

# Mathematische Behandlung von Mischungen elastoplastischer Substanzen

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades Dr. rer. nat.

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Liubov Khasina

aus

Moskau

Bonn, 2008

Angefertigt mit Genehmigung

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Gutachter:

1. Prof. Dr. J. Frehse
2. Dr. habil. W. Weigant

Tag der Promotion: 25.06.2008

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn unter [http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss\\_online](http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online) elektronisch publiziert.

# Inhaltsverzeichnis

|           |  |           |
|-----------|--|-----------|
| <b>0</b>  | <b>Einleitung</b>  | <b>3</b>  |
| <b>I</b>  | <b>Elastoplastizitätstheorie</b>   | <b>6</b>  |
| <b>1</b>  | <b>Gleichungen der Elastoplastizität</b>   | <b>6</b>  |
| 1.1       | Mechanik elastoplastischer Körper . . . . .  | 6         |
| 1.2       | Deviatorischer und sphärischer Anteil eines Tensors . . . . .                                      | 8         |
| 1.3       | Verzerrungstensor und Verschiebung . . . . .   | 9         |
| 1.4       | Elastische Stoffgesetze . . . . .  | 11        |
| 1.4.1     | Randwertprobleme der Elastizitätstheorie . . . . .   | 13        |
| 1.5       | Elastoplastizität . . . . .  | 15        |
| 1.5.1     | Elastischer Bereich und Fließgrenze . . . . .  | 17        |
| 1.5.2     | Randwertprobleme der Elastoplastizität . . . . .   | 22        |
| <b>2</b>  | <b>Mischung von zwei elastoplastischen Substanzen</b>  | <b>26</b> |
| <b>3</b>  | <b>Elastoplastizität als Aufgabe der konvexen Analysis</b>   | <b>30</b> |
| 3.1       | Stationäres Problem . . . . .  | 30        |
| 3.1.1     | Norton-Hoff-Approximation . . . . .  | 31        |
| 3.1.2     | Grenzübergang $q \rightarrow \infty$ . . . . .   | 35        |
| 3.1.3     | Abschätzungen der Verschiebung . . . . .   | 37        |
| 3.1.4     | Hencky-Variationsungleichung . . . . .   | 39        |
| 3.1.5     | $H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}$ -Regularität . . . . .  | 41        |
| 3.2       | Quasistatisches Problem . . . . .  | 45        |
| 3.2.1     | Norton-Hoff-Approximation . . . . .  | 46        |
| 3.2.2     | Abschätzungen der Approximationsfolge . . . . .  | 48        |
| 3.2.3     | Grenzübergang $k \rightarrow 0$ . . . . .  | 55        |
| 3.2.4     | $L^\infty(I, H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta})$ -Regularität . . . . .                                 | 60        |
| 3.2.5     | Lösbarkeit des Prandtl-Reuss Modells . . . . .   | 62        |
| <b>II</b> | <b>Numerik des Mischungsmodells</b>  | <b>67</b> |
| <b>4</b>  | <b>Algorithmische Aspekte und Fehleranalyse</b>  | <b>67</b> |
| 4.1       | Zeitliche Diskretisierung . . . . .  | 67        |
| 4.1.1     | A priori Schranke . . . . .  | 68        |
| 4.1.2     | Gedämpftes unexaktes Newton-Verfahren . . . . .  | 70        |
| 4.2       | Diskretisierung im Ort . . . . .   | 72        |
| 4.2.1     | A posteriori Fehlerschätzer für das statische Hencky-Modell der Mischung . . . . .                 | 73        |
| 4.2.2     | A posteriori Fehlerabschätzung für das quasi-statische Prandtl-Reuss-Modell der Mischung . . . . . | 75        |

|          |                                  |            |
|----------|----------------------------------|------------|
| 4.3      | Verfeinerungsstrategie . . . . . | 77         |
| 4.4      | Programmgestaltung . . . . .     | 77         |
| <b>5</b> | <b>Numerische Tests</b>          | <b>79</b>  |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>      | <b>106</b> |
|          | <b>Sachverzeichnis</b>           | <b>111</b> |
|          | <b>Symbolverzeichnis</b>         | <b>113</b> |

## 0 Einleitung

Mechanik ist ein Teilgebiet der Physik, das die Lage und die Gestaltveränderung von Körpern unter der Wirkung von Kräften untersucht. C. Truesdell im Vorwort zu seinem Buch "A first course in rational continuum mechanics" (1977) sieht das Lagrange's Werk "Mécanique Analitique" (1788) als Gründung der Mechanik von festen Körpern. Obwohl die Menschen sich schon sehr lange davor mit den Bewegungs- und Deformationsfragen beschäftigten, wurden gerade in dieser Arbeit alle bekannten Anwendungsbeispiele klassifiziert und der anfängliche theoretische Hintergrund gelegt.

Im nächsten Jahrhundert hat Cauchy zwei wichtige Begriffe der Verzerrung und der Spannung eingeführt. Und ungefähr auf die gleiche Zeit geht das Stoffgesetz der linearen Elastizität zurück. Jedoch ist man danach bei der Theorie der kleinen Deformationen, die gerade linear beschreibbar ist, sehr lange stehengeblieben.

Im Jahre 1867 beobachtete Tresca als erster, daß die festen Körper unter ausreichend großem Druck "fließen" können. Saint Venant (1870), Levy (1870) und später von Mises (1913) entwickelten die Bewegungsgleichung für starre plastische (engl. rigid-plastic) Körper, auch bei großen Deformationen. Das Ganze geschah aber unter einer Annahme, daß solche Körper unter keinen Umständen elastische Deformationen erleiden. Diese Annahme mag für Metalle und bestimmte andere Materialien befriedigend sein, aber noch lange nicht für alle.

Erst im letzten Jahrhundert beginnt man die Mechanik eines Körpers im Bezug auf seinen Stoff zu studieren und erzielt entscheidende Fortschritte in der Modellierung komplexerer Erscheinungen im Materialverhalten wie Plastizität, Viskoelastizität, Schädigung und Bruch.

Prandtl (1924) und Reuss (1930) modifizierten das Levy-Mises Modell. Sie wiesen die Elastizitätseigenschaften in Materialien unter kleinen Deformationen nach und unterschieden zwischen den vorübergehenden umkehrbaren (entspricht der elastischen Verzerrung) und dauerhaften unumkehrbaren (plastische Verzerrung) Deformationen. Die totale Verzerrung wurde als Summe der elastischen und plastischen Anteile angenommen.

So wird auch in der modernen Lehre ("Prandtl-Reuss-Theorie" genannt) das elasto-plastische Materialverhalten durch

- elastisches Stoffgesetz
- Bedingung, bei der Unumkehrbarkeit auftritt
- plastische Verzerrung

bedingt [25].

Als Anlaß für die vorliegende Arbeit diente das Werk von Kratochvíl, Malék, Rajagopal und Srinivasa "Modeling of the response of elastic plastic materials treated as a mixture of hard and soft regions". Die Autoren benutzten das von Eckard (1948) eingeführte Konzept von mehreren natürlichen (spannungsfreien in unserem Fall, s. Sektion 2) Konfigurationen als ein mischungsähnliches Modell für die Ermittlung

der Stoffspannung. Nach Eckard können plastische Materialien mehrere bzw. unendlich viele natürliche Konfigurationen besitzen, im Gegensatz zu der elastischen Deformation, bei der es nur einen spannungsfreien Zustand gibt. In [20] wird es zugelassen, daß der Stoff bezüglich jeder von diesen natürlichen Konfigurationen eine andere Spannung hat. Unabhängig vom aktuellen Zustand des Körpers wird die Gesamtspannung als Mischung solcher Spannungen aufgefaßt.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir einen Stoff, der während der Deformation seine Eigenschaften ändert. Beginnend von einem "soften" Status wird er immer härter, bis eine Sättigungsquote erreicht wird. Wir sondern zwei Zustände aus: weichen und harten Zustand. Die Gesamtspannung wollen wir als Konvexkombination der beiden Komponenten (Spannungen bezüglich der weichen und harten natürlichen Konfigurationen) betrachten. Das entspricht einer Linearisierung des oben beschriebenen Modells (s. [20]). Der Vorteil dieser Vereinfachung ist, daß man die ganze Theorie über die Stoffe, die nur aus einer Komponente bestehen, auf die Konvexkombination von zwei Komponenten zu verallgemeinern versuchen kann.

Diese Arbeit wird folgendermaßen gegliedert:

- Nach einer Einführung in die Elastoplastizitätstheorie eines einfachen Materials (Teil I, Sektion 1, [13, 19]) beschreiben wir in der zweiten Sektion ein Mischungsmodell nach [20]. Dann wird der Existenzbeweis aus [6] bzw. [5] für Hencky bzw. Prandtl-Reuss-Modell auf die Mischung von zwei Substanzen übertragen.
- Im zweiten Teil dieser Arbeit befassen wir uns mit der Numerik der Elastoplastizität. Die wichtigsten Referenzen hierfür sind die Arbeiten von Suttmeier [33, 32] und Ranacher [28], sowie [15, 40, 38]. In Analogie zu dem Ein-Komponenten-Stoff zeigen wir unter gewissen Annahmen eine a priori und a posteriori Abschätzung für die Mischung (Teil II, Sektion 6).

Alle Beispiele aus der letzten Sektion haben wir mit einem Programm erzeugt, das unter Verwendung der deal.II-Bibliothek, nach dem für die Mischung verallgemeinerten Algorithmus aus [33] geschrieben wurde. Dieses Programm haben wir am x86 Rechner mit gcc 4.1.2 unter SUSE Linux getestet.

An dieser Stelle möchte ich mich bei sehr vielen Personen bedanken, die mir während der Anfertigung dieser Arbeit geholfen haben.

In erster Linie danke ich meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Frehse, für die Problemstellung und seine zahlreichen Lösungsvorschläge, insbesondere bei Existenzbeweisen. Ich danke Herrn Prof. Dr. Kratochvíl und Herrn Prof. Dr. Malék für ihre Aufklärung der physikalischen Zusammenhänge.

Das Programm von Herrn Prof. Dr. Suttmeier, das er mir zur Verfügung gestellt hat, und seine Beratung zur Numerik der Elastoplastizität waren äußerst anregend für das Erstellen des hier vorgestellten Algorithmus.

Ich bedanke mich beim Herrn Huft, der große Teile meiner Arbeit korrigiert hat und bei allen Mitarbeitern von Herrn Prof. Dr. Frehse, die mir bei gelegentlichen Fragen geholfen haben.

Das Entstehen dieser Arbeit wäre ohne vielfältige Unterstützung von meinen Angehörigen bzw. Angehörigen meines Mannes nicht möglich gewesen. Sie haben mir die Voraussetzungen verschaffen, nach der Geburt unseres Kindes die Arbeit zu beenden.

## Teil I

# Elastoplastizitätstheorie

## 1 Gleichungen der Elastoplastizität

In diesem Kapitel wird ein System von partiellen Differentialgleichungen hergeleitet, das das Verhalten des festen Körpers unter Einfluß von äußeren Kräften beschreibt. Dies kann auf zweierlei Art geschehen: die Gleichungen folgen sowohl aus den Gesetzen der Physik, als auch beim Minimieren eines bestimmten Energiefunktional. Im Folgenden seien die beiden Methoden ausführlicher betrachtet. Als wichtigsten Referenzen für die Stoffsdarstellung von der physikalischen Sicht wurden [13, 21, 37] und [19] verwendet.

### 1.1 Mechanik elastoplastischer Körper

Es sei ein beliebiger fester Körper gegeben. Vor der Einwirkung von Kräften nehme dieser Körper eine beschränkte Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein, die im Weiteren als *Referenzkonfiguration* bezeichnet sei. Am Anfang befinde sich der Körper im Gleichgewichtszustand: d.h., wählt man ein Testvolumen  $V \subset \Omega$  aus, verschwindet die resultierende Kraft, die auf  $V$  wirkt. Beginnt man nun den Körper zu deformieren, geht  $\Omega$  in  $\Omega_t$  (*aktuelle Konfiguration* zum Zeitpunkt  $t$ ) über. Die Moleküle verlassen ihre ursprüngliche Positionen. Dadurch entstehen innere Kräfte, die den Körper veranlassen, sich in die Ausgangslage zurückzuziehen. Diese inneren Kräfte heißen *innere Spannungen*, sie verschwinden im undeformierten Zustand. Obwohl die inneren Spannungen durch molekulare Kräfte verursacht werden, wirkt jedes einzelne Molekül nur auf die benachbarten Teilchen im sehr geringen Radius. Da die Elastoplastizität eine makroskopische Theorie ist, wird angenommen, daß dieser Radius gleich 0 ist. Daraus entnehmen die Kontinuumsmechaniker (s. z.B. [21, 13]), daß die inneren Kräfte, die auf ein Volumenelement  $V$  des Körpers wirken, dieses Element nur durch seine Oberfläche  $\partial V$  beeinflussen können.

Wir betrachten die folgende Situation: ein beliebiges Teilvolumen  $V$  der Referenzkonfiguration  $\Omega$  gehe unter Einwirkung der äußeren Kraft  $f$  in  $V_t$  über,  $t \in I$  und  $I := [0; T]$  bezeichne das Zeitintervall. Dabei wird jeder Punkt  $x \in \Omega$  nach  $x + u(t, x) \in \Omega_t$  abgebildet, insbesondere ist  $V + u(t, V) = V_t$ . Die vektorwertige Funktion  $u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x))^T$  heißt *Verschiebung* von  $x$ . Dieser Verschiebung  $u$  entspricht ein Geschwindigkeits- und ein Beschleunigungsfeld, die durch

$$\begin{aligned}\dot{u}(t, x) &= \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, =: v(t, x) \\ \ddot{u}(t, x) &= \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2}\end{aligned}$$

definiert sind.

Weiterhin benötigen wir die beiden globalen Begriffe:



das *lineare Moment* einer Teilmenge  $V_t$  von  $\Omega_t$  zur Zeit  $t$  ist durch

$$\int_V \rho \dot{u}(t, x) dx$$

und das *Drehmoment* durch

$$\int_V x \wedge \rho \dot{u} dx$$

gegeben, wobei  $\rho$  die Maßdichte bezeichnet, die als konstant angenommen wird, und  $V$  das Urbild von  $V_t$  im undeformierten Zustand ist. Das Vektorprodukt der Vektoren  $a = (a_1, a_2, a_3)^T$  und  $b = (b_1, b_2, b_3)^T$  wird durch:  $a \wedge b := (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^T \in \mathbb{R}^3$  definiert.

Nun postulieren wir zwei Erhaltungssätze [13]:

1. Die Summe der auf  $V_t$  wirkende Kräfte ist gleich der Veränderungsgeschwindigkeit des linearen Momentes.

Die resultierende Kraft, die  $V_t$  beeinflusst, addiert sich aus den äußeren Kräften  $\int_\Omega f(t, x) dx$  und aus der Summe der Kräfte, die vom Komplement  $\Omega_t \setminus V_t$  von  $V_t$  auf  $V_t$  wirken. Wie bereits gesagt wurde, können in  $V_t$  auf diese Weise nur die Oberflächenkräfte entstehen. Drückt man das Ganze in den Koordinaten des Referenzgebietes  $\Omega$  aus, kann der obige Satz durch die folgende Formel dargestellt werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \dot{u}(t, x) dx = \int_V \rho \ddot{u}(t, x) dx = \int_V f(t, x) dx + \int_{\partial V} \mathbf{t}(t, x, n) do, \quad (1)$$

$\int_{\partial V} \varphi do$  ist das Oberflächenintegral von  $\varphi$ . Die Zuordnung  $\mathbf{t} : (I \times \Omega) \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt *Cauchyscher Spannungsvektor*,  $S^2$  bezeichnet die Einheitssphäre,  $\mathbf{t}(t, x, n)$  gibt die Kraft im Punkt  $x$  des Flächenelementes mit der äußeren Normale  $n$  in diesem Punkt an.

2. Die Summe der auf  $V_t$  wirkende Momente stimmt mit der Veränderungsgeschwindigkeit des Drehmomentes überein.

Genau wie im ersten Punkt und mit gleicher Bedeutung der Variablen bekommt man die Formel:

$$\int_V x \wedge \rho \ddot{u}(t, x) dx = \int_V x \wedge f(t, x) dx + \int_{\partial V} x \wedge \mathbf{t}(t, x, n) do.$$

**Satz von Cauchy:** Sei  $f \in C^0(I \times \Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3$  - die vorgegebene Ziehkraft,  $I = [0, T] \subset \mathbb{R}^1$  - ein Zeitintervall und  $\mathbf{t} \in C^0(I \times \Omega \times S^2) \rightarrow \mathbb{R}^3$  - der dazugehörige Spannungsvektor. Dann existiert ein  $\sigma : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ , so daß

$$\mathbf{t}(t, x, n) = \sigma(t, x)n \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

$\sigma$  wird Spannungstensor, oder einfach Spannung genannt. Dabei wird die  $i$ . Koordinate des Vektors  $Ab = ((Ab)_1, (Ab)_2, (Ab)_3)^T$  für ein beliebiges  $3 \times 3$ -Tensor  $A = (A_{ij})_{ij=1}^3$  und ein 3-dimensionales Vektor  $b = (b_j)_{j=1}^3$  durch  $(Ab)_i := \sum_{j=1}^3 A_{ij} b_j$  definiert.

Dieser Satz wird z.B. in [8] bewiesen.

Ein klassisches Resultat beinhaltet, daß die Erhaltungssätze und der Satz von Cauchy die punktweise *Bewegungsgleichung* implizieren:

$$f + \operatorname{div} \sigma = \rho \ddot{u} \quad \text{f.ü. in } \Omega. \quad (2)$$

**Bemerkung 1.1:** *In der ganzen Arbeit, soweit nicht extra erläutert wird, benutzen wir die Einstein'sche Summenkonvention, d.h., über nicht-gebundene Indizes wird summiert. Die  $i$ . Koordinate ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) des Vektors  $\operatorname{div} \sigma := (\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{1j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{2j}}{\partial x_j}, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{3j}}{\partial x_j})^T$  schreiben wir mit dieser Notation einfach als  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ .*

In manchen Situationen sind alle Daten vom Zeitparameter unabhängig, so ist auch die Körperreaktion auf äußere Kräfte. In dem Falle hat man  $u = u(x)$  und  $\sigma = \sigma(x)$ . Oder es gilt häufig zwar  $u = u(t, x)$ ,  $\sigma = \sigma(t, x)$ , aber  $\ddot{u} = 0$ , weil alle Prozesse sehr langsam verlaufen. Aus der Bewegungsgleichung (2) wird dann die *Gleichgewichtsgleichung*:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -f_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (3)$$

Man kann leicht nachweisen, daß der Spannungstensor im vorliegenden Fall symmetrisch ist:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}.$$

## 1.2 Deviatorischer und sphärischer Anteil eines Tensors

Für jeden Punkt  $x \in \Omega$  ist der Spannungstensor  $\sigma(t, x)$  eine  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -Matrix, für die man das charakteristische Polynom  $P(\lambda)$  berechnen kann:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det(\sigma - \lambda Id) \\ &=: -\lambda^3 + I_1(\sigma)\lambda^2 - I_2(\sigma)\lambda + I_3(\sigma), \end{aligned}$$

wobei  $\det$  die Determinante bezeichnet und  $Id$  - die Identität. Die Koeffizienten dieses Polynoms sind unter dem Koordinatenwechsel invariant. Eine besondere Rolle spielt die *Spur*  $\operatorname{tr}(\sigma)$  des Spannungstensors  $\sigma$ :

$$I_1(\sigma) = \operatorname{tr}(\sigma) := \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

Für weitere Zwecke ist es nützlich, den Spannungstensor  $\sigma$  in den *sphärischen*

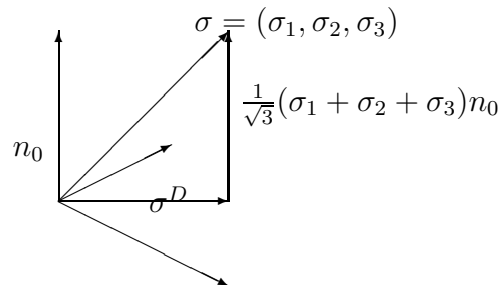
$$\frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) Id = \frac{1}{3} I_1(\sigma) Id$$

und den *deviatorischen*

$$\sigma^D := \sigma - \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\sigma) Id$$

Anteil zu zerlegen. Um das geometrisch zu veranschaulichen, betrachten wir eine Basis von Eigenvektoren  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  von  $\sigma$ , die existiert, da  $\sigma$  symmetrisch ist. Wir identifizieren den Tensor  $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mit dem Vektor von seinen Eigenwerten  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T$ , alle

anderen Einträge der Matrix  $\sigma$  sind gleich 0. Dann liegt der Deviator  $\sigma^D$  in der deviatorischen Ebene  $\{(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^T \mid \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0\}$  mit Einheitsnormale  $n_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$ . Der sphärischer Anteil entspricht dem Vector  $\frac{1}{\sqrt{3}}\text{tr}(\sigma)n_0$ . Somit ist  $\sigma^D$  die orthogonale Projektion von  $\sigma$  auf die deviatorische Ebene.



deviatorischer bzw. sphärischer Anteil des Spannungstensors  $\sigma$

### 1.3 Verzerrungstensor und Verschiebung

Sei  $x$  ein beliebiger Punkt des Referenzgebietes  $\Omega$ . Unter Einfluß externer Kräfte bewege sich  $x$  zu einem anderen Punkt  $\phi_t(x) = x + u(t, x) \in \mathbb{R}^3$  mit der gleichen Bedeutung der Verschiebung  $u$  wie vorher. Die Funktion  $\phi_t(x)$  soll folgende Bedingungen erfüllen:

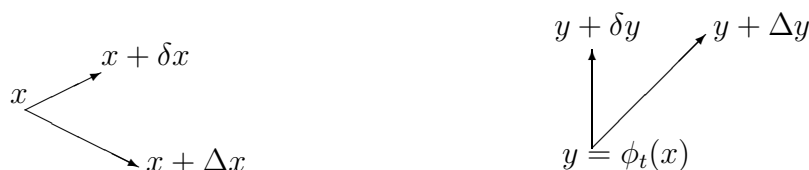
- $\phi_t$  ist injektiv.
- Die Bewegung muß orientierungserhaltend sein, d.h.,

$$J_t(x) := \det \nabla \phi_t(x) > 0, \quad (4)$$

wobei  $\nabla \phi_t(x) = \left(\frac{\partial(\phi_t(x))_i}{\partial x_j}\right)_{ij}$  die Jacobi-Matrix von  $\phi_t$  ist.

Es ist üblich, eher die Verschiebung  $u$  als primäre Unbekannte auszuwählen, als  $\phi_t$ , obwohl  $u$  alleine keine komplette Information über die Deformation des Körpers liefert. Man muß z.B. in der Lage sein, zwischen einfachen *Festkörperbewegungen*, bei denen der Körper undeformiert in die neue Position verschoben wird, und den Situationen, bei denen der Körper tatsächlich eine neue Form erwirbt, zu unterscheiden. Das wirkliche Maß der Deformation ist die *Verzerrung*.

Dafür betrachten wir einen Punkt  $x$  im Referenzgebiet und zwei infinitesimale Linienelemente  $[x, x + \delta x]$  und  $[x, x + \Delta x]$ , die unter der Deformation nach  $[y, y + \delta y]$  und  $[y, y + \Delta y]$  abgebildet werden:



Die Bedeutung von Verzerrung wird ersichtlich, wenn man die Längen- bzw. Winkelveränderungen von bzw. zwischen diesen Linienelementen, die durch Deformationen entstanden sind, ausrechnet:

$$\begin{aligned}\phi_t(\Delta x) &= \Delta y := \phi_t(x + \Delta x) - \phi_t(x), \\ \phi_t(\delta x) &= \delta y := \phi_t(x + \delta x) - \phi_t(x).\end{aligned}$$

Durch einfache Überlegung mit Hilfe der Taylor-Entwicklung zeigt man:

$$\begin{aligned}\Delta y \cdot \delta y - \Delta x \cdot \delta x &= \\ (\nabla u \Delta x) \cdot \delta x + (\nabla u \delta x) \cdot \Delta x + (\nabla u \Delta x) \cdot (\nabla u \delta x) + o(|\delta x|^2 + |\Delta x|^2 + |\Delta x| \cdot |\delta x|),\end{aligned}\tag{5}$$

wobei wir mit  $a \cdot b := a_j b_j$  das Skalarprodukt der Vektoren  $a = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$  und  $b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$  und mit  $|b| := \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$  - die  $l_2$ -Norm eines Vektors notieren.

Bezeichnet man mit  $h := \max\{|\Delta x|, |\delta x|\}$  und teilt man die beiden Seiten von (5) durch  $h^2$ , bekommt man mit Übergang zum Limes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta y \cdot \delta y - \Delta x \cdot \delta x}{h^2} = 2n \cdot \left[ \frac{\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u}{2} \right] \cdot m,\tag{6}$$

$n := \frac{\Delta x}{h}$ ,  $m := \frac{\delta x}{h}$  sind zwei feste, von  $h$  unabhängige Vektoren. Wir definieren den mit Verschiebung  $u$  assoziierten *Verzerrungstensor*  $E$ :

$$E(u) = \frac{1}{2}[\nabla u + \nabla u^T + (\nabla u)^T \nabla u] = \frac{1}{2}(\nabla \phi_t)^T \nabla \phi_t - Id.\tag{7}$$

Die Komponenten von  $E$  haben im orthogonalen Koordinatensystem eine einfache geometrische Interpretation:

1. Die Diagonaleinträge von  $E$  representieren die (relative) Längenveränderung eines Vektors, der in die Koordinatenrichtung zeigt.
2. Außerhalb der Hauptdiagonale entspricht der Eintrag  $E_{ij}$  von  $E$  dem Winkel zwischen den Bildern von Koordinatenachsen  $x_i$  und  $x_j$ .

Häufig werden nur sehr kleine Verschiebungen betrachtet, für die der quadratische Term vernachlässigt werden kann. Den führenden Term, der eine Näherung der Verzerrung ist, bezeichnet man als *symmetrische Ableitung*:

$$\varepsilon_{ij}(u) := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).\tag{8}$$

Der eben eingeführte Verzerrungstensor liefert ein einfaches Kriterium, nach dem man entscheiden kann, ob die betrachtete infinitesimale Deformation von einer Volumenveränderung begleitet wird. Mit der Jacobi-Matrix aus (4) kann man jedes

Teilvolumen  $V_t$  der aktuellen Konfiguration als ein Integral über die Portion des Referenzgebietes  $\Omega'$  mit  $\Omega'_t = \phi_t(\Omega')$  ausdrücken:

$$V_t = \int_{\Omega'_t} dy = \int_{\Omega'} J_t dx.$$

Für die Volumenveränderung infolge der Deformation gilt dann:

$$\Delta V = V_t - V_0 = \int_{\Omega'} (J_t(x) - 1) dx. \quad (9)$$

Nach Definition der Determinante ist

$$J_t = \det(\nabla \phi_t(x)) = \det(Id + \nabla u) = 1 + \operatorname{div} u + O(|\nabla u|^2).$$

Das setzen wir in (9) ein:

$$\Delta V = \int_{\Omega'} \operatorname{div} u dx + O(|\nabla u|^2).$$

Dies bedeutet,  $\operatorname{div} u = \operatorname{tr} \varepsilon(u)$  representiert die Volumenveränderung pro Volumeneinheit bei infinitesimalen Deformationen.

Manche (möglicherweise idealisierte) Materialien haben die Eigenschaft, daß sie nicht in der Lage sind, ihr Volumen zu ändern. Solche Stoffe heißen *unkomprimierbar* (engl. incompressible). Sie erfüllen die Bedingung:

$$\operatorname{tr} \varepsilon(u(t, x)) = \operatorname{div} u(t, x) = 0 \quad \forall x \in \Omega, t \in [0, T]. \quad (10)$$

Ab hier werden in dieser Arbeit ausschließlich nur die infinitesimalen Deformationen betrachtet, für die  $E(u) \approx \varepsilon(u)$  gilt.

## 1.4 Elastische Stoffgesetze

Um den Begriff "elastisches Material" einzuführen, ist es notwendig, die *Geschichte*  $\psi^t$  von  $\psi$  zum Zeitpunkt  $t$  zu definieren. Das ist eine Funktion, die Vergangenheit und Gegenwart von der Abbildung  $\psi$  beschreibt:

$$\psi^t(s) := \psi(t - s) \quad s \geq 0.$$

Aus den Gesetzen der Thermodynamik folgt im allgemeinen Fall, daß der in der Sektion 1.1 definierte Spannungstensor  $\sigma(t, x)$  in Abhängigkeit von der Deformationsgeschichte der Verzerrung

$$(\varepsilon(u(s, x)))^t = \varepsilon(u(t - s, x)) \quad s \geq 0$$

steht, d.h., die Materialien haben ein "Gedächtnis für ihre Vergangenheitserfahrungen".

Es gibt aber eine Reihe von Stoffen, für die  $\sigma$  nicht von der Deformationsgeschichte abhängt, sondern nur vom aktuellen Zustand  $\sigma = \sigma(\varepsilon(u))$ . Und zwar gibt es eine mindestens zwei Mal stetig differenzierbare Funktion  $\psi : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ , *Helmholtz-Potential* oder *Helmholtz freie Energie* genannt, für die

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \psi(\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (11)$$

gilt<sup>1</sup>. Physikalisch repräsentiert  $\psi$  die gespeicherte Energie (engl. stored energie). Für die zeitliche Ableitung  $\dot{\psi} := \frac{\partial \psi}{\partial t}$  von  $\psi$  gilt:

$$\dot{\psi} - \sigma : \dot{\varepsilon} = 0, \quad (12)$$

wobei wir mit  $A : B := A_{ij}B_{ij}$  für beliebige Tensoren  $A = (A_{ij})_{i,j=1}^3$  und  $B = (B_{ij})_{i,j=1}^3$  bezeichnen. Die Stoffe, die nicht von der Deformationsgeschichte abhängen, heißen *elastisch*. Ein elastischer Körper kehrt nach Abschalten der deformierenden Kraft unverzerrt in die Ausgangslage zurück. Die Relation (12) sowie  $\psi = \psi(\varepsilon)$  gilt nicht mehr, wenn wir später auch plastische Deformationen in Betracht ziehen. Trotzdem wird die Beziehung (12) eine wichtige Rolle spielen,  $\psi$  wird noch von den anderen Variablen abhängen.

Der Körper ist *linear elastisch*, wenn seine Spannung und seine Verzerrung durch *lineares Stoffgesetz von Hook*, d.h., durch

$$\sigma = C\varepsilon \quad (13)$$

miteinander verbunden sind. Dabei ist  $C\varepsilon$  ein  $3 \times 3$ -Tensor mit Koordinaten  $(C\varepsilon)_{ij} := C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ , also, das Produkt eines  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  Tensors mit einem  $3 \times 3$  Tensor.

Unter kleinen Deformationen weisen viele elastische Körper lineares Verhalten auf, deshalb wird in diesem Abschnitt nur lineare Elastizitätstheorie behandelt.

Für ein linear elastisches Material nimmt man an, daß sein Helmholtz-Potential  $\psi$  eine quadratische Funktion von  $\varepsilon(u)$  ist, d.h.,

$$\psi(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \tilde{C} \varepsilon. \quad (14)$$

Aus dieser Formel und weil  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$  folgt, daß der Tensor  $C = (C_{ijkl})_{i,j,k,l=1}^3$  die Symmetrieeigenschaften

$$C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl}$$

besitzt.  $C$  heißt *Elastizitätstensor* und ist eine lineare Abbildung von der Menge der symmetrischen Matrizen in sich selbst.

Besonderes einfach ist die Formel für  $C$  bei homogenen und isotropen Körpern. Das ist in vielen praktischen Problemen der Fall, weshalb im Weiteren nur solche Körper betrachtet seien. Ein Material heißt *homogen*, wenn seine Eigenschaften in allen

---

<sup>1</sup>Das Helmholtz-Potential  $\psi$  wird in der Thermodynamik auf eine andere Weise definiert. Für diese Arbeit ist aber nur die Formel (11) relevant.

Punkten des Referenzgebietes gleich sind. Es heißt *isotrop*, wenn das Stoffgesetz von der Wahl der Richtung unabhängig ist, d.h., der Elastizitätstensor ist gegenüber jedem orthogonalen Koordinatenwechsel mit Transformationsmatrix  $D = (d_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$  invariant. Also, gilt  $DD^T = Id$ , so ist  $C_{ijkl} = d_{ip}d_{jq}d_{kr}d_{ls}C_{pqrs}$ .

**Satz 1.2:** *Verhält sich ein homogener und isotroper Körper linear elastisch, so ist die Menge aller zulässigen Elastizitätstensoren von ihm zweidimensional. Daher gibt es zwei skalarwertige Funktionen  $\lambda$  und  $\mu$  (Lamé-Koeffizienten), so daß*

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (15)$$

mit dem Kronecker-Symbol  $\delta_{ij}$ .

Den Beweis dieses Satzes findet man in [8].

Im Weiteren beschränken wir uns auf den Fall, in dem  $\lambda$  und  $\mu$  konstant sind. Mit dem obigen Satz kann das Gesetz von Hook als

$$\sigma = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) Id + 2\mu \varepsilon$$

geschrieben werden.

Sei  $\psi(\varepsilon)$  die Helmholtz freie Energie eines homogenen und isotropen Körpers. Bleibt dieser Körper undeformiert, so ist  $\varepsilon = 0$  und  $\sigma = 0$ . Daher enthält die Taylorentwicklung von  $\psi$  nach  $\varepsilon$ -Potenzen keinen bezüglich  $\varepsilon$  linearen Term:

$$\begin{aligned} \psi &= \mu \varepsilon : \varepsilon + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{tr} \varepsilon)^2 \\ &= \mu \varepsilon^D : \varepsilon^D + \frac{2\mu + 3\lambda}{6} (\operatorname{tr} \varepsilon)^2. \end{aligned}$$

Weil die freie Energie nur im undeformierten Zustand ihr Minimum erreicht (entspricht  $\varepsilon = 0$ ), ist  $\psi(\varepsilon) > 0 \quad \forall \varepsilon \neq 0$ . Mit der Wahl von  $\varepsilon = \varepsilon^D$  bzw.  $\varepsilon = Id$  sieht man, daß die notwendige und hinreichende Bedingung für die positive Definitheit von  $\psi$  ist, daß

$$\mu > 0 \text{ und } 2\mu + 3\lambda > 0. \quad (16)$$

#### 1.4.1 Randwertprobleme der Elastizitätstheorie

Faßt man die Gleichungen der vorigen Abschnitte zusammen, ergibt sich ein folgendes System:

$$\begin{cases} f &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div} \sigma \\ \sigma &= C \varepsilon = \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon) Id + 2\mu \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{\nabla u + \nabla u^T}{2}. \end{cases} \quad (17)$$

Ein wichtiger Spezialfall dieser Aufgabe ist das stationäre Problem, bei dem alle Prozesse zeitunabhängig ablaufen und daher der Term  $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  verschwindet. Später, wenn man plastisches Verhalten behandelt, wird man sich im Rahmen dieser Arbeit höchstens für den *quasistatischen* Fall interessieren, d.h., die Daten werden mit der Zeit so langsam verändert, daß der Beschleunigungsterm in der Bewegungsgleichung

vernachlässigt werden kann. Aus diesen Gründen sei die Diskussion der Lösbarkeit von elastischen Differentialgleichungen nur auf den stationären Fall eingeschränkt, d.h., man hat

$$-div\sigma = f$$

statt der ersten Gleichung in (17).

Um dieses System eindeutig lösen zu können, geben wir dazu noch die gemischten Randbedingungen vor.  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ :

$$\begin{aligned} u|_{\Gamma_D} &= 0, \\ \sigma n &= g \quad \text{auf } \Gamma_N. \end{aligned}$$

Die physikalische Deutung davon ist, daß der Körper am Randstück  $\Gamma_D$  festgehalten wird, während auf  $\Gamma_N$  die Flächenkraft  $g = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j, \sigma_{3j}n_j) =: \sigma n$  wirkt, die mit der gegebenen Volumenkraft  $f$  im Gleichgewicht steht.

Da  $\sigma$  symmetrisch ist, lautet die schwache Formulierung der obigen Aufgabe:

**Problem 1.3'**: *Gesucht ist ein  $u \in [C^2(\Omega)]^3 \cap \{u \in [C^0(\Omega \cup \Gamma_D)]^3 \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}$ , so daß*

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot \varphi do \quad \forall \varphi \in V := \{\varphi \in [C^\infty(\Omega)]^3 \mid \varphi|_{\Gamma_D} = 0\}, \quad (18)$$

wobei  $\sigma = C\varepsilon(u) = \lambda tr(\varepsilon(u))Id + 2\mu\varepsilon(u)$  bezeichnet.

Sei  $[H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3$  der Abschluß des obigen Raumes  $V$  bezüglich der  $H^{1,2}$ -Norm. Die Identität (18) gilt auch für  $\varphi \in [H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3$ , weil der Raum  $V$  dicht in  $[H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3$  ist. Da die Verschiebung eines deformierten Körpers in der Realität nicht unbedingt  $C^2$ -glatt ist, kann man das Problem 1.3' folgendermaßen verallgemeinern:

**Problem 1.3**: *Man finde ein  $u \in [H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3$ , das der Integralgleichung*

$$\int_{\Omega} C\varepsilon(u) : \varepsilon(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \cdot \varphi dx + \int_{\Gamma_N} g \cdot \varphi do \quad \forall \varphi \in [H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3 \quad (19)$$

genügt.

Ist die Lösung  $u$  des Problems 1.3 eine Funktion aus  $[C^2(\Omega)]^3 \cap \{u \in [C^0(\Omega \cup \Gamma_D)]^3 \mid u|_{\Gamma_D} = 0\}$  und erfüllt dieses  $u$  die gemischten Randbedingungen, so löst  $u$  auch das stationäre Gleichungssystem (17): Durch "rückwärtige" partielle Integration von (19) sieht man, daß  $-div\sigma = f$  für fast alle  $x \in \Omega$  erfüllt werden muß. Aber  $\sigma(u) \in [C^1(\Omega)]^3$ , daher gilt diese Identität auch für alle  $x \in \Omega$ , vorausgesetzt, die vorgegebenen Funktionen  $f$  und  $g$  sind stetig.

**Behauptung 1.4**: *Die Integralgleichung (19) ist eindeutig lösbar.*

Für den Beweis verweisen wir auf [10].



## 1.5 Elastoplastizität

Beim *plastischen* Verhalten kehrt der Körper nach Rücknahme der deformierenden Kraft nicht mehr in die Ausgangslage zurück, wie es beim elastischen Benehmen der Fall gewesen ist. Seine Spannung wird von der Deformationsgeschichte beeinflusst (vgl. Abschnitt 1.4).

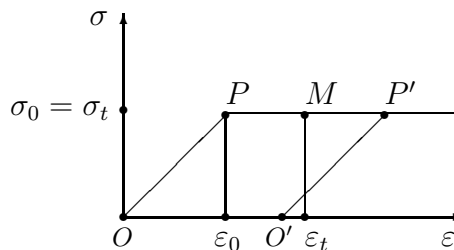
Die meisten Eigenschaften von elastoplastischen Materialien sind experimentell hergeleitet. Es hat sich herausgegeben, daß die Menge von "Verzerrung-Spannung"-Beziehungen in mehrere Gruppen aufgeteilt werden kann. Für jede von diesen Gruppen gilt ein eigenes Stoffgesetz. Im Weiteren führen wir eine graphische Darstellung ( $\sigma$ - $\varepsilon$ -*Diagramm*) dieser Gesetze ein.  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm soll als eine experimentell gewonnene Relation zwischen einem Maß der Spannung und der Verzerrung interpretiert werden. Da  $\sigma(t, x)$  - eine  $3 \times 3$  Matrix ist und auf der 2-dimensionalen Bildfläche als einen Punkt gekennzeichnet werden muß, braucht man ein Kriterium, nach dem  $\sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  auf  $\mathbb{R}^1$  abgebildet werden kann. Hat man so ein Kriterium  $F : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}^1$  gefunden, werden alle Spannungen  $\sigma_1, \sigma_2$  mit  $F(\sigma_1) = F(\sigma_2)$  als äquivalent betrachtet. Es gibt viele geläufige Möglichkeiten,  $F$  zu definieren. Das hängt vom gegebenen Stoff ab. In dieser Arbeit wird von der Funktion

$$F(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma^D : \sigma^D} \quad (20)$$

ausgegangen, die von R. von Mises vorgeschlagen wurde. Dem entsprechend kann man auch ein geeignetes Maß für  $\varepsilon$  (z.B.  $|\varepsilon| := \sqrt{\varepsilon : \varepsilon}$ ) finden, das aber für weitere Zwecke irrelevant ist. Obwohl die Achsen des Diagramms durch  $\sigma$  und  $\varepsilon$  gekennzeichnet sind, wird darunter "Maß von  $\sigma$ " und "Maß von  $\varepsilon$ " verstanden.

Viele Materialien zeigen einen linear elastischen Zusammenhang zwischen Spannung und Verzerrung, solange  $F(\sigma)$  kleiner oder gleich als *Initialisierungsfließpunkt*<sup>2</sup>  $\sigma_0$  bleibt. Danach ist  $\sigma$ - $\varepsilon$  - Verhältnis unumkehrbar.

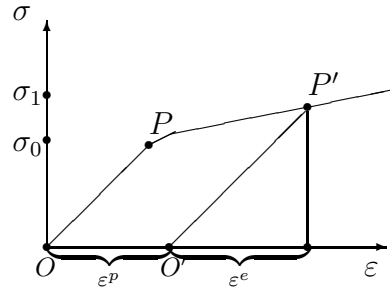
Manche Stoffe sind nach dem Erreichen des Initialisierungsfließpunktes (entspricht der Verzerrung  $\varepsilon_0$ ) unfähig, die inneren Spannungen zu produzieren, deren Maß größer ist, als  $\sigma_0$ . Solche Stoffe nennt man perfekt plastisch.



perfekt plastisches Material

<sup>2</sup>Später, wenn wir die Stoffe mit Verfestigung betrachten, werden wir die Bezeichnung  $\sigma_0(t)$  benutzen. Unter dem Initialisierungsfließpunkt wird dann  $\sigma_0(t_0)$  verstanden, wobei die plastischen Verformungen bei  $t = t_0$  anfangen.

Die anderen reagieren auf das weitere Wachsen von  $|\varepsilon|$  (im Bereich  $\varepsilon > \varepsilon_0$  des Diagramms) mit der ansteigenden Spannung. Man spricht von Materialien mit *Verfestigung* (engl. hardening).



Material mit Verfestigung

Elastisches Verhalten eines Stoffmusters wird von Deformationen im Kristallgitter verursacht, während plastisches Verhalten normalerweise durch unumkehrbare Zersplitterung entlang ausgezeichneter Gleitflächen charakterisiert ist. Die totale Verzerrung vom deformierten Körper setzt sich aus dem elastischen und plastischen Bestandteil zusammen:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p.$$

Genau wie im elastischen Fall, verfügen auch plastisch verformte Stoffe über ein Helmholtz-Potential  $\psi$ . Der Unterschied zwischen den elastischen und plastischen Deformationen besteht nur darin, daß die Energie im letzten Fall zum Teil in die Wärme konvertiert werden kann. Außerdem, weil die plastisch verformten Körper sowohl elastische als auch plastische Deformationen erleiden, wird die Energie nur während der mikrostrukturellen Stoffänderungen, also, nur während des plastischen Deformationsteils dissipiert.

Aus den Gesetzen der Thermodynamik folgt die *lokale Dissipationsungleichung* (isothermale Form der Clausius-Duhem-Ungleichung):

$$\delta := \dot{\psi} - \sigma : \dot{\varepsilon} \leq 0, \quad (21)$$

$\delta$  nennt man *Dissipationsgeschwindigkeit*. Man vergleiche diese Formel mit (12). (21) besagt, daß die Dissipationsgeschwindigkeit gleich der Differenz zwischen der Anstiegsgeschwindigkeit des Helmholtz-Potentials und der mechanischen Leistung ist.

Da für die lineare Elastizität das Gesetz (13) von Hook gültig bleibt, hat man auch im plastischen Bereich das gleiche Verhältnis zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon^e$ :

$$\sigma = C\varepsilon^e = C(\varepsilon - \varepsilon^p) = C\varepsilon - C\varepsilon^p \quad (22)$$

*-verallgemeinertes Gesetz von Hook.*

Im Gegensatz zur Elastizitätstheorie hängt hier die  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Beziehung auch von der Deformationsgeschichte ab und ist unumkehrbar. Der unumkehrbare Teil der Deformation wird gerade durch die Variable  $\varepsilon^p$  charakterisiert.

Wenn wir die Bezeichnung

$$\psi^e(\varepsilon^e) := \frac{1}{2} \varepsilon^e : C \varepsilon^e$$

für den elastischen Anteil der Helmholtz freien Energie einführen, gilt eine Analogie zu der Formel (11):

$$\sigma = \frac{\partial \psi^e}{\partial \varepsilon^e}. \quad (23)$$

Der plastische Teil von  $\psi$  ist dann als Differenz zwischen der gesamten Energie und ihrem elastischen Teil

$$\psi^p := \psi - \psi^e \quad (24)$$

definiert.  $\psi$  und  $\psi^p$  hängen von einer Reihe der zusätzlichen Variablen ab, die die unumkehrbaren Verformungen beschreiben. Diese Variablen brauchen noch nicht spezifiziert zu werden.

### Bemerkungen 1.5:

- a *In dieser Arbeit werden nur perfekt plastische Stoffe und Stoffe mit Verfestigung betrachtet.*
- b *Im allgemeinen Fall hängt die Beziehung zwischen  $\sigma$  und  $\varepsilon$  auch davon ab, wie schnell die deformierende Kraft angewendet wurde. Es gibt aber eine Reihe von Materialien, für die  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Relation keinen wesentlichen Zusammenhang mit der Deformationsgeschwindigkeit bei langsamen Prozessen aufweist. Und es gibt auch eine Reihe von praktischen Situationen, bei denen alle Prozesse nur langsam verlaufen. Dieser Verhaltenstyp heißt quasistatisch. Im vorliegenden Fall werden alle Daten hinreichend langsam verändert, so daß der Beschleunigungsterm in der Bewegungsgleichung vernachlässigt werden kann. Wir werden uns nur mit quasistatischen Problemen beschäftigen.*
- c *Wir setzen voraus, daß die plastischen Deformationen unkomprimierbar sind (s. (10)), also,  $\text{tr } \varepsilon^p = 0$ .*

#### 1.5.1 Elastischer Bereich und Fließgrenze

Für ein festes  $x_0 \in \Omega$  betrachten wir noch ein Mal die Beispieldiagramme aus dem vorigen Abschnitt. Und sei  $\sigma_0$  der Initialisierungsfließpunkt, d.h., der Punkt, ab dem das plastische Verhalten anfängt: für alle Spannungen  $\sigma(t, x_0)$  mit  $F(\sigma(t, x_0)) < \sigma_0$  weist der Körper elastisches Verhalten auf. Erhöht man die Kraft  $f$ , gelangt man in die plastische Region. Die Kurve  $(|\varepsilon(u(t, x_0))|, \sigma_0(t, x_0), \sigma_0(t, x_0)) := F(\sigma(t, x_0))$ ,  $t \in [0; T]$ , beschreibt dabei eine monoton wachsende Funktion ( $\sigma_0 = \text{const}$  für perfekt plastische Stoffe).  $\sigma_0(t, x_0)$  nennen wir *Fließgrenze*. Für die in dieser Arbeit betrachteten homogenen Materialien ist  $\sigma_0(t, x_0)$  für alle  $x_0 \in \Omega$  gleich, daher können wir einfach  $\sigma_0(t)$  schreiben.

Jetzt, wenn ein Punkt  $P'$  (s. Abbildungen, Seite 16) mit der Spannung  $\sigma^{P'}$ , deren Maß  $F(\sigma^{P'})$  größer oder gleich als Initialisierungsfließpunkt ist, schon erreicht ist,

fangen wir an, die Kraft zu reduzieren. Der Körper wird sich wieder elastisch benehmen. Dieses Phänomen heißt *elastisches Entladen*. Beim erneuten Wachsen von  $f$  verhält sich der Stoff zuerst elastisch, bis der neue Fließpunkt  $\sigma_1$ , der ungefähr mit dem Punkt  $F(\sigma^{P'})$  zusammenfällt, bei dem man mit Entladen begonnen hat, erreicht wird. Für diesen Kapitel wird angenommen, daß die Neigung  $OP$  die gleiche wie  $O'P'$  ist (*inkrementelle Gesetze* sind gleich). Anschaulich ist es klar, daß man unterhalb der Kurve  $\sigma_0(t)$  rein elastisches Verhalten hat, auf der Kurve - plastisches und die Punkte oberhalb der Kurve unerreichbar sind.

Formalisiert man dieses Resultat, hat man folgende Annahme: Zu jedem Zeitpunkt  $t$  liegen alle Spannungen in einer geschlossenen zusammenhängenden Menge  $S$ .  $S$  ist die Menge von *zulässigen Spannungen*. Das Innere dieser Menge heißt *elastischer Bereich* und wird mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet. Die Grenze  $B = \partial S$  nennt man *Fließfläche*. Das Komplement  $S^c := \{\tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid \tau \notin (\mathcal{E} \cup B)\}$  wird nie erreicht.

