Morris-Lecar-Oszillatoren, nicht gerechtfertigt ist, liegt also nahe. Zur Klärung dieser Vermutung wurden die Dichtefunktionen der vier obigen Systeme für jeweils einen Wert der Varianz numerisch durch ein Binning-Verfahren bestimmt. Für den van der Pol- und den FitzHugh-Nagumo-Oszillator wurde die Varianz $\sigma^2 = 0,05$ gewählt, ein Wert, bei dem λ_ϕ des van-der-Pol-Systems noch gut approximiert wird, der Lyapunovexponent des FitzHugh-Nagumo-Oszillators aber beginnt, von der Näherungsgeraden abzuweichen. Im Falle der beiden anderen Neuronenmodelle wurde die Varianz $\sigma^2 = 5\text{pA}^2/\text{cm}^4$ aus analogem Grunde gewählt. Die Ergebnisse dieser Prozedur sind in der Abbildung 3.11 aufgetragen. Offenkundig ist sowohl bei dem van-der-Pol-Oszillator als auch bei dem Hodgkin-Huxley-Neuron die Näherung der Gleichverteilung $p(\phi) = 1/2\pi$ gerechtfertigt. Dies gilt insbesondere für ersteren Oszillator. Bei Letzterem weicht $p(\phi)$ für $4 \lesssim \phi \lesssim 6$ zwar erkennbar von der Horizontalen $p(\phi) = 1/2\pi$ ab, jedoch im Vergleich zum Morris-Lecar Neuron und zum FitzHugh-Nagumo-Oszillator nur relativ gering. Dies erklärt, warum der Lyapunovexponent λ_ϕ des Hodgkin-Huxley-Systems im betrachteten Intervall $\sigma^2 \in [0 : 25] \text{pA}^2/\text{cm}^4$ zwar von den theoretischen Werten abweicht, die Abweichung jedoch schwächer als bei dem Morris-Lecar Neuron ist.

Es bleibt noch die Frage zu klären, warum λ_ϕ von der Approximationsformel bei allen untersuchten Oszillatoren systematisch zu negativeren Werten hin abweicht. Eine Untersuchung der in Anhang E dargestellten Phasensensitivitäten führt zu einer qualitativen Erklärung des Phänomens. Die Phasensensitivitäten des FitzHugh-Nagumo- und des Morris-Lecar-Systems sind für große Bereiche des Intervalls $[0 : 2\pi]$ relativ klein, während sie in anderen Bereichen einen Peak aufweisen. Die Abweichung der Dichtefunktion $p(\phi)$ von der Gleichverteilung $p(\phi = 1/2\pi)$ zu erhöhten Werten ist gerade an diesen Stellen besonders stark, so dass für die Integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_0'^2 d\phi < \int_0^{2\pi} p(\phi)(Z_0'^2 - (Z_0'Z_0)') d\phi \quad (3.28)$$

gilt und der Betrag des Lyapunovexponenten λ_ϕ somit zu klein geschätzt wird.

3.2.1. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass periodische Oszillatoren durch schwaches additives weißes Rauschen synchronisierbar sind. Für kleine Varianzen des Rauschens hängt der maximale Lyapunovexponent λ_1 und der der Phase ϕ zugehörige Lyapunovexponent λ_ϕ linear von σ^2 ab. Für diesen Bereich existiert eine gute Näherungsformel für λ_ϕ . Der Bereich, in welchem das Rauschen als schwach betrachtet werden kann, kann sich bei Oszillatoren, deren Amplituden die

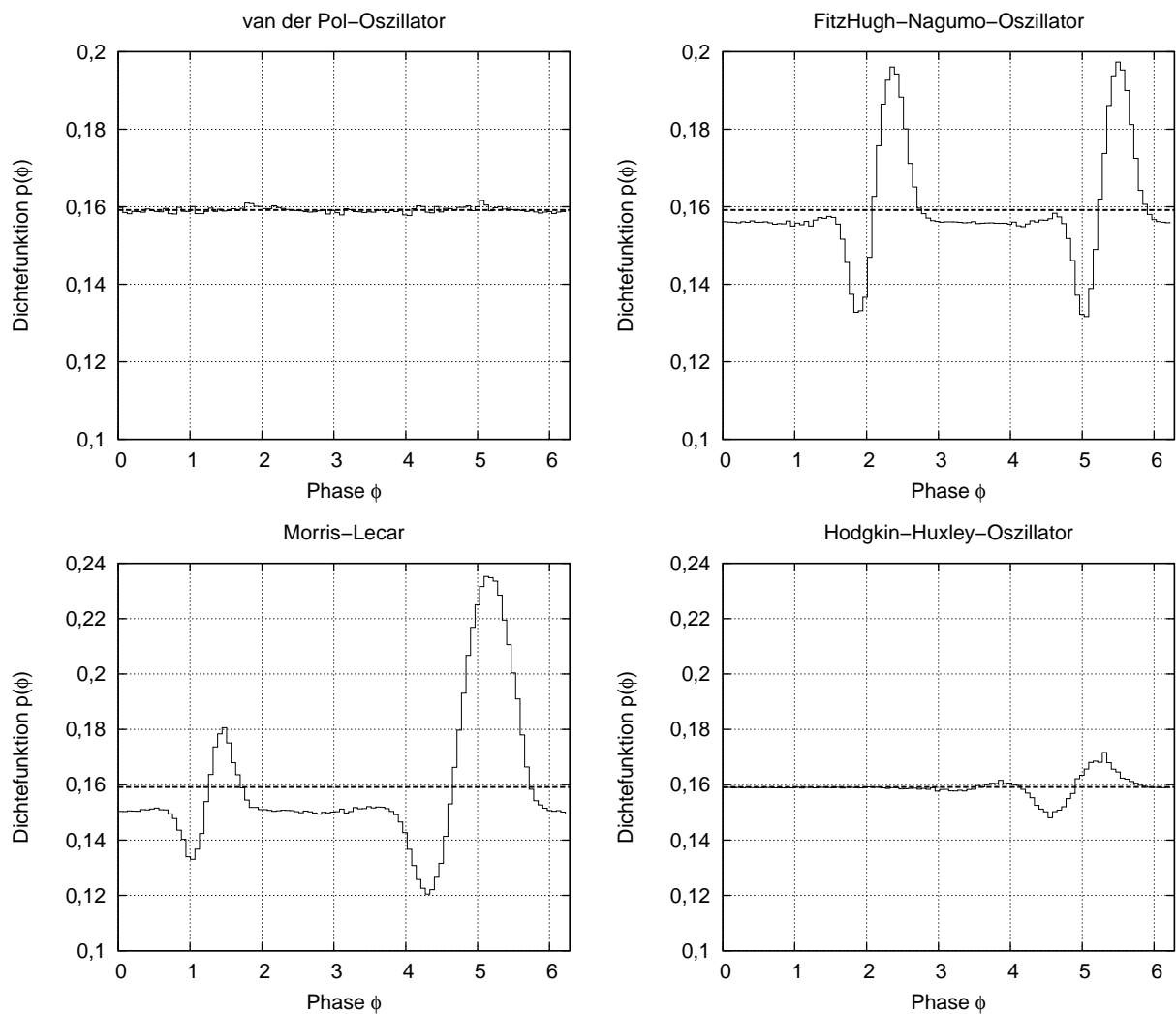


Abbildung 3.11.: Die Dichtefunktionen $p(\phi)$ der Oszillatorphasen. Die Gleichverteilung $p(\phi) = 1/2\pi$ ist durch die fett gestrichelte, horizontale Linie markiert. Bei dem van der Pol- und dem FitzHugh-Nagumo-System wurde eine Varianz des Rauschens von $\sigma^2 = 0,05$ gewählt. Bei dem Hodgkin-Huxley- und dem Morris-Lecar-Neuron betrug die Varianz $\sigma^2 = 5 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$. Bei dem FitzHugh-Nagumo- und dem Morris-Lecar-System weicht die Dichtefunktion deutlich von der Gleichverteilung ab. Die Peaks in den Verteilungen befinden sich dort, wo auch die Phasensensitivitäten (vgl. Anhang E) einen Peak haben.

gleiche Größenordnung haben, deutlich voneinander unterscheiden. Je spitzer geformte Extrema die Phasensensitivität aufweist, desto stärker weicht die Dichtefunktion der Phase von der Gleichverteilung ab. Dies führt zu negativeren λ_ϕ als die Werte der Näherungsformel. Bei den untersuchten leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodellen stellt die Näherungsformel in physiologisch sinnvollen Bereichen eine gute Approximation dar. Die strukturelle Stabilität des Phänomens der stochastischen Synchronisation durch weißes Rauschen wurde am Beispiel des Landau-Stuart-Oszillators gezeigt. Die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten von den Parametern α und η des Landau-Stuart-Oszillators spiegelt sich in der Abhängigkeit des normierten Synchronisationsfehlers von diesen Parametern wider. Somit ließen sich die hier betrachteten Aspekte auch in Laborexperimenten beobachten.

3.3. Synchronisation mit farbigem Rauschen

Im vorherigen Abschnitt wurde die stochastische Synchronisation dynamischer Systeme durch externes gaußsches weißes Rauschen behandelt. Die Approximation von in natürlichen Systemen vorkommenden Fluktuationen durch weißes Rauschen ist jedoch nur dann zulässig, wenn deren Autokorrelationszeiten verglichen mit den typischen Zeitskalen der Systeme sehr kurz sind. Diese Approximation ist jedoch oft nicht gerechtfertigt. Ist z. B. ein Neuron mit einem Neuronenverband synaptisch gekoppelt, so erhält dieses Neuron viele synaptische Ströme, die sich zu einem gaußschem Eingangssignal addieren. Dieses Signal ist typischerweise stark irregulär und kann oft als Rauschen modelliert werden (vgl. die Einleitung zu diesem Kapitel und [MS95]). Da jedoch die Dynamik der Neuronen im Neuronenverband ähnliche oder gar gleiche Zeitskalen aufweist wie das mit dem Verband gekoppelte Neuron, kann das Eingangssignal a priori nicht als weiß angenommen werden. Daraus resultiert die Notwendigkeit des Studiums des Einflusses von farbigem Rauschen auf die Dynamik von Neuronen. Dieser Abschnitt betrachtet die stochastische Synchronisation periodischer Oszillatoren durch farbiges Rauschen, welches durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (vgl. Abschnitt 2.2.2) modelliert wird.

Wie im vorherigen Abschnitt werden auch hier Systeme betrachtet, bei denen das Rauschen lediglich in die nullte Komponente einkoppelt. Die resultierenden stochastischen Differentialgleichungen haben also die Form

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \zeta(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ mit} \quad (3.29a)$$

$$\zeta_j(t) = \begin{cases} \zeta(t) & \text{falls } j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.29b)$$

wobei $\zeta(t)$ den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess bezeichnet. Dieser hat die statistischen Eigenschaften

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad (3.30a)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right), \quad (3.30b)$$

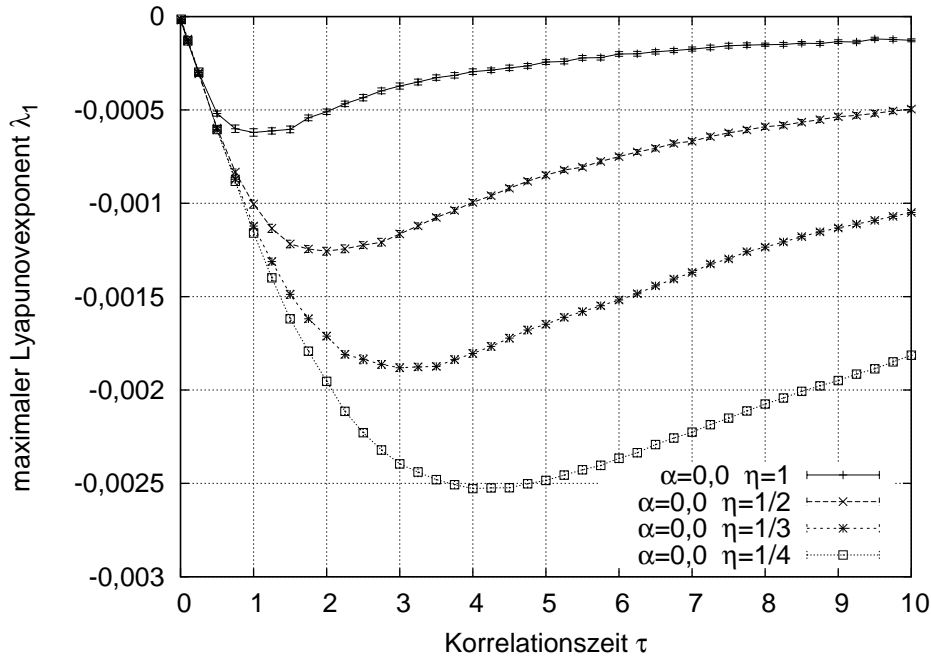


Abbildung 3.12.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter η und $\alpha = 0$ des Landau-Stuart-Oszillators und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$. Das Minimum ist jeweils bei $\tau_{min} = 1/\eta$. λ_1 wird mit abnehmender Frequenz $\omega_O = \eta - \alpha$ negativer.

wobei τ die Korrelationszeit und σ^2 die Varianz bezeichnen. Aus der Autokorrelation folgt durch eine Fouriertransformation die spektrale Dichte

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\tau^{-1} + \omega^2\tau}. \quad (3.31)$$

Bei den hier beschriebenen Untersuchungen liegt das Hauptaugenmerk auf der Abhängigkeit der Lyapunovexponenten λ_1 und λ_ϕ von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Die Abhängigkeit der Lyapunovexponenten von der Varianz σ^2 wird nur für den exemplarischen Fall des Landau-Stuart-Oszillators dargestellt. Dieser Oszillator ist wegen seiner überschaubaren mathematischen Eigenschaften wiederum der Ausgangspunkt der Untersuchungen dieses Abschnitts.

Die betrachtete stochastische Differentialgleichung ergibt sich aus dem Gleichungssystem (3.7) durch die Substitution von $\xi(t)$ durch $\zeta(t)$. Der maximale Lyapunovexponent λ_1 kann nach derselben Substitution in der Gleichung (3.10) mit dem im Anhang A beschriebenen Verfahren numerisch berechnet werden. Die Abbildung 3.12 stellt die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter η und $\alpha = 0$ und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$ dar. Die aufgetragenen Werte sind die Mittelwerte von $N = 25$ nach der Formel (3.11) berechneten einzelnen Exponenten und die Fehlerbalken stellen die zugehörigen statistischen Fehler des Mittelwertes

dar. Bei allen dargestellten zu verschiedenen Parameterpaaren α und η gehörenden λ_1 streben diese sowohl für sehr kleine τ als auch für sehr große τ gegen Null. Die Lyapunovexponenten sind alle negativ, d. h. Ensembles dieser Oszillatoren, welche mit einem gemeinsamen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess getrieben werden, synchronisieren. Es ist auffällig, dass alle Kurvenverläufe ein Minimum an der Stelle $\tau_{min} = 1/\eta$ annehmen. Da jeweils $\alpha = 0$ ist, gilt auch $\tau_{min} = 1/\omega_O$. Einen ersten Hinweis auf die Ursache dieses Phänomens liefert die in der Abbildung 2.6 dargestellte Abhängigkeit der spektralen Dichte des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses von der Korrelationszeit τ . Die gute Übereinstimmung der Kurvenverläufe bis auf einen (negativen) Faktor ist auffällig. Insbesondere haben die zu verschiedenen Frequenzen ω gehörenden Kurven ein Maximum bei $\tau_{max} = 1/\omega$. Das bedeutet, dass der maximale Lyapunovexponent eines mit einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess getriebenen Landau-Stuart-Oszillators mit einer Eigenfrequenz $\eta - \alpha$ ein Minimum hat, falls die Korrelationszeit τ so ist, dass die spektrale Dichte $S(\eta - \alpha)$ maximal ist. Der Oszillator wird dann gewissermaßen bei seiner Eigenfrequenz am stärksten „angeregt“. Die Tatsache, dass λ_1 ein Minimum aufweist, kann also als ein Resonanzphänomen interpretiert werden. Zusätzlich geht aus der Abbildung 3.12 hervor, dass die spektrale Dichte umso kleiner ist, je größer die betrachtete Frequenz ist. Darüber hinaus kann der Abbildung 3.12 entnommen werden, dass λ_1 mit abnehmender Oszillatorfrequenz $\omega_O = \eta - \alpha$ negativer wird. Dies wird anscheinend durch die größte spektrale Dichte des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei niedrigeren Frequenzen verursacht. Zusammenfassend gilt also: Je größer die spektrale Dichte bei der Eigenfrequenz des Landau-Stuart-Oszillators ist, desto negativer ist der maximale Lyapunovexponent.

Nachdem der Einfluss der spektralen Dichte auf λ_1 diskutiert wurde, stellt sich in natürlicher Weise die Frage, wie der maximale Lyapunovexponent von der Korrelationszeit bei konstanter Oszillatorfrequenz aber verschiedenen Parameterpaaren α und η abhängt. Die Abbildung 3.13 stellt vier solcher Abhängigkeiten dar. Die aufgetragenen Werte sind wie in der Abbildung 3.12 Mittelwerte über $N = 25$ Einzelwerte und entsprechend stellen die Fehlerbalken den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar. Die Wertepaare α und η sind jeweils so gewählt, dass die Oszillatorfrequenz $\omega_O = \eta - \alpha = 1$ ist. Es ist deutlich zu erkennen, dass die λ_1 zu allen vier Parameterpaaren ein Minimum bei der Eigenfrequenz des Landau-Stuart-Oszillators annehmen. D. h. das Minimum liegt tatsächlich bei $\tau_{min} = 1/\omega_O$. Diese Tatsache war aus der Abbildung 3.12 alleine noch nicht zu entnehmen. Zusätzlich geht aus der Abbildung 3.13 hervor, dass λ_1 mit zunehmendem α , ebenso wie im Falle des weißen Rauschens (vgl. Abbildung 3.3), negativer wird.

Nun bleibt noch die Abhängigkeit vom letzten noch nicht betrachteten Parameter der Varianz σ^2 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses zu untersuchen. Die Abbildung 3.14 stellt die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Varianz σ^2 mit den Parametern $\alpha = 0$, $\eta = 1$ und $\tau = 1$ dar. Der Exponent λ_1 hängt wie bei weißem Rauschen linear von der Varianz ab. Bei anderen Parameterkombinationen ändert sich die qualitative Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten von der Varianz nicht. Aus diesem Grunde wird in dieser Arbeit diese Abhängigkeit auch lediglich mit den oben genannten Parametern vorgestellt.

Während der Entstehung dieser Arbeit arbeiteten unabhängig auch die Autoren von [TT06] an dem Thema der stochastischen Synchronisation periodischer Oszillatoren durch farbiges

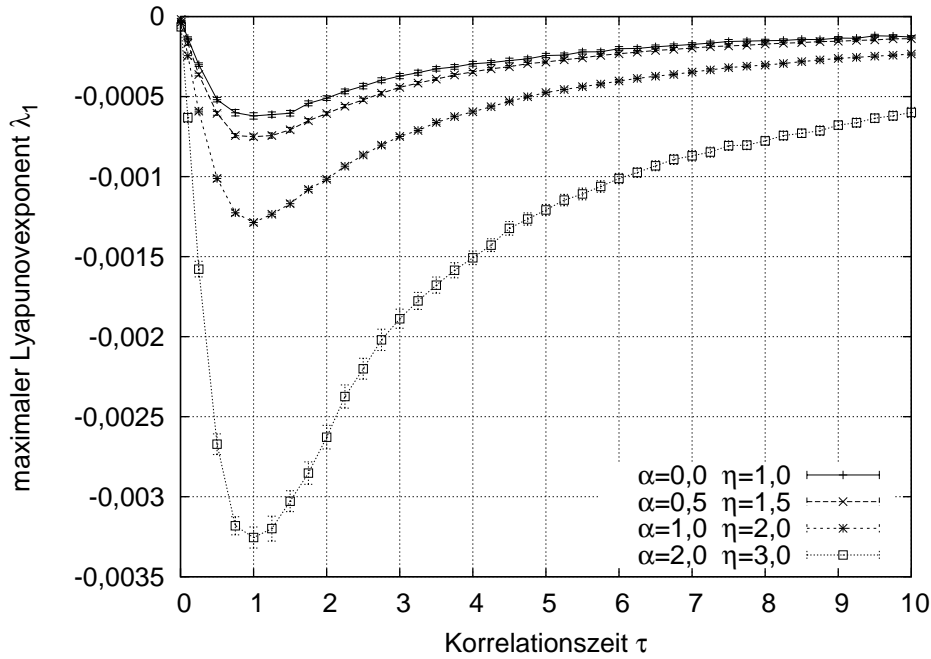


Abbildung 3.13.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter η und α des Landau-Stuart-Oszillators und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$ aber jeweils der gleichen Oszillatorfrequenz $\omega_O = \eta - \alpha$.

Rauschen. Die Autoren behandeln das Thema in [TT06] ausgehend von der Methode der Phasenreduktion und schlagen eine Näherungsformel für den zur Phasendynamik gehörenden Lyapunovexponenten λ_ϕ vor. Da diese Näherungsformel auch zu den hier gemachten Beobachtungen beiträgt, wird sie hier im Folgenden in einer an diese Arbeit angepasste Form vorgestellt.

Der Ausgangspunkt ist wie bei weißem Rauschen die Phasenreduktion des durch die Gleichungen und (3.29) und (3.30) gegebenen Oszillators. Da das Rauschen lediglich in die nullte Komponente der stochastischen Differentialgleichung (3.6) einkoppelt, lautet die resultierende Gleichung der Phasendynamik

$$\dot{\phi} = \omega_O + Z_0(\phi)\zeta, \quad (3.32)$$

wobei Z_0 die nullte Komponente der Phasensensitivität \mathbf{Z} (vgl. Gleichungen (2.111b) bzw. (2.118)) bezeichnet. Die Autoren von [TT06] argumentieren, dass mit den Approximationen $p(\phi) \approx 1/2\pi$ und $p(\phi(t')|\phi(t)) \approx \delta(\phi(t') - \phi(t) + \omega_O(t - t'))$ der Lyapunovexponent durch die Gleichung

$$\lambda_\phi = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty C(s) ds \int_0^{2\pi} Z_0''(\phi) Z(\phi - \omega s) d\phi \quad (3.33)$$

approximiert werden kann. Dabei bezeichnet $p(\pi)$ die Dichtefunktion, nachdem das getriebene System einen stationären Zustand erreicht hat, $p(\phi(t')|\phi(t))$ die bedingte Dichtefunktion (vgl. (2.40)) und $C(s)$ die Autokorrelationsfunktion (vgl. (2.42)) des Rauschens. Mit

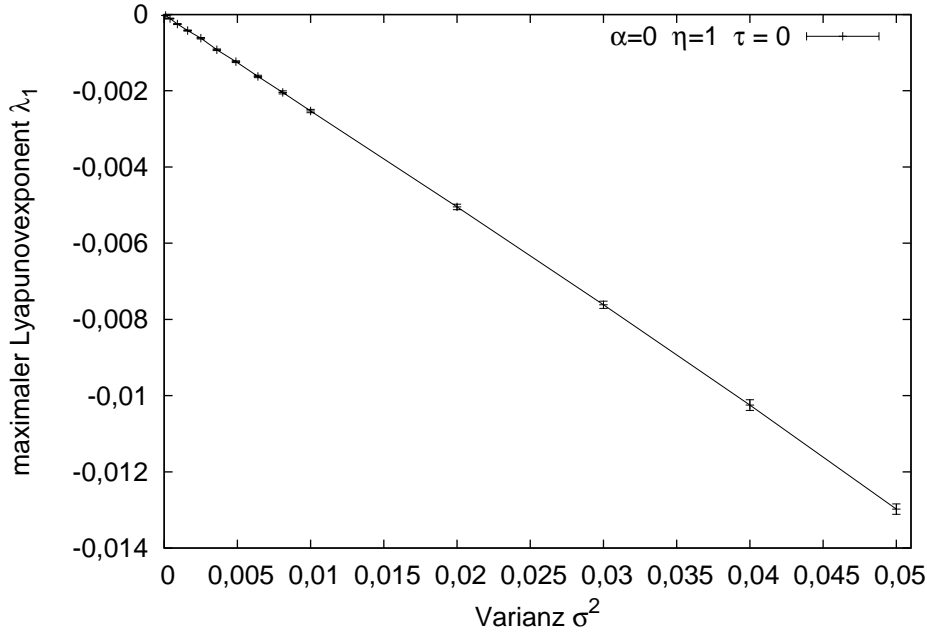


Abbildung 3.14.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Varianz σ^2 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei der festen Korrelationszeit $\tau = 1$ und den Parametern $\alpha = 0$ und $\eta = 1$ des Landau-Stuart-Oszillators.

den Fourierdarstellungen der Phasensensitivität $Z_0(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{in\phi}$ und des Rauschens $\zeta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(k) e^{ikt} dk$ folgt unter Berücksichtigung des Wiener-Khinchin-Theorems für den Lyapunovexponenten

$$\lambda_\phi = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |z_n|^2 \frac{\langle |\tilde{\zeta}(n\omega_O)|^2 \rangle}{2}. \quad (3.34)$$

Auch dieser Zusammenhang zeigt, dass λ_ϕ bei schwachem Rauschen negativ ist. Ensembles identischer Oszillatoren, welche durch ein gemeinsames farbiges Rauschen getrieben werden, synchronisieren also. Mit der Gleichung (2.47b) kann (3.34) auch als

$$\lambda_\phi = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |z_n|^2 \frac{S(n\omega_O)}{2}, \quad (3.35)$$

geschrieben werden. An dieser Stelle sei noch einmal erwähnt, dass nach der Gleichung (2.51) die spektrale Dichte des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses

$$S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\tau^{-1} + \omega^2\tau} \quad (3.36)$$

lautet. Zusammen mit der Formel (2.121) für die Phasensensitivität des Landau-Stuart-Oszillators ergibt sich die Formel

$$\lambda_\phi = -\frac{1}{4}(1 + \alpha^2)S(\omega_O) = -\frac{1}{2}(1 + \alpha^2) \frac{\sigma^2}{\tau^{-1} + (\eta - \alpha)^2\tau}, \quad (3.37)$$

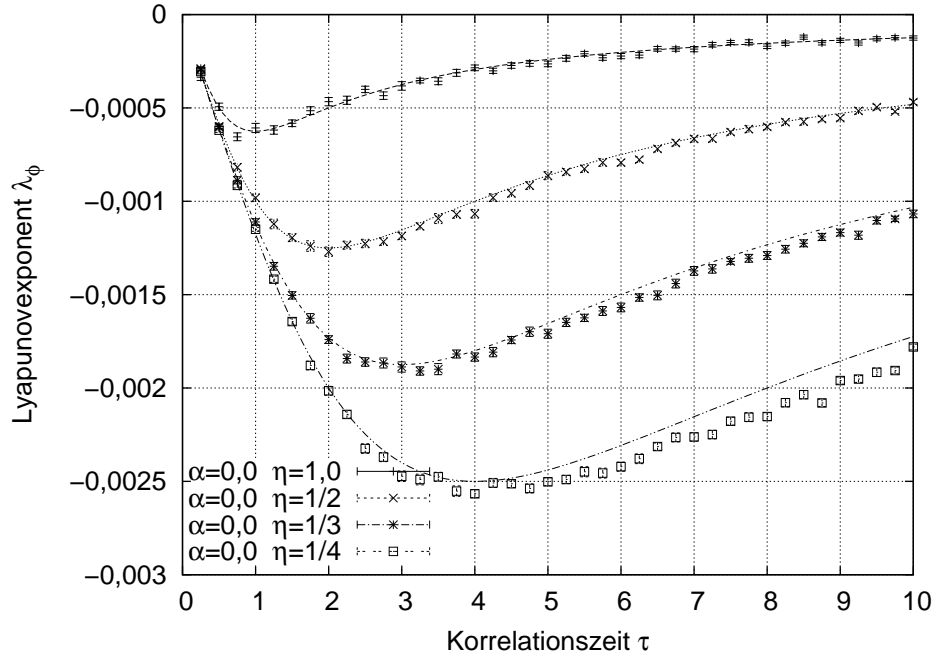


Abbildung 3.15.: Abhängigkeit des Lyapunovexponenten λ_ϕ von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter η und $\alpha = 0$ des Landau-Stuart-Oszillators und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$. Bei $\eta = 1$ bzw. $\eta = 0,5$ stimmen die numerisch bestimmten Werte gut mit dem theoretischen Verlauf überein. Bei niedrigeren Frequenzen liefert der numerische Algorithmus für große τ systematisch zu niedrige Werte.

welche, wie nachfolgend noch zu sehen sein wird, auch zum Verständnis der für den maximalen Lyapunovexponenten gemachten Beobachtungen beiträgt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Formel (3.21) ein Spezialfall der Gleichung (3.37) mit der konstanten spektralen Dichte $S(\omega) = \sigma^2$ ist. Die Unabhängigkeit der Lyapunovexponenten λ_ϕ und λ_1 von der Eigenfrequenz ω_O bei Oszillatoren, welche mit weißem Rauschen getrieben werden, ist also eine Konsequenz der konstanten spektralen Dichte des weißen Rauschens. Die Abbildung 3.15 zeigt die Abhängigkeit von λ_ϕ von σ^2 für verschiedene Parameter η bei konstantem $\alpha = 0$. Die gewählten Parameter sind die selben wie die in der Abbildung 3.12 verwendeten. Die eingezeichneten Kurven sind die nach der Gleichung (3.37) berechneten theoretischen Werte. Die experimentellen Datenpunkte wurden durch die numerische Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}\dot{\phi} &= \omega_O + Z_0(\phi)\zeta \\ \dot{v} &= Z'_0(\phi)\zeta v\end{aligned}\quad (3.38)$$

berechnet. Dazu wurde für $N = 36$ zufällige Anfangsbedingungen $0 \leq \phi < 2\pi$ und $v(0) = 1$ über eine Zeitspanne von 1000 bis 10000 Perioden integriert und jeweils die Größe Λ gemäß der Gleichung (3.23) gebildet. Die aufgetragenen Datenpunkte ergeben sich aus dem arithmetischen Mittel der Einzelwerte, während die Fehlerbalken den statistischen Fehler des

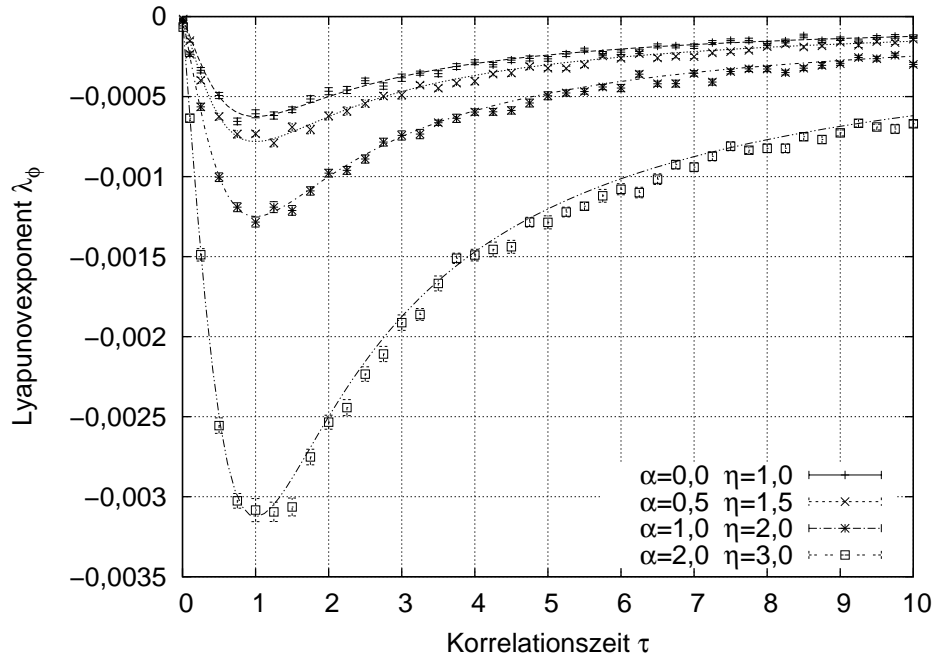


Abbildung 3.16.: Abhängigkeit des Lyapunovexponenten λ_ϕ von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter η und α des Landau-Stuart-Oszillators und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$ aber jeweils der gleichen Oszillatorfrequenz $\omega_O = \eta - \alpha$. Bei kleinen τ stimmen die numerisch bestimmten Werte gut mit dem theoretischen Verlauf überein. Der numerische Algorithmus liefert für große τ systematisch zu niedrige Werte.

Mittelwertes darstellen. Die numerischen Werte stimmen für kleine τ gut mit den theoretischen Werten überein. Bei größeren Korrelationszeiten weichen die numerisch ermittelten Werte systematisch zu negativeren Werten hin ab. Anders als bei dem im Abschnitt über weißes Rauschen beschriebenen Abweichungen numerischer Werte von der Näherungsformel sind die hier beobachteten Abweichungen auf Probleme mit dem numerischen Algorithmus zurückzuführen. Dies konnte durch Vergleiche mit der Konvergenzgeschwindigkeit von Phasentrajektorien ermittelt werden. Der Vergleich der Abbildungen 3.12 und 3.15 zeigt, dass beide Lyapunovexponenten nahezu identisch sind. Insbesondere stimmen die Minima überein. Diese stimmen wiederum mit denen der Formel (3.37), nämlich $\tau_{min} = 1/\omega_O$, überein. Die Abbildung 3.16 stellt die Abhängigkeit von λ_ϕ von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter η und α und der Standardabweichung $\sigma = 0,05$ dar, wobei jedoch im Gegensatz zu Abbildung 3.15 jeweils die Oszillatorfrequenz $\omega_O = 1$ beträgt. Bei den Parameterpaaren $\alpha = 2$ und $\eta = 1$ sowie $\alpha = 3$ und $\eta = 2$ liefert der numerische Algorithmus für große τ systematisch zu niedrige Werte, die Abweichung ist jedoch deutlich geringer als die in der Abbildung 3.15 für kleine ω_O erkennbaren. Der Algorithmus ist also bei niedrigen Frequenzen und nicht etwa bei betragsmäßig großen Lyapunovexponenten problematisch. Diese Beobachtung wird, wie weiter unten noch zu sehen sein wird, bei anderen Oszillatoren bestätigt. Ein Vergleich der Abbildungen 3.13 und 3.16 zeigt, ebenso wie zuvor bei den

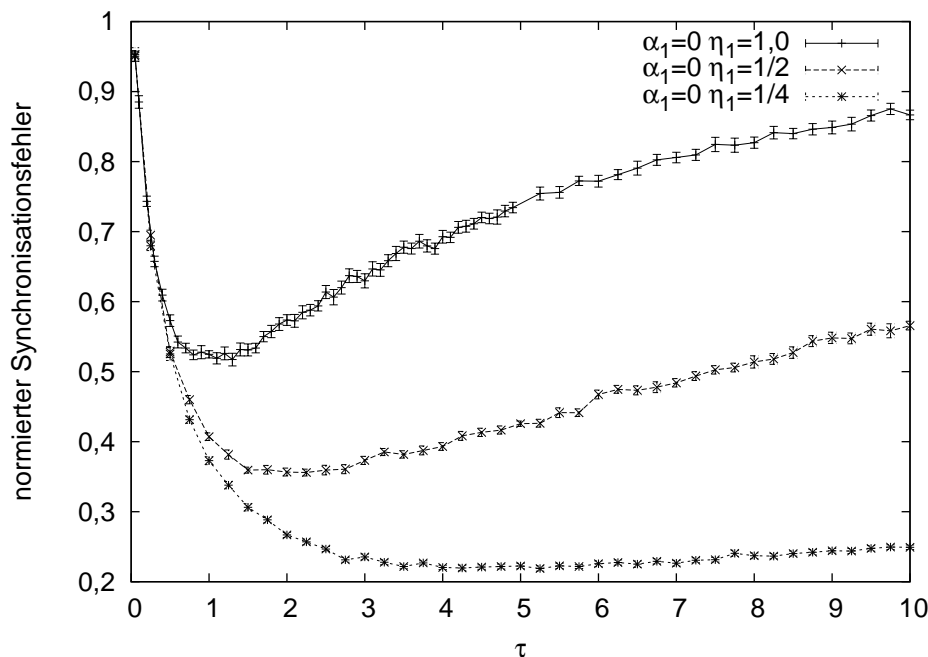


Abbildung 3.17.: Abhängigkeit des normierten Synchronisationsfehlers \mathcal{E} zweier nichtidentischer Landau-Stuart-Oszillatoren von der Korrelationszeit τ . Die Werte für α sind identisch ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0$), die Werte von η weichen jeweils um 0,001 voneinander ab ($\eta_1 - \eta_2 = 0,001$).

Abbildungen 3.12 und 3.15, dass der maximale Lyapunovexponent und λ_ϕ nahezu gleich sind. Offenkundig approximiert die Formel (3.37) gut den Lyapunovexponenten λ_ϕ und dient somit der Erklärung des resonanzartigen Verhaltens von λ_1 und λ_ϕ . Insbesondere bestätigt diese Formel die obige Behauptung, λ_1 sei im Falle des Landau-Stuart-Oszillators ein Vielfaches der spektralen Dichte des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Gemäß der Formel befindet sich das Minimum vom λ_ϕ und damit λ_1 bei $\tau_{min} = 1/\omega_O$ (vgl. Abbildungen 3.12 und 3.15). Ebenso wird klar, dass die Lyapunovexponenten mit zunehmendem α negativer werden (vgl. Abbildungen 3.13 und 3.16), sowie linear von der Varianz σ^2 (vgl. Abbildung 3.14) abhängen.

Wie bereits im Abschnitt 3.2 erwähnt wurde, ist die Frage nach der strukturellen Stabilität der hier theoretisch und numerisch betrachteten Synchronisationsphänomene von großer Bedeutung. Insbesondere die Robustheit der Phänomene gegenüber kleinen Unterschieden der Systeme ist entscheidend für die Beobachtbarkeit in Laborexperimenten. Zur Untersuchung der strukturellen Stabilität wurde der mittlere Synchronisationsfehler \mathcal{E} (vgl. Gleichung (3.24)) zweier Oszillatoren mit leicht unterschiedlichen Parametern α und η betrachtet. Die Abbildung 3.17 zeigt für verschiedene Parameterpaare α und η die Abhängigkeit des auf den Erwartungswert des Abstandes zweier zufällig auf dem Einheitskreis ausgewählten Punkte (siehe Anhang C) normierten Synchronisationsfehlers von der Korrelationszeit τ bei einer Varianz des Rauschens von $\sigma^2 = 0,01$. Der Parameter η des zweiten Systems wich bei den Berechnungen um jeweils 0,001 von dem des ersten ab, wobei α_1 und α_2 gleich Null waren,

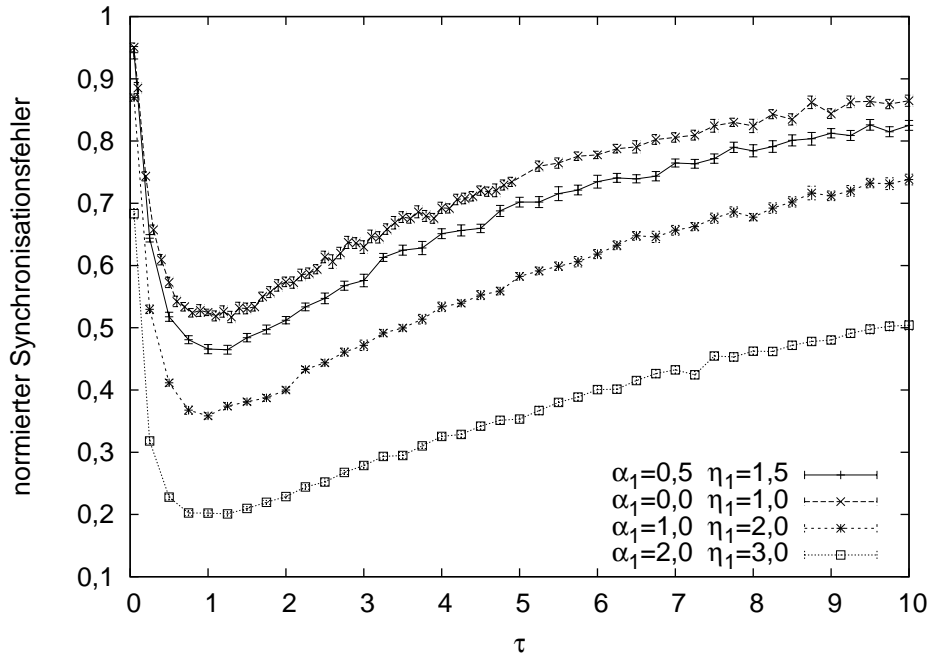


Abbildung 3.18.: Abhängigkeit des normierten Synchronisationsfehlers \mathcal{E} zweier nichtidentischer Landau-Stuart-Oszillatoren von der Korrelationszeit τ . Die Werte für α sind identisch ($\alpha_1 = \alpha_2$), die Werte von η weichen jeweils um 0,001 voneinander ab ($\eta_1 - \eta_2 = 0,001$). In Gegensatz zur Abbildung 3.17 sind die Oszillatorfrequenzen ω_O bei allen Parameterpaaren α und η identisch.

d. h. die Abbildung 3.17 korrespondiert zu der Abbildung 3.12. Bei den Parametern $\eta_1 = 1$ bzw. $\eta_1 = 0,5$ sind die Minima des Synchronisationsfehlers gut den Korrelationszeiten $\tau = 1$ bzw. $\tau = 2$ zuzuordnen. Bei dem Parameter $\eta_1 = 1/4$ ist die Position des Minimums nicht mit der gleichen Genauigkeit zu erkennen, jedoch liegt es offenkundig bei $4 \lesssim \tau \lesssim 5$. Bei der Berücksichtigung der statistischen Schwankungen kann das Minimum jedoch bei $\tau = 4$, also $\tau = 1/\omega_O$, angenommen werden. Die Lage der Minima des Synchronisationsfehlers stimmt also mit der Lage der Minima des maximalen Lyapunovexponenten überein. Darüber hinaus sind die qualitativen Kurvenverläufe des Synchronisationsfehlers und λ_1 ähnlich. Die Abbildung 3.18 stellt den normierten Synchronisationsfehler bei gleichen Parameterdifferenzen wie in der Abbildung 3.17 dar, jedoch ist bei allen vier Parameterpaaren die Oszillatorfrequenz $\omega_O = 1$, d. h. diese Abbildung korrespondiert zu der Abbildung 3.13. Die Minima lassen sich zwanglos der Korrelationszeit $\tau = 1$ zuordnen und die Abhängigkeit des Synchronisationsfehlers von τ ist der von λ_1 qualitativ ähnlich. Diese Beobachtungen führen zu dem Schluss, dass die bisher beschriebenen Synchronisationphänomene strukturell stabil sind und somit in Laborexperimenten beobachtet werden können.

Bisher wurde lediglich der Landau-Stuart-Oszillator wegen seiner überschaubaren mathematischen Eigenschaften zur Untersuchung der stochastischen Synchronisation durch einen Ornstein-Uhlenbeck-Prozess herangezogen. Die Gleichung (3.37) impliziert unter sehr allgemeinen Bedingungen die stochastische Synchronisation von Oszillatoren unter dem Einfluss

von schwachem farbigem Rauschen. Die einzige Voraussetzung ist die Differenzierbarkeit von Z_0 .

Um zu untersuchen, inwieweit die bisher gewonnenen Erkenntnisse auf andere Oszillatoren und dabei insbesondere auf Neuronenmodelle übertragbar sind, werden im Folgenden sowohl der maximale Lyapunovexponent λ_1 als auch der Lyapunovexponent λ_ϕ zusammen mit dem theoretischen Wert aus der Gleichung (3.35) für weitere Oszillatoren behandelt. Die dazu verwendeten Phasensensitivitäten wurden, wie bereits im Abschnitt 3.2 beschrieben, berechnet und sind im Anhang E graphisch dargestellt. Eine Adaption der Gleichung (3.35) an die in dieser Arbeit verwendete reelle Fourierentwicklung von Z_0 ist im Anhang D dargestellt.

Das als nächstes untersuchte System ist der mit einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess getriebene van-der-Pol-Oszillator. Er wird durch die stochastische Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\ddot{y} = 2\gamma(1 - \beta y^2)\dot{y} - \omega_0^2 y + \zeta(t) \quad (3.39)$$

beschrieben. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass über den Parameter ω_0 zwar die Oszillatorfrequenz ω_O eingestellt werden kann, diese im Allgemeinen jedoch nicht mit ω_0 übereinstimmt. Eine Übereinstimmung herrscht nur für $\gamma = 0$, also wenn das System konservativ ist und somit keinen Grenzzyklus mehr besitzt. Bei den numerischen Untersuchungen wurden ebenso wie beim Fall mit weißem Rauschen die Parameter $\gamma = 1/2$ und $\beta = 1$ gewählt. Die Lyapunovexponenten λ_ϕ und λ_1 wurden für vier verschiedene Werte ω_0 mit einer Varianz des Rauschens von $\sigma^2 = 0,01$ untersucht. Die Abbildung 3.19 stellt die Ergebnisse dieser Untersuchungen dar.

Bei den Parametern $\omega_0 = 1$ und $\omega_0 = 0,5$ stimmen die numerisch bestimmten Werte für λ_ϕ und die Approximationen gemäß der Gleichung (3.35) bis auf eine systematische Abweichung bei großen Korrelationszeiten gut überein und die Position des Minimums sowie der qualitative Verlauf des maximalen Lyapunovexponenten stimmen ebenfalls gut mit denen der Näherungsformel überein. Bei den Parametern $\omega_0 = 0,25$ und $\omega_0 = 0,2$ hingegen versagt der numerische Algorithmus zur Berechnung von λ_ϕ . Der Verlauf der numerisch ermittelten Werte λ_ϕ stimmt noch nicht einmal mehr qualitativ mit der analytischen Näherungsformel überein, insbesondere sind keine Minima mehr vorhanden. Mit diesen Parametern weist die Abhängigkeit des Exponenten λ_1 von τ jedoch deutliche Minima auf. Diese sind aber zu deutlich niedrigeren Korrelationszeiten hin verschoben, als die aus der Gleichung (3.35) folgenden. Ebenso stimmen die qualitativen Verläufe nicht überein. So ist λ_1 des Oszillators mit $\omega_0 = 0,25$ für $\tau \gtrsim 2$ negativer als λ_1 des Oszillators mit $\omega_0 = 0,2$. Gemäß der Gleichung (3.35) muss λ_ϕ für alle τ bei jedoch letzterem Parameter negativer sein. Diese deutliche Abweichung von den Werten nach Gleichung (3.35) wird bei der Untersuchung der Dichtefunktion $p(\phi)$ der Phase des Oszillators verständlich. In der Abbildung 3.20 sind Dichtefunktionen für van-der-Pol-Oszillatoren mit verschiedenen Parametern ω_0 und den Korrelationszeiten $\tau = 1$ und $\tau = 2$ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Bei den Dichtefunktionen $p(\phi)$ zu den Parametern $\omega_0 = 1$ und $\omega_0 = 0,5$ ist die Abweichung von der Approximation $p(\phi) = 1/2\pi$ gering, während bei den Parametern $\omega_0 = 0,25$ und $\omega_0 = 0,2$ eine deutliche Abweichung zu erkennen ist. Somit ist in diesen Fällen die Annahme einer Gleichverteilung nicht mehr gerechtfertigt und infolge dessen stellt die Formel (3.35) eine schlechte Approximation dar. Die Abbildung 3.21 enthält möglicherweise weitere Hinweise

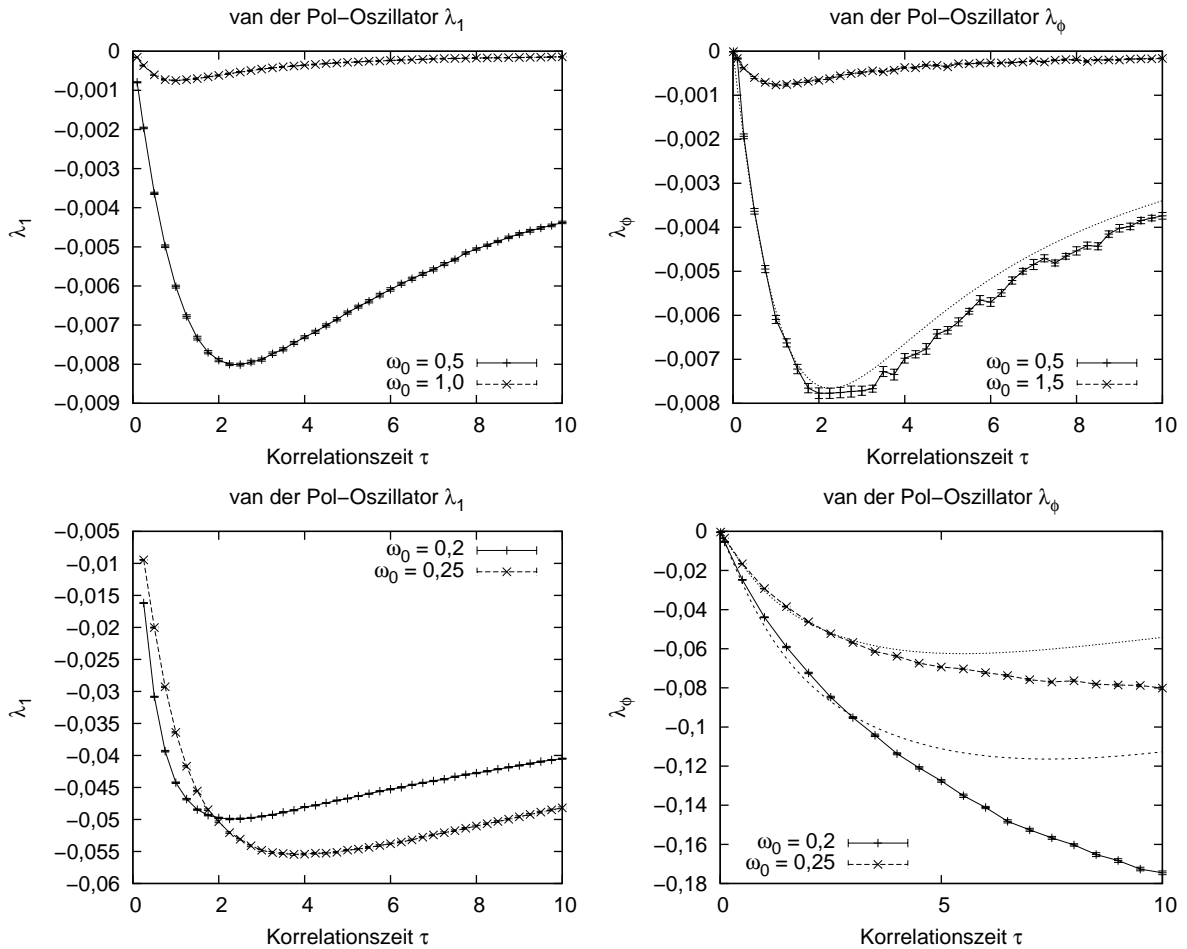


Abbildung 3.19.: Abhängigkeit der Lyapunovexponenten λ_1 (links) und λ_ϕ (rechts) von der Korrelationszeit τ für verschiedene Parameter ω_0 des van der Pol-Oszillators und einer Varianz des Rauschens $\sigma^2 = 0,01$. Bei den Parametern $\omega_0 = 1$ und $\omega_0 = 0,5$ stimmen die numerisch ermittelten λ_ϕ gut mit der Formel (3.35) überein. Bei $\omega_0 = 0,25$ und $\omega_0 = 0,2$ versagt der numerische Algorithmus.

auf den Grund dieser deutlichen Abweichung der Dichtefunktion $p(\phi)$ von der Gleichverteilung. Diese Abbildung zeigt Grenzzyklen und Isochronen von van-der-Pol-Oszillatoren mit verschiedenen Parametern ω_0 . Es ist klar zu erkennen, dass die Grenzzyklen für $\omega_0 \rightarrow 0$ bei $x = 0$ rechte Winkel ausbilden und dort somit nicht mehr differenzierbar sind. In der Nähe solcher singulären Punkte scheint die Annahme einer gleichverteilten Phase ϕ auch bei schwachem Rauschen nicht gerechtfertigt zu sein.

Als weiterer Oszillator wurde der FitzHugh-Nagumo-Oszillator (vgl (2.92)) untersucht, wobei ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess in die erste Komponente, also die des Membranpotentials E , eingekoppelt wurde. Das Rauschen ist somit als Rauschen des Membranstroms I zu interpretieren. Die verwendete Varianz betrug dabei $\sigma^2 = 0,01$. Die obere Reihe der

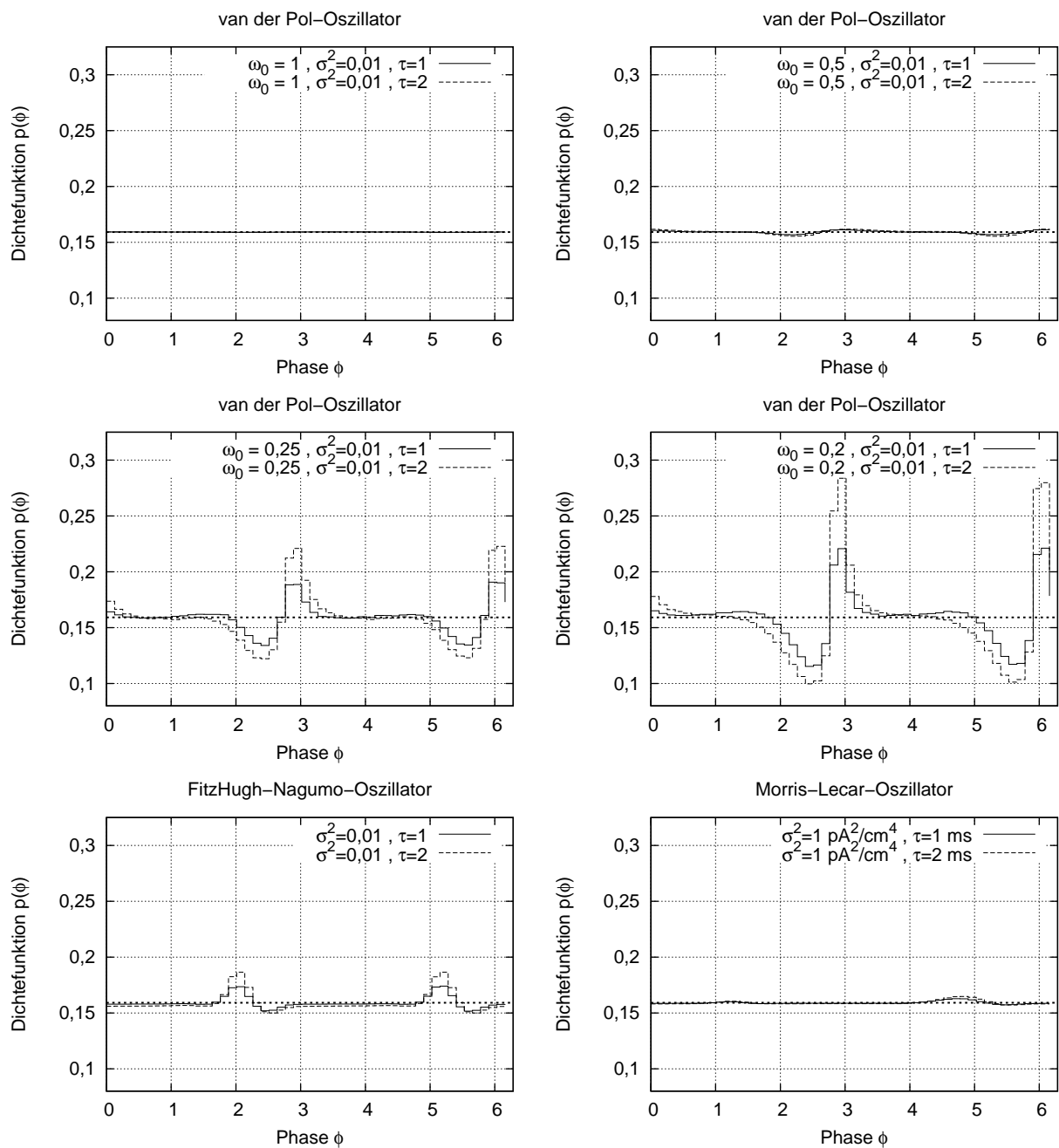


Abbildung 3.20.: Die Dichtefunktionen $p(\phi)$ verschiedener Oszillatorphasen bei $\tau = 1$ und $\tau = 2$. Die Gleichverteilung $p(\phi) = 1/2\pi$ ist durch die fett gestrichelte horizontale Linie markiert. Bei den van-der-Pol- und dem FitzHugh-Nagumo-Systemen wurde eine Varianz des Rauschens von $\sigma^2 = 0,01$ gewählt. Bei dem Morris-Lecar-Neuron betrug die Varianz $\sigma^2 = 1 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$. Bei dem van-der-Pol-Systemen mit den Parametern $\omega_0 = 0,25$ und $\omega_0 = 0,2$ weicht die Dichtefunktion deutlich von der Gleichverteilung ab.

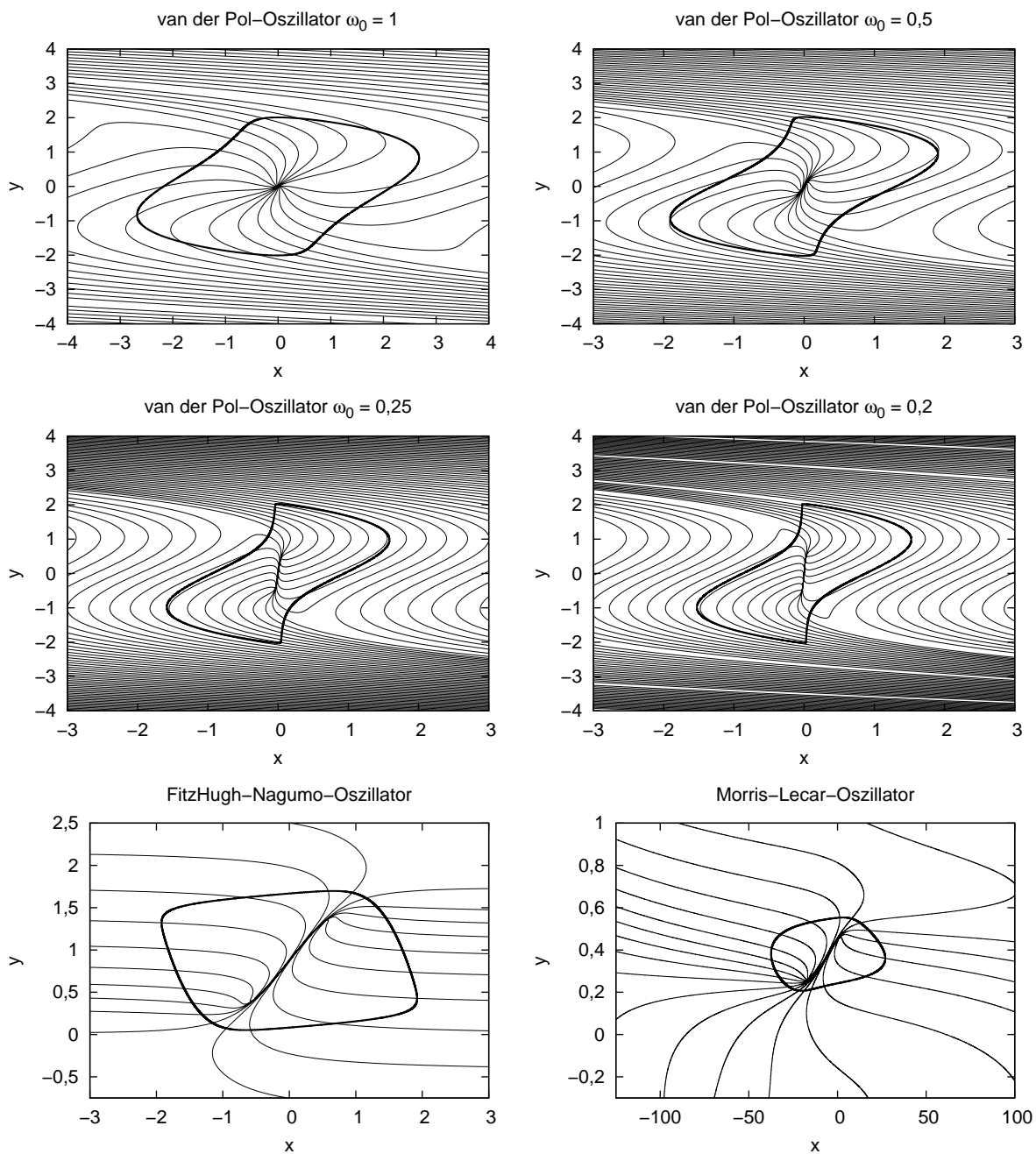


Abbildung 3.21.: Die Grenzzyklen verschiedener Oszillatoren zusammen mit ihren Isochronen. Bei den van-der-Pol-Oszillatoren mit den Parametern $\omega_0 = 0,25$ und $\omega_0 = 0,2$ ist gut zu erkennen, dass der Grenzzyklus für $\omega_0 \rightarrow 0$ bei $x = 0$ nichtdifferenzierbare „Kanten“ ausbildet. Bei dem FitzHugh-Nagumo- und dem Morris-Lecar-Oszillator fehlen diese „Kanten“.

Abbildung 3.22 präsentiert die Ergebnisse der Untersuchungen. Bei kleinen Korrelationszeiten stimmen die Ergebnisse des numerischen Algorithmus gut mit der Näherungsformel (3.35) überein. Ab $\tau \approx 1$ liefert der Algorithmus zu niedrige Werte. Da die Kreisfrequenz des Oszillators lediglich $\omega_O \approx 0,173$ beträgt, war dieses Ergebnis nach den vorherigen Untersuchungen am Landau-Stuart- und am van der Pol-Oszillator auch zu erwarten. Der maximale Lyapunovexponent folgt qualitativ dem theoretischen Verlauf und die Position des Minimums stimmt ebenfalls mit dem theoretischen Wert gut überein. Diese Beobachtung lässt vermuten, dass die Annahme einer näherungsweise gleichverteilten Phase mit der Dichtefunktion $p(\phi)$ gerechtfertigt ist. Die Abbildung 3.20 bestätigt diese Vermutung, die numerisch ermittelte Dichtefunktion weicht nur relativ gering von der Gleichverteilung $p(\phi) = 1/2\pi$ ab. Dies führt wiederum zu der Vermutung, dass der Grenzyklus keine „Kanten“ aufweist. Aus der Abbildung 3.21 ist tatsächlich zu entnehmen, dass diese Vermutung zutrifft.

So wie im Falle des weißen Rauschens wurden auch hier die zwei leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodelle, das Morris-Lecar-Neuron und das Hodgkin-Huxley-Neuron, untersucht. Für das Morris-Lecar-Neuron wurde der zur Hopfbifurkation gehörende Parametersatz, welcher in der Tabelle 2.2 aufgelistet ist, gewählt und eine Membranstromdichte $J = 30 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ verwendet. Beim Hodgkin-Huxley-Neuron wurden die in Abschnitt 2.4.1 eingeführten „Standardparameter“ zusammen mit einer Membranstromdichte $J = 20 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ verwendet. Bei beiden Systemen wurden Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse verschiedener Korrelationszeiten und der Varianz $\sigma^2 = 1 \text{ pA}^2/\text{cm}^4$ als farbiges Rauschen des Membranstroms in die erste Komponente eingekoppelt. Die Resultate der Untersuchungen sind in der zweiten bzw. dritten Reihe der Abbildung 3.22 graphisch zusammengefasst. Erwartungsgemäß liefert der numerische Algorithmus für große Korrelationszeiten τ etwas zu niedrige Werte, während sie bei kleinen τ gut mit theoretischen übereinstimmen. Die qualitativen Verläufe der maximalen Lyapunovexponenten und insbesondere die Lage der Minima stimmen gut mit denen nach der Gleichung (3.35) bestimmten überein. Für das Morris-Lecar-Neuron sind in den Abbildungen 3.20 und 3.21 die Dichtefunktion $p(\phi)$ der Phase bzw. der Grenzyklus zusammen mit den Isochronen dargestellt. Erwartungsgemäß weicht die Dichtefunktion nur wenig von der Gleichverteilung ab und der Grenzyklus weist keine „Kanten“ auf.

3.3.1. Zusammenfassung

Es wurde gezeigt, dass periodische Oszillatoren durch schwaches additives farbiges Rauschen synchronisierbar sind. Bei kleinen Varianzen des Rauschens hängt der maximale Lyapunovexponent λ_1 und der der Phase ϕ zugehörige Lyapunovexponent λ_ϕ linear von σ^2 ab. Die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten von der Korrelationszeit τ des Rauschens weist immer ein Minimum auf und konvergiert bei sehr kleinen und sehr großen Korrelationszeiten τ gegen Null. Es existiert eine Näherungsformel für λ_ϕ , welche qualitativ die Abhängigkeit vom λ_1 von der Korrelationszeit wiedergibt. Für die meisten hier untersuchten Oszillatoren wird die Lage des Minimums auch quantitativ gut durch die Näherungsformel bestimmt. Dies trifft insbesondere auf die untersuchten leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodellen zu, welche mit physiologisch sinnvollen Parametern betrachtet wurden. Die Näherungsformel ist jedoch selbst mit schwachem Rauschen nicht auf alle un-

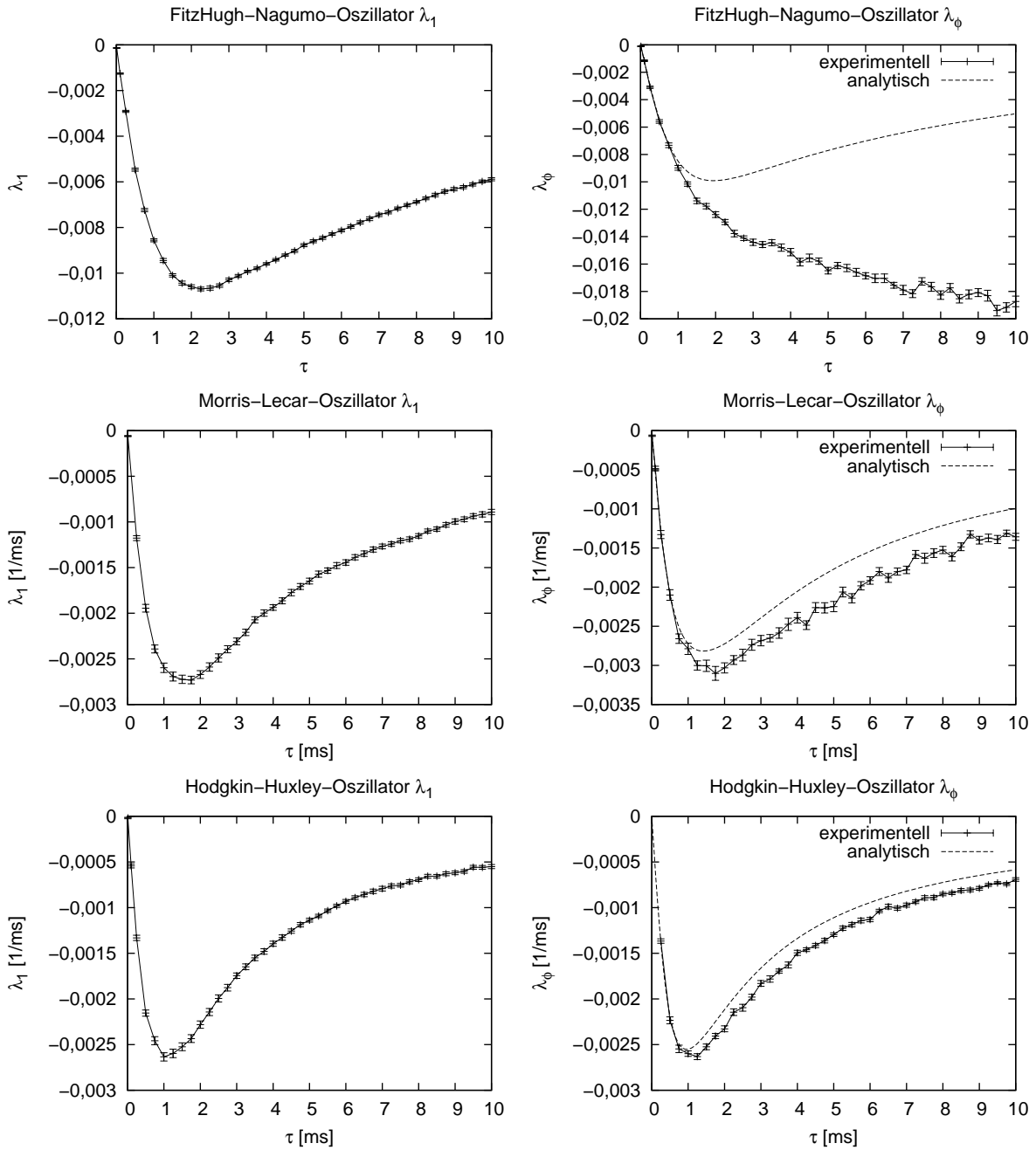


Abbildung 3.22.: Abhängigkeit der Lyapunovexponenten λ_1 (links) und λ_ϕ (rechts) von der Korrelationszeit τ für den FitzHugh-Nagumo- den Morris-Lecar- und den Hodgkin-Huxley-Oszillator. Die verwendeten Parameter sind im Text beschrieben. Bei dem FitzHugh-Nagumo-Oszillator versagt der Algorithmus zur Berechnung von λ_ϕ bei großen τ . Bei dem Morris-Lecar- und dem Hodgkin-Huxley-Oszillator liefert der Algorithmus bei großen τ zu niedrige Werte, jedoch stimmen der theoretische und der experimentelle Verlauf qualitativ überein.

tersuchten Systeme anwendbar. Die durchgeführten Untersuchungen legen den Verdacht nahe, dass Oszillatoren, welche Grenzyklen mit nahezu singulären Punkten („Kanten“) haben, nicht adäquat durch die Näherungsformel beschrieben werden. Bei solchen Oszillatoren weichen die numerisch und die theoretisch nach der Näherungsformel ermittelten Minima der Lyapunovexponenten stark voneinander ab.

3.4. Stochastische Synchronisation chaotischer Oszillatoren

In den vorherigen Abschnitten wurde die stochastische Synchronisation periodischer Oszillatoren behandelt. Es wurde jedoch in verschiedenen Veröffentlichungen (siehe z. B. [BLT01, TMHGP01]) gezeigt, dass nicht nur periodische, sondern auch chaotische Oszillatoren mit weißem Rauschen stochastisch synchronisiert werden können. Folglich stellt sich die Frage, welchen Einfluss die Korrelationszeit von farbigem Rauschen auf die stochastische Synchronisation ungekoppelter chaotischer Systeme hat. In diesem Abschnitt wird diese Frage beispielhaft an paradigmatischen chaotischen Lorenzsystemen, welche mit einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess getrieben werden, untersucht. Die hier vorgestellten Untersuchungen erheben selbst bezüglich des Lorenzsystems keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit oder auf Übertragbarkeit auf andere chaotische stochastisch synchronisierbare Systeme. Sie sollen jedoch ein Startpunkt für weitere Untersuchungen darstellen.