Es sei bemerkt, daß rein elastisches Verhalten sowohl für  $\sigma \in \mathcal{E}$  vorliegt, als auch, wenn  $\sigma$  sich auf  $B$  befindet und im nächsten Moment in Richtung  $\mathcal{E}$  läuft (beim elastischen Entladen). Plastisches Verhalten findet nur dann statt, wenn  $\sigma \in B$  auf  $B$  liegen bleibt. Dies ist *plastisches Beladen*.

Die perfekt plastischen Stoffe und die Stoffe mit Verfestigung unterscheiden sich dadurch, daß die Fließgrenze im letzten Fall ihre Gestalt mit der Deformation zusammen verändert.

Das nächste Ziel ist, die Menge der zulässigen Spannungen  $S$  zu beschreiben. Es wurde schon angedeutet, daß wir als Maß der Spannung die von Mises'sche Funktion  $F(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma^D : \sigma^D}$  benutzen möchten. Die Grenze, bei der die plastischen Deformationen auftreten, findet man sehr einfach für die ein-dimensionale Dehnung. In diesem Falle kann man mit der Wahl der Achsen erreichen, daß beim Spannungstensor  $\sigma$  nur die Komponente  $\sigma_{11}$  nicht verschwindet<sup>3</sup>. Unumkehrbares Verhalten wird bei  $\sigma_{11} = \sigma_0$  zu beobachten sein.  $\sigma_0$  ist ein leicht ermittelbarer Wert. Die *Fließbedingung* für diese ein-dimensionale Situation ist dann  $F(\sigma) = \sigma_0$ .

In Analogie dazu lautet das von Mises' Fließkriterium:

$$\sqrt{\frac{3}{2}\sigma^D : \sigma^D} - \sigma_0 = 0. \quad (25)$$

Und die Menge der zulässigen Spannungen ist

$$S := \{\sigma(t, x) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid t \in I, x \in \Omega, F(\sigma(t, x)) \leq \sigma_0(t)\}.$$

Diese Bedingung spiegelt das Verhalten eines perfekt plastischen Stoffes zurück, falls  $\sigma_0$  konstant ist, und eines Stoffes mit Verfestigung, falls  $\sigma_0(t)$  wächst.

Um sich die Fläche  $B$  geometrisch vorzustellen, wählen wir eine Basis von Eigenvektoren (zu den Eigenwerten  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ ) von  $\sigma$ . In dieser Basis hat Fließbedingung die Form:

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} - \sigma_0 = 0.$$

---

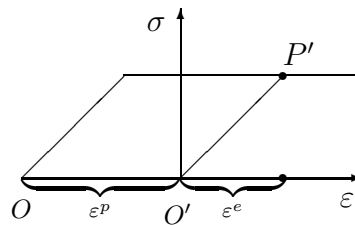
<sup>3</sup>Es gilt:  $|\sigma^D|^2 = \frac{2}{3}\sigma_{11}^2$ .

Das ist ein Zylinder bzw. eine abgestumpfte Kegel (für  $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ ) vom Radius  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  mit der parallelen zum Vektor  $\frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 1)^T$  Achse.

An dieser Stelle lassen wir unsere Beschreibung von der aus [13, 19] abweichen. Folgend [20] führen wir für jeden Zeitpunkt  $t \in I$  ein neues Referenzgebiet ein, das durch elastisches Entladen des (zu dieser Zeit) deformierten Körpers entsteht und das wir in der Zukunft als natürliche Konfiguration für unser Problem wählen werden.

Unter dem Begriff der *natürlichen Konfiguration* versteht man eine Körperkonfiguration, bezüglich der Spannung bekannt ist. Es kann ein spannungsfreier Zustand sein, der durch das elastische Entladen (falls möglich) erreicht wird, oder auch eine andere, für die gegebene Anwendung passende Menge [25]. Die letzte muß nicht unbedingt ein aktueller oder irgendein vergangener Zustand sein.

Das Ganze sei noch am Beispiel eines  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramms genauer erklärt. Obwohl wir nicht über den Graph einer Funktion, sondern über ein Diagramm sprechen, benutzen wir das Wort "Koordinatensystem". Aus den Abbildungen (s. Seite 16) ist es intuitiv verständlich, was darunter gemeint wird. Betrachten wir z.B. den Punkt  $P'$  des deformierten Körpers.  $P'$  würde beim Abschalten der äußeren Kraft in  $O'$  übergehen. Und wir führen ein neues Koordinatensystem ein, das achsenparallel zu dem alten ist, jedoch  $O'$  als Ursprung hat. Nimmt man nun als Ausgangspunkt die Körperkonfiguration, die durch das elastische Entladen entsteht, so ist das Materialverhalten bezüglich der neuen Konfiguration wieder elastisch, bis die neue Fließgrenze erreicht wird. Die durch Deformation verursachten Stoffänderungen werden beim Koordinatenwechsel mitberücksichtigt.



Koordinatenwechsel

Ist eine Funktion  $f_p$  bezüglich einer bestimmten Konfiguration  $\Omega_p$  gegeben, so kann sie leicht auf die gleiche Funktion  $f$  bezüglich der Referenzkonfiguration  $\Omega$  zurückgeführt werden, falls man die Abbildung  $\lambda : \Omega \rightarrow \Omega_p = \lambda(\Omega)$  kennt. Es gilt z.B.

$$\nabla f(t, x) = \nabla_\lambda f_p(t, \lambda(x)) \nabla \lambda(x), \quad (26)$$

wobei  $\nabla_\lambda f_p(t, \lambda(x)) := (\frac{\partial}{\partial y_1} f_p(t, y_1), \frac{\partial}{\partial y_2} f_p(t, y_2), \frac{\partial}{\partial y_3} f_p(t, y_3))^T|_{y=\lambda(x)}$ . Da die meisten elastoplastischen Gesetze gerade den Gradienten der Verschiebung einbeziehen, ist das eine wichtige Umrechnungsformel.

Betrachten wir als nächstes die Energiedissipation bei der Deformation des Punktes  $O$  in den Punkt  $P'$ . Es sei bemerkt, daß die Dissipationsgeschwindigkeit für den homogenen und isotropen Stoff eine Funktion der Deformation und nicht der Ortsvariable  $x$  ist. Da der Stoff in unserer Konfiguration eine Anfangsverzerrung  $\varepsilon^p$  hat, ist  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ . Für die Helmholtz-Energie gilt  $\psi(\varepsilon) = \psi^e(\varepsilon^e)$ , da wir gerade die natürliche

Konfiguration betrachten, bezüglich der das Material bis zum Punkte  $P'$  elastisches Verhalten aufweist,

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi^e}{\partial \varepsilon^e} : \dot{\varepsilon}^e = \sigma : \dot{\varepsilon}^e.$$

Hiermit sieht die Dissipationsgeschwindigkeit (21) wie folgt aus:

$$\delta = \dot{\psi} - \sigma : (\dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p) = -\sigma : \dot{\varepsilon}^p \leq 0, \quad (27)$$

d.h., unter anderem, daß  $\delta = \delta(\dot{\varepsilon}^p)$ . Dies entspricht unserer Vorstellung, daß die Dissipation der Energie nur im plastischen Fall vorkommt.

**Bemerkung 1.6:** Die Spannung  $\sigma$  wird im Koordinatensystem des deformierten Körpers gemessen. Wir benutzen, daß  $\sigma = C\varepsilon^e$ .  $\varepsilon^e$  ist von der Wahl der Konfiguration unabhängig.

Außerdem gilt für die Stoffe, die in dieser Arbeit betrachtet werden, das *Postulat der minimalen Dissipationsgeschwindigkeit*, das besagt:

*Ein deformiertes Material wählt immer eine solche "σ-ε-Strecke", daß die Dissipationsgeschwindigkeit δ minimal ist:*

$$\delta(\dot{\varepsilon}^p) = \min_{\varepsilon} \delta(\varepsilon). \quad (28)$$

Nun wollen wir dieses Postulat anwenden. Die Beziehung (28) ist ein viel strengeres Kriterium als die Dissipationsungleichung (27) selber. Deshalb ist man daran interessiert, eine schwächere Anforderung an  $\delta$  zu stellen, so daß man trotzdem Gleichungen, die realistisches (von der physikalischen Sicht) Verhalten beschreiben, im Endeffekt bekommt. Ein Weg, der zu guten Ergebnissen führt, ist, die Funktion  $\delta(\dot{\varepsilon}^p)$  nicht über alle möglichen  $\dot{\varepsilon}^p$  zu minimieren, sondern nur über solche, die einer bestimmten Menge angehören. Der Grenzfall, wenn diese Menge aus einem einzigen, nicht-verschwindenden Element besteht, liefert gerade die Dissipationsungleichung. Folgend dieser Methode schreiben wir z.B. die Dissipationsgeschwindigkeit als eine Funktion von  $\dot{\varepsilon}^p$  vor. Durch heuristische Überlegung dieser Art erhalten die Autoren von [20] eine einfache Form für  $\delta$ :

$$-\delta = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 |\dot{\varepsilon}^p|, \quad (29)$$

welche wir ebenfalls verwenden wollen. Dabei bezeichnet  $|B| := \sqrt{B : B}$  für beliebiges  $3 \times 3$ -Tensor  $B$ .

Die Unkomprimierbarkeitsannahme im plastischen Bereich (s. (10)) liefert  $tr \dot{\varepsilon}^p = 0 \forall t \in I$ , also auch  $tr \dot{\varepsilon}^p = 0$ , d.h.,  $\dot{\varepsilon}^p$  hat nur den deviatorischen Anteil und  $\sigma : \dot{\varepsilon}^p = \sigma^D : \dot{\varepsilon}^p$ .

**Behauptung 1.7:** Für jedes  $\dot{\varepsilon}_m^p$ , das die Dissipationsgeschwindigkeit  $\delta$  unter der Nebenbedingung

$$\begin{cases} \sigma^D : \dot{\varepsilon}_m^p &= \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0|\dot{\varepsilon}_m^p| \\ \text{tr } \dot{\varepsilon}_m^p &= 0 \end{cases} \quad (30)$$

minimiert, gilt:

$$\sigma^D = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \frac{\dot{\varepsilon}_m^p}{|\dot{\varepsilon}_m^p|}. \quad (31)$$

**Beweis:** Nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz wird  $\sigma^D : \dot{\varepsilon}_m^p$  maximal, wenn  $\sigma$  und  $\dot{\varepsilon}_m^p$  gleich gerichtet sind, d.h.,  $\forall t \in I, x \in \Omega: \exists \phi(t, x) \in \mathbb{R}, \phi(t, x) > 0$ , so daß  $\dot{\varepsilon}_m^p = \phi \sigma^D$ .

Nun wollen wir, daß  $\dot{\varepsilon}_m^p = \phi \sigma^D$  die Nebenbedingung (29) erfüllt, d.h.,  $\sigma^D : \dot{\varepsilon}_m^p = \frac{1}{\phi} |\dot{\varepsilon}_m^p|^2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 |\dot{\varepsilon}_m^p|$ . Also folgt

$$\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} |\dot{\varepsilon}_m^p| / \sigma_0$$

für  $|\dot{\varepsilon}_m^p| \neq 0$ .  $\text{tr } \dot{\varepsilon}_m^p = 0$  folgt aus der Proportionalität zu  $\sigma^D$ . (31) ist damit bewiesen.  $\square$

Im Weiteren bezeichnen wir das obige  $\dot{\varepsilon}_m^p$  wieder durch  $\dot{\varepsilon}^p$ .

Da im elastischen Bereich ( $|\sigma^D| < \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$ ) wie zuvor  $\varepsilon^p = \dot{\varepsilon}^p = 0$  und  $\sigma = C\varepsilon$  gilt, sieht eine kompaktere Schreibweise für die  $\sigma^D$ - $\dot{\varepsilon}^p$ -Beziehung wie folgt aus:

$$\dot{\varepsilon}^p = \phi \sigma^D, \text{ mit } (\phi \geq 0, |\sigma^D| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0) \text{ und } \phi(|\sigma^D| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0) = 0, \quad (32)$$

wobei  $\phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{|\dot{\varepsilon}^p|}{\sigma_0}$ .  $\phi$  heißt *plastischer Multiplikator*, denn es verschwindet im elastischen Bereich.

Die nächste nützliche Relation ist

$$\dot{\varepsilon}^p : (\tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}^{3 \times 3}(\Omega), \text{ mit } |\tau^D| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \leq 0, \quad (33)$$

denn

$$\dot{\varepsilon}^p : \tau = \phi \sigma^D : \tau^D \text{ und } \dot{\varepsilon}^p : \sigma = \phi |\sigma^D|^2.$$

Für  $|\sigma^D| < \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  ist  $\phi = 0$ , für  $|\sigma^D| = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  gilt

$$\dot{\varepsilon}^p : (\tau - \sigma) \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\phi(\sigma_0 |\tau^D| - \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0^2) \leq 0$$

nach Voraussetzung für  $\tau$ .

### 1.5.2 Randwertprobleme der Elastoplastizität

Der Vollständigkeit halber seien hier genau wie im rein elastischen Fall alle Gleichungen der vorigen Abschnitte zusammengefaßt. Die Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von der elastoplastischen Aufgabe wird anhand der Hilfsprobleme aus der konvexen Analysis bewiesen und aus diesem Grund erst in der Sektion 3 behandelt.

#### Prandtl-Reuss-Modell

In der klassischen Notation lautet unsere Aufgabenstellung:  $\forall t \in I$  löse man das System

$$\left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div} \sigma = f \\ \varepsilon(\dot{u}) = A\dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^p \\ \dot{\varepsilon}^p : (\tau - \sigma) \leq 0 \quad \forall \tau \text{ mit } F(\tau) \leq \sigma_0 \\ \dot{u} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_D \\ \sigma n = g \quad \text{auf } \Gamma_N, \end{array} \right\} \quad \text{in } \Omega \quad (34)$$

wobei  $u$  und  $\sigma$  unbekannte Funktionen sind ( $F(\sigma) \leq \sigma_0$ ), die im klassischen Sinne genügend regulär sind,  $(A_{ijkl})_{i,j,k,h=1}^3$  die Inverse von  $C$  aus (13) ist.  $A$  ist üblicherweise *koerzitiv* und *symmetrisch*: Es gibt eine Konstante  $\alpha > 0$ , so daß

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= A_{khij} = A_{jikh}, \\ A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kh} &\geq \alpha\sigma_{ij}\sigma_{ij} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}. \end{aligned}$$

Wenn der Stoff homogen und isotrop ist, ist  $A$  durch die Formel

$$A_{ijkl} = \frac{1}{2\mu} \left( \frac{1}{2} (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij}\delta_{kl} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \delta_{ij}\delta_{kl}$$

gegeben,  $\mu > 0$  und  $3\lambda + 2\mu > 0$  nach (16).

Genau wie im elastischen Fall hat  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  die äußere Normale  $n$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$  und man stellt die gleichen Randbedingungen, wie zuvor. Außerdem wird angenommen, daß  $\sigma(0)$  bekannt ist.

Rein formal gesehen ist das System (34) äquivalent zu [33]

$$\left\{ \begin{array}{l} (A\dot{\sigma}, \tau - \sigma) - (\varepsilon(v), \tau - \sigma) \geq 0 \quad \forall \tau \in \{\tau \in [C^\infty(\Omega)]^{3 \times 3} \mid F(\tau) \leq \sigma_0, \tau_{ij} = \tau_{ji}\} \\ (\sigma, \varepsilon(\varphi)) = (f, \varphi) + (g, \varphi) \quad \forall \varphi \in [C_{\Gamma_D}^\infty(\Omega)]^3 \end{array} \right. \quad (35)$$

mit  $v := \dot{u}$ . Oder, sofern man nur  $\tau$  mit  $\tau n|_{\Gamma_N} = g$  auswählt:

$$\left\{ \begin{array}{l} (A\dot{\sigma}, \tau - \sigma) + (v, \operatorname{div} \tau - \operatorname{div} \sigma) \geq 0 \\ \forall \tau \in \{\tau \in [C^\infty(\Omega)]^{3 \times 3} \mid F(\tau) \leq \sigma_0 \text{ und } \tau n = g \text{ auf } \Gamma_N\} \\ -(\operatorname{div} \sigma, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \varphi \in [C^\infty(\Omega)]^3. \end{array} \right. \quad (36)$$

Mit einem Dichtheitsargument, genau wie im Problem 1.3', bekommt man die *gemischten Formulierungen* der elastoplastischen Aufgabe. Dafür seien die Räume

$$\begin{aligned} W &:= [L^2(\Omega)]_{sym}^{3 \times 3} = L^2(\Omega, \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}), \\ V &:= [H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3, \\ H^{div} &:= \{\tau \in W \mid \exists \operatorname{div} \tau \in [L^2(\Omega)]^3\} \end{aligned}$$



und die Mengen

$$\begin{aligned} H_{f,g}^{div} &:= \{\tau \in H^{div} \mid -\operatorname{div} \tau = f \text{ in } \Omega, \tau n = g \text{ auf } \Gamma_N\}, \\ H_{*,g}^{div} &:= \{\tau \in H^{div} \mid \tau n = g \text{ auf } \Gamma_N\}, \\ \Pi(\Sigma) &:= \{\tau \in \Sigma \mid F(\tau) \leq \sigma_0 \text{ f.ü. in } \Omega\} \end{aligned}$$

definiert. Die *primal-gemischte Formulierung* lautet:

**Problem 1.8:** *Man finde ein Paar  $(v, \sigma) : I \times \Omega \rightarrow V \times \Pi(W)$ , das das System (35) für alle  $\tau \in \Pi(W)$  und  $\varphi \in V$  löst.*

Sind zusätzlich noch stärkere Bedingungen an die Testfunktionen gestellt, erhält man eine weitere Version der schwachen Formulierung von (34).

**Problem 1.9:** *Gesucht wird nach einer Lösung  $\sigma : I \times \Omega \rightarrow \Pi(W)$  des Systems*

$$\begin{cases} (A\dot{\sigma}, \tau - \sigma) \geq 0 & \forall \tau \in \Pi(H_{f,g}^{div}) \\ (\sigma, \varepsilon(\varphi)) = (f, \varphi) + (g, \varphi) & \forall \varphi \in V. \end{cases} \quad (37)$$

In der Sektion 3, wo man mit Mitteln der konvexen Analysis arbeiten wird, wird eine Sequenz von Minimierungsproblemen gestellt, die eindeutig lösbar sind. Eine Teilfolge von ihren Minima wird gegen einen Grenzwert konvergieren, der gerade (37) erfüllt. Es wird auch gezeigt, daß die Lösung vom Problem 1.9 eindeutig ist.

Die *dual-gemischte Formulierung* liest man von (36) ab:

**Problem 1.10:** *Gesucht ist ein Paar  $(v, \sigma) : I \times \Omega \rightarrow [L^2_{\Gamma_D}(\Omega)]^3 \times \Pi(H_{*,g}^{div})$ , das (36) für alle  $\tau \in \Pi(H_{*,g}^{div})$ ,  $\varphi \in [L^2(\Omega)]^3$  erfüllt.*

Das Finite-Elementenschema, mit der man nachher alle Anwendungsbeispiele berechnen möchte, wird auf der primal-gemischten Formulierung basieren. Der Vorteil davon ist, daß sie als eine nicht-lineare Variationsgleichung geschrieben werden kann.

**Bemerkung 1.11:** *Bei der Aufgabe 1.9 wurde bewußt nicht nach "Lösungspaaren"  $(v, \sigma)$ , sondern nach "Lösungsspannungen"  $\sigma$  (d.h., Spannungen, die das Problem lösen) gesucht. Es liegt daran, daß man zwar beweisen kann, daß die Verschiebung  $u$ , die der Spannung  $\sigma$  entspricht, existiert, diese aber nicht eindeutig ist. Ein Beispiel dazu ist in [32] zu finden.*

## Hencky-Modell

In diesem Abschnitt betrachten wir nur den zeitunabhängigen Fall des Problems 1.8. D.h., gesucht ist das Paar  $(u, \sigma) \in V \times \Pi(W)$ , das das Problem in der primal-gemischten Formulierung:

$$\begin{cases} (A(\sigma - \hat{\sigma}), \tau - \sigma) - (\varepsilon(u - \hat{u}), \tau - \sigma) \geq 0 & \forall \tau \in \Pi(W) \\ (\sigma, \varepsilon(\varphi)) = (f, \varphi) + (g, \varphi) & \forall \varphi \in V \end{cases} \quad (38)$$

löst,  $(\hat{u}, \hat{\sigma}) \in V \times \Pi(W)$ ,  $\operatorname{tr} \hat{\sigma} = \operatorname{tr} C\varepsilon(\hat{u})$  sind vorgegeben. Dieses Gesetz wurde von Hencky eingeführt, um statische oder quasi-statische Probleme zu lösen, ohne die Deformationsgeschichte zu berücksichtigen.

**Behauptung 1.12:** Aus der ersten Ungleichung des Systems (38) folgt, daß

$$\sigma = \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})),$$

mit  $C$ -Elastizitätstensor und

$$\Pi(\tau) := \begin{cases} \tau & |\tau^D| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \frac{\tau^D}{|\tau^D|} + \frac{1}{3}\text{tr}(\tau)\text{Id} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (39)$$

Das ganze System (38) ist hiermit äquivalent zu

$$(\Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})), \varepsilon(\varphi)) = (f, \varphi) + (g, \varphi)_{\Gamma_N} \quad \forall \varphi \in V.$$

**Beweis:** Es sei auf  $W$  das Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle := (A \cdot, \cdot)_{L^2}$  mit der Norm  $\|\cdot\| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$  definiert. Da  $C = A^{-1}$ , kann die erste Zeile von (38) in

$$\langle \sigma - \hat{\sigma} - C\varepsilon(u - \hat{u}), \tau - \sigma \rangle \geq 0 \quad \forall \tau \in \Pi(W). \quad (40)$$

umgeschrieben werden.  $\Pi(W)$  ist eine nicht-leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von  $W$ . Man vergleiche für den weiteren Beweisablauf auch [2].

" $\Rightarrow$ " Es gelte (40). Dann kann man  $\|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \tau\|^2$  wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \tau\|^2 &= \|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \sigma + \sigma - \tau\|^2 \\ &= \|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \sigma\|^2 + 2\langle \hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \sigma, \sigma - \tau \rangle + \|\sigma - \tau\|^2 \\ &\geq \|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \sigma\|^2 \quad \tau \in \Pi(W). \end{aligned}$$

So ist  $\sigma = \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))$ .

" $\Leftarrow$ " Sei  $\sigma = \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))$ . Wegen der Konvexität von  $\Pi(W)$  gilt für jedes  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $\tau \in \Pi(W)$ :  $(1 - \alpha)\Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})) + \alpha\tau \in \Pi(W)$ , daher ist

$$\begin{aligned} &\|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))\|^2 \\ &\leq \|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - ((1 - \alpha)\Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})) + \alpha\tau)\|^2 \\ &= \|\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))\|^2 \\ &\quad - 2\alpha \langle \hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})), \tau - \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})) \rangle + O(\alpha^2), \end{aligned}$$

woraus durch Multiplizieren mit  $\alpha^{-1}$  und anschließendem Grenzübergang  $\alpha \rightarrow 0$

$$\langle \hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) - \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})), \tau - \Pi(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})) \rangle \leq 0$$

folgt.

Bisher wurde bewiesen, daß  $\sigma$  die Projektion von  $\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})$  auf die deviatorische Ebene darstellt. Nun kann man die genauere Form von  $\sigma$  ermitteln:

1. Für  $|(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))^D| \leq \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  ist  $\sigma = \hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u})$ , denn  $\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}) \in \Pi(W)$ .
2. Für  $|(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))^D| > \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  gilt  $\sigma^D = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \frac{(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))^D}{|(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))^D|}$ , was

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0 \frac{(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))^D}{|(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))^D|} + \frac{1}{3}tr(\sigma)Id$$

nach sich zieht. Und speziell für den Operator  $C\tau = 2\mu\tau + \lambda tr(\tau)Id$ ,  $\lambda, \mu > 0$  (es werden nur homogene und isotrope Deformationen betrachtet) ist

$$\begin{aligned} \sigma &\stackrel{(22)}{=} C(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ &= C\varepsilon - 2\mu\varepsilon^p - \lambda tr\varepsilon^p Id. \end{aligned}$$

Also gilt  $tr(\sigma) = tr(C\varepsilon(u)) = tr(\hat{\sigma} + C\varepsilon(u - \hat{u}))$ , wegen der Unkomprimierbarkeitsannahme im plastischen Bereich und wegen  $tr \hat{\sigma} = tr C\varepsilon(\hat{u})$ .

□

### Zeitapproximation des quasistatischen Problems

Nun geben wir eine Zeitdiskretisierung des Problems 1.8 an, die auch später im Kapitel über die Numerik der Elastoplastizität verwendet wird.

Das Zeitintervall  $I = [0; T]$  zerlegen wir in Teilintervalle  $I_n := [t_{n-1}; t_n]$  mit Endpunkten  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ . Mit  $k_n := t_n - t_{n-1}$  sei die jeweilige Intervalllänge bezeichnet. Weiterhin notieren wir mit  $\psi_n$  - den Wert der Funktion  $\psi$  an der Stelle  $t_n$  ( $\psi_n(x) = \psi(t_n, x)$ ,  $\psi$  stehe für  $f, g, \sigma$  oder  $v$ ).

Das kontinuierliche Problem 1.8 wird durch eine Sequenz von Problemen vom Hencky-Typ approximiert (s. (107) unten) [33]:

$$\left\{ \begin{array}{ll} (A\sigma_n, \tau - \sigma_n) - (A\sigma_{n-1} + k_n\varepsilon(v_n), \tau - \sigma_n) &\geq 0 \quad \forall \tau \in \Pi(W) \\ (f_n, \varphi) + (g_n, \varphi)_{\Gamma_N} &= (\sigma_n, \varepsilon(\varphi)) \quad \forall \varphi \in V \\ \sigma(0) &= 0. \end{array} \right.$$

Nach Behauptung 1.12 ist jeder Zeitschritt äquivalent zu

$$(\Pi(\sigma_{n-1} + k_n C\varepsilon(v_n)), \varepsilon(\varphi)) = (f_n, \varphi) + (g_n, \varphi)_{\Gamma_N} \quad \forall \varphi \in V, \quad (41)$$

falls es  $tr \sigma_{n-1} = tr C\varepsilon(u_{n-1})$  gilt. Letzteres zeigen wir durch Induktion:

- Der Induktionsanfang ist klar, weil der Deformationsbeginn elastisch ist.
- Wir nehmen an:  $tr \sigma^{n-1} = tr C\varepsilon(u^{n-1})$ .
- Der Schluss folgt aus der Induktionsannahme, weil

$$tr \sigma^n = tr(\sigma^{n-1} + C\varepsilon(u^n - u^{n-1}))$$

nach der Projektionsformel (39) gilt,  $k_n v^n = u^n - u^{n-1}$ .

## 2 Mischung von zwei elastoplastischen Substanzen

Die Beschreibung des Mischungsmodells, für das in dieser Arbeit einige theoretische Resultate gezeigt und dessen Eigenschaften in einem Computerprogramm simuliert werden, stammt aus dem Artikel [20]. Dort wird ein Material betrachtet, das zum Deformationsanfang ( $t = 0$ ) weich ist, d.h., seine Fließgrenze ist relativ niedrig, und das im Laufe der Deformation solche mikrostrukturelle Veränderungen erleidet, daß es härter wird (d.h., die Fließgrenze steigt), bis eine "Sättigungsquote" erreicht ist. Die ganze Substanz wird dabei nicht mehr homogen sein. Unser Existenzbeweis beschränkt sich jedoch auf homogene und isotrope Stoffe. Näherungsweise ist diese Annahme für Teilstücke, in die wir unser Körper zerlegt denken, zulässig. In [20] findet man eine genaue Beschreibung, wie die Stoffeigenschaften von solchen "homogenisierten" Teilen ermittelt werden können.

Für unsere Zwecke ist es hilfreich, neben dem anfänglichen weichen Zustand noch einen weiteren, vollständig harten Zustand des obigen Stoffes auszusondern. Um die dazu gehörigen Mikrostrukturen auf der analytischen Ebene von einander zu trennen, haben die weiche und die harte Komponente der Mischung in der Arbeit [20] ihre eigenen natürlichen Konfigurationen  $\Omega_s$  und  $\Omega_h$  (engl.  $s$  - soft,  $h$  - hard). Der weiche Stoff wird zum Deformationsanfang als perfekt plastisch angenommen, während der harte eine Verfestigung aufweist, die auch von der Entwicklung der weichen Komponente in Abhängigkeit steht.

Die bereits erwähnten Verhärtungsphänomene treten erst bei genügend "starken" Deformationen auf. Das Verhalten bei kleinen Verschiebungen ist elastisch. Nachdem die Initialisierungsfließgrenze erreicht ist, verändert sich die Mikrostruktur eines bestimmten Anteils  $\alpha$  des Stoffes von der, die  $\Omega_s$  entspricht, zu der, die  $\Omega_h$  entspricht.  $\alpha : I \times \Omega \rightarrow [0; 1]$ , für jedes  $x \in \Omega$  ist  $\alpha(\cdot, x)$  eine stetige, monoton fallende Funktion. Es wurde auch beobachtet [27], daß beim elastischen Entladen eines teilweise deformierten Körpers die beiden (weiche und harte) Strukturen verhältnismäßig unverzerrt bleiben. Anderes ausgedrückt: alle Variablen, die bezüglich der natürlichen Konfiguration eines teilweise deformierten Körpers definiert sind, sind eine Art von Komposition der entsprechenden Variablen bezüglich  $\Omega_s$  und  $\Omega_h$ .

Das gesamte Mischungsmodell basiert auf dem thermodynamischen Rahmen und ist auf das Materialverhalten unter kleinen Deformationen anwendbar. Es hat folgende qualitative Grundzüge:

- Die Spannung der Mischung setzt sich aus den Spannungen einzelner Komponenten bezüglich ihrer natürlichen Konfigurationen zusammen.
- Die Energie, die durch innere Umstrukturierungen entsteht, ist Helmholtz-Energie.
- Die Härtebereiche entstehen durch mikrostrukturelle Veränderungen im weichen Stoff.

Für das Mischungsmaterial nimmt man an, daß seine Helmholtz freie Energie eine lineare Kombination der Energie der einzelnen Komponenten ist <sup>4</sup>:

$$\psi = \alpha\psi_s + (1 - \alpha)\psi_h,$$

wobei man genau wie in der Herleitung von (27)  $\psi = \psi^e(\varepsilon^e)$  behaupten kann,  $\varepsilon = \varepsilon_s^e + \varepsilon_s^p = \varepsilon_h^e + \varepsilon_h^p$ . Die natürliche Konfiguration, bezüglich der die Formel für  $\psi$  berechnet wird, entsteht durch das elastische Entladen des Mischungsstoffes. Aber auch im entladenen Zustand hat das betrachtete Muster anteilmäßig  $\alpha$  vom weichen Material und  $1 - \alpha$  von dem harten. Daher können wir

$$\begin{cases} \psi_s &= \psi_s^e(\varepsilon_s^e) \\ \psi_h &= \psi_h^e(\varepsilon_h^e) \end{cases}$$

annehmen.

Aufgrund von (23) hat man  $\sigma_s = \frac{\partial\psi_s^e}{\partial\varepsilon_s^e}$  und  $\sigma_h = \frac{\partial\psi_h^e}{\partial\varepsilon_h^e}$ . Wir berechnen die Zeitableitung für  $\psi$ , die danach in (21) eingesetzt wird:

$$\dot{\psi} = \alpha\sigma_s : \dot{\varepsilon}_s^e + (1 - \alpha)\sigma_h : \dot{\varepsilon}_h^e + \dot{\alpha}(\psi_s - \psi_h).$$

Weiter setzen wir  $\alpha(t, x) := \alpha_0 + (1 - \alpha_0)e^{-\zeta\gamma(t, x)}$ ,  $\alpha_0 \in [0, 1]$ ,  $\zeta > 0$  - Konstanten,  $\gamma(t, x) := \int_0^t |\dot{\varepsilon}_s^p|(\xi, x) d\xi$  - *plastische Länge*.  $\alpha = \alpha(t, x)$  ist die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{\alpha} = -(\alpha - \alpha_0)\zeta|\dot{\varepsilon}_s^p|, \quad \alpha(0) = 1. \quad (42)$$

Solange man eine Mischung mit konstantem  $\alpha$  betrachtet, ist das weiche Material perfekt plastisch. Diese Eigenschaft geht verloren, wenn  $\alpha = \alpha(t, x)$  ist, also bei der Änderung des Volumenanteils der Mischungskomponenten. Im letzten Fall entsteht auch die Dissipation der Energie, die sich durch verhältnismäßige Volumenveränderungen löst. Der weiche Stoff in der Mischungsstruktur verhärtet, bis eine bestimmte Sättigungsquote von  $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$  erreicht wird.

Die dazu gehörige Dissipationsungleichung (21) lautet:

$$\delta = (\alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h - \sigma) : \dot{\varepsilon} - \alpha\sigma_s : \dot{\varepsilon}_s^p - (1 - \alpha)\sigma_h : \dot{\varepsilon}_h^p + \dot{\alpha}(\psi_s - \psi_h) \leq 0.$$

Es ist naheliegend [20], von der Formel  $\sigma = \alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h$  auszugehen.

Sei  $\mu_s = \text{const} > 0$  bzw.  $\mu_h(t, x) = \mu_s + r_0\gamma(t, x)$ ,  $r_0 = \text{const} > 0$  die Fließgrenze für den rein weichen bzw. rein harten Stoff<sup>5</sup>. Wir nehmen an, daß die Eigenschaften des harten Materials nur durch  $\gamma(t, x)$  von dem weichen Material beeinflusst werden, d.h., sie hängen nicht von der Veränderung des Volumenanteils der Mischungskomponenten  $\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(|\dot{\varepsilon}_s^p|)$ . Das impliziert die Beziehung

$$(|\sigma_h^D| - \mu_h)|\dot{\varepsilon}_h^p| = 0 \quad (43)$$

für den ganzen Deformationsvorgang.

<sup>4</sup>Diese Formel gilt nur, wenn man die in den Dislokationen gespeicherte "kinetische" Energie  $h(\alpha, \dot{\alpha})$  vernachlässigt [27, 20].

<sup>5</sup>Ab hier wird in der ganzen Arbeit der Vorfaktor  $\sqrt{\frac{3}{2}}$  der Fließbedingung in der Fließgrenze berücksichtigt, so daß  $\mu_s$  und  $\mu_h$  dem Produkt  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  ( $\sigma_0$  aus dem ersten Kapitel) entsprechen.

Genau wie wir es beim einzelnen Stoff im ersten Kapitel getan haben, schreiben wir eine einfache, mischungsrelevante Form für  $\delta$  vor:

$$-\delta(\dot{\varepsilon}_s^p, \dot{\varepsilon}_h^p) = \alpha\mu_s|\dot{\varepsilon}_s^p| + (1 - \alpha)\mu_h|\dot{\varepsilon}_h^p|. \quad (44)$$

Die gleiche Abschwächung des Postulates der minimalen Dissipationsgeschwindigkeit zusammen mit der Nebenbedingung (44) besagt dann, daß der deformierte Mischungsstoff diejenige  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Strecke findet, daß

$$-\delta(\dot{\varepsilon}_s^p, \dot{\varepsilon}_h^p) = \alpha\sigma_s^D : \dot{\varepsilon}_s^p + (1 - \alpha)\sigma_h^D : \dot{\varepsilon}_h^p - \dot{\alpha}(\psi_s - \psi_h) \quad (45)$$

maximal unter solchen  $\dot{\varepsilon}_s^p, \dot{\varepsilon}_h^p$  wird, für die auch (44) gilt. Wir haben  $\sigma_s$  durch  $\sigma_s^D$  bzw.  $\sigma_h$  durch  $\sigma_h^D$  in der obigen Formel wegen Unkomprimierbarkeitsannahme ( $tr \dot{\varepsilon}_s^p = tr \dot{\varepsilon}_h^p = 0$ ) ersetzt.

**Behauptung 2.1:** Für  $(\sigma_s, \sigma_h)$  und  $(\dot{\varepsilon}_s^p, \dot{\varepsilon}_h^p)$ , die

$$\begin{aligned} -\delta(\dot{\varepsilon}_s^p, \dot{\varepsilon}_h^p) &= \alpha\sigma_s^D : \dot{\varepsilon}_s^p + (1 - \alpha)\sigma_h^D : \dot{\varepsilon}_h^p - \dot{\alpha}(\psi_s - \psi_h) \\ &= \alpha\mu_s|\dot{\varepsilon}_s^p| + (1 - \alpha)\mu_h|\dot{\varepsilon}_h^p| \end{aligned} \quad (46)$$

erfüllen und die Dissipationsgeschwindigkeit  $\delta$  minimieren ("– $\delta$ " - maximieren), gilt

$$\begin{cases} \sigma_h^D &= \mu_h \frac{\dot{\varepsilon}_h^p}{|\dot{\varepsilon}_h^p|}, \text{ falls } |\dot{\varepsilon}_h^p| \neq 0 \\ \sigma_s^D &= \bar{\mu}_s \frac{\dot{\varepsilon}_s^p}{|\dot{\varepsilon}_s^p|}, \text{ falls } |\dot{\varepsilon}_s^p| \neq 0, \end{cases} \quad (47)$$

wobei  $\bar{\mu}_s := \mu_s - (1 - \frac{\alpha_0}{\alpha})\zeta(\psi_s - \psi_h)$ .

**Beweis:** Wegen der Maximalitätsforderung muß offensichtlich  $\dot{\varepsilon}_s^p \parallel \sigma_s^D, \dot{\varepsilon}_h^p \parallel \sigma_h^D$  gelten.

(46) liefert für dieses Paar  $(\dot{\varepsilon}_s^p, \dot{\varepsilon}_h^p)$  die folgende Relation:

$$\alpha|\sigma_s^D||\dot{\varepsilon}_s^p| + (1 - \alpha)|\sigma_h^D||\dot{\varepsilon}_h^p| + (\alpha - \alpha_0)\zeta(\psi_s - \psi_h)|\dot{\varepsilon}_s^p| = \alpha\mu_s|\dot{\varepsilon}_s^p| + (1 - \alpha)\mu_h|\dot{\varepsilon}_h^p|,$$

was äquivalent zu

$$\alpha(|\sigma_s^D| + (1 - \frac{\alpha_0}{\alpha})\zeta(\psi_s - \psi_h) - \mu_s)|\dot{\varepsilon}_s^p| + (1 - \alpha)(|\sigma_h^D| - \mu_h)|\dot{\varepsilon}_h^p| = 0 \quad (48)$$

ist. (43) ergibt die Behauptung.  $\square$

Für das betrachtete Mischungsmodell wird festgelegt, daß der Elastizitätstensor  $C$  für die harte und weiche Komponente gleich ist:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{\partial \psi_s^e}{\partial \varepsilon_s^e} = C(\varepsilon - \varepsilon_s^p) = \lambda(tr\varepsilon - tr\varepsilon_s^p)Id + 2\mu(\varepsilon - \varepsilon_s^p) \\ \sigma_h &= \frac{\partial \psi_h^e}{\partial \varepsilon_h^e} = C(\varepsilon - \varepsilon_h^p) = \lambda(tr\varepsilon - tr\varepsilon_h^p)Id + 2\mu(\varepsilon - \varepsilon_h^p), \end{aligned} \quad (49)$$

wobei  $\lambda$  und  $\mu$  - Lamé-Koeffizienten sind, die in (15) eingeführt wurden.

Die Unkomprimierbarkeitsannahme im plastischen Bereich liefert (s. (10))

$$tr\varepsilon_s^p = tr\varepsilon_h^p = 0.$$

Die Formeln unter (47) sind nichts anderes als Fließbedingungen für die einzelnen Substituenten im plastischen Bereich. Im elastischen Fall gilt wie zuvor  $\dot{\varepsilon}_s^p = \dot{\varepsilon}_h^p = 0$ . Eine kompaktere Schreibweise für diese Eigenschaft ist:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_s^p = \phi_s \sigma_s^D & \text{mit } (\phi_s \geq 0, |\sigma_s^D| \leq \bar{\mu}_s) & \text{und } \phi_s (|\sigma_s^D| - \bar{\mu}_s) = 0 \\ \dot{\varepsilon}_h^p = \phi_h \sigma_h^D & \text{mit } (\phi_h \geq 0, |\sigma_h^D| \leq \mu_h) & \text{und } \phi_h (|\sigma_h^D| - \mu_h) = 0, \end{cases} \quad (50)$$

mit  $\phi_s = \frac{|\dot{\varepsilon}_s^p|}{\bar{\mu}_s}$ ,  $\phi_h = \frac{|\dot{\varepsilon}_h^p|}{\mu_h}$  (vgl. (32)).

### 3 Elastoplastizität als Aufgabe der konvexen Analysis

In dieser Sektion wird eine andere Sichtweise auf das elastoplastische System betrachtet [17, 6]. Man wird eine Minimierungsaufgabe stellen und zeigen, daß ihre Lösung genau die gewünschten Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllt. Der Vorteil dieser Methode ist, daß man hierbei alle bekannten Sätze aus der konvexen Analysis anwenden kann. Insbesondere wird die zuvor entstandene Lücke in Existenzbeweisen damit gefüllt.

#### 3.1 Stationäres Problem

Man fange zuerst mit einer zeitunabhängigen Aufgabe an. Da der Fall eines einfachen elastoplastischen Materials in [6] erörtert wurde, fahren wir sofort mit einer Analogie für die Mischung von zwei elastoplastischen Substanzen fort. Der nur aus einer Komponente bestehender Stoff wird bei der Wahl des Parameters  $\alpha = 0$  oder  $\alpha = 1$  ausgesondert.

##### Allgemeine Voraussetzung

Sei  $A = (A_{ijkl})_{i,j,k,h \in \{1,2,3\}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3 \times 3 \times 3}$  ein symmetrischer und koerzitiver 4-Tensor, d.h.

$$A_{ijkl} = A_{klij} = A_{jikh}, \quad (51)$$

$$\exists c > 0 : A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kh} \geq c \sigma_{ij} \sigma_{ij} \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad (52)$$

$f, g \in L^2(\Omega)$  und die Menge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  sei beschränkt;  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \neq \emptyset$ ,  $\Gamma_N$  habe die äußere Normale  $\mathbf{n}$ . Mit  $A^D = A - \frac{1}{3} \text{tr}(A) Id$  bezeichnen wir den Deviator von  $A$ .  $\alpha \in [0, 1]$  sei ein Parameter, der den Anteil des weichen Materials in der ganzen Mischung angibt. Weiterhin benötigen wir die so genannte *safe load condition*:

*Es existiere ein  $\chi = (\chi_s, \chi_h) \in W \times W$  mit  $\alpha\chi_s + (1 - \alpha)\chi_h \in H_{f,g}^{div}(\Omega)$  und ein  $\delta > 0$ , so daß  $|\chi_s^D(x)| \leq \mu_s - \delta$ ,  $|\chi_h^D(x)| \leq \mu_h - \delta$  für fast alle  $x \in \Omega$ .*

Zur Erinnerung:  $W = [L^2(\Omega)]_{sym}^{3 \times 3}$  und

$$H_{f,g}^{div}(\Omega) = \{\tau \in W \mid \exists \text{div}(\tau) \in [L^2(\Omega)]^3, -\text{div}(\tau) = f \text{ in } \Omega, \tau \mathbf{n} = g \text{ auf } \Gamma_N\}$$

(s. Unterabschnitt 1.5.2).  $\text{div}(\tau)$  ist dabei im schwachen Sinne aufzufassen, d.h.

$$(\text{div}(\tau), \varphi)_\Omega = -(\tau, \nabla \varphi)_\Omega \quad \forall \varphi \in H_0^{1,2}(\Omega).$$

Die Funktionen, für die Divergenz existiert und in  $[L^2(\Omega)]^3$  liegt, bilden die Menge  $H^{div}(\Omega)$ . Man kann zeigen (s. [36]), daß  $[C_0^\infty(\Omega)]_{sym}^{3 \times 3}$  bzw.  $[C_0^\infty(\Omega)]_{sym}^{3 \times 3}$  dicht in  $H^{div}(\Omega)$  ist, sofern der Rand des Grundgebietes genügend glatt ist.



Der Spursatz besagt, daß man für ein  $\tau$  mit  $\operatorname{div}(\tau) \in [L^2(\Omega)]^3$  den Wert auf  $\partial\Omega$  der normalen Komponente  $\tau \mathbf{n} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$  definieren kann. Somit ist auch  $H_{f,g}^{\operatorname{div}}(\Omega)$  wohl definiert.

Ferner sichert safe load condition, daß der Schnitt der Mengen

$$K := \{(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W \mid \alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h \in H_{f,g}^{\operatorname{div}}(\Omega)\}$$

und

$$M := \{(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W \mid |\sigma_s^D| \leq \mu_s, |\sigma_h^D| \leq \mu_h \text{ f.ü.}\}$$

nicht leer ist:

$$M \cap K \neq \emptyset. \quad (53)$$

**Bemerkung:**  $\mu_s$  und  $\mu_h$  entsprechen  $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_0$  aus (25).

Wir definieren die folgende Aufgabe:

**Problem 3.1:** *Gesucht ist das Minimum  $\sigma = (\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W$  des Funktionals*

$$J(\sigma_s, \sigma_h) := \alpha \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_s : A\sigma_s + (1 - \alpha) \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_h : A\sigma_h$$

unter der Nebenbedingung

$$\sigma \in M \cap K.$$

Da die nicht-leere Menge  $M \cap K$  konvex und abgeschlossen ist und das Funktional  $J(\cdot, \cdot)$  strikt konvex und koerzitiv ist, d.h.  $J(\sigma_s, \sigma_h) \rightarrow \infty$  für  $|\sigma_s| + |\sigma_h| \rightarrow \infty$ , besitzt dieses Problem im Fall  $0 < \alpha < 1$  eine eindeutige Lösung  $\sigma = (\sigma_s, \sigma_h)$ . Im Fall  $\alpha = 0$  bzw.  $\alpha = 1$  kann man  $\sigma_s = 0$  bzw.  $\sigma_h = 0$  setzen (s. [12]).

### 3.1.1 Norton-Hoff-Approximation

Für  $q \in \mathbb{N}$ ,  $q \geq 2$  definieren wir das Funktional

$$J_q(\sigma_s, \sigma_h) := \alpha \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_s : A\sigma_s dx + \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^q}{q\mu_s^{q-1}} dx \right) + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_h : A\sigma_h dx + \int_{\Omega} \frac{|\sigma_h^D|^q}{q\mu_h^{q-1}} dx \right)$$

und die Menge

$$K^q := \{(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W \mid (\sigma_s^D, \sigma_h^D) \in L_{\operatorname{sym}}^q(\Omega) \times L_{\operatorname{sym}}^q(\Omega), \alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h \in H_{f,g}^{\operatorname{div}}(\Omega)\}.$$

Gesucht wird eine Lösung  $\sigma_q = (\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  des Problems:

$$J_q(\sigma_q) = \inf_{\sigma \in K^q} J_q(\sigma). \quad (54)$$

**Behauptung 3.2:** *Unter Annahmen (51), (52), (53) und  $\alpha > 0$  hat das Problem (54) genau eine Lösung  $\sigma_q = (\sigma_s^q, \sigma_h^q)$ .*

**Beweis:**  $J_q$  ist konvex und stetig auf  $K^q$ . Betrachten wir eine Minimierungssequenz  $(\sigma_s^m, \sigma_h^m) \in K^q$ , also  $J_q(\sigma_s^m, \sigma_h^m) \rightarrow \inf_{(\sigma_s, \sigma_h) \in K^q} J_q(\sigma_s, \sigma_h)$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Für sie gilt:

$$\begin{aligned} \|(\sigma_s^m)^D\|_{L^q(\Omega)} &\leq C, & \|(\sigma_h^m)^D\|_{L^q(\Omega)} &\leq C, \\ \|\sigma_s^m\|_{L^2(\Omega)} &\leq C, & \|\sigma_h^m\|_{L^2(\Omega)} &\leq C, \end{aligned}$$

wobei wir immer die Bezeichnung  $\|\cdot\|_{L^q(\Omega)}$  für die  $L^q(\Omega)$ -Norm,  $0 \leq q \leq \infty$  verwenden. Daher gibt es eine schwach in  $L^2(\Omega)$  konvergente Teilfolge  $\sigma_s^m \rightharpoonup \sigma_s^q$ ,  $m \in \Lambda$ ,  $m \rightarrow \infty$ . Da  $\|\sigma_h^m\|_{L^2(\Omega)} \leq C \forall m \in \Lambda$  gibt es eine weitere schwach konvergente Teilfolge  $\sigma_h^m \rightharpoonup \sigma_h^q$ ,  $m \in \Lambda' \subset \Lambda$ . Für die Indizes  $m \in \Lambda'$  gilt:  $-\operatorname{div}(\alpha\sigma_s^m + (1-\alpha)\sigma_h^m) = f$ ,  $(\alpha\sigma_s^m + (1-\alpha)\sigma_h^m)|_{\Gamma_N} \mathbf{n} = g$ . Und nach Grenzübergang  $m \rightarrow \infty$ ,  $m \in \Lambda'$  ist auch

$$-\operatorname{div}(\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q) = f, \quad (\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q)|_{\Gamma_N} \mathbf{n} = g.$$

Aus der Beschränktheit der Folgen  $(\|(\sigma_s^m)^D\|_{L^q(\Omega)})_{m \in \Lambda'}$  und  $(\|(\sigma_h^m)^D\|_{L^q(\Omega)})_{m \in \Lambda'}$  bekommt man  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q) \in K^q$ . Als eine Konsequenz des Satzes von Banach-Sachs für beschränkte Teilmengen der konvexen Menge  $K^q$  ergibt sich

$$J_q(\sigma_s^q, \sigma_h^q) = \inf_{(\sigma_s, \sigma_h) \in K^q} J_q(\sigma_s, \sigma_h).$$

Die Lösung ist eindeutig, weil  $J_q$  strikt konvex ist. □

**Behauptung 3.3:** *Zu den Annahmen der Behauptung 3.2 sei noch zusätzlich vorausgesetzt, daß*

$$f, g \in [L^p(\Omega)]^3 \tag{55}$$

$\forall 1 < p < \infty$ . Dann folgt für das Paar  $(\sigma_s, \sigma_h) \in K$  mit  $\|\sigma_s^D\|_{L^p(\Omega)} < \infty$  und  $\|\sigma_h^D\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ , daß  $\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h \in L^p_{sym}(\Omega)$ .