In [TMHGP01] wurde gezeigt, dass chaotische Lorenzoszillatoren durch Einkopplung von weißem Rauschen in die y -Komponente synchronisiert werden können. Diesem Beispiel folgend wird in diesem Abschnitt der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess in die y -Komponente eingekoppelt. Die untersuchten stochastischen Differentialgleichungen sind also durch

$$\dot{x} = \zeta(y - x) \tag{3.40a}$$

$$\dot{y} = rx - y - xz + \zeta(t) \tag{3.40b}$$

$$\dot{z} = xy - bz \tag{3.40c}$$

mit

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \tag{3.41a}$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right), \tag{3.41b}$$

gegeben, wobei σ^2 die Varianz und τ die Korrelationszeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bezeichnen. Die verwendeten Parameter des Lorenzsystems waren $\zeta = 10$, $b = 8/3$ und $r = 28$ bzw. $r = 80$. Sowohl mit $r = 28$ als auch mit $r = 80$ ist das Lorenzsystem chaotisch. Mit diesen Parametern wurde die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses untersucht. Dabei wurde λ_1

über die numerische Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \varsigma(y - x) \\
\dot{y} &= rx - y - xz + \zeta(t) \\
\dot{z} &= xy - bz \\
\dot{v}_x &= \varsigma(v_y - v_x) \\
\dot{v}_y &= -v_y + (r - z)v_x - xv_z \\
\dot{v}_z &= xv_y + yv_x - bv_z
\end{aligned} \tag{3.42a}$$

berechnet. Dazu wurden für N zufällige Anfangsbedingungen mit $\|\mathbf{v}(0)\| = 1$ über eine Zeitspanne von $\Delta = 100$ oder $\Delta = 200$ Zeiteinheiten integriert und jeweils die Größe

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln \|\mathbf{v}(\Delta)\| \tag{3.43}$$

gebildet. Das arithmetische Mittel $\lambda_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i$ wurde dann als maximaler Lyapunovexponent genommen. Bei diesen numerischen Untersuchungen wurde der Prädiktor-Korrektor-Integrationsalgorithmus aus Anhang B.3 zusammen mit dem Algorithmus für farbiges Rauschen aus Anhang B.1 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ mit der Integrations Schrittweite $h = 0,001$ verwendet. Bei allen nachfolgend vorgestellten Untersuchungen betrug die Varianz des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses $\sigma^2 = 160$. Die Abbildungen 3.23 und 3.24 stellen die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 der stochastischen Differentialgleichungen (3.40) mit den Parametern des Lorenzsystems von $r = 28$ bzw. $r = 80$ von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses dar. Diese Abhängigkeiten unterscheiden sich deutlich. Bei dem Parameter $r = 28$ nimmt der maximale Lyapunovexponent λ_1 monoton mit τ ab und wird für $\tau \gtrsim 2,34$ kleiner als Null, während die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten von der Korrelationszeit mit $r = 80$ ein Minimum bei $\tau \approx 0,1$ besitzt. Zur weiteren Untersuchung dieses qualitativ deutlich unterschiedlichen Verhaltens wurde die spektrale Dichte $S_L(\omega_i)$ der y -Komponente des Lorenzsystems ohne Rauschen für beide Parameterwerte betrachtet. Die Abbildungen 3.25 und 3.26 stellen diese spektralen Dichten dar. Die beiden in diesen Abbildungen dargestellten Spektren sind die Mittelwerte von jeweils 400 Spektren unabhängiger Zeitreihen der y -Komponente. Diese Spektren wurden durch diskrete Fouriertransformationen von den 400 auf die Varianz Eins normierten Zeitreihen mit jeweils $L = 10^6$ Datenpunkten berechnet. Dabei waren die ersten und die letzten 10% mit sinus- bzw. kosinus-förmigen Taperfunktionen multipliziert, um die periodische Fortsetzbarkeit der chaotischen Zeitreihen zu gewährleisten. Es fällt auf, dass die spektrale Dichte des Lorenzsystems mit dem Parameter $r = 28$ (vgl. Abbildung 3.25) nahezu monoton abfällt, während die spektrale Dichte mit $r = 80$ (vgl. Abbildung 3.25) bei $\omega \approx 5$ ein Maximum besitzt. Es fällt auf, dass eine Korrelation zwischen der Überlappung der spektralen Dichte

$$S_{OU}(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\tau^{-1} + \omega^2\tau}, \tag{3.44}$$

des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (siehe Abbildungen 2.5 und 2.6) mit der spektralen Dichte $S_L(\omega)$ des Lorenzsystems und dem maximalen Lyapunovexponenten λ_1 zu bestehen

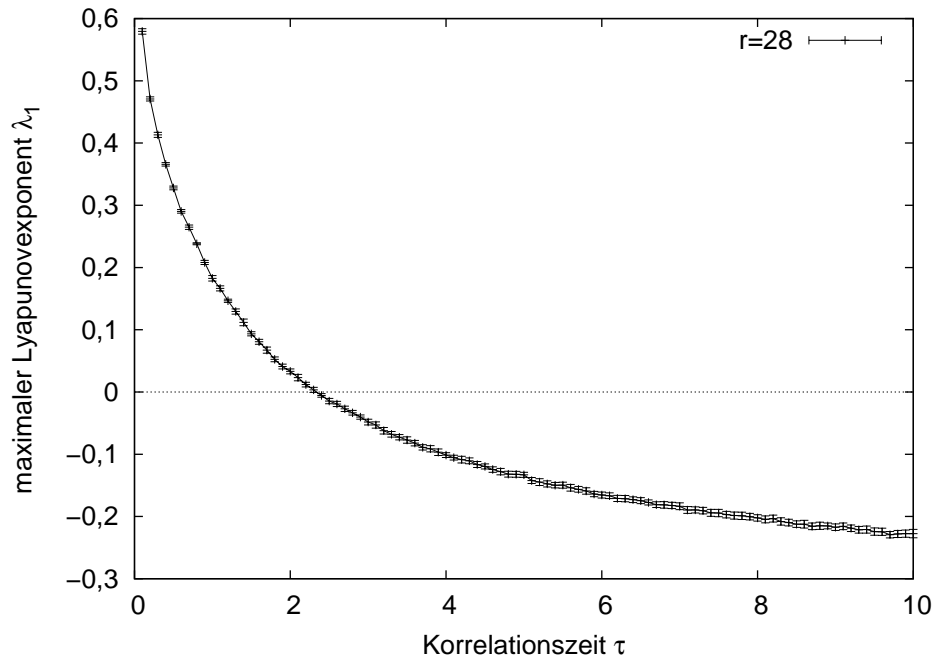


Abbildung 3.23.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Die Varianz des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ist $\sigma^2 = 160$ und der Parameter des Lorenzsystems ist $r = 28$. λ_1 ist der Mittelwert von $N = 10$ nach der Gleichung (3.43) berechneten Einzelwerten. Die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar.

scheint. Da die spektrale Dichte $S_{OU}(\omega)$ bei $\omega = 0$ monoton mit τ zunimmt (vgl. auch Abbildung 2.5) und $S_L(\omega)$ bei $r = 28$ (nahezu) monoton mit ω abfällt, nimmt die Überlappung beider Spektren mit der Korrelationszeit zu. Weiterhin ist $S_{OU}(\omega)$ bei einer bestimmten Frequenz ω_m maximal, wenn $\tau = 1/\omega_m$ ist (siehe auch Abbildung 2.6). Da $S_L(\omega)$ mit $r = 80$ bei $\omega_m \approx 5$ maximal ist, ist die Überlappung beider Spektren maximal wenn $\tau \approx 0,2$ gilt. Also scheint der maximale Lyapunovexponent umso kleiner zu sein je größer die Überlappung der Spektren ist. Zur genaueren numerischen Untersuchung wurde das Integral

$$I = - \int_0^\infty S_L(\omega) S_{OU}(\omega) d\omega \quad (3.45)$$

zur Quantifizierung der Überlappung definiert. Dieses Integral konnte unter Verwendung der durch diskrete Fouriertransformationen gewonnenen spektralen Dichten $S_L(\omega)$ approximiert werden. Die diskrete Fouriertransformation liefert bei den diskreten Frequenzen $(0, \omega_1 = \frac{2\pi}{Lh}, \dots, \omega_i = \frac{2i\pi}{Lh}, \dots, \frac{\pi}{h})$ Schätzer $\tilde{S}_L(\omega_i)$ für die spektrale Dichte $S_L(\omega_i)$. Das Inte-

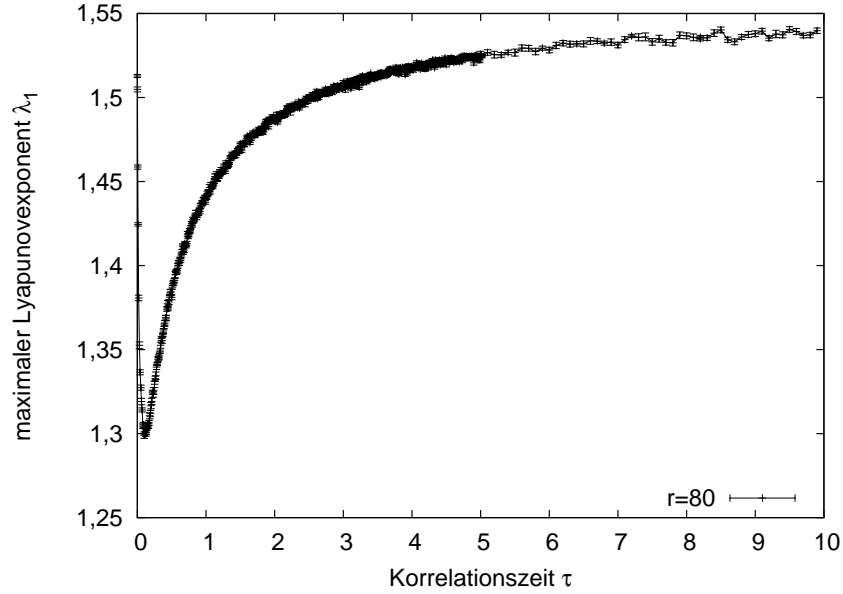


Abbildung 3.24.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Die Varianz des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ist $\sigma^2 = 160$ und der Parameter des Lorenzsystems ist $r = 80$. λ_1 ist der Mittelwert von $N = 16$ nach der Gleichung (3.43) berechneten Einzelwerten. Die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar.

gral (3.45) kann also durch die Summe

$$I \approx -d\omega \sum_{i=0}^{L/2-2} \tilde{S}_L(\omega_i) S_{OU}(\omega_i) \quad (3.46)$$

$$= -\frac{2\pi}{Lh} \sum_{i=0}^{L/2-2} \tilde{S}_L(\omega_i) \frac{2\sigma^2}{\tau^{-1} + \omega_i^2 \tau} \quad (3.47)$$

approximiert werden. Dabei bezeichnet L wiederum die Datenpunktzahl der fouriertransformierten Zeitreihen und h die Integrationsschrittweite, mit der die Zeitreihen erzeugt wurden. Die Abbildungen 3.27 und 3.28 stellen die Ergebnisse dieses Vorgehens für die Parameter $r = 28$ und $r = 80$ dar. In der Abbildung 3.27 sind die Ergebnisse für $r = 28$ aufgetragen. Es ist erkennbar, dass das Integral I ebenso wie der maximale Lyapunovexponent λ_1 monoton mit der Korrelationszeit abfällt. Die in der Abbildung 3.28 dargestellte Abhängigkeit des Integrals I mit $r = 80$ von der Korrelationszeit hat ein Minimum bei $\tau \approx 0,29$, also nahe bei dem Minimum von λ_1 .

3.4.1. Zusammenfassung

Es wurde die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 eines mit dem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess getriebenen Lorenzsystems von der Korrelationszeit des Ornstein-Uhlen-

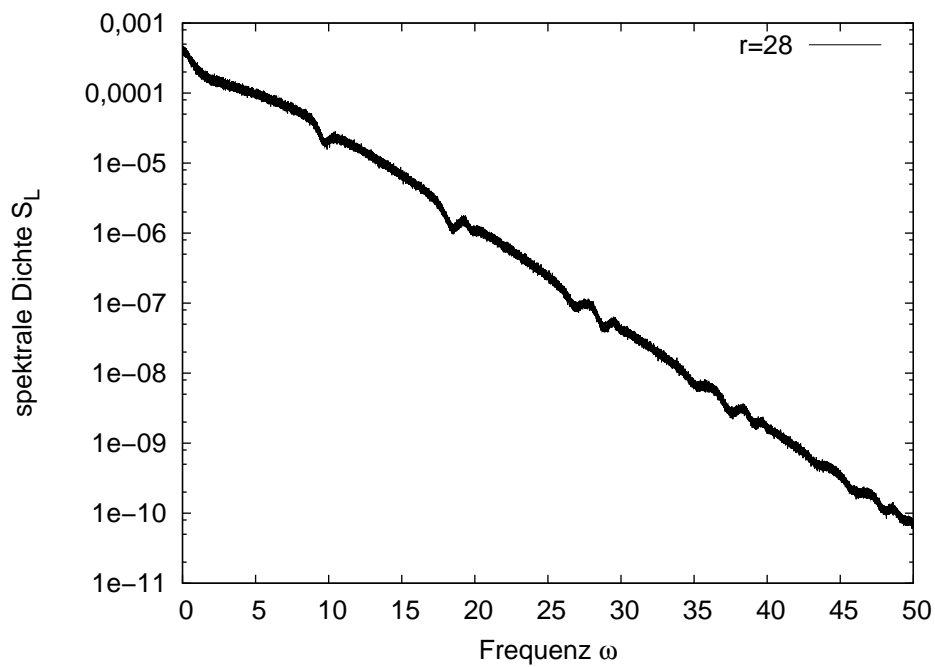


Abbildung 3.25.: Spektrale Dichte $S_L(\omega)$ der y -Komponente des Lorenzsystems mit dem Parameter $r = 28$.

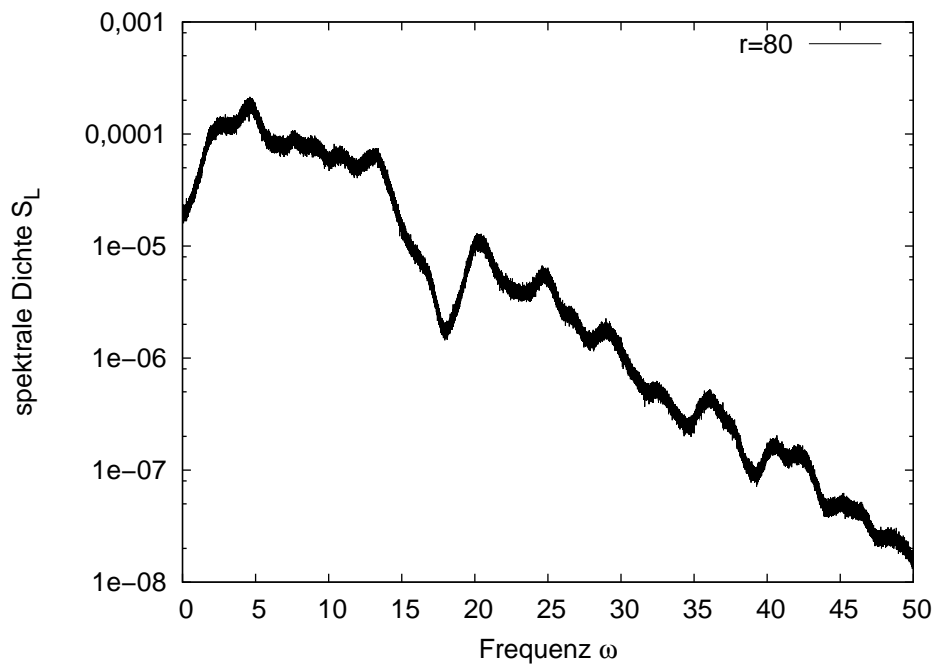


Abbildung 3.26.: Spektrale Dichte $S_L(\omega)$ der y -Komponente des Lorenzsystems mit dem Parameter $r = 80$.

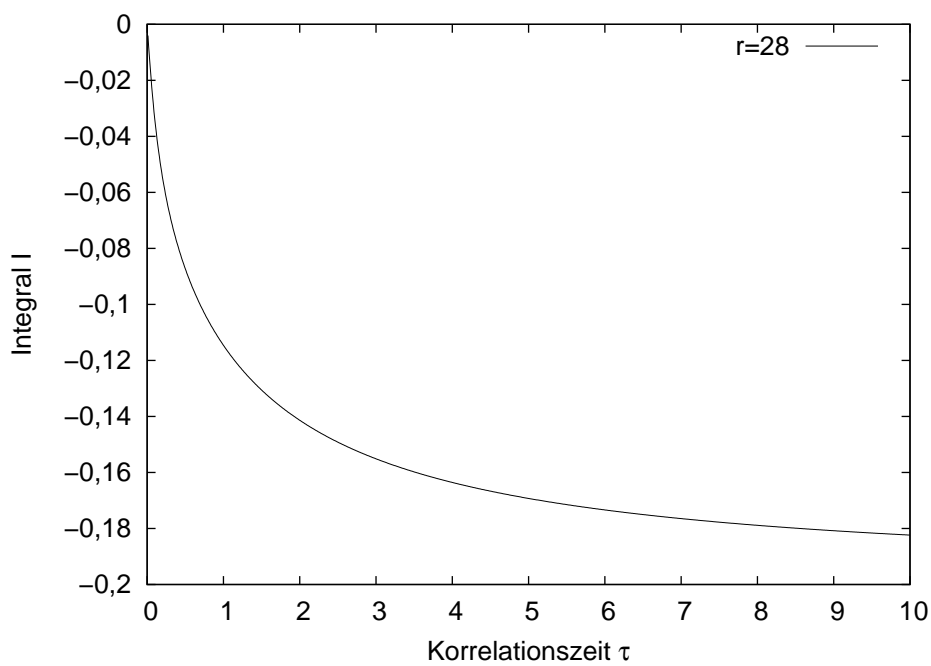


Abbildung 3.27.: Approximation des Integrals (3.45) mit dem Parameter $r = 28$

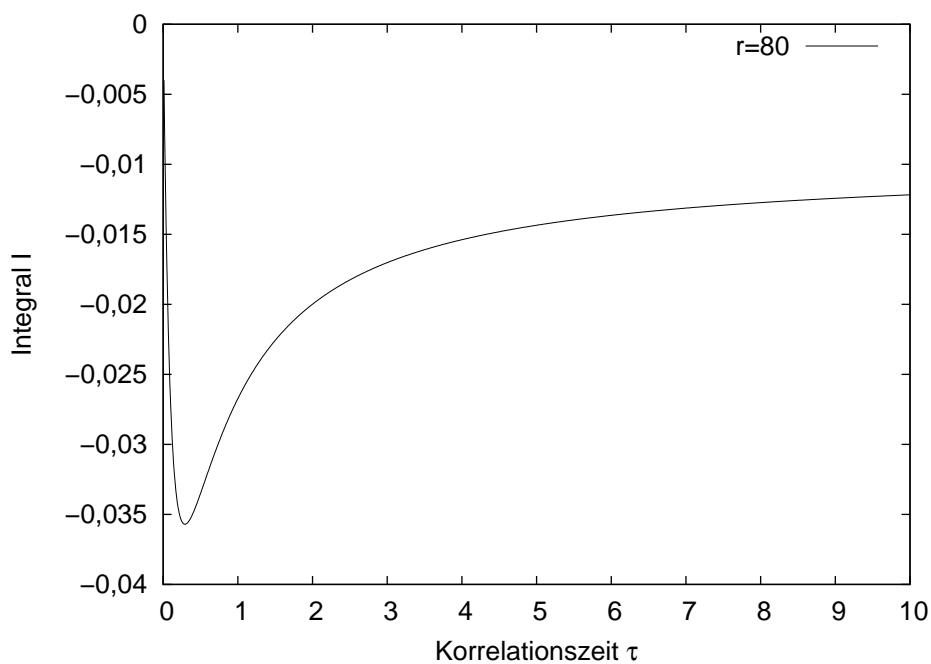


Abbildung 3.28.: Approximation des Integrals (3.45) mit dem Parameter $r = 80$

beck-Prozesses untersucht. Bei den betrachteten Parametern konnte eine Korrelation der Überlappung der spektralen Dichte des Rauschens mit der spektralen Dichte der y -Komponente des (deterministischen) Lorenzsystems und dem maximalen Lyapunovexponenten beobachtet werden. Der maximale Lyapunovexponent des stochastisch getriebenen Lorenzsystems mit dem Parameter $r = 28$ nimmt monoton mit τ ab und wird für $\tau \gtrsim 2,34$ kleiner als Null, d. h. Ensembles solcher Lorenzsysteme können stochastisch synchronisiert werden.

4. Stochastische Desynchronisation

Das vorherige Kapitel behandelte hauptsächlich die stochastische Synchronisation periodischer Oszillatoren durch gemeinsames schwaches Rauschen. In [GP05] wurde gezeigt, dass gemeinsames weißes Rauschen mit hohen Intensitäten den Abstand der Trajektorien (ungekoppelter) periodischer Oszillatoren, welche noch nicht vollständig synchronisiert sind, vergrößern kann. Obwohl dieser Effekt nicht bei vollständig synchronisierten Oszillatoren auftreten kann, wird er hier, wie allgemein üblich, etwas ungenau als Desynchronisation bezeichnet. Im Abschnitt 3.1 wurde dargelegt, dass der maximale Lyapunovexponent λ_1 ein Maß ist für die zeitliche Veränderung des Abstandes der Trajektorien von Ensembles mit gemeinsamem Rauschen getriebener Oszillatoren. Da der Abstand der Trajektorien beim Effekt der Desynchronisation vergrößert wird, muss der maximale Lyapunovexponent der stochastischen Dynamik positiv sein. Wenn λ_1 hingegen negativ ist, synchronisieren solche Ensembles.

Der Effekt der Desynchronisation tritt nicht nur bei stochastisch getriebenen periodischen Oszillatoren auf. In [Mül02] wurde die stochastische Desynchronisation zeitdiskreter chaotischer Oszillatoren beobachtet. Dort wurde die Desynchronisation bei konstanter Standardabweichung des Rauschens in Abhängigkeit der Korrelationszeit des Rauschens beobachtet. Dieses Kapitel beschreibt die desynchronisierende Wirkung von farbigem Rauschen am Beispiel zweier periodischer Oszillatoren. Dabei wird das farbige Rauschen wiederum durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess modelliert. Die verwendeten Oszillatoren sind der Rössleroszillator (siehe Abschnitt 2.1.3) und das $I_{Na,p}+I_K$ -Modell (siehe 2.4.2).

Zunächst wurde das mit farbigem Rauschen getriebene Rösslersystem untersucht. Es ist durch die stochastische Differentialgleichung

$$\dot{x}_0 = -\omega x_1 - x_2 + \zeta(t) \quad (4.1a)$$

$$\dot{x}_1 = x_0 + ax_1 \quad (4.1b)$$

$$\dot{x}_2 = b + x_2(x_0 - c) \quad (4.1c)$$

mit

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad (4.2a)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right), \quad (4.2b)$$

gegeben, wobei σ^2 die Varianz und τ die Korrelationszeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bezeichnen. Die nachfolgend vorgestellten Untersuchungen wurden mit den Oszillatorparametern $\omega = 1$, $a = 0,2$, $b = 0,2$ und $c = 1$ durchgeführt. Mit diesen Parametern zeigt das Rösslersystem eine periodische Dynamik. Der Grenzyklus ist in der Abbildung 4.2

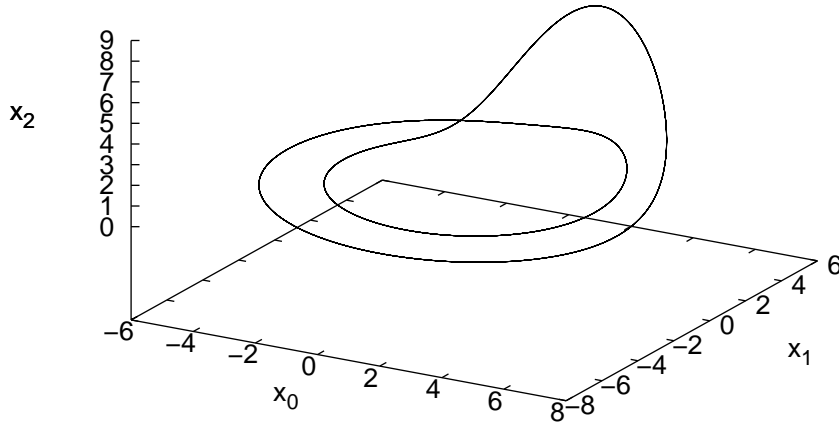


Abbildung 4.1.: Grenzyklus des Rössleroszillators mit den Parametern $\omega = 1$, $a = 0,2$, $b = 0,2$ und $c = 1$.

dargestellt. Es wurde die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses untersucht, und λ_1 wurde über die numerische Integration des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_0 &= -\omega x_1 - x_2 + \zeta(t) \\
 \dot{x}_1 &= x_0 + ax_1 \\
 \dot{x}_2 &= b + x_2(x_0 - c) \\
 \dot{v}_0 &= -\omega v_1 - v_2 \\
 \dot{v}_1 &= v_0 + av_1 \\
 \dot{v}_2 &= x_2 v_0 + (x_0 - c)v_2
 \end{aligned} \tag{4.3a}$$

berechnet. Dazu wurden für $N = 16$ zufällige Anfangsbedingungen mit $\|\mathbf{v}(0)\| = 1$ über eine Zeitspanne von $\Delta = 57725$ Zeiteinheiten (dies entspricht 5000 Perioden) integriert und jeweils die Größe

$$\Lambda = \frac{1}{\Delta} \ln \|\mathbf{v}(\Delta)\| \tag{4.4}$$

bestimmt. Das arithmetische Mittel $\lambda_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i$ wurde dann als maximaler Lyapunovexponent genommen. Bei diesen numerischen Untersuchungen wurde der Prädiktor-Korrektor-Integrationsalgorithmus aus Anhang B.3 zusammen mit dem Algorithmus für farbiges Rauschen aus Anhang B.1 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ mit der Integrationsschrittweite $h = 0,01$ verwendet. Zur zusätzlichen Absicherung der Resultate wurden weitere

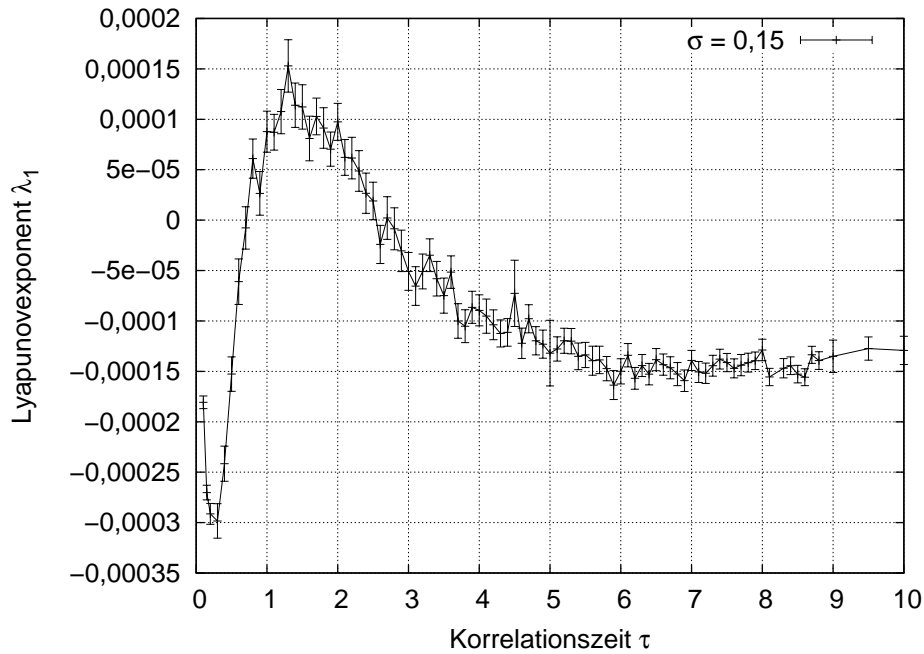


Abbildung 4.2.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 des Rössleroszillators von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 0,15$.

Untersuchungen durchgeführt, bei denen der Erwartungswert ϑ der Zeit gemessen wurde, die der Abstand $d(t) = \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|$ zweier identischer mit gleichem Rauschen getriebenen Systeme, welche jedoch mit verschiedenen Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0)$ und $\mathbf{y}(0)$ starten, benötigt, um kleiner als ein vorgegebener Schwellwert Σ zu werden. Diese Messungen wurden sowohl bei dem Rösslersystem als auch bei dem $I_{Na,p} + I_K$ -Modell mit $N = 100$ zufälligen Anfangsbedingungen und dem Schwellwert $\Sigma = 10^{-10}$ durchgeführt und ϑ durch

$$\vartheta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vartheta_i \quad (4.5)$$

approximiert. Die Größe ϑ wird im Folgenden auch als Übergangszeit bezeichnet.

Die Abbildung 4.2 stellt die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 0,15$ dar. Bei kleinen Korrelationszeiten ist λ_1 negativ und fällt bis zu einem Minimum bei $\tau \approx 0,5$ ab. Nach diesem Minimum steigt λ_1 wieder an und erreicht ein Maximum bei $\tau \approx 1,5$. Nach diesem Maximum fällt λ_1 wieder ab und unterschreitet Null bei $\tau \approx 2,5$. Also zeigt sich selbst bei dieser, im Vergleich zum Wertebereich der x_0 -Komponente des Oszillators, relativ kleinen Standardabweichung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ein deutlich von den Resultaten aus dem Abschnitt 3.3 abweichendes Verhalten. Insbesondere ist λ_1 nicht bei allen Korrelationszeiten negativ, d. h. Ensembles dieser Oszillatoren synchronisieren nicht bei allen Korrelationszeiten. In der Abbildung 4.3 ist die Abhängigkeit der Übergangszeit

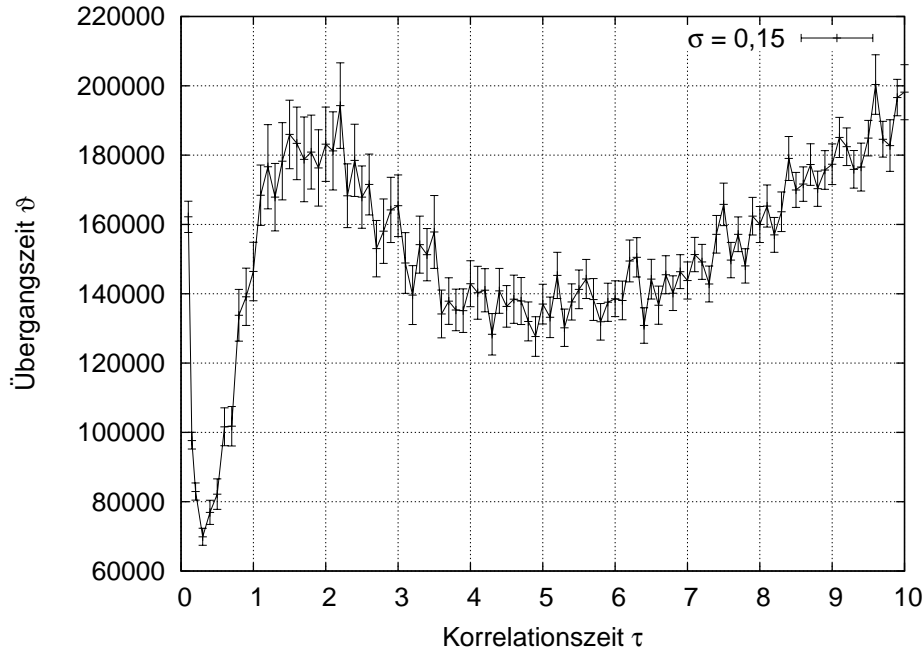


Abbildung 4.3.: Abhängigkeit der Übergangszeit ϑ zweier Rössleroszillatoren von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 0,15$.

ϑ des Rössleroszillators von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der gleichen Standardabweichung dargestellt. Der Verlauf dieser Abhängigkeit ist qualitativ gleich dem des maximalen Lyapunovexponenten und bestätigt somit das vorherige Resultat. Bei starkem Rauschen kann beobachtet werden, dass λ_1 für alle betrachteten Korrelationszeiten positiv ist. Dies ist für die Standardabweichung $\sigma = 1$ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses in der Abbildung 4.4 dargestellt. Die dort aufgetragene Abhängigkeit ist durchweg positiv und hat ein Maximum bei $\tau \approx 1$. Dieses Maximum scheint mit dem Minimum, welches bei schwachem Rauschen auftritt, zu korrespondieren. Um dies zu verdeutlichen, sind in der Abbildung 4.5 die experimentell gemäß der Gleichung (3.38) und analytisch nach der Gleichung (3.37) mit der Varianz $\sigma^2 = 0,05$ berechneten Werte für den Lyapunovexponenten λ_ϕ aufgetragen. Die bei diesen Berechnungen verwendete Phasensensitivität Z_0 ist in der Abbildung E.2 aufgetragen. Offenkundig liegt das Minimum von λ_ϕ fast bei der gleichen Korrelationszeit wie das Maximum von λ_1 bei $\sigma = 1$. Möglicherweise liegen also beiden Phänomenen gleiche dynamische Ursachen zugrunde.

Das mit farbigem Rauschen getriebene $I_{\text{Na,p}}+I_{\text{K}}$ -Modell ist durch die stochastische Differentialgleichung

$$C_m \frac{dE}{dt} = \bar{g}_{\text{Na}} m_\infty(E)(E_{\text{Na}} - E) + \bar{g}_{\text{K}} n(E_{\text{K}} - E) + g_{\text{L}}(E_{\text{L}} - E) + J(t) + \zeta(t) \quad (4.6a)$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_\infty(E) - n}{\tau_{\text{K}}} \quad (4.6b)$$

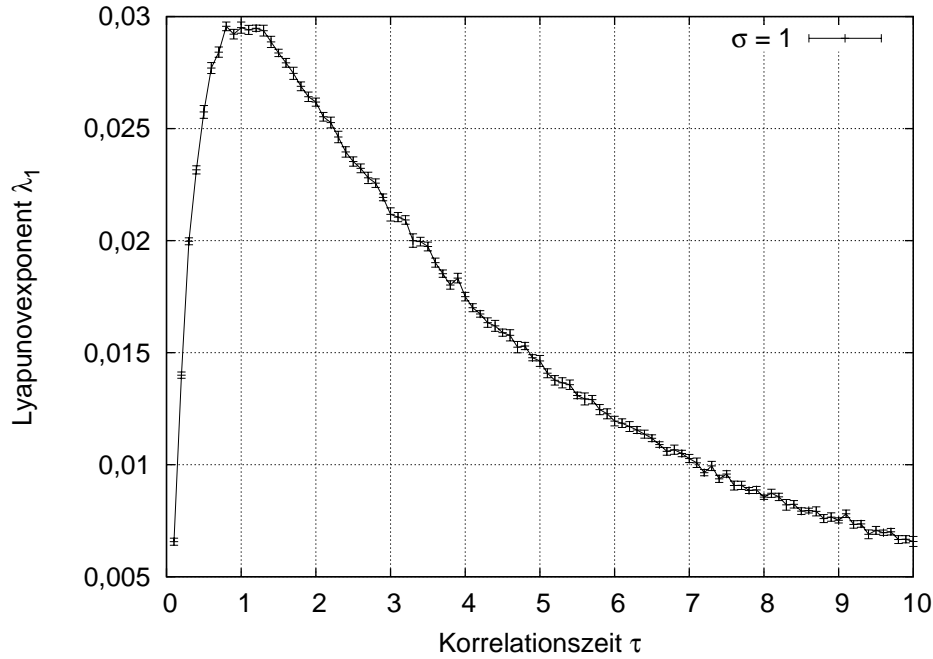


Abbildung 4.4.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 des Rössleroszillators von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 1$.

zusammen mit den Gleichungen (4.2) und (2.95) gegeben. Bei den nachfolgend beschriebenen Berechnungen wurde der Parametersatz zur Hopfbifurkation (vgl. Tabelle 2.3) mit der Stromdichte $J(t) = 40 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ verwendet. Zur Berechnung des maximalen Lyapunovexponenten wurde das im Anhang A beschriebene Verfahren mit jeweils 25 zufälligen Anfangsbedingungen und einer Integrationszeitspanne von 10^4 Perioden (36600 ms) angewendet. Da die dabei integrierte stochastische Differentialgleichung gemäß Anhang A einfach herzuleiten jedoch unübersichtlich ist, wird sie hier nicht explizit aufgeführt. Die Übergangszeit ϑ wurde durch den Mittelwert über 100 Anfangsbedingungen approximiert. Die Abbildung 4.6 stellt die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit den Standardabweichung $\sigma = 1$ dar. So wie bei dem Rössleroszillator folgt einem Minimum ein Maximum. Dieses Maximum liegt bei $\tau \approx 0,3$ ms, was wiederum mit dem (hier nicht gezeigten) Minimum von λ_ϕ bei schwachem Rauschen korrespondiert, welches ebenfalls bei $\tau \approx 0,3$ liegt. Die Abbildungen 4.8 bzw. 4.9 präsentieren die Ergebnisse für λ_1 bzw. ϑ bei der Standardabweichung $\sigma = 2$. Sowohl die Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten als auch die der Übergangszeit von der Korrelationszeit weisen kein erkennbares Minimum mehr auf. Bei Korrelationszeiten $0 \leq \tau \lesssim 1,3$ ist der maximale Lyapunovexponent positiv, d. h. bei diesen τ wirkt das Rauschen desynchronisierend. Das Maximum von λ_1 liegt auch hier bei $\tau \approx 0,3$.

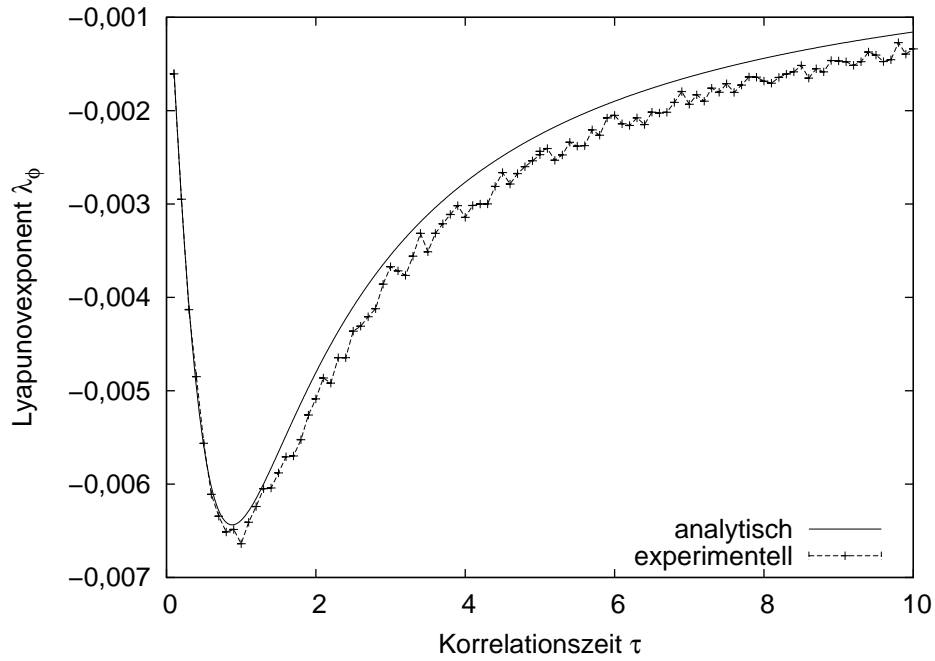


Abbildung 4.5.: Abhängigkeit des Lyapunovexponenten λ_ϕ des Rössleroszillators von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Varianz $\sigma^2 = 0,05$.

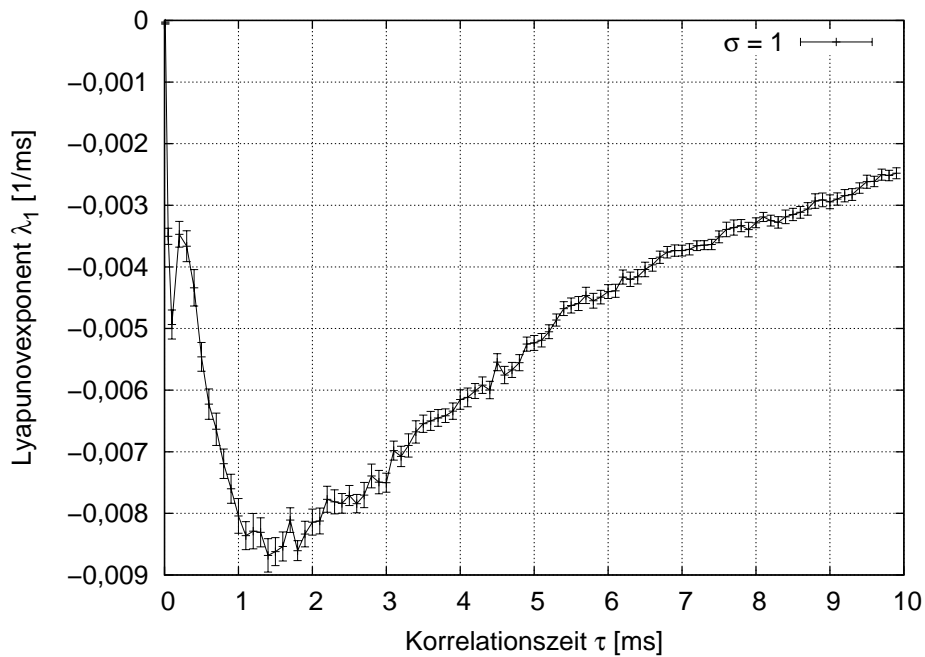


Abbildung 4.6.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 des $I_{Na,p} + I_K$ -Modells von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 1$.

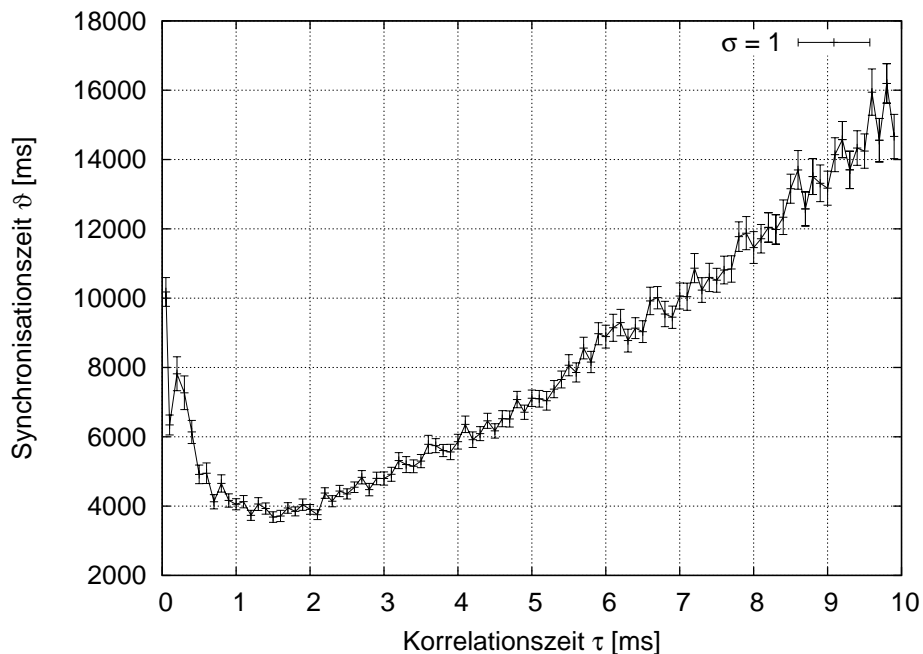


Abbildung 4.7.: Abhängigkeit der Übergangszeit ϑ zweier $I_{Na,p}+I_K$ -Modelle von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 1$.

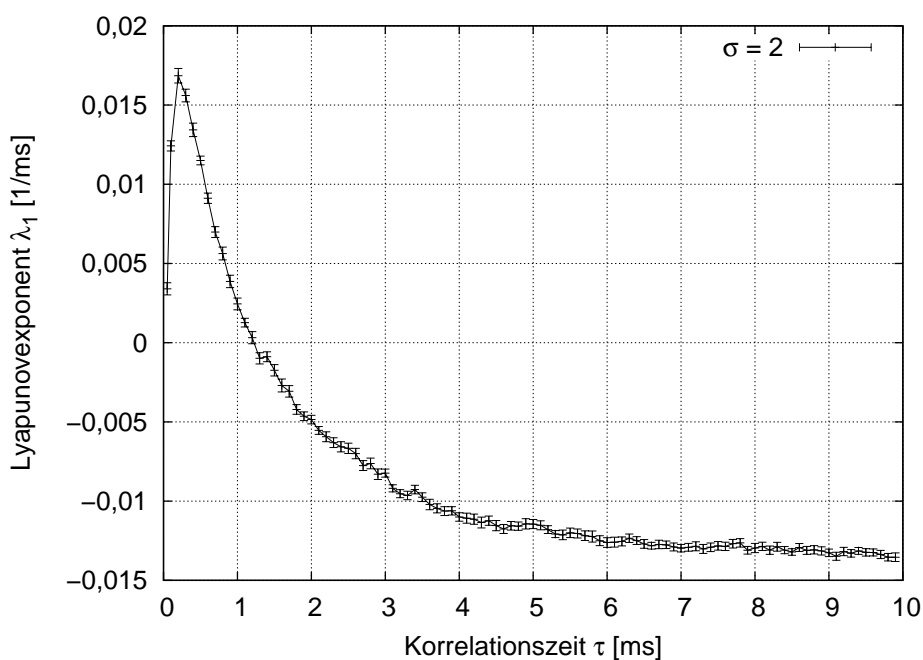


Abbildung 4.8.: Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 des $I_{Na,p}+I_K$ -Modells von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichungen $\sigma = 2$.

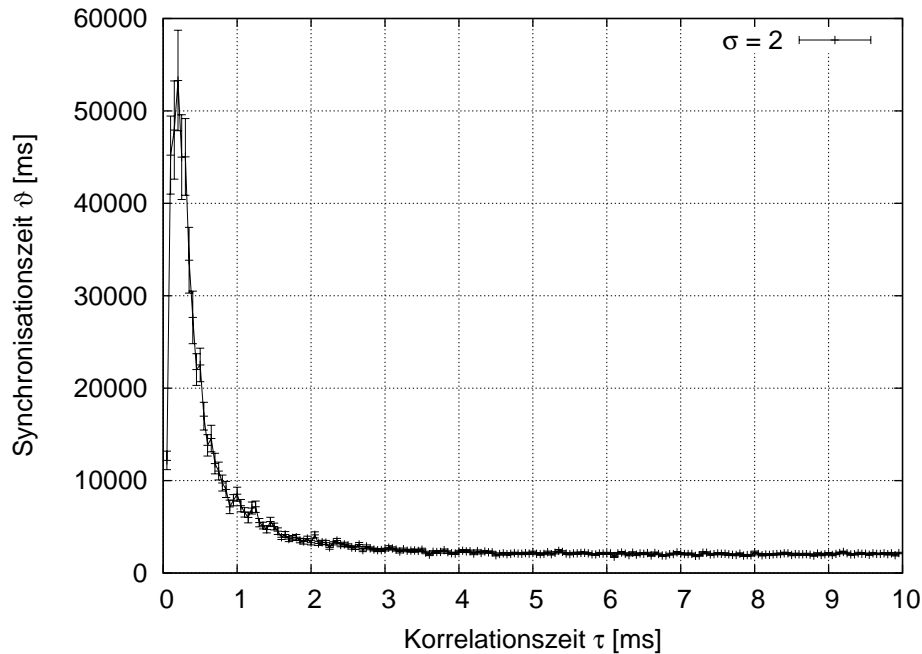


Abbildung 4.9.: Abhängigkeit der Übergangszeit ϑ zweier $I_{Na,p} + I_K$ -Modelle von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit der Standardabweichung $\sigma = 2$.

Zusammenfassung

Am Beispiel zweier periodischer Oszillatoren wurde gezeigt, dass selbst im Vergleich zur Oszillatoramplitude relativ schwaches Rauschen desynchronisierend wirken kann. Ob das Rauschen synchronisierend oder desynchronisierend wirkt, hängt nicht alleine von seiner Intensität, sondern auch von seiner Korrelationszeit ab. Wie bei den Untersuchungen mit schwachem Rauschen in Abschnitt 3.3, konnte eine resonanzartige Abhängigkeit des maximalen Lyapunovexponenten von der Korrelationszeit beobachtet werden. Der maximale Lyapunovexponent wies in der Nähe der Korrelationszeiten, bei denen er bei schwachem Rauschen ein Minimum aufwies, jedoch ein Maximum auf. Es ist zu vermuten, dass die bei schwachem Rauschen synchronisierend wirkende Resonanz auf den gleichen, noch nicht näher bekannten, dynamischen Phänomenen beruhen. Die desynchronisierende Wirkung von Rauschen kann vermutlich darauf zurückgeführt werden, dass sich die Trajektorien des Oszillators weit von dem Grenzzyklus entfernen und somit häufig Bereiche des Phasenraums passieren, welche expandierend sind. Möglicherweise ist dieser Effekt um so stärker, je resonanter die Korrelationszeit des Rauschens mit systemintrinsischen Zeiten ist. Insbesondere scheint die Frage, ob Rauschen einer bestimmten Stärke synchronisierend oder desynchronisierend wirkt, von der Stabilität des Grenzzyklus abzuhängen. Je stabiler der Grenzzyklus ist, desto stärker kann möglicherweise das Rauschen sein, ohne desynchronisierend zu wirken.

5. Gekoppelte Oszillatoren

Bisher wurden in dieser Arbeit *ungekoppelte* Systeme, die einem gemeinsamen Rauschen ausgesetzt sind, betrachtet. Diese Situation ist in natürlichen, insbesondere in biologischen Systemen meist jedoch nicht gegeben. Es ist zu erwarten, dass Systeme räumlich dicht zusammenliegen müssen, um (nahezu) dem gleichen Rauschen ausgesetzt sein zu können. Räumliche dicht benachbarte Systeme, z. B. Neuronen im Gehirn, sind jedoch häufig gekoppelt. Dadurch stellt sich in natürlicher Weise die Frage, wie sich gemeinsames Rauschen auf die Dynamik solcher gekoppelten Systeme auswirkt. Nachfolgend wird dies durch die Betrachtung der Phasen der gekoppelten Systeme untersucht. Dazu werden in Computerexperimenten drei verschiedene zweidimensionale periodische Oszillatoren verwendet. Die Untersuchungen sind auf zwei Dimensionen beschränkt, da hier eine Definition der Phase offenkundig und besonders einfach ist. Natürlich sind Phasendefinitionen auch in höherdimensionalen Systemen, z. B. über Poincaréabbildungen (siehe z. B. [PRK01]), möglich, jedoch werden in dieser Arbeit solche Ansätze nicht verwendet.

Da hier hauptsächlich der Frage nachgegangen werden soll, ob gemeinsames Rauschen die dynamische Abhängigkeit der Phasen verstärken kann, sind hauptsächlich schwach gekoppelte Systeme von Interesse, deren Phasen nicht synchronisiert sind. Daher bedarf es eines Maßes, welches den Grad der dynamischen Abhängigkeit der Phasen quantifiziert. Ein solches Maß kann mit Hilfe der *zirkulären Statistik* definiert werden und wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

5.1. Zirkuläre Statistik

Die hier betrachteten Systeme werden durch stochastische Differentialgleichungen und mit-hin als stochastische Prozesse beschrieben. Somit müssen die Phasen der Systeme ebenfalls als statistischer Prozess beschrieben werden. Bei vielen Fragestellungen ist der Wert der Phase nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π interessant. In diesen Fällen ist die Phase also durch einen auf das Intervall $[0, 2\pi)$ beschränkten Zufallsprozess beschrieben. Die zirkuläre Statistik [Mar72, MJ00] behandelt gerade solche Prozesse, nämlich die, bei denen die Zufallsvariablen so auf einer zirkulären Skala definiert sind, dass Werte, deren Differenz ein ganzzahliges Vielfaches einer bestimmten Periode sind, miteinander identifiziert werden. Nachfolgend wird eine Periode von 2π angenommen und der stochastische Prozess, die Phase, mit $\theta(t)$ bezeichnet. Für die Quantisierung des Grades dynamischer Abhängigkeit zweier Phasen $\theta_1(t)$ und $\theta_2(t)$ kann die Breite der Verteilung $p(\Delta\theta(t))$ der Phasendifferenzen $\Delta\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$ betrachtet werden. Im Falle unabhängiger Phasendynamiken ist $p(\Delta\theta(t))$ gleichverteilt und es gilt $p(\Delta\theta(t)) = 1/2\pi$, während die Verteilung bei konstanter Phasendifferenz $\Delta\theta(t) = \Delta\theta_0 = \text{const}$, also bei Phasensynchronisation, eine

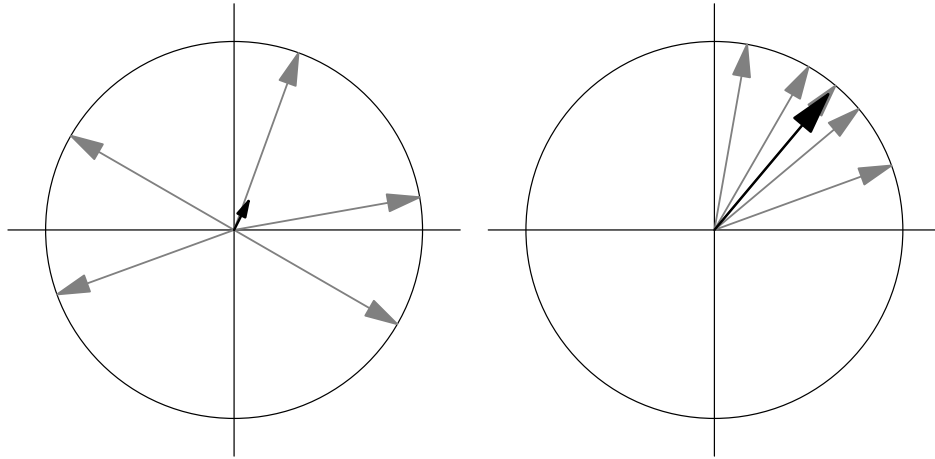


Abbildung 5.1.: Schematische Darstellung zur Formel (5.3). Die graue Pfeile stellen die Vektoren $\exp(i\theta_j)$ dar und die schwarzen Pfeile deren Mittelwerte. Die Länge der schwarzen Pfeile repräsentieren die mittlere Phasenkohärenz. Links: Die Phasen θ sind nahezu gleichverteilt. Rechts: Die Phasen sind gehäuft.

Deltafunktion ist und $p(\Delta\theta(t)) = \delta(\Delta\theta(t) - \Delta\theta_0)$ gilt. Eine Größe, welche die Breite einer zirkulären Zufallsvariablen ψ quantifiziert, ist die sogenannte *mittlere Resultantenlänge* R . Sie ist durch

$$R = |\langle \exp(i\psi) \rangle| \quad (5.1a)$$

$$= \left| \int_0^{2\pi} p(\psi) \exp(i\psi) d\psi \right| \quad (5.1b)$$

definiert. Offenkundig kann R nur Werte aus dem Intervall $[0, 1]$ annehmen, wobei $R = 0$ für $p(\psi) = 1/2\pi$ und $R = 1$ für $p(\psi) = \delta(\psi - \psi_0)$ gilt. Diese Definition kann unmittelbar auf stochastische Prozesse $\theta(t)$ übertragen werden. Bei ergodischen $\theta(t)$ ist R zeitlich konstant und kann gemäß

$$R = \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \exp(i\theta(t)) dt \right| \quad (5.2)$$

berechnet werden. Messungen an realen Systemen oder Computereperimente liefern Werte zu diskreten Zeitpunkten. Diese bilden sogenannte Phasenzitreihen $(\theta_j = \theta(jh))_{j=0, \dots, N-1}$, wobei h die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten bezeichnet. Ein Schätzer für R ist dann durch

$$R \approx \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp(i\theta_j) \right| \quad (5.3)$$

gegeben. Die Größe R kann also als mittlere Länge der Resultierenden der Addition von N zweidimensionalen, auf dem Einheitskreis liegenden Vektoren (siehe Abbildung 5.1) interpretiert werden. Die Größe R , berechnet über die Verteilung der Phasendifferenzen $\Delta\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$, kann nun zur Quantifizierung der Abhängigkeiten der Phasen $\theta_1(t)$

und $\theta_2(t)$ zweier Oszillatoren verwendet werden. Der für praktische Berechnungen bedeutsame Schätzer ergibt sich somit zu

$$R = \left| \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp(i\Delta\theta_j) \right|, \quad (5.4)$$

wobei die $\Delta\theta_j$ durch die Zeitreihe $(\Delta\theta_j = \theta_1(jh) - \theta_2(jh))_{j=0, \dots, N-1}$ gegeben sind. Dieser Schätzer kann auch für Phasenzeitreihen θ_1 und θ_2 , welche von ungekoppelten nicht identischen Oszillatoren stammen, Werte liefern, die fälschlicherweise von Null verschieden sind, obwohl $p(\Delta\theta) = 1/2\pi$ gilt. Der Rayleightest [Mar72] auf Gleichverteilung liefert mit dem Signifikanzniveau $p = 0,001$ einen Schwellwert

$$R_{\text{sig}} = \sqrt{\frac{13,815}{2N}}. \quad (5.5)$$

Nur Werte $R > R_{\text{sig}}$ sind signifikant von Null verschieden.

Die Größe R wird unter verschiedenen Namen, darunter auch dem der *mittleren Phasenkohärenz* [HLPL88], in verschiedenen Publikationen (z. B. [MLDE00, QQKKG02]) zur Untersuchung von Phasensynchronisation in Zeitreihen verwendet. Bei den nachfolgenden Untersuchungen zur stochastischen Synchronisation wird R als mittlere Phasenkohärenz bezeichnet.

5.2. Einfluss von weißem Rauschen

Dieser Abschnitt behandelt den Einfluss von weißem Rauschen auf die mittels der mittleren Phasenkohärenz R erfassten Phasensynchronisation zweier diffusiv gekoppelter, zweidimensionaler, nicht identischer, periodischer Oszillatoren. Die Kopplung findet dabei über die nullten Komponenten der (stochastischen) Differentialgleichungen statt. Ebenso wie in Abschnitt 3.2, wird das Rauschen jeweils in die nullte Komponente eingekoppelt. Die hier betrachteten Differentialgleichungssysteme haben also die Form

$$\dot{x}_0 = F_0(\mathbf{x}) + \epsilon(y_0 - x_0) + \xi(t) \quad (5.6a)$$

$$\dot{x}_1 = F_1(\mathbf{x}) \quad (5.6b)$$

$$\dot{y}_0 = G_0(\mathbf{y}) + \epsilon(x_0 - y_0) + \xi(t) \quad (5.6c)$$

$$\dot{y}_1 = G_1(\mathbf{y}), \quad (5.6d)$$

wobei ϵ die Kopplungsstärke und $\xi(t)$ das gemeinsame Rauschen bezeichnet. Die Funktionen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ bestimmen die Dynamik der beiden Oszillatoren. Das in diesem Abschnitt verwendete Rauschen ist ein gaußscher stochastischer Prozess $\xi(t)$ mit Mittelwert Null, der Varianz σ^2 und der Autokorrelationsfunktion

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \sigma^2 \delta(t - s). \quad (5.7)$$

Die Varianz σ^2 ist also der einzige freie Parameter des Rauschens.

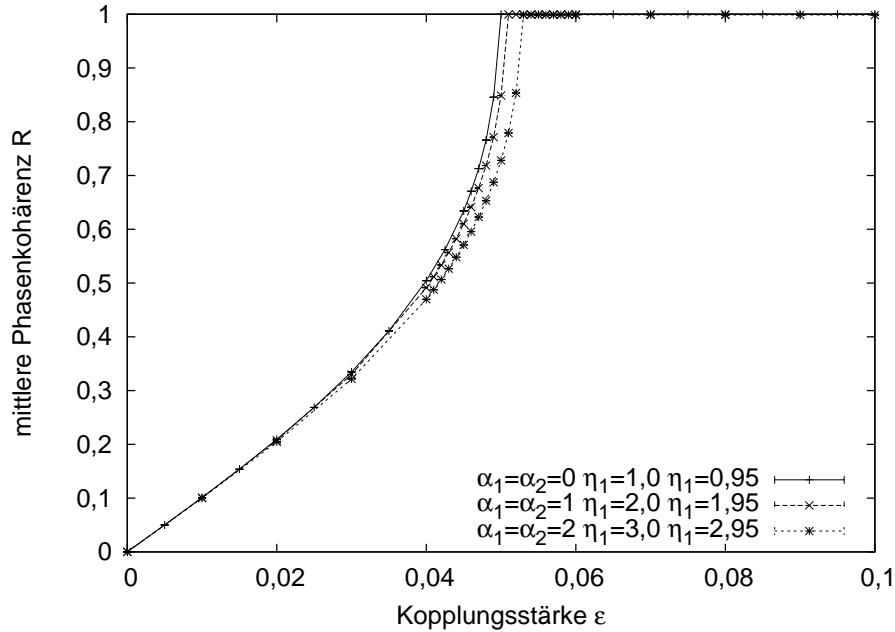


Abbildung 5.2.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation zweier unverrauschter gekoppelter Landau-Stuart-Oszillatoren von der Kopplungsstärke ϵ für verschiedene Parameter α_i und η_i aber gleichbleibenden Phasengeschwindigkeiten ω_{O_i} .

Zunächst wird der Einfluss des weißen Rauschens auf die Phasensynchronisation gekoppelter, nicht identischer Landau-Stuart-Systeme beschrieben. So wie bei den Untersuchungen zur stochastischen Synchronisation ungekoppelter Systeme, ist dieser Oszillator auch hier wieder wegen seiner einfachen Dynamik der Startpunkt der Untersuchungen. Die betrachtete Dynamik ist durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_0 = x_0 - \eta_1 x_1 - (x_0^2 + x_1^2)(x_0 - \alpha_1 x_1) + \epsilon(y_0 - x_0) + \xi(t) \quad (5.8a)$$

$$\dot{x}_1 = x_1 + \eta_1 x_0 - (x_0^2 + x_1^2)(x_1 + \alpha_1 x_0) \quad (5.8b)$$

$$\dot{y}_0 = y_0 - \eta_2 y_1 - (y_0^2 + y_1^2)(y_0 - \alpha_2 y_1) + \epsilon(x_0 - y_0) + \xi(t) \quad (5.8c)$$

$$\dot{y}_1 = y_1 + \eta_2 y_0 - (y_0^2 + y_1^2)(y_1 + \alpha_2 y_0) \quad (5.8d)$$

gegeben. Der Grenzyklus des Landau-Stuart-Oszillators ist der Einheitskreis, d. h. der Koordinatenursprung liegt innerhalb des Grenzyklus. Daher ist es möglich, die beiden Oszillatorphasen θ_1 und θ_2 über die Polarkoordinaten der Vektoren (x_0, x_1) und (y_0, y_1) zu definieren. Die Abbildung 5.2 zeigt für verschiedene Parameter $\alpha_1 = \alpha_2$, η_1 und η_2 mit $\omega_{O_1} = 1$ und $\omega_{O_2} = 0,95$ (d. h. die Frequenzdifferenz beträgt $\Delta\omega_O = 0,05$, also 5%) die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Kopplungsstärke ϵ bei der Standardabweichung $\sigma = 0$, also ohne Rauschen. Es ist zu erkennen, dass die Phasensynchronisation mit zunehmender Kopplungsstärke zunimmt und ab der kritischen Kopplungsstärke $\epsilon_c \approx 0,05$ den Wert Eins annimmt, d. h. die Phasendifferenz $\theta_1 - \theta_2$ ist zeitlich konstant, die Oszillatoren sind vollständig phasensynchronisiert. Dabei nimmt ϵ_c mit größer werdenden α_i zu. In den folgenden Untersuchungen wurden die Oszillatorparameter immer so gewählt, dass

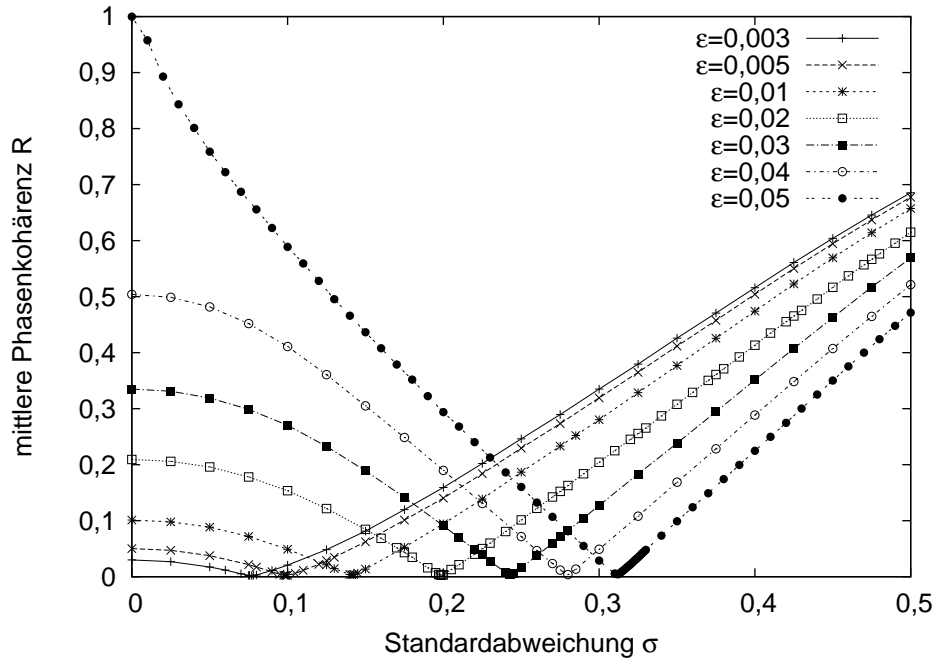


Abbildung 5.3.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation zweier gekoppelter Landau-Stuart-Oszillatoren bei verschiedenen Kopplungsstärken von der Standardabweichung σ des weißen Rauschens. Die Oszillatorparameter sind $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$ und $\eta_2 = 0,95$.

$\alpha_1 = \alpha_2$ galt und die Frequenzen $\omega_{O1} = 1$ bzw. $\omega_{O2} = 0,95$ betragen. Wie in der Einleitung zu diesem Kapitel bereits erwähnt wurde, sind bei der Untersuchung des Einflusses von Rauschen auf die Phasensynchronisation hauptsächlich Kopplungsstärken unterhalb der kritischen Kopplungsstärke interessant. Deshalb wurden in den nachfolgend vorgestellten numerischen Berechnungen Kopplungsstärken $\epsilon \leq 0,05$ verwendet und es wurde der Prädiktor-Korrektor-Integrationsalgorithmus aus Anhang B.3 zusammen mit dem Algorithmus für weißes Rauschen aus Anhang B.1 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ angewendet. Die Integrationsschrittweite betrug dabei jeweils $h = 0,01$. Die mittlere Phasenkohärenz R wurde gemäß der Formel (5.4) für neun Anfangsbedingungen mit einer Datenpunktzahl von jeweils $N = 5 \cdot 10^7$ berechnet. Mit dieser Datenpunktzahl gilt gemäß der Gleichung (5.5) $R_{\text{sig}} = 3,717 \cdot 10^{-4}$. Die in den Abbildungen dargestellten mittleren Phasenkohärenzen sind die Mittelwerte zu den jeweils neun Anfangsbedingungen, die Fehlerbalken stellen den statistischen Fehler dieses Mittelwertes dar. Zunächst stellt sich die Frage, wie die Phasensynchronisation bei verschiedenen Kopplungsstärken von der Standardabweichung σ bzw. der Varianz σ^2 abhängt. In der Abbildung 5.3 ist diese Abhängigkeit für Oszillatoren mit den Parametern $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$ und $\eta_2 = 0,95$ dargestellt. Diese Abhängigkeit weist bei allen Kopplungsstärken ein Minimum auf. Die Standardabweichung, bei der dieses Minimum liegt, wird nachfolgend mit σ_0 bezeichnet. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass σ_0 mit der Kopplungsstärke ϵ zunimmt. Weiterhin ist der Abbildung zu entnehmen, dass die Phasensynchronisation ab einer, von der Kopplungsstärke abhängigen Standardabweichung

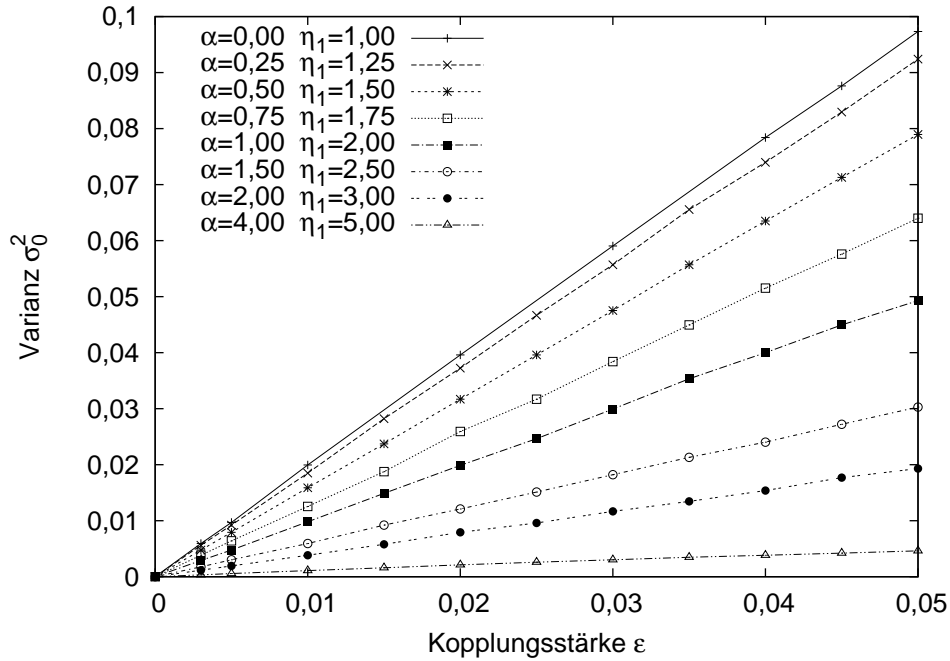


Abbildung 5.4.: Abhängigkeit der Varianz σ_0^2 von der Kopplungsstärke ϵ für verschiedene Parameterkombinationen des Landau-Stuart-Oszillators mit $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Die Steigung m_α der Geraden nimmt mit zunehmendem α ab.

chung σ_c größer ist als ohne Rauschen, also bei $\sigma = 0$. Ebenso wie σ_0 nimmt σ_c mit der Kopplungsstärke zu. Da R nicht größer als Eins werden kann, muss σ_c insbesondere bei der kritischen Kopplungsstärke ϵ_c , ab der definitionsgemäß $R = 1$ gilt, divergieren. Nun stellt sich die Frage, ob zu diesen Abhängigkeiten ein funktioneller Zusammenhang gefunden werden kann. Diese Frage kann teilweise positiv beantwortet werden. Die Abbildung 5.4 stellt die Abhängigkeit der Varianz σ_0^2 von der Kopplungsstärke ϵ für verschiedene Parameterkombinationen α_i, η_i dar. Offenkundig hängt σ_0^2 linear von ϵ ab und der funktionelle Zusammenhang kann für alle betrachteten $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ durch eine Geradengleichung der Form

$$\sigma_0^2 = m_\alpha \epsilon, \quad (5.9)$$

also einer Ursprungsgeraden, beschrieben werden. Wie der Abbildung 5.4 zu entnehmen ist, hängt die Steigung m_α von dem Oszillatorparameter α ab. Zur numerischen Ermittlung der Geradensteigungen m_α wurden Anpassungen mit der Funktion (5.9) durchgeführt. Die so ermittelten Steigungen m_α sind in der Abbildung 5.5 gegen den Parameter α aufgetragen. Offensichtlich nimmt m_α monoton mit α ab und geht für große α möglicherweise gegen Null. Die durchgeführten numerischen Berechnungen zeigten mit zunehmendem α jedoch eine zunehmende Abweichung vom linearen Zusammenhang $\sigma_0^2 = m_\alpha \epsilon$. Im Rahmen dieser Arbeit konnte nicht mehr geklärt werden, ob diese Abweichung vom linearen funktionellen Zusammenhang lediglich aufgrund numerischer Fehler zustande kommt oder ob die Gleichung (5.9) nur für $\alpha = 0$ exakt erfüllt ist. Zur Klärung dieser Frage wären weitere