**Beweis:** Ohne Einschränkung sei  $\alpha \neq 0$ ; der Fall  $\alpha = 0$ , also  $1 - \alpha \neq 0$  wird analog behandelt. Um  $\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h \in L^p_{sym}(\Omega)$  zu überprüfen, weist man nach, daß  $\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h) \in L^p(\Omega)$ , denn  $\alpha\sigma_s^D + (1-\alpha)\sigma_h^D \in L^p_{sym}(\Omega)$  nach Voraussetzung. Für jedes  $(\sigma_s, \sigma_h) \in K$  gilt:

$$-\operatorname{div}(\alpha\sigma_s^D + (1-\alpha)\sigma_h^D)_i - \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h) = f_i \tag{56}$$

nach Definition,  $i = 1, 2, 3$ . Und wir wissen schon, daß  $\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h) \in L^2(\Omega)$ , denn  $(\sigma_s, \sigma_h) \in L^2_{sym}(\Omega) \times L^2_{sym}(\Omega)$ .

Sei  $\theta_L \in L^\infty(\Omega)$  durch

$$\theta_L := \begin{cases} 1 & \text{für } |\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^{p-1} \leq L \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert und  $\psi \in [H^{1, \frac{p}{p-1}}(\Omega)]^3$  - die Lösung der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \psi &= \operatorname{sign}(\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)) |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^{p-1} \\ &- \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \operatorname{sign}(\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)) |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^{p-1} dx \end{aligned} \quad (57)$$

mit der Randbedingung  $\psi|_{\partial\Omega} = 0$ . Dies ist die berühmte Divergenzgleichung aus der Theorie der Navier-Stokes Gleichungen, welche nach [39] eine Lösung hat. Beachte, daß der Mittelwert der rechten Seite = 0.

Wir testen (56) mit  $\psi_i$ , was für jedes  $1 \leq i \leq 3$

$$\sum_{j=1}^3 ((\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)_{ij}^D, \frac{\partial}{\partial x_j} \psi_i) + \frac{1}{3} (\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h), \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_i) = (f_i, \psi_i)$$

ergibt und addieren die letzte Gleichung über alle  $i$ :

$$\frac{1}{3} (\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h), \operatorname{div} \psi) = |((\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)^D, \nabla \psi) - (f, \psi)|. \quad (58)$$

Für die Lösung von (57) gilt nach Anwendung der Hölder-Ungleichung die  $L^{\frac{p}{p-1}}$ -Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\nabla \psi\|_{\frac{p}{p-1}} &\leq \|(\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h))^{p-1}\|_{\frac{p}{p-1}} \\ &+ \frac{|\Omega|^{\frac{p-1}{p}}}{|\Omega|} \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^{p-1} dx \\ &= 2 \left( \int_{\Omega} \theta_L |\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \quad (59)$$

Wir benutzen die Gleichung für  $\operatorname{div} \psi$  in (58) und erhalten nach erneuter Anwendung der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx &\leq \|(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)^D\|_p \|\nabla \psi\|_{\frac{p}{p-1}} + \|f\|_{(p^*)'} \|\psi\|_{p^*} \\ &+ \frac{1}{3|\Omega|} \int_{\Omega} |\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)| dx \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^{p-1} dx, \end{aligned}$$

wobei  $p^* = \frac{n-\frac{p}{p-1}}{n-\frac{p}{p-1}}$ ,  $(p^*)' = \frac{p^*}{p^*-1}$ , denn es gilt  $\|\psi\|_{p^*} \leq C \|\nabla \psi\|_{\frac{p}{p-1}}$ .

Wegen  $\|(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)^D\|_p \leq C$  und nach (59) folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx &\leq C \left( \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &+ \frac{1}{3|\Omega|} \int_{\Omega} \underbrace{|\operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|}_{\in L^2(\Omega)} dx \left( \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} |\Omega|^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Das Teilen durch  $(\int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx)^{\frac{p-1}{p}}$  liefert

$$\left( \int_{\Omega} |\theta_L \operatorname{tr}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < C$$

gleichmäßig für  $L \rightarrow \infty$ . Damit ergibt sich nach dem Lemma von Fatou, daß  $\|tr(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)\|_p \leq C$ .  $\square$

**Bemerkung 3.4:** Wir werden die obige Behauptung auch für  $\sigma_s = \sigma_s^q$ ,  $\sigma_h = \sigma_h^q$  anwenden. Mit den unten bewiesenen Abschätzungen (63) kann man daraus die Existenz einer von  $q$  unabhängigen Schranke  $C$  folgern, so daß  $\|\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q\|_{L_{sym}^p(\Omega)} \leq C$ .

**Behauptung 3.5:** Unter den Voraussetzungen der Behauptung 3.3 gibt es ein eindeutiges  $u^q \in [H_{\Gamma_D}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega)]^3$  mit der Eigenschaft

$$\varepsilon(u^q) = A\sigma_s^q + \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}} = A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}},$$

wobei  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  - die Lösung des Problems (54) ist.

**Beweis:** Da das Paar  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  das Funktional  $J_q(\cdot, \cdot)$  minimiert, gilt

$$J_q(\sigma_s^q, \sigma_h^q) \leq J_q(\sigma_s^q, \sigma_h^q + t\tilde{\tau}_h) \quad \forall \tilde{\tau}_h : (\sigma_s^q, \sigma_h^q + t\tilde{\tau}_h) \in K^q. \quad (60)$$

$\tilde{\tau}_h$  ist ein Element von  $H_{0,0}^{div}(\Omega) \cap L_{sym}^q(\Omega)$ , denn man kann die Behauptung 3.3 sowohl für  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  als auch für  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q + t\tilde{\tau}_h)$  mit  $p = q$  anwenden.

Aus (60) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} J_q(\sigma_s^q, \sigma_h^q + t\tilde{\tau}_h)|_{t=0} \\ &= (1-\alpha) \left( A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}, \tilde{\tau}_h \right). \end{aligned}$$

Dies liefert nach [6, 35] die Existenz eines eindeutigen  $u^q \in [H_{\Gamma_D}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega)]^3$ , so daß

$$\varepsilon(u^q) = A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}. \quad (61)$$

Auch  $(\sigma_s^q + t\tau_s, \sigma_h^q + t\tau_h)$  mit  $\tau_s, \tau_h \in W$ ,  $\tau_s^D, \tau_h^D \in L_{sym}^q(\Omega)$  und  $\alpha\tau_s + (1-\alpha)\tau_h \in H_{0,0}^{div}(\Omega)$  ist eine mögliche Vergleichsfunktion für das Problem (54). Das ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} J_q(\sigma_s^q + t\tau_s, \sigma_h^q + t\tau_h)|_{t=0} \\ &= \alpha \left( A\sigma_s^q + \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, \tau_s \right) + (1-\alpha) \left( A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}, \tau_h \right). \quad (62) \end{aligned}$$

Für ein beliebiges  $\tau_h \in L_{sym}^q(\Omega)$ ,  $q \geq 2$ ,  $\alpha \neq 0$  setzen wir  $\tau_s := -\frac{1-\alpha}{\alpha}\tau_h$ . Das Paar  $(\tau_s, \tau_h) \in W \times W$  erfüllt alle Kriterien für die Testfunktionen:  $(\tau_s^D, \tau_h^D) \in L_{sym}^q(\Omega) \times L_{sym}^q(\Omega)$  und  $\alpha\tau_s + (1-\alpha)\tau_h \in H_{0,0}^{div}(\Omega)$ . Daraus folgt

$$\left( A\sigma_s^q + \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, \tau_h \right) = \left( A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}, \tau_h \right) \quad \forall \tau_h \in L_{sym}^q(\Omega).$$

Also sind die Funktionen  $A\sigma_s^q + \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}$  und  $A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}$  als Elemente von  $L_{sym}^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$  gleich. Zusammen mit (61) ist die Behauptung bewiesen  $\square$

### 3.1.2 Grenzübergang $q \rightarrow \infty$

**Behauptung 3.6:** *Unter den Voraussetzungen (51), (52), (53) und (55) gelten für die Lösungen  $\sigma_q = (\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  der durch  $q$  parametrisierten Probleme (54) die folgenden Konvergenzaussagen:*

$$\begin{aligned} (\sigma_s^q, \sigma_h^q) &\rightarrow (\sigma_s, \sigma_h) && \text{stark in } W, \quad q \rightarrow \infty, \\ ((\sigma_s^q)^D, (\sigma_h^q)^D) &\rightharpoonup ((\sigma_s^D)^D, (\sigma_h^D)^D) && \text{schwach in } L_{sym}^p(\Omega), \quad q \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für jedes feste  $p \in \mathbb{R}$ .  $(\sigma_s, \sigma_h)$  erfüllt das Problem 3.1.

**Beweis:** Als erstes sei gezeigt, daß

$$\|\sigma_s^q\|_{L_{sym}^2(\Omega)}, \|\sigma_h^q\|_{L_{sym}^2(\Omega)} \leq C, \quad \|(\sigma_s^q)^D\|_{L_{sym}^p(\Omega)}, \|(\sigma_h^q)^D\|_{L_{sym}^p(\Omega)} \leq C \quad (63)$$

mit einer von  $q$  unabhängigen Konstante  $C$ . Daraus würde die Existenz schwacher Limits folgen.

Sei  $\tau \in M \cap K$  und damit  $\tau \in K_q$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $\alpha \neq 0$ , denn für  $\alpha = 0$  ist  $1 - \alpha \neq 0$  und der ganze Beweis wird analog geführt.

Da  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$   $J_q$  auf  $K_q$  minimiert und  $|\tau_s^D| \leq \mu_s$ ,  $|\tau_h^D| \leq \mu_h$  ist, gilt

$$\begin{aligned} \alpha \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_s^q : A \sigma_s^q dx + \frac{1}{q \mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\sigma_s^q)^D|^q dx \right) &\leq J_q(\sigma_s^q, \sigma_h^q) \\ &\leq \alpha \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_s : A \tau_s dx + \frac{\mu_s}{q} |\Omega| \right) + (1 - \alpha) \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_h : A \tau_h dx + \frac{\mu_h}{q} |\Omega| \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Aus der Young'schen Ungleichung folgt:

$$\frac{|(\sigma_s^q)^D|^q}{q \mu_s^q} \geq \frac{|(\sigma_s^q)^D|^p}{p \mu_s^p} - \frac{q-p}{qp}, \quad q \geq p.$$

Und zusammen mit der Abschätzung (64) bekommt man

$$\int_{\Omega} |(\sigma_s^q)^D|^p \leq p \mu_s^{p-1} \left( \frac{\mu_s}{q} |\Omega| + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_s : A \tau_s + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_h : A \tau_h + \frac{\mu_h |\Omega|}{q} \right) + \frac{q-p}{pq} \right). \quad (65)$$

(64) und (65) ergeben

$$\int_{\Omega} |\sigma_s^q|^2 dx \leq C, \quad \sqrt[p]{\int_{\Omega} |(\sigma_s^q)^D|^p dx} \leq C.$$

Nach dem gleichen Schema wird auch

$$\int_{\Omega} |\sigma_h^q|^2 dx \leq C \quad \text{und} \quad \sqrt[p]{\int_{\Omega} |(\sigma_h^q)^D|^p dx} \leq C$$

gezeigt. So gilt für eine Teilfolge, die nach Ummummerierung wieder mit  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \sigma_s^q &\rightharpoonup \sigma_s, & \sigma_h^q &\rightharpoonup \sigma_h && \text{schwach in } W, \\ (\sigma_s^q)^D &\rightharpoonup (\sigma_s^D)^D, & (\sigma_h^q)^D &\rightharpoonup (\sigma_h^D)^D && \text{schwach in } L_{sym}^p(\Omega). \end{aligned}$$

Mit einem Diagonalverfahren erreicht man  $-div(\alpha\sigma_s^q + (1 - \alpha)\sigma_h^q) = f$  und  $(\alpha\sigma_s^q + (1 - \alpha)\sigma_h^q)|_{\Gamma_N} \mathbf{n} = g$  für jedes Glied der gewählten Teilfolge, also auch für den Grenzwert.

Ferner muß man noch beweisen, daß der Limes  $(\sigma_s, \sigma_h)$  das Funktional  $J(\cdot, \cdot)$  auf  $M \cap K$  minimiert und daß  $(\sigma_s, \sigma_h) \in M \cap K$ .

Erstes folgt aus der Abschätzung:

$$\begin{aligned} J(\sigma_s, \sigma_h) &\leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \{ J(\sigma_s^q, \sigma_h^q) + \underbrace{\frac{\alpha}{q\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\sigma_s^q)^D|^q dx + \frac{1-\alpha}{q\mu_h^{q-1}} \int_{\Omega} |(\sigma_h^q)^D|^q dx}_{\geq 0} \} \\ &\leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \{ J(\tau_s, \tau_h) + \alpha \frac{\mu_s}{q} |\Omega| + (1 - \alpha) \frac{\mu_h}{q} |\Omega| \} \\ &= J(\tau_s, \tau_h) \quad \forall (\tau_s, \tau_h) \in M \cap K \end{aligned}$$

wegen Minimaleigenschaften von  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$ . Letzteres bekommt man mit (65):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\sigma_s^D|^p dx &\leq \liminf_{q \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |(\sigma_s^q)^D|^p dx \\ &\leq \liminf_{q \rightarrow \infty} p\mu_s^{p-1} \left( \underbrace{\frac{\mu_s}{q} |\Omega| + \frac{q-p}{pq}}_{\rightarrow \frac{1}{p}} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_s : A\tau_s + \frac{1-\alpha}{\alpha} \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \tau_h : A\tau_h + \underbrace{\frac{\mu_h |\Omega|}{q}}_{\rightarrow 0} \right) \right). \end{aligned}$$

Wir teilen die beiden Seiten dieser Ungleichung durch  $\mu_s^p$  und ziehen die p. Wurzel, um  $\|\frac{\sigma_s^D}{\mu_s}\|_{L^p(\Omega)}$  abzuschätzen:

$$\left( \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^p}{\mu_s^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \frac{1}{\mu_s} + \frac{p}{2\mu_s} \int_{\Omega} \tau_s : A\tau_s + \frac{1-\alpha}{2\alpha} \frac{p}{\mu_s} \int_{\Omega} \tau_h : A\tau_h \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Geht man zum Limes  $p \rightarrow \infty$  über, sieht man  $\lim_{p \rightarrow \infty} \left( \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^p}{\mu_s^p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$ , also gilt

$$|\sigma_s^D| \leq \mu_s \quad \text{f. ü. in } \Omega.$$

Mit der gleichen Argumentation folgt  $|\sigma_h^D| \leq \mu_h$  f. ü. in  $\Omega$ . D.h.,  $(\sigma_s, \sigma_h)$  löst das Problem 3.1. Und weil dieses Problem die einzige Lösung besitzt, hat jede schwach konvergente Teilfolge den selben Limes. So konvergiert auch die Gesamtfolge schwach. Zum Schluß weisen wir die starke  $L^2$ -Konvergenz von  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  nach. Einerseits gilt

$$\begin{aligned} \limsup_{q \rightarrow \infty} J(\sigma_s^q, \sigma_h^q) &\leq \limsup_{q \rightarrow \infty} J_q(\sigma_s^q, \sigma_h^q) \\ &\leq \limsup_{q \rightarrow \infty} \left( J(\sigma_s, \sigma_h) + \frac{\alpha\mu_s}{q} |\Omega| + \frac{(1-\alpha)\mu_h}{q} |\Omega| \right). \end{aligned}$$

Andererseits ist wegen  $\sigma_s^q \rightharpoonup \sigma_s$ ,  $\sigma_h^q \rightharpoonup \sigma_h$

$$J(\sigma_s, \sigma_h) \leq \liminf_{q \rightarrow \infty} J(\sigma_s^q, \sigma_h^q).$$

Alles zusammen liefert die Existenz des Grenzwertes von  $(J(\sigma_s^q, \sigma_h^q))_{q \in \mathbb{N}}$ :  $\lim_{q \rightarrow \infty} J(\sigma_s^q, \sigma_h^q) = J(\sigma_s, \sigma_h)$ . Da der Tensor  $A$  koerzitiv ist, gilt

$$(\sigma_s^q, \sigma_h^q) \rightarrow (\sigma_s, \sigma_h) \text{ in } W.$$

□

**Bemerkung 3.7:** Aus den letzten Behauptungen folgt, daß für den Fall des Operators  $A\tau := \frac{1}{2\mu}\tau^D + \frac{1}{3(3\lambda+2\mu)}tr\tau Id$  ( $\lambda, \mu$  - Lamé-Koeffizienten) die Abschätzung  $\|\sigma_s^q\|_{L^p(\Omega)}, \|\sigma_h^q\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad \forall 1 < p < \infty$  gilt.

**Beweis:** Es ist  $tr\varepsilon(u^q) = trA\sigma_s^q = trA\sigma_h^q$  und wegen der speziellen Gestalt von  $A$  ist  $tr\sigma_s^q = tr\sigma_h^q$ . Im Beweis der Behauptung 3.3 wird  $tr(\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q) \in L^p_{sym}(\Omega)$  gezeigt, also ist  $\|tr\sigma_s^q\|_{L^p(\Omega)} = \|tr\sigma_h^q\|_{L^p(\Omega)} \leq C$  nach der Bemerkung 3.4.

Daß  $\|(\sigma_s^q)^D\|_{L^p_{sym}(\Omega)} \leq C$  und  $\|(\sigma_h^q)^D\|_{L^p_{sym}(\Omega)} \leq C$  wird in (63) bewiesen. Daraus ergibt sich die Aussage.  $\square$

### 3.1.3 Abschätzungen der Verschiebung

**Behauptung 3.8:** Unter den Voraussetzungen (51), (52), (53) und (55) gelten die folgenden Abschätzungen für  $\varepsilon(u^q)$  und  $u^q$ :

$$\|\varepsilon(u^q)\|_{L^1_{sym}(\Omega)} \leq C, \quad \|u^q\|_{[L^{\frac{3}{2}}(\Omega)]^3} \leq C.$$

**Beweis:** Wir wählen ein  $\tau = (\tau_s, \tau_h) \in M \cap K$ , das safe load condition erfüllt:

$$\exists \delta > 0 : |\tau_s^D| \leq \mu_s - \delta, \quad |\tau_h^D| \leq \mu_h - \delta.$$

Da  $\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q \in H_{f,g}^{div}(\Omega)$  und  $\alpha\tau_s + (1-\alpha)\tau_h \in H_{f,g}^{div}(\Omega)$ , ist  $(\sigma_s^q + t(\sigma_s^q - \tau_s), \sigma_h^q + t(\sigma_h^q - \tau_h))$  eine zulässige Testfunktion in (62), also

$$\begin{aligned} & \alpha \int_{\Omega} (A\sigma_s^q + \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}}{\mu_s^{q-1}}(\sigma_s^q)^D) : (\sigma_s^q - \tau_s) dx \\ & + (1-\alpha) \int_{\Omega} (A\sigma_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}}{\mu_h^{q-1}}(\sigma_h^q)^D) : (\sigma_h^q - \tau_h) dx = 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Wegen der Konvergenz der Folge  $(\sigma_i^q)_{q \in \mathbb{N}}$  ist  $\|\sigma_i^q\| \leq C$  ( $i$  stehe für  $s$  oder  $h$ ) und somit

$$\left| \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_i^{q-1}} |\tau_i^D|^{q-2} \tau_i^D : (\sigma_i^q - \tau_i) dx \right| \leq \frac{1}{\mu_i} (\|\tau_i^D\| \|\sigma_i^q\| + \|\tau_i^D\|^2) \leq C.$$

Mit diesen Ungleichungen erhalten wir aus (66)

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} (|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D - |\tau_s^D|^{q-2}\tau_s^D) : ((\sigma_s^q)^D - \tau_s^D) dx \\ & + \frac{1-\alpha}{\mu_h^{q-1}} \int_{\Omega} (|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D - |\tau_h^D|^{q-2}\tau_h^D) : ((\sigma_h^q)^D - \tau_h^D) dx \\ & = -\alpha \int_{\Omega} A\sigma_s^q : (\sigma_s^q - \tau_s) - \alpha \int_{\Omega} \frac{|\tau_s^D|^{q-2}\tau_s^D}{\mu_s^{q-1}} : ((\sigma_s^q)^D - \tau_s^D) dx \\ & - (1-\alpha) \int_{\Omega} A\sigma_h^q : (\sigma_h^q - \tau_h) - (1-\alpha) \int_{\Omega} \frac{|\tau_h^D|^{q-2}\tau_h^D}{\mu_h^{q-1}} : ((\sigma_h^q)^D - \tau_h^D) dx \\ & \leq C. \end{aligned} \quad (67)$$

Aus Monotonie-Gründen sind die beiden Integrande auf der linken Seite nicht-negativ. Daher bleibt die Abschätzung (67) für jede Teilmenge der Menge  $\Omega$  gültig. Wir definieren eine Menge

$$E := \{x \mid |(\sigma_s^q)^D| \geq \mu_s\} \subset \Omega.$$

Es gibt eine von dieser Menge unabhängige Konstante  $C$ , so daß

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1}{\mu_s^{q-1}} \int_E (|(\sigma_s^q)^D|^{q-2} (\sigma_s^q)^D - |\tau_s^D|^{q-2} \tau_s^D) : ((\sigma_s^q)^D - \tau_s^D) dx \\ &\geq \frac{1}{\mu_s^{q-1}} \int_E (|(\sigma_s^q)^D|^{q-1} - |\tau_s^D|^{q-1}) : (|(\sigma_s^q)^D| - |\tau_s^D|) dx. \end{aligned}$$

Klammert man den letzten Integrand aus, so folgt aus (63) unter Berücksichtigung von  $|\tau_s| \leq \mu_s$ :

$$\begin{aligned} C &\geq \frac{1}{\mu_s^{q-1}} \int_E |(\sigma_s^q)^D|^{q-1} (|(\sigma_s^q)^D| - |\tau_s^D|) dx \\ &= \frac{1}{\mu_s^{q-1}} \int_E |(\sigma_s^q)^D|^q \left(1 - \frac{|\tau_s^D|}{|(\sigma_s^q)^D|}\right) dx \\ &\geq \frac{\delta}{\mu_s^q} \int_E |(\sigma_s^q)^D|^q dx. \end{aligned}$$

Damit ist auch  $\int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^q)^D|^q}{\mu_s^q} \leq C$  bewiesen.

Nun kann man eine konstante obere Schranke für die  $L^1$ -Norm von  $\varepsilon(u^q)$  finden:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\varepsilon(u^q)| dx &\leq \int_{\Omega} |A\sigma_s^q| + \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}} \\ &\leq \int_{\Omega} |A\sigma_s^q| + \int_{\Omega} \frac{(q-1)|(\sigma_s^q)^D|^q + 1}{q\mu_s^q} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Die endgültige Abschätzung der Verschiebung bekommt man mit einer Ungleichung aus [35]:

$$\|u^q\|_{[L^{\frac{3}{2}}(\Omega)]^3} \leq C \|\varepsilon(u^q)\|_{L^1(\Omega)} \leq C$$

□

**Bemerkung 3.9:** Aus dem Beweis der letzten Behauptung folgt  $\int_{\Omega} |\varepsilon(u^q)|^{\frac{q}{q-1}} dx \leq C$ .



### 3.1.4 Hencky-Variationsungleichung

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieser Sektion. Wir zeigen zuerst, daß die Integrale vom Typ  $\int_{\Omega} \varepsilon(u) : \tau dx$ ,  $\varepsilon(u) \in L^1_{sym}(\Omega)$ ,  $tr \varepsilon(u) \in L^2(\Omega)$ ,  $\tau \in W$ ,  $|\tau^D| \leq \sigma_0$  existieren. Dafür benutzen wir die Darstellung

$$\int_{\Omega} \tau : \varepsilon(u) dx = \int_{\Omega} \tau^D : \varepsilon^D(u) + \frac{1}{9} div u tr \tau dx. \quad (68)$$

Die rechte Seite von (68) ist wohldefiniert, da  $tr \tau, div u \in L^2(\Omega)$  und  $\tau^D \in L^{\infty}_{sym}(\Omega)$ ,  $\varepsilon^D(u) \in L^1_{sym}(\Omega)$ .

Als  $\tau$  können auch  $\sigma_s$  und  $\sigma_h$  aus der Satzformulierung gewählt werden.

**Satz 3.10:** *Es seien die Voraussetzungen der Behauptung 3.8 erfüllt und  $A\tau = \frac{1}{2\mu}\tau^D + \frac{1}{3(3\lambda+2\mu)}tr\tau Id$  mit Konstanten  $\mu > 0$ ,  $\lambda$ ,  $3\lambda + 2\mu > 0$ . Dann existiert genau ein Paar  $(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W$  mit  $(\sigma_s^D, \sigma_h^D) \in L^{\infty}_{sym}(\Omega) \times L^{\infty}_{sym}(\Omega)$ ,*

$$-div(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h) = f, \quad (\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|_{\Gamma_N} \mathbf{n} = g$$

und ein  $u \in [L^{\frac{3}{2}}(\Omega)]^3$  mit  $\varepsilon(u) \in L^1_{sym}(\Omega)$ ,  $div u \in L^2(\Omega)$ , so daß gilt:

1.  $\int_{\Omega} \phi(\varepsilon(u) - A\sigma_s) : (\tau_s - \sigma_s) dx \leq 0$ ,  $\int_{\Omega} \phi(\varepsilon(u) - A\sigma_h) : (\tau_h - \sigma_h) dx \leq 0$   
 $\forall (\tau_s, \tau_h) \in W \times W$  mit  $|\tau_s^D| \leq \mu_s$ ,  $|\tau_h^D| \leq \mu_h$ ,  $\phi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ ,  $\phi > 0$ ,
2.  $|\sigma_s^D| \leq \mu_s$ ,  $|\sigma_h^D| \leq \mu_h$ ,
3.  $u|_{\Gamma_D} = 0$

**Beweis:** Wir beginnen mit der Eindeutigkeitsaussage. Dafür sei angenommen, daß es zwei Paare  $\sigma_1 = (\sigma_s^1, \sigma_h^1)$  und  $\sigma_2 = (\sigma_s^2, \sigma_h^2)$  gibt, mit den Eigenschaften, die im Satz behauptet wurden. Dann folgt aus 1.:

$$\alpha \int_{\Omega'} (\varepsilon(u) - A\sigma_s^1) : (\sigma_s^2 - \sigma_s^1) + (1-\alpha) \int_{\Omega'} (\varepsilon(u) - A\sigma_h^1) : (\sigma_h^2 - \sigma_h^1) \leq 0 \quad \text{und}$$

$$\alpha \int_{\Omega'} (\varepsilon(u) - A\sigma_s^2) : (\sigma_s^1 - \sigma_s^2) + (1-\alpha) \int_{\Omega'} (\varepsilon(u) - A\sigma_h^2) : (\sigma_h^1 - \sigma_h^2) \leq 0 \quad \forall \Omega' \subset\subset \Omega.$$

Addiert man die beiden Ungleichungen und nützt die Koerzitivität von  $A$  aus, bekommt man  $\sigma_s^1 = \sigma_s^2$  und  $\sigma_h^1 = \sigma_h^2$  fast überall in  $\Omega$ .

Aus den schon bewiesenen Eigenschaften der Norton-Hoff-Approximation folgen die Punkte 2 und 3 der Behauptung, sowie die Divergenzbedingung.

Nun zeigen wir 1. Sei  $(\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  die Lösung von Norton-Hoff-Approximation,  $u^q$  - die entsprechende Verschiebung. Laut den in vorigen Sektionen bewiesenen Behauptungen gilt:

$$\begin{array}{ll} (\sigma_s^q, \sigma_h^q) \rightarrow (\sigma_s, \sigma_h) & \text{stark in } W \times W, \\ (\sigma_s^q, \sigma_h^q) \rightharpoonup (\sigma_s, \sigma_h) & \text{schwach in } L^p_{sym}(\Omega) \times L^p_{sym}(\Omega), 1 \leq p < \infty, \\ ((\sigma_s^q)^D, (\sigma_h^q)^D) \rightharpoonup (\sigma_s^D, \sigma_h^D) & \text{schwach in } L^p_{sym}(\Omega) \times L^p_{sym}(\Omega), 1 \leq p < \infty, \\ \varepsilon(u^q) \rightharpoonup \varepsilon(u) & \text{in } (L^{\infty}_{sym}(\Omega))^*, \\ u^q \rightarrow u & \text{stark in } [L^p(\Omega)]^3, 1 \leq p < \frac{3}{2}. \end{array}$$

Die letzte Konvergenz hat man aus der Kompaktheit der Einbettung des Raumes  $\{u \in [L^1(\Omega)]^3 \mid \varepsilon(u) \in L^1_{sym}(\Omega), \operatorname{div}(u) \in L^2(\Omega)\}$  in  $[L^p(\Omega)]^3$ ,  $1 \leq p < \frac{3}{2}$  (s. [35]).

Aus  $\alpha\sigma_s^q + (1 - \alpha)\sigma_h^q \in H_{f,g}^{div}(\Omega)$  folgt die gleiche Inklusion für  $\alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h$ , da wir alle Ableitungen im Sinne der Distribution verstehen und weil starke Konvergenz schwache impliziert.

Für ein  $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$  und  $\tau = (\tau_s, \sigma_h)$ ,  $\tau_s$  - wie in der Behauptung, ist

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi[\alpha(\tau_s - \sigma_s^q) : \varepsilon(u^q) + (1 - \alpha)(\sigma_h - \sigma_h^q) : \varepsilon(u^q)] dx \\ &= - \int_{\Omega} [(\alpha(\tau_s - \sigma_s^q) + (1 - \alpha)(\sigma_h - \sigma_h^q))u^q \cdot \nabla\phi + \phi(f + \operatorname{div}(\alpha\tau_s + (1 - \alpha)\sigma_h))u^q] dx \\ &\rightarrow - \int_{\Omega} [\alpha(\tau_s - \sigma_s)u \cdot \nabla\phi + \phi(f + \operatorname{div}(\alpha\tau_s + (1 - \alpha)\sigma_h))u] dx \\ &= \int_{\Omega} \phi\alpha(\tau_s - \sigma_s) : \varepsilon(u) dx \end{aligned}$$

und deswegen auch

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi[\alpha(\tau_s - \sigma_s^q) : (\varepsilon(u^q) - A\sigma_s^q) + (1 - \alpha)(\sigma_h - \sigma_h^q) : (\varepsilon(u^q) - A\sigma_h^q)] dx \\ &\rightarrow \int_{\Omega} \phi\alpha(\tau_s - \sigma_s) : (\varepsilon(u) - A\sigma_s) dx. \end{aligned} \quad (69)$$

Nun hat man

$$\begin{aligned} & \phi(\alpha(\tau_s - \sigma_s^q) : (\varepsilon(u^q) - A\sigma_s^q) + (1 - \alpha)(\sigma_h - \sigma_h^q) : (\varepsilon(u^q) - A\sigma_h^q)) \\ &= \phi(\alpha(\tau_s - \sigma_s^q) : \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}} + (1 - \alpha)(\sigma_h - \sigma_h^q) : \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}) \\ &\leq \phi(\alpha(\mu_s - |(\sigma_s^q)^D|) \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}} + (1 - \alpha)(\mu_h - |(\sigma_h^q)^D|) \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-1}}{\mu_h^{q-1}}). \end{aligned}$$

Die  $L^\infty$ -Norm des letzten Ausdruckes ist im Grenzwert  $\leq 0$ , denn für  $x \in \Omega$ , für das die rechte Seite überhaupt definiert ist, gilt entweder  $|(\sigma_i^q)^D|(x) \geq \mu_i$ , dann ist  $\alpha(\mu_i - |(\sigma_i^q)^D|)(x) \leq 0$ , oder  $|(\sigma_i^q)^D|(x) < \mu_i$ , dies ergibt

$$\alpha(\mu_i - |(\sigma_i^q)^D|) \frac{|(\sigma_i^q)^D|^{q-1}}{\mu_i^{q-1}}(x) \leq \alpha\mu_i \left(\frac{|(\sigma_i^q)^D|}{\mu_i}\right)^{q-1}(x) \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty.$$

Mit (69) ist 1. bewiesen, weil man die Variationsungleichung für den harten Anteil der Mischung analog zeigt.  $\square$

### 3.1.5 $H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}$ -Regularität

Daß die Lösung vom elastoplastischen System in  $H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)$  liegt, zeigen wir über die Beschränktheit der entsprechenden Differenzenquotienten.

Dazu sei angenommen, daß  $\nabla f \in [L^3(\Omega)]^3$ . Es werden noch folgende Bezeichnungen und Vorwissen benötigt:

- $D_l^k \psi(x) := \frac{\psi(x+ke_l) - \psi(x)}{k}$ , mit  $e_l = (\delta_{lj})_{j=1}^3$ ,  $l \in \{1, 2, 3\}$  und  $\psi$  - beliebig,
- $\|D_l^k \psi\|_{L^p} \leq \|\nabla \psi\|_{L^p}$ , falls  $\psi \in H^{1,p}(\Omega)$  und  $p \geq 1$ ,
- $D_l^k(\psi(x)\varphi(x)) = D_l^k \psi(x)\varphi(x + ke_l) + \psi(x)D_l^k \varphi(x)$ ,
- $\int_{\Omega} \psi(x)D_l^k \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} D_l^{-k} \psi(x)\varphi(x) dx$ ,  
wenn  $\text{supp } \psi \subset\subset \Omega$  oder  $\text{supp } \varphi \subset\subset \Omega$ , wobei  $\text{supp } \psi$  den Abschluß der Menge  $\{x \in \Omega \mid \psi(x) = 0\}$  bezeichnet, diese Menge soll in  $\Omega$  kompakt enthalten sein, d.h.,  $\text{supp } \psi$  liegt im Inneren von  $\Omega$ . Entsprechendes gilt auch für  $\text{supp } \varphi$ .
- $\|\varepsilon(u^q)\|_{L_{sym}^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)} \leq C$ ,
- $\|u^q\|_{[L^{\frac{3}{2}}(\Omega)]^3} \leq C$ ,

wobei  $q$  den Iterationsindex der Norton-Hoff-Approximation bezeichnet.

Sei  $\theta$  eine ausreichend glatte Funktion mit kompaktem Träger in  $\Omega$ .

**Behauptung 3.11:** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für jedes  $\delta > 0$  die folgende Abschätzung:*

$$\begin{aligned}
& 2k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \alpha \theta A D_l^k \sigma_s : D_l^k \sigma_s + (1 - \alpha) \theta A D_l^k \sigma_h : D_l^k \sigma_h dx \\
& \leq k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \{ 2\theta D_l^k u_j D_l^k f_j + D_l^{-k} D_l^k u_j D_i \theta (x - ke_l) (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} \\
& \quad + D_l^k D_l^k u_j D_i \theta (x + ke_l) (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} (x + ke_l) \\
& \quad + D_l^k u_j D_l^{-k} D_i \theta (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} \\
& \quad + D_l^k u_j D_l^k D_i \theta (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} (x + ke_l) \} dx,
\end{aligned} \tag{70}$$

wobei  $(\sigma_s, \sigma_h) := (\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  Lösungen der Norton-Hoff-Approximation sind. Die  $x$ -Abhängigkeit in den auftretenden Funktionen wurde in der Notation unterdrückt.

**Beweis:** Sei  $\beta_i(x) := \beta_i^q(x) := \frac{x^{q-2}}{\mu_i^{q-1}}$  ( $i = s$  oder  $h$ ). Wir testen die Gleichung  $A\sigma_i + \beta_i(|\sigma_i^D|)\sigma_i^D = \varepsilon(u) := \varepsilon(u^q)$  mit  $-k^{1+2\delta} D_l^{-k}(\theta D_l^k \sigma_i)$  und bilden die konvexe Kombination " $\alpha * (i = s) + (1 - \alpha) * (i = h)$ ". Zuerst sei der Ausdruck auf der rechten Seite dieser Gleichung partiell integriert:

$$\begin{aligned}
 & k^{1+2\delta} \int_{\Omega} D_l^k \varepsilon(u) : \theta D_l^k (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h) dx \\
 &= -k^{1+2\delta} \int_{\Omega} D_l^k u_j [D_i \theta D_l^k (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} - \theta D_l^k f_j] dx \\
 &= k^{1+2\delta} \int_{\Omega} D_l^{-k} D_l^k u_j D_i \theta (x - ke_l) (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} + \theta D_l^k u_j D_l^k f_j \\
 &\quad + D_l^k u_j D_l^{-k} D_i \theta (\alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h)_{ij} dx. \tag{71}
 \end{aligned}$$

Anschließend sei die linke Seite der durch konvexe Kombination entstandenen Gleichung (71) betrachtet. Wir wälzen die Differenzenquotienten  $D_l^{-k}$  auf die entsprechenden Faktoren, wodurch vier folgende Summanden entstehen:

$$\begin{aligned}
 & k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \alpha \theta A D_l^k \sigma_s : D_l^k \sigma_s + (1 - \alpha) \theta A D_l^k \sigma_h : D_l^k \sigma_h \\
 &\quad + \alpha \theta D_l^k (\beta_s (|\sigma_s^D|) \sigma_s^D) : D_l^k \sigma_s^D + (1 - \alpha) \theta D_l^k (\beta_h (|\sigma_h^D|) \sigma_h^D) : D_l^k \sigma_h^D dx.
 \end{aligned}$$

Dann testen wir die Gleichung

$$A \sigma_i(x + ke_l) + \beta_i (|\sigma_i^D|(x + ke_l)) \sigma_i^D(x + ke_l) = \varepsilon(u(x + ke_l))$$

mit  $-k^{1+2\delta} D_l^k (\theta D_l^{-k} \sigma_i(x + ke_l))$ . Es sei bemerkt, daß  $D_l^{-k} \sigma_i^D(x + ke_l) = D_l^k \sigma_i^D(x)$ . Dieselbe Rechnung mit der konvexen Kombination dieser Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned}
 & k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \alpha \theta A D_l^k \sigma_s : D_l^k \sigma_s + (1 - \alpha) \theta A D_l^k \sigma_h : D_l^k \sigma_h \\
 &\quad + \alpha \theta D_l^{-k} (\beta_s (|\sigma_s^D|(x + ke_l)) \sigma_s^D(x + ke_l)) : D_l^k \sigma_s^D \\
 &\quad + (1 - \alpha) \theta D_l^{-k} (\beta_h (|\sigma_h^D|(x + ke_l)) \sigma_h^D(x + ke_l)) : D_l^k \sigma_h^D dx \\
 &= k^{1+2\delta} \int_{\Omega} D_l^k D_l^k u_j D_i \theta (x + ke_l) (\alpha \sigma_s(x + ke_l) + (1 - \alpha) \sigma_h(x + ke_l))_{ij} \\
 &\quad + \theta D_l^k u_j D_l^k f_j + D_l^k u_j D_l^k D_i \theta (\alpha \sigma_s(x + ke_l) + (1 - \alpha) \sigma_h(x + ke_l))_{ij} dx.
 \end{aligned}$$

Danach werden die beiden konvexen Kombinationen zusammenaddiert. Die rechte Seite der Behauptung kann man sofort ablesen. Die linke Seite wird nach unten abgeschätzt, denn

$$\begin{aligned}
 & \theta D_l^k (\beta_i (|\sigma_i^D|) \sigma_i^D) : D_l^k \sigma_i^D + \theta D_l^{-k} (\beta_i (|\sigma_i^D|(x + ke_l)) \sigma_i^D(x + ke_l)) : D_l^k \sigma_i^D \\
 &= \theta \{ D_l^k (\beta_i (|\sigma_i^D|)) \sigma_i^D + D_l^k (\beta_i (|\sigma_i^D|)) \sigma_i^D(x + ke_l) \} : D_l^k \sigma_i^D \\
 &\quad + \theta \{ \beta_i (|\sigma_i^D|)(x + ke_l) D_l^k \sigma_i^D : D_l^k \sigma_i^D + \beta_i (|\sigma_i^D|) D_l^k \sigma_i^D : D_l^k \sigma_i^D \}.
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist nicht-negativ:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} D_l^k (\beta_i (|\sigma_i^D|)) (\sigma_i^D(x) + \sigma_i^D(x + ke_l)) : D_l^k \sigma_i^D dx \\
 &= \frac{1}{k^2} \int_{\Omega} (\beta_i (|\sigma_i^D|)(x + ke_l) - \beta_i (|\sigma_i^D|)(x)) (|\sigma_i^D|^2(x + ke_l) - |\sigma_i^D|^2(x)) dx \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

wegen Monotonie von  $\beta_i$ . □

Die nächste hilfreiche Ungleichung ist

**Behauptung 3.12:** Für eine Funktion  $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$  und für genügend kleine  $\delta, k > 0$  gilt:  $\|k^{1-\delta} D_l^k(\theta u_j^q)\|_{\frac{3}{2+\delta}} \leq C \|\nabla(\theta u^q)\|_{\frac{q}{q-1}}$ , wobei  $l, j = 1, 2, 3$ .

**Beweis:** Nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz für die Funktionen mit gebrochenen Ableitungen [1] gilt  $W^{\omega,p} \hookrightarrow L^r$ , falls  $p \leq r < \frac{np}{n-\omega p}$ . Wir setzen  $p = \frac{q}{q-1}$ ,  $\omega = 1 - \delta$ ,  $r = \frac{3}{3-(1-\delta)}$  und erhalten für eine geeignete Funktion  $\psi$ ,  $\text{supp } \psi \subset \subset \Omega$

$$\|\psi\|_{\frac{3}{2+\delta}} \leq C \left( \sup_{\tilde{k} \neq 0} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\psi(x + \tilde{k} e_i) - \psi(x)|}{|\tilde{k}|^{1-\delta}} \right)^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}}.$$

Das Supremum in der letzten Ungleichung wird nur über solche  $\tilde{k}$  gebildet, bei denen die Differenzenquotienten definiert sind, also  $\tilde{k} < \text{dist}(\partial\Omega, \partial(\text{supp } \psi))$ . Dasselbe betrifft auch  $\bar{k}$  aus der Abschätzung unten.

Die Wahl von  $\psi = \frac{(\theta u_j^q)(x + k e_l) - (\theta u_j^q)(x)}{k^\delta}$  leistet das Gewünschte:

$$\begin{aligned} \frac{\|(\theta u_j^q)(x + k e_l) - (\theta u_j^q)(x)\|_{\frac{3}{2+\delta}}}{k^\delta} &\leq C \max\{ \\ & \left( \sup_{\tilde{k} \geq k} \int \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\theta u_j^q(x + \tilde{k} e_i + k e_l) - \theta u_j^q(x + \tilde{k} e_i)|}{\underbrace{|k^\delta \tilde{k}^{1-\delta}|}_{\geq |k|}} \right)^{\frac{q}{q-1}} + \left( \frac{|\theta u_j^q(x + k e_l) - \theta u_j^q(x)|}{\underbrace{|k^\delta \tilde{k}^{1-\delta}|}_{\geq |k|}} \right)^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}}, \\ & \left( \sup_{\tilde{k} < k} \int \sum_{i=1}^3 \left( \frac{|\theta u_j^q(x + k e_l + \tilde{k} e_i) - \theta u_j^q(x + k e_l)|}{\underbrace{|k^\delta \tilde{k}^{1-\delta}|}_{\geq |\tilde{k}|}} \right)^{\frac{q}{q-1}} + \left( \frac{|\theta u_j^q(x + \tilde{k} e_i) - \theta u_j^q(x)|}{\underbrace{|k^\delta \tilde{k}^{1-\delta}|}_{\geq |\tilde{k}|}} \right)^{\frac{q}{q-1}} \right)^{\frac{q-1}{q}} \} \\ &\leq C \left( \sup_{\bar{k} \neq 0} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 |D_i^{\bar{k}}(\theta u_j^q)(x)|^{\frac{q}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq C \|\nabla(\theta u^q)\|_{\frac{q}{q-1}}, \end{aligned}$$

denn  $u^q \in [H_{\Gamma_D}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega)]^3$ . Da die rechte Seite nicht mehr von  $k$  abhängt, kann man zum  $\sup_{k \neq 0}$  übergehen.  $\square$

**Satz 3.13:** Die Lösung  $\sigma = (\sigma_s, \sigma_h)$  des Problems 3.1 ist  $[H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)]^{3 \times 3} \times [H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)]^{3 \times 3}$ -regulär.

**Beweis:** Aus der Behauptung 3.11 folgt, daß

$$\|k^{\frac{1}{2}+\delta} D_l^k \sigma_i^q\|_{L^2(\Omega')} \leq C,$$

$\forall \Omega' \subset \subset \Omega$ ,  $i$  steht für  $s$  oder  $h$ ,  $C$  ist eine von  $k$  und  $q$  unabhängige Konstante. Denn: Die linke Seite von (70) kann durch  $\|k^{\frac{1}{2}+\delta} D_l^k \sigma_i^q\|_{L^2(\Omega')}$  nach unten abgeschätzt werden; für den ersten Summanden der rechten Seite gilt, falls  $k$  klein genug ist:

$$\begin{aligned} |k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \theta D_l^k u_j^q D_l^k f_j| &\leq C \int_{\Omega} \theta |D_l^k f_j| |u_j^q(x + k e_l) - u_j^q(x)| dx \\ &\leq C \|u^q\|_{\frac{3}{2}} \|\nabla f\|_3 \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Für ausreichend große  $q$  gilt  $\|(\sigma_i^q)^D\|_{\frac{n}{2\delta}} < C$ , somit folgt  $\|\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q\|_{\frac{n}{2\delta}} < C$  nach Bemerkung 3.4. Der vorletzte und der letzte Summand von (70) ist aus dem gleichen Grund wie der erste durch eine Konstante beschränkt.

Eine kompliziertere Aufgabe ist es, eine konstante obere Schranke für den zweiten und dritten Summanden der rechten Seite anzugeben. Dafür konstruieren wir so ein  $\theta$ , daß  $\text{supp } D_l \theta = \Omega'$  und  $\tilde{\theta} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $\tilde{\theta} \in C_0^\infty(\Omega)$ ,  $\tilde{\theta}|_{\Omega'} \equiv 1$ ,  $\text{supp } \theta \subset\subset \text{supp } \tilde{\theta} \subset\subset \Omega$ . Für dieses  $\tilde{\theta}$  definieren wir  $\psi_{lq} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  als Lösung des Systems

$$\begin{cases} -\Delta\psi_{lq} - \nabla \text{div}(\psi_{lq}) &= |D_l^k(\tilde{\theta}u^q)|^{\frac{1}{p}-1} D_l^k(\tilde{\theta}u^q) \\ \psi_{lq}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\|\nabla\nabla\psi_{lq}\|_{L^{1+p}(\Omega)} \leq C \left( \int_{\Omega} |D_l^k(\tilde{\theta}u^q)|^{\frac{1+p}{p}} dx \right)^{\frac{1}{1+p}}. \quad (72)$$

Wir setzen  $\delta' := \frac{1}{1+p}$ ,  $\phi_{lq} = k^{3\delta'} D_l^{-k}(\psi_{lq})$ .  $\phi_{lq}$  wird in die obige Differentialgleichung eingesetzt:

$$\begin{aligned} -\Delta\phi_{lq} - \nabla \text{div}\phi_{lq} &= k^{3\delta'} D_l^{-k}(-\Delta\psi_{lq} - \nabla \text{div}(\psi_{lq})) \\ &= k^{3\delta'} D_l^{-k}(|D_l^k(\tilde{\theta}u^q)|^{\frac{1}{p}-1} D_l^k(\tilde{\theta}u^q)). \end{aligned}$$

So gilt einerseits

$$\begin{aligned} |(\varepsilon(\tilde{\theta}u^q), \nabla\phi_{lq})| &= |(\tilde{\theta}u^q, \Delta\phi_{lq} + \nabla \text{div}\phi_{lq})| \\ &= k^{3\delta'} \int_{\Omega} |D_l^k(\tilde{\theta}u^q)|^{\frac{1}{p}+1}, \end{aligned}$$

andererseits (wegen  $\|\varepsilon(\tilde{\theta}u^q)\|_{L_{sym}^1(\Omega)} \leq C$ ):

$$\begin{aligned} (\varepsilon(\tilde{\theta}u^q), \nabla\phi_{lq}) &\leq C \|\nabla\phi_{lq}\|_{\infty} \\ &\leq C \|\nabla k^{3\delta'} D_l^{-k}(\psi_{lq})\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq C \|\nabla\psi_{lq}\|_{C^{0,1-3\delta'}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Weil  $H^{1, \frac{3}{3\delta'}} \hookrightarrow C^{0,1-3\delta'}$  und unter Berücksichtigung der Definition von  $\delta'$ , kann man diese Ungleichungskette fortsetzen:

$$\|\nabla\psi_{lq}\|_{C^{0,1-3\delta'}(\Omega)} \leq C \|\nabla\psi_{lq}\|_{H^{1,1+p}(\Omega)} \leq C \left( \int_{\Omega} |D_l^k(\tilde{\theta}u^q)|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{1}{p+1}}.$$

Alles zusammen ergibt:

$$k^{3\delta'} \left( \int_{\Omega} |D_l^k(\tilde{\theta}u^q)|^{\frac{1+p}{p}} dx \right)^{1-\frac{1}{p+1}} \leq C.$$

Die Wahl  $3\delta' = 2\delta$  leistet das Gewünschte

$$\begin{aligned} &|k^{1+2\delta} \int_{\Omega} D_l^{-k} D_l^k u_j^q D_i \theta (\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q)_{ij} dx| \\ &\leq C \left( \int_{\Omega'} |k^{2\delta} D_l^k u_j^q|^{\frac{1+p}{p}} dx \right)^{\frac{p}{1+p}} \|\alpha\sigma_s^q + (1-\alpha)\sigma_h^q\|_{1+p} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

□

### 3.2 Quasistatisches Problem

Für die zeitabhängige Aufgabe werden noch einige Definitionen benötigt:

- $\|\tau\| := \|\tau\|_W = \sqrt{\int_{\Omega} \tau : \tau \, dx}$ ,
- $\|\tau\|_{L^q(t_0, T; W)} := \left(\int_I \|\tau\|^q(t) \, dt\right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall q \in \mathbb{N}$ ,
- $\|\tau\|_{L^\infty(t_0, T; W)} := \text{ess sup}_{t \in I} \|\tau\|(t)$ ,

wobei  $\tau : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$ -symmetrisch ist,  $I := [t_0; T]$ .

Weiterhin betrachten wir die Funktionenräume  $C(t_0, T; [L^2(\Omega)]^3)$  bzw.  $C(t_0, T; [L^2(\Gamma_N)]^3)$  von stetigen Funktionen  $\tau : I \rightarrow [L^2(\Omega)]^3$  bzw.  $\tau : I \rightarrow [L^2(\Gamma_N)]^3$ .

Das Zeitintervall  $I$  wird in  $N$  äquidistante Teile  $[t_{n-1}, t_n]$ ,  $t_{n-1} < t_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  zerlegt (man kann ohne Einschränkung nur diesen Fall betrachten). Es seien die Funktionen  $f \in C(t_0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ ,  $g \in C(t_0, T; [L^2(\Gamma_N)]^3)$ , sowie ein Lipschitz-stetiges, monoton fallendes  $\alpha : I^0 \rightarrow (0; 1)$ ,  $\alpha(0) := 1$ ,  $\alpha(T) > 0$  und ein Lipschitz-stetiges, monoton wachsendes  $\mu_h : I \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  vorgegeben.

Wir definieren  $f_n(\cdot) := f(t_n, \cdot)$ ,  $g_n(\cdot) := g(t_n, \cdot)$ ,  $\alpha_n := \alpha(t_n)$  und  $\mu_{hn} := \mu_h(t_n)$ ,  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Für jedes  $n$  wird induktiv das folgende Problem gestellt:

**Problem 3.14:** *Gesucht ist das Minimum  $\sigma_n = (\sigma_s^n, \sigma_h^n) \in W \times W$  des Funktionals*

$$\begin{aligned} J_n(\sigma_s, \sigma_h) &:= \frac{\alpha_n}{2} \int_{\Omega} \sigma_s : A \sigma_s \, dx - \alpha_n \int_{\Omega} A \sigma_s^{n-1} : \sigma_s \, dx \\ &+ \frac{1 - \alpha_n}{2} \int_{\Omega} \sigma_h : A \sigma_h \, dx - (1 - \alpha_n) \int_{\Omega} A \sigma_h^{n-1} : \sigma_h \, dx \end{aligned}$$

unter den Nebenbedingungen:

$$\alpha_n \sigma_s + (1 - \alpha_n) \sigma_h \in H_{f_n, g_n}^{\text{div}}(\Omega), \quad |\sigma_s^D| \leq \mu_s, \quad |\sigma_h^D| \leq \mu_{hn} \quad \text{f.ü. in } \Omega$$

für vorgegebene  $\mu_s > 0$  und  $\sigma_s^0, \sigma_h^0 \in W$ .

**Bemerkung 3.15:** *Bei komplexeren Problemen hängen  $\alpha, \mu_s$  und  $\mu_h$  auch von der Ortsvariable  $x$  ab. Sollte  $\alpha$  konstant sein, bleibt auch  $\mu_s$  konstant und es gilt entweder  $\mu_h = \text{const}$ , oder  $\mu_h = \mu_h(t, x)$ . Nach einer "Homogenisierungsprozedur" (s. Kapitel 2) kann man für kleine Referenzgebiete  $\Omega$   $\mu_h = \mu_h(t)$  annehmen. Die Beziehung für  $\mu_h$  aus demselben Kapitel führt auf eine monoton wachsende Funktion.*

*Der Fall  $\alpha = \alpha(t, x)$  wurde im Rahmen dieser Arbeit nicht in Betracht gezogen. Jedoch war der Existenzbeweis auf bezüglich des ersten Argumentes monotone Funktionen  $\alpha$  übertragbar, weshalb wir in diesem Abschnitt  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $\mu_h = \mu_h(t)$ ,  $\mu_s = \text{const}$  voraussetzen. Bei den numerischen Tests haben wir uns auf den Fall  $\alpha, \mu_s = \text{const}$ , dafür aber  $\mu_h = \mu_h(t, x)$  beschränkt, wodurch auch viele Praxis bezogene Probleme, unabhängig von der Gebietsgröße, beschrieben werden können.*

Genau wie im statischen Problem ist die Aufgabe 3.14 sukzessiv für die einzelnen Stützstellen  $t_n$  eindeutig lösbar, denn  $J_n(\cdot, \cdot)$  ist strikt konvex und koerzitiv.

Es gelten auch die gleichen Voraussetzungen wie im Abschnitt 3.1. Eine zeitabhängige Analogie für die safe load condition lautet:

Es gebe ein Paar  $(\chi_s, \chi_h) \in C(I, W) \times C(I, W)$  und eine reelle Zahl  $\delta > 0$ , so daß

- $(\alpha\chi_s + (1 - \alpha)\chi_h)(t, \cdot) \in H_{f(t), g(t)}^{div}(\Omega) \quad \forall t \in I,$
- $(\dot{\chi}_s, \dot{\chi}_h) \in L^2(I, W) \times L^2(I, W),$
- $|\chi_s^D(t, x)| \leq \mu_s - \delta, |\chi_h^D(t, x)| \leq \mu_h(t) - \delta$  f. ü. in  $I \times \Omega$ .

Da im Falle  $\alpha(t)|_{[0; \eta]} \equiv 1$  für ein  $0 < \eta \leq T$  die Mischung auf  $[0; \eta]$  ausartet, gibt [5] die Antwort auf die Existenzfrage. Deshalb wird in dieser Arbeit nur das Zeitintervall  $[\eta; T]$  betrachtet.

### 3.2.1 Norton-Hoff-Approximation

Für jedes  $0 < n \leq N, n \in \mathbb{N}$  und für den Startwert  $(\sigma_s^{q0}, \sigma_h^{q0}) := (\sigma_s^0, \sigma_h^0), |(\sigma_s^0)^D| \leq \mu_s, |(\sigma_h^0)^D| \leq \mu_h(0)$ , definieren wir das folgende Funktional:

$$\begin{aligned} J_{qn}(\sigma_s, \sigma_h) &:= \alpha_n \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_s : A \sigma_s \, dx + \frac{k}{q} \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}} \, dx - \int_{\Omega} A \sigma_s^{qn-1} : \sigma_s \, dx \right) \\ &+ (1 - \alpha_n) \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_h : A \sigma_h \, dx + \frac{k}{q} \int_{\Omega} \frac{|\sigma_h^D|^q}{\mu_{hn}^{q-1}} \, dx - \int_{\Omega} A \sigma_h^{qn-1} : \sigma_h \, dx \right) \end{aligned}$$

( $k := t_n - t_{n-1}$  sei die Zeitschrittlänge) und suchen nach einer Lösung  $(\sigma_s^{qn}, \sigma_h^{qn})$  des Problems:

$$J_{qn}(\sigma_s^{qn}, \sigma_h^{qn}) = \inf_{(\sigma_s, \sigma_h) \in K^q(t_n)} J_{qn}(\sigma_s, \sigma_h), \quad (73)$$

dabei bezeichnet

$$\begin{aligned} K^q(t_n) &:= \\ &\{(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W \mid (\sigma_s^D, \sigma_h^D) \in L_{sym}^q(\Omega) \times L_{sym}^q(\Omega), \alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h \in H_{f_n, g_n}^{div}(\Omega)\}, \end{aligned}$$

(vgl. 3.1.1, Definition von  $K^q$ ).



Da  $J_{qn}(\cdot, \cdot)$  strikt konvex und koerzitiv ist, gibt es eine eindeutige Lösung von (73).

$$\frac{d}{dt} J_{qn}(\sigma_s^{qn}, \sigma_h^{qn} + t\tau)|_{t=0} = 0 \quad \forall \tau \in H_{0,0}^{div}(\Omega), \quad (74)$$

weil  $(\sigma_s^{qn}, \sigma_h^{qn})$  das Funktional  $J_{qn}(\cdot, \cdot)$  auf  $K^q(t_n)$  minimiert. Also ist für  $t_n > \eta$ ,  $\eta$ -wie oben:

$$(A(\sigma_h^{qn} - \sigma_h^{qn-1}) + \frac{k|(\sigma_h^{qn})^D|^{q-2}}{\mu_{hn}^{q-1}}(\sigma_h^{qn})^D, \tau) = 0 \quad \forall \tau \in H_{0,0}^{div}. \quad (75)$$

Und genau wie im Abschnitt 3.1.1 bekommt man

$$A(\sigma_h^{qn} - \sigma_h^{qn-1}) + \frac{k|(\sigma_h^{qn})^D|^{q-2}}{\mu_{hn}^{q-1}}(\sigma_h^{qn})^D = A(\sigma_s^{qn} - \sigma_s^{qn-1}) + \frac{k|(\sigma_s^{qn})^D|^{q-2}}{\mu_s^{q-1}}(\sigma_s^{qn})^D \quad (76)$$

als Elemente von  $L_{sym}^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)$ .

Im Weiteren unterdrücken wir an manchen Stellen die  $x$ -Abhängigkeit bei der Notation der tensorwertigen Funktionen  $\sigma, \chi, \varepsilon(v)$  usw.. Wir schreiben z.B.  $\sigma^{qn}$  statt  $\sigma^{qn}(x)$ . Die unten definierten Funktionen  $\bar{\sigma}_i^q$  und  $\tilde{\sigma}_i^q$  sind somit sowohl Zeit- als auch Ortsabhängig:  $\bar{\sigma}_i^q = \bar{\sigma}_i^q(t, x)$ ,  $\tilde{\sigma}_i^q = \tilde{\sigma}_i^q(t, x)$ . Die Schreibweise  $\int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_i(\xi) - \tilde{\sigma}_i(\xi + k)\| d\xi$  bedeutet  $\int_{t_0}^t \sqrt{\int_{\Omega} (\tilde{\sigma}_i(\xi, x) - \tilde{\sigma}_i(\xi + k, x)) : (\tilde{\sigma}_i(\xi, x) - \tilde{\sigma}_i(\xi + k, x)) dx} d\xi$ .

Mit dem  $N+1$ -Tupel von Lösungen  $((\sigma_s^{q0}, \sigma_h^{q0}), \dots, (\sigma_s^{qN}, \sigma_h^{qN}))$  des bezüglich  $t$  diskreten Problems (73) assoziieren wir zwei zeitabhängige Funktionen:

- eine *Treppenfunktion*  $\bar{\sigma}_i^q(t) = \sigma_i^{qn-1}$  für  $t \in [t_{n-1}; t_n)$ ,  $i$  stehe für  $s$  oder  $h$ , also  $\bar{\sigma}_i^q(t) = \bar{\sigma}_i^q(k[\frac{t}{k}]) = \sigma_i^{q[\frac{t}{k}]}$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  und
- eine *stückweise lineare Interpolation*  $\tilde{\sigma}_i^q(t)$  der Stützen  $\sigma_i^{qn}$ , d.h.

$$\frac{\tilde{\sigma}_i^q(t) - \tilde{\sigma}_i^q(t_{n-1})}{t - t_{n-1}} = \frac{\sigma_i^{qn} - \sigma_i^{qn-1}}{k}$$

für  $t \in (t_{n-1}, t_n)$ ,  $\tilde{\sigma}_i^q(t_{n-1}) = \sigma_i^{qn-1}$  und  $i, n$  - wie im ersten Punkt.

Zwischen den gerade eingeführten Funktionen gelten folgende nützliche Relationen:

$$\dot{\bar{\sigma}}_i^q(t) = \frac{\bar{\sigma}_i^q(t+k) - \bar{\sigma}_i^q(t)}{k}, \quad (77)$$

$$\bar{\sigma}_i^q(t+k) = \tilde{\sigma}_i^q(t) + \dot{\bar{\sigma}}_i^q(t)(k([\frac{t}{k}] + 1) - t). \quad (78)$$

Mit den obigen Bezeichnungen folgt aus (75), daß es ein  $v^{qn} \in [H_{\Gamma_D}^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega)]^3$  gibt, so daß

$$\begin{aligned} \varepsilon(v^{qn}) &= A\dot{\bar{\sigma}}_s^q(t) + \frac{|(\sigma_s^{qn})^D|^{q-2}(\sigma_s^{qn})^D}{\mu_s^{q-1}} \\ &= A\dot{\bar{\sigma}}_h^q(t) + \frac{|(\sigma_h^{qn})^D|^{q-2}(\sigma_h^{qn})^D}{\mu_{hn}^{q-1}} \quad t \in (t_{n-1}, t_n). \end{aligned} \quad (79)$$

Auch für die stetige Funktion  $\alpha$  definieren wir  $\bar{\alpha}(t) := \alpha_{n-1}$ ,  $t \in [t_{n-1}, t_n)$  und  $\tilde{\alpha}(t)$  - stückweise lineare Interpolation der Werte  $\alpha_n$ ,  $n = 0, \dots, N$ .

### 3.2.2 Abschätzungen der Approximationsfolge

Der Existenzbeweis der elastoplastischen Aufgabe benutzt insbesondere die Beschränktheitsaussage für die Folge  $((\sigma_s^{qn}(\cdot), \sigma_h^{qn}(\cdot)))_{q \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \leq N}$ . Letzteres wird unter der Zusatzannahme erfolgen, daß der Stoff zum Deformationsanfang schon etwas "vorgemischt" ist, d.h., wir wählen ein  $t_0 > \eta$  mit  $\alpha(t_0) < 1$  als Ausgangspunkt des zeitabhängigen Problems,  $(\sigma_s^0, \sigma_h^0) := (\sigma_s(t_0), \sigma_h(t_0))$ ,  $|(\sigma_s(t_0))^D| \leq \mu_s$ ,  $|(\sigma_h(t_0))^D| \leq \mu_h(t_0)$ .

**Behauptung 3.16:** Für alle  $q \in \mathbb{N}$  und für  $n \in \mathbb{N}, n \leq N$  gilt für die Lösung von (73):

$$\int_{\Omega} |\sigma_s^{qn}|^2 dx \leq C, \quad \int_{\Omega} |\sigma_h^{qn}|^2 dx \leq C, \quad (80)$$

$$\int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^{qn})^D|^q}{\mu_s^{q-1}} dx \leq CN, \quad \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_h^{qn})^D|^q}{\mu_{hn}^{q-1}} dx \leq CN, \quad (81)$$

mit einer von der Zahl  $1 - \alpha(t_0)$  abhängigen Konstante  $C$ .

**Beweis:** Da es für die Funktion  $\chi$  aus der safe load condition gilt  $\alpha_n(\sigma_s^{qn} - \chi_s(t_n)) + (1 - \alpha_n)(\sigma_h^{qn} - \chi_h(t_n)) \in H_{0,0}^{div}(\Omega)$ , ist

$$J_{qn}(\sigma_s^{qn}, \sigma_h^{qn}) \leq J_{qn}(\sigma_s^{qn} + t(\sigma_s^{qn} - \chi_s(t_n)), \sigma_h^{qn} + t(\sigma_h^{qn} - \chi_h(t_n))) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

So lautet die notwendige Bedingung für diese Ungleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} (A\dot{\sigma}_s^q + \frac{|(\sigma_s^{qn})^D|^{q-2}}{\mu_s^{q-1}} (\sigma_s^{qn})^D, \sigma_s^{qn} - \chi_s(t_n)) \\ &+ (A\dot{\sigma}_h^q + \frac{|(\sigma_h^{qn})^D|^{q-2}}{\mu_{hn}^{q-1}} (\sigma_h^{qn})^D, \sigma_h^{qn} - \chi_h(t_n)). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $x \rightarrow \frac{|x^D|^{q-2} x^D}{\mu_i^{q-1}}$  ist monoton, d.h.

$$0 \leq \left( \frac{|(\sigma_i^{qn})^D|^{q-2} (\sigma_i^{qn})^D}{\mu_i^{q-1}}(t_n) - \frac{|\chi_i^D|^{q-2} \chi_i^D}{\mu_i^{q-1}}(t_n), \sigma_i^{qn} - \chi_i(t_n) \right), \quad i \text{ stehe für } s \text{ oder } h.$$

Deshalb gilt auch

$$\begin{aligned} &(A\dot{\sigma}_h^q(t), \sigma_h^{qn} - \chi_h(t_n)) + \left( \frac{|\chi_h^D|^{q-2} \chi_h^D}{\mu_{hn}^{q-1}}(t_n), \sigma_h^{qn} - \chi_h(t_n) \right) \\ &+ \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} (A\dot{\sigma}_s^q(t), \sigma_s^{qn} - \chi_s(t_n)) + \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} \left( \frac{|\chi_s^D|^{q-2} \chi_s^D}{\mu_s^{q-1}}(t_n), \sigma_s^{qn} - \chi_s(t_n) \right) \leq 0, \end{aligned}$$

wo  $t \in (t_{n-1}, t_n) = (k[\frac{t}{k}], k([\frac{t}{k}] + 1))$ . Wir berücksichtigen, daß  $\sigma_i^{qn} = \bar{\sigma}_i^q(t + k)$  und benutzen (78) für  $(\bar{\sigma}_i - \bar{\chi}_i)(t + k)$ . Eine weitere Nulladdition ergibt:

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{\alpha}(t+k)}{1-\bar{\alpha}(t+k)} (A\dot{\tilde{\chi}}_s(t) + \frac{|\bar{\chi}_s^D|^{q-2}}{\mu_s^{q-1}} \bar{\chi}_s^D(t+k), (\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t) + (\dot{\tilde{\sigma}}_s^q - \dot{\tilde{\chi}}_s)(t)(k(\lfloor \frac{t}{k} \rfloor + 1) - t)) \\
& + \frac{\bar{\alpha}(t+k)}{1-\bar{\alpha}(t+k)} (A(\dot{\tilde{\sigma}}_s^q - \dot{\tilde{\chi}}_s)(t), (\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t)(k(\lfloor \frac{t}{k} \rfloor + 1) - t) + (\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t)) \\
& + (A\dot{\tilde{\chi}}_h(t) + \frac{|\bar{\chi}_h^D|^{q-2}}{\mu_h^{q-1}} \bar{\chi}_h^D(t+k), (\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(t) + (\dot{\tilde{\sigma}}_h^q - \dot{\tilde{\chi}}_h)(t)(k(\lfloor \frac{t}{k} \rfloor + 1) - t)) \\
& + (A(\dot{\tilde{\sigma}}_h^q - \dot{\tilde{\chi}}_h)(t), (\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(t)(k(\lfloor \frac{t}{k} \rfloor + 1) - t) + (\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(t)) \\
& \leq 0.
\end{aligned} \tag{82}$$

Die letzte Ungleichung integrieren wir von  $t_0$  bis  $t$  und machen von den folgenden Abschätzungen Gebrauch:

- $\int_{t_0}^t k \|\dot{\tilde{\sigma}}_i^q - \dot{\tilde{\chi}}_i\|(\xi) d\xi = \int_{t_0}^t \|(\tilde{\sigma}_i^q - \tilde{\chi}_i)(k(\lfloor \frac{\xi}{k} \rfloor + 1)) - (\tilde{\sigma}_i^q - \tilde{\chi}_i)(k\lfloor \frac{\xi}{k} \rfloor)\| d\xi \leq C + C \int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_i^q - \tilde{\chi}_i\|^2(\xi) d\xi,$
- $\alpha$  ist monoton fallend, daher auch  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ , somit

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t \frac{\bar{\alpha}(\xi+k)}{1-\bar{\alpha}(\xi+k)} (A(\dot{\tilde{\sigma}}_s^q - \dot{\tilde{\chi}}_s)(\xi), (\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(\xi)) d\xi \\
& = \frac{\bar{\alpha}(t+k)}{2(1-\bar{\alpha}(t+k))} (A(\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s), \tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t) - \frac{\alpha(t_0)}{1-\alpha(t_0)} \frac{(A(\sigma_s^0 - \chi_s^0), \sigma_s^0 - \chi_s^0)}{2} \\
& + \sum_{n=0}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \underbrace{\left( \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} - \frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}} \right)}_{>0} \frac{(A(\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s), \tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t_n)}{2},
\end{aligned}$$

- beim harten Anteil gibt es keinen  $t$ -abhängigen Koeffizienten, deshalb gilt

$$\int_{t_0}^t A(\dot{\tilde{\sigma}}_h^q - \dot{\tilde{\chi}}_h), (\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(\xi) d\xi = \frac{(A(\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h), \tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(t)}{2} - \frac{(A(\sigma_h^0 - \chi_h^0), \sigma_h^0 - \chi_h^0)}{2},$$

- $(A(\dot{\tilde{\sigma}}_i^q - \dot{\tilde{\chi}}_i)(t), (\tilde{\sigma}_i^q - \tilde{\chi}_i)(t)(k(\lfloor \frac{t}{k} \rfloor + 1) - t)) \geq 0$  und
- $\frac{|\bar{\chi}_i^D|^{q-2}}{\mu_i^{q-1}}(t) < C$ , denn  $\frac{|\bar{\chi}_i^D|^{q-2}}{\mu_i^{q-2}}(t) < C$  und  $\bar{\mu}_i \geq \mu_i(t_0) > 0$ ,

$i$  - wie oben. Dann entnimmt man aus (82), daß

$$\begin{aligned}
& (A(\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s), \tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t) + (A(\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h), \tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(t) \\
& \leq C \left( \int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s\|^2(\xi) d\xi + \int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h\|^2(\xi) d\xi \right) + C,
\end{aligned} \tag{83}$$

weil  $\sup_{\xi \in [t_0, t]} \frac{\bar{\alpha}(\xi+k)}{1-\bar{\alpha}(\xi+k)} < C$  und  $\sup_{\xi \in [t_0, t]} \frac{1-\bar{\alpha}(\xi+k)}{\bar{\alpha}(\xi+k)} < C$ . Ohne Einschränkung sei  $\int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h\|^2(\xi) d\xi \leq \int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s\|^2(\xi) d\xi$ , dann gilt

$$(A(\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s), \tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s)(t) \leq C \int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s\|^2(\xi) d\xi + C.$$

Die Koerzitivität von  $A$ , das Gronwall-Lemma und ihre diskrete Analogie liefern die erste Aussage der Behauptung:

$$\|\tilde{\sigma}_s^q - \tilde{\chi}_s\|^2(t) \leq C \quad \forall t \in (t_0, T), \|\tilde{\chi}_s\|(t) \leq C. \quad (84)$$

Also ist  $\max_{0 \leq n \leq N} \|\sigma_s^{qn}\|^2 \leq C$ .

Aus (83) und (84) folgt auch

$$(A(\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h), \tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h)(t) \leq C \int_{t_0}^t \|\tilde{\sigma}_h^q - \tilde{\chi}_h\|^2(\xi) d\xi + C$$

und somit  $\max_{0 \leq n \leq N} \|\sigma_h^{qn}\|^2 \leq C$ .

Für den Beweis des zweiten Behauptungsteils betrachten wir wieder (73) mit der gleichen Testfunktion wie vorher. Der selbe Übergang zu den Treppenfunktionen liefert eine ähnliche Relation wie (82) nur mit  $\frac{|(\bar{\sigma}_i^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_i^q)^D}{\bar{\mu}_i^{q-1}}(t+k)$  statt  $\frac{|(\bar{\chi}_i)^D|^{q-2}(\bar{\chi}_i)^D}{\bar{\mu}_i^{q-1}}(t+k)$  und mit dem Gleichheitszeichen statt " $\leq$ ". Aus den selben Hilfsabschätzungen und aus dem schon bewiesenen ersten Teil der Behauptung geht die Ungleichung

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1 - \bar{\alpha}(\xi)} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D - (\bar{\chi}_s)^D \right)(\xi) d\xi \\ & + \int_{t_1}^{t+k} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, (\bar{\sigma}_h^q)^D - (\bar{\chi}_h)^D \right)(\xi) d\xi \\ & \leq C \end{aligned} \quad (85)$$

hervor.

Ohne Einschränkung sei  $t \geq t_1$  ( $(\sigma_s^{q0}, \sigma_h^{q0})$  ist vorgegeben) und

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1 - \bar{\alpha}(\xi)} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D - (\bar{\chi}_s)^D \right)(\xi) d\xi \\ & \leq \int_{t_1}^{t+k} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, (\bar{\sigma}_h^q)^D - (\bar{\chi}_h)^D \right)(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Der andere Fall ist völlig analog. Dann bekommt man

$$\int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1 - \bar{\alpha}(\xi)} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D - (\bar{\chi}_s)^D \right)(\xi) d\xi \leq C. \quad (86)$$

Mit Bezeichnung  $|(\bar{\sigma}_i^q)^D|(t) > \mu_i(t) := \{x \in \Omega \mid |(\bar{\sigma}_i^q)^D|(t, x) > \mu_i(t)\}$  folgt daraus

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}} dx d\xi \leq \int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}} |(\bar{\chi}_s)^D| dx d\xi + C \\ & \leq \int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}} \left\{ C + \int_{|(\bar{\sigma}_s^q)^D| > \mu_s} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) |(\bar{\chi}_s)^D|(\xi, x) dx \right\} d\xi + C, \end{aligned}$$

das ist äquivalent zu

$$\int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \left\{ \int_{|(\bar{\sigma}_s^q)^D| \leq \mu_s} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}} dx + \int_{|(\bar{\sigma}_s^q)^D| > \mu_s} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}} \underbrace{\left(1 - \frac{|(\bar{\chi}_s^D)|}{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|}\right)}_{\geq \frac{\delta}{\mu_s}} dx \right\} d\xi \leq C.$$

Die beiden Summanden im Integrand sind nicht-negativ, demnach gilt:

$$\int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1-\bar{\alpha}(\xi)} \int_{|(\bar{\sigma}_s^q)^D| > \mu_s} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi \leq C = CT. \quad (87)$$

Wir nutzen wieder die nicht-negative Definitheit des Integrandes aus, indem wir für  $t \in (t_n; t_{n+1}]$ ,  $n \geq 1$ , das Integrationsintervall  $[t_1; t+k]$  durch  $[t_n; t_{n+1}]$  ersetzen. Gleichzeitig addieren wir zu den beiden Seiten den beschränkten Term  $\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1-\bar{\alpha}(\xi)} \int_{|(\bar{\sigma}_s^q)^D| \leq \mu_s} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi$ :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1-\bar{\alpha}(\xi)} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi = k \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^{qn})^D|^q}{\mu_s^{q-1}} \leq CT.$$

(87) ergibt auch

$$\int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1-\bar{\alpha}(\xi)} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi \leq CT. \quad (88)$$

Somit liefert (85):

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t+k} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}}{\bar{\mu}_h^{q-1}} (\bar{\sigma}_h^q)^D, (\bar{\sigma}_h^q)^D - \bar{\chi}_h^D \right)(\xi) d\xi \\ & \leq C + \int_{t_1}^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{1-\bar{\alpha}(\xi)} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}}(\xi) (|(\bar{\sigma}_s^q)^D| + |\bar{\chi}_s^D|)(\xi) dx d\xi \\ & \leq C. \end{aligned}$$

Das ist die Ungleichung (86) für den harten Anteil der Mischung. Der Beweis vom weichen Anteil ist auf diesen Fall komplett übertragbar. Der analoge Term  $\int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{|(\bar{\sigma}_h^q)^D| \leq \bar{\mu}_h} \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi+k, x) dx d\xi$  bleibt nach wie vor beschränkt, denn  $\bar{\mu}_h \leq \mu_{hT}$ . Die Behauptung ist damit bewiesen, denn  $N = \frac{T}{k}$ ,  $\frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} \leq C \forall 0 \leq n \leq N$ .  $\square$

Anschließend zeigen wir noch einige Abschätzungen, die im weiteren Verlauf des Existenzbeweises benötigt werden.

**Behauptung 3.17:** Für alle  $q \in \mathbb{N}$  und für  $n \in \{0, \dots, N\}$  gelten die folgenden Ungleichungen:

$$\int_{t_0}^T \|\dot{\bar{\sigma}}_s^q\|^2 d\xi \leq C, \quad \int_{t_0}^T \|\dot{\bar{\sigma}}_h^q\|^2 d\xi \leq C \quad (89)$$

$$\frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^{qn})^D|^q}{\mu_s^{q-1}} dx \leq C, \quad \frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_h^{qn})^D|^q}{\mu_{hn}^{q-1}} dx \leq C, \quad (90)$$

$C = C(1 - \alpha(t_0))$ .

**Beweis:** Für jedes  $n = 1, \dots, N$  testen wir (74) mit dem Funktionspaar  $(\frac{\dot{\alpha}\sigma_s^q - \dot{\alpha}\dot{\chi}_s}{\alpha_n}(t), \frac{(1-\alpha)\dot{\sigma}_h^q - (1-\alpha)\dot{\chi}_h}{1-\alpha_n}(t))|_{t \in (t_{n-1}, t_n)}$ , d.h.,

$$\frac{d}{dl} J_{qn}(\sigma_s^{qn} + l \frac{\dot{\alpha}\sigma_s^q - \dot{\alpha}\dot{\chi}_s}{\alpha_n}, \sigma_h^{qn} + l \frac{(1-\alpha)\dot{\sigma}_h^q - (1-\alpha)\dot{\chi}_h}{1-\alpha_n})|_{l=0} = 0,$$

und addieren den so entstandenen Ausdruck über alle  $n = 0, \dots, [\frac{t}{k}] + 1$  unter Berücksichtigung, daß  $(\sigma_i^{qn})^D = (\bar{\sigma}_i^q)^D(t+k)$ :

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t (1 - \bar{\alpha}(\xi + k))(A\dot{\sigma}_h^q(\xi) + \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi + k), \frac{(1-\alpha)\dot{\sigma}_h^q(\xi) - (1-\alpha)\dot{\chi}_h(\xi)}{1 - \bar{\alpha}(\xi + k)}) d\xi \\ & + \int_{t_0}^t \bar{\alpha}(\xi + k)(A\dot{\sigma}_s^q(\xi) + \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\bar{\mu}_s^{q-1}}(\xi + k), \frac{\dot{\alpha}\dot{\sigma}_s^q(\xi) - \dot{\alpha}\dot{\chi}_s(\xi)}{\bar{\alpha}(\xi + k)}) d\xi \\ & = 0. \end{aligned} \tag{91}$$

Die quadratischen Anteile schätzen wir folgendermaßen nach unten ab:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t (A\dot{\sigma}_s^q, \dot{\alpha}\dot{\sigma}_s^q - \dot{\alpha}\dot{\chi}_s) + (A\dot{\sigma}_h^q, (1-\alpha)\dot{\sigma}_h^q - (1-\alpha)\dot{\chi}_h) d\xi \\ & = \int_{t_0}^t (A\dot{\sigma}_s^q(\xi), \bar{\alpha}(\xi + k)(\dot{\sigma}_s^q - \dot{\chi}_s)(\xi) + \dot{\alpha}(\xi)(\bar{\sigma}_s^q - \bar{\chi}_s)(\xi)) \\ & + (A\dot{\sigma}_h^q(\xi), (1 - \bar{\alpha}(\xi + k))(\dot{\sigma}_h^q - \dot{\chi}_h)(\xi) - \dot{\alpha}(\xi)(\bar{\sigma}_h^q - \bar{\chi}_h)(\xi)) d\xi = (*). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Formel:  $\dot{\beta}\dot{\gamma}(\xi, x) = \bar{\beta}(\xi + k, x)\dot{\gamma}(\xi, x) + \bar{\gamma}(\xi, x)\dot{\beta}(\xi, x)$  für beliebige  $\beta, \gamma : I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , benutzt.

Sei  $a, b > 0$  so gewählt, daß die Koeffizienten bei  $\|\dot{\sigma}_i^q\|$  in der letzten Zeile der folgenden Ungleichung positiv sind:

$$\begin{aligned} (*) & \geq \int_{t_0}^t \underbrace{(A\dot{\sigma}_s^q(\xi), \dot{\alpha}(\xi)(\bar{\sigma}_s^q - \bar{\chi}_s)(\xi))}_{\geq C\dot{\alpha}(b\|\dot{\sigma}_s^q\|^2 + \frac{1}{b}\|\bar{\sigma}_s^q - \bar{\chi}_s\|^2)} + \underbrace{(A\dot{\sigma}_h^q(\xi), -\dot{\alpha}(\xi)(\bar{\sigma}_h^q - \bar{\chi}_h)(\xi))}_{\geq C\dot{\alpha}(b\|\dot{\sigma}_h^q\|^2 + \frac{1}{b}\|\bar{\sigma}_h^q - \bar{\chi}_h\|^2)} \\ & + \int_{t_0}^t \bar{\alpha}(\xi + k)(c\|\dot{\sigma}_s^q\|^2 - \underbrace{C\|\dot{\sigma}_s^q\|\|\dot{\chi}_s\|}_{\leq a\|\dot{\sigma}_s^q\|^2 + \frac{1}{a}\|\dot{\chi}_s\|^2}) + (1 - \bar{\alpha}(\xi + k))(c\|\dot{\sigma}_h^q\|^2 - \underbrace{C\|\dot{\sigma}_h^q\|\|\dot{\chi}_h\|}_{\leq a\|\dot{\sigma}_h^q\|^2 + \frac{1}{a}\|\dot{\chi}_h\|^2}) d\xi \\ & \geq \int_{t_0}^t (\bar{\alpha}(\xi + k)(c - a) + Cb\dot{\alpha}(\xi))\|\dot{\sigma}_s^q\|^2(\xi) \\ & + ((1 - \bar{\alpha}(\xi + k))(c - a) + Cb\dot{\alpha}(\xi))\|\dot{\sigma}_h^q\|^2(\xi) d\xi - C \end{aligned}$$

wegen schon bewiesener Behauptung 3.16 (zur Erinnerung:  $\dot{\alpha} \leq 0$ ). Die Penalisierungsterme lassen wir in zwei weitere Teile zerfallen. Der erste von ihnen wird nach unten abgeschätzt ( $\xi \in (t_{n-1}, t_n)$ ):

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}(\xi+k), (\widehat{\alpha\sigma_s^q})^D(\xi) \right) + \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi+k), ((1-\alpha)\widehat{\sigma_h^q})^D(\xi) \right) \\
&= \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D(\xi+k)}{\mu_s^{q-1}}, \frac{\overline{\alpha\sigma_s^q}(\xi+k) - \overline{\alpha\sigma_s^q}(\xi)}{k} \right) \\
&+ \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D(\xi+k)}{\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)}, \frac{\overline{(1-\alpha)\sigma_h^q}(\xi+k) - \overline{(1-\alpha)\sigma_h^q}(\xi)}{k} \right) \\
&\geq \frac{\bar{\alpha}(\xi+k)}{k\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi+k, x) dx + \frac{1-\bar{\alpha}(\xi+k)}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi+k, x) dx \\
&- \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{k\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-1}(\xi+k, x) |(\bar{\sigma}_s^q)^D|(\xi, x) dx \\
&- \frac{1-\bar{\alpha}(\xi)}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-1}(\xi+k, x) |(\bar{\sigma}_h^q)^D|(\xi, x) dx \\
&= (***)
\end{aligned}$$

Nach der Young'schen Ungleichung ist

$$\frac{(q-1)|(\bar{\sigma}_i^q)^D|^q(\xi+k) + |(\bar{\sigma}_i^q)^D|^q(\xi)}{q} \geq |(\bar{\sigma}_i^q)^D|^{q-1}(\xi+k) |(\bar{\sigma}_i^q)^D|(\xi).$$

In der Abschätzung (\*\*\*) benutzen wir dies als

$$\begin{aligned}
& \frac{-(1-\bar{\alpha})(\xi)}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-1}(\xi+k, x) |(\bar{\sigma}_h^q)^D|(\xi, x) dx \\
&\geq \frac{q-1}{q} \left( \frac{1-\bar{\alpha}}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)}(\xi+k) - \frac{1-\bar{\alpha}(\xi)}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \right) \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi+k, x) dx \\
&- \frac{1-\bar{\alpha}}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)}(\xi+k) \frac{q-1}{q} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi+k, x) dx - \frac{1-\bar{\alpha}(\xi)}{k\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x)}{q} dx
\end{aligned}$$

für den harten Anteil. Entsprechendes gilt auch für den weichen Anteil. Nach dem zusammenfassen der gleichen Summanden haben wir:

$$\begin{aligned}
(***) &\geq \underbrace{\frac{\bar{\alpha}(\xi+k)}{qk\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi+k, x) dx}_{=:A(\xi+k)} - \underbrace{\frac{\bar{\alpha}(\xi)}{qk\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi, x) dx}_{=:A(\xi)} \\
&+ \frac{\bar{\alpha}(\xi+k) - \bar{\alpha}(\xi)}{kq\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} (q-1)|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi+k, x) dx \\
&+ \left( \frac{1-\bar{\alpha}}{kq\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)}(\xi+k) - \frac{1-\bar{\alpha}(\xi)}{kq\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \right) \int_{\Omega} (q-1)|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi+k, x) dx \\
&+ \underbrace{\frac{1-\bar{\alpha}}{kq\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)}(\xi+k) \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi+k, x) dx}_{=:B(\xi+k)} - \underbrace{\frac{1-\bar{\alpha}(\xi)}{kq\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x) dx}_{=:I}.
\end{aligned}$$

Da  $\bar{\mu}_h(\cdot)$  monoton wächst, gilt  $-\frac{1}{\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi+k)} \geq -\frac{1}{\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi)}$ , d.h.,

$$I \geq -\frac{1-\bar{\alpha}}{kq\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi) \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x) dx = -B(\xi).$$

Integriert man die letzte (\*\*)-Abschätzung von  $t_0$  bis  $t$ , heben sich einige Terme auf, so daß man

$$\int_{t_0}^t A(\xi+k) d\xi - \int_{t_0}^t A(\xi) d\xi = \frac{1}{qk} \int_t^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi - \frac{\alpha_0 \int_{\Omega} |(\sigma_s^{q0})^D|^q dx}{q\mu_s^{q-1}}$$

und

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t B(\xi+k) d\xi - \int_{t_0}^t B(\xi) d\xi = \\ & \frac{1}{qk} \int_t^{t+k} \frac{1-\bar{\alpha}}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi) \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi - \frac{1-\alpha}{q\bar{\mu}_h^{q-1}}(t_0) \int_{\Omega} |(\sigma_h^{q0})^D|^q dx \end{aligned}$$

bekommt.  $|(\sigma_i^{q0})^D| \leq \mu_i(t_0)$  nach Voraussetzung,  $i = s$  oder  $h$ .

Mit der schon bewiesenen  $L^1$ -Abschätzung (88) für den Penaltyterm und aus der Lipschitz-Stetigkeit von  $\alpha$  folgt für das Integral:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}(\xi+k), \widetilde{\alpha\sigma_s^q}(\xi) \right) + \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi+k), \widetilde{(1-\alpha)\sigma_h^q}(\xi) \right) d\xi \\ & \geq \frac{1}{qk} \int_t^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{\mu_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi + \frac{1}{qk} \int_t^{t+k} \frac{1-\bar{\alpha}}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi) \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi \\ & - CT. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil suchen wir (wegen des negativen Vorzeichens) nach einer oberen Schranke. Auch hier wird die Produktregel für  $\widetilde{\alpha\chi_s}$  bzw.  $\widetilde{(1-\alpha)\chi_h}$  angewendet und die Beschränktheit von  $\chi_s$  bzw.  $\chi_h$  berücksichtigt:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^t \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}(\xi+k), \widetilde{\alpha\chi_s} \right) + \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi+k), \widetilde{(1-\alpha)\chi_h} \right) d\xi \\ & \leq C \left( \int_{t_0}^t (\bar{\alpha} \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}} dx)(\xi+k) d\xi + \int_{t_0}^t ((1-\bar{\alpha}) \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-1}}{\bar{\mu}_h^{q-1}} dx)(\xi+k) d\xi \right) \\ & + C \left( \int_{t_0}^t \frac{\bar{\alpha}(\xi+k) - \bar{\alpha}(\xi)}{k} \left( \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-1}}{\mu_s^{q-1}} dx \right) (\xi+k) d\xi \right) \\ & + \int_{t_0}^t \frac{\bar{\alpha}(\xi) - \bar{\alpha}(\xi+k)}{k} \left( \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-1}}{\bar{\mu}_h^{q-1}} dx \right) (\xi+k) d\xi \\ & \leq C \end{aligned}$$

wegen (88).

Die obigen Abschätzungen setzen wir in die Ausgangsgleichung (91) ein und erhalten:



$$\begin{aligned}
& C \int_{t_0}^t \|\dot{\bar{\sigma}}_s^q\|^2(\xi) + \|\dot{\bar{\sigma}}_h^q\|^2(\xi) d\xi \\
& + \frac{1}{qk} \int_t^{t+k} \frac{\bar{\alpha}(\xi)}{\bar{\mu}_s^{q-1}} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_s^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi + \frac{1}{qk} \int_t^{t+k} \frac{1 - \bar{\alpha}(\xi)}{\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi)} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi \\
& \leq CT.
\end{aligned}$$

Darüber hinaus sind alle Summanden dieser Ungleichung nicht-negativ. Daraus bekommt man unmittelbar die Behauptung, denn mit der Wahl  $t = t_n$  ist  $\bar{\sigma}_i^q|_{[t_n, t_n+k]} = \sigma_i^{qn}$ ,  $i = s$  oder  $h$ , und folglich

$$\int_{t_n}^{t_n+k} \frac{1 - \bar{\alpha}(\xi)}{\bar{\mu}_h^{q-1}(\xi)} \int_{\Omega} |(\bar{\sigma}_h^q)^D|^q(\xi, x) dx d\xi = \frac{k(1 - \alpha_n)}{\mu_{hn}^{q-1}} \int_{\Omega} |(\sigma_h^{qn})^D|^q(x) dx.$$

Entsprechendes gilt auch für den weichen Anteil.  $\square$

### 3.2.3 Grenzübergang $k \rightarrow 0$

Mit den beiden letzten Behauptungen bekommt man wegen der \*-schwachen Kompaktheit beschränkter Mengen die Existenz von Funktionen  $\sigma^q = (\sigma_s^q, \sigma_h^q) \in L^\infty(t_0, T; W) \times L^\infty(t_0, T; W)$  mit  $\dot{\sigma}_s^q, \dot{\sigma}_h^q \in L^2(t_0, T; W)$ ,  $v_q \in L^{\frac{q}{q-1}}(t_0, T; [H^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega)]^3)$  und  $\psi_q = (\psi_s^q, \psi_h^q) \in L^{\frac{q}{q-1}}(t_0, T; [L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)]^{3 \times 3}) \times L^{\frac{q}{q-1}}(t_0, T; [L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)]^{3 \times 3})$ , so daß

- $\bar{\sigma}_i^q \xrightarrow{*} \sigma_i^q$  \*-schwach in  $L^\infty(t_0, T; W)$ ,
- $\tilde{\sigma}_i^q \rightarrow \sigma_i^q$  schwach in  $H^{1,2}(t_0, T; W)$ ,
- $\frac{|(\bar{\sigma}_i^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_i^q)^D}{\bar{\mu}_i^{q-1}} \rightarrow \psi_i^q$  schwach in  $L^{\frac{q}{q-1}}(t_0, T; [L^{\frac{q}{q-1}}(\Omega)]^{3 \times 3})$ ,
- $\bar{v}^q \rightarrow v^q$  schwach in  $L^{\frac{q}{q-1}}(t_0, T; [H^{1, \frac{q}{q-1}}(\Omega)]^3)$ ,

wobei  $i$  für  $s$  oder  $h$  steht. Die vorletzte Konvergenzaussage folgt aus dem Beweis der Ungleichung (81), weil man aus einer Zwischenrechnung die Abschätzung (88), genauer  $\int_{t_1}^T \int_{\Omega} \frac{|(\bar{\sigma}_i^q)^D|^{q-1}}{\bar{\mu}_i^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi \leq C$  schließt. Die letzte schwache Konvergenz hat man aus (79) nach der Ungleichung von Korn. Daneben sei noch bemerkt, daß

$$\bar{\alpha} \bar{\sigma}_s^q + (1 - \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_h^q \xrightarrow{*} \alpha \sigma_s^q + (1 - \alpha) \sigma_h^q.$$

\*-schwach in  $L^\infty(t_0, T; W)$ . Denn  $\alpha$  ist eine Lipschitz-stetige Funktion, also  $|\bar{\alpha} - \alpha|(t) \leq Ck, \forall t \in [t_0, T]$ . So gilt

$$\|\bar{\alpha} \bar{\sigma}_s^q + (1 - \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_h^q - \alpha \sigma_s^q + (1 - \alpha) \sigma_h^q\|_W \leq Ck(\|\bar{\sigma}_s^q\|_W + \|\bar{\sigma}_h^q\|_W) \rightarrow 0, k \rightarrow 0.$$

Außerdem folgt aus  $\tilde{\sigma}_i^q \rightarrow \sigma_i^q$  in  $H^{1,2}(t_0, T; W)$  und aus der Stetigkeit von  $f$  und  $g$  bezüglich  $t \in I$ , daß

$$(\alpha \sigma_s^q + (1 - \alpha) \sigma_h^q)(t) \in H_{f(t), g(t)}^{div}(\Omega) \quad \text{für fast alle } t \in I. \quad (92)$$

Das nächste Ziel ist zu zeigen, daß die Funktion  $\psi_i^q$  genau die Form  $\frac{|(\sigma_i^q)^D|^{q-2}(\sigma_i^q)^D}{\mu_i^{q-1}}$  hat, dann könnten wir zum Limes in (79) bei  $k \rightarrow 0$  übergehen und würden

$$(A\dot{\sigma}_s^q + \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2}(\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, \tau)(t) = (A\dot{\sigma}_h^q + \frac{|(\sigma_h^q)^D|^{q-2}(\sigma_h^q)^D}{\mu_h^{q-1}}, \tau)(t) = 0 \quad (93)$$

$\forall \tau \in L^\infty(t_0, T; H_{0,0}^{div}(\Omega))$  bekommen.

**Behauptung 3.18:** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt:*

$$\psi_i^q(t, x) = \frac{|(\sigma_i^q)^D|^{q-2}(\sigma_i^q)^D}{\mu_i^{q-1}}(t, x).$$

**Beweis:** Für fast überall erklärte Funktion  $\sigma_i^q \in L^\infty(t_0, T; W) \cap H^{1,2}(t_0, T; W)$  und für  $t \in (t_{n-1}, t_n]$  definieren wir die Abbildung

$$\bar{\sigma}_i^q(t, x) := \frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_i^q(\xi, x) d\xi$$

und konstruieren mit ihrer Hilfe die Funktion  $\bar{\sigma}_i^q|_{(t_{n-1}, t_n]}$  analog zu dem, wie  $\bar{\sigma}_i^q$  aus  $\bar{\sigma}_i^q$  konstruiert wurde.

Die Folge  $(\bar{\sigma}_i^q)$  konvergiert stark gegen  $\sigma_i^q$  in  $H^{1,2}(t_0, T; W)$   $k \rightarrow 0$ ;  $(\bar{\sigma}_i^q)^D \rightarrow (\sigma_i^q)^D$  in  $L^q(t_0, T, W)$ .