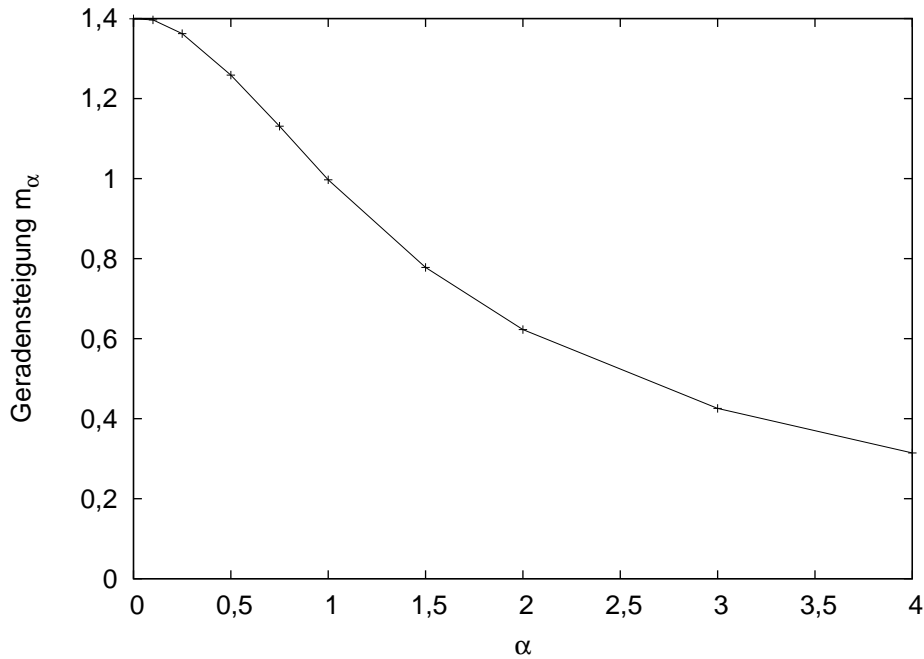


Abbildung 5.5.: Steigungen m_α der in Abbildung 5.4 dargestellten Geraden in Abhängigkeit des Parameters α des Landau-Stuart-Oszillators.

theoretische Untersuchungen des Phänomens nötig. Weitere *numerische* Untersuchungen scheinen zumindest mit den in dieser Arbeit verwendeten Verfahren nicht sinnvoll zu sein. Die Abhängigkeit der kritischen Varianz σ_c^2 von der Kopplungsstärke ϵ ist in der Abbildung 5.6 für zwei Werte des Parameters α dargestellt. In Ermangelung eines analytischen Ausdrucks für den funktionellen Zusammenhang zwischen σ_c^2 und ϵ wurde die Funktion

$$\epsilon = a \left(1 - \exp \left(-\frac{\sigma_c^2}{b^2} \right) \right) \quad (5.10)$$

mit den Anpassungsparametern a und b an die Daten angepasst. Durch Auflösen nach σ_c^2 folgt sofort die Gleichung

$$\sigma_c^2 = b^2 \ln \left(\frac{a}{a - \epsilon} \right). \quad (5.11)$$

Es ist zu beachten, dass in der Abbildung 5.6 die in der Gleichung (5.11) definierte Funktion mit den Parametern a und b , welche durch die Anpassung mit der Gleichung (5.10) gewonnen wurden, dargestellt ist. Die Funktion (5.11) wurde nicht zum Anpassen verwendet, da sie bei a divergiert und somit numerisch schwierig zu handhaben ist. Die Gleichung (5.10) hingegen ist numerisch unproblematisch und die Anpassung leicht durchführbar. Da die kritische Varianz σ_c^2 bei der kritischen Kopplungsstärke ϵ_c divergieren muss, ist zu erwarten, dass der Anpassungsparameter a mit ϵ_c identisch ist. Die durchgeführten Kurvenanpassungen lieferten die Anpassungsparameter $a = 0,0517$ und $b = 0,1739$ für $\alpha = 0$ bzw. $a = 0,0492$ und $b = 0,095$ für $\alpha = 1$. Jedoch lassen die Werte für den Anpassungsparameter

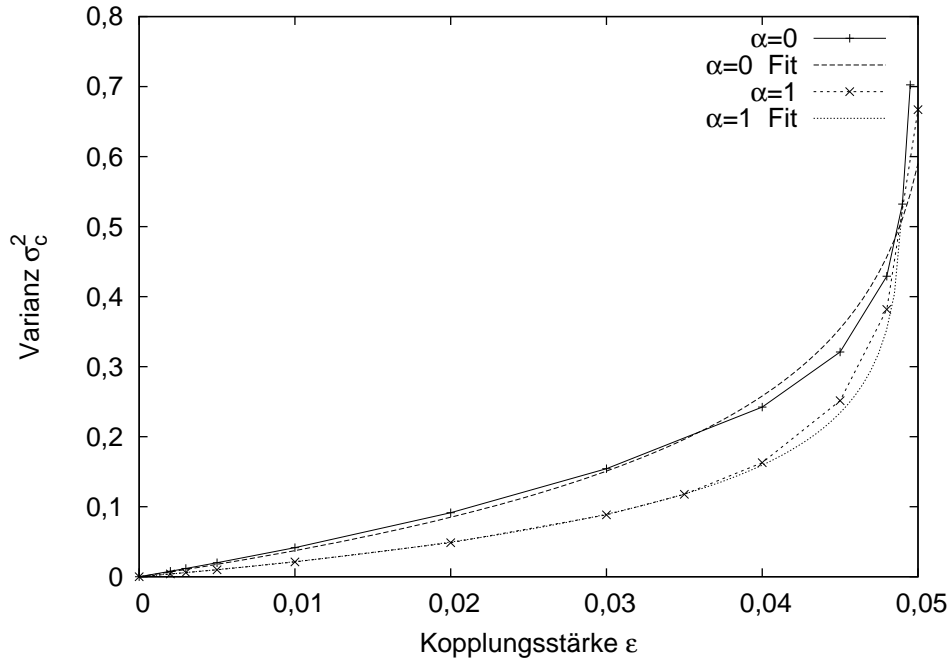


Abbildung 5.6.: Abhängigkeit der kritischen Varianz σ_c^2 zweier gekoppelter Landau-Stuart-Oszillatoren von der Kopplungsstärke. Bei ϵ_c divergiert σ_c^2 .

a darauf schließen, dass die Gleichung (5.11) den funktionellen Zusammenhang nicht adäquat beschreibt. Der Abbildung 5.2 ist zu entnehmen, dass die kritische Kopplungsstärke mit α zunimmt, jedoch ist der Anpassungsparameter a für $\alpha = 1$ kleiner als für $\alpha = 0$, was dem widerspricht. Im Rahmen dieser Arbeit wurden auch andere Ansätze erprobt, jedoch erwies sich der hier vorgestellte als Bester. Es ist mithin nicht gelungen, den genauen funktionellen Zusammenhang zwischen ϵ_c und σ_c zu ermitteln.

Als weiterer Oszillator wurde der van-der-Pol-Oszillator untersucht. Die betrachtete Dynamik ist durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_0 = 2\gamma_1(1 - \beta_1 x_1^2)x_0 - \omega_{01}^2 x_1 + \epsilon(y_0 - x_0) + \xi(t) \quad (5.12a)$$

$$\dot{x}_1 = x_0 \quad (5.12b)$$

$$\dot{y}_0 = 2\gamma_2(1 - \beta_2 y_1^2)y_0 - \omega_{02}^2 y_1 + \epsilon(x_0 - y_0) + \xi(t) \quad (5.12c)$$

$$\dot{y}_1 = y_0 \quad (5.12d)$$

gegeben. In den nachfolgend vorgestellten Untersuchungen wurden die Parameter $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\omega_{01} = 1$ und $\omega_{02} = 0,95$ verwendet. Da der van-der-Pol-Oszillator mit diesen Parametern nur schwach nichtlinear ist, ist der Grenzzyklus nahezu ein Kreis und die Kreisfrequenzen ω_{O1} und ω_{O2} stimmen nahezu mit ω_{01} und ω_{02} überein. Da der Koordinatenursprung innerhalb des Grenzzyklus liegt, kann hier, ebenso wie beim Landau-Stuart-Oszillator, eine Phase θ direkt über die Polarkoordinaten definiert werden. Die Abbildung 5.7 zeigt für die oben genannten Oszillatorparameter (d. h. die Frequenzdifferenz beträgt $\Delta\omega_O \approx 0,05$, also ca. 5%) die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der

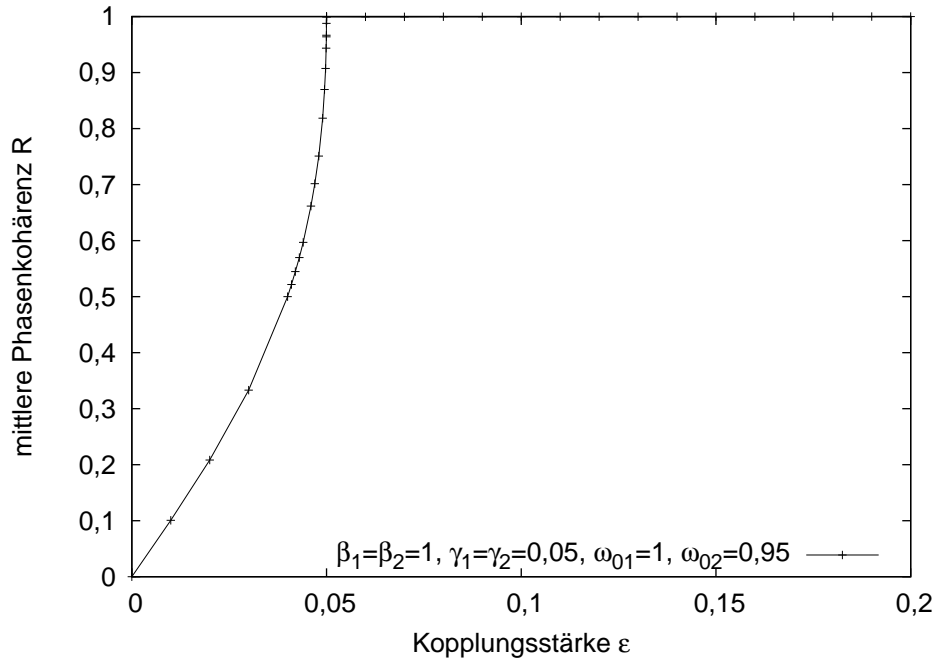


Abbildung 5.7.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation zweier unverrauschter gekoppelter van-der-Pol-Oszillatoren von der Kopplungsstärke ϵ .

Kopplungsstärke ϵ . Es ist zu erkennen, dass die mittlere Phasenkohärenz mit zunehmender Kopplungsstärke zunimmt und ab der kritischen Kopplungsstärke $\epsilon_c \approx 0,05$ den Wert Eins annimmt, d. h. die Oszillatoren sind vollständig phasensynchronisiert, die Phasendifferenz $\theta_1 - \theta_2$ ist zeitlich konstant. In weiteren numerischen Untersuchungen wurde bei mehreren unterkritischen Kopplungsstärken ϵ die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Varianz σ^2 des weißen Rauschens ermittelt. Die Abbildung 5.8 stellt die Ergebnisse dieser Berechnungen dar. Im Gegensatz zum Landau-Stuart-Oszillator schwächt Rauschen mit niedrigen Varianzen die Phasensynchronisation bei niedrigen Kopplungsstärken nicht. Stattdessen nimmt R monoton mit der Varianz σ^2 zu. Lediglich bei $\epsilon = 0,05$, also oberhalb der kritischen Kopplungsstärke ϵ_c , ist eine Schwächung von R bei niedrigen σ erkennbar. Offenkundig ist das beim Landau-Stuart-Oszillator beobachtete Phänomen der Senkung des Niveaus der Phasensynchronisation nicht universell.

Der letzte untersuchte Oszillator ist der FitzHugh-Nagumo-Oszillator. Die betrachtete Dynamik ist durch die stochastischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_0 = x_0 - \frac{x_0^3}{3} - x_1 + I_1 + \epsilon(y_0 - x_0) + \xi(t) \quad (5.13a)$$

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_0 + a_1 - b_1 x_1) \quad (5.13b)$$

$$\dot{y}_0 = y_0 - \frac{y_0^3}{3} - y_1 + I_2 + \epsilon(x_0 - y_0) + \xi(t) \quad (5.13c)$$

$$\dot{y}_1 = \varphi_2(y_0 + a_2 - b_2 y_1) \quad (5.13d)$$

gegeben. Hierbei ist zu beachten, dass die Variablenbezeichnungen E und U der Gleichung

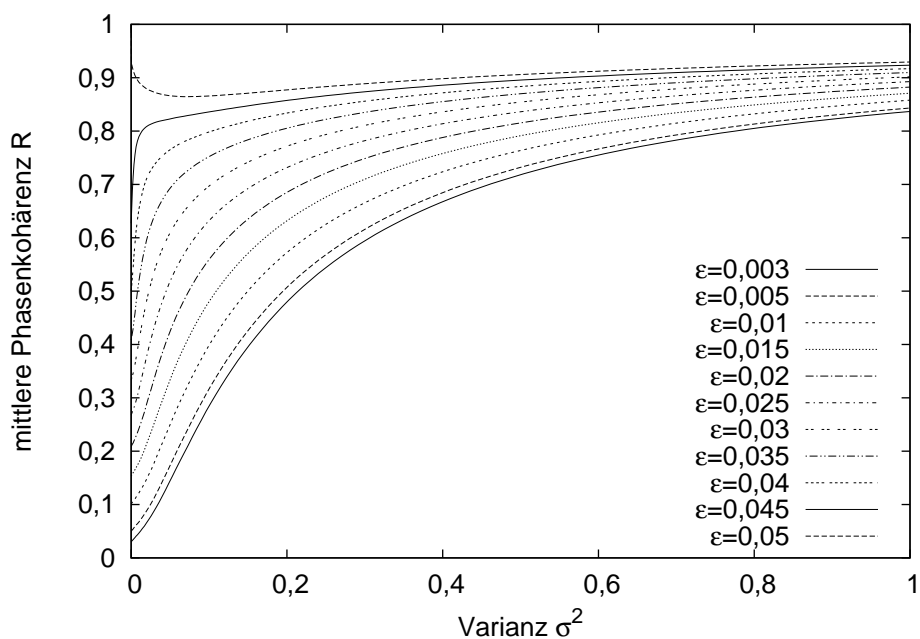


Abbildung 5.8.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation zweier gekoppelter van-der-Pol-Oszillatoren bei verschiedenen Kopplungsstärken von der Varianz σ^2 des weißen Rauschens. Die Oszillatorparameter sind $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\omega_{01} = 1$ und $\omega_{02} = 0,95$.

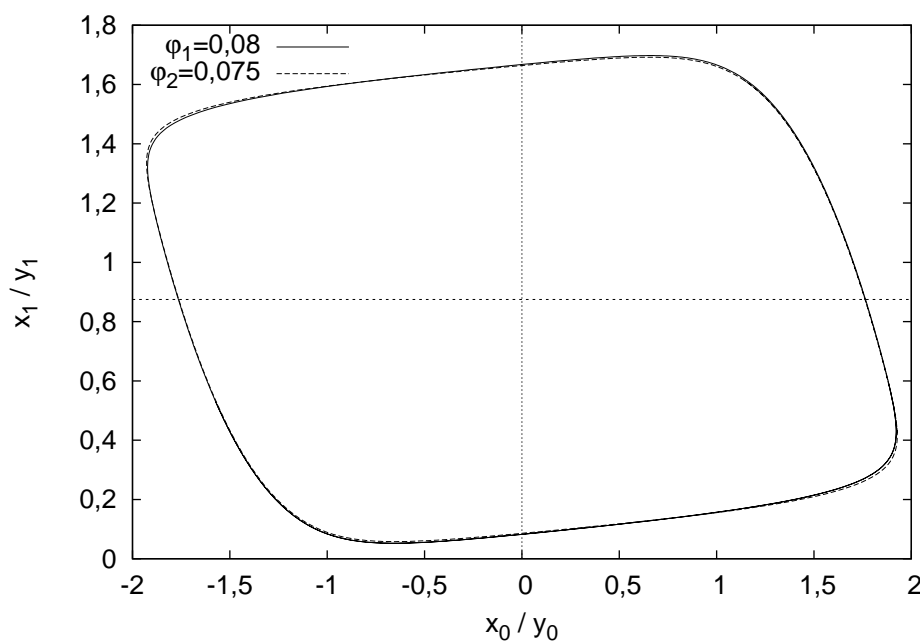


Abbildung 5.9.: Grenzzyklen der FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren mit den Parametern $I_1 = I_2 = 0,875$, $a_1 = a_2 = 0,7$, $b_1 = b_2 = 0,8$, $\varphi_1 = 0,08$ und $\varphi_2 = 0,075$. Die horizontale Linie ist durch $x_1 = y_1 = 0,875$ gegeben.

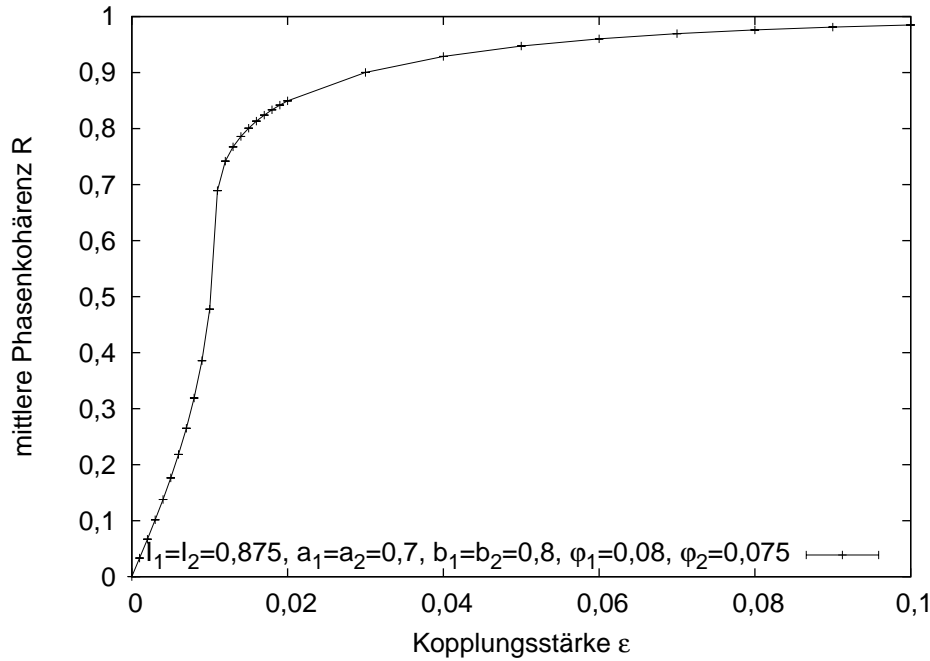


Abbildung 5.10.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation zweier unverrauschter gekoppelter FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren von der Kopplungsstärke ϵ .

(2.92) zugunsten einer einheitlichen Notation innerhalb dieses Kapitels durch x_0 und x_1 bzw. y_0 und y_1 ersetzt wurden. Die numerischen Untersuchungen wurden mit den Parametern $I_1 = I_2 = 0,875$, $a_1 = a_2 = 0,7$, $b_1 = b_2 = 0,8$, $\varphi_1 = 0,08$ und $\varphi_2 = 0,075$ verwendet. Dies sind also im Wesentlichen die im Abschnitt 2.4.2 eingeführten Standardparameter nach [Cro87, Koc99]. Es wurde lediglich die Erholungsvariable φ_2 zu Einstellung der Oszillatorfrequenz ω_{O2} verändert. Mit diesen Parametern betragen die Frequenzen $\omega_{O1} \approx 0,173$ und $\omega_{O2} \approx 0,164$ (d. h. die Frequenzdifferenz beträgt $\Delta\omega_O \approx 0,009$, also ca. 5,2%). Die zugehörigen Grenzzyklen sind in der Abbildung 5.9 dargestellt. Offenkundig sind beide Grenzzyklen nahezu identisch. Die vertikale Linie markiert die Werte $x_0 = y_0 = 0$ und die horizontale Linie markiert die Werte $x_1 = y_1 = 0,875$. Die beiden Grenzzyklen sind punktsymmetrisch bezüglich des Schnittpunktes der beiden Geraden. Die Phase θ wurde über Polarkoordinaten mit dem Koordinatenursprung $(0, 0,875)$ definiert. Die Abbildung 5.10 stellt im Fall ohne Rauschen die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Kopplungsstärke ϵ dar. Anders als bei dem Landau-Stuart-Oszillator und dem van-der-Pol-Oszillator nähert sich R mit steigendem ϵ nur langsam dem Wert Eins. Möglicherweise können die hier betrachteten FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren nicht vollständig phasensynchronisiert werden, sondern R nähert sich nur asymptotisch an Eins an. Da diese Frage im hier betrachteten Kontext aber von geringem Interesse ist, wurde dieser Aspekt nicht weiter untersucht, sondern in weiteren numerischen Untersuchungen wurde bei mehreren Kopplungsstärken ϵ die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Varianz σ^2 des weißen Rauschens ermittelt. Die Abbildung 5.11 stellt die Ergebnisse dieser Berechnungen dar. Bei kleinen Kopplungsstärken $\epsilon < 0,01$ nimmt R monoton mit der Varianz σ des Rauschens zu. Bei Kopplungsstärken $\epsilon \geq 0,01$

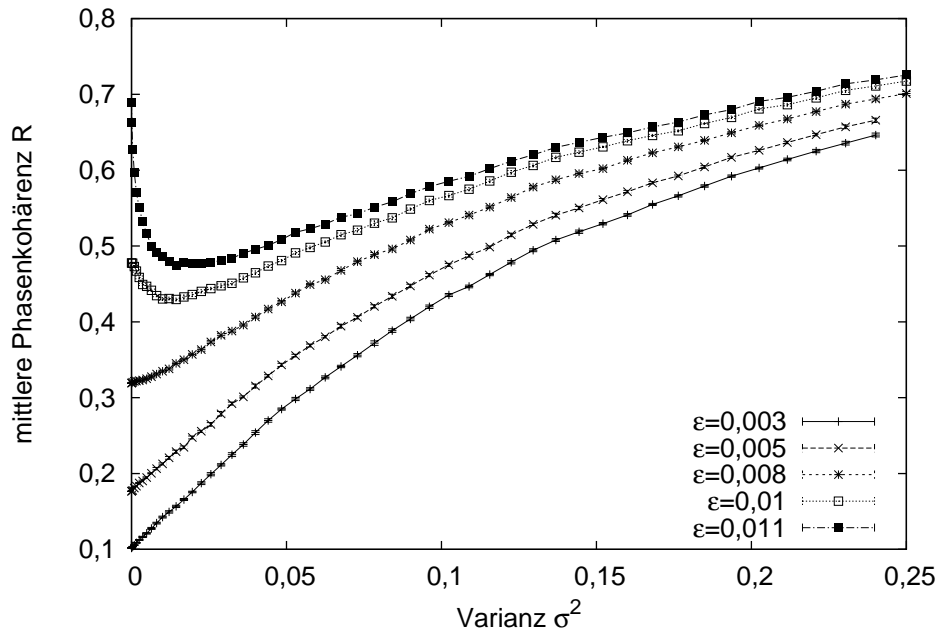


Abbildung 5.11.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation bei verschiedenen Kopplungsstärken von der Standardabweichung σ des weißen Rauschens. Die Parameter der FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren sind $I_1 = I_2 = 0,875$, $a_1 = a_2 = 0,7$, $b_1 = b_2 = 0,8$, $\varphi_1 = 0,08$ und $\varphi_2 = 0,075$.

nimmt R , so wie beim Landau-Stuart-Oszillator, bei kleinen σ ab, d. h. schwaches Rauschen mindert den Grad der dynamischen Abhängigkeit der Phasen. Bei höheren Varianzen nimmt die Phasensynchronisation wieder zu und wird ab einer gewissen kritischen Varianz größer als ohne Rauschen.

5.2.1. Zusammenfassung

Es wurde am Beispiel dreier Oszillatoren der Einfluss von gemeinsamem weißem gaußschem Rauschen auf die Phasensynchronisation gekoppelter periodischer Oszillatoren mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen untersucht. Die Phasensynchronisation wurde durch das Maß der mittleren Phasenkohärenz R erfasst bzw. quantifiziert. Es wurde bei verschiedenen Kopplungsstärken die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Standardabweichung σ bzw. der Varianz σ^2 des Rauschens betrachtet. Bei dem Landau-Stuart-Oszillator ist die mittlere Phasenkohärenz bei schwachem Rauschen niedriger als ohne Rauschen. Die Varianz σ_0^2 , bei der R minimal ist, nimmt linear mit der Kopplungsstärke ϵ zu. Die kritische Varianz σ_c^2 , ab der R größer ist als ohne Rauschen, nimmt monoton mit ϵ zu und divergiert bei der kritischen Kopplungsstärke ϵ_c , ab der im Fall ohne Rauschen $R = 1$ gilt. Es ist festzustellen, dass gemeinsames weißes Rauschen bei Landau-Stuart-Oszillatoren sowohl konstruktiv als auch destruktiv wirken kann, in dem Sinne, dass es das Niveau der Phasensynchronisation sowohl senken als auch erhöhen kann. Es erscheint, als würden die Kopplung und das Rauschen die Oszillatordynamik in gewissem Sinne konkurrierend be-

einflussen. Da der Landau-Stuart-Oszillator die topologische Normalform eines Oszillators ist, der eine superkritische Hopfbifurkation durchläuft, ist dieses Phänomen möglicherweise auch bei anderen Oszillatoren in der Nähe einer superkritischen Hopfbifurkation beobachtbar und somit universell für diese Klasse von Oszillatoren.

Des Weiteren wurden schwach nichtlineare van-der-Pol-Oszillatoren untersucht. Auch hier konnte beobachtet werden, dass die Phasen der Oszillatoren ohne Rauschen ab einer kritischen Kopplungsstärke vollständig synchronisieren. Für Kopplungsstärken, welche viel kleiner als die kritische Stärke sind, steigt R für kleine Varianzen σ^2 des Rauschens fast linear mit σ^2 an. Anders als beim Landau-Stuart-Oszillator konnte unterhalb von ϵ_c keine durch das Rauschen verursachte Minderung der Phasensynchronisation beobachtet werden. Das Rauschen wirkt sich unterhalb der kritischen Kopplungsstärke also ausschließlich konstruktiv auf die Phasensynchronisation aus. Es kann spekuliert werden, dass diese Auswirkung des Rauschens möglicherweise bei allen hinreichend schwach nichtlinearen Oszillatoren zu beobachten ist.

Als letztes wurden gekoppelte FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren betrachtet. Es stellte sich heraus, dass bei kleinen Kopplungsstärken und kleinen Varianzen die mittlere Phasenkohärenz R nahezu linear von σ^2 abhängt. Bei größeren Kopplungsstärken senkt schwaches Rauschen das Niveau der Phasensynchronisation, und die Abhängigkeit der Phasenkohärenz von σ^2 weist ähnlich wie bei gekoppelten Landau-Stuart-Oszillatoren ein Minimum auf. Gewissermaßen stellt diese Abhängigkeit einen Übergang zwischen denen des Landau-Stuart-Oszillators und des van-der-Pol-Oszillators dar.

Bezüglich der Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Varianz des Rauschens konnte im Rahmen dieser Arbeit keine allgemeine Gesetzmäßigkeit ermittelt werden. Möglicherweise können solche Gesetzmäßigkeiten aber für Klassen von Oszillatoren gefunden werden. Eine Klasseneinteilung könnte z. B. hinsichtlich der Bifurkationen, welche bei Oszillatoren auftreten, erfolgen. Um zu einem tieferen Verständnis der hier gemachten Beobachtungen zu gelangen, sind jedoch genauere theoretische Betrachtungen notwendig.

5.3. Einfluss von farbigem Rauschen

Im vorherigen Abschnitt wurde der Einfluss von externem weißem gaußischem Rauschen auf die Phasensynchronisation gekoppelter periodischer Oszillatoren behandelt. Wie bereits erwähnt wurde (siehe z. B. Abschnitt 3.3), ist die Approximation von in natürlichen Systemen vorkommenden Fluktuationen durch weißes Rauschen jedoch nur dann zulässig, wenn deren Autokorrelationszeiten verglichen mit den typischen Zeitskalen der Systeme sehr kurz sind. Diese Approximation ist jedoch oft nicht gerechtfertigt. Aus diesem Grunde wird in diesem Abschnitt der Einfluss von farbigem Rauschen, welches durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess (vgl. Abschnitt 2.2.2) modelliert wird, auf Phasensynchronisation gekoppelter Oszillatoren betrachtet. Ebenso wie im letzten Abschnitt werden diffusiv gekoppelte Oszillatoren behandelt, in deren nullte Komponente das Rauschen einkoppelt. Die betrachteten stochastischen Differentialgleichungen haben die Form wie die Gleichungen (5.6), wobei $\xi(t)$ jedoch durch den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit den statistischen

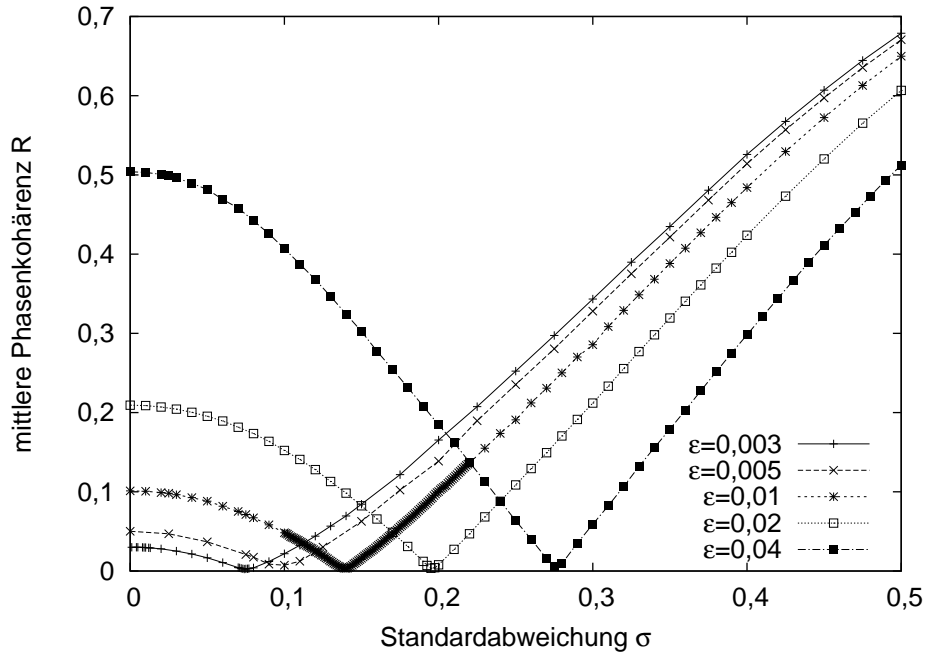


Abbildung 5.12.: Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R zweier gekoppelter Landau-Stuart-Oszillatoren bei verschiedenen Kopplungsstärken von der Standardabweichung σ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Die verwendeten Parameter waren $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0,95$ und $\tau = 1$.

Eigenschaften

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad (5.14a)$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|t-s|}{\tau}\right), \quad (5.14b)$$

zu ersetzen ist, wobei τ die Korrelationszeit und σ^2 die Varianz bezeichnen. Zur Integration aller untersuchten stochastischen Differentialgleichungen wurde der Prädiktor-Korrektor-Integrationsalgorithmus aus Anhang B.3 zusammen mit dem Algorithmus für farbiges Rauschen aus Anhang B.2 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^{3/2})$ verwendet. Die Integrationsschrittweite betrug dabei jeweils $h = 0,01$. Die Berechnung der mittleren Phasenkohärenz R erfolgte nach der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Methode mit jeweils $N = 5 \cdot 10^7$ Datenpunkten, d. h. es gilt $R_{\text{sig}} = 3,717 \cdot 10^{-4}$.

Zunächst wird der Einfluss des farbigen Rauschens auf die Phasensynchronisation gekoppelter, nicht identischer Landau-Stuart-Systeme beschrieben. Die betrachtete Dynamik ergibt sich also durch Ersetzen von $\xi(t)$ durch $\zeta(t)$ in den Gleichungen (5.8). Wie im vorherigen Abschnitt wurden bei den numerischen Untersuchungen die Parameter $\alpha_1 = \alpha_2$, η_1 und η_2 so gewählt, dass die Oszillatorfrequenzen $\omega_{O1} = 1$ und $\omega_{O2} = 0,95$ waren. Die Abbildung 5.12 zeigt für verschiedene Kopplungsstärken ϵ die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz von der Standardabweichung σ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Die dabei verwendeten Parameter lauten $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0,95$ und $\tau = 1$. Wie bei

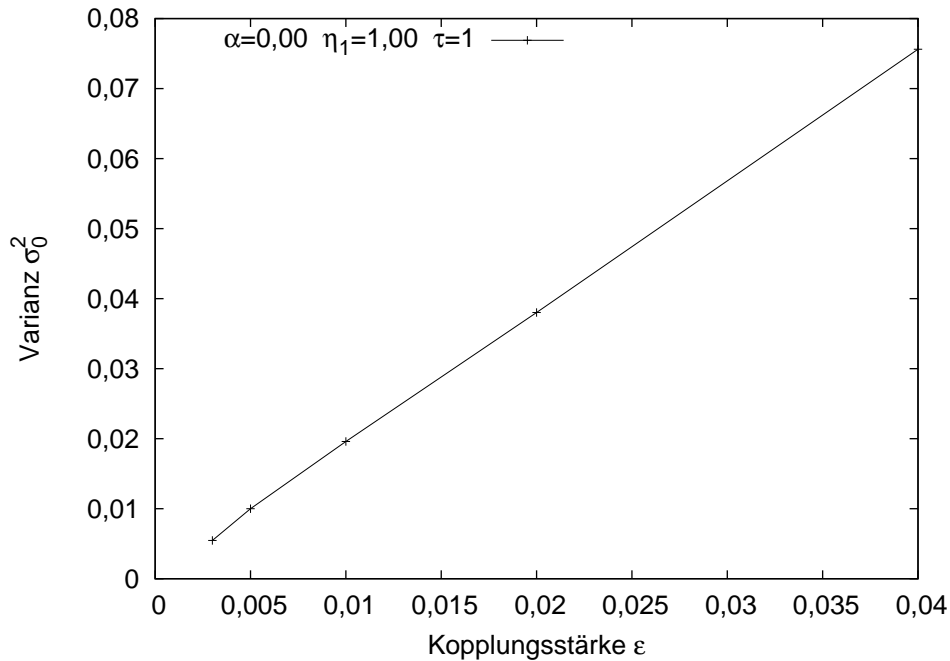


Abbildung 5.13.: Abhängigkeit der Varianz σ_0^2 von der Kopplungsstärke ϵ der gekoppelten Landau-Stuart-Oszillatoren mit der Parameterkombination $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0,95$ und $\tau = 1$.

den Untersuchungen mit weißem Rauschen weist diese Abhängigkeit ein Minimum auf. Die Standardabweichung, bei der dieses Minimum liegt, wird auch hier mit σ_0 bezeichnet. Da diese Abhängigkeit bei anderen Parametern qualitativ gleich ist, wurde sie lediglich mit dieser Parameterkombination genauer untersucht. Die Abbildung 5.13 zeigt, dass zwischen der Kopplungsstärke ϵ und σ_0^2 ein linearer Zusammenhang besteht. Auch hier zeigt sich also wieder qualitativ die gleiche Abhängigkeit wie bei weißem Rauschen. Da die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz von der Varianz σ^2 bei fester Korrelationszeit also qualitativ genau so ist wie bei weißem Rauschen, wird dieser Aspekt mit farbigem Rauschen in diesem Abschnitt nicht mehr eingehender beleuchtet. Stattdessen liegt das Hauptaugenmerk auf der Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Die Abbildung 5.14 stellt die Ergebnisse dieser Untersuchungen für zwei mit der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,01$ gekoppelten Landau-Stuart-Oszillatoren für verschiedene Standardabweichungen σ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses dar. Die bei den Berechnungen verwendeten Parameter waren $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$ und $\eta_2 = 0,95$. Die obere Graphik der Abbildung 5.14 stellt diese Abhängigkeit für Standardabweichungen unterhalb der kritischen Standardabweichung $\sigma_c \approx 0,2$ dar. Offenkundig ist die mittlere Phasenkohärenz bei Rauschen mit Korrelationszeiten in der Nähe des resonanten Falles bei $\tau = 1$ minimal, d. h. die Phasensynchronisation ist dort am schwächsten. An dieser Stelle sei an den Abschnitt 3.3 erinnert, in dem gezeigt wurde, dass bei identischen ungekoppelten Oszillatoren die Lyapunovexponenten λ_1 und λ_ϕ im resonanten Fall minimal sind und der Synchronisationsfehler \mathcal{E} bei nicht identischen ungekoppelten Oszillatoren ebenso minimal

(vgl. 3.18) ist. Demzufolge müsste die Phasensynchronisation jedoch maximal sein, was in klarem Widerspruch zu den gemachten Beobachtungen steht. Also kann selbst eine relativ schwache Kopplung die Auswirkung von farbigem Rauschen auf die Synchronisationseigenschaften gegenüber ungekoppelten Oszillatoren qualitativ beeinflussen. Dieses Verhalten ändert sich jedoch, wenn die Standardabweichung in der Nähe der kritischen Standardabweichung σ_c liegt oder größer als diese ist. Der untere Teil der Abbildung 5.14 präsentiert die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Korrelationszeit bei eben solchen Standardabweichungen. Bei den Standardabweichungen $\sigma = 0,15$, $\sigma = 0,175$ und $\sigma = 0,2$ nimmt R bei kleinen Korrelationszeiten ab und erreicht ein Minimum bei ca. $\tau = 0,5$, dem ein lokales Maximum bei $\tau = 1$ folgt. Bei den Standardabweichungen, welche größer als die kritische Standardabweichung sind, verschwindet das Minimum und es verbleibt das Maximum bei der resonanten Korrelationszeit $\tau = 1$. Bei diesen Standardabweichungen ist die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Korrelationszeit also so, wie es die Ergebnisse bei ungekoppelten Oszillatoren erwarten lassen. Wie die Abbildung 5.15 zeigt, lassen sich diese Phänomene nicht nur bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,01$ beobachten. Diese Abbildung stellt R in Abhängigkeit von τ für die Standardabweichungen $\sigma = 0,1$ und $\sigma = 0,2$ bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,03$ dar. Bei $\sigma = 0,1$ zeigt sich ein einzelnes Minimum bei $\tau = 1$, während bei $\sigma = 0,2$ einem Minimum bei $\tau \approx 0,5$ ein Maximum bei $\tau \approx 1$ folgt.