Nun multiplizieren wir die "weiche Version" der Gleichung (79) mit  $(\bar{\sigma}_s^q - \bar{\sigma}_s^q)(\xi + k)$ , die "harte" - mit  $(\bar{\sigma}_h^q - \bar{\sigma}_h^q)(\xi + k)$  und bilden die lineare Kombination dieser Relationen mit Koeffizienten  $\bar{\alpha}(\xi + k)$  und  $1 - \bar{\alpha}(\xi + k)$ :

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha}(\xi + k)(A\dot{\bar{\sigma}}_s^q(\xi) + \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}(\xi + k), (\bar{\sigma}_s^q - \bar{\sigma}_s^q)(\xi + k)) \\ & + (1 - \bar{\alpha}(\xi + k))(A\dot{\bar{\sigma}}_h^q(\xi) + \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}(\xi + k), (\bar{\sigma}_h^q - \bar{\sigma}_h^q)(\xi + k)) \\ & = (\varepsilon(\bar{v}^q), \bar{\alpha}(\bar{\sigma}_s^q - \bar{\sigma}_s^q) + (1 - \bar{\alpha})(\bar{\sigma}_h^q - \bar{\sigma}_h^q))(\xi + k). \end{aligned}$$

Mit einer Nulladdition, Teilen der gesamten Formel durch  $1 - \bar{\alpha}(\xi + k) \neq 0$  und Integrieren von  $t_0$  bis  $T - k$  folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}(\xi + k)(A(\dot{\bar{\sigma}}_s^q(\xi) - \dot{\bar{\sigma}}_s^q(\xi + k)), \bar{\sigma}_s^q(\xi) - \bar{\sigma}_s^q(\xi + k)) d\xi \\ & + \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}(\xi + k)(\frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, \bar{\sigma}_s^q - \bar{\sigma}_s^q)(\xi + k) d\xi \\ & + \int_{t_0}^{T-k} (A(\dot{\bar{\sigma}}_h^q(\xi) - \dot{\bar{\sigma}}_h^q(\xi + k)), \bar{\sigma}_h^q(\xi) - \bar{\sigma}_h^q(\xi + k)) d\xi \\ & + \int_{t_0}^{T-k} (\frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2}(\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, \bar{\sigma}_h^q - \bar{\sigma}_h^q)(\xi + k) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}(\xi+k)(A\dot{\tilde{\sigma}}_s^{\mathbf{q}}(\xi+k), \tilde{\sigma}_s^q(\xi) - \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}}(\xi+k)) d\xi \\
&+ \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}(\xi+k)(A\dot{\tilde{\sigma}}_s^q(\xi), \tilde{\sigma}_s^q(\xi) - \bar{\sigma}_s^q(\xi+k)) d\xi \\
&- \int_{t_0}^{T-k} (A\dot{\tilde{\sigma}}_h^{\mathbf{q}}(\xi+k), \tilde{\sigma}_h^q(\xi) - \tilde{\sigma}_h^{\mathbf{q}}(\xi+k)) d\xi + \int_{t_0}^{T-k} (A\dot{\tilde{\sigma}}_h^q(\xi), \tilde{\sigma}_h^q(\xi) - \bar{\sigma}_h^q(\xi+k)) d\xi \\
&+ \int_{t_0}^{T-k} (\varepsilon(\bar{v}^q), \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}(\bar{\sigma}_s^q - \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}}) + (\bar{\sigma}_h^q - \tilde{\sigma}_h^{\mathbf{q}}))(\xi+k) dt. \tag{94}
\end{aligned}$$

Jeder Summand auf der rechten Seite geht zu 0, denn:

1. Wegen der starken Konvergenz von  $\tilde{\sigma}_i^{\mathbf{q}} \rightarrow \sigma_i^{\mathbf{q}}$  in  $H^{1,2}(t_0, T; W)$ , schwachen von  $\tilde{\sigma}_i^q \rightharpoonup \sigma_i^{\mathbf{q}}$  bei  $k \rightarrow 0$  und wegen Stetigkeit des Shiftoperators gilt:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \int_{t_0}^{T-k} (A\dot{\tilde{\sigma}}_i^{\mathbf{q}}(\xi+k), \tilde{\sigma}_i^q(\xi) - \tilde{\sigma}_i^{\mathbf{q}}(\xi+k)) d\xi = 0.$$

2. Für den zweiten und vierten Term kann man eine obere Schranke angeben, die gegen 0 konvergiert, wenn  $k \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{T-k} (A\dot{\tilde{\sigma}}_i^q(\xi), \tilde{\sigma}_i^q(\xi) - \bar{\sigma}_i^q(\xi+k)) d\xi \\
&\leq C \sqrt{\int_{t_0}^{T-k} \|\dot{\tilde{\sigma}}_i^q(\xi)\|^2 d\xi} \sqrt{\int_{t_0}^{T-k} \|\tilde{\sigma}_i^q(\xi) - \bar{\sigma}_i^q(\xi+k)\|^2 d\xi}.
\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (89) und Formel (78) gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{T-k} (A\dot{\tilde{\sigma}}_i^q(\xi), \tilde{\sigma}_i^q(\xi) - \bar{\sigma}_i^q(\xi+k)) d\xi &\leq C \sqrt{\int_{t_0}^{T-k} \|\dot{\tilde{\sigma}}_i^q(\xi)(k([\frac{\xi}{k}] + 1) - \xi)\|^2 d\xi} \\
&\leq Ck,
\end{aligned}$$

wobei wir bei der letzten Ungleichung erneut die Abschätzung (89) angewendet haben.

3. Wir behandeln den letzten Term. Integriert man die Divergenzbedingung (92) von  $t_{n-1}$  bis  $t_n$  und teilt man dieses Integral durch  $k$ , so folgt

$$\frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha \sigma_s^{\mathbf{q}}(\xi, x) + (1-\alpha) \sigma_h^{\mathbf{q}}(\xi, x) d\xi \in H_{\hat{f}(t), \hat{g}(t)}^{div}(\Omega),$$

wobei  $\hat{f}(t) := \frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\xi) d\xi$ ,  $\forall t \in [t_{n-1}, t_n)$ ,  $\hat{f}(T) := \hat{f}(t_{N-1})$ ,  $\hat{g}(t)$  wird analog definiert.

Nun kann man schreiben:

$$\frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \alpha \sigma_s^{\mathbf{q}}(\xi, x) d\xi = \frac{1}{k} \alpha_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} \sigma_s^{\mathbf{q}}(\xi, x) d\xi + \frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\alpha - \alpha_n) \sigma_s^{\mathbf{q}}(\xi, x) d\xi.$$

Das gleiche gilt auch für den harten Anteil. Dies bedeutet, daß für  $t \in [t_{n-1}, t_n)$

$$\frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\alpha - \alpha_n) \sigma_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(\xi) + (\alpha_n - \alpha) \sigma_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(\xi) d\xi + (\bar{\alpha} \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}} + (1 - \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}})(t) \in H_{\hat{f}(t), \hat{g}(t)}^{\text{div}}(\Omega). \quad (95)$$

Jetzt schauen wir uns den Ausdruck  $\bar{\alpha} \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}} + (1 - \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}$  an. Für jedes  $t \in [t_{n-1}, t_n)$  gibt es ein  $l \in [0; 1)$ , so daß  $t = lt_n + (1 - l)t_{n-1}$ . Dann gilt nach Definition:

$$\begin{aligned} & \bar{\alpha} \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t) + (1 - \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t) \\ &= \bar{\alpha}(t)(l \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t+k) + (1-l) \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t)) + (1-\bar{\alpha})(t)(l \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t+k) + (1-l) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t)) \\ &= (1-l)(\bar{\alpha}(t) \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t) + (1-\bar{\alpha})(t) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t)) \\ &+ l(\bar{\alpha}(t+k) \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t+k) + (1-\bar{\alpha})(t+k) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t+k)) \\ &+ l((\bar{\alpha}(t) - \bar{\alpha}(t+k)) \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t+k) + (\bar{\alpha}(t+k) - \bar{\alpha}(t)) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t+k)). \end{aligned}$$

Aus der Lipschitz-Stetigkeit von  $\alpha$ ,  $\sigma_i^{\mathbf{q}} \in L^\infty(t_0, T, W)$ ,  $i = s$  oder  $h$ , aus (95) und mit Bezeichnung  $\hat{f}(t) = lf(t_n) + (1-l)\hat{f}(t_{n-1})$ ,  $t = lt_n + (1-l)t_{n-1}$ ,  $l \in [0; 1)$  folgt:  $\exists \zeta_k^q : I \rightarrow W$ ,  $\zeta_k^q \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ :

$$\zeta_k^q(t) + \bar{\alpha} \bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^{\mathbf{q}}(t) + (1 - \bar{\alpha}) \bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^{\mathbf{q}}(t) \in H_{\hat{f}(t), \hat{g}(t)}^{\text{div}}(\Omega) \text{ für fast alle } t \in I.$$

Damit liefert die partielle Integration:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T-k} (\varepsilon(\bar{v}^q), \frac{\bar{\alpha}(\bar{\sigma}_{\mathbf{s}}^q - \tilde{\sigma}_{\mathbf{s}}^q) + (1-\bar{\alpha})(\bar{\sigma}_{\mathbf{h}}^q - \tilde{\sigma}_{\mathbf{h}}^q)}{1-\bar{\alpha}})(\xi+k) d\xi - \int_{t_0}^{T-k} (\varepsilon(\bar{v}^q), \zeta_k^q)(\xi) d\xi \\ &= \int_{t_0}^{T-k} \frac{(\bar{v}^q, \bar{f} - \tilde{f})}{1-\bar{\alpha}}(\xi+k) d\xi + \int_{t_0}^{T-k} \frac{(\bar{v}^q, \bar{g} - \tilde{g})_{\Gamma_N}}{1-\bar{\alpha}}(\xi+k) d\xi \\ &\leq C \int_{t_0}^{T-k} (\|\bar{f} - \tilde{f}\|_{L^q(\Omega)}(\xi+k) + \|\bar{g} - \tilde{g}\|_{L^q(\Gamma_N)}(\xi+k)) d\xi \end{aligned}$$

nach der Korn'schen Ungleichung, wobei  $\bar{f}(t) := f(t_{n-1}) \forall t \in [t_{n-1}, t_n)$ .

Ferner schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T-k} (\|\bar{f} - \tilde{f}\|_{L^q(\Omega)}(\xi+k)) \leq \int_{t_0}^{T-k} (\|\bar{f} - \hat{f}\|_{L^q(\Omega)} + \|\hat{f} - \tilde{f}\|_{L^q(\Omega)})(\xi+k) d\xi \\ &\leq \int_{t_0}^{T-k} \|\bar{f} - \hat{f}\|_{L^q(\Omega)}(\xi+k) d\xi + \int_{t_0}^{T-2k} \|\hat{f}(\xi+k) - \hat{f}(\xi+2k)\|_{L^q(\Omega)} d\xi \\ &\leq \int_{t_0}^{T-k} \|\bar{f} - \hat{f}\|_{L^q(\Omega)}(\xi+k) + \|\hat{f} - f\|_{L^q(\Omega)}(\xi) \\ &+ \|f(\xi) - f(\xi+k)\|_{L^q(\Omega)} + \|\hat{f} - f\|_{L^q(\Omega)}(\xi+k) d\xi \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

denn nach Differentiationssatz von Lebesgue und dank der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f$  auf  $[t_0; T]$  konvergiert jeder Summand gegen 0.<sup>6</sup> Für "g"-Term gilt

<sup>6</sup>In der letzten Rechnung wurde das Integrationsintervall  $[t_0+k; T-k]$ , das durch die Substitution zustande kommt, durch die größere Menge  $[t_0; T-k]$  ersetzt, denn der Integrand ist nicht-negativ. Die Konvergenz gilt bis zur oberen Grenze, da z. B.  $\int_{T-\varepsilon}^T \|f - \hat{f}\|_{L^q(\Omega)}^q(\xi) d\xi \rightarrow 0$  bei  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

eine analoge Ungleichungskette. Es ist auch klar, daß  $\int_{t_0}^{T-k} (\varepsilon(\bar{v}^q), \zeta_k^q)(\xi) d\xi \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ .

So sieht man aus (94), daß

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi+k) (A(\dot{\tilde{\sigma}}_s^q(\xi) - \dot{\tilde{\sigma}}_s^{\mathbf{q}}(\xi+k)), \tilde{\sigma}_s^q(\xi) - \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}}(\xi+k)) d\xi \\ & + \int_{t_0}^{T-k} (A(\dot{\tilde{\sigma}}_h^q(\xi) - \dot{\tilde{\sigma}}_h^{\mathbf{q}}(\xi+k)), \tilde{\sigma}_h^q(\xi) - \tilde{\sigma}_h^{\mathbf{q}}(\xi+k)) d\xi \\ & + \int_{t_1}^T \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D \right) + \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, (\bar{\sigma}_h^q)^D \right) d\xi \\ & = \int_{t_1}^T \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, (\tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}})^D \right) + \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, (\tilde{\sigma}_h^{\mathbf{q}})^D \right) d\xi. \end{aligned}$$

Da wir die Anfangswerte  $\sigma(t_0, x) = (\sigma_s^{q0}, \sigma_h^{q0})$  vorgeben, gilt

$$\int_{t_0}^{T-k} (A(\dot{\tilde{\sigma}}_h^q(\xi) - \dot{\tilde{\sigma}}_h^{\mathbf{q}}(\xi+k)), \tilde{\sigma}_h^q(\xi) - \tilde{\sigma}_h^{\mathbf{q}}(\xi+k)) d\xi > 0.$$

Jetzt kann  $\underline{\lim}$  bei  $k \rightarrow 0$  (entspricht  $N \rightarrow \infty$ ) auf den beiden Seiten gebildet werden.  $\underline{\lim}$  des ersten Summandes ist nicht-negativ, denn:

$$\begin{aligned} & \underline{\lim} \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi+k) (A\dot{\tilde{\sigma}}_s^q, \tilde{\sigma}_s^q)(\xi) d\xi \\ & = \underline{\lim} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi+k) \frac{(A\tilde{\sigma}_s^q, \tilde{\sigma}_s^q)(\xi)}{2} \Big|_{t_0}^{T-k} + \underline{\lim} \sum_{n=0}^{N-2} \underbrace{\left( \frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_{n+2}} \right)}_{\geq 0} \frac{(A\tilde{\sigma}_s^q, \tilde{\sigma}_s^q)}{2}(t_n) \\ & \geq \underline{\lim} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi+k) \frac{(A\tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}})(\xi)}{2} \Big|_{t_0}^{T-k} + \underline{\lim} \sum_{n=0}^{N-2} \left( \frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}} - \frac{\alpha_{n+2}}{1-\alpha_{n+2}} \right) \frac{(A\tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}})}{2}(t_n) \\ & = \underline{\lim} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\alpha_{n+1}}{1-\alpha_{n+1}} (A\dot{\tilde{\sigma}}_s^{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}})(\xi) d\xi \\ & = \underline{\lim} \int_{t_0}^{T-k} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi+k) (A\dot{\tilde{\sigma}}_s^{\mathbf{q}}, \tilde{\sigma}_s^{\mathbf{q}})(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} & \underline{\lim} \int_{t_1}^T \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi) \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D \right) (\xi) d\xi + \int_{t_1}^T \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, (\bar{\sigma}_h^q)^D \right) (\xi) d\xi \\ & \leq \int_{t_0}^T \frac{\alpha}{1-\alpha} (\xi) (\psi_s^q, (\sigma_s^{\mathbf{q}})^D) (\xi) d\xi + \int_{t_0}^T (\psi_h^q, (\sigma_h^{\mathbf{q}})^D) (\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Weil man aus Monotonie-Gründen für alle  $\tau_s$  mit  $\tau_s^D \in L^q(t_0, T; L_{sym}^q(\Omega))$

$$0 \leq \underline{\lim} \int_{t_1}^T \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi) \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}} - \frac{|\tau_s^D|^{q-2} \tau_s^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D - \tau_s^D \right) (\xi) d\xi$$

hat und eine ähnliche Ungleichung für den Index  $h$ , gilt

$$\begin{aligned}
0 &\leq \underline{\lim} \int_{t_1}^T \frac{\bar{\alpha}}{1 - \bar{\alpha}}(\xi) \left( \frac{|(\bar{\sigma}_s^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}} - \frac{|\tau_s^D|^{q-2} \tau_s^D}{\mu_s^{q-1}}, (\bar{\sigma}_s^q)^D - \tau_s^D \right)(\xi) \\
&+ \left( \frac{|(\bar{\sigma}_h^q)^D|^{q-2} (\bar{\sigma}_h^q)^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}} - \frac{|\tau_h^D|^{q-2} \tau_h^D}{\bar{\mu}_h^{q-1}}, (\bar{\sigma}_h^q)^D - \tau_h^D \right)(\xi) d\xi \\
&\leq \int_{t_0}^T \frac{\alpha}{1 - \alpha}(\xi) \left( \psi_s^q - \frac{|\tau_s^D|^{q-2} \tau_s^D}{\mu_s^{q-1}}, (\sigma_s^q)^D - \tau_s^D \right)(\xi) \\
&+ \left( \psi_h^q - \frac{|\tau_h^D|^{q-2} \tau_h^D}{\mu_h^{q-1}}, (\sigma_h^q)^D - \tau_h^D \right)(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Wir setzen  $\tau_h := \sigma_h^q$ . Das ist eine mögliche Wahl aufgrund einer Analogie zu (88) für den harten Anteil. Wegen der maximalen Monotonie von  $\frac{|x^D|^{q-2} x^D}{\mu_s^{q-1}}$  ist:

$$\psi_s^q = \frac{|(\sigma_s^q)^D|^{q-2} (\sigma_s^q)^D}{\mu_s^{q-1}}.$$

□

### 3.2.4 $L^\infty(I, H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta})$ -Regularität

Diese Eigenschaft der Lösung vom quasistatischen elastoplastischen Problem ist eine Direkte Analogie der entsprechenden Aussage über die Lösung des statischen Problems (s. Section 3.1.5).

**Behauptung 3.19:** *Sei  $\nabla f \in L^2(I, [L^2(\Omega)]^3)$  und es mögen die gleichen Voraussetzungen wie zuvor gelten. Dann gilt  $\forall \delta > 0$ :*

$$\begin{aligned}
&2k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \alpha(t) \theta(x) A D_l^k \dot{\sigma}_s(t, x) : D_l^k \sigma_s(t, x) + (1 - \alpha(t)) \theta(x) A D_l^k \dot{\sigma}_h(t, x) : D_l^k \sigma_h(t, x) dx \\
&\leq k^{1+2\delta} \int_{\Omega} 2\theta(x) D_l^k u_j(t, x) D_l^k f_j(t, x) \\
&+ D_l^{-k} D_l^k u_j(t, x) D_i \theta(x - ke_l) (\alpha(t) \sigma_s(t, x) + (1 - \alpha(t)) \sigma_h(t, x))_{ij} \\
&+ D_l^k D_l^k u_j(t, x) D_i \theta(x + ke_l) (\alpha(t) \sigma_s(t, x + ke_l) + (1 - \alpha(t)) \sigma_h(t, x + ke_l))_{ij} \\
&+ D_l^k u_j(t, x) D_l^{-k} D_i \theta(x) (\alpha(t) \sigma_s(t, x) + (1 - \alpha(t)) \sigma_h(t, x))_{ij} \tag{96} \\
&+ D_l^k u_j(t, x) D_l^k D_i \theta(x) (\alpha(t) \sigma_s(t, x + ke_l) + (1 - \alpha(t)) \sigma_h(t, x + ke_l))_{ij} dx.
\end{aligned}$$

Hierbei ist  $(\sigma_s, \sigma_h) := (\sigma_s^q, \sigma_h^q)$  der Limes der zeitdiskreten Norton-Hoff Spannungen ( $k \rightarrow 0$ ) und  $\theta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine genügend glatte Funktion mit kompaktem Träger.

**Beweis:** Betrachten wir die Gleichungen (93) in der starken Formulierung:

$$A\dot{\sigma}_i + \frac{|\sigma_i^D|^{q-2}\sigma_i^D}{\mu_i^{q-1}} = \varepsilon(u), \quad i = s \text{ oder } h.$$

Nach dem gleichen Schema wie in der Behauptung 3.11 werden diese Gleichungen mit  $-k^{1+2\delta}D_l^{-k}(\theta D_l^k \sigma_i)$  skalar multipliziert und konvex kombiniert. Die rechte Seite des so entstandenen Ausdruckes stimmt mit (71) überein, die linke hat nach Ausführen von der partiellen Integration einen anderen Term:

$$\alpha(t)\theta(x)AD_l^k\dot{\sigma}_s(t, x) : D_l^k\sigma_s(t, x) + (1 - \alpha(t))\theta(x)AD_l^k\dot{\sigma}_h(t, x) : D_l^k\sigma_h(t, x).$$

Den Rest behandeln wir wie im statischen Fall.  $\square$

**Satz 3.20:** Die Lösung  $\sigma^{\mathbf{q}} = (\sigma_s^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}})$  der Gleichungen (93) ist  $L^\infty(t_0, T; [H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)]^{3 \times 3}) \times L^\infty(t_0, T; [H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)]^{3 \times 3})$  - regulär, falls für den Deformationsanfang die Inklusionen  $\sigma_s^{\mathbf{q}}(t_0) = \sigma_s^{q_0} \in [H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)]^{3 \times 3}$  und  $\sigma_h^{\mathbf{q}}(t_0) = \sigma_h^{q_0} \in [H_{loc}^{\frac{1}{2}-\delta}(\Omega)]^{3 \times 3}$  gelten.

**Beweis:** Sei  $t \in I$ . Wir teilen die Relation (96) durch  $1 - \alpha(t)$  und integrieren sie danach von  $t_0$  bis  $t$ . Aus dem Satz 3.13 und aus den Abschätzungen der vorigen Behauptungen ist die rechte Seite von (96) durch eine Konstante beschränkt. Mit  $p$  und  $r$  aus dem Satz 3.13 gilt z.B.

$$\begin{aligned} & |k^{1+2\delta} \int_I \int_\Omega \frac{D_l^{-k} D_l^k u_j^{\mathbf{q}}(t, x) D_i \theta(x) (\alpha(t) \sigma_s^{\mathbf{q}}(t, x) + (1 - \alpha(t)) \sigma_h^{\mathbf{q}}(t, x))_{ij}}{1 - \alpha(t)} dx dt| \\ & \leq C \int_I \frac{1}{1 - \alpha(t)} \|k^{2\delta} D_l^k u_j^{\mathbf{q}}\|_{\frac{p}{r+p}}(t) \|\alpha \sigma_s^{\mathbf{q}} + (1 - \alpha) \sigma_h^{\mathbf{q}}\|_{\frac{r+p}{r}}(t) dt \\ & \leq C \|k^{2\delta} D_l^k u_j^{\mathbf{q}}\|_{L^1(I, L^{\frac{r+p}{p}}(\Omega))} \|\alpha \sigma_s^{\mathbf{q}} + (1 - \alpha) \sigma_h^{\mathbf{q}}\|_{L^\infty(I, L^{\frac{r+p}{r}}(\Omega))} \\ & \leq C \end{aligned}$$

nach (97) unten.

Links entstehen die ähnlichen Ausdrücke, wie beim Beweis der Behauptung 3.16, die auch auf die gleiche Weise integriert werden:

$$\int_{t_0}^t 2k^{1+2\delta} \int_\Omega \theta AD_l^k \dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_h^{\mathbf{q}} dx d\xi = k^{1+2\delta} \int_\Omega \theta AD_l^k \sigma_h^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_h^{\mathbf{q}} dx \Big|_{t_0}^t.$$

Da  $\frac{\alpha}{1-\alpha}(t)$  nicht unbedingt differenzierbar ist, betrachten wir für das obige  $k > 0$  wieder die Unterteilung  $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_N = T$ ,  $t_n - t_{n-1} = k$ , und die damit assoziierte Funktion  $\frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}(t)$ .  $(\frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}})'(t) = 0$  für  $t \in (t_{n-1}, t_n)$ . Außerdem gilt  $\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} > -Ck$  wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $\alpha$ . Den "s-Term" behandeln wir folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t 2k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}} dx \\
&= \int_{t_0}^t 2k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \right) \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}} dx \\
&+ 2k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}} dx d\xi \\
&\geq -Ck^{2\delta} + k^{1+2\delta} \left( \int_{\Omega} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}} dx \Big|_{t_0}^t \right. \\
&+ \left. \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \left( \frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \right) \int_{\Omega} \theta(t_n, x) AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}(t_n, x) : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}}(t_n, x) dx \right).
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung kann man den Ausdruck an der unteren Intervallgrenze gegen eine Konstante abschätzen:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^t 2k^{1+2\delta} \left( \int_{\Omega} \frac{\alpha}{1-\alpha} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}} dx + \int_{\Omega} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_h^{\mathbf{q}} dx \right) d\xi \\
&\geq k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}} dx \Big|_{t_0}^t + k^{1+2\delta} \int_{\Omega} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}} : D_l^k \sigma_h^{\mathbf{q}} dx \Big|_{t_0}^t - C \\
&\geq Ck^{1+2\delta} \int_{\Omega} \theta AD_l^k \dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}(t, x) : D_l^k \sigma_s^{\mathbf{q}}(t, x) + \theta AD_l^k \dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}(t, x) : D_l^k \sigma_h^{\mathbf{q}}(t, x) dx - C.
\end{aligned}$$

□

### 3.2.5 Lösbarkeit des Prandtl-Reuss Modells

Der letzte Teil des Existenzbeweises besteht im Limesübergang bei  $q \rightarrow \infty$  in der Gleichung (93). Es wird sich herausstellen, daß der Grenzwert der Funktionen  $\sigma_i^{\mathbf{q}}$  genau die Lösung des Prandtl-Reuss Modells ist.

Bevor wir den Hauptsatz beweisen, fassen wir zusammen, welche Konvergenzaussagen man aus den bisher gezeigten Abschätzungen folgern kann.

Die Konstante  $C$  in (80), (89) und (90) ist von der Schrittweite  $k$  unabhängig, demzufolge gelten diese Abschätzungen für den schwachen Grenzwert  $\sigma^{\mathbf{q}} = (\sigma_s^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}})$ . Sie liefern eine Schranke im  $H^{1,2}(t_0, T; W) \times H^{1,2}(t_0, T; W)$ -Raum für die Folge  $(\sigma^{\mathbf{q}})_{q \in \mathbb{N}} : \|\sigma_i^{\mathbf{q}}\|_{H^{1,2}(t_0, T, W)} \leq C$ ,  $i$  bezeichne  $s$  oder  $h$ ,  $W = [L^2(\Omega)]_{sym}^{3 \times 3}$ .

Eine Konsequenz dieser Abschätzungen besteht darin, daß ein  $\sigma = (\sigma_s, \sigma_h)$  existiert mit

$$\sigma_i^{\mathbf{q}} \rightharpoonup \sigma_i \text{ schwach in } H^{1,2}(t_0, T; W).$$

Außerdem ist die Folge  $((\sigma_s^{\mathbf{q}})^D, (\sigma_h^{\mathbf{q}})^D)_{q \in \mathbb{N}}$  beschränkt in  $L^\infty(t_0, T; L_{sym}^p(\Omega))$ -Norm, für jedes feste  $p > 0$ , denn die Ungleichung (90) für  $\sigma_i^{\mathbf{q}}$  zeigt, daß  $\|(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D\|_{L^q(\Omega)} \leq C$ . Somit ist auch

$$\left( \int_{\Omega} |(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_{\Omega} |(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|^{p \frac{q}{q-p}} dx \right)^{\frac{p}{q-p}} |\Omega|^{\frac{q-p}{q-p}} \leq C.$$



In Analogie zur Bemerkung 3.7 für das Prandtl-Reuss Modell folgt aus der Behauptung 3.3, daß auch die Folge  $(\sigma_i^{\mathbf{q}})_{q \in \mathbb{N}}$  in  $L^\infty(t_0, T; L^p_{sym}(\Omega))$  beschränkt ist. So kann man eine Teilfolge von  $(\sigma^{\mathbf{q}})_{q \in \mathbb{N}} = ((\sigma_s^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}}))_{q \in \mathbb{N}}$  wählen, die nach Umnummerierung wieder mit  $(\sigma^{\mathbf{q}})_{q \in \mathbb{N}}$  bezeichnet wird, für die gilt:

$$\sigma_i^{\mathbf{q}} \xrightarrow{*} \sigma_i \quad \text{schwach } * \text{ in } L^\infty(t_0, T; L^p_{sym}(\Omega)). \quad (97)$$

**Satz 3.21:** *Unter den Voraussetzungen und Annahmen dieses Kapitels existiert genau ein Paar  $(\sigma_s, \sigma_h) \in H^{1,2}(t_0, T, W) \times H^{1,2}(t_0, T, W)$  mit  $|\sigma_s^D(t, x)| \leq \mu_s$ ,  $|\sigma_h^D(t, x)| \leq \mu_h(t)$  f. ü. auf  $I \times \Omega$ ,  $\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h \in H^{div}_{f,g}(\Omega)$ ,  $\sigma_s(t_0) = \sigma_s^0$ ,  $\sigma_h(t_0) = \sigma_h^0$ , so daß*

$$\alpha(A\dot{\sigma}_s, \psi_s - \sigma_s) + (1-\alpha)(A\dot{\sigma}_h, \psi_h - \sigma_h) \geq 0 \quad \text{f.ü. auf } I \quad (98)$$

$\forall \psi = (\psi_s, \psi_h) \in L^2(t_0, T; W) \times L^2(t_0, T; W)$ , mit  $|\psi_s^D| \leq \mu_s$ ,  $|\psi_h^D| \leq \mu_h$ ,  $\alpha\psi_s + (1-\alpha)\psi_h \in H^{div}_{f,g}(\Omega)$  für fast alle  $t \in I$ ,  $x \in \Omega$ .

**Beweis:** Der Beweis dieses Satzes wird in zwei Schritten verlaufen. Als erstes zeigen wir die Konvergenz

$$\sigma_i^{\mathbf{q}} \rightarrow \sigma_i \quad \text{stark in } L^\infty(t_0, T; W). \quad (99)$$

Hieraus wird die Prandtl-Reuss-Variationsungleichung (98) gefolgert.

Für (99) brauchen wir drei folgende Abschätzungen:

1.  $|(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|(t, x) \leq \mu_i(t)$  f.ü. auf  $I \times \Omega$ .

Angenommen, daß es für  $t \in I$  ein  $\delta > 0$  und eine Teilmenge  $M_\delta \subset \Omega$ , mit  $|M_\delta| > 0$  gibt, so daß

$$\forall x \in M_\delta : |(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|(t, x) \geq \mu_i(t) + \delta.$$

Das würde der Relation (90) widersprechen, denn

$$\frac{\mu_i(t)}{q} \left( \frac{\mu_i(t) + \delta}{\mu_i(t)} \right)^q |M_\delta| \leq \frac{1}{q\mu_i^{q-1}(t)} \int_{M_\delta} |(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|^q dx \leq C,$$

falls (90) für dieses  $t$  überhaupt zutrifft. Für  $i = h$  gilt  $0 < \mu_h(t) \leq \mu_h(T)$  und damit  $\frac{1}{q} \left(1 + \frac{\delta}{\mu_h(t)}\right)^q \geq \frac{1}{q} \left(1 + \frac{\delta}{\mu_h(T)}\right)^q \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow \infty$ .

2.  $|(\sigma_i)^D|(t, x) \leq \mu_i(t)$  f.ü. auf  $I \times \Omega$ .

Genau wie bei 1. führen wir einen Widerspruchsbeweis durch. Die Menge aller  $t \in I$ , für die es ein  $M(t) \subset \Omega$  mit  $|M(t)| > 0$  existiert, so daß

$$\forall x \in M(t) : |(\sigma_i)^D|(t, x) > \mu_i(t)$$

gilt, bezeichnen wir als  $I'$ .

Sei  $|I'| \neq 0$ . Wir wissen schon, daß

$$\frac{(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D}{\mu_i(t)} \rightharpoonup \frac{(\sigma_i)^D}{\mu_i(t)} \quad \text{schwach in } H^{1,2}(I'; [L^2_{sym}(M_\delta)]^{3 \times 3}), \quad q \rightarrow \infty.$$

Das steht im Widerspruch zu

$$\begin{aligned} \int_{I'} \int_{M(\xi)} 1 \, dx \, d\xi &< \int_{I'} \int_{M(\xi)} \frac{|(\sigma_i)^D|^2}{\mu_i^2}(\xi, x) \, dx \, d\xi \\ &\leq \underline{\lim} \int_{I'} \int_{M(\xi)} \frac{|(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|^2}{\mu_i^2}(\xi, x) \, dx \, d\xi \\ &\leq \int_{I'} \int_{M(\xi)} 1 \, dx \, d\xi. \end{aligned}$$

3. Aus 2. folgt

$$\int_{t_0}^t \frac{\alpha}{1-\alpha}(\xi) \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) \, dx \, d\xi \leq C \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) \, dx \, d\xi \leq C.$$

Die gleiche Abschätzung gilt für  $h$ .

Ferner erfüllt  $\sigma = (\sigma_s, \sigma_h)$ , wegen der schwachen Konvergenz  $\sigma_i^{\mathbf{q}} \rightharpoonup \sigma_i$  in  $H^{1,2}(t_0, T; W)$ , die Divergenzbedingung:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h) &= f \\ (\alpha\sigma_s + (1-\alpha)\sigma_h)|_{\Gamma_N} \mathbf{n} &= g. \end{aligned}$$

Deshalb können wir (93) mit  $(\sigma_s - \sigma_s^{\mathbf{q}}, \sigma_h - \sigma_h^{\mathbf{q}})$  testen. Genau wie in mehreren vorangegangenen Beweisen teilen wir anschließend den ganzen Ausdruck durch  $1 - \alpha(t)$ :

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} (A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} + \frac{|(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D|^{q-2}(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D}{\mu_s^{q-1}}, \sigma_s - \sigma_s^{\mathbf{q}}) + (A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}} + \frac{|(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D|^{q-2}(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D}{\mu_h^{q-1}}, \sigma_h - \sigma_h^{\mathbf{q}}) = 0.$$

Die Young'sche Ungleichung liefert:

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{1-\alpha} (A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) + \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D|^q}{\mu_s^{q-1}} \, dx + (A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h) + \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D|^q}{\mu_h^{q-1}} \, dx \\ &\leq \frac{\alpha}{1-\alpha} \int_{\Omega} \frac{(q-1)|(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D|^q + |\sigma_s^D|^q}{q\mu_s^{q-1}} \, dx + \int_{\Omega} \frac{(q-1)|(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D|^q + |\sigma_h^D|^q}{q\mu_h^{q-1}} \, dx, \end{aligned}$$

was äquivalent zu

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha}{1-\alpha} (A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) + (A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h) + \frac{\alpha}{(1-\alpha)q} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D|^q}{\mu_s^{q-1}} \, dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D|^q}{\mu_h^{q-1}} \, dx \\ &\leq \frac{\alpha}{(1-\alpha)q} \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}} \, dx + \frac{1}{q} \int_{\Omega} \frac{|\sigma_h^D|^q}{\mu_h^{q-1}} \, dx \end{aligned} \quad (100)$$

ist.

Diese Relation integrieren wir von  $t_0$  bis  $t$  und gehen zum Limes  $q \rightarrow \infty$  über. Zwei ersten Summanden werden mit Hilfe einer Nulladdition nur in den Termen  $\sigma_i^{\mathbf{q}} - \sigma_i$  ausgedrückt:

$$\begin{aligned} & \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{\alpha}{1-\alpha} (A(\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} - \dot{\sigma}_s), \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) \\ & + \frac{\alpha}{1-\alpha} (A\dot{\sigma}_s, \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) + (A(\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}} - \dot{\sigma}_h), \sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h) + (A\dot{\sigma}_h, \sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h) d\xi \\ & = \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \frac{\alpha}{1-\alpha} (A(\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} - \dot{\sigma}_s), \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) d\xi + \frac{1}{2} (A(\sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h), \sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h)(t) \end{aligned}$$

Da  $\frac{\alpha}{1-\alpha}(t)$  nicht differenzierbar ist, betrachten wir stattdessen die Funktion  $\frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}}(t)$  für ein beliebiges, aber festes  $k > 0$ , die verschwindende Ableitung in  $(t_{n-1}, t_n)$  hat und einen kontrollierbaren Sprung an den Intervallgrenzen macht. Wegen der Lipschitz-Stetigkeit von  $\alpha$  gilt  $\frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} > -Ck$ . So kann man abschätzen:

$$\begin{aligned} & \lim_{q \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left( \frac{\alpha}{1-\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} \right) (\xi) (A(\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} - \dot{\sigma}_s), \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) (\xi) \\ & + \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} (\xi) (A(\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} - \dot{\sigma}_s), \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) (\xi) d\xi \\ & \geq \lim_{q \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2(1-\alpha)} (t) (A(\sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s), \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s) (t) \\ & + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \underbrace{\left( \frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}} - \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \right)}_{>0} \frac{(A(\sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s), \sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s)(t_n)}{2} - Ck \end{aligned}$$

(vgl. den Beweis der Behauptung 3.20).

Insgesamt ist die linke Seite von (100) größer oder gleich als

$$-Ck + C \lim_{q \rightarrow \infty} \|\sigma_s^{\mathbf{q}} - \sigma_s\|^2(t) + \|\sigma_h^{\mathbf{q}} - \sigma_h\|^2(t) \geq 0$$

für jedes  $k > 0$ .

Der Grenzwert der rechten Seite von (100) nach der Integration ist 0, denn wir haben  $\int_{t_0}^t \frac{\alpha}{1-\alpha}(\xi) \int_{\Omega} \frac{|\sigma_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi, \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \frac{|\sigma_h^D|^q}{\mu_h^{q-1}}(\xi, x) dx d\xi \leq C$  gezeigt. Weil  $k$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt der erste Schritt der Behauptung, nämlich (99).

Für den Beweis von (98) wählen wir eine Funktion  $(\psi_s, \psi_h) \in H^{1,2}(t_0, T, W) \times H^{1,2}(t_0, T, W)$  mit  $\alpha\psi_s + (1-\alpha)\psi_h \in H_{f,g}^{div}(\Omega)$  und  $|\psi_i^D| \leq \mu_i, i = s$  oder  $h$ . Diesmal wird (93) mit  $(\psi_s - \sigma_s^{\mathbf{q}}, \psi_h - \sigma_h^{\mathbf{q}})$  getestet, was

$$\alpha(A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}} + \frac{|(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D|^{q-2}(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D}{\mu_s^{q-1}}, \psi_s - \sigma_s^{\mathbf{q}}) + (1-\alpha)(A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}} + \frac{|(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D|^{q-2}(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D}{\mu_h^{q-1}}, \psi_h - \sigma_h^{\mathbf{q}}) = 0$$

ergibt, woraus nach der Ungleichung von Young

$$\begin{aligned} \alpha(A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \sigma_s^{\mathbf{q}} - \psi_s) + (1 - \alpha)(A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}} - \psi_h) + \frac{\alpha}{q} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_s^{\mathbf{q}})^D|^q}{\mu_s^{q-1}} dx + \frac{1 - \alpha}{q} \int_{\Omega} \frac{|(\sigma_h^{\mathbf{q}})^D|^q}{\mu_h^{q-1}} dx \\ \leq \frac{\alpha}{q} \int_{\Omega} \frac{|\psi_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}} dx + \frac{1 - \alpha}{q} \int_{\Omega} \frac{|\psi_h^D|^q}{\mu_h^{q-1}} dx \end{aligned}$$

folgt. Weil diese Relation für fast alle  $t \in I$  gilt, kann sie von  $t - \varepsilon$  bis  $t + \varepsilon$  integriert und die linke Seite nach unten abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \alpha(A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \sigma_s^{\mathbf{q}} - \psi_s) + (1 - \alpha)(A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}} - \psi_h) d\xi \\ \leq \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \left\{ \frac{\alpha}{q} \int_{\Omega} \underbrace{\frac{|\psi_s^D|^q}{\mu_s^{q-1}}}_{\leq \mu_s} dx + \frac{1 - \alpha}{q} \int_{\Omega} \underbrace{\frac{|\psi_h^D|^q}{\mu_h^{q-1}}}_{\leq \mu_h} dx \right\} d\xi. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung liefert:

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{t-\varepsilon}^{t+\varepsilon} \alpha(A\dot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, \sigma_s^{\mathbf{q}} - \psi_s) + (1 - \alpha)(A\dot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}, \sigma_h^{\mathbf{q}} - \psi_h) d\xi \leq C\varepsilon$$

für genügend große  $q$ .

Läßt man nun  $\varepsilon$  gegen 0 laufen, erhält man (98) f. ü. auf  $I$ , denn  $\sigma_i^{\mathbf{q}} \rightarrow \sigma_i$  - stark in  $L^\infty(t_0, T; W)$ .

Die Eindeutigkeit wird mit einem Standardargument genau wie im statischen Fall gezeigt.  $\square$

## Teil II

# Numerik des Mischungsmodells

Nachdem wir im ersten Teil der vorliegenden Arbeit das elastoplastische Problem definiert haben und gezeigt haben, daß es eindeutig lösbar ist, wenden wir uns nun dem numerischen Verfahren zu, um eine Diskretisierung der Lösung zu erhalten. Folgend [32, 33, 28, 15] werden wir einen Algorithmus herleiten, der die Variationsungleichung (98) approximativ in eine nicht-lineare Differentialgleichung überführt. Das nicht-lineare Problem, das auf diese Weise zustande kommt, wird mit Newton-Verfahren approximiert. So entsteht eine Sequenz von linearen Problemen, die man mit vorkonditioniertem CG-Verfahren löst. Anschließend werden einige Möglichkeiten zum Erzeugen der adaptiv verfeinerten Gitter und zu Fehlerabschätzungen diskutiert.

## 4 Algorithmische Aspekte und Fehleranalyse

Im betrachteten Modell hängen die unbekanntenen Funktionen  $u$  und  $\sigma$  von der ein-dimensionalen Zeitvariabel  $t$  und von der  $dim$ -dimensionalen Ortsvariabel  $x$  ab, wobei wir entweder  $dim = 3$  oder  $dim = 2$  setzen. Daher ist sowohl eine Diskretisierung in  $t$  als auch in  $x$  erforderlich.

### 4.1 Zeitliche Diskretisierung

Im Kapitel 2 haben wir gesehen, daß für jede Mischungskomponente  $i = s$  oder  $h$  die Beziehung

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \varepsilon(v) - A\dot{\sigma}_i \quad (101)$$

gilt, mit  $\dot{\varepsilon}_i^p$  aus (50). Multipliziert man die Relation (50) mit  $\tau_i - \sigma_i$ , wobei  $\tau_i \in \Pi_i(W)$ ,<sup>7</sup> erhält man die folgende Ungleichung:

$$\dot{\varepsilon}_i^p : (\tau_i - \sigma_i) \stackrel{(33)}{\leq} 0.$$

Da diese Beziehung eine wichtige Rolle spielen wird, fassen wir sie mit (101) noch ein Mal als

$$\begin{cases} (A\dot{\sigma}_s - \varepsilon(v)) : (\tau_s - \sigma_s) \geq 0 & \forall \tau_s \in L^2(0, T; \Pi_s(W)) \\ (A\dot{\sigma}_h - \varepsilon(v)) : (\tau_h - \sigma_h) \geq 0 & \forall \tau_h \in L^2(0, T; \Pi_h(W)) \end{cases} \quad (102)$$

und

$$\begin{aligned} \alpha(A\dot{\sigma}_s, \tau_s - \sigma_s) + (1 - \alpha)(A\dot{\sigma}_h, \tau_h - \sigma_h) &\geq 0 \\ \forall (\tau_s, \tau_h) \in L^2(0, T; \Pi_s(W)) \times L^2(0, T; \Pi_h(W)), \alpha\tau_s + (1 - \alpha)\tau_h &\in H_{f,g}^{div}(\Omega) \end{aligned} \quad (103)$$

zusammen.

---

<sup>7</sup>Da  $\mu_h = \mu_h(t)$ , ist  $\tau_h$  auch von  $t$  abhängig.

Unser nächstes Ziel ist, eine Analogie zu (41) für die Mischung herzuleiten. Dafür sei das Intervall  $[t_0; T]$  wie im Fall eines Materials in Teilabschnitte  $I_n := [t_{n-1}; t_n]$ ,  $t_0 \leq \dots \leq t_N = T$  zerlegt. Wir integrieren das System (102) von  $t_{n-1}$  bis  $t_n$  numerisch und verwenden dabei die Quadraturformel vom Typ:

$$\int_{I_n} \psi(t) dt = |I_n| \{ \omega \psi^n + (1 - \omega) \psi^{n-1} \},$$

$0 \leq \omega \leq 1$ . In dieser Arbeit wird immer  $\omega = 1$  gewählt, was dem rückwärtigen Euler-Verfahren entspricht. Zur Approximation der zeitlichen Ableitung werden die Differenzenquotienten  $\dot{\sigma}_i(t) \approx \frac{1}{k}(\sigma_i^n - \sigma_i^{n-1})$ ,  $t \in (t_{n-1}; t_n]$  benutzt:

$$(A\sigma_i^n, \tau_i^n - \sigma_i^n) - (A\sigma_i^{n-1} + k\varepsilon(v^n), \tau_i^n - \sigma_i^n) \geq 0 \quad \forall \tau_i \in L^2(t_0, T; \Pi_i(W)), \quad (104)$$

$$\tau_i^n := \frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \tau_i(t) dt.$$

Für das vorgegebene Paar  $(\sigma_s^0, \sigma_h^0)$  stellt (104) eine Vorschrift dar, wie man das kontinuierliche Problem (102) bezüglich des ersten Argumentes diskretisiert.

#### 4.1.1 A priori Schranke

**Satz 4.1:** Sowohl für  $e_{\sigma_s}^n := \sigma_s(t_n) - \sigma_s^n$ , als auch für  $e_{\sigma_h}^n := \sigma_h(t_n) - \sigma_h^n$  (Fehler des Rückwärts-Euler-Verfahrens) gilt die folgende a priori Abschätzung:

$$\max_{n=1, \dots, N} \|e_{\sigma_i}^n\|_A \leq Ck,$$

wobei  $\|\tau\|_A := \sqrt{\int_{\Omega} A\tau : \tau dx}$  - die Energie-Norm der tensorwertigen Funktion  $\tau \in W$  bezeichnet und  $i$  für  $s$  oder  $h$  steht.

**Beweis:** Nach (93) approximieren wir die Lösung der Variationsungleichung (103) durch  $\sigma_i^q \in H^1(t_0, T, W)$ , mit

$$(A\dot{\sigma}_i^q + \frac{|(\sigma_i^q)^D|^{q-2}(\sigma_i^q)^D}{\mu_i^{q-1}}, \tau) = 0 \quad \forall \tau \in L^\infty(t_0, T; H_{0,0}^{div}(\Omega)).$$

Aus den vorigen Sektionen wissen wir, daß

$$\sigma_i^q \rightharpoonup \sigma_i \quad \text{schwach in } H^1(t_0, T; W), \quad q \rightarrow \infty.$$

Nach der schon bewiesenen Konvergenz (99) geht  $\sigma_i^q \rightarrow \sigma_i$  stark in  $L^2(t_0, T; W)$ . Wir führen den Beweis unter der Annahme, daß  $\ddot{\sigma}_i^q$  existiert und  $\max_{n=1, \dots, N} \{ \max_{I_n} \|\ddot{\sigma}_i^q\| \} \leq C$ ,  $i$  - wie oben. Dann hat man aufgrund partieller Integration:

$$A\dot{\sigma}_i^q k = \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t - t_{n-1}) A\ddot{\sigma}_i^q dt + A\sigma_i^q(t_n) - A\sigma_i^q(t_{n-1}).$$

Dieser Ausdruck für  $A\dot{\sigma}_i^{\mathbf{q}}$  wird in die obige Approximationsgleichung eingesetzt. Nach (93) gilt somit für jede Komponente  $i = s, h$ :

$$\frac{A\sigma_i^{\mathbf{q}}(t_n) - A\sigma_i^{\mathbf{q}}(t_{n-1})}{k} + \frac{|(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|^{q-2}(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D}{\mu_i^{q-1}}(t_n) - \varepsilon(v^{\mathbf{q}}(t_n)) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t_{n-1} - t)A\ddot{\sigma}_i^{\mathbf{q}}}{k} dt. \quad (105)$$

Die Variationsungleichung (104) entspricht dem Hencky-Modell mit dem Startwert  $(\sigma_s^{n-1}, \sigma_h^{n-1})$ . Ihre Lösung wird durch  $(\sigma_s^{qn}, \sigma_h^{qn}) \in W \times W$  mit

$$\frac{A\sigma_i^{qn} - A\sigma_i^{n-1}}{k} + \frac{|(\sigma_i^{qn})^D|^{q-2}(\sigma_i^{qn})^D}{\mu_i^{q-1}(t_n)} - \varepsilon(v^{qn}) = 0 \quad (106)$$

approximiert.

Subtrahiert man (106) von (105) und bezeichnet  $e_v^{qn} := v^{\mathbf{q}}(t_n) - v^{qn}$ , bzw.  $e_{\sigma_i}^{qn} := \sigma_i^{\mathbf{q}}(t_n) - \sigma_i^{qn}$ , bekommt man

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t_{n-1} - t)A\ddot{\sigma}_i^{\mathbf{q}}}{k} dt &= \frac{Ae_{\sigma_i}^{qn} - A(\sigma_i^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_i^{n-1})}{k} \\ &+ \frac{|(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D|^{q-2}(\sigma_i^{\mathbf{q}})^D}{\mu_i^{q-1}}(t_n) - \frac{|(\sigma_i^{qn})^D|^{q-2}(\sigma_i^{qn})^D}{\mu_i^{q-1}(t_n)} - \varepsilon(e_v^{qn}). \end{aligned}$$

Die letzte Relation wird mit  $e_{\sigma_i}^{qn}$  skalar multipliziert, danach nutzen wir Monotonie von  $\frac{|x|^{q-2}x}{\mu_i^{q-1}}$  aus, indem der Penalty-Term nach unten gegen 0 abgeschätzt wird:

$$\frac{1}{k}(Ae_{\sigma_i}^{qn}, e_{\sigma_i}^{qn}) - \frac{1}{k}(A(\sigma_i^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_i^{n-1}), e_{\sigma_i}^{qn}) - (\varepsilon(e_v^{qn}), e_{\sigma_i}^{qn}) \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(t_{n-1} - t)(A\ddot{\sigma}_i^{\mathbf{q}}, e_{\sigma_i}^{qn})}{k} dt.$$

Nun bilden wir die konvexe Kombination mit Koeffizienten  $\alpha_n := \alpha(t_n)$  und  $1 - \alpha_n$  der obigen Gleichungen für  $i = s$  und  $i = h$ :

$$\begin{aligned} &\alpha_n(Ae_{\sigma_s}^{qn}, e_{\sigma_s}^{qn}) + (1 - \alpha_n)(Ae_{\sigma_h}^{qn}, e_{\sigma_h}^{qn}) - \alpha_n(A(\sigma_s^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_s^{n-1}), e_{\sigma_s}^{qn}) \\ &- (1 - \alpha_n)(A(\sigma_h^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_h^{n-1}), e_{\sigma_h}^{qn}) - k(\varepsilon(e_v^{qn}), \alpha_n e_{\sigma_s}^{qn} + (1 - \alpha_n)e_{\sigma_h}^{qn}) \\ &\leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - t)(\alpha_n(A\ddot{\sigma}_s^{\mathbf{q}}, e_{\sigma_s}^{qn}) + (1 - \alpha_n)(A\ddot{\sigma}_h^{\mathbf{q}}, e_{\sigma_h}^{qn})) dt. \end{aligned}$$

Da  $\alpha_n e_{\sigma_s}^{qn} + (1 - \alpha_n)e_{\sigma_h}^{qn} \in H_{0,0}^{div}(\Omega)$ , verschwindet der letzte Term auf der linken Seite. Und mit der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung bezüglich der Energie-Norm erhalten wir

$$\begin{aligned} &\alpha_n \|e_{\sigma_s}^{qn}\|_A^2 + (1 - \alpha_n) \|e_{\sigma_h}^{qn}\|_A^2 \\ &\leq \alpha_n \|\sigma_s^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_s^{n-1}\|_A \|e_{\sigma_s}^{qn}\|_A + (1 - \alpha_n) \|\sigma_h^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_h^{n-1}\|_A \|e_{\sigma_h}^{qn}\|_A \\ &+ k^2 C (\alpha_n \|e_{\sigma_s}^{qn}\|_A + (1 - \alpha_n) \|e_{\sigma_h}^{qn}\|_A) \\ &\leq \frac{\alpha_n}{2} \|\sigma_s^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_s^{n-1}\|_A^2 + \frac{\alpha_n}{2} \|e_{\sigma_s}^{qn}\|_A^2 + \frac{1 - \alpha_n}{2} \|\sigma_h^{\mathbf{q}}(t_{n-1}) - \sigma_h^{n-1}\|_A^2 \\ &+ \frac{1 - \alpha_n}{2} \|e_{\sigma_h}^{qn}\|_A^2 + k^2 C (\alpha_n \|e_{\sigma_s}^{qn}\|_A + (1 - \alpha_n) \|e_{\sigma_h}^{qn}\|_A). \end{aligned}$$

Wir gehen in der obigen Ungleichung zur Grenze  $q \rightarrow \infty$ , unter Berücksichtigung, daß  $e_{\sigma_i}^{q_n} \rightarrow e_{\sigma_i}^n$  nach der Behauptung 3.6,  $\sigma_i^q(t_{n-1}) \rightarrow \sigma_i(t_{n-1})$  in  $L^2(\Omega)$ , über und teilen sie dann durch  $\frac{1-\alpha_n}{2}$ . Letzteres ist nur möglich, falls  $\alpha(t_0) < 1$  (s. Unterabschnitt 3.2.2) vorausgesetzt wird. Danach profitieren wir von der Monotonie von  $\alpha$ :  $\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \leq \frac{\alpha_{n-1}}{1-\alpha_{n-1}}$  und von  $\sup_n \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \leq C$ . Schließlich wird die Relation, die sich auf diese Weise ergibt, über alle  $1 \leq n \leq \tilde{N}$  summiert. Die Zahl  $\tilde{N}$  definieren wir später:

$$\sum_{n=1}^{\tilde{N}} \left( \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \|e_{\sigma_s}^n\|_A^2 + \|e_{\sigma_h}^n\|_A^2 \right) \leq \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} \left( \frac{\alpha_n}{1-\alpha_n} \|e_{\sigma_s}^n\|_A^2 + \|e_{\sigma_h}^n\|_A^2 \right) + Ck \max_n \max\{\|e_{\sigma_s}^n\|, \|e_{\sigma_h}^n\|\}.$$

Die Wahl von  $\tilde{N}$ :

$$\|e_{\sigma_i}^{\tilde{N}}\|_A := \max_n \max\{\|e_{\sigma_s}^n\|, \|e_{\sigma_h}^n\|\}, \quad i \text{ stehe entweder für } s \text{ oder für } h,$$

leistet das Gewünschte, denn wegen  $\sigma_i^0 = \sigma_i(t_0)$  gilt:

$$\underbrace{\frac{\alpha_{\tilde{N}}}{1-\alpha_{\tilde{N}}} \|e_{\sigma_s}^{\tilde{N}}\|_A^2 + \|e_{\sigma_h}^{\tilde{N}}\|_A^2}_{\geq c \|e_{\sigma_i}^{\tilde{N}}\|_A^2} \leq Ck \|e_{\sigma_i}^{\tilde{N}}\|_A,$$

d.h.,  $\max_{1 \leq n \leq N} \max\{\|e_{\sigma_s}^n\|, \|e_{\sigma_h}^n\|\} \leq Ck$ .  $\square$

Laut der ersten Aussage der Behauptung 1.12 (vgl. auch (41)) und aus (102) ist

$$\sigma_i^n = \Pi_i(\sigma_i^{n-1} + kC\varepsilon(v^n)), \quad i = s \text{ oder } h, \text{ wobei} \quad (107)$$

$$\Pi_i(\tau) = \begin{cases} \tau & \text{für } |\tau^D| \leq \mu_i, \\ \mu_i \frac{\tau^D}{|\tau^D|} + \frac{1}{\dim} \text{tr} \tau Id & \text{sonst,} \end{cases}$$

weil man für  $kv^n = u^n - u^{n-1}$  die Identität  $\text{tr} \sigma_i^{n-1} = \text{tr} C\varepsilon(u^{n-1})$  induktiv beweisen kann. Dies setzen wir in die Divergenzgleichung ein:

$$\begin{aligned} (F(\varepsilon(v^n)), \varepsilon(\varphi)) &:= (\alpha_n \Pi_s(\sigma_s^{n-1} + kC\varepsilon(v^n)) + (1-\alpha_n) \Pi_h(\sigma_h^{n-1} + kC\varepsilon(v^n)), \varepsilon(\varphi)) \\ &= (f_n, \varphi) + (g_n, \varphi)_{\Gamma_N} \quad \forall \varphi \in V \end{aligned} \quad (108)$$

mit  $V = [H_{\Gamma^D}^{1,2}(\Omega)]^{\dim}$  - aus der Sektion 1.5.2.

Das nicht-lineare Problem (108) wird mit gedämpften Newton-Verfahren approximiert, so daß man eine Sequenz von linearen Problemen bekommt. Die letzten werden mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode numerisch gelöst.

#### 4.1.2 Gedämpftes unexaktes Newton-Verfahren

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus zur Linearisierung von (108) erklärt. Wir geben zunächst den dazu gehörigen Pseudocode für den Fall  $\alpha = \text{const}$  an.

Da unter dem Operator  $C$  immer der lineare Elastizitätstensor gemeint wird, reicht es aus, die Lamé-Koeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$  dem Programm einzugeben:  $C\varepsilon = \lambda \text{tr} \varepsilon Id + 2\mu \varepsilon$ . Als Startwert für  $\mu_h$  sei  $\mu_s$  gewählt,  $\mu_h$  wird im Laufe der Iteration ermittelt.



- Given initial values  $(\sigma_s^0, \sigma_h^0)$ ,  $v^0$ , constants  $\mu_s, r_0, \alpha$  and Lamé coefficients  $\lambda, \mu$ ;  $\mu_h := \mu_s$ ,  $\dot{\varepsilon}_s^p := 0$
- For each time step
  - Start from the result  $(\sigma_s, \sigma_h)$ ,  $v$  and  $\dot{\varepsilon}_s^p$  at the preceding step
  - For  $i = 0$  to 3
    - \* While  $(|Resid(v)| > TOL)$ 
      - Find  $w$  such that  $(F'(\varepsilon(v))\varepsilon(w), \varepsilon(\varphi)) = Resid(v)$
      - Find  $\beta$  such that  $|Resid(v + \beta w)| < |Resid(v)|$
      - Set  $v = v + \beta w$
    - \* Set  $\sigma_s = \Pi_s(\sigma_s + kC\varepsilon(v))$ ,  $\sigma_h = \Pi_h(\sigma_h + kC\varepsilon(v))$
    - \* Calculate  $\dot{\varepsilon}_s^p = \frac{C\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_s}{2\mu}$
    - \* Update  $\mu_h(t, x) = \mu_s + r_0 \int_{t_0}^t \|\dot{\varepsilon}_s^p\|(\xi, x) d\xi$
  - Refine grid

Im Algorithmus wurden folgende Bezeichnungen verwendet:

$Resid$  steht für Residuum des Problems (108), nämlich

$$Resid(v) := (f(t_n), \varphi(t_n)) + (g(t_n), \varphi(t_n))_{\Gamma_N} - (F(\varepsilon(v)), \varepsilon(\varphi(t_n))) \quad \forall \varphi \in C(I, V)$$

für den Zeitpunkt  $t_n$ . Wenn man später eine Finite-Elemente-Basis  $\{\Phi_i | i \in \mathbb{N}, i \leq M\}$  betrachtet, wird man für  $\varphi$  gerade die Basisfunktionen einsetzen,  $Resid(v)$  wird somit zu einem Vektor mit  $M$  Koordinaten:  $(Resid|_{\Phi_1}(v), \dots, Resid|_{\Phi_M}(v))^T$ . Unter  $|Resid(v)|$  verstehen wir die  $l_2$ -Norm dieses Vektors.

Die Bilinearform  $(F'(\varepsilon(v))\varepsilon(w), \varepsilon(\varphi))$  ist die Gateaux-Linearisierung der nicht-linearen Form  $(F(\varepsilon(v)), \varepsilon(\varphi))$ , die durch

$$(F'(\varepsilon(v))\varepsilon(w), \varepsilon(\varphi)) := \frac{d}{dl}(F(\varepsilon(v + lw)), \varepsilon(\varphi))|_{l=0}$$

definiert ist. Wir rechnen dies für unseren konkreten Operator  $F(\cdot)$  genauer nach. Selbstverständlich ist die Ableitung linear:  $F'(\cdot) = \alpha\Pi'_s(\cdot) + (1 - \alpha)\Pi'_h(\cdot)$ . Es ist auch klar, daß man im elastischen Fall einfach  $\Pi'_i(\sigma + kC\varepsilon(v)) = kC$  bekommt ( $i = s$  oder  $h$ ). Im plastischen Bereich gilt:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{d}{dl} \Pi_i(\sigma_i + kC\varepsilon(v + lw)) \right]_{l=0} |_{rj pq} \\ &= \frac{k}{dim} (2\mu + dim\lambda) \delta_{rj} \delta_{pq} + \frac{k\mu_i}{|(\sigma_i + kC\varepsilon(v))^D|} \left( \mu(\delta_{rp} \delta_{jq} + \delta_{rq} \delta_{jp}) - \frac{2}{dim} \delta_{rj} \delta_{pq} \right) \\ & - \frac{(\sigma_i + kC\varepsilon(v))_{rj}^D (\sigma_i + kC\varepsilon(v))_{ab}^D \mu (\delta_{ap} \delta_{bq} + \delta_{aq} \delta_{bp}) - \frac{2}{dim} \delta_{ab} \delta_{pq}}{|(\sigma_i + kC\varepsilon(v))^D|^2}, \end{aligned}$$

mit Einstein'schen Summenkonvention bezüglich  $a, b \in \{1, \dots, dim\}$  und mit  $r, j, p, q \in \{1, \dots, dim\}$ .

In der while-Schleife des oben angegebenen Algorithmus ist noch eine weitere Iteration enthalten. Bei der Suche nach dem Dämpfungsparameter  $0 < \beta \leq 1$  werden die Zahlen  $\beta = 2^{-r}$  eingesetzt,  $r$  läuft dabei vom Startwert 0 so lange, bis die residuelle Norm wirklich verkleinert wird.

Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} ((\alpha \Pi'_s(\sigma_s^{n-1} + \varepsilon(v^n)) + (1 - \alpha) \Pi'_h(\sigma_h^{n-1} + \varepsilon(v^n))) \varepsilon(w), \varepsilon(\Phi_i)) &= \text{Resid}|_{\Phi_i}(v^n) \\ \forall i : 1 \leq i \leq M & \end{aligned} \quad (109)$$

kann leider nicht direkt gelöst werden, denn  $\mu_h$  ist eine Funktion von der unbekanntem plastischen Verzerrung  $\hat{\varepsilon}_s^p$  (s. (44)).

Wie üblich bei den geschlossenen Abhängigkeiten führt man hier eine Art von Fixpunktiteration durch, d.h. man startet mit  $\mu_h$  aus dem Vorschritt und berechnet eine Approximation von  $\hat{\varepsilon}_s^p$ . Danach wird dieses  $\hat{\varepsilon}_s^p$  für die Formel von  $\mu_h$  benutzt, um eine bessere Annäherung an  $\hat{\varepsilon}_s^p$  zu bekommen usw.. Das ist der Sinn der inneren For-Schleife.

**Bemerkung 4.2:** Ersetzt man im obigen Verfahren  $\sigma_i + kC\varepsilon(v)$  durch  $\hat{\sigma}_i + C(u - \hat{u})$  ( $i = s$  oder  $h$ ,  $\hat{u}$ ,  $\hat{\sigma}_s$ ,  $\hat{\sigma}_h$  - fest) sowie  $v$  durch  $u$ , erhält man einen Algorithmus zum Lösen des statischen Hencky-Problems.

## 4.2 Diskretisierung im Ort

Bei der Implementierung des Newton-Schemas aus der Vorsektion hat man ein System von partiellen Differentialgleichungen zu lösen, dessen schwache Formulierung lautet:

$$\begin{aligned} (F'(\varepsilon(v)) \varepsilon(w), \varepsilon(\varphi)) \\ = (f, \varphi) + (g, \varphi)_{\Gamma_N} - (\alpha \Pi_s(\sigma_s + kC\varepsilon(v)) + (1 - \alpha) \Pi_h(\sigma_h + kC\varepsilon(v)), \varepsilon(\varphi)), \end{aligned}$$

wobei man nach einer vektorwertigen Funktion  $w \in V$  sucht,  $\varphi \in V$  - beliebig.

Wir benutzen die Finite-Elemente-Methode mit der konformen bilinearen Basis auf der quadratischen Triangulierung  $\mathbb{T}_h = \{K\}$ , um eine Approximation  $w_h \in V_h$  der Lösung  $w \in V$  zu finden. Alle numerischen Tests wurden in dieser Arbeit mit Hilfe von der Bibliothek deal.II in C++ implementiert. deal.II läßt bei den quadratischen Triangulierungen hängende Knoten zu, jedoch dürfen sich die benachbarten Zellen um höchstens 1 Verfeinerungslevel unterscheiden.

Sei  $m$  - die Dimension des skalaren Finite-Elemente-Raumes über  $\mathbb{T}_h$  und  $\{\phi_l(x) | 0 \leq l < m\}$  - seine Basis. Die Funktionen  $\phi_l$  werden für vektorwertige Elemente als Komponenten verwendet. Bezeichnet  $M = \dim \cdot m$  die Dimension des vektorwertigen Finite-Elemente-Raumes  $V_h \subset V$ , so können z.B. die Funktionen

$$\Phi_j(x) := \phi_{\text{base}(j)}(x) e_{\text{comp}(j)}, \quad 0 \leq j < M$$

als eine Basis von  $V_h$  dienen, wobei  $e_l$  - der  $l$ . Einheitsvektor,  $0 \leq \text{comp}(j) < \dim$  - die einzige nicht-verschwindende Komponente von  $\Phi_j$ ,  $0 \leq \text{base}(j) < m$  - Index

---

<sup>8</sup> $(F(\varepsilon(v^n)), \varepsilon(\varphi))$  wird somit zu  $(F(\varepsilon(u)), \varepsilon(\varphi)) := (\alpha_n \Pi_s(\hat{\sigma}_s + C\varepsilon(u - \hat{u})) + (1 - \alpha_n) \Pi_h(\hat{\sigma}_h + C\varepsilon(u - \hat{u})), \varepsilon(\varphi))$ .

der skalaren Funktion, die in der Komponente  $comp(j)$  steht, in der 1-d. Basis (s. `fe_system.h` und `examples/step8.cc` in [4]) bezeichnen.

Mit der vektorwertigen Basis  $\Phi_l(x)$  kann diskrete Lösung  $w_h(x)$  als

$$w_h(x) = \sum_{l=1}^M w_l \Phi_l(x)$$

geschrieben werden, wobei  $w_l$  - skalare Koeffizienten sind. Mit einer analogen Definition der diskreten Testfunktionen  $\varphi_h \in V_h$  lautet das zu lösende Problem folgendermaßen: Finde die Koeffizienten  $w_l$ ,  $1 \leq l \leq M$ , so daß

$$(DF(\varepsilon(v))\varepsilon(\Phi_l), \varepsilon(\varphi_h))w_l = (f, \varphi_h) + (g, \varphi_h)_{\Gamma_N} - (F(\varepsilon(v)), \varepsilon(\varphi_h)) \quad \forall \varphi_h \in V_h. \quad (110)$$

Es sei bemerkt, daß

$$\varepsilon_{ij}(\Phi_l) = \frac{\frac{\partial[\Phi_l]_j}{\partial x_i} + \frac{\partial[\Phi_l]_i}{\partial x_j}}{2} = \frac{\frac{\partial\phi_{base(l)}}{\partial x_i}\delta_{j\ comp(l)} + \frac{\partial\phi_{base(l)}}{\partial x_j}\delta_{i\ comp(l)}}{2}.$$

Da das diskrete Problem linear ist, reicht es aus, (110) nur mit Basisfunktionen zu testen. Alle Skalarprodukte, die in (110) vorkommen, berechnen wir numerisch, unter dem Einsatz einer Quadraturformel. Eine Liste der in `deal.II` implementierten Quadraturregeln findet man in `base/quadrature_lib.h`. Für die Tensorrechnung, die für das Aufstellen des Systems (110) nötig ist, verwenden wir die `template` Klasse `SymmetricTensor<rank, dim>`<sup>9</sup> von symmetrischen Tensoren des geraden Ranges  $rank$  und der Dimension  $dim$ .<sup>10</sup>

Somit entsteht ein lineares Gleichungssystem, das mit vorkonditioniertem CG-Verfahren gelöst wird. Auch dafür bietet `deal.II` verschiedene Möglichkeiten an (s. `lac/precondition.h` und `lac/solver_cg.h`).

#### 4.2.1 A posteriori Fehlerschätzer für das statische Hencky-Modell der Mischung

Wir betrachten zuerst ein statisches Problem in der primal-gemischten Formulierung:

$$(\alpha\Pi_s(\hat{\sigma}_s + C\varepsilon(u - \hat{u})) + (1 - \alpha)\Pi_h(\hat{\sigma}_h + C\varepsilon(u - \hat{u})), \varepsilon(\varphi)) = (f, \varphi) + (g, \varphi)_{\Gamma_N} \quad \forall \varphi \in V,$$

wobei die Initialisierungswerte  $(\hat{\sigma}_s, \hat{\sigma}_h)$  und  $\hat{u}$  gegeben sind,  $tr \hat{\sigma}_i = tr C\varepsilon(\hat{u})$ ,  $i = s$  oder  $h$ .

Durch das Anwenden der Finite-Elemente-Methode ist die partielle Differentialgleichung

$$(\alpha\Pi_s(\hat{\sigma}_s + C\varepsilon(u_h - \hat{u})) + (1 - \alpha)\Pi_h(\hat{\sigma}_h + C\varepsilon(u_h - \hat{u})), \varepsilon(\varphi_h)) = (f, \varphi_h) + (g, \varphi_h)_{\Gamma_N} \quad \forall \varphi_h \in V_h \quad (111)$$

zu lösen. Zur Notationsvereinfachung definieren wir

$$F(\varepsilon(u)) := \alpha\Pi_s(\hat{\sigma}_s + C\varepsilon(u - \hat{u})) + (1 - \alpha)\Pi_h(\hat{\sigma}_h + C\varepsilon(u - \hat{u}))$$

<sup>9</sup>`SymmetricTensor` ist erst ab der Version 5.2.0 in der Bibliothek enthalten.

<sup>10</sup> $C$  ist z.B. `SymmetricTensor<4, 2>` oder `SymmetricTensor<4, 3>`.

und den Diskretisierungsfehler  $e_u := u - u_h$ . Wir wissen schon, daß es im statischen Fall  $\alpha\sigma_s + (1 - \alpha)\sigma_h = F(\varepsilon(u))$  bzw.  $\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h} = F(\varepsilon(u_h))$  gilt. Durch Subtraktion des diskreten Problems von dem Kontinuierlichen (unter Berücksichtigung  $V_h \subset V$ ) erhalten wir die nicht-lineare Galerkin-Orthogonalitätsrelation

$$(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(u_h)), \varepsilon(\varphi_h)) = 0 \quad \forall \varphi_h \in V_h. \quad (112)$$

Daraus folgert man

$$\int_0^1 (F'(\varepsilon(lu + (1-l)u_h))\varepsilon(e_u), \varepsilon(\varphi_h)) dl = 0 \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Unsere Fehleranalyse wird auf einem Dualitätsargument basieren. Wir nehmen an, daß der Wert  $J(\cdot)$  von einem linearen Funktional auszurechnen ist. Zur Darstellung des Fehlers  $J(e_u)$  wird die Lösung  $z \in [H_0^{1,2}(\Omega)]^{dim}$  des linearen Dualproblems

$$\int_0^1 (F'(\varepsilon(lu + (1-l)u_h))\varepsilon(\varphi), \varepsilon(z)) dl = J(\varphi) \quad \forall \varphi \in V \quad (113)$$

verwendet. Unter der Annahme, daß  $z$  existiert, und aufgrund der nicht-linearen Orthogonalität (112) gilt

$$J(e_u) = \int_0^1 \underbrace{(F'(\varepsilon(lu + (1-l)u_h))\varepsilon(e_u))}_{\frac{d}{dl}F(\varepsilon(lu+(1-l)u_h))}, \varepsilon(z - z_h)) dl,$$

wobei  $z_h$  - die Finite-Elemente-Approximation von  $z$  ist. Führt man im letzten Ausdruck die Integration aus, bekommt man

$$J(e_u) = (F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(u_h)), \varepsilon(z - z_h)). \quad (114)$$

Integriert man dies partiell bezüglich der Ortsvariable, folgt

$$\begin{aligned} J(e_u) &= \sum_{K \in \mathbb{T}_h} (-\operatorname{div}(F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(u_h))), z - z_h)_K \\ &+ \int_{\partial K} n \cdot (F(\varepsilon(u)) - F(\varepsilon(u_h)))(z - z_h) do \\ &= \sum_{K \in \mathbb{T}_h} (f + \operatorname{div}(\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h}), z - z_h)_K - (r_h, z - z_h)_{\partial K}, \end{aligned} \quad (115)$$

wobei

$$r_h|_{\Gamma} := \begin{cases} \frac{1}{2}n \cdot [\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h}]_{\Gamma}, & \text{falls } \Gamma \subset \partial K \setminus \partial\Omega \\ n \cdot (\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h}), & \text{falls } \Gamma \subset \Gamma_D \\ n \cdot (\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h}) - g, & \text{falls } \Gamma \subset \Gamma_N. \end{cases}$$

$[\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h}]_{\Gamma}$  bezeichnet den Sprung von  $\alpha\sigma_{s,h} + (1 - \alpha)\sigma_{h,h}$  an der Kante  $\Gamma$ . Das impliziert die folgende *residuale* Fehlerabschätzung :

**Satz 4.3:** *Unter den obigen Voraussetzungen gilt für das primale Finite-Elemente-Schema (111) die a posteriori Abschätzung*

$$|J(e_u)| \leq \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \omega_K \rho_K,$$

mit dem lokalen Residuum  $\rho_K = h_K \|f + \operatorname{div}(\alpha \sigma_{s,h} + (1 - \alpha) \sigma_{h,h})\|_K + h_K^{\frac{1}{2}} \|r_K\|_{\partial K}$  und dem Gewicht  $\omega_K = \max\{h_K^{-1} \|z - z_h\|_K, h_K^{-\frac{1}{2}} \|z - z_h\|_{\partial K}\}$ .

Da der Wert von  $\omega_K$  nicht exakt berechenbar ist, schätzen wir ihn durch

$$\omega_K \leq Ch_K \|\nabla_h^2 z_h(x_K)\|$$

nach oben ab, wobei  $\nabla_h^2 z_h(x_K)$  - der Differenzenquotient zweiter Ordnung von der Finite-Elemente-Approximation der dualen Lösung  $z$  im Mittelpunkt  $x_K$  von der Zelle  $K$  ist (s. [9, 28] zum Beweis).

Wählt man ein spezielles Funktional

$$\begin{aligned} J_{e_u}^1(\varphi) &:= \frac{1}{\|\varepsilon(e_u)\|} \int_{\Omega} \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(e_u) \, dx \quad \text{oder} \\ J_{e_u}^2(\varphi) &:= \frac{1}{\|e_u\|} \int_{\Omega} \varphi \cdot e_u \, dx, \end{aligned}$$

bekommt man eine a posteriori Fehlerabschätzung in der globalen  $L^2$ -Norm von  $e_u$  bzw.  $\varepsilon(e_u)$ .

Leider hängen so definierte Funktionale  $J_{e_u}^1, J_{e_u}^2$  von dem Fehler  $e_u$  ab, und für die Ermittlung der Gewichte  $\omega_K$  ist es nötig,  $J(\cdot)$  auszuwerten. Deshalb hilft man sich mit einem Näherungswert von  $e_u$  ab:  $\tilde{e}_u := \tilde{u}_h - u_h$ , wo  $\tilde{u}_h$  die Lösung des Hencky-Problems auf dem Gitter der vorletzten Verfeinerungsstufe ist.

#### 4.2.2 A posteriori Fehlerabschätzung für das quasi-statische Prandtl-Reuss-Modell der Mischung

Nun kommen wir zu dem zeitabhängigen Fall und betrachten in dem Zusammenhang für vorgegebenes Paar  $(\sigma_s^0, \sigma_h^0)$  eine Sequenz von Problemen (108),  $0 \leq n \leq N$ . Durch Finite-Elemente-Approximation wird (108) zu

$$\begin{aligned} (\alpha_n \Pi_s(\sigma_{s,h}^{n-1} + kC\varepsilon(v_h^n)) + (1 - \alpha_n) \Pi_h(\sigma_{h,h}^{n-1} + kC\varepsilon(v_h^n)), \varepsilon(\varphi_h^n)) \\ = (f^n, \varphi_h^n) + (g^n, \varphi_h^n)_{\Gamma_N} \quad \forall \varphi_h^n \in V_h^n. \end{aligned} \tag{116}$$

Dabei werden  $\sigma_{s,h}^n, \sigma_{h,h}^n \in W_h^n \subset W$ ,  $v_h^n \in V_h^n \subset V$  - gesucht, denn das Gitter und die entsprechenden Finite-Elemente-Räume werden in jedem Zeitschritt geändert,  $f^n := f(t_n)$  und  $g^n := g(t_n)$  sind vorgegeben. Die dazu gehörige diskrete Verschiebung ist durch  $u_h^n := u_h^{n-1} + kv_h^n$ ,  $u_h^0 = 0$  rekursiv definiert.

Unter der Annahme, daß der Startwert  $\hat{\sigma}_i = \sigma_{i,h}^{n-1}$  exakt ist, kann auf (116) näherungsweise unsere a posteriori Fehlerabschätzung aus dem Satz 4.3 für das statische Hencky-Problem mit  $\hat{\sigma}_i = \sigma_i^{n-1}$ ,  $\hat{u} = u^{n-1}$  zur adaptiven Gitterverfeinerung angewendet werden. Man kann im dynamischen Fall sogar eine zusätzliche  $k$ -Potenz gewinnen [28]:

$$|K(e_u)| \leq k \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \omega_K \rho_K$$

Wir berechnen nämlich für jede Zelle  $K \in \mathbb{T}_h$  den Wert  $\omega_K \rho_K$  und benutzen ihn als Verfeinerungskriterium (s. Abschnitt 4.3 unten). Das erzeugt ein System von optimal angepassten Gittern. "Optimal" bedeutet entweder das Sparsamste für die gegebene Toleranz TOL, oder das Exakteste für die gegebene Anzahl von Knoten.

Die beschriebene Vorgehensweise ist nur unter der Annahme möglich, daß der Fehler bezüglich der Zeitvariable in jedem Schritt vernachlässigt werden kann, wenn  $k$  genügend klein ist. Diese Voraussetzung kann für dynamische Probleme mit Beschleunigungsterm nicht mehr erfüllt werden.

### ZZ-Fehlerschätzer

Obwohl die Finite-Elemente-Methode eine optimale Approximation der Verschiebung im Finite-Elemente-Raum liefert, ist man in der Elastoplastizität häufig eher an Gradienten der Verschiebungen, Verzerrungen oder Spannungen interessiert, also an den unstetigen Variablen. Deshalb verfügen viele Finite-Elemente-Pakete über eine glättende Postprozedur. Diese "nachgearbeiteten" Daten approximieren (unter bestimmten Umständen) die gesuchten Werte viel besser, als die rohen. Daher ist es naheliegend, im a posteriori Fehler  $\|\sigma - \sigma_h\|_A$  die unbekannte Spannung  $\sigma$  durch die "geglättete" Finite-Elemente-Lösung  $\mathcal{M}_h \sigma_h$  zu ersetzen. Ein zusätzlicher Vorteil dieser Methode ist, daß sie nur mit bekannten Daten handelt, somit entkommt man z.B. von der aufwendigen Lösungssuche des dualen Problems.

Das von Zienkiewicz und Zhu [40] vorgeschlagene Glättungsverfahren basiert auf der Idee der Spannungsüberdeckung (engl. recovery) größerer Ordnung mit lokal gemittelten Werten. Man selektiert für jeden Knoten  $X$  der Triangulierung  $\mathbb{T}_h$  alle Zellen, bei denen dieser Knoten ein Eckpunkt ist:

$$K_X := \{K \in \mathbb{T}_h \mid X \text{ ist eine Spitze von } K\}.$$

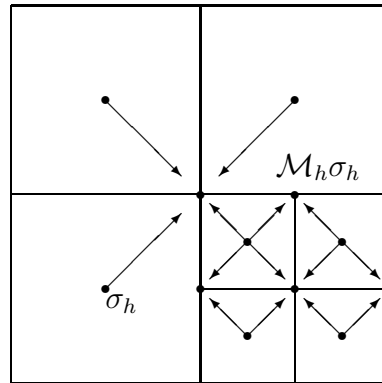
Als eine Approximation von  $\sigma$  im Knoten  $X$  wird der Mittelwert

$$\mathcal{M}_h \sigma_h(X) := \frac{\sum_{K \in K_X} \sigma_h(x_K)}{\#K_X}$$

gewählt, wobei  $\sigma_h(x_K)$  die numerische Lösung zu (116) im Mittelpunkt  $x_K$  der Zelle  $K$  ist und  $\#K_X$  Anzahl der Elemente der Menge  $K_X$  bezeichnet. Die geglättete Spannung  $\mathcal{M}_h \sigma_h$  wird als bilineare Finite-Elemente-Funktion definiert, die die Knotenwerte  $\{\mathcal{M}_h \sigma_h(X)\}$  interpoliert. So wird der Zellenfehler  $\|\sigma - \sigma_h\|_K$  durch  $\|\mathcal{M}_h \sigma_h - \sigma_h\|_K$

angenähert. Der entsprechende globale Fehler ist

$$\|\mathcal{M}_h\sigma_h - \sigma_h\| = \left( \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \|\mathcal{M}_h\sigma_h - \sigma_h\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$



Spannungsmittlerung im ZZ-Fehlerschätzer

### 4.3 Verfeinerungsstrategie

Zum Erzeugen vom adaptiven Gitter benutzen wir die Bibliothekfunktion `refine_and_coarsen_fixed_number(const& Vector<double> error_cell, double a, double b)`. In der  $m$ . Komponente des Vektors `error_cell` wird der Wert des Fehlers bezüglich der Zelle mit dem Index  $m$  gespeichert,  $a$  und  $b$  definieren wir später.

Da die beiden a posteriori Abschätzungen aus der letzten Sektion vom Typ

$$|J(e)| \leq \eta := \sum_{K \in \mathbb{T}_h} \eta_K,$$

mit Zellenfehlern  $\eta_K$ , sind, eignet sich der Vektor  $(\eta_K)_{K \in \mathbb{T}_h}$  für die Eingabe in `refine_and_coarsen_fixed_number`. Die Verfeinerungsstrategie dieser Funktion ist, neben der Reduktion des Fehlers auch den Quotienten  $\frac{\max_K \{\eta_K\}}{\min_K \{\eta_K\}}$  zu minimieren und somit die Gesamtzahl der Knoten möglichst gering zu halten. Dafür werden die Zellen entsprechend ihrem lokalen Fehler  $\eta_K$  eingeordnet. Dann werden  $a \cdot 100\%$  aller Zellen  $K$  mit dem größten  $\eta_K$ -Wert verfeinert und  $b \cdot 100\%$  der Zellen  $K$  mit dem kleinsten  $\eta_K$ -Wert gelöscht.

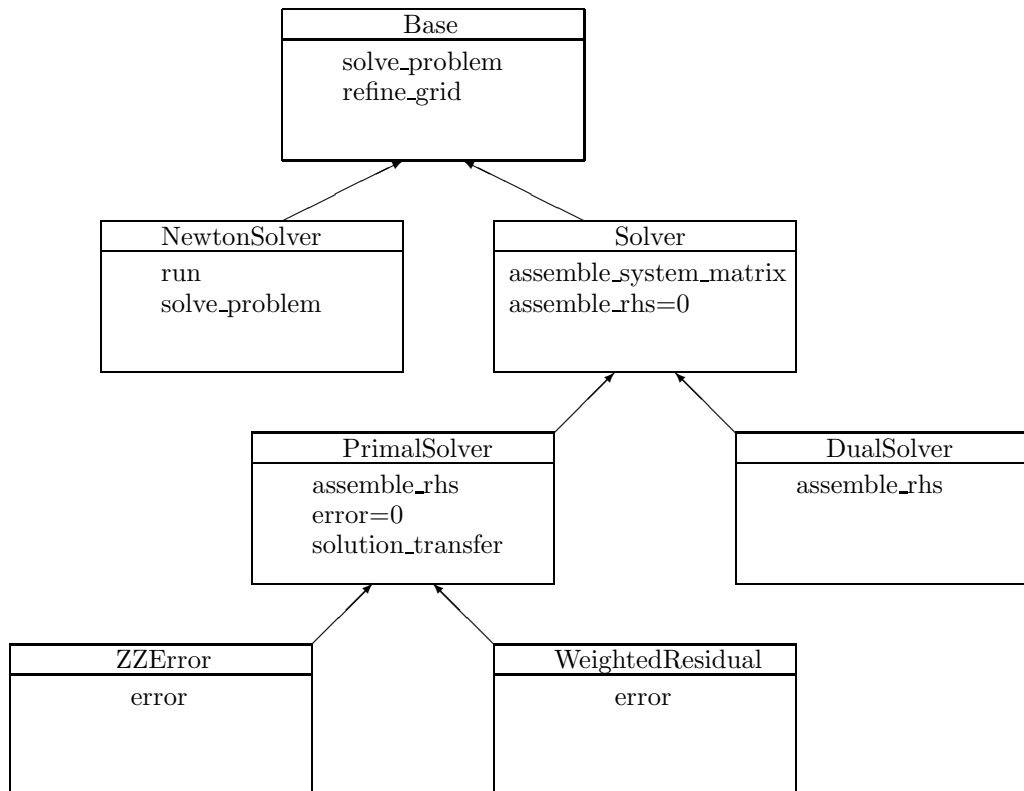
Der ganze Verfeinerungsprozess läuft in unserem Programm so lange, bis eine bestimmte Anzahl der Knoten  $N_{max}$  erreicht wird.

### 4.4 Programmgestaltung

Die Klassenhierarchie für unsere Programme ist im Grunde dem 14. Beispiel aus der `deal.II` Bibliothek (`deal.II/examples/step - 14` in der Version 5.2.0) von W. Bangerth entnommen. Alle Tutoriumsprogramme dieser Bibliothek sind gut kommentiert, daher konzentrieren wir uns hauptsächlich auf die Differenzen zu unserer Aufgabe.

Möchte man den residuellen Fehlerschätzer zur Gitterverfeinerung benutzen, muß man neben dem primalen Problem auch das duale Problem lösen. Da die beiden Aufgaben

sich nur im Vektor auf der rechten Seite unterscheiden und die selbe Systemmatrix haben, wird das Aufstellen der Matrix in eine gemeinsame Basisklasse `Solver` verlegt, die auch eine abstrakte virtuelle Funktion `assemble_rhs` für die rechte Seite hat. Die beiden abgeleiteten Klassen `PrimalSolver` und `DualSolver` müssen dann `assemble_rhs` überschreiben (s. step - 14).



Im Unterschied zum step - 14 vererbt jeder Fehlerschätzer nur vom `PrimalSolver` (nicht von den `Primal-` und `DualSolver`), denn in vielen Fällen ist man an der dualen Lösung gar nicht interessiert. Stattdessen besitzt `WeightedResidual` eine Instanz vom `DualSolver`. Ähnlich ist es auch beim `NewtonSolver`. Er besitzt eine Instanz vom `PrimalSolver`. Jede `Solver`-Klasse verfügt über eine `solve_problem`-Routine. `Primal-` und `DualSolver` vererben sie von der Basisklasse `Base` der Klasse `Solver`. Ihre `solve_problem` macht nichts anderes als das Aufstellen und Lösen des entsprechenden Gleichungssystems. `solve_problem`-Funktion von dem `NewtonSolver` steuert das ganze Newton-Verfahren. In `refine_grid` wird zuerst die Prozedur `error` aufgerufen, die je nach Fehlerschätzer die Einträge im Vektor `error_indikator` ausfüllt. Danach verwenden wir die schon erwähnte Funktion `refine_and_coarsen_fixed_number`, die das Verfeinern vorbereitet. Bevor die Triangulierung wirklich geändert wird, muß man noch alle Funktionen, die auf dem alten Finite-Elemente-Raum definiert sind, auf den neuen überführen. Dies macht unsere Methode `solution_transfer`, die im Wesentlichen nur die Funktionalität der Bibliothekklasse `SolutionTransfer` erweitert.

Alle Beispielprogramme (für das Hencky- und Prandtl-Reuss-Gesetz mit und ohne Mischung) werden von der Klasse `FrameWork` gesteuert. Genau die `run`-Methode dieser Klasse wird von der `main`-Funktion aufgerufen. Aber, bevor wir es tun, gibt es die



Möglichkeit, einige Parameter für das ausgewählte Modell zu setzen. Z.B. kann man in jedem Programm bestimmen, ob man das Beispiel vom Problem mit der bekannten exakten Lösung oder einer Scheibe mit Schlitz ausführen lassen möchte, oder wie lange man rechnen soll, oder letztlich welcher Fehlerschätzer zur Gitterverfeinerung verwendet wird.

## 5 Numerische Tests

Zum Schluß wenden wir die vorher ausgearbeitete Theorie auf einige 2-dimensionale Modellprobleme an. Zuerst behandeln wir den stationären Fall für eine ausgeartete Mischung ( $\alpha = 1$ , die einzige Fließgrenze  $\mu_s$  ist vorgegeben), für die man die exakte Lösung kennt. Anhand dieses Beispiels kann man die Konvergenz des numerischen Verfahrens beobachten.

Dann wird das oben genannte Problem so umformuliert, daß die neue Lösung den quasi-statischen Gleichungen genügt. Die beiden Programme (für das Hencky- und Prandtl-Reuss-Modell) haben eine weitere Option: sie lösen auch das Problem einer Scheibe mit Schlitz (s. [33]). Und da das Newton-Verfahren sehr abhängig von dem Startwert ist, kann man mit Hilfe eines Fixpunktverfahrens nach einem guten Initialisierungswert suchen. Ein zusätzlicher Vorteil von der Fixpunktoutine ist, daß man die Korrektheit des Programms verifizieren kann: sowohl Newton- als auch Fixpunktverfahren sollen die gleichen Resultate liefern.

Im letzten Beispiel geht es, im Gegensatz zu den Vorherigen, um eine "echte" Mischung (Prandtl-Reuss-Modell mit  $\alpha = const \neq 1$ ). Die Deformation dieses Stoffes löst die Zustandsveränderung aus, die im 2. Kapitel beschrieben ist, d.h., der weiche Zustand dieses Materials wird nach dem selben Gesetz in den harten umgewandelt.

**Beispiel 1.** Wir betrachten zuerst ein Problem, daß keine physikalische Bedeutung hat, sondern lediglich zum Prüfen unseres Programms dient. Als Modellfall geben wir hier die Verschiebung vor:

$$u(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in [-1; 1]$$

und passen die Eingangsdaten so an, daß dieses  $u(x_1, x_2)$  das gestellte Hencky-Problem löst. Führt man alle Rechenschritte aus, bekommt man, daß die obigen Funktionen  $u : [-1; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\sigma := \Pi(C\varepsilon(u)) : [-1; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $C$  - Elastizitätstensor,  $\Pi(\cdot)$  - Projektionsoperator (s. (39)), das System (38) erfüllen, wenn

$$\begin{aligned} f &= \begin{pmatrix} -2k \\ -k \end{pmatrix}, \\ g &= M(x_1, x_2)|_{\Gamma_N} \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \end{aligned}$$

im elastischen Bereich, also für  $\sqrt{10}\mu|x| < \mu_s$ , und

$$\begin{aligned} f &= \frac{\mu_s}{\sqrt{10}\mu} \begin{pmatrix} \frac{2\mu(x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^2)}{|x|^3} - 2k \\ \frac{\mu(x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2)}{|x|^3} - k \end{pmatrix}, \\ g &= M(x_1, x_2)|_{\Gamma_N} \mathbf{n}|_{\Gamma_N} \end{aligned}$$

im Plastischen, d.h.  $\sqrt{10}\mu|x| \geq \mu_s$ , wobei

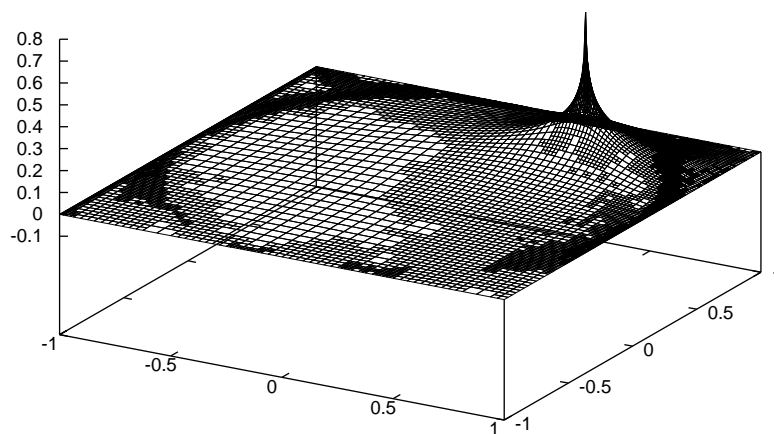
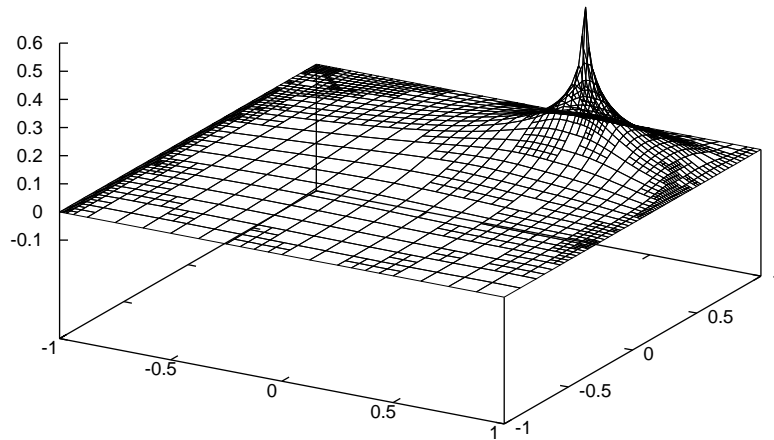
$$M(x_1, x_2) := \begin{cases} \begin{pmatrix} \mu(x_2 - 2x_1) + k(x_2 + 2x_1) & \mu(x_1 + 2x_2) \\ \mu(x_1 + 2x_2) & \mu(2x_1 - x_2) + k(x_2 + 2x_1) \end{pmatrix} \\ \text{bzw.} \\ \frac{\mu_s}{\sqrt{10}|x|} \begin{pmatrix} x_2 - 2x_1 & x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 & 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} + k(x_2 + 2x_1)Id \end{cases}$$

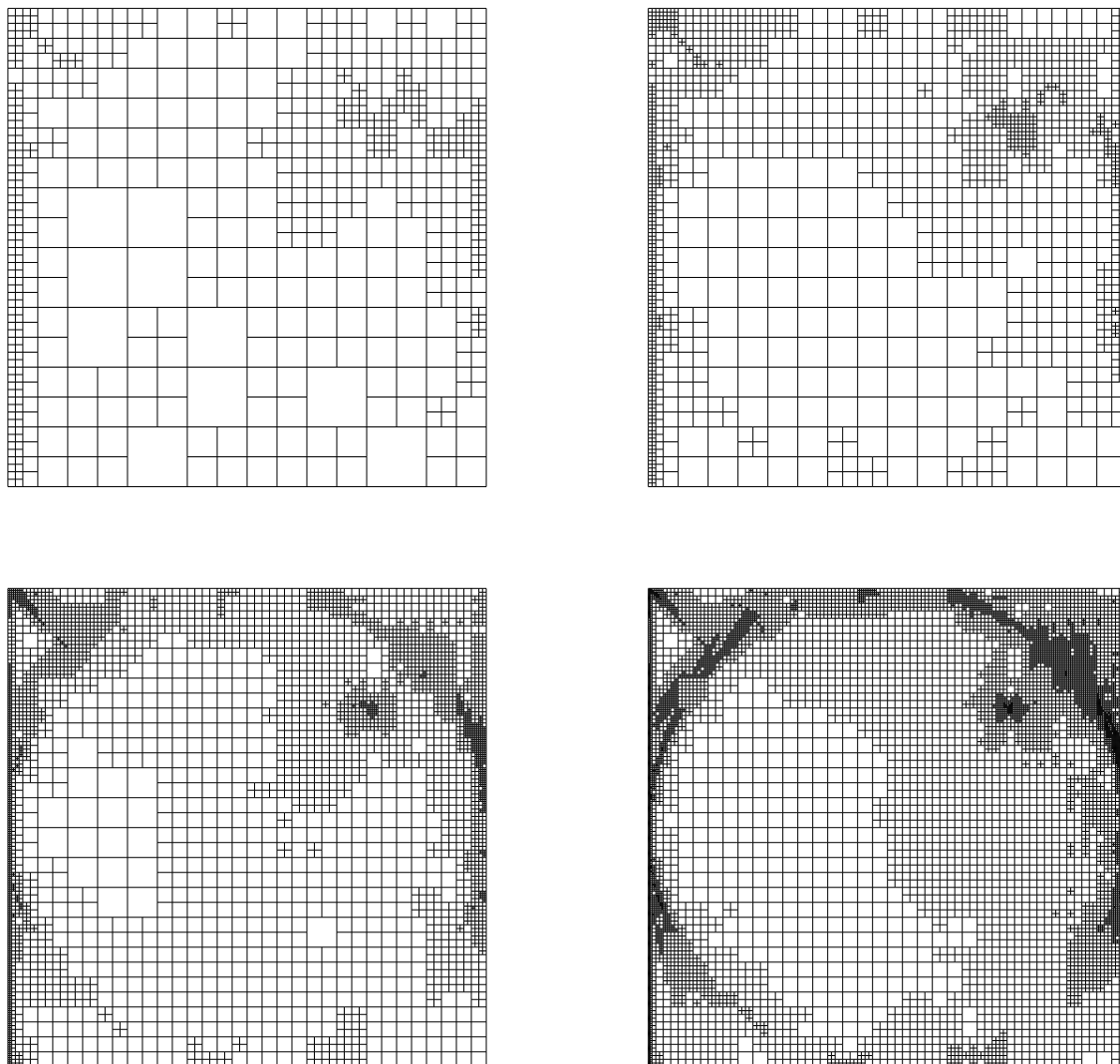
in der elastischen bzw. plastischen Zone ist,  $\mu, \lambda$ -Lamé-Koeffizienten,  $k := \lambda + \frac{2\mu}{dim}$ . Wir setzen z.B.  $\mu := 1$  und  $k := 2$ ,  $\Gamma_D := \{-1\} \times [-1; 1]$ ,  $\Gamma_N := \partial[-1; 1]^2 \setminus \Gamma_D$ . Da es  $|(C\varepsilon)^D| = \sqrt{10}\mu|x|$  gilt, ist für  $\mu_s := \sqrt{10}\mu$  die Fließgrenze einfach der Einheitskreis mit Koordinatenursprung als Mittelpunkt.