Als weiterer Oszillator wurde der van-der-Pol-Oszillator untersucht. Die betrachtete Dynamik ergibt sich aus den Gleichungen (5.12) durch Substitution von $\xi(t)$ durch $\zeta(t)$. So wie im Abschnitt 5.2 wurden in den nachfolgend vorgestellten Untersuchungen die Parameter $\gamma_1 = \gamma_2 = 0,05$, $\beta_1 = \beta_2 = 1$, $\omega_{01} = 1$ und $\omega_{02} = 0,95$ verwendet. Die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R bei fester Korrelationszeit τ von der Varianz σ^2 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ist in der Abbildung 5.16 für die Kopplungsstärke $\epsilon = 0,03$ dargestellt. So wie bei dem Landau-Stuart-Oszillator zeigt sich, dass diese Abhängigkeit qualitativ gleich ist wie bei mit weißem Rauschen getriebenen van-der-Pol-Oszillatoren (vgl. Abbildung 5.8). Die weiteren numerischen Untersuchungen wurden nur mit dieser Kopplungsstärke durchgeführt, da bei anderen unterkritischen Kopplungsstärken qualitativ ähnliche Ergebnisse zu erwarten waren. Die Abbildung 5.17 zeigt die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Korrelationzeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei eben dieser Kopplungsstärke. Diese Abhängigkeit weist bei $\tau = 1$, also im resonanten Fall, im Gegensatz zum Landau-Stuart-Oszillator unabhängig von der Standardabweichung ein Maximum auf, also eine Abhängigkeit, wie sie von ungekoppelten van-der-Pol-Oszillatoren bekannt ist, bei denen die Lyapunovexponenten λ_1 und λ_ϕ im resonanten Fall minimal werden.

Der letzte untersuchte Oszillator ist der FitzHugh-Nagumo-Oszillator. Die betrachtete Dynamik ist durch die stochastischen Differentialgleichungen (5.13) mit der Substitution von $\xi(t)$ durch $\zeta(t)$ gegeben. So wie im Abschnitt 5.2 wurden in den nachfolgend vorgestellten numerischen Untersuchungen die Parameter $I_1 = I_2 = 0,875$, $a_1 = a_2 = 0,7$, $b_1 = b_2 = 0,8$, $\varphi_1 = 0,08$ und $\varphi_2 = 0,075$ verwendet. Die Abbildung 5.18 stellt die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R bei fester Korrelationszeit $\tau = 2$ (dies entspricht dem resonanten Fall, vgl. Abbildung 3.22 links oben) von der Varianz σ^2 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses für die Kopplungsstärken $\epsilon = 0,003$, $\epsilon = 0,01$ und $\epsilon = 0,011$ dar. Hier zeigt sich, ähnlich wie bei gekoppelten Landau-Stuart-Oszillatoren, dass die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz von σ ein Minimum aufweist und R erst ab einer bestimmten Standardabweichung

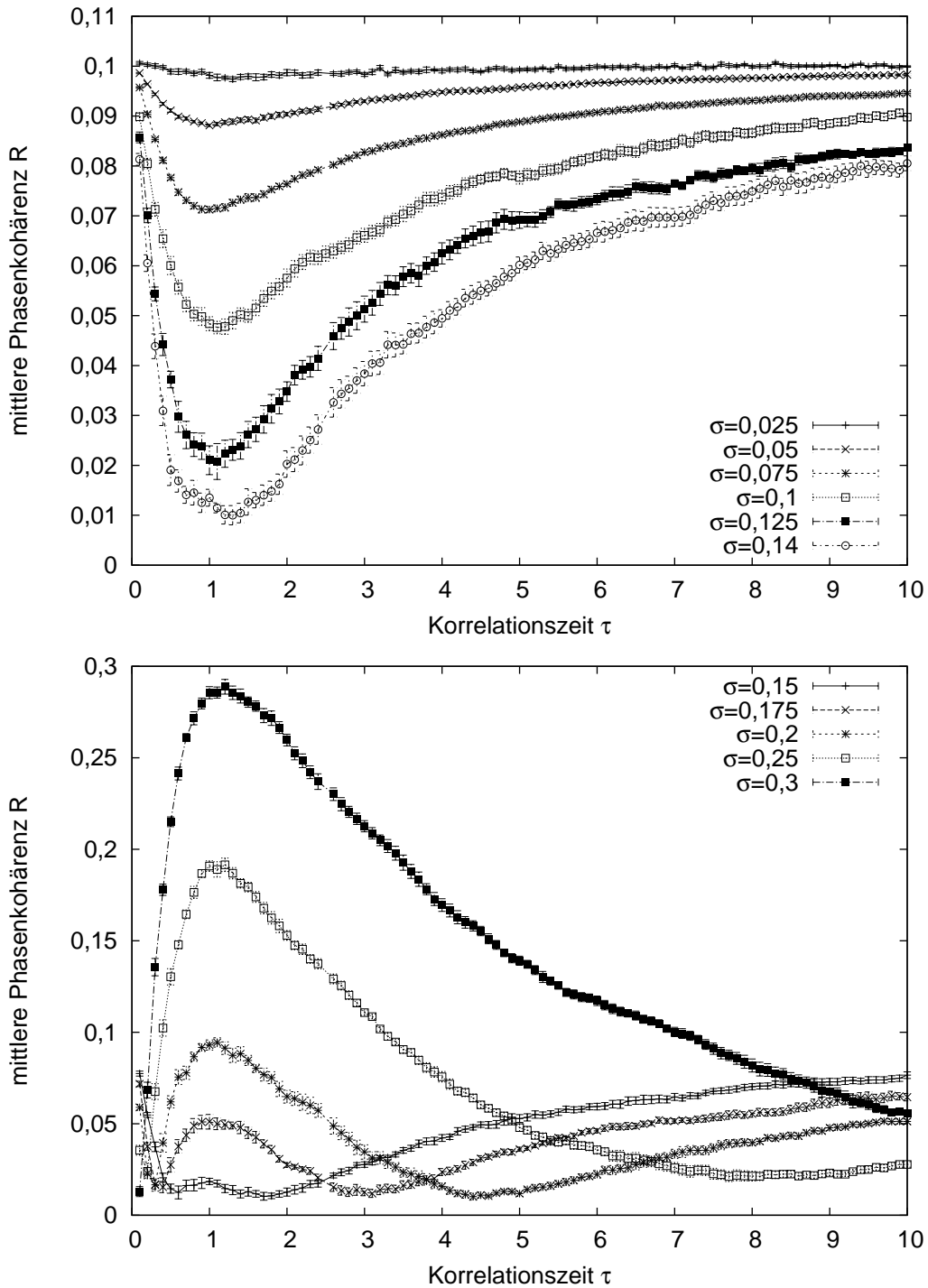


Abbildung 5.14.: Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R zweier gekoppelter Landau-Stuart-Oszillatoren von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,01$ und verschiedenen Standardabweichungen σ und der Parameterkombination $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0,95$.

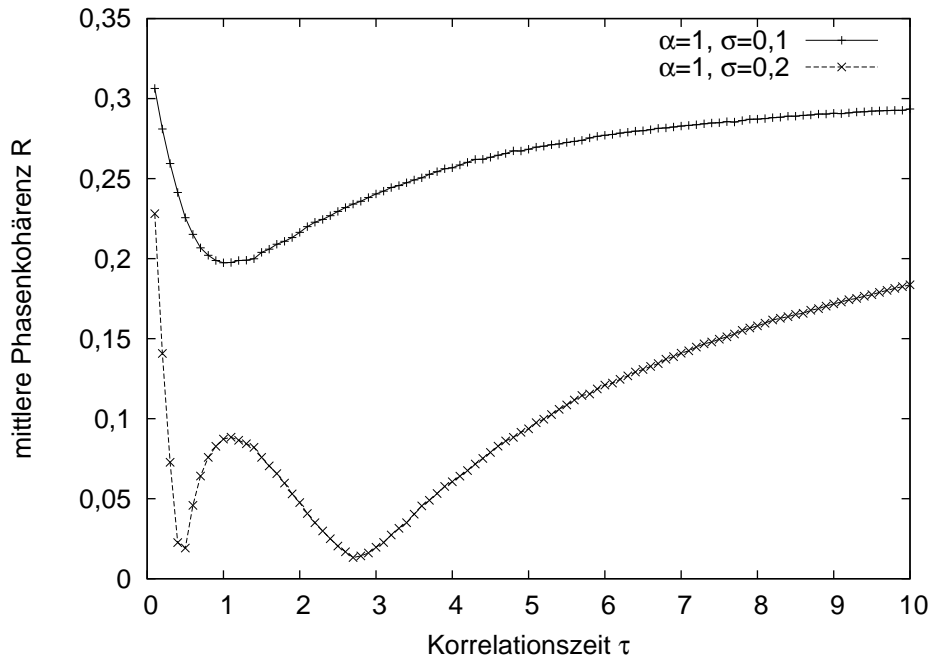


Abbildung 5.15.: Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R zweier gekoppelter Landau-Stuart-Oszillatoren von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,03$ und zwei verschiedenen Standardabweichungen σ und der Parameterkombination $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\eta_1 = 1$, $\eta_2 = 0,95$.

größer wird als ohne Rauschen.

Die letzte in diesem Abschnitt vorgestellte Untersuchung befasste sich mit der Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz von der Korrelationszeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei verschiedenen Standardabweichungen und den Kopplungsstärken $\epsilon = 0,003$, $\epsilon = 0,01$ und $\epsilon = 0,011$. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der Abbildung 5.19 dargestellt. Bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,003$ ist zu erkennen, dass R bei den Standardabweichungen $\sigma = 0,05$, $\sigma = 0,1$, $\sigma = 0,2$ und $\sigma = 0,3$ zunächst mit der Korrelationszeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses zunimmt und ein Maximum erreicht und langsam wieder abfällt. Es konnte numerisch bestätigt werden, dass dieses Verhalten auch bei $\sigma = 0,4$ gilt. Dies ist in der Abbildung 5.19 jedoch nicht erkennbar, da das Maximum schwach ausgeprägt ist und die Abszisse nur bis $\tau = 10$ dargestellt ist, um die Abbildungen kompakt zu halten und sich das Verhalten bei $\sigma = 0,4$ qualitativ nicht von dem bei den anderen σ unterscheidet. Bei den Kopplungsstärken $\epsilon = 0,01$ und $\epsilon = 0,011$ ist zu erkennen, dass die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses ein Minimum aufweist, welches sich mit zunehmender Standardabweichung σ hin zu kleineren τ verschiebt. Für große σ (z. B. bei $\epsilon = 0,01$ für $\sigma \geq 0,2$) sind diese Minima in dieser Darstellung nicht mehr auflösbar. Mit größer werdendem τ nimmt R ein Maximum an, ab dem es wieder langsam abfällt. Diese Maxima sind auch hier aus dem bereits erwähnten Grunde nicht bei allen Standardabweichungen erkennbar. Es konnten also so wie bei

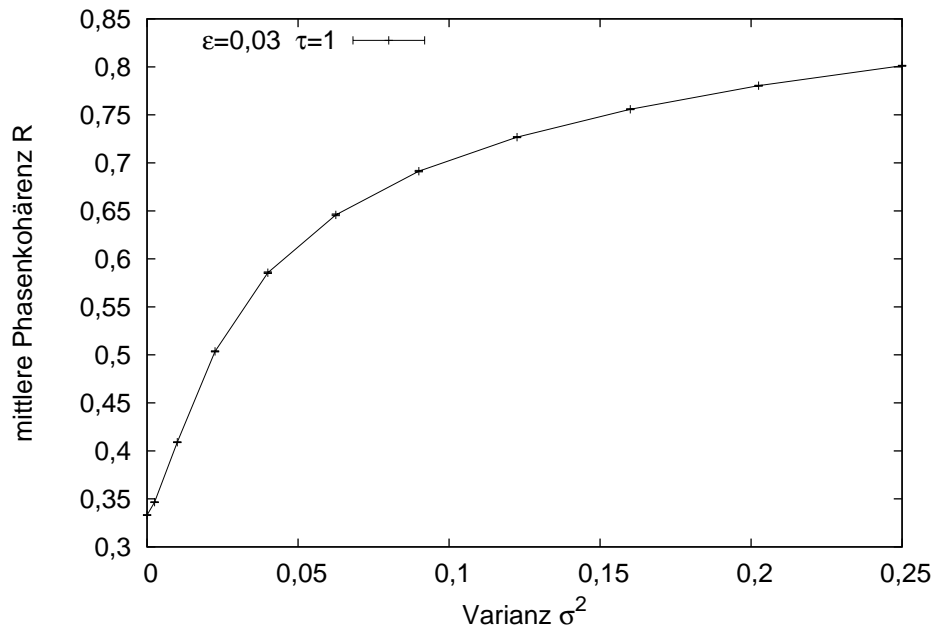


Abbildung 5.16.: Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R gekoppelter van-der-Pol-Oszillatoren bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,03$ und Korrelationszeit $\tau = 1$ von der Varianz σ^2 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

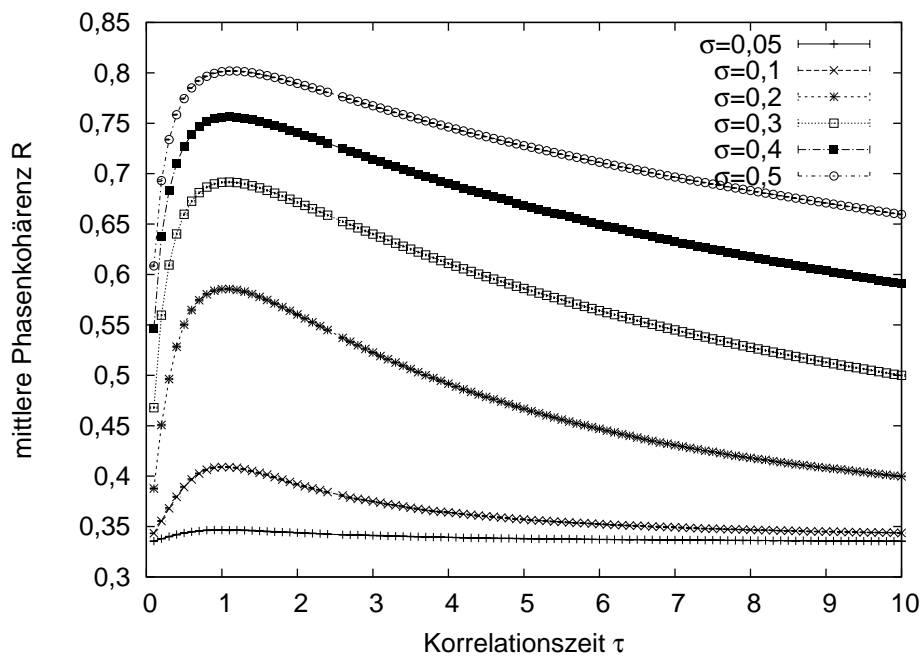


Abbildung 5.17.: Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R gekoppelter van-der-Pol-Oszillatoren von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei der Kopplungsstärke $\epsilon = 0,03$ und verschiedenen Standardabweichungen σ .

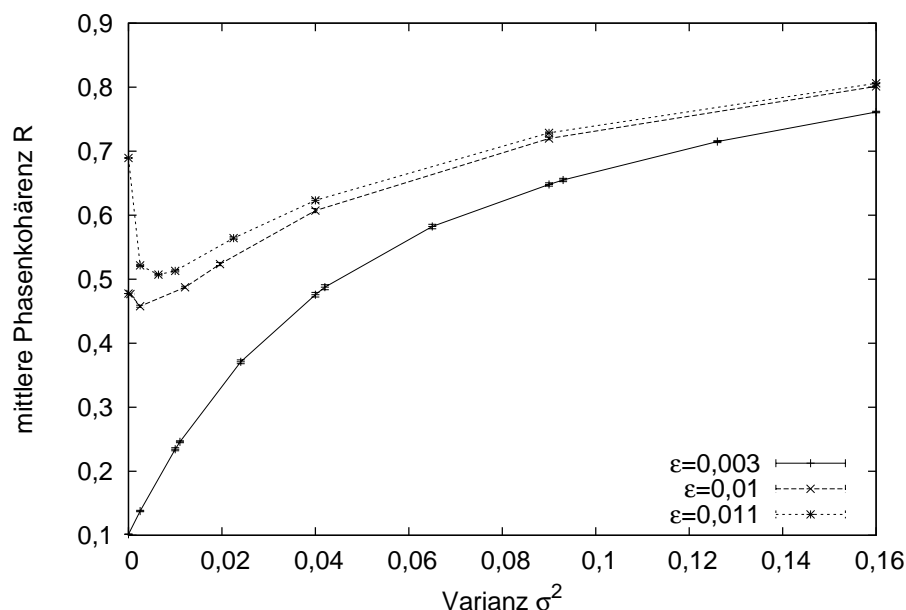


Abbildung 5.18.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation gekoppelter FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren bei den Kopplungsstärken $\epsilon = 0,003$, $\epsilon = 0,01$ und $\epsilon = 0,011$ und der Korrelationszeit $\tau = 2$ von der Varianz σ^2 des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

den betrachteten gekoppelten Landau-Stuart-Oszillatoren (vgl. 5.14) bei den numerischen Experimenten Maxima von R in Abhängigkeit von τ beobachtet werden.

5.3.1. Zusammenfassung

Es wurde am Beispiel dreier Oszillatoren der Einfluss von gemeinsamem farbigem gaußischem Rauschen, in Form eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses, auf die Phasensynchronisation gekoppelter periodischer Oszillatoren mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen untersucht. Dabei wurde bei verschiedenen Kopplungsstärken die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz R von der Varianz σ^2 und der Korrelationszeit τ der Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse betrachtet. Die Untersuchungen zeigten beim Landau-Stuart-Oszillator, dass Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse mit kleinen Varianzen die Synchronisation im Vergleich zu unverrauschten Oszillatoren schwächen können, das Rauschen wirkt bei solchen Varianzen destruktiv. Die Varianz σ_0^2 , bei der R minimal ist, nimmt, ebenso wie bei den Untersuchungen mit weißem Rauschen, linear mit der Kopplungsstärke ϵ zu. Bei hinreichend großen Varianzen des Rauschens nimmt die mittlere Phasenkohärenz größere Werte an als bei unverrauschten Oszillatoren, d. h. das Rauschen hat einen konstruktiven Einfluss. Die Abhängigkeit der kritischen Varianz σ_c^2 , also der Varianz, ab der R größer ist als ohne Rauschen, wurde nicht eingehend untersucht, da von solchen Untersuchungen keine zusätzlichen Erkenntnisse, welche über die Erkenntnisse aus den Untersuchungen mit weißem Rauschen hinausgehen, zu erwarten waren. Die Abhängigkeit der mittleren Phasenkohärenz

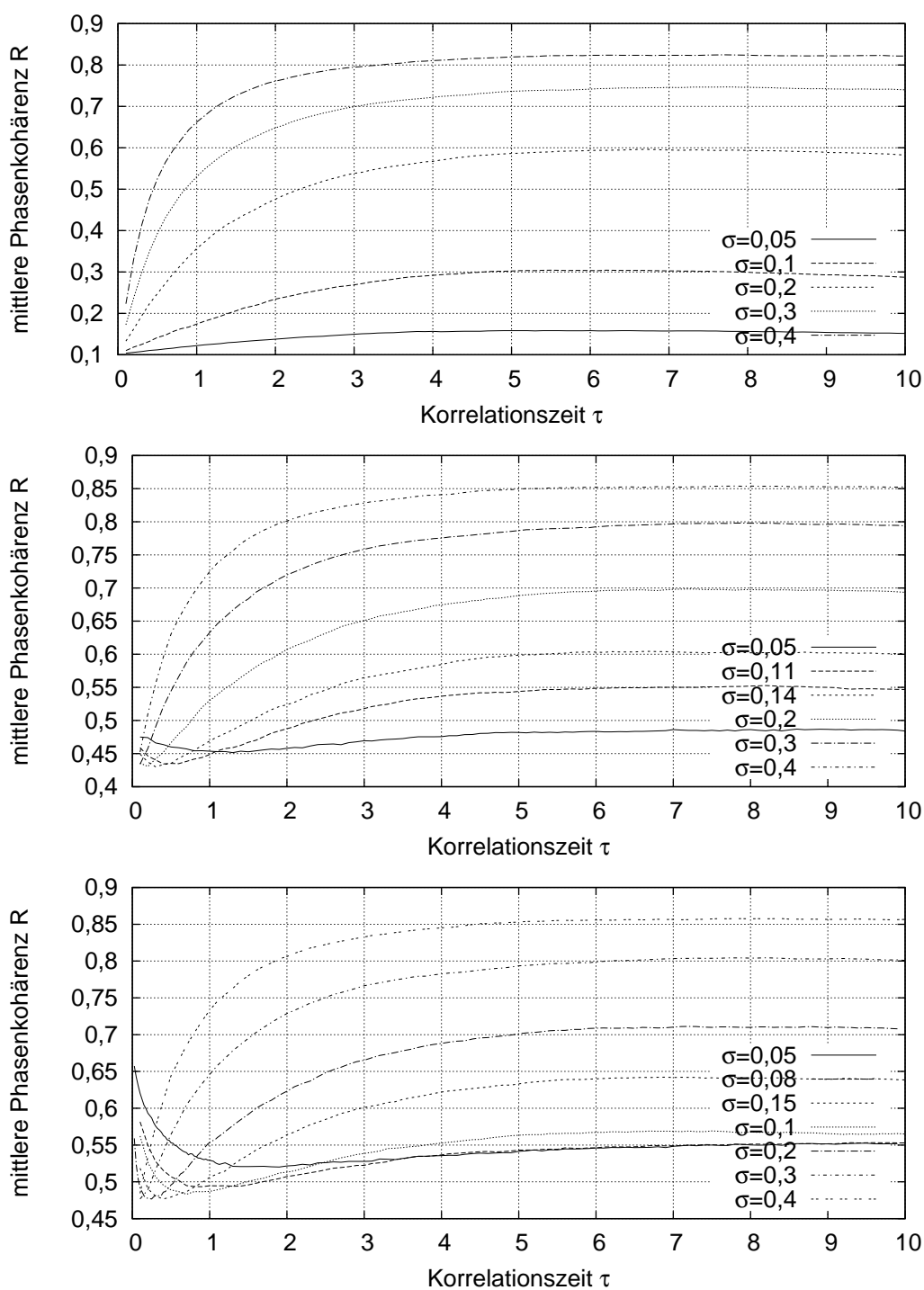


Abbildung 5.19.: Abhängigkeit der Phasensynchronisation gekoppelter FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren bei verschiedenen Kopplungsstärken von der Korrelationszeit τ des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Oben: $\epsilon = 0,003$, Mitte: $\epsilon = 0,01$, Unten: $\epsilon = 0,011$.

von der Korrelationszeit ändert sich stark mit der Varianz des Rauschens. Bei Varianzen, welche kleiner als die kritische Varianz sind, weist die Abhängigkeit ein Minimum bei Korrelationszeiten auf, die ungefähr bei dem reziproken Wert der Oszillatorfrequenzen liegen. Bei Varianzen, welche größer als die kritische Varianz sind, weist die Abhängigkeit ein Maximum bei diesen Korrelationszeiten auf. So wie bei den Untersuchungen mit weißem Rauschen zeigte sich auch hier, dass das Rauschen in Abhängigkeit seiner Varianz sowohl konstruktiv als auch destruktiv auf die Phasensynchronisation wirken kann. Also auch hier scheinen die Kopplung und das gemeinsame Rauschen die Oszillatordynamik konkurrierend zu beeinflussen. Die Untersuchungen zeigten zusätzlich, dass der Einfluss des Rauschens auf die Phasensynchronisation nicht nur von der Intensität, also der Varianz des Rauschens, abhängt, sondern dass auch die Korrelationszeit eine erhebliche Rolle spielt. Bei Varianzen unterhalb der kritischen Varianz wirkt resonantes Rauschen auf die Phasensynchronisation besonders destruktiv. Bei Varianzen oberhalb dieser Varianz hingegen wirkt insbesondere resonantes Rauschen konstruktiv.

Des Weiteren wurden schwach nichtlineare van-der-Pol-Oszillatoren untersucht. Auch hier zeigte sich, dass die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Varianz der Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse qualitativ mit der Abhängigkeit bei weißem Rauschen übereinstimmt. Die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Korrelationszeit ändert sich, anders als bei gekoppelten Landau-Stuart-Oszillatoren, qualitativ nicht mit der Varianz der Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse. Bei allen untersuchten Varianzen weist diese Abhängigkeit ein Maximum bei der resonanten Korrelationszeit auf. Also zeigt sich auch bei den Untersuchungen mit farbigem Rauschen, dass das Rauschen ausschließlich konstruktiv wirkt. Das gilt insbesondere auch bei resonanten Korrelationszeiten des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses.

Als letztes wurden gekoppelte FitzHugh-Nagumo-Oszillatoren betrachtet. Die Abhängigkeit der Phasensynchronisation von der Varianz der Ornstein-Uhlenbeck-Prozesse erwies sich hier ebenfalls als qualitativ gleich mit der Abhängigkeit bei weißem Rauschen. Die Abhängigkeit von der Korrelationszeit weist bei allen betrachteten Kopplungsstärken ein Maximum auf. Bei zwei weiteren relativ hohen Kopplungsstärken hat diese Abhängigkeit zusätzlich ein Minimum bei kleinen Korrelationszeiten. Die beobachteten Abhängigkeiten stellen so wie bei dem Fall mit weißem Rauschen also wieder einen Übergang zwischen denen des Landau-Stuart-Oszillators und des van-der-Pol Oszillators dar.

Zusammenfassend kann festgestellt werden, dass sich die Abhängigkeiten der Phasensynchronisation von den statistischen Eigenschaften Varianz und Korrelationszeit des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses bei den untersuchten Oszillatoren deutlich unterscheiden. Jedoch konnte hinreichend starkes Rauschen bei allen untersuchten Oszillatoren die Phasensynchronisation erhöhen. Vermutlich kann diese Beobachtung auf alle gekoppelten periodischen Oszillatoren übertragen werden. Über diese Gemeinsamkeit hinaus scheinen die Abhängigkeiten aber nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ von den gekoppelten Oszillatoren abhängig zu sein und keiner universellen Gesetzmäßigkeiten zu unterliegen. Wie bereits in der Zusammenfassung 5.2.1 dargelegt wurde, stellen die hier untersuchten Landau-Stuart- und van-der-Pol-Oszillatoren Grenzfälle dar. Deshalb könnten möglicherweise Gesetzmäßigkeiten für Klassen von Oszillatoren gefunden werden und so ein systematischerer Überblick über Synchronisationsphänomene stochastisch getriebener gekoppelter Oszillatoren gewonnen werden. Zur letztlichen Klärung dieser Aspekte sind aber weitere, insbesondere auch

genaue theoretische Betrachtungen notwendig.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel dieser Arbeit war es, nicht nur durch weißes, sondern auch durch farbiges Rauschen induzierte Synchronisations- und Desynchronisationsphänomene numerisch zu untersuchen und dabei auch Grenzen bisheriger Ansätze auf diesem Gebiet zu erkennen. Dabei wurden Phänomene beobachtet und Erkenntnisse gewonnen, an die eventuell nachfolgende Arbeiten anknüpfen können, die sich mit kollektiven Dynamiken selbsterhaltender Oszillatoren im Allgemeinen und mit der Dynamik von Neuronenmodellen im Speziellen befassen.

Bei dem Phänomen der stochastischen Synchronisation werden *ungekoppelte* selbsterhaltende Oszillatoren *allein* durch den Einfluss von *gemeinsamen externen Rauschen* synchronisiert. Dieses der Intuition widersprechende Phänomen wurde bereits 1984 erstmalig von Pikovsky [Pik84] beschrieben. Es kann einer Reihe von Phänomenen zugeordnet werden, bei den Rauschen *konstruktiv*, die Ordnung erhöhend, wirkt. Dazu gehören z. B. durch Rauschen induzierte Übergänge [HL84], das populäre Phänomen der stochastischen Resonanz [GHJM98], die Kohärenz-Resonanz [GDZH93, PK97a, AAN⁺02] und durch Rauschen erzeugte Transportphänomene [Rei02]. Bei dem der Intuition weniger widersprechende Phänomen der stochastischen Desynchronisation werden Oszillatoren, welche noch nicht vollständig synchronisiert sind, durch gemeinsames externes Rauschen stärker desynchronisiert. Da Rauschen in der Natur allgegenwärtig ist, könnte ein genaueres Verständnis und ein Überblick über Phänomene im Zusammenhang mit der stochastischen Synchronisation und der stochastischen Desynchronisation viele wissenschaftliche Disziplinen beeinflussen, in denen (De-)Synchronisationsphänomene beobachtet werden. Dennoch existieren auf diesem Gebiet erst relativ wenige Arbeiten. Die bereits existierenden Veröffentlichungen behandeln zudem meist nur durch weißes Rauschen getriebene Systeme. Die Annahme von weißem Rauschen stellt meist eine gute Approximation für *systeminterne* Fluktuationen, wie z. B. thermisches Rauschen, dar. In realistischen Experimenten, in denen *externe* Fluktuationen auf die betrachteten Systeme einwirken, müssen jedoch oftmals zeitliche Korrelationen der Fluktuationen [HJ95] berücksichtigt werden. Deshalb wurde in dieser Arbeit ein erster Schritt von weißem zu farbigem Rauschen durch die Verwendung des wohlbekannten und mathematisch vollständig verstandenen Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses [UO30] vollzogen. Ausgehend von einem von Pikovsky [Pik92] formulierten Kriterium wurde bei den numerischen Analysen *unabhängiger* stochastisch getriebener *identischer Oszillatoren* der *maximale Lyapunovexponent* als wesentliches Instrument zur Erfassung stochastischer (De-)Synchronisation verwendet. Der maximale Lyapunovexponent ist zum einen ein Maß für die Stabilität des synchronisierten Zustands und zum anderen quantifiziert er die Geschwindigkeit, mit der sich der Abstand der Trajektorien identischer Oszillatoren verändert, die mit verschiedenen Anfangsbedingungen starten.

Der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit waren Untersuchungen an mit *schwachem Rauschen* getriebenen *ungekoppelten periodischen* Oszillatoren. Motiviert durch die weite Ver-

breitung bei (hauptsächlich theoretischen) Analysen [Erm81, Kur84, KEW91, HI97] der Dynamik periodischer Oszillatoren, wurden hierbei neben zustandsraumbasierten Analysen auch (eindimensionale) approximative Phasengleichungen [Kur84] in Verbindung mit dem zugehörigen Lyapunovexponent betrachtet. Dieser hat die analoge Bedeutung wie der maximale Lyapunovexponent bei den zustandsraumbasierten Analysen. Bei den Analysen wurden zunehmend kompliziertere Oszillatoren, angefangen von zweidimensionalen Landau-Stuart-Oszillatoren mit besonders leicht überschaubarer Dynamik bis hin zum vierdimensionalen leitfähigkeitsbasierten Hodgkin-Huxley-Oszillator, verwendet. Ein wesentliches Resultat dieser Untersuchungen war, dass diese Oszillatoren durch schwaches gaußsches weißes Rauschen synchronisierbar sind. Bei den betrachteten Intensitäten, also Varianzen des Rauschens, waren beide Lyapunovexponenten negativ und hingen linear von der Varianz ab, falls diese hinreichend klein war. Einerseits bestätigt dieses Ergebnis eine Näherungsformel [TT04], die von einer unabhängig von dieser Arbeit auf diesem Gebiet forschenden Gruppe veröffentlicht wurde, darüber hinaus konnten auch Gültigkeitsbereiche ermittelt werden, welche sich bei verschiedenen Oszillatoren als sehr unterschiedlich erwiesen. Diese deutlichen Unterschiede konnten durch Untersuchungen, die auf der Phasenapproximation beruhen, erklärt werden. Ein in Hinblick auf die Zielsetzung dieser Arbeit wesentlicher Aspekt ist die Tatsache, dass die Näherungsformel bei allen untersuchten leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodellen in physiologisch sinnvollen Bereichen eine gute Approximation darstellt. Diese Beobachtung ist insofern bedeutend, als dass sie zeigt, dass die Annahme eines linearen funktionellen Zusammenhangs zwischen der Varianz des Rauschens und den Lyapunovexponenten in sinnvoller Weise in theoretische Betrachtungen zu neuronalen Dynamiken [HI97, Izh07] einfließen kann.

Analoge, mit farbigem Rauschen durchgeführte, numerische Experimente erbrachten die Erkenntnis, dass die Oszillatoren, so wie bei weißem Rauschen, auch unter dem Einfluss von schwachem farbigem Rauschen synchronisieren. Weiterhin konnte ein wesentlicher Einfluss der Korrelationszeit des Rauschens auf die stochastische Synchronisation dieser Oszillatoren in Form eines vermutlich hier erstmalig beschriebenen resonanzartigen Effekts beobachtet werden. Dieser Effekt konnte qualitativ als eine besonders starke Anregung der Eigenfrequenzen verstanden werden. Bezüglich einer in [TT06] beschriebenen Näherungsformel für den mit der Phasendynamik assoziierten Lyapunovexponenten zeigte sich, dass die durchgeführten Simulationen die Gültigkeit dieser Formel nur teilweise bestätigen konnten. Die Ergebnisse legten die Vermutung nahe, dass Oszillatoren, welche Grenzzyklen mit nahezu singulären Punkten („Kanten“) haben, nicht adäquat durch die Näherungsformel beschrieben werden. Bei den untersuchten leitfähigkeitsbasierten Neuronenmodellen stellte die Näherungsformel in physiologisch sinnvollen Bereichen jedoch eine gute Approximation dar und erscheint somit insbesondere für die Betrachtung neuronaler Dynamiken geeignet zu sein.