Unten demonstrieren wir den Gebrauch von unterschiedlichen Fehlerschätzern. Zuerst sei die residuale Fehlerabschätzung mit dem Dualfunktional

$$J(\cdot) := \left( \begin{pmatrix} \delta_{(0.5,0.5)} \\ 0 \end{pmatrix}, \cdot \right) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

benutzt, wobei  $\delta_{x_0}$  - Dirac-Funktional an der Stelle  $x_0$  ist, d.h.,  $\int_{\Omega} \delta_{x_0} f dx = f(x_0)$  für stetige  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ . Also ist  $J(u) = u_1(0.5, 0.5)$ . Wir geben die Lösungen des Dualproblems (113) bei sukzessiv verfeinerten Gittern aus:





Adaptive Gitter der 4.-7. Verfeinerungen mit 709, 1804, 4582 und 11557 Zellen entsprechend

An den Abbildungen sieht man, daß die Umgebung des Punktes  $(0.5, 0.5)$  eine viel bessere Approximation liefert, als das übrige Gitter. Deshalb wählt man das Funktional  $J(\cdot)$  wie oben, falls man sich nur für den Wert von  $u$  an einem bestimmten Ort interessiert. Eine weitere Information, die man aus dem adaptiven Gitter ablesen kann: Es wird angedeutet, wo die Fließgrenze verläuft, denn das gestellte Problem ist im plastischen Bereich schwerer zu lösen, als im Elastischen. Das erklärt die Tatsache, daß der Einheitskreis besser verfeinert wird (s. letztes Bild).

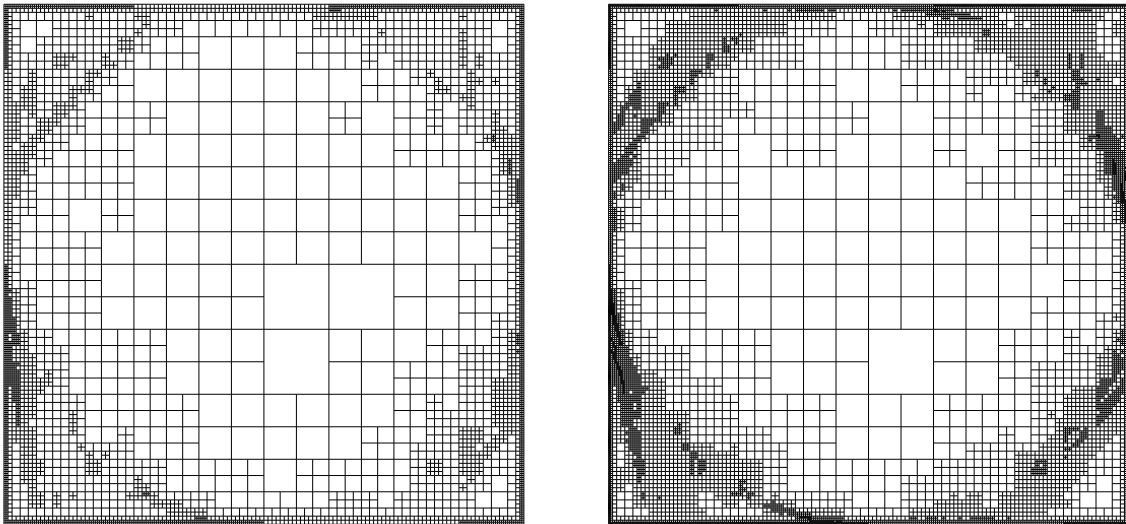
In unserem Programm geben wir noch die Folge der Verschiebungswerte  $u_{1,h}(0.5, 0.5)$  bezüglich der obigen konsequent verfeinerten Gitter aus. Sie approximiert den exakten Wert von  $u_1(0.5, 0.5) = 0.25$ . In der ersten Zeile der unten angegebenen Tabelle steht die Anzahl der Freiheitsgrade dofs (engl. degree of freedom).

|                     |         |         |         |         |         |         |         |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| dofs                | 50      | 124     | 298     | 714     | 1762    | 4284    | 10562   |
| $u_{1,h}(0.5, 0.5)$ | 0.24627 | 0.24989 | 0.22339 | 0.23740 | 0.23673 | 0.24777 | 0.25005 |

Danach sei  $J := J_{e_u}^2(\cdot)$  gewählt, so daß  $J(e_u) = \|e_u\|_W$ . Verfeinern wir das Gitter jedes Mal global, ergibt sich die Konvergenztabelle unten. Ihre Spalten bedeuten: cycle - Nummer von dem Verfeinerungszyklus, cells - Anzahl der Gitterzellen, dofs - s. oben, approx. error  $\|e_u^h\|$  - der numerisch errechnete Fehler. Wir profitieren von der Kenntnis der exakten Lösung und fügen unserer Tabelle noch eine Spalte mit dem genauen Fehler true error  $\|e_u\|$  hinzu:

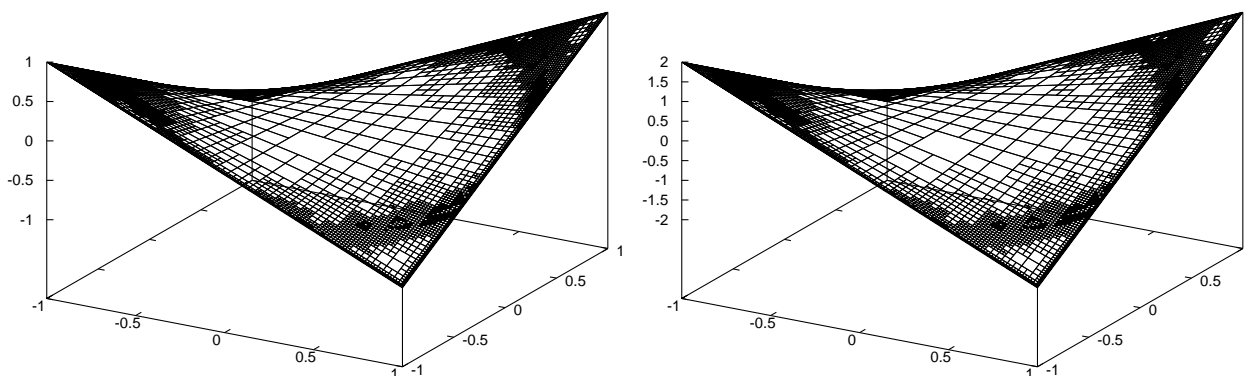
| cycle | cells | dofs  | approx. error $\ e_u^h\ $ | true error $\ e_u\ $ |
|-------|-------|-------|---------------------------|----------------------|
| 0     | 16    | 50    | 0.15255                   | 0.02041              |
| 1     | 64    | 162   | 0.05636                   | 0.02370              |
| 2     | 256   | 578   | 0.02103                   | 0.00680              |
| 3     | 1024  | 2178  | 0.00940                   | 0.00143              |
| 4     | 4096  | 8450  | 0.00432                   | 0.00092              |
| 5     | 16384 | 33282 | 0.00197                   | 0.00021              |

Die adaptive Verfeinerung bezüglich des gleichen Fehlerschätzers, bei der jedes Mal 50% der Zellen größtes Residuums halbiert werden, produziert z.B. bei der 6. und 7. Stufe die Gitter:



Gitter der 6. und 7. Stufe mit 4579 und 11557 Zellen

Um die Symmetrie der Fließgrenze besser zu sehen, wurde für diesen Programmlauf  $\Gamma_N = \emptyset$  gesetzt. Wir zeichnen die Graphen von der ersten und zweiten Lösungskomponenten  $u_1 : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $u_2 : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :



Lösungsgraphen auf dem mit residualem Fehlerschätzer verfeinerten Gitter

Wie erwartet ist das eine Annäherung an die Funktion  $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1x_2, 2x_1x_2)^T$ .

Für diesen Fehlerschätzer geben wir noch die Konvergenztabelle aus. Nach dem Satz 4.3 gilt "true error  $\|e_u\|$ "  $\leq C$  "approx. error  $\|e_u^h\|$ ". Für unsere Tests haben wir  $C = 1$  gewählt.

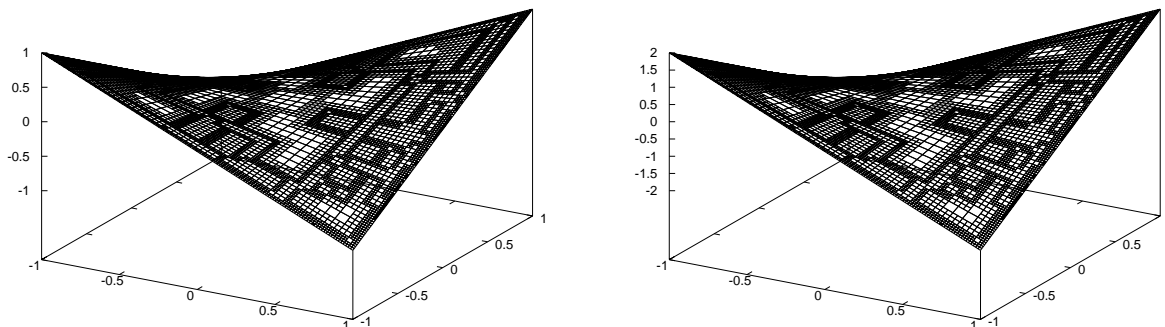
| cycle | cells | dofs  | approx. error $\ e_u^h\ $ | true error $\ e_u\ $ |
|-------|-------|-------|---------------------------|----------------------|
| 0     | 16    | 50    | 1.32816                   | 0.00070              |
| 1     | 43    | 128   | 1.08958                   | 0.00242              |
| 2     | 109   | 304   | 0.36820                   | 0.00171              |
| 3     | 277   | 742   | 0.17073                   | 0.00095              |
| 4     | 712   | 1838  | 0.22135                   | 0.00071              |
| 5     | 1810  | 4566  | 0.05531                   | 0.00027              |
| 6     | 4579  | 11254 | 0.04416                   | 0.00012              |

Schließlich wenden wir den ZZ-Fehlerschätzer auf das obige gemischte Randwertproblem an. Der Vollständigkeit halbe wird zuerst der exakte Fehler  $e_\sigma = \|\sigma - \sigma_h\|_W$  mit dem approximativen Wert  $e_\sigma^h := \|\mathcal{M}_h\sigma_h - \sigma_h\|_W$  auf dem global verfeinerten Gitter verglichen:

| cycle | cells | dofs  | approx. error $\ e_\sigma^h\ $ | true error $\ e_\sigma\ $ |
|-------|-------|-------|--------------------------------|---------------------------|
| 0     | 16    | 50    | 1.77584                        | 0.0794153                 |
| 1     | 64    | 162   | 0.62425                        | 0.0651053                 |
| 2     | 256   | 578   | 0.21763                        | 0.0204593                 |
| 3     | 1024  | 2178  | 0.07569                        | 0.0082825                 |
| 4     | 4096  | 8450  | 0.02668                        | 0.00421733                |
| 5     | 16384 | 33282 | 0.00940                        | 0.00119346                |

Um den direkten Vergleich mit dem residualen Fehlerschätzer zu ermöglichen betrachten wir jetzt wieder das entsprechende Dirichlet-Problem, d.h., wir geben bei

der gleichen Differentialgleichung Verschiebungswerte am Rande vor. Das Gitter wird nun durch die Funktion `refine_and_coarsen_fixed_number(error_vector, 0.6, 0.)` erzeugt, wobei der Vektor `error_vector` mit  $\|\mathcal{M}_h\sigma_h - \sigma_h\|_{L^2_{sym}(K)}$ ,  $K \in \mathbb{T}_h$  ausgefüllt wird. Die dazu gehörigen Lösung  $u = (u_1, u_2)^T : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und Fehlertabelle sehen wie folgt aus:



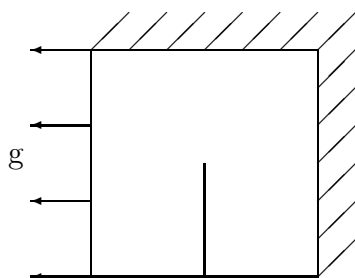
Lösungsgraphen  $u_1(x_1, x_2)$  und  $u_2(x_1, x_2)$  auf dem mit ZZ-Fehlerschätzer verfeinerten Gitter 6. Stufe

| cycle | cells | dofs  | approx. error $\ e_\sigma^h\ $ | true error $\ e_u\ $ |
|-------|-------|-------|--------------------------------|----------------------|
| 0     | 16    | 50    | 1.76079                        | 0.00070              |
| 1     | 46    | 134   | 0.94057                        | 0.00246              |
| 2     | 130   | 350   | 0.41762                        | 0.00201              |
| 3     | 376   | 974   | 0.27457                        | 0.00074              |
| 4     | 1096  | 2718  | 0.13745                        | 0.00064              |
| 5     | 3130  | 7534  | 0.07156                        | 0.00027              |
| 6     | 8764  | 20706 | 0.04510                        | 0.00013              |

Die letzte Spalte der obigen Tabelle hat die selbe Bedeutung, wie die letzte Spalte der Konvergenztabelle bei der residualen Verfeinerung.

Wir sehen, daß der residuale Fehlerindikator bei der gleichen Fehlertoleranz  $\|u - u_h\| = 0.00027$  ein viel sparsameres Netz erzeugt. (s. die zweite und die letzte Spalte)

**Beispiel 2.** Als nächste Anwendung sei das zwei dimensionale Verzerrungsproblem einer quadratischen Scheibe mit Schlitz [33, 32] in Betracht gezogen. Als Referenzkonfiguration in diesem Beispiel wählen wir das Gebiet  $[-1; 1]^2 \setminus (\{0\} \times [-1; 0])$  vom Flächeninhalt  $4mm^2$ . Die Scheibe sei am oberen und rechten Randteil fixiert (Dirichlet-Randbedingung:  $u|_{\Gamma_D} = 0$ ). Links wirke ziehende Oberflächenkraft von der Form  $g = tg_0$  ein. Der untere Randteil zusammen mit dem Schlitz bleibe kräftefrei. Das Interessante an diesem Problem ist, daß seine Lösung im Punkte  $(0, 0)$  eine Singularität hat. Im elastischen Fall ist in diesem Punkt das asymptotische Verhalten für die Spannung nachweisbar:  $\sigma \sim (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{1}{2}}$  (vgl. [33] und Beispiel 4).



Wir betrachten das lineare elastische Gesetz vom homogenen isotropen Stoff ( $k := \lambda + \mu$ )

$$C\varepsilon = 2\mu\varepsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\varepsilon)Id = 2\mu\varepsilon(u)^D + k \operatorname{div}(u)Id$$

mit der Fließbedingung

$$|\sigma^D| \leq \mu_s$$

und setzen:

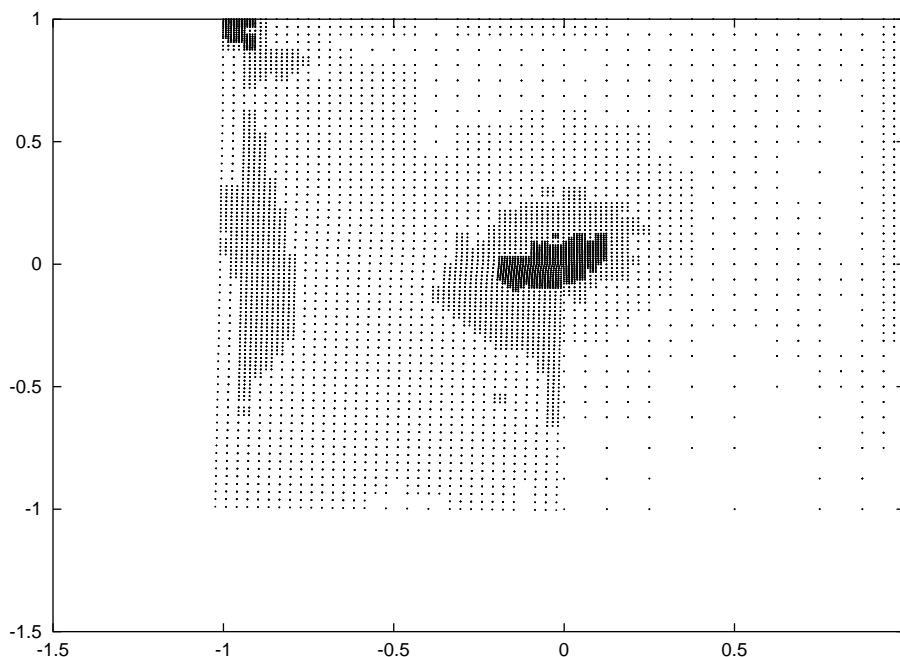
$$k := 164206N/mm^2, \mu := 80193.80N/mm^2, \mu_s := 450N/mm^2.$$

Diese Parameterwerte sind dem Artikel von F.T. Suttmeier [33] entnommen. Sie entsprechen den Eigenschaften vom Aluminium. Weiterhin sei  $g_0 := -100N/mm^2$ , d.h.

$$g := -t100, t > 0, f := 0.$$

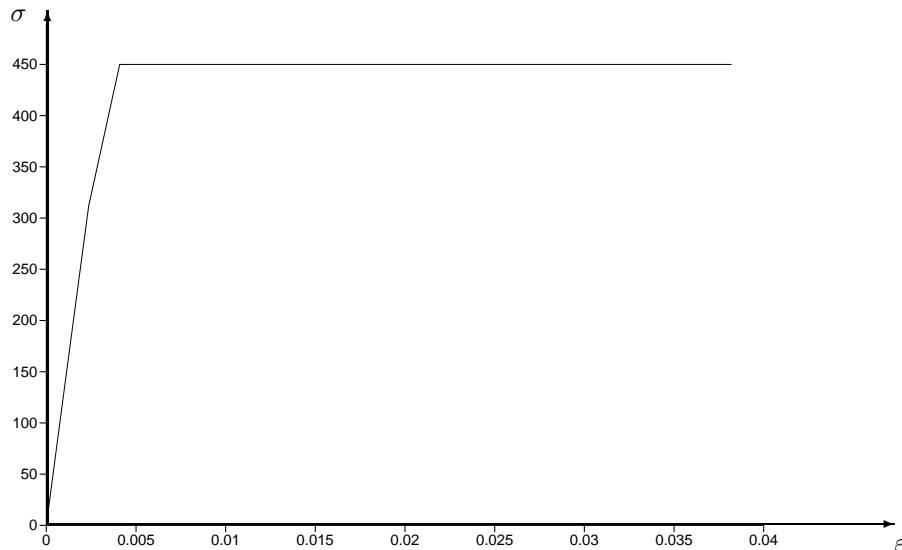
Für das Zeitintervall  $[0; T]$  nehmen wir an, daß  $T = 2.1s$  ist, denn schon bei  $2.3s$  ist das plastische Fließen zu beobachten. Nun verfeinern wir unsere ursprüngliche Triangulierung (das Gebiet  $[-1; 1]^2 \setminus \{0\} \times [-1; 0]$ , das ein Mal global geteilt wurde) adaptiv, zunächst mit residualem Fehlerindikator, bei dem  $J(e_u) = C\|e_u\|_W$ ,  $C = 10$  gilt, wobei wir immer 50% aller Zellen halbieren und in jedem Zyklus das Zeitparameter um 0.295 vergrößern.

Im Unterschied zu dem ersten Beispiel geben wir hier nicht die einzelnen Komponenten der Verschiebung  $u(x_1, x_2) = (u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2))^T$  aus, sondern die aktuelle Konfiguration  $(x_1 + u_1(x_1, x_2), x_2 + u_2(x_1, x_2))^T$  für  $(x_1, x_2)^T \in \Omega$ ,  $t = 2.0650$  (s. Sektion 1.1).



Aktuelle Konfiguration des 6. Verfeinerungsgrades

Das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im Punkte  $(-1, 1)^T$  entspricht, wie erwartet, dem perfektplastischen Verhalten:



$\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im Punkte  $(-1, 1)^T$

Das Programm erzeugt für den obigen Fehlerschätzer die folgende Konvergenztabelle:

| cycle | cells | dofs | time  | approx. error $\ e_u^h\ $ |
|-------|-------|------|-------|---------------------------|
| 0     | 16    | 54   | 0.295 | 0.0034                    |
| 1     | 43    | 124  | 0.590 | 0.0033                    |
| 2     | 112   | 298  | 0.885 | 0.0032                    |
| 3     | 286   | 716  | 1.180 | 0.0039                    |
| 4     | 718   | 1656 | 1.475 | 0.0072                    |
| 5     | 1798  | 4002 | 1.770 | 0.0146                    |
| 6     | 4498  | 9786 | 2.065 | 0.0486                    |

Der Fehler in der letzten Spalte ist keine monoton fallende Funktion, denn die Kraft  $g$  ist nicht konstant, d.h. es gibt eine zeitliche Fehlerfortpflanzung.

Man bestätige die Korrektheit der numerischen Lösung, indem man zwei Verfahren, nämlich das Newton- mit dem Fixpunktverfahren, miteinander vergleicht. Dafür wählen wir am besten als  $J$  - das Dirac-Funktional aus dem ersten Beispiel, es sei  $J(u) = u_1(-0.5, -0.5)^{11}$ . Die ersten Komponenten der Verschiebungswerte  $u_1$  im Ortspunkt  $(-0.5, -0.5)^T$  sind

| time               | 0.59     | 0.885    | 1.18     | 1.475    | 1.77     | 2.065    |
|--------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Newton algorithm   | -0.00172 | -0.00273 | -0.00383 | -0.00504 | -0.00643 | -0.01453 |
| Fixpoint algorithm | -0.00172 | -0.00273 | -0.00383 | -0.00502 | -0.00638 | -0.01437 |

<sup>11</sup>Unser Programm läßt natürlich zu, die Auswertungsstelle einzugeben. Im Beispiel 1 wurde der Punkt  $(0.5, 0.5)^T$  gewählt.



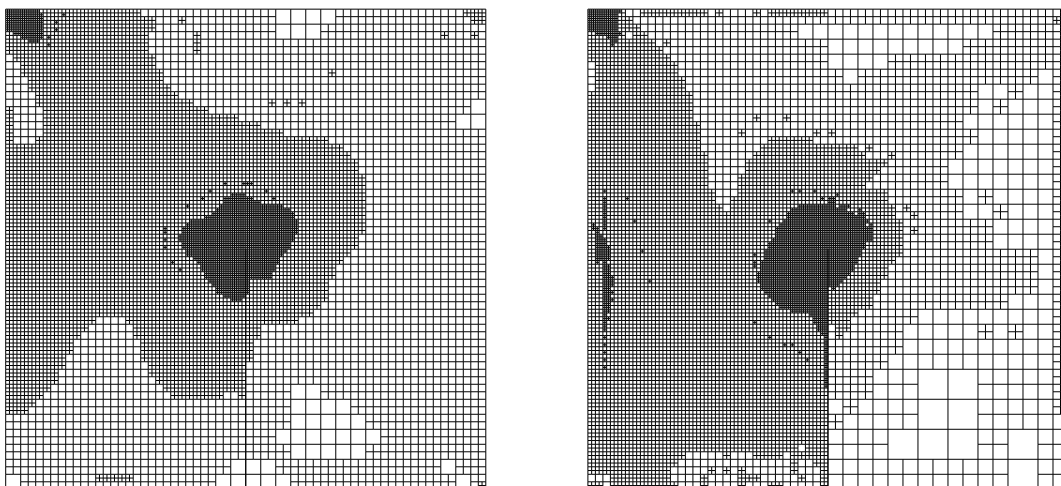
Die nachstehenden Tabellen zeigen, wie sich der relative Fehler in Abhängigkeit zu der Größe der Gitterzellen und zu der gewählten Zeitschrittweite verhält. Da die exakte Lösung dieses Problems nicht bekannt ist, berechnen wir den relativen Fehler

$$E^{rel} = \frac{|E_{approx} - E_{exact}|}{E_{exact}} \quad (117)$$

bezüglich einer "guten Approximation" der exakten Lösung. Dafür lassen wir unser Programm zuerst auf einem sehr feinen Gitter laufen (bei diesem Beispiel wurde das Gitter mit 65536 Zellen und  $t = 1.7700$  als Vergleichswert genommen) und berechnen die Diskretisierungsungenauigkeiten sowohl mit ZZ- als auch mit residualem Fehlerschätzer. So bekommen wir zwei Annäherungen für  $E_{exact}$ , die nacheinander in die obige Formel eingesetzt werden. Dann wird sowohl für ZZ-Fehlerschätzer, als auch für den residualen der folgende Test ausgeführt: Wir setzen  $k = 0.295$  und lassen unser Programm drei Mal laufen, wobei wir bei jedem Programmlauf jeweils 40%, 60% und 80% der Zellen mit größtem Fehler in jedem Zeitzyklus verfeinern. Für  $t = 1.77$  wird mit den beiden angegebenen Schätzern der Fehler  $E_{approx}$  berechnet. Setzt man das Ganze in die Formel (117) ein, bekommt man die Tabellen:

| cells | $E_{ZZ}^{rel}$ | cells | $E_{resid}^{rel}$ |
|-------|----------------|-------|-------------------|
| 3349  | 0.081399       | 3385  | 0.0012152         |
| 11158 | 0.016669       | 11236 | 0.0008756         |
| 29533 | 0.003057       | 29536 | 0.0002176         |

$E_{ZZ}^{rel}$  und  $E_{resid}^{rel}$  sind nur andere Bezeichnungen für  $E^{rel}$ , um zwischen den betrachteten Fehlerschätzern zu unterscheiden. An den Tabellen sehen wir: je feiner die Ortsdiskretisierung ist, desto besser ist der relative Fehler.



Adaptives Gitter der 5. Verfeinerungsstufe mit 11158 bzw. 11236 Zellen für den ZZ- bzw. residualen Fehlerschätzer

Als nächstes wird aus dem Beispiel 1. ein zeitabhängiges Prandtl-Reuss-Modell konstruiert, und zwar wieder so, daß man die exakte Lösung kennt.

**Beispiel 3.** Die undefinierte Verschiebung (vgl. Beispiel 1.) sei

$$u(x_1, x_2) := e^t \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad t \in I, \quad x_1, x_2 \in [-1; 1].$$

Der Grund für die exponentielle Abhängigkeit von der Zeitvariable ist, daß man in diesem Fall

$$\sigma = \Pi(C\varepsilon(u)) = \Pi(2\mu\varepsilon(u)^D + k \operatorname{div} u \operatorname{Id})$$

schreiben kann, denn dieses  $\sigma$  erfüllt (wegen  $\sigma = \dot{\sigma}$ ) sowohl das System (35), als auch (38) mit  $\hat{\sigma} = \hat{u} = 0$ , infolge dessen man die Behauptung 1.12 anwenden kann. Die Eingangsdaten für das neue Problem sind

$$f = e^t \begin{pmatrix} -2k \\ -k \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \sqrt{10}\mu e^t |x| \leq \mu_s$$

und

$$f = \frac{\mu_s}{\sqrt{10}\mu} \begin{pmatrix} \frac{2\mu(x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^2)}{|x|^3} - 2k \\ \frac{\mu(x_1^2 + 4x_1 x_2 - x_2^2)}{|x|^3} - k \end{pmatrix} \quad \text{sonst,}$$

$$g = M(t, x_1, x_2)|_{\Gamma_N} \mathbf{n}|_{\Gamma_N},$$

wobei

$$M(t, x_1, x_2) := \begin{cases} e^t \begin{pmatrix} \mu(x_2 - 2x_1) + k(x_2 + 2x_1) & \mu(x_1 + 2x_2) \\ \mu(x_1 + 2x_2) & \mu(2x_1 - x_2) + k(x_2 + 2x_1) \end{pmatrix} \\ \text{bzw.} \\ \frac{\mu_s}{\sqrt{10}|x|} \begin{pmatrix} x_2 - 2x_1 & x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 2x_2 & 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} + e^t k(x_2 + 2x_1) \operatorname{Id} \end{cases}$$

im elastischen bzw. plastischen Bereich ist.

Da wir jetzt ein rein formales Beispiel betrachten, gilt  $u(0, x_1, x_2) = (x_1 x_2, 2x_1 x_2)^T$  und  $\sigma(0, x_1, x_2) = M(0, x_1, x_2)$ , trotz der Anforderung  $u(0, x_1, x_2) = 0$  und  $\sigma(0, x_1, x_2) = 0$  für realistische Probleme.

Sei  $\mu_s := \sqrt{10}\mu e^t$ ,  $\mu, k, \Gamma_D$  - wie im Beispiel 1, also  $\mu = 1$ ,  $k = 2$ ,  $\Gamma_D = \{-1\} \times [-1; 1]$ .  $\mu_s$  wurde gerade so angepaßt, daß der elastische Bereich eine Kreisscheibe vom Einheitsradius ist.

Man erhält für das Dirac-Funktional

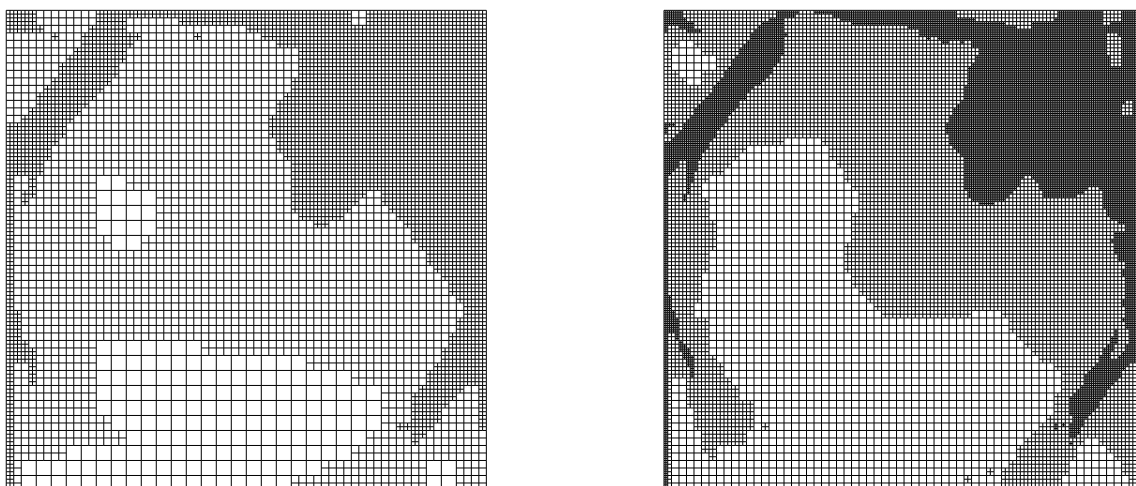
$$J(u) := \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \delta_{(0.5, 0.5)}(x) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot u(t, x) dx$$

eine Approximation des exakten Wertes  $u_1(t, 0.5, 0.5) = \frac{e^t}{4}$ .

Wir kontrollieren die Programmausgabe für  $t = 0.3125$  ( $u_1 \approx 0.34171$ ) auf unterschiedlich geteilten Triangulierungen, und zwar, wir verfeinern in jedem Zeitschritt jeweils 30%, 50% und 70% der Zellen mit größtem Residuum. Als Anfangsgitter dient immer das Gebiet  $[-1; 1]^2$ , das zwei Mal global geteilt wurde.

| cells | $u_1^h(0.3125, 0.5, 0.5)$ | $ u_1^h(0.3125, 0.5, 0.5) - u_1(0.3125, 0.5, 0.5) $ |
|-------|---------------------------|---|
| 175   | 0.32223                   | 0.01948   |
| 370   | 0.33785                   | 0.00386   |
| 703   | 0.34275                   | 0.00104   |

Das Gitter ist nach wie vor in einer Umgebung von  $(0.5, 0.5)$  besser verfeinert.

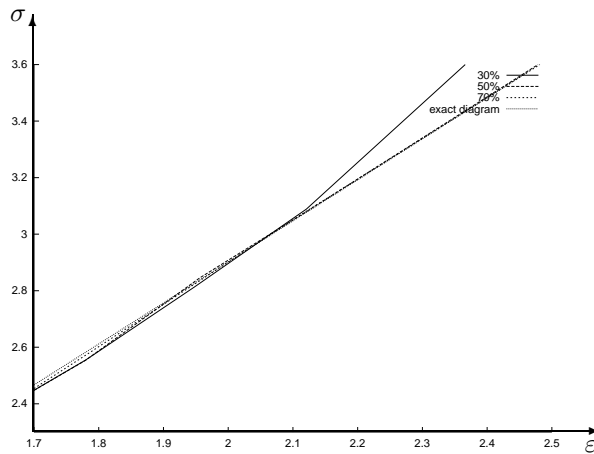
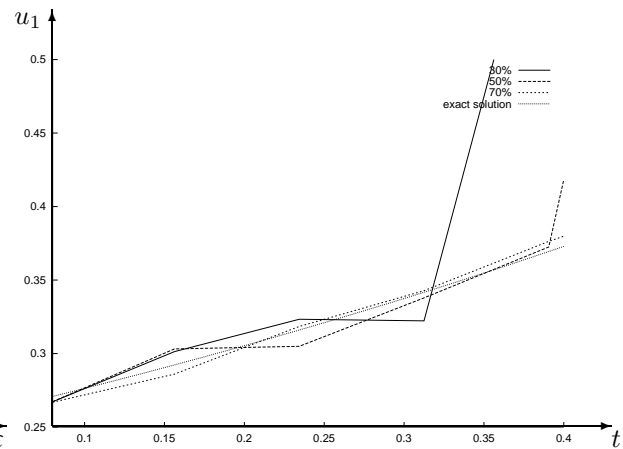


Gitter mit 7072 und 22402 Zellen (5. und 6. Stufe bei 70% Verfeinerung)

In unserem Programm zeichnen wir noch das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im selben Punkt  $(0.5, 0.5)$  mit Zeitschrittlänge  $\frac{10}{27} \approx 0.078125$ . D.h., auf der waagerechten Achse werden für jedes  $t_n = n \frac{10}{27}$ ,  $n \in \{1, \dots, 6\}$  die Werte  $|\varepsilon(u(t_n, 0.5, 0.5))|$  abgebildet. Die senkrechte Achse entspricht dem Betrag des Spannungsdeviators  $|\sigma^D(t_n, 0.5, 0.5)|$ . Da wir für dieses Beispiel sowohl approximative als auch exakte Werte für  $|\varepsilon|$  und  $|\sigma^D|$  kennen, können wir die beiden (approximative und exakte) Diagramme miteinander vergleichen.

Außerdem kann z.B. die erste Komponente der numerischen Lösung auf der gleichen Zeitskala  $[0; \frac{50}{27}]$ , mit der gleichen Zeitschrittlänge, wie beim  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm, abgebildet und mit der exakten Lösung (genauer, mit  $0.25 e^t$ ) verglichen werden.

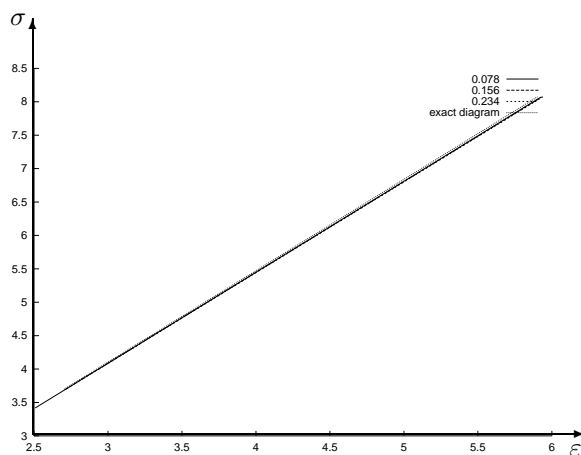
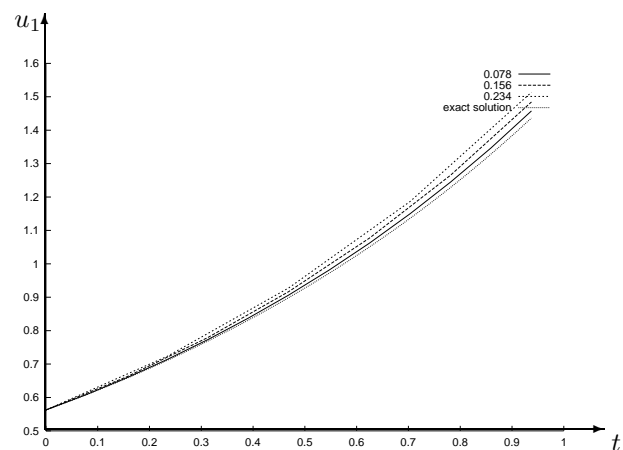
Für das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm und für das Lösungsvergleich benutzen wir die gleichen Gitter, wie bei Auswertung von  $u_1(0.31, 0.5, 0.5)$ .

 $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im Punkte (0.5, 0.5)

Interpolation der Lösung im Punkte (0.5, 0.5)

Die Beschriftungen 30%, 50% und 70% auf den obigen Abbildungen deuten darauf hin, wie viel Zellen wir in jedem Zeitschritt teilen. Weil wir nur den relevanten Bereich gezeigt haben, fangen die Achsenskalen nicht mit 0 an.

Bisher haben wir bei der festen Zeitschrittlänge die Gittergröße variiert. Jetzt machen wir einen umgekehrten Test: es wird ein festes Gitter mit 1024 Zellen betrachtet und darauf die erste Komponente der Lösung und das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm mit den Zeitschrittlängen 0.234, 0.156 und 0.078 approximiert. Diesmal wählen wir (0.75; 0.75) als Auswertungspunkt, der im plastischen Bereich liegt. Die Ergebnisse werden graphisch dargestellt:

 $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im Punkte (0.75, 0.75)

Interpolation der Lösung im Punkte (0.75, 0.75)

Auch für  $J(e_u) = \|e_u\|$  wird sowohl das adaptive Gitter, als auch die Fehlertabelle ausgegeben. Wenn man in jedem Zeitschritt (also, in jedem Zyklus) 70% der Zellen mit größtem Residuum verfeinert, bekommt man folgende Resultate:



Gitter der 5. und 6. Stufe mit 7045 und 22213 Zellen beim residualen Fehlerschätzer

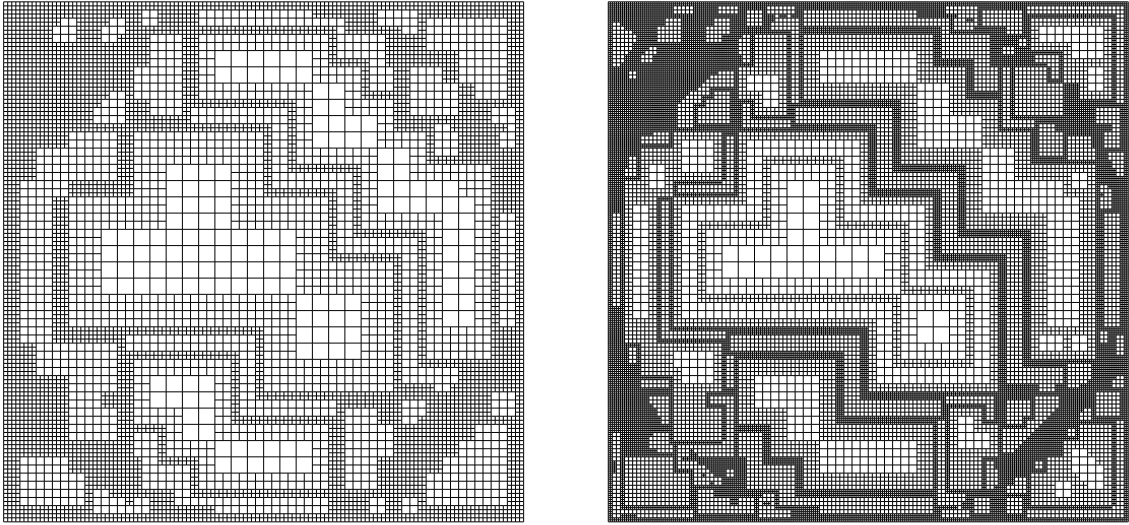
| cycle | time   | cells | dofs  | true error $\ e_u\ $ | approx. error $\ e_u^h\ $ |
|-------|--------|-------|-------|----------------------|---------------------------|
| 0     | 0.0781 | 16    | 50    | 0.01824              | 0.54184                   |
| 1     | 0.1562 | 64    | 162   | 0.01625              | 0.34967                   |
| 2     | 0.2344 | 220   | 526   | 0.02851              | 0.18487                   |
| 3     | 0.3125 | 706   | 1620  | 0.04073              | 0.10342                   |
| 4     | 0.3906 | 2224  | 4846  | 0.04998              | 0.05025                   |
| 5     | 0.4688 | 7045  | 14884 | 0.06621              | 0.02545                   |
| 6     | 0.5469 | 22213 | 46288 | 0.07282              | 0.01344                   |

Die letzten zwei Spalten representieren nicht unbedingt eine monoton fallende Funktion, jedoch steigt der Fehler höchstens linear in der Zeit (s. [33]).

Wir schauen uns noch die Fehlerentwicklung in Abhängigkeit von der Zeitschrittlänge "k" an. Weil man für dieses Beispiel die exakte Lösung kennt, kann man die "echte Approximationsgüte"  $\|e_u\|$  berechnen. Bei  $t = 0.9375$ , cells = 1024 hat man für verschiedene k:

| k      | true error $\ e_u\ $ | true error $\ e_\sigma\ $ |
|--------|----------------------|---------------------------|
| 0.2344 | 0.40943              | 0.505611                  |
| 0.1562 | 0.26468              | 0.319383                  |
| 0.0781 | 0.12720              | 0.152063                  |

Zum Vergleich wird das Gitter desselben Problems in jedem neuen Zeitschritt mit dem ZZ-Fehlerschätzer geteilt. Bei der Verfeinerung von 70% der Zellen mit größtem Fehler ergeben sich die unten stehenden Gitter und Konvergenztabelle:



Gitter der 5. und 6. Stufe mit 8161 und 27016 Zellen beim ZZ-Fehlerschätzer

| cycle | time   | cells | dofs  | true error $\ e_u\ $ | true error $\ e_\sigma\ $ | approx. error $\ e_\sigma^h\ $ |
|-------|--------|-------|-------|----------------------|---------------------------|--------------------------------|
| 0     | 0.0781 | 16    | 50    | 0.01824              | 0.340223                  | 2.0560                         |
| 1     | 0.1562 | 64    | 162   | 0.01625              | 0.146727                  | 0.7722                         |
| 2     | 0.2344 | 217   | 518   | 0.02853              | 0.0919288                 | 0.3629                         |
| 3     | 0.3125 | 727   | 1678  | 0.04073              | 0.0740955                 | 0.1824                         |
| 4     | 0.3906 | 2443  | 5518  | 0.05398              | 0.0729925                 | 0.1184                         |
| 5     | 0.4688 | 8161  | 18216 | 0.06375              | 0.0774797                 | 0.0690                         |
| 6     | 0.5469 | 27016 | 59830 | 0.77878              | 2.54844                   | 1.1294                         |

Wie immer gilt  $e_\sigma = \sigma - \sigma_h$  und  $e_\sigma^h = \mathcal{M}_h \sigma_h - \sigma_h$ ,  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_W$  wird durch eine Quadraturformel berechnet. Bei der getroffenen Wahl der Verfeinerungsparameter divergiert die Spannungsberechnung schon für  $t = 0.5469$ . Darauf weist der große Anstieg des exakten und approximativen Fehlers hin.

**Beispiel 4.** Wir kehren zu dem 2. Beispiel zurück und implementieren das Prandtl-Reuss-Modell für das Problem einer Scheibe mit senkrechtem Schlitz. Mit dem residualen Fehlerschätzer,  $J(\cdot) = \frac{1}{\|e_u\|}(\cdot, e_u)$ ,  $C = 10$  und mit der Verfeinerungsquote von 70% ergibt unser Algorithmus die folgende aktuelle Konfiguration und Konvergenztabelle:

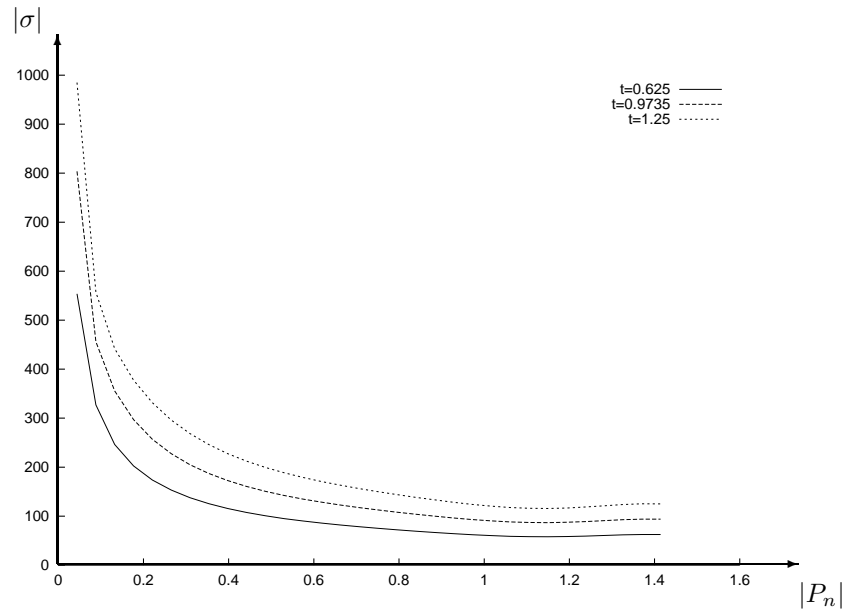
Aktuelle Konfiguration für  $t = 1.875$ 

| cycle | cells | dofs  | time   | approx. error $\ e_u^h\ $ |
|-------|-------|-------|--------|---------------------------|
| 0     | 16    | 54    | 0.3125 | 0.0021                    |
| 1     | 58    | 156   | 0.6250 | 0.0022                    |
| 2     | 193   | 472   | 0.9375 | 0.0022                    |
| 3     | 631   | 1430  | 1.2500 | 0.0029                    |
| 4     | 2023  | 4400  | 1.5625 | 0.0050                    |
| 5     | 6385  | 13528 | 1.8750 | 0.0095                    |

Um den Vergleich mit dem 2. Beispiel zu erleichtern, schreiben wir für das oben benutzte Gitter den Wert der ersten Lösungskomponente beim Newton-Algorithmus im Punkt  $(-0.5, -0.5)^T$  zu verschiedenen Zeiten in eine Tabelle:

| time                 | 0.3125   | 0.625    | 0.9375   | 1.25     | 1.5625   | 1.875    |
|----------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Prandtl-Reuss-Modell | -0.00081 | -0.00184 | -0.00295 | -0.00413 | -0.00543 | -0.00780 |
| Hencky-Modell        | -0.00081 | -0.00182 | -0.00291 | -0.00409 | -0.0054  | -0.0071  |

Da die Lösung  $\sigma$  dieses Problems im Nullpunkt singular sein soll, geben wir für die Folge  $P_n := (-\frac{1}{2^n}, -\frac{1}{2^n})^T$  die Graphen  $G := (|P_n|, |\sigma(t, P_n)|)$  bei unterschiedlichen  $t$  aus:



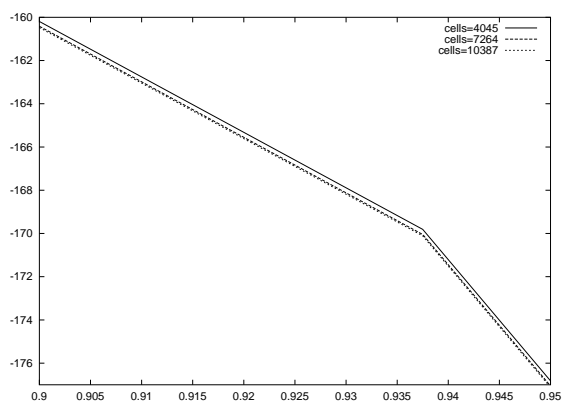
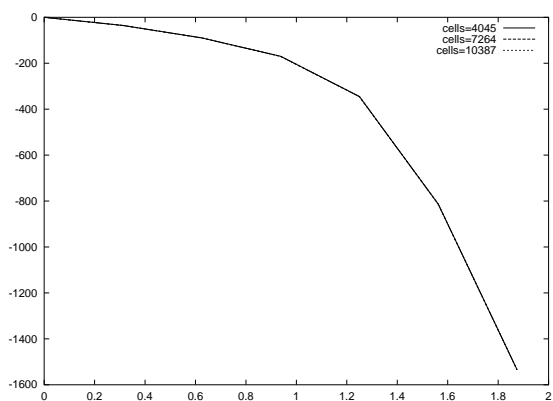
Singularität der Lösungsspannung im Koordinatenursprung

Der ZZ-Fehlerschätzer liefert eine Approximation für  $\|e_\sigma\| = \|\sigma - \sigma_h\|$ , die wir mit "approx. error  $\|e_\sigma^h\|$ " bezeichnen. Bei der Verfeinerung von 70% der Zellen mit größtem Fehler hat man die folgende Konvergenztabelle:

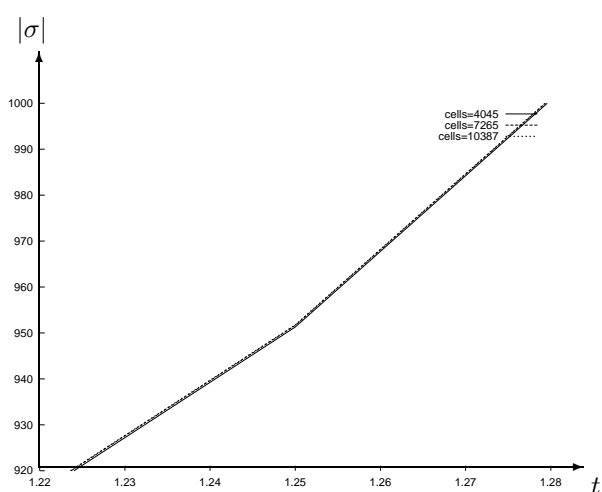
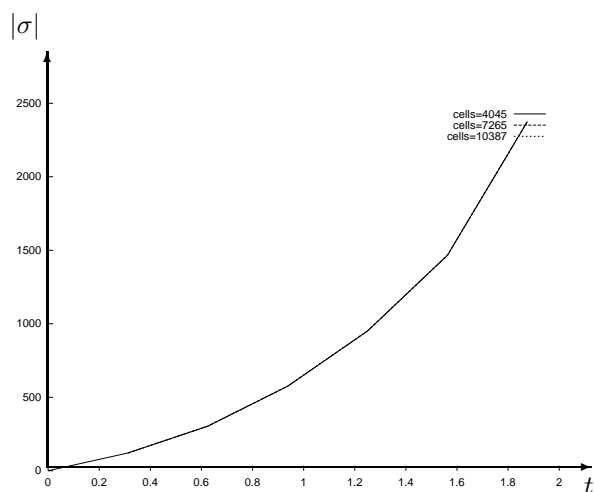
| cycle | cells | dofs  | time   | approx. error $\ e_\sigma^h\ $ |
|-------|-------|-------|--------|--------------------------------|
| 0     | 16    | 54    | 0.3125 | 61.36327                       |
| 1     | 64    | 170   | 0.6250 | 88.32962                       |
| 2     | 229   | 538   | 0.9375 | 95.25859                       |
| 3     | 730   | 1614  | 1.2500 | 87.33839                       |
| 4     | 2320  | 4980  | 1.5625 | 79.38304                       |
| 5     | 7264  | 15376 | 1.8750 | 79.31886                       |

Der Fehler ist im Vergleich zu der Größenordnung der Spannung gering, was man auf dem unteren Bild sieht. In der ersten Reihe haben wir die Komponente  $\sigma_{11}(t, -1, 1)$  des Spannungstensors  $\sigma$  an der Auswertungsstelle  $(-1, 1)^T$  abgebildet und einen Teil davon gezoomt. Danach wurde der Spannungsbetrag  $|\sigma(t, -1, 1)|$  samt seinem vergrößerten Teil ausgegeben.