Der Schritt zu Systemen noch höherer Komplexität wurde motiviert durch die Bedeutung der Synchronisation *chaotischer Oszillatoren* in verschiedenen naturwissenschaftlichen Bereichen [BKO⁺02] und durch die Untersuchung stochastisch getriebener *ungekoppelter identischer chaotischer Systeme* vollzogen. In verschiedenen Veröffentlichungen [BLT01, TMHGP01] konnte die Synchronisierbarkeit diverser ungekoppelter chaotischer Oszillatoren durch weißes Rauschen nachgewiesen werden. In dieser Arbeit wurden beispielhaft Un-

tersuchungen an paradigmatischen chaotischen Lorenzsystemen durchgeführt, welche mit einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess getrieben wurden. Auch hier zeigte sich wieder deutlich der Einfluss der Korrelationszeit des Rauschens auf die Dynamik der Oszillatoren in einer an Resonanzphänomene erinnernden Weise. Es konnte insbesondere nachgewiesen werden, dass diese Oszillatoren in Abhängigkeit der Korrelationszeit sowohl synchronisieren als auch desynchronisieren können. Es zeigte sich also, dass zeitliche Korrelationen des Rauschens einen entscheidenden Einfluss darauf haben können, ob das Rauschen *konstruktiv* oder *destruktiv* wirkt.

Zusätzlich wurden die Untersuchungen stochastisch getriebener ungekoppelter periodischer Oszillatoren von schwachem Rauschen auf starkes Rauschen ausgedehnt und dabei das Phänomen der stochastischen Desynchronisation untersucht. Bereits in [GP05] wurde numerisch gezeigt, dass gemeinsames weißes Rauschen mit hoher Intensität, also großer Varianz, noch nicht vollständig synchronisierte ungekoppelte periodische Oszillatoren desynchronisieren kann. Darüber hinaus wurden in der vorliegenden Arbeit solche Betrachtungen auf numerische Simulationen mit farbigem Rauschen erweitert. Am Beispiel zweier Oszillatoren konnte die desynchronisierende Wirkung von moderatem bis starkem Rauschen nachgewiesen werden. Dabei konnte ein, im Gegensatz zu schwachem Rauschen, desynchronisierender resonanzartiger Effekt in Abhängigkeit von der Korrelationszeit des farbigem Rauschens beobachtet werden.

Insbesondere in biologischen Systemen liegen Oszillatoren, welche (nahezu) gleichem externem Rauschen ausgesetzt sind, räumlich dicht zusammen. Räumliche dicht benachbarte Oszillatoren, wie z. B. Neuronen im Gehirn, sind häufig untereinander gekoppelt. Geleitet durch diese Überlegung wurde letztlich der Übergang von ungekoppelten Oszillatoren zum allgemeineren Fall gekoppelter nicht identischer Oszillatoren vollzogen und thematisiert, wie sich gemeinsames weißes und farbiges Rauschen auf die kollektive Dynamik *gekoppelter nicht identischer* Oszillatoren auswirkt. Dabei wurde die kollektive Dynamik hinsichtlich der Phasensynchronisation am Beispiel dreier Oszillatoren untersucht. Es zeigte sich, dass gemeinsames Rauschen bei verschiedenen Oszillatoren zu qualitativ verschiedenen Phänomene führen kann. Bei dem Landau-Stuart-Oszillator, der die topologische Normalform eines Oszillators ist, der eine superkritische Hopfbifurkation durchläuft, wirkte sich bei allen betrachteten Kopplungsstärken schwaches Rauschen destruktiv und starkes Rauschen konstruktiv auf das Niveau der Phasensynchronisation aus. Insbesondere konnte bei farbigem Rauschen ein Übergang von einem destruktiven zu einem konstruktiven resonanzartigen Effekt beobachtet werden. Die Kopplung und das Rauschen scheinen gewissermaßen konkurrierend zu wechselwirken. Bei dem verwendeten (schwach nichtlinearen) van-der-Pol-Oszillator wirkte sich das Rauschen ausschließlich konstruktiv auf die Phasensynchronisation aus. Das galt auch für einen mit farbigem Rauschen beobachteten resonanzartigen Effekt. Die am FitzHugh-Nagumo-Oszillator beobachteten Phänomene stellen in gewissem Sinne ein Übergang zwischen denen der beiden anderen Oszillatoren dar. Anscheinend unterliegen die hier beobachteten Phänomene keiner universellen Gesetzmäßigkeit. Möglicherweise können solche Gesetzmäßigkeiten jedoch für Klassen von Oszillatoren gefunden werden. So könnten z. B. die beim Landau-Stuart-Oszillator beobachteten Effekte typisch für Oszillatoren in der Nähe superkritischer Hopfbifurkationen sein. Vergleichbares könnte bezüglich des van-der-Pol-Oszillators und anderer hinreichend schwach nichtlinearer Oszillatoren gelten.

Zur letztlich Klärung dieser Aspekte sind jedoch weitere, insbesondere auch genaue theoretische Betrachtungen notwendig. Ein tiefgreifendes Verständnis dieser Aspekte könnte z. B. vielversprechend für das Forschungsgebiet der Kohärenz-Resonanz [PK97b] sein, welches insbesondere auch in den Neurowissenschaften [SH07, SJ02, SJ03] von Bedeutung ist.

Die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse und beobachteten Phänomene werfen eine Reihe weiterer Fragen auf und bieten vielfältige Ansatzpunkte für weitergehende Untersuchungen. Wie bereits oben erwähnt, konnte festgestellt werden, dass die in [TT06] vorgeschlagene Näherungsformel bei Oszillatoren, welche Grenzyklen mit nahezu singulären Punkten haben, nicht oder nur stark eingeschränkt anwendbar ist. Solche Grenzyklen treten jedoch häufig bei Relaxationsoszillatoren auf die z. B. in der Elektronik [vdP26, vdPvdM27], der Neurophysiologie [SRKA98] und sogar in der Genetik [MKHC02] im Zusammenhang mit Synchronisationsphänomenen auftreten. Angesichts dieser Problematik erscheint eine mögliche Verbesserung der Näherungsformel lohnenswert zu sein. Im Zusammenhang mit der stochastischen Desynchronisation ungekoppelter Oszillatoren wäre es sicher interessant, den Fragen nachzugehen, welche Oszillatoreigenschaften dieses Phänomen ermöglichen bzw. verursachen. Darauf aufbauend könnten analytisch Formeln gefunden werden, welche die beobachteten resonanzartigen Phänomene (approximativ) quantitativ erfassen können. So wie die stochastische Synchronisation ein möglicher Mechanismus zur Entstehung epileptischer Anfälle sein könnte, so erscheint die stochastische Desynchronisation als ein Mechanismus beim Abklingen epileptischer Anfälle in Frage zu kommen. Eine genaue Kenntnis beider Phänomene könnte somit zu einem weiterführenden Verständnis des Krankheitsbildes der Epilepsie führen. Auf klinischer Seite könnten daraus alternative Methoden zur Behandlung der Parkinsonschen Krankheit mittels elektrischer Reizung von Hirnarealen hervorgehen. Darüber hinaus könnten die bereits gewonnenen Erkenntnisse und weiterführende Analysen auch zum Verständnis physiologischer neuronaler Aktivität, z. B. bei Untersuchungen zur Reliabilität neuronaler Informationsverarbeitung [BRdRvSW91, BRdRvSW99], beitragen.

Die stochastische Synchronisation chaotischer Systeme wurde lediglich sehr rudimentär behandelt. Ansätze für weitere Nachforschungen könnten z. B. die Betrachtung anderer Synchronisationsarten wie der Phasensynchronisation oder der verallgemeinerten Synchronisation und die Analyse der Häufigkeitsverteilung der Frequenzen instabiler periodischer Orbits innerhalb der chaotischen Attraktoren [PZR⁺97, ZPRK99] sein. Dieser Ansatz erscheint zumindest bei Oszillatoren sinnvoll, die über eine Kaskade von periodenverdoppelnden Bifurkationen chaotisch werden. Dabei gewonnene Erkenntnisse könnten unter anderem beim Verständnis der Informationsverarbeitung chaotischer neuronaler Systeme und in der Kontrolltheorie nützlich sein.

Bei allen durchgeführten Untersuchungen wurde ausschließlich gemeinsames *externes* Rauschen betrachtet. Natürlich vorkommende Oszillatoren, wie z. B. Neuronen, unterliegen aber immer auch thermischen Fluktuationen, die bei der hier verwendeten idealisierenden Herangehensweise unberücksichtigt blieben. Deshalb ist es wünschenswert, weitergehende Simulationen mit zusätzlichem *internen* Rauschen durchzuführen. Des Weiteren ist der hier zur Modellierung von farbigem Rauschen verwendete Ornstein-Uhlenbeck-Prozess einerseits zwar mathematisch relativ gut zu handhaben, andererseits kann diese Modellierung angesichts weiterer in der Natur vorkommenden farbigen Typen von Rauschen, wie z. B. $1/f$ -

und $1/f^2$ -Rauschen nur der Einstieg zu weiteren Analysen mit farbigem Rauschen sein. Bei gekoppelten nichtidentischen Oszillatoren erscheint neben den oben genannten Aspekten, wie der Berücksichtigung von internem Rauschen, der Verwendung von anderem farbigem Rauschen und dem Versuch einer Klassifizierung der Oszillatoren, auch die Betrachtung anderer Kopplungsarten und komplexerer Netzwerkstrukturen [AB02, BLM⁺06, OKZ07] vielversprechend zu sein. Bei der Untersuchung von Synchronisation von Netzwerkstrukturen unter dem Einfluss von Rauschen könnte der Übergang von gemeinsamem Rauschen mit zeitlichen Korrelationen, welches für alle Oszillatoren im Netzwerk identisch ist, zu solchem mit räumlich-zeitlichen Korrelationen vollzogen werden.

Letztlich ist es zur Untersuchung der Frage, ob stochastische Synchronisation oder Desynchronisation in realen Systemen auftritt, notwendig, Zeitreihenanalyseverfahren zu entwickeln, die diese Phänomene anhand von Systemobservablen erkennen und quantifizieren. Dazu könnten eventuell kürzlich entwickelte, auf der Fokker-Planck-Theorie beruhende Methoden [PL08] dienen.

A. Algorithmus zur Berechnung des maximalen Lyapunovexponenten

Dieser Anhang stellt den auf der Publikation [WSSV85] basierenden Algorithmus zu Berechnung des maximalen Lyapunovexponenten λ_1 dar. Ein nicht notwendigerweise autonomes System sei durch

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}); \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{A.1})$$

gegeben. Im Falle eines getriebenen Oszillators hat die Funktion $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ z. B. die Form

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}(t), \quad (\text{A.2})$$

wobei $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{G}(\mathbf{x})$ die Differentialgleichung des autonomen Oszillators ist. Der maximale Lyapunovexponent wird durch die Wirkung der Zeitentwicklung auf einen Tangentialvektor bestimmt. Dazu ist das $2n$ -dimensionale Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{p}(t) \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{DF}(t, \mathbf{x})\mathbf{v} \quad (\text{A.4})$$

mit einem Anfangswert des Tangentialvektors, welcher $\|\mathbf{v}(0)\| = 1$ erfüllt, zu integrieren. Da sich \mathbf{t} für fast alle Anfangsbedingungen $\mathbf{v}(0)$ an der λ_1 zugeordneten Richtung ausrichtet [WSSV85], kann bei der numerischen Berechnung von λ_1 die Anfangsorientierung des Tangentialvektors beliebig gewählt werden. Der maximale Lyapunovexponent λ_1 kann für hinreichend lange Iterationszeiten T durch

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \|\mathbf{v}(T)\| \quad (\text{A.5})$$

approximiert werden. Bei dieser Methode kann es zu Problemen mit arithmetischen Gleitkommaüber- und Unterläufen kommen. Diesem Problem kann durch eine regelmäßige Renormierung des Tangentialvektors begegnet werden. Nach m Renormierungen zu den Zeitpunkten t_i und einer gesamten Iterationszeit $t_m = T$ kann λ_1 gemäß

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^m \ln \|\mathbf{v}(t_i)\| \quad (\text{A.6})$$

berechnet werden.

B. Integrationsalgorithmen

Nachfolgend werden in dieser Arbeit verwendeten Algorithmen zur numerischen Lösung von stochastischen Differentialgleichungen behandelt.

B.1. Integrationsalgorithmus für weißes Rauschen

Der folgende Integrationsalgorithmus für weißes Rauschen wurde 1989 von Mannella und Palleschi [MP89] vorgestellt.

Gegeben sei ein stochastisches Differentialgleichungssystem in der Stratonovichinterpretation

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})\xi(t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.1a})$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (\text{B.1b})$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s), \quad (\text{B.1c})$$

wobei $\xi(t)$ gaußverteilt ist. Eine formale Lösung dieses Systems lautet

$$\int_0^h \dot{x}_i(t) dt = x_i(h) - x_i(0) = \int_0^h f_i(\mathbf{x}(t)) dt + \int_0^h g_i(\mathbf{x}(t))\xi(t) dt, \quad (\text{B.2})$$

mit dem Integrationszeitschritt h .

Taylorentwicklungen von f_i und g_i um $\mathbf{x}(0)$ liefern

$$\begin{aligned} f_i(\mathbf{x}(t)) &= f_i(\mathbf{x}(0)) + \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(0))}{\partial x_\alpha} (x_\alpha(t) - x_\alpha(0)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0}^n \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{x}(0))}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (x_\alpha(t) - x_\alpha(0)) (x_\beta(t) - x_\beta(0)) + \mathcal{O}((\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0))^3) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

und

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{x}(t)) &= g_i(\mathbf{x}(0)) + \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial g_i(\mathbf{x}(0))}{\partial x_\alpha} (x_\alpha(t) - x_\alpha(0)) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0}^n \frac{\partial^2 g_i(\mathbf{x}(0))}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} (x_\alpha(t) - x_\alpha(0)) (x_\beta(t) - x_\beta(0)) \\ &+ \frac{1}{3!} \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^n \frac{\partial^3 g_i(\mathbf{x}(0))}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} (x_\alpha(t) - x_\alpha(0)) (x_\beta(t) - x_\beta(0)) (x_\gamma(t) - x_\gamma(0)) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$+ \mathcal{O}((\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0))^4). \quad (\text{B.5})$$

Mit den Abkürzungen

$$f_i := f_i(\mathbf{x}(0)), \quad f_{i,\alpha} := \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(0))}{\partial x_\alpha}, \quad \text{usw.} \quad (\text{B.6})$$

folgen die Formeln

$$x_i(h) - x_i(0) = \Delta x_i^{1/2} + \Delta x_i^1 + \Delta x_i^{3/2} + \Delta x_i^2 + \mathcal{O}(h^{5/2}) \quad (\text{B.7a})$$

$$\Delta x_i^{1/2} = g_i Y_1 \quad (\text{B.7b})$$

$$\Delta x_i^1 = f_i h + \frac{1}{2} Y_1^2 \sum_{\alpha=0}^n g_{i,\alpha} g_\alpha \quad (\text{B.7c})$$

$$\begin{aligned} \Delta x_i^{3/2} &= Y_2 \sum_{\alpha=0}^n (f_{i,\alpha} g_\alpha - g_{i,\alpha} f_\alpha) + \frac{1}{3!} Y_1^3 \sum_{\alpha,\beta=0}^n g_{i,\alpha} g_{\alpha,\beta} g_\beta + h Y_1 \sum_{\alpha=0}^n g_{i,\alpha} f_\alpha \\ &+ \frac{1}{6} Y_1^3 \sum_{\alpha,\beta=0}^n g_{i,\alpha\beta} g_\alpha g_\beta \end{aligned} \quad (\text{B.7d})$$

$$\begin{aligned} \Delta x_i^2 &= \frac{1}{2} h^2 \sum_{\alpha=0}^n f_{i,\alpha} f_\alpha + \frac{1}{2} Y_3 \sum_{\alpha,\beta=0}^n f_{i,\alpha} g_{\alpha,\beta} g_\beta + \frac{1}{2} Y_3 \sum_{\alpha,\beta=0}^n f_{i,\alpha\beta} g_\alpha g_\beta \\ &+ \sum_{\alpha=0}^n g_{i,\alpha} \left\{ (Y_1 Y_2 - Y_3) \sum_{\beta=0}^n (f_{\alpha,\beta} g_\beta - g_{\alpha,\beta} f_\beta) + \frac{1}{2} (h Y_1^2 - Y_3) \sum_{\alpha=0}^n g_{\alpha,\beta} f_\beta \right\} \\ &+ \frac{1}{24} Y_1^4 \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^n g_{i,\alpha} g_{\alpha,\beta} g_\beta g_\gamma g_\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta=0}^n g_{i,\alpha\beta} g_\beta \left\{ \frac{1}{2} f_\alpha (h Y_1^2 - Y_3) + \frac{1}{8} Y_1^4 \sum_{\gamma=0}^n g_{\alpha,\gamma} g_\gamma \right\} \\ &+ \frac{1}{24} Y_1^4 \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^n g_{i,\alpha\beta\gamma} g_\alpha g_\beta g_\gamma + \frac{1}{24} Y_1^4 \sum_{\alpha,\beta,\gamma=0}^n g_{i,\gamma} g_{\gamma,\alpha\beta} g_\alpha g_\beta, \end{aligned} \quad (\text{B.7e})$$

mit

$$Y_1 := \int_0^h \xi(t) dt = \sqrt{h} \mathcal{N}_1 \quad (\text{B.8a})$$

$$Y_2 := \int_0^h \left(\int_0^t \xi(s) ds \right) dt = h^{3/2} \left(\frac{\mathcal{N}_1}{2} + \frac{\mathcal{N}_2}{2\sqrt{3}} \right) \quad (\text{B.8b})$$

$$Y_3 := \int_0^h \left(\int_0^t \xi(s) ds \int_0^t \xi(y) dy \right) dt \approx \frac{h^2}{3} \left(\mathcal{N}_1^2 + \mathcal{N}_3 + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.8c})$$

wobei die \mathcal{N}_i unkorrelierte gaußsche Zufallsvariablen mit Mittelwert Null und Standardabweichung eins sind.

B.2. Integrationsalgorithmus für farbiges Rauschen

Der folgende Integrationsalgorithmus für farbiges Rauschen wurde 1989 von Mannella und Palleschi [MP89] vorgestellt.

Gegeben sei ein stochastisches Differentialgleichungssystem

$$\dot{\zeta} = -\frac{1}{\tau}\zeta + \frac{\sqrt{2D}}{\tau}\xi(t) \quad (\text{B.9a})$$

$$\dot{x}_i = f_i(\mathbf{x}) + g_i(\mathbf{x})\zeta, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{B.9b})$$

$$\langle \xi(t) \rangle = 0 \quad (\text{B.9c})$$

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = \delta(t-s), \quad (\text{B.9d})$$

wobei $\xi(t)$ ein gaußsches weißes Rauschen, τ die Korrelationszeit und D die Intensität (vgl. Beispiel 2.2.2) bezeichnet. Die Gleichung (B.9a) erzeugt den bekannten gaußschen Ornstein-Uhlenbeck Prozess [UO30] mit den statistischen Eigenschaften

$$\langle \zeta(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad (\text{B.10a})$$

$$\langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = \frac{D}{\tau} \exp(-|t-s|/\tau). \quad (\text{B.10b})$$

Die Gleichung (B.9a) kann durch das Integral

$$\zeta(t) = e^{-t/\tau}\zeta(0) + \frac{\sqrt{2D}}{\tau} \int_0^t ds e^{(s-t)/\tau}\xi(s) \quad (\text{B.11})$$

exakt gelöst werden.

Folgende Abkürzungen w_0 , w_1 , w_2 und α sind definiert als:

$$w_0 \equiv \int_0^h ds e^{(s-h)/\tau}\xi(s) \quad (\text{B.12a})$$

$$w_1 \equiv \int_0^h dt \int_0^t ds e^{(s-t)/\tau}\xi(s) \quad (\text{B.12b})$$

$$w_2 \equiv \int_0^h dt \int_0^t ds \int_0^s dy e^{(-s+y)/\tau}\xi(y) \quad (\text{B.12c})$$

$$\alpha \equiv \frac{h}{\tau}, \quad (\text{B.12d})$$

wobei w_0 , w_1 und w_2 als Linearkombinationen gaußscher Zufallsvariablen selbst wieder gaußsch sind. Die Varianzen und Kreuzkorrelationen können unter Berücksichtigung von (B.9c) und (B.9d) leicht durch algebraische Umformungen berechnet werden. Die Ergebnisse sind in der Tabelle B.1 zusammengestellt. Die Korrelationen zwischen den Zeilen- bzw. Spaltenvariablen sind den entsprechenden Tabelleneinträgen zu entnehmen. So kann z. B. die Kreuzkorrelation

$$\langle w_0 w_1 \rangle = \frac{\tau^2}{2} (1 - 2e^{-\alpha} + e^{-2\alpha}) \quad (\text{B.13})$$

entnommen werden.

	$w_0/\tau^{1/2}$	$w_1/\tau^{3/2}$	$w_2/\tau^{5/2}$
$w_0/\tau^{1/2}$	$\frac{1}{2}(1-e^{-2\alpha})$	$\frac{1}{2}(1-2e^{-\alpha}+e^{-2\alpha})$	$\frac{1}{2}(1-2\alpha e^{-\alpha}-e^{-2\alpha})$
$w_1/\tau^{3/2}$		$\frac{1}{2}(2\alpha-3-e^{-2\alpha}+4e^{-\alpha})$	$\frac{1}{2}(1+\alpha^2-2\alpha+2\alpha e^{-\alpha}-2e^{-\alpha}+e^{-2\alpha})$
$w_2/\tau^{5/2}$			$\frac{1}{2}(1+2\alpha-2\alpha^2+\frac{2}{3}\alpha^3-4\alpha e^{-\alpha}-e^{-2\alpha})$

Tabelle B.1.: Korrelationen der Zufallsvariablen w_i (vgl. [MP89])

Mit diesen Ergebnissen ergibt sich

$$Y_0 := \zeta(h) = e^{-\alpha}\zeta(0) + \frac{\sqrt{2D}}{\tau}w_0 \quad (\text{B.14a})$$

$$Y_1 := \int_0^h dt \zeta(t) = \tau(1 - e^{-\alpha})\zeta(0) + \frac{\sqrt{2D}}{\tau}w_1 \quad (\text{B.14b})$$

$$Y_2 := \int_0^h dt \int_0^t ds \zeta(s) = \tau^2(\alpha + e^{-\alpha} - 1)\zeta(0) + \frac{\sqrt{2D}}{\tau}w_2 \quad (\text{B.14c})$$

für die Integrale des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses. Es bleibt die Berechnung der Variablen w_0 , w_1 und w_2 . Da sie gaußsch mit bekannten Korrelationen sind, liefert die Lösung des Gleichungssystems

$$w_0 = C_0\mathcal{N}_0 \quad (\text{B.15a})$$

$$w_1 = C_1\mathcal{N}_0 + C_2\mathcal{N}_1 \quad (\text{B.15b})$$

$$w_2 = C_3\mathcal{N}_0 + C_4\mathcal{N}_1 + C_5\mathcal{N}_2 \quad (\text{B.15c})$$

das gewünschte Ergebnis, wobei die \mathcal{N}_i unabhängige gaußsche Zufallsvariablen mit Mittelwert Null und Varianz eins sind. Der Koeffizient C_0 ist offensichtlich die Standardabweichung $\langle w_0^2 \rangle^{1/2}$. Die anderen Koeffizienten können durch Bildung der Varianzen bzw. Kreuzkorrelationen ermittelt werden. Dieses Verfahren liefert die Koeffizienten

$$C_0 = \langle w_0^2 \rangle^{1/2} \quad (\text{B.16a})$$

$$C_1 = \frac{\langle w_0 w_1 \rangle}{C_0} \quad (\text{B.16b})$$

$$C_2 = (\langle w_1^2 \rangle - C_1^2)^{1/2} \quad (\text{B.16c})$$

$$C_3 = \frac{\langle w_0 w_2 \rangle}{C_0} \quad (\text{B.16d})$$

$$C_4 = \frac{\langle w_1 w_2 \rangle - C_1 C_3}{C_2} \quad (\text{B.16e})$$

$$C_5 = (\langle w_2^2 \rangle - C_3^2 - C_4^2)^{1/2}, \quad (\text{B.16f})$$

welche mit Tabelle B.1 als Funktionen von α dargestellt werden können. Der Integrationsalgorithmus für farbiges Rauschen folgt nun durch die Substitution von Y_1 und Y_2 aus den Gleichungen (B.14) in die Gleichungen (B.7) bis zur Ordnung $\Delta x_i^{3/2}$ unter Weglassung der Ordnung Δx_i^2 .

B.3. Prädiktor-Korrektor-Algorithmus

Der nachfolgend vorgestellte Prädiktor-Korrektor-Algorithmus wurde ebenfalls 1989 von Mannella und Palleschi in [MP89] publiziert. Er erhöht die Stabilität und die Konvergenz der Algorithmen aus B.1 und B.2.

Zunächst werden die Y_i nach (B.8) bzw. (B.14) berechnet. Die Anwendung des Integrationssschritts (B.7) bzw. seines Pendantes für farbiges Rauschen am Punkt $\mathbf{x}(0)$ liefert den Prädiktor $\tilde{\mathbf{x}}(h)$. Der Korrektor $\mathbf{x}(h)$ wird mit demselben Integrationssschritt berechnet, wobei die Y_i gleichbleiben, der Startpunkt $\mathbf{x}(0)$ jedoch durch $\tilde{\mathbf{x}}(h)$ ersetzt wird. In kompakter Form kann dieses Verfahren wie folgt notiert werden.

1. Berechnung der Y_i
2. Berechnung des Prediktors $\tilde{\mathbf{x}}(h) = S(\mathbf{x}(0), \mathbf{Y})$
3. Berechnung des Korrektors $\mathbf{x}(h) = S(\tilde{\mathbf{x}}(h), \mathbf{Y})$
4. Wiederholung von Position 1 aus mit $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(h)$

Hierbei bezeichnet $S(\mathbf{x}, \mathbf{Y})$ einen Integrationssschritt nach B.1 bzw. B.2 mit dem Startpunkt \mathbf{x} und den Werten Y_i .

C. Mittlerer Abstand zweier zufällig gewählter Punkte auf einem Kreis

In diesem Anhang wird die Berechnung des Erwartungswertes des Abstandes zweier zufällig auf einem Kreis ausgewählten Punkte P_1 und P_2 berechnet. Zur Definition der verwendeten Symbole dient die Abbildung C.1.

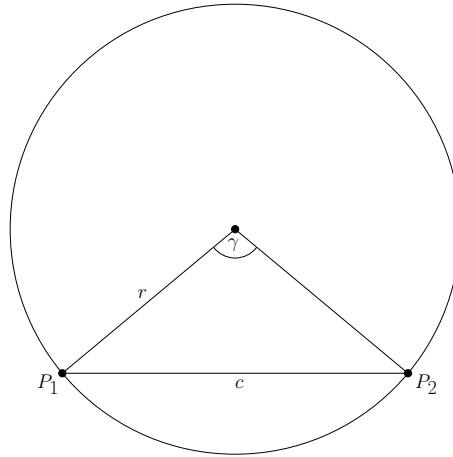


Abbildung C.1.: Kreis mit Radius r und zwei Punkten P_1 und P_2 , deren Abstand c ist. Die vom Mittelpunkt zu den Punkten P_1 und P_2 verlaufenden Linien schließen den Winkel γ ein.

Mit dem Cosinussatz folgt für den von γ abhängenden Abstand $c = c(\gamma)$

$$c(\gamma) = \sqrt{2}r\sqrt{1 - \cos(\gamma)}. \quad (\text{C.1})$$

Offenkundig brauchen wegen der Symmetrie des Problems lediglich Winkel $\gamma \in [0, \pi]$ betrachtet werden. Der Erwartungswert $\langle c \rangle$ des Abstandes ergibt sich somit zu

$$\langle c \rangle = \frac{\sqrt{2}}{\pi}r \int_0^\pi \sqrt{1 - \cos(\gamma)} \, d\gamma \quad (\text{C.2})$$

$$= \left[\frac{2\sqrt{2}}{\pi}r\sqrt{1 - \cos(\gamma)} \frac{\cos(\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)} \right]_0^\pi \quad (\text{C.3})$$

Es gilt $\cos(\pi/2) = 0$ und $\sin(\pi/2) = 0$. Somit ist das Integral (C.2) der Grenzwert

$$\langle c \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r \lim_{\gamma \rightarrow 0} \sqrt{1 - \cos(\gamma)} \frac{\cos(\gamma/2)}{\sin(\gamma/2)} \quad (\text{C.4})$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos(\gamma)}}{\sin(\gamma/2)} \quad (\text{C.5})$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} r \sqrt{\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma/2)}}, \quad (\text{C.6})$$

wobei die Identität $\cos(0) = 1$ genutzt wurde. Es bleibt der unter der Quadratwurzel stehende Grenzwert zu berechnen. Dies geschieht durch die zweimalige Anwendung der Regel von L' Hôpital

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\gamma)}{\sin^2(\gamma/2)} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\gamma/2) \cos(\gamma/2)} \quad (\text{C.7})$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\sin(\gamma)}{\sin(\gamma/2)} \quad (\text{C.8})$$

$$= \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\cos(\gamma)}{\frac{1}{2} \cos(\gamma/2)} \quad (\text{C.9})$$

$$= 2. \quad (\text{C.10})$$

Dieses Ergebnis in (C.6) substituiert liefert das Ergebnis

$$\langle c \rangle = \frac{4r}{\pi}. \quad (\text{C.11})$$

D. Fourierdarstellung von $Z(\phi)$ und Berechnung von λ_ϕ

Dieser Anhang erläutert die in den Berechnungen zu dieser Arbeit verwendete Fourierdarstellung von $Z(\phi)$ und die Berechnung des Lyapunovexponenten λ_ϕ nach der Näherungsformel (3.21) mit Hilfe dieser Fourierdarstellung.

Die verwendete (reelle) Fourierdarstellung von $Z(\phi)$ lautet

$$Z(\phi) = \sum_{i=0}^N (a_i \cos(i\phi) - b_i \sin(i\phi)). \quad (\text{D.1})$$

Die Phasendynamik, zu welcher der Lyapunovexponent λ_ϕ gehört, lautet

$$\dot{\phi} = \omega_0 + Z(\phi)p(t), \quad (\text{D.2})$$

wobei $p(t)$ externes weißes ($p(t) = \xi(t)$) oder farbiges ($p(t) = \zeta(t)$) Rauschen bezeichnet.

D.1. Weißes Rauschen

Bei der Berechnung von λ_ϕ muss das Integral

$$\int_0^{2\pi} Z'^2(\phi) d\phi \quad (\text{D.3})$$

ermittelt werden. Die Fourierdarstellung der Ableitung $Z'(\phi)$ folgt durch Differenzieren der Summanden und lautet

$$Z'(\phi) = - \sum_{i=0}^N (a_i i \sin(i\phi) + b_i i \cos(i\phi)). \quad (\text{D.4})$$

Somit folgt

$$\int_0^{2\pi} Z'^2 d\phi = \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=0}^N i j a_i a_j \sin(i\phi) \sin(j\phi) d\phi + \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=0}^N i j b_i b_j \cos(i\phi) \cos(j\phi) d\phi \quad (\text{D.5})$$

$$- \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=0}^N i j a_i b_j \sin(i\phi) \cos(j\phi) d\phi - \int_0^{2\pi} \sum_{i,j=0}^N i j a_j b_i \cos(i\phi) \sin(j\phi) d\phi, \quad (\text{D.6})$$

wobei die beiden ersten Integrale nur für $i = j$ von Null verschieden sind und die beiden letzten für alle i und j verschwinden. Die Gleichung kann wie folgt weiter vereinfacht werden

$$\int_0^{2\pi} Z'^2 d\phi = \sum_{i=0}^N i^2 a_i^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(i\phi) d\phi + \sum_{i=0}^N i^2 b_i^2 \int_0^{2\pi} \cos^2(i\phi) d\phi \quad (\text{D.7})$$

$$= \sum_{i=0}^N i^2 a_i^2 \pi + \sum_{i=0}^N i^2 b_i^2 \pi \quad (\text{D.8})$$

$$= \pi \sum_{i=0}^N i^2 (a_i^2 + b_i^2). \quad (\text{D.9})$$

Mit diesem Resultat folgt der Lyapunovexponent

$$\lambda_\phi = -\frac{\sigma^2}{4\pi} \int_0^{2\pi} Z'^2 d\phi = -\frac{\sigma^2}{4} \sum_{i=0}^N i^2 (a_i^2 + b_i^2) \quad (\text{D.10})$$

als Endergebnis.

D.2. Farbiges Rauschen

In [TT06] wird für den Fall, dass das treibende farbige Rauschen gaußsch ist, die Näherungsformel

$$\lambda_\phi = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |z_n|^2 \frac{\langle |\tilde{\zeta}(n\omega_0)|^2 \rangle}{2} \quad (\text{D.11})$$

hergeleitet. Dabei sind die komplexen Zahlen z_n und die komplexwertigen Funktionen $\tilde{\zeta}$ durch die Fouriertransformationen

$$Z(\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n e^{in\phi} \quad (\text{D.12})$$

$$\zeta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\zeta}(k) e^{ikt} dk \quad (\text{D.13})$$

definiert.

Die Reihenentwicklungen von $Z(\phi)$ (D.12) und (D.1) können durch die Transformation

$$z_n = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad n \geq 0 \quad (\text{D.14})$$

$$z_{-n} = z_n^* \quad (\text{D.15})$$

ineinander überführt werden.

Aus $z_{-n} = z_n^*$ und $\tilde{\zeta}(-k) = \tilde{\zeta}^*(k)$ folgt die Identität

$$\lambda_\phi = -2 \sum_{n=0}^{\infty} n^2 |z_n|^2 \frac{\langle |\tilde{\zeta}(n\omega)|^2 \rangle}{2}. \quad (\text{D.16})$$

Falls das farbige Rauschen ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist, gilt nach (2.51) die Gleichung

$$\langle |\tilde{\zeta}(\omega)|^2 \rangle = S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\tau^{-1} + \omega^2\tau}. \quad (\text{D.17})$$

Unter Berücksichtigung der Identität $|z_n|^2 = (a_n^2 + b_n^2)/4$ folgt das Endresultat

$$\lambda_\phi = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2) \frac{\sigma^2}{\tau^{-1} + (n\omega_0)^2\tau}, \quad (\text{D.18})$$

welches bei den Rechnungen in dieser Arbeit verwendet wurde.

E. Phasensensitivitäten

Dieser Anhang dient der Darstellung der Phasensensitivitäten von den in dieser Arbeit verwendeten Oszillatoren. Der Nullpunkt der Phase ist so gewählt, dass er mit dem Maximum der ersten Oszillatorkomponente korrespondiert. Bei Neuronenmodellen ist der Spitze des Aktionspotentials also Phase Null zugeordnet.

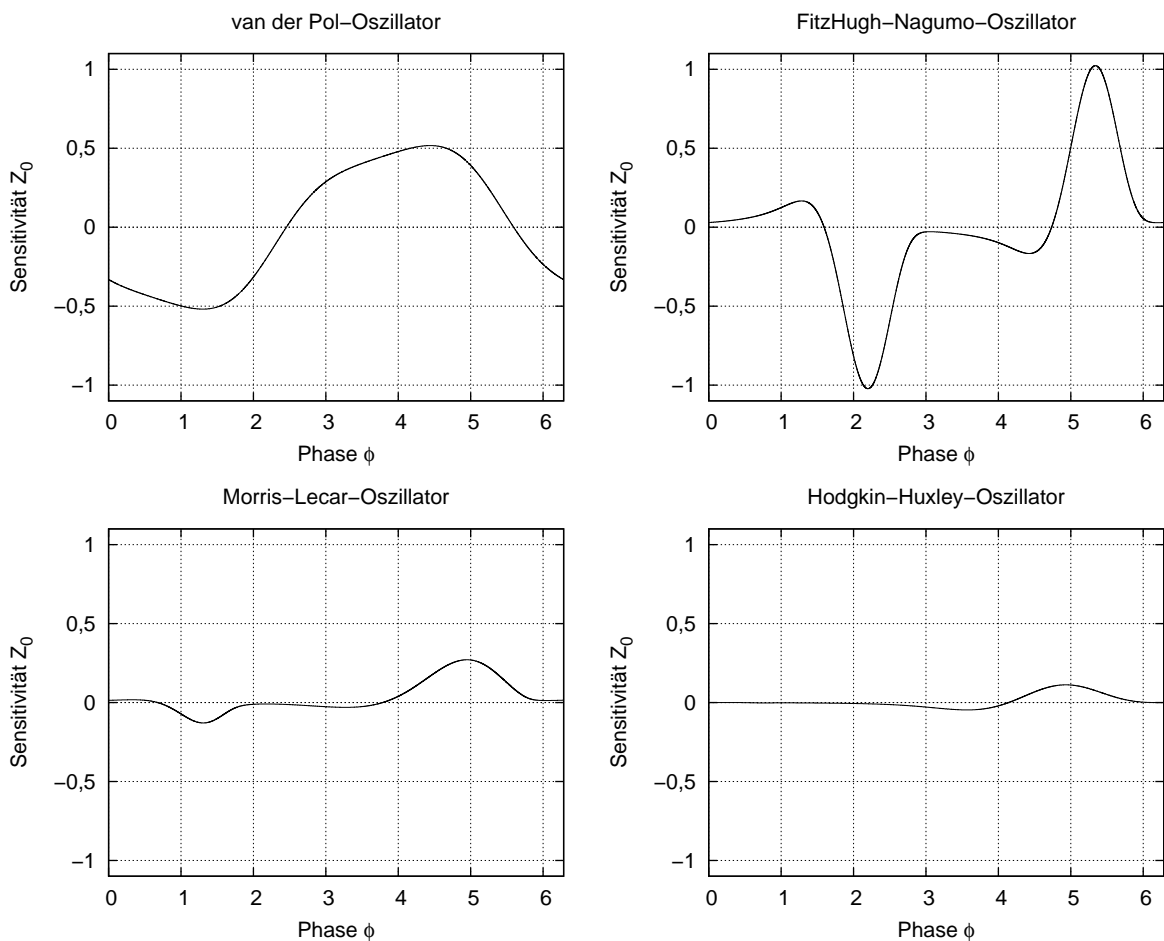


Abbildung E.1.: Links oben: van der Pol-Oszillator mit den Parametern $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 1$; rechts oben: FitzHugh-Nagumo-Oszillator mit den Parametern $I = 0,875$, $\varphi = 0,08$, $a = 0,7$ und $b = 0,8$; links unten: Morris-Lecar-Oszillator mit den zur Hopfbifurkation gehörenden Parametern (siehe 2.2); rechts unten: Hodgkin-Huxley-Oszillator mit den Standardparametern (siehe Abschnitt 2.4.1)

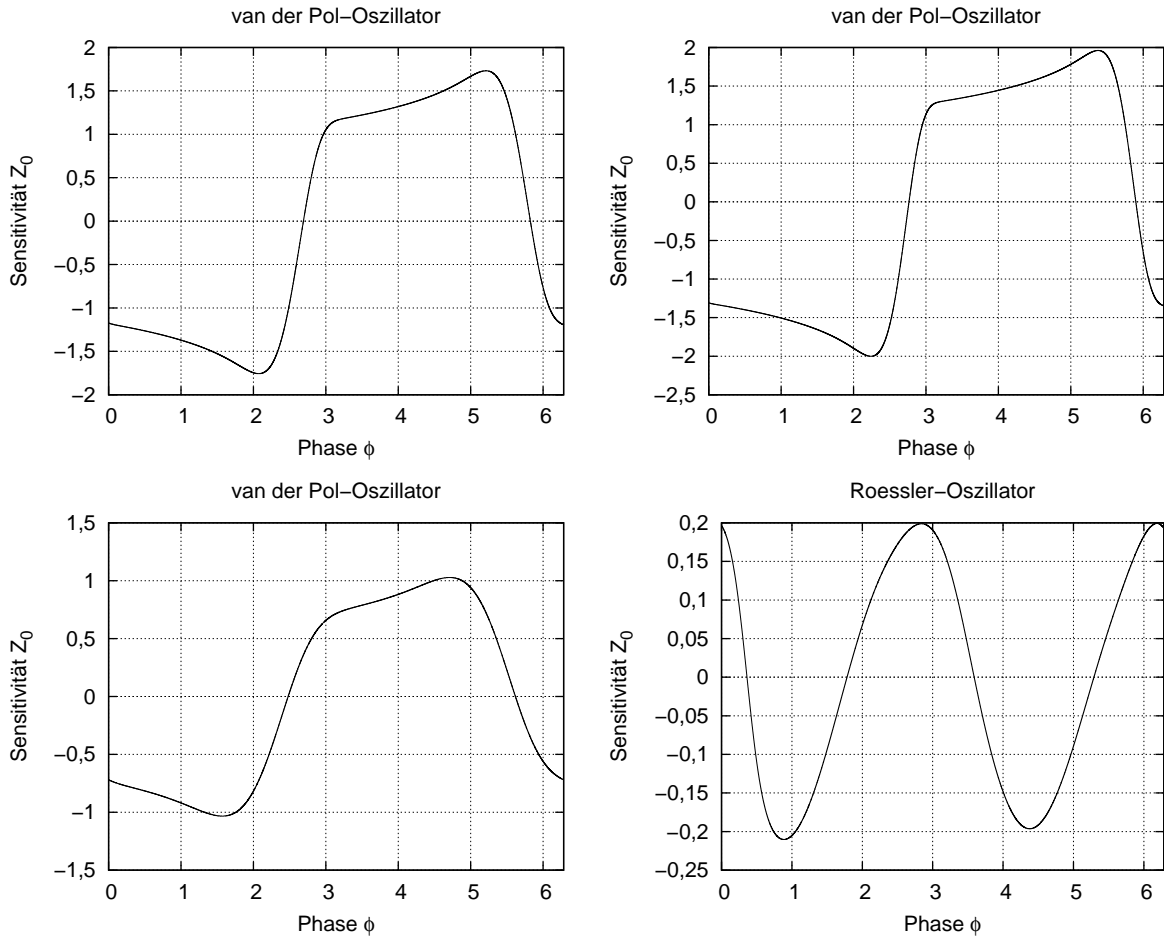


Abbildung E.2.: Links oben: van der Pol-Oszillator mit den Parametern $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 0,25$; rechts oben: van der Pol-Oszillator mit den Parametern $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 0,2$; links unten: van der Pol-Oszillator mit den Parametern $\gamma = 1/2$, $\beta = 1$ und $\omega_0 = 0,5$; rechts unten: Roessler-Oszillator mit den Parametern $a = 0,2$, $b = 0,2$, $c = 3,5$ und $\omega = 1$.

Literaturverzeichnis

- [AAN⁺02] V. S. Anishchenko, V. V. Astakhov, A. B. Neiman, T. E. Vadivasova, and L. Schimansky-Geier. *Nonlinear Dynamics of Chaotic and Stochastic Systems*. Springer Series in Synergetics. Springer, Berlin, 1st edition, 2002.
- [AB02] R. Albert and A.-L. Barabási. Statistical mechanics of complex networks. *Rev. Mod. Phys.*, 74:47–97, 2002.
- [ACFP01] P. Arena, R. Caponetto, L. Fortuna, and D. Porto. *Nonlinear Noninteger Order Circuits and Systems — An Introduction*, volume 38 of *World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A*. World Scientific, Singapore, 2001.
- [AGLE99] J. Arnhold, P. Grassberger, K. Lehnertz, and C. E. Elger. A robust method for detecting interdependences: application to intracranially recorded EEG. *Physica D*, 134:419–430, 1999.
- [Arn65] V. I. Arnold. Small denominators, I. mappings of the circumference onto itself. *Trans. Am. Math. Soc.*, 42:213–284, 1965.
- [Arn91] V. I. Arnold. Cardiac arrhythmias and circle mappings. *Chaos*, 1:20–24, 1991.
- [Arn98] L. Arnold. *Random Dynamical Systems*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin- Heidelberg - New York - Tokio, 1998.
- [ARS96] H. D. I. Abarbanel, N. F. Rulkov, and M. M. Sushchik. Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach. *Phys. Rev. E*, 53:4528–4535, 1996.
- [ASY97] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke. *Chaos; An Introduction to dynamical systems*. Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [AVR86] V. S. Afraimovich, N. N. Verichev, and M. I. Rabinovich. General synchronization. *Radiophys. Quantum Electron.*, 29:795–803, 1986.
- [BB68] J. Buck and E. Buck. Mechanism of rhythmic synchronous flashing of fireflies. *Science*, 159:1319–1327, 1968.
- [BBH⁺81] J. Buck, E. Buck, F. E. Hanson, J. F. Case, L. Mets, and G. J. Atta. Control of flashing in fireflies. IV. Free run pacemaking in a synchronic *Pteroptyx*. *J. Comp. Physiol.*, 144:277–286, 1981.

- [Bel85] B. P. Belousov. A periodic reaction and its mechanism. In R. J. Field and M. Burger, editors, *Oscillations and traveling waves in chemical systems*. Wiley, New York, 1985.
- [BGG80] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J. M. Strelcyn. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them. *Meccanica*, 15:9–20, 1980.
- [BHK01] H. Busch, M.-Th. Hütt, and F. Kaiser. Effect of colored noise on networks of nonlinear oscillators. *Phys. Rev. E*, 64:021105, 2001.
- [Bir27] G. D. Birkhoff. *Dynamical Systems*, volume 9. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1927.
- [BKO⁺02] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou. The synchronization of chaotic systems. *Phys. Rep.*, 366:1–101, 2002.
- [BLM⁺06] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Phys. Rep.*, 424:175–308, 2006.
- [BLT01] L. Baroni, R. Livi, and A. Torcini. Transition to stochastic synchronization in spatially extended systems. *Phys. Rev. E*, 63:036226, 2001.
- [Boy03] R. W. Boyd. *Nonlinear Optics*. Academic Press, London, 2nd edition, 2003.
- [BR56] J. Balatoni and A. Rényi. On the notion of entropy. *Publ. Math. Inst. Hung. Akad. Sci.*, 1:9–40, 1956.
- [BRdRvSW91] W. Bialek, F. Rieke, R. R. de Ruyter van Steveninck, and D. Warland. Reading a neural code. *Science*, 252:1854–1857, 1991.
- [BRdRvSW99] W. Bialek, F. Rieke, R. R. de Ruyter van Steveninck, and D. Warland. *Spikes: Exploring the Neural Code*. Computational Neuroscience. MIT Press, Cambridge, MA, 1999.
- [Bri92] E. O. Brigham. *FFT: Schnelle Fourier-Transformation*. R. Oldenbourg Verlag, München, 1992.
- [BRR00] R. S. Berry, S. A. Rice, and J. Ross. *Physical Chemistry*. Oxford University Press, New York, 2nd edition, 2000.
- [BSV81] R. Benzi, A. Sutera, and A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *J. Phys. A*, 14:L453–L457, 1981.
- [But30] S. Butterworth. On the theory of filter amplifiers. *Wireless Engineer*, 7:536–541, 1930.
- [Buz94] T. Buzug. *Analyse chaotischer Systeme*. BI-Wiss.-Verl., Mannheim, Leipzig, 1994.

- [CDK87] L. O. Chua, C. A. Desoer, and E. S. Kuh. *Linear and nonlinear circuits*. McGraw-Hill Book Co., Singapore, 1987.
- [CH93] M. C. Cross and P. C Hohenberg. Pattern formation outside of equilibrium. *Rev. Mod. Phys.*, 65:851–1112, 1993.
- [Cha81] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. International Series of Monographs on Physics. Dover Publications, Oxford, England, Dover edition, 1981.
- [Cro87] J. Cronin. *Mathematical Aspects of Hodgkin-Huxley Neural Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1987.
- [Doo42] J. L. Doob. The Brownian movement and stochastic equations. *Ann. Math.*, 43:351–369, 1942.
- [Doo44] J.L. Doob. The elementary gaussian processes. *Ann. Math. Stat.*, 15:229–282, 1944.
- [Ein04] Albert Einstein. Zur allgemeinen molekularen Theorie der Wärme. *Ann. Phys.*, 14:354–362, 1904.
- [Ein16] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Ann. Phys.*, 49:769–822, 1916.
- [EP07] J. Engel and T. A. Pedley. *Epilepsy: a comprehensive textbook*. Lippincott-Raven, Philadelphia, 2nd edition, 2007.
- [ER85] J.-P. Eckmann and D. Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Rev. Mod. Phys.*, 57:617–656, 1985.
- [Erm81] G. B. Ermentrout. $n : m$ phase-locking of weakly coupled oscillators. *J. Math. Biol.*, 12:327–342, 1981.
- [FCRL93] L. Fabiny, P. Colet, R. Roy, and D. Lenstra. Coherence and phase dynamics of spatially coupled solid-state lasers. *Phys. Rev. A*, 47:4287–4296, 1993.
- [Fit61] R. A. FitzHugh. Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J.*, 1:445–466, 1961.
- [FJ98] M. Frigo and S. G. Johnson. FFTW: An adaptive software architecture for the FFT. In *Proc. IEEE Intl. Conf. on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, volume 3, pages 1381–1384, Seattle, WA, 1998.
- [FKL⁺01] J. Fell, P. Klaver, K. Lehnertz, T. Grunwald, C. Schaller, C. E. Elger, and G. Fernandez. Human memory formation is accompanied by rhinal-hippocampal coupling and decoupling. *Nat. Neurosci.*, 4:1259–1264, 2001.

- [FKTW06] T. Fukuyama, R. Kozakov, H. Testrich, and C. Wilke. Spatiotemporal synchronization of coupled oscillators in a laboratory plasma. *Phys. Rev. Lett.*, 96:024101, 2006.
- [FNK03] H. Fukuda, H. Nagano, and S. Kai. Stochastic synchronization in two-dimensional coupled lattice oscillators in the Belousov-Zhabotinsky reaction. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 72:487–490, 2003.
- [FY83] H. Fujisaka and T. Yamada. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 69:32–47, 1983.
- [Gar04] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences: For Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer Series in Synergetics. Springer, Berlin, third edition, 2004.
- [GDZH93] H. Gang, T. Ditzinger, C. Z.Ning, and H. Haken. Stochastic resonance without external periodic force. *Phys. Rev. Lett.*, 71:807–810, 1993.
- [GFTEU06] R. F. Galan, N. Fourcaud-Trocme, G. B. Ermentrout, and N. N. Urban. Correlation-induced synchronization of oscillations in olfactory bulb neurons. *J. Neurosci.*, 26:3646–3655, 2006.
- [GHJM98] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70:223–287, 1998.
- [GK02] W. Gerstner and W. M. Kistler. *Spiking Neuron Models. Single Neurons, Populations, Plasticity*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [GL95] M. R. Guevara and T. J. Lewis. A minimal single-channel model for the regularity of beating in the sinoatrial node. *Chaos*, 5:174–183, 1995.
- [Gla01] L. Glass. Synchronization and rhythmic processes in physiology. *Nature*, 410:277–284, 2001.
- [GP82] L. Glass and R. Perez. Fine structure of phase locking. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1772–1775, 1982.
- [GP05] D. S. Goldobin and A. Pikovsky. Synchronization and desynchronization of self-sustained oscillators by common noise. *Phys. Rev. E*, 71:045201, 2005.
- [Guc75] J. Guckenheimer. Isochrons and phaseless sets. *J. Math. Biol.*, 1:259–273, 1975.
- [Had02] V. Hadamschek. Auswirkung von Rauschen auf neuronale Aktivität. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2002.
- [Hak83] H. Haken. *Advanced synergetics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

- [HH52a] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. The components of membrane conductance in the giant axon of *Loligo*. *J. Physiol.*, 116:473–496, 1952.
- [HH52b] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. Currents carried by sodium and potassium ions through the membrane of the giant axon of *Loligo*. *J. Physiol.*, 116:449–472, 1952.
- [HH52c] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. The dual effect of membrane potential on sodium conductance in the axon of *Loligo*. *J. Physiol.*, 116:497–506, 1952.
- [HH52d] A. L. Hodgkin and A. F. Huxley. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol.*, 117:500–544, 1952.
- [HI97] F. C. Hoppensteadt and E. M. Izhikevich. *Weakly Connected Neural Networks*, volume 126 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, first edition, 1997.
- [Hil01] B. Hille. *Ion Channels of Excitable Membranes*. Sinauer Associates, Inc., Sunderland, MA, U.S.A., third edition, 2001.
- [HJ95] P. Hänggi and P. Jung. Colored noise in dynamical systems. *Adv. Chem. Phys.*, 89:239–326, 1995.
- [HJZM93] P. Hänggi, P. Jung, C. Zerbe, and F. Moss. Can colored noise improve stochastic resonance? *J. Stat. Phys.*, 70:25–47, 1993.
- [HL84] W. Horsthemke and R. Lefever. *Noise-Induced Transitions. Theory and Applications in Physics, Chemistry and Biology*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [HLPL88] M. Hoke, K. Lehnertz, C. Pantev, and B. Lütkenhöner. Spatiotemporal aspects of synergetic processes in the auditory cortex as revealed by the magnetoencephalogram. In E. Başar and T. Bullock, editors, *Dynamics of cognitive and sensory processing in the brain*, pages 84–108. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1988.
- [Hor06] M. T. Horstmann. Stochastische Resonanz in einem realistischen Neuronenmodell mit veränderlichen Ionenkanaleigenschaften. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2006.
- [Huy73] C. (Hugenii) Huygens. *Horologium Oscillatorium*. Apud F. Muguet, Parisiis, 1673.
- [Itô51a] K. Itô. Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc. Japan*, 3:157–169, 1951.
- [Itô51b] K. Itô. On stochastic differential equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4:1–51, 1951.

- [Izh07] E. M. Izhikevich. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT Press, Cambridge, MA, 2007.
- [Joh28] J. B. Johnson. Thermal agitation of electricity in conductors. *Phys. Rev.*, 32:97–109, 1928.
- [Jos62] B. D. Josephson. Possible new effects in superconductive tunneling. *Phys. Lett.*, 1:251–253, 1962.
- [JW94] F. Jeltsch and C. Wissel. Modelling dieback phenomena in natural forests. *Ecol. Model.*, 75/76:111–121, 1994.
- [KEW91] N. Kopell, G. B. Ermentrout, and T. L. Williams. On chains of oscillators forced at one end. *SIAM J. Appl. Math.*, 51:1397–1417, 1991.
- [Khi34] A. J. Khinchin. Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. *Math. Ann.*, 109:604–615, 1934.
- [Koc99] C. Koch. *Biophysics of Computation: Information Processing in Single Neurons*. Computational Neuroscience. Oxford University Press, New York, Oxford, 1999.
- [Kol58] A. N. Kolmogorov. A new invariant of transitive dynamical systems. *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 119:861–864, 1958.
- [KP92] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [KS95] R. Kapral and K. Showalter, editors. *Chemical Waves and Patterns*. Kluwer, Dordrecht, 1995.
- [KS98] C. Koch and I. Segev. *Methods in Neuronal Modeling*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, second edition, 1998.
- [Kur75] Y. Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled nonlinear oscillators. In H. Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, volume 39 of *Springer Lecture Notes in Physics*, pages 420–422, Springer, New York, 1975.
- [Kur84] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves and Turbulence*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [KY79] J. L. Kaplan and J. A. Yorke. Chaotic behavior of multidimensional difference equations. In H. O. Walter and H.-O. Peitgen, editors, *Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points*, volume 730 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 204–227. Springer-Verlag, Berlin, 1979.

- [Lan08] P. Langevin. Sur la théorie du mouvement brownien. *Comptes Rendus*, 146:530–533, 1908.
- [LKP89] R. W. Leven, B.-P. Koch, and B. Pompe. *Chaos in dissipativen Systemen*. Akademie-Verlag, Berlin, 1989.
- [Lor63] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [Lot25] A. J. Lotka. *Elements of Physical Biology*. Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.
- [Lya47] M. A. Lyapunov. Problème général de la stabilité du mouvement, (1907 translation from the 1892 russian original). *Annal. Math. Stud.*, 17, 1947.
- [Mar72] K. V. Mardia. *Statistics of directional data*. Academic Press, London, 1972.
- [Mar85] O. Martin. Lyapunov exponents of stochastic dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 41:249–261, 1985.
- [MI02] K. Miyakawa and H. Isikawa. Noise-enhanced phase locking in a chemical oscillator system. *Phys. Rev. E*, 65:056206, 2002.
- [MJ00] K. V. Mardia and P. E. Jupp. *Directional Statistics*. Wiley, New York, 2000.
- [MKHC02] D. McMillen, N. Kopell, J. Hasty, and J. J. Collins. Synchronizing genetic relaxation oscillators by intercell signaling. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 99:679–684, 2002.
- [ML81] C. Morris and H. Lecar. Voltage oscillations in the barnacle giant muscle fiber. *Biophys. J.*, 193:193–213, 1981.
- [MLDE00] F. Mormann, K. Lehnertz, P. David, and C. E. Elger. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the EEG of epilepsy patients. *Physica D*, 144:358–369, 2000.
- [MM89a] F. Moss and P. V. E. McClintock. *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.
- [MM89b] F. Moss and P. V. E. McClintock. *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, volume 2. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.
- [MM89c] F. Moss and P. V. E. McClintock. *Noise in Nonlinear Dynamical Systems*, volume 3. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1989.
- [MN86] D. V. Madison and R. A. Nicoll. Actions of noradrenaline recorded intracellularly in rat hippocampal CA1 pyramidal neurons, in vitro. *J. Physiol.*, 372:221–244, 1986.

- [MP89] R. Mannella and V. Palleschi. Fast and precise algorithm for computer simulation of stochastic differential equations. *Phys. Rev. A*, 40:3381–3386, 1989.
- [MS95] Z. F. Mainen and T. J. Sejnowski. Reliability of spike timing in neocortical neurons. *Science*, 268:1503–1506, 1995.
- [Mül02] A. Müller. Stochastische Synchronisation gekoppelter Abbildungsgitter. Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2002.
- [Mur03] J. D. Murray. *Mathematical Biology*. Springer, New York, 3rd edition, 2003.
- [MWR88] B. McNamara, K. Wiesenfeld, and R. Roy. Observation of stochastic resonance in a ring laser. *Phys. Rev. Lett.*, 60:2626–2629, 1988.
- [NAY62] J. S. Nagumo, S. Arimoto, and S. Yoshizawa. An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50:2061–2070, 1962.
- [NR01] A. Neiman and D. F. Russel. Stochastic biperiodic oscillations in the electroreceptors of paddlefish. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3443–3446, 2001.
- [NR02] A. B. Neiman and D. F. Russell. Synchronization of noise-induced bursts in noncoupled sensory neurons. *Phys. Rev. Lett.*, 88:138103, 2002.
- [NRB⁺00] Z. Nédá, E. Ravasz, Y. Brechet, T. Vicsek, and A. L. Barabási. Tumultuous applause can transform itself into waves of synchronized clapping. *Nature*, 403:849–850, 2000.
- [Nyq28] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32:110–113, 1928.
- [OKZ07] G. V. Osipov, J. Kurths, and C. Zhou. *Synchronization in Oscillatory Networks*. Springer Series in Synergetics. Springer, Berlin, 2007.
- [Ose68] V. I. Oseledec. A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 19:197–231, 1968.
- [OSY94] E. Ott, T. Sauer, and J. A. Yorke. *Coping with Chaos*. Wiley, New York, 1994.
- [Ott93] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. University Press, Cambridge, 1993.
- [PC90] L. M. Pecora and T. L. Carroll. Synchronization in chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 64:821–824, 1990.
- [PCJ⁺97] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, and J. F. Heagy. Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications. *Chaos*, 7:520–543, 1997.

- [Per91] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [Pes77] Ya. B. Pesin. Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. *Russ. Math. Surv.*, 32:55, 1977.
- [Pik84] A. S. Pikovsky. Synchronization and stochastization of nonlinear oscillations by external noise. *Radiophys. Quant. Electron.*, 27:390–395, 1984.
- [Pik92] A. S. Pikovsky. Statistics of trajectory separation in noisy dynamical systems. *Phys. Lett. A*, 165:33–36, 1992.
- [PK97a] A. S. Pikovsky and J. Kurths. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.*, 78:775–778, 1997.
- [PK97b] A. S. Pikovsky and J. Kurths. Coherence resonance in a noise-driven excitable system. *Phys. Rev. Lett.*, 78:775–778, 1997.
- [PL08] J. Prusseit and K. Lehnertz. Measuring interdependences in dissipative dynamical systems with estimated fokker-planck coefficients. *Phys. Rev. E*, 77:041914, 2008.
- [POS97] V. Petrov, Q. Ouyang, and H. L. Swinney. Resonant pattern formation in a chemical system. *Nature*, 388:655–657, 1997.
- [PRK01] A. S. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge Nonlinear Science Series 12. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2001.
- [PTVF02] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, England, second edition, 2002.
- [Pyr92] K. Pyragas. Continuous control of chaos, by self-controlling feedback. *Phys. Lett. A*, 170:421–428, 1992.
- [PYW95] D. W. Peterman, M. Ye, and P. E. Wigen. High frequency synchronization of chaos. *Phys. Rev. Lett.*, 74:1740–1742, 1995.
- [PZR⁺97] A. Pikovsky, M. Zaks, M. Roenblum, G. Osipov, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillations in terms of periodic orbits. *Chaos*, 7:680–687, 1997.
- [QQKKG02] R. Quian Quiroga, A. Kraskov, T. Kreuz, and P. Grassberger. Performance of different synchronization measures in real data: A case study on electroencephalographic signals. *Phys. Rev. E*, 65:041903, 2002.

- [RE98] J. Rinzel and G. B. Ermentrout. Analysis of neural excitability and oscillations. In C. Koch and I. Segev, editors, *Methods in Neuronal Modeling*, pages 251–292. MIT Press, Cambridge, MA, second edition, 1998.
- [Rei02] P. Reimann. Brownian motors: Noisy transport far from equilibrium. *Phys. Rep.*, 361:57, 2002.
- [RK98] M. Rosenblum and J. Kurths. Analysing synchronization phenomena from bivariate data by means of the hilbert transform. In H. Kantz, J. Kurths, and G. Mayer-Kress, editors, *Nonlinear Analysis of Physiological Data*, pages 91–99, Berlin, 1998. Springer.
- [Roe76] O. E. Roessler. An equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57:397–398, 1976.
- [RPK96] M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths. Phase synchronization of chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 76:1804–1807, 1996.
- [RPK97] M. Rosenblum, A. Pikovsky, and J. Kurths. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 78:4193–4196, 1997.
- [RPTM00] E. Rosa Jr, W. B. Pardo, C. M. Ticos, and J. A. Walkenstein and M. Monti. Phase synchronization of chaos in a plasma discharge tube. *Int. J. Bifurcat. Chaos*, 10:2551–2563, 2000.
- [RSTA95] N. F. Rulkov, M. M. Sushchik, L. S. Tsimring, and H. D. I. Abarbanel. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 51:980–994, 1995.
- [RT94] R. Roy and K. S. Thornburg. Experimental synchronization of chaotic lasers. *Phys. Rev. Lett.*, 72:2009–2012, 1994.
- [Sch87] R. F. Schmidt. *Grundriß der Neurophysiologie*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [Sch88] H. G. Schuster. *Deterministic Chaos: An Introduction*. VCH, Weinheim, 1988.
- [SG81] H. L. Swinney and J. P. Gollub, editors. *Hydrodynamic Instabilities and the Transition to Turbulence*, volume 45 of *Topics in Applied Physics*. Springer Verlag, Berlin, 1981.
- [SH07] G. Schmid and P. Hänggi. Intrinsic coherence resonance in excitable membrane patches. *Math. Biosci.*, 207:235–245, 2007.
- [Sha81] R. S. Shaw. Strange attractors, chaotic behavior, and information flow. *Z. Naturforsch.*, 36:80–112, 1981.

- [Sin59] Ya. G. Sinai. Zum Begriff der Entropie dynamischer Systeme (in russ.). *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 124:768–771, 1959.
- [SJ02] J. W. Shuai and P. Jung. Optimal intracellular calcium signaling. *Phys. Rev. Lett.*, 88:068102, 2002.
- [SJ03] J. W. Shuai and P. Jung. Optimal ion channel clustering for intracellular calcium signaling. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 100:506–510, 2003.
- [SK86] S. Shinomoto and Y. Kuramoto. Cooperative phenomena in two-dimensional active rotator systems. *Prog. Theor. Phys.*, 75:1319–1327, 1986.
- [SM93] S. H. Strogatz and R. E. Mirollo. Splay states in globally coupled Josephson arrays. *Phys. Rev. E*, 47:220–227, 1993.
- [SN79] I. Shimada and T. Nagashima. A numerical approach to ergodic problems of dissipative dynamical systems. *Prog. Theor. Phys.*, 61:1605–1616, 1979.
- [SRKA98] C. Schäfer, M. G. Rosenblum, J. Kurths, and H. H. Abel. Heartbeat synchronized with ventilation. *Nature*, 392:239–240, 1998.
- [SS01] E. Salinas and T. J. Sejnowski. Correlated neuronal activity and the flow of neural information. *Nat. Rev. Neurosci.*, 2:539–550, 2001.
- [Str63] R. L. Stratonovich. *Introduction to the Theory of Random Noise*. Gordon and Breach, New York, London, 1963.
- [Str86] S. H. Strogatz. *The Mathematical Structure of the Human Sleep-Wake Cycle*, volume 69 of *Springer Lecture Notes In Biomathematics*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [Str94] S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison Wesley, New York, 1994.
- [Stu58] J. T. Stuart. On the non-linear mechanics of hydrodynamic stability. *J. Fluid Mech.*, 4:1, 1958.
- [Stu60] J. T. Stuart. On the nonlinear mechanics of wave disturbances in stable and unstable parallel flows. part 1. the basic behaviour in plane poiseuille flow. *J. Fluid Mech.*, 9:353–370, 1960.
- [SW49] C. E. Shannon and W. Weaver. *The Mathematical Theory of Information*. University Press, Urbana Ill., 1949.
- [SWB94] J. Simonet, M. Warden, and E. Brun. Locking and Arnold tongues in an infinite-dimensional system: The nuclear magnetic resonance laser with delayed feedback. *Phys. Rev. E*, 50:3383–3391, 1994.

- [SWS82] R. H. Simoyi, A. Wolf, and H. L. Swinney. One-dimensional dynamics in a multicomponent chemical reaction. *Phys. Rev. Lett.*, 49:245–248, 1982.
- [TMHGP01] R. Toral, C. R. Mirasso, E. Hernandez-Garcia, and O. Piro. Analytical and numerical studies of noise-induced synchronization of chaotic systems. *Chaos*, 11:665–673, 2001.
- [TT04] J. Teramae and D. Tanaka. Robustness of the noise-induced phase synchronization in a general class of limit cycle oscillators. *Phys. Rev. Lett.*, 93:204103, 2004.
- [TT06] J. Teramae and D. Tanaka. Noise induced phase synchronization of a general class of limit cycle oscillators. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 161:360–363, 2006.
- [TTH⁺96] T. Tsukamoto, M. Tachikawa, T. Hirano, T. Kuga, and T. Shimizu. Synchronization of a chaotic laser pulsation with its prerecorded history. *Phys. Rev. E*, 54:4476–4479, 1996.
- [TTT⁺97] T. Tsukamoto, M. Tachikawa, T. Tohei, T. Hirano, T. Kuga, and T. Shimizu. Synchronization of a laser system to a modulation signal artificially constructed from its strange attractor. *Phys. Rev. E*, 56:6564–6568, 1997.
- [TWR02] H. C. Tuckwell, F. Y. M. Wan, and J.-P. Rospars. A spatial stochastic neuronal model with Ornstein-Uhlenbeck input current. *Biol. Cybern.*, 86:137–145, 2002.
- [UMR04] A. Uchida, R. McAllister, and R. Roy. Consistency of nonlinear system response to complex drive signals. *Phys. Rev. Lett.*, 93:244102, 2004.
- [UO30] G. E. Uhlenbeck and L. S. Ornstein. On the theory of the Brownian motion. *Phys. Rev.*, 36:823–841, 1930.
- [vdP26] B. van der Pol. On relaxation oscillation. *Phil. Mag.*, 2:978–992, 1926.
- [vdPvdM27] B. van der Pol and J. van der Mark. Frequency demultiplication. *Nature*, 120:363–364, 1927.
- [vK07] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland Personal Library, third edition, 2007.
- [Vol26] V. Volterra. Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie d’animali conviventi. *Mem. Acad. Lincei*, 2:31–113, 1926.
- [vS06] M. von Smoluchowski. Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen. *Ann. Phys.*, 21:756–780, 1906.
- [Wie30] N. Wiener. Generalized harmonic analysis. *Acta Math.*, 55:117–258, 1930.

- [Wig03] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 2003.
- [Win67] A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Biol.*, 16:15–42, 1967.
- [WS95] K. Wiesenfeld and J. W. Swift. Averaged equations for josephson junction series arrays. *Phys. Rev. E*, 51:1020–1025, 1995.
- [WSSV85] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:285–317, 1985.
- [WZ65a] E. W. Wong and M. Zakai. On the convergence of ordinary integrals to stochastic integrals. *Ann. Math. Statist.*, 36:1560–1564, 1965.
- [WZ65b] E. W. Wong and M. Zakai. On the relation between ordinary and stochastic differential equations. *Internat. J. Engrg. Sci.*, 3:213–229, 1965.
- [YF83] T. Yamada and H. Fujisaka. Stability theory of synchronized motion in coupled-oscillator systems, II. the mapping approach. *Prog. Theor. Phys.*, 70:1240–1248, 1983.
- [ZPRK99] M. A. Zaks, E. H. Park, M. G. Rosenblum, and J. Kurths. Alternating locking ratios in imperfect phase synchronization. *Phys. Rev. Lett.*, 82:4228–4231, 1999.

Eigene Veröffentlichungen

Journalartikel

- [MOS⁺06] A. Müller, H. Osterhage, R. Sowa, R.G. Andrzejak, F. Mormann, and K. Lehnertz. A distributed computing system for multivariate analyses of multichannel neurophysiological data. *J. Neurosci. Methods*, 152:190, 2006.
- [LMO⁺07] K. Lehnertz, F. Mormann, H. Osterhage, M. Staniek, A. Müller, A. Chernihovskyi, J. Prusseit M. Staniek, D. Krug, S. Bialonski, and C. E. Elger. State-of-the-art of seizure prediction. *J. Clin. Neurophysiol.*, 24:147, 2007.

Buchartikel

- [HMR⁺08] M.-T. Horstmann, A. Müller, A. Rothkegel, J. Schwabedal, C. E. Elger, and K. Lehnertz. Impact of computational models for an improved understanding of ictogenesis: From single neurons to networks of neurons. In B. Schelter, A. Schulze-Bonhage, and J. Timmer, editors, *Seizure Prediction in Epilepsy : From Basic Mechanisms to Clinical Applications*. Wiley-VCH, 2008 (in press).

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. K. Maier, Herrn Prof. Dr. K. Lehnertz und Herrn Prof. Dr. C.E. Elger für die Möglichkeit der Durchführung dieser interdisziplinären Arbeit an der Klinik für Epileptologie und am Helmholtz-Institut für Strahlen- und Kernphysik der Universität Bonn.

Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Lehnertz für das stete Interesse und die vielen hilfreichen Diskussionen und wertvollen Kommentare sowie der Betreuung und Unterstützung der Arbeit.

Der gesamten Neurophysik-Gruppe möchte ich für die sehr entspannte und freundliche Arbeitsatmosphäre und die stete Hilfsbereitschaft danken.

Ich danke Frau Margitta Schilf für ihre wertvolle Hilfe beim Korrekturlesen.

Meiner Familie, insbesondere meinen Eltern Elvira und Heinrich Josef Müller danke ich für den Rückhalt und die Unterstützung bei der Erfüllung meiner Ziele.