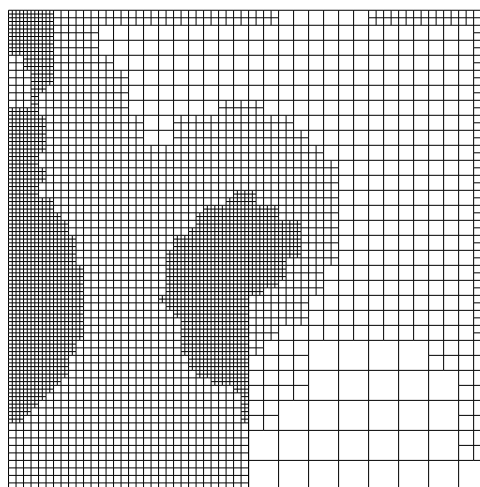
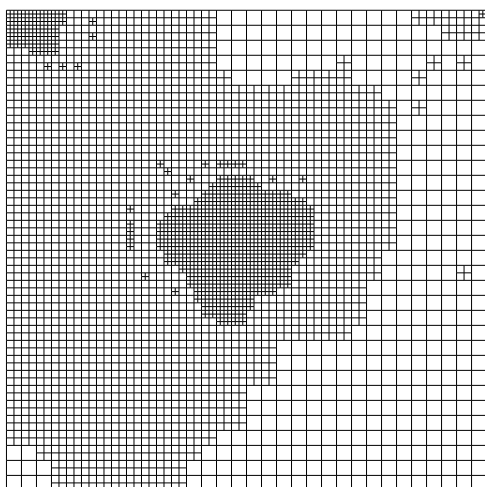


Die erste Komponente  $\sigma_{11}(t, -1, 1)$  des Spannungstensors



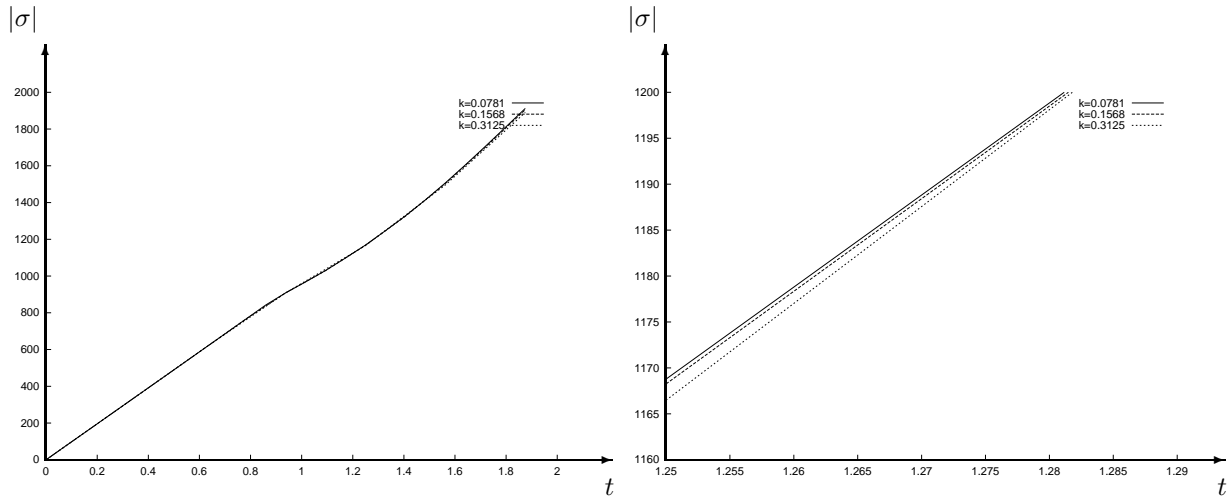
Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, |\sigma^h|(t_n, -1, 1))$  von der Gittergröße "cells"

Bei der 60% Verfeinerung bekommt man für den ZZ- und residualen Fehlerindikator die Gitter:

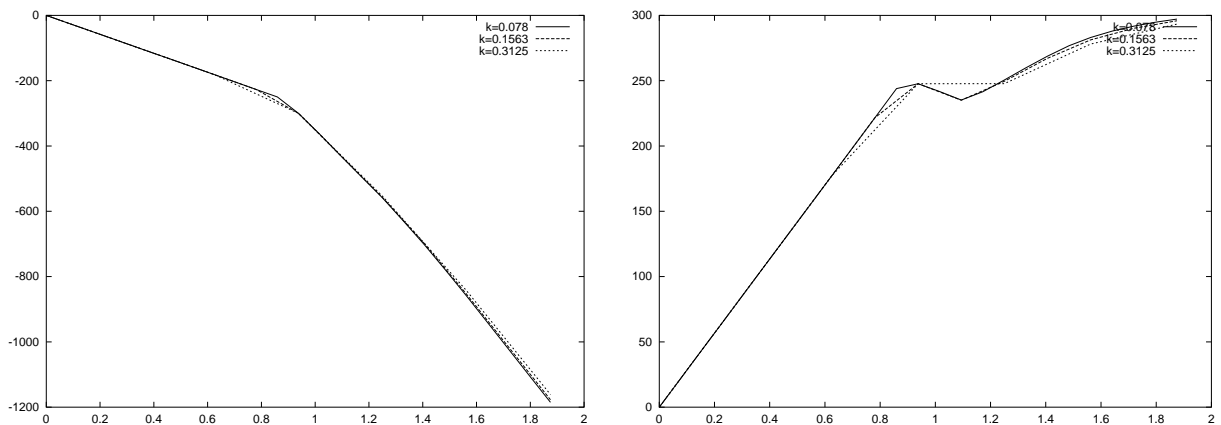


Adaptives Gitter der 5. Verfeinerungsstufe mit 4045 bzw. 4564 Zellen für den ZZ- bzw. residualen Fehlerschätzer

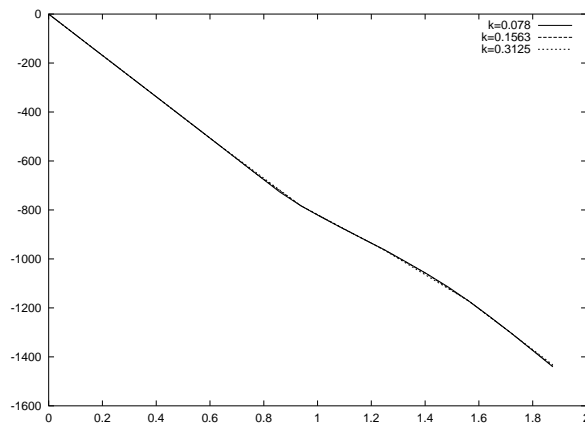
Als nächstes verändern wir bei dem gleichen global verfeinerten Gitter mit 4096 Zellen die Zeitschrittweite  $k$  und stellen die lineare Interpolation der Werte  $(t_n, |\sigma^h(t_n, -1, 1)|)$ ,  $t_n = nk$ ,  $n = \{1, 2 \dots 6\}$  und  $(t_n, \sigma^h(t_n, -1, 1))$  graphisch dar. Da man an den Funktionsgraphen den Unterschied zwischen den Approximationen mit verschiedenen Zeitschrittlängen kaum sieht, haben wir einen Teil des ersten Graphen gezoomt:



$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, |\sigma^h(t_n, -1, 1)|)$



$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, \sigma_{11}^h(t_n, -1, 1))$ ,  
und  $(t_n, \sigma_{12}^h(t_n, -1, 1)) = (t_n, \sigma_{21}^h(t_n, -1, 1))$



$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, \sigma_{22}^h(t_n, -1, 1))$

Schließlich verbinden wir zwei Prandtl-Reuss-Modelle zu einer Mischung. Bisher haben wir bei allen Beweisen vorausgesetzt, daß  $\mu_h = \mu_h(t)$  eine vorgegebene, monoton wachsende, reellwertige Funktion ist. Jetzt wollen wir  $\mu_h$  aus der Formel (44) verwenden, d.h.,  $\mu_h(t, x) = \mu_s + r_0 \gamma(t, x)$ ,  $\mu_s, r_0 = \text{const} > 0$ ,  $\gamma(t, x) = \int_0^t |\dot{\varepsilon}_s^p|(\xi, x) d\xi$  - plastische Länge. Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe ist, daß  $\mu_h$  von der unbekanntenen Funktion  $\dot{\varepsilon}_s^p$  abhängt. Letzteres ist kein leicht ermittelbarer Wert. Programmtechnisch lösen wir dieses Problem durch eine Iteration: In jedem Schleifendurchlauf setzen wir die Ableitung der plastischen Verzerrung des weichen Stoffes  $\dot{\varepsilon}_s^p$  als bekannt voraus und berechnen mit ihrer Hilfe die neue Annäherung an  $\dot{\varepsilon}_s^p$  für den nächsten Zyklus (s. Abschnitt 4.1.2) nach der Formel:

$$\dot{\varepsilon}_s^p = \frac{C\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_s}{2\mu}.$$

Diese Relation folgt aus den Gleichungen (49) unter Berücksichtigung der Unkomprimierbarkeitsannahme im plastischen Bereich.

Da man den Ausdruck von  $|\dot{\varepsilon}_s^p|(t, x)$  nachher bezüglich  $t$  integrieren möchte, ist man für die Schrittweite  $k$  an dem Wert  $k\dot{\varepsilon}_s^p$  interessiert.

Für die Ermittlung von  $\dot{\varepsilon}_s^p$  kann man die Differenzenquotienten von  $C\varepsilon - \sigma_s$  verwenden. Jedoch wird in dieser Arbeit der Ansatz mit Taylorentwicklung benutzt, der eine viel feinere Ableitungsapproximation liefert.

Zu der  $l$ . Iteration bezüglich der Zeitvariable (entspricht  $t = lk$ ) ist  $\varepsilon_s^p$  an jeder Stelle  $t = jk$ ,  $j \in \mathbb{N}$ ,  $j < l$  bekannt. Die Taylorentwicklung von  $C\varepsilon - \sigma_s$  im Punkt  $t = lk$  mit unterschiedlichen Schrittweiten ( $-k$ ,  $-2k$  usw.) bietet zusätzliche Möglichkeiten zur approximativen Berechnung von  $k(C\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_s)$ .

Für den Rest dieser Sektion nehmen wir an, daß alle Funktionen in den Beweisen genügend regulär sind. Sei  $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}$  - beliebig. Wir schreiben die Taylorentwicklung von  $\beta$  an dem Punkt  $t$  bis zur vierten Ordnung.

$$\begin{cases} \beta(t-k) &= \beta(t) - k\beta'(t) + \frac{1}{2}k^2\beta''(t) - \frac{1}{6}k^3\beta'''(t) + O(k^4) \\ \beta(t-2k) &= \beta(t) - 2k\beta'(t) + \frac{4}{2}k^2\beta''(t) - \frac{8}{6}k^3\beta'''(t) + O(k^4) \\ \beta(t-3k) &= \beta(t) - 3k\beta'(t) + \frac{9}{2}k^2\beta''(t) - \frac{27}{6}k^3\beta'''(t) + O(k^4). \end{cases}$$

Durch bestimmte Kombination dieser Gleichungen kann man die zweite und die dritte  $k$ -Potenz eliminieren.  $k\beta'$  kann dann durch die Terme  $\beta(t), \beta(t-k), \beta(t-2k)$  und  $\beta(t-3k)$  ausgedrückt werden:

$$k\beta'(t) = \frac{11}{6}\beta(t) - 3\beta(t-k) + \frac{3}{2}\beta(t-2k) - \frac{1}{3}\beta(t-3k) + O(k^4). \quad (118)$$

Diese Formel gilt auch für jede der  $dim \times dim$  Komponenten von  $C\varepsilon - \sigma_s$  und wird daher für  $t = lk, l \geq 3$  im Programm verwendet. Für  $t = 2k$  gilt:

$$k\beta'(t) = \frac{3}{2}\beta(t) - 2\beta(t-k) + \frac{1}{2}\beta(t-2k) + O(k^3).$$

Für  $t = k$  wird  $\beta'(t)$  als Differenzenquotient berechnet.

Da die Approximation von  $k\hat{\varepsilon}_s^p$  eine Linearkombination der Funktionen  $(C\varepsilon - \sigma_s)(t - lk, x)$ ,  $l = 0, 1, 2, 3$  darstellt, wird die gleiche Kombination der approximativen Funktionen  $(C\varepsilon - \sigma_s)_h(t - lk, x)$  den Wert  $k\hat{\varepsilon}_s^p$  mit dem  $L^2$ -Fehler annähern, mit dem  $C\varepsilon - \sigma_s$  durch  $(C\varepsilon - \sigma_s)_h$  approximiert wird. So hat man z.B. für  $t \geq 3k$ :

$$\begin{aligned} & \|k\hat{\varepsilon}_s^p(t) - \frac{11}{6}(C\varepsilon - \sigma_s)_h(t) + 3(C\varepsilon - \sigma_s)_h(t-k) - \frac{3}{2}(C\varepsilon - \sigma_s)_h(t-2k) \\ & + \frac{1}{3}(C\varepsilon - \sigma_s)_h(t-3k)\|_W \\ &= O(k^4) + \left\| \frac{11}{6}((C\varepsilon - \sigma_s) - (C\varepsilon - \sigma_s)_h)(t) - 3((C\varepsilon - \sigma_s) - (C\varepsilon - \sigma_s)_h)(t-k) \right. \\ & + \left. \frac{3}{2}((C\varepsilon - \sigma_s) - (C\varepsilon - \sigma_s)_h)(t-2k) - \frac{1}{3}((C\varepsilon - \sigma_s) - (C\varepsilon - \sigma_s)_h)(t-3k) \right\|_W \\ &\leq C \max_{t \in I} (\|\varepsilon(e_u)\|_W(t) + \|e_{\sigma_s}\|_W(t)) + O(k^4). \end{aligned} \quad (119)$$

Der Satz 4.3 mit  $J(\varphi) = \frac{1}{\|\varepsilon(e_u)\|_W} \int_{\Omega} \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(e_u) dx$  gibt unter gewissen Annahmen eine a posteriori Abschätzung für  $\|\varepsilon(e_u)\|_W$ . Mit  $J(\varphi) = \frac{\|e_{\sigma_s}\|_W}{\|e_u\|_{[L^2(\Omega)]^{dim}}^2} \int_{\Omega} \varphi : e_u dx$  ist dieser Satz auch für  $\|e_{\sigma_s}\|_W$  anwendbar.

Eine weitere Verbesserung der Rechengenauigkeit liegt in der numerischen Integration. Unabhängig von der Quadraturregel wird nach einer Annäherung an  $\int_0^{lk} \beta(\xi) d\xi$  in der Form  $I(k) := \sum_{j=0}^{l-1} (\int_{jk}^{(j+1)k} \beta(\xi) d\xi)_k$  gesucht, wobei  $(\int \cdot)_k$  numerischer Integralwert ist. Man weiß, daß  $I(0) := \lim_{k \rightarrow 0} I(k) = \int_0^t \beta(\xi) d\xi$  für glattes  $\beta$  gilt. Wir schreiben  $I(k)$  als Taylorpolynom mit unbestimmten Koeffizienten hin:

$$\begin{cases} I(k) &= I(0) + ka + O(k^2) \\ I(2k) &= I(0) + 2ka + O(k^2) \end{cases}$$

und finden, daß

$$I(0) = 2I(k) - I(2k) + O(k^2).$$

Diese Formel verwenden wir im Programm erst für  $l > 3$ , da für kleine  $l$   $I(k)$  eine viel bessere Approximation von  $I(0)$  liefert, als  $I(2k)$  und  $O(k^2)$  in der letzten Formel daher zu groß wird.

Nach der alten Vorgehensweise behandeln wir zunächst ein Problem mit bekannter Verschiebung.

**Beispiel 5.** Im gemischten Randwertproblem aus dem Beispiel 3 wählen wir  $\mu_h = \mu_s + r_0\gamma$ . Hierfür ist es entscheidend, daß man eine Iteration durchführt, in der  $\mu_h$  jedes Mal neu berechnet wird (s. Algorithmusbeschreibung). Setze  $r_0 := 0.01$ . Um zu testen, daß unsere Iteration überhaupt konvergiert, sehen wir uns in jedem Schleifendurchlauf die  $\gamma(t, p)$ -Werte an,  $p = (1., 1.)^T$ ,  $\alpha = 0.5$ .

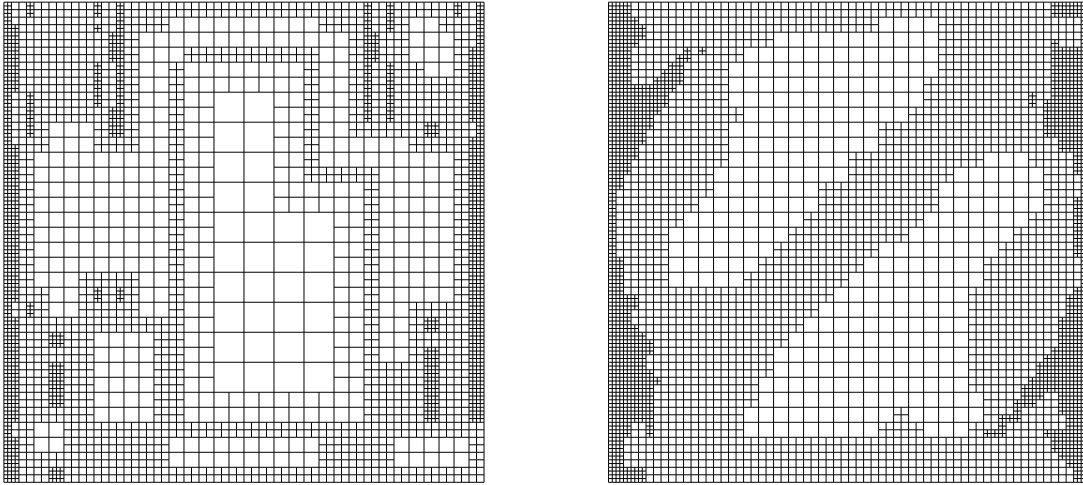
| $i \setminus$ time | 0.078     | 0.156    | 0.234    | 0.312    | 0.391    | 0.469   |
|--------------------|-----------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 0                  | 0.0895582 | 0.335389 | 0.513129 | 0.658415 | 0.756163 | 1.03183 |
| 1                  | 0.0720047 | 0.335488 | 0.51257  | 0.658244 | 0.756162 | 1.03183 |
| 2                  | 0.0720047 | 0.335488 | 0.512576 | 0.658243 | 0.756162 | 1.03183 |

Bei dieser Wahl von  $r_0$  und bei der Verfeinerungsrate von 75% hat man die folgende Konvergenztabelle für den residualen und ZZ-Fehlerschätzer entsprechend:

| cycle | cells | dofs  | time   | approx. error $\ e_u^h\ $ |
|-------|-------|-------|--------|---------------------------|
| 0     | 16    | 50    | 0.0781 | 0.54231                   |
| 1     | 64    | 162   | 0.1562 | 0.35011                   |
| 2     | 232   | 546   | 0.2344 | 0.18507                   |
| 3     | 766   | 1738  | 0.3125 | 0.10386                   |
| 4     | 2545  | 5506  | 0.3906 | 0.05254                   |
| 5     | 8416  | 17628 | 0.4688 | 0.02592                   |

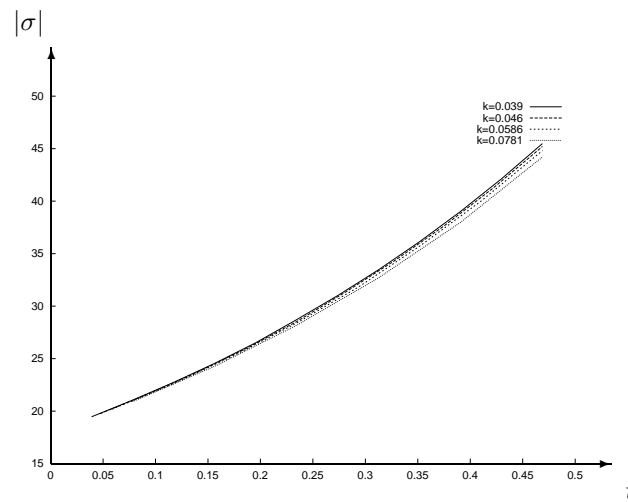
| cycle | cells | dofs  | time   | approx. error $\ e_\sigma^h\ $ |
|-------|-------|-------|--------|--------------------------------|
| 0     | 16    | 50    | 0.0781 | 2.05561                        |
| 1     | 64    | 162   | 0.1562 | 0.77108                        |
| 2     | 217   | 518   | 0.2344 | 0.36158                        |
| 3     | 727   | 1678  | 0.3125 | 0.18153                        |
| 4     | 2449  | 5526  | 0.3906 | 0.11805                        |
| 5     | 8215  | 18292 | 0.4688 | 0.06876                        |

Bei der Verfeinerung von 60% der Zellen mit größtem Residuum ergeben sich die folgenden Gitter:

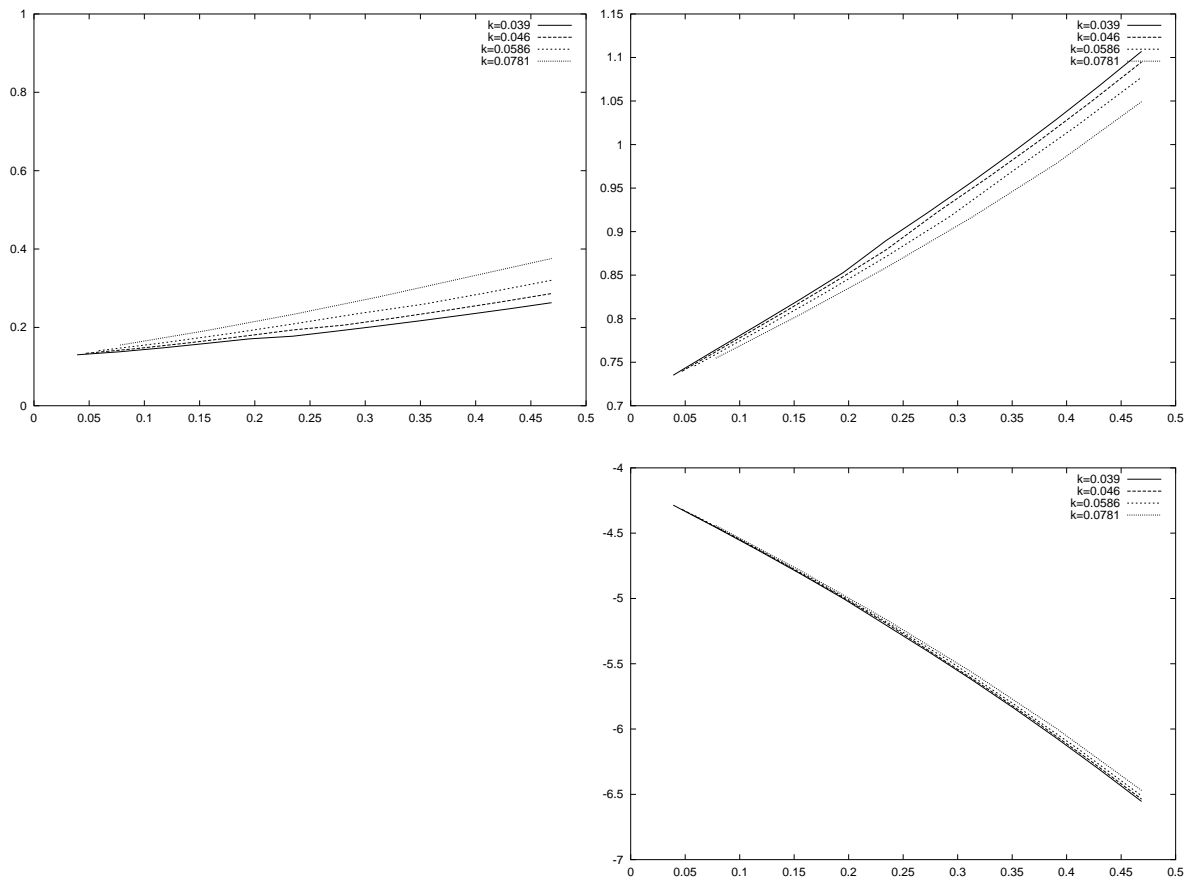


Adaptives Gitter der 5. Verfeinerungsstufe mit 3445 bzw. 4555 Zellen für den ZZ- bzw. residualen Fehlerschätzer

Für unterschiedliche Zeitschritte bilden wir den Stressbetrag und alle Komponenten des Stresstensors in Abhängigkeit von  $t$  ab:



$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, |\sigma^h|(t_n, -1, 1))$



$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, \sigma_{11}^h(t_n, -1, 1))$ ,

$(t_n, \sigma_{12}^h(t_n, -1, 1)) = (t_n, \sigma_{21}^h(t_n, -1, 1))$  und  $(t_n, \sigma_{22}^h(t_n, -1, 1))$

**Beispiel 6** ist das Problem einer Scheibe mit Schlitz für ein Mischungsmaterial. Dabei benutzen wir die gleiche Approximationstechnik wie im Beispiel zuvor. In jedem Quadraturpunkt jeder Zelle werden die Werte von  $C\varepsilon - \sigma_s$  für die vier letzten Zeitschritte gespeichert. Sie werden danach per Relationen, die schon beim vorigen Problem benutzt wurden, zu  $k(C\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_s)$  kombiniert. Das einzige Manko bei diesem Beispiel (und bei fast allen realistischen Problemen dieser Art) ist, daß  $C\varepsilon - \sigma_s$  einen Sprung macht, wenn man aus der elastischen Zone in die plastische übergeht. Wir wissen aber, daß  $C\varepsilon - \sigma_s = 0$  und folglich  $C\dot{\varepsilon} - \dot{\sigma}_s = 0$ , solange die Deformation elastisch ist. So wendet man die Formeln für die Ableitungsapproximation erst im plastischen Bereich an. Mit Hilfe von den zusätzlichen Indexvariablen wird unterschieden, wie viel von den vier gespeicherten  $C\varepsilon - \sigma_s$ -Werten zur Ableitung von  $\varepsilon_s^p$  beitragen (d.h., zum plastischen Bereich gehören).

Im Mischungsmaterial mit  $\mu_h = \mu_s + r_0\gamma$  soll eine Verfestigungseigenschaft vorliegen. Damit wir diese an einem  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm beobachten können, wählen wir  $r_0$  so groß, daß sich die Änderung von  $r_0\gamma$  in der Zeit (im Vergleich zu  $\mu_s = 450$ ) bemerkbar macht. Im Testbeispiel wurde  $r_0 = 30000$  gesetzt.

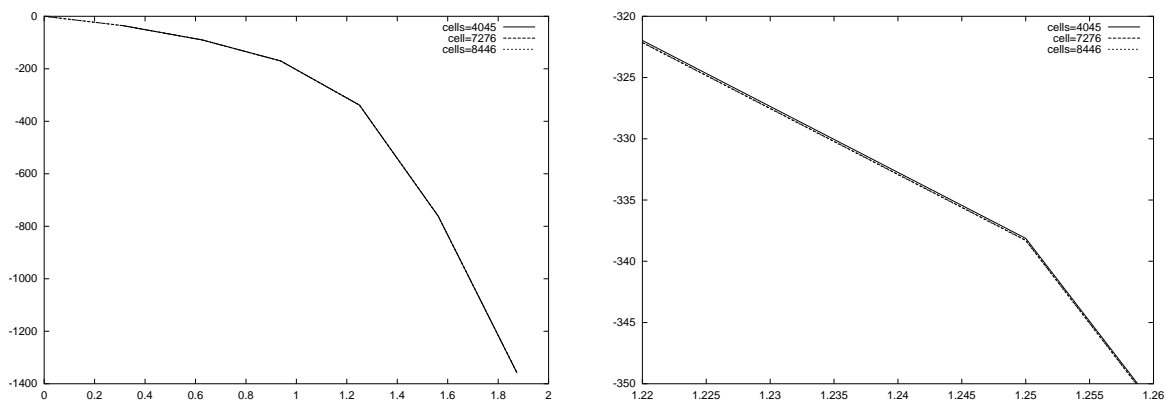
Der residuelle Fehlerschätzer ergibt für  $\alpha = 0.5$ ,  $C = 1$  und bei der Verfeinerung von 75% der Zellen mit größtem Residuum die folgende Tabelle:

| cycle | cells | dofs  | time   | approx. error $\ e_u^h\ $ |
|-------|-------|-------|--------|---------------------------|
| 0     | 16    | 54    | 0.3125 | 0.00021                   |
| 1     | 58    | 156   | 0.6250 | 0.00022                   |
| 2     | 196   | 478   | 0.9375 | 0.00022                   |
| 3     | 673   | 1516  | 1.2500 | 0.00028                   |
| 4     | 2254  | 4876  | 1.5625 | 0.00045                   |
| 5     | 7432  | 15664 | 1.8750 | 0.00063                   |

Der ZZ-Fehlerschätzer bei der gleichen Verfeinerungsstrategie und mit dem gleichen  $\alpha$  liefert:

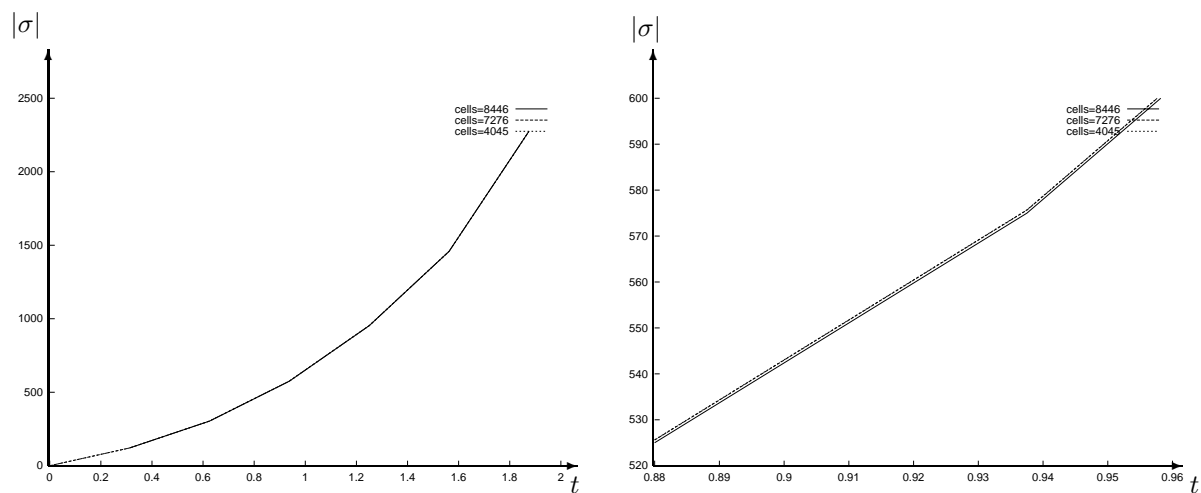
| cycle | cells | dofs  | time   | approx. error $\ e_\sigma^h\ $ |
|-------|-------|-------|--------|--------------------------------|
| 0     | 16    | 54    | 0.3125 | 61.36327                       |
| 1     | 64    | 170   | 0.6250 | 88.32962                       |
| 2     | 235   | 550   | 0.9375 | 95.15767                       |
| 3     | 784   | 1726  | 1.2500 | 87.05633                       |
| 4     | 2578  | 5500  | 1.5625 | 76.54744                       |
| 5     | 8446  | 17698 | 1.8750 | 70.52075                       |

Auch hier ist der Fehler, verglichen mit dem absoluten Wert der Spannungskomponenten, gering. Wir bilden den Eintrag  $\sigma_{11}(t, -1, 1)$  des Spannungstensors und seine Norm  $|\sigma(t, -1, 1)|$  ab. Um die Unterschiede zwischen den verschiedenen Triangulierungen zu sehen, haben wir jeweils einen Teil dieser Graphen gezoomt:



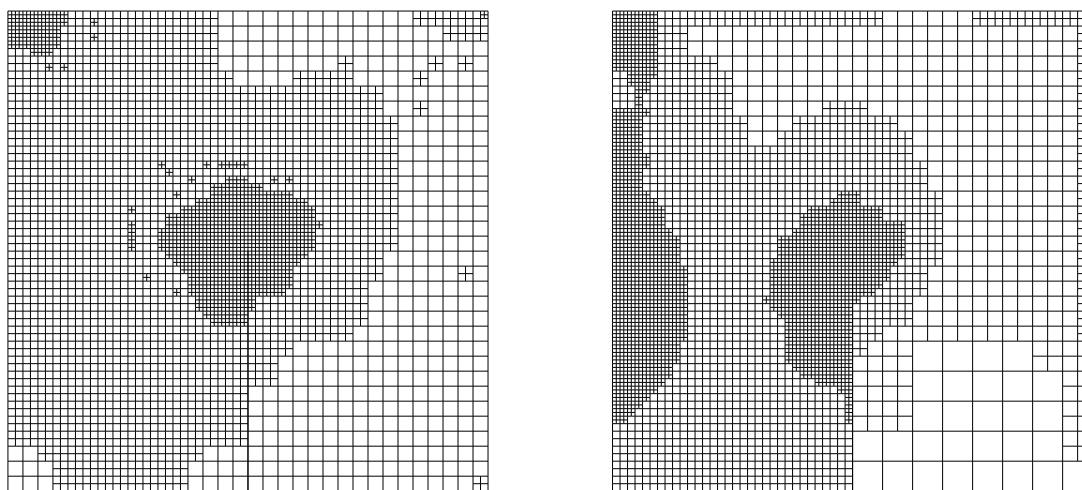
Die erste Komponente  $\sigma_{11}(t, -1, 1)$  des Spannungstensors





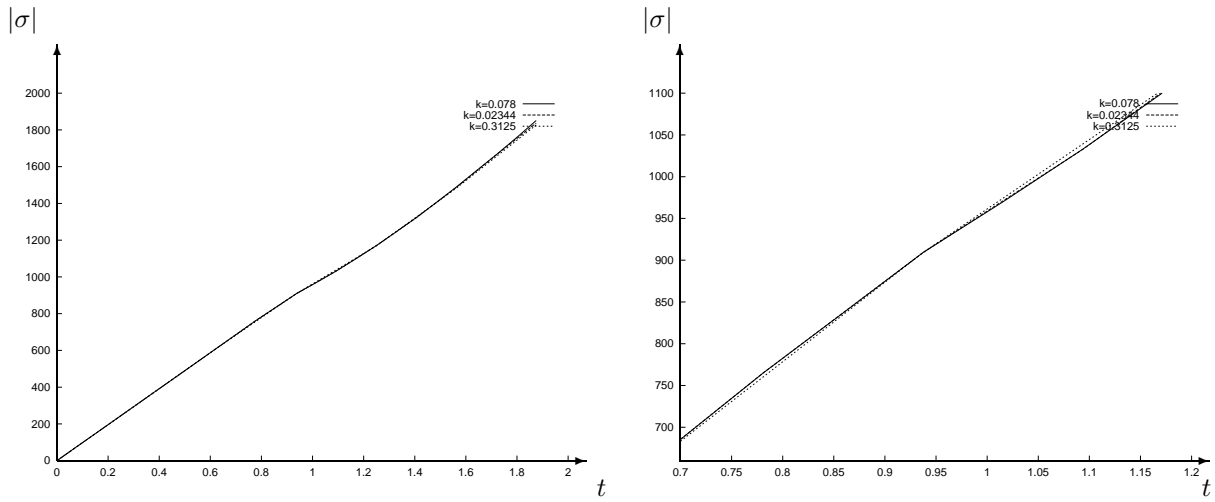
Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, |\sigma^h|(t_n, -1, 1))$  von der Gittergröße "cells"

Bei der 60% Verfeinerung der Zellen mit größtem Fehler hat man die Gitter:

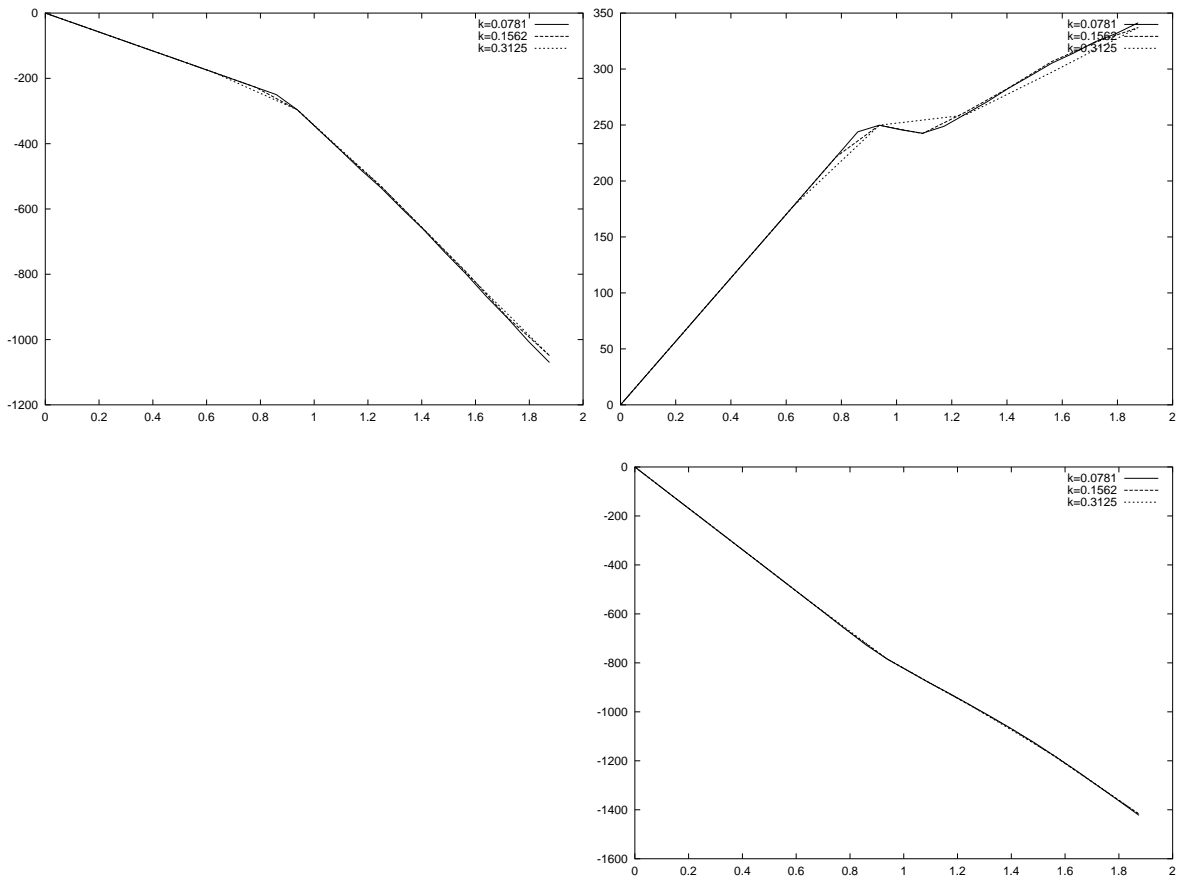


Adaptives Gitter der 5. Verfeinerungsstufe mit 4045 bzw. 4567 Zellen für den ZZ- bzw. residualen Fehlerschätzer

Auf dem Gitter mit 4096 Zellen sieht der Spannungstensor im Punkte  $(-1, 1)^T$  in Abhängigkeit von der Schrittweite  $k$  wie folgt aus:

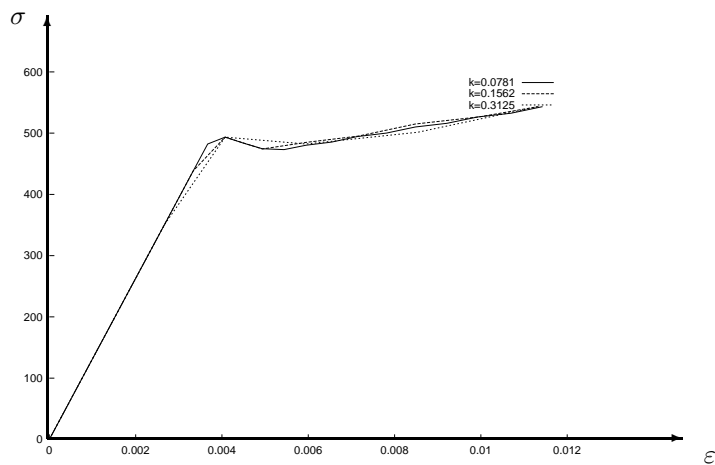


$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, |\sigma^h|(t_n, -1, 1))$  (gezoomter Graphenteil rechts)



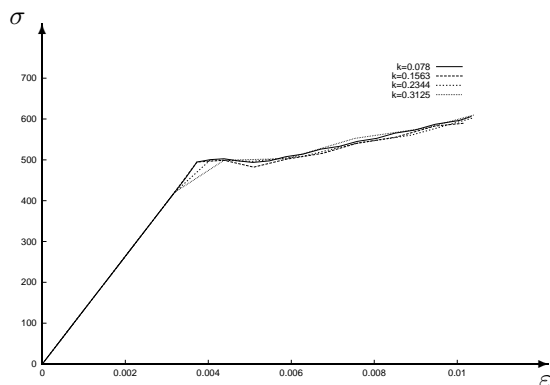
$k$ -Abhängigkeit der linearen Interpolation von  $(t_n, \sigma_{11}^h(t_n, -1, 1))$ ,  
 $(t_n, \sigma_{12}^h(t_n, -1, 1)) = (t_n, \sigma_{21}^h(t_n, -1, 1))$  und  $(t_n, \sigma_{22}^h(t_n, -1, 1))$

Das  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für die gleichen Eingaben ist:

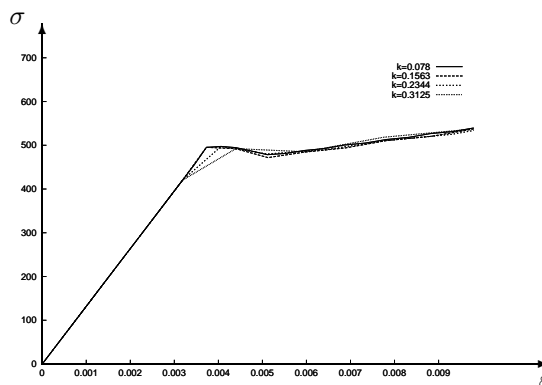


$\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm im Punkte  $(-1, 1)^T$

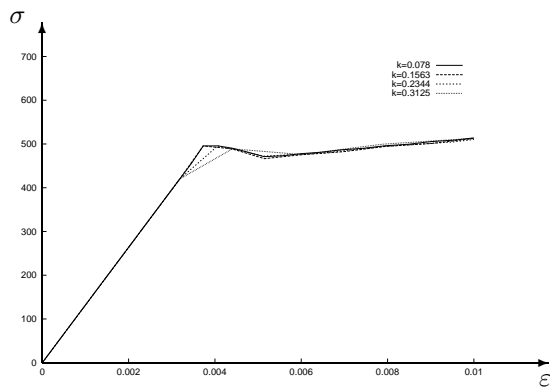
Die unteren  $\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramme in demselben Punkt entsprechen der Reihe nach den Werten von  $\alpha = 0, 0.4, 0.6$  und  $1$ .



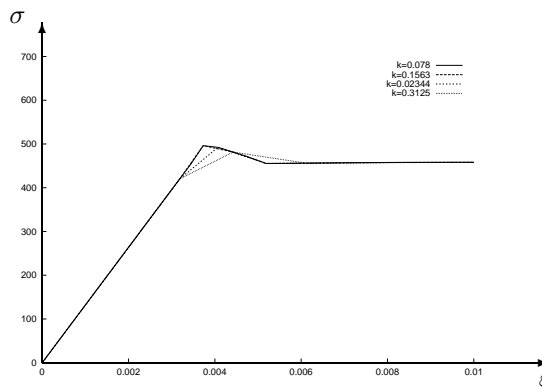
$\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für  $\alpha = 0$



$\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für  $\alpha = 0.4$



$\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für  $\alpha = 0.6$



$\sigma$ - $\varepsilon$ -Diagramm für  $\alpha = 1$

## Literaturverzeichnis

- [1] Adams, A.: *Sobolev Spaces*. Pure and applied mathematics; 65. Academic Press, Inc., Orlando-San Diego-New York u.a., 1975.
- [2] Alt, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Hochschultext. Springer, Berlin-Heidelberg-New York u.a., 1985.
- [3] Becker, R., Kanschat, G., Suttmeier, F. T.: *DEAL-differential equation analysis library*. Verfügbar über [www.math.uni-siegen.de/suttmeier/deal/deal.html](http://www.math.uni-siegen.de/suttmeier/deal/deal.html), 1998.
- [4] Bangerth, W., Kanschat, G., Hartmann, R.: *DEAL-differential equation analysis library*, Version 5.2.0. Verfügbar über [www.dealii.org/5.2.0/index.html](http://www.dealii.org/5.2.0/index.html), 2005.
- [5] Bensoussan, A., Frehse, J.: *Asymptotic behaviour of the time dependent Norton-Hoff law in plasticity theory and  $H^1$  regularity*. Comment.-Math.-Univ.-Carolin. 37, no. 2, pp. 285-304, 1996.
- [6] Bensoussan, A., Frehse, J.: *Regularity results for nonlinear elliptic systems and applications*. Applied mathematical sciences; 151. Springer, Berlin-New York-London u. a., 2002.
- [7] Braess, D.: *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Lehrbuch. Springer, Berlin-Heidelberg-New York-London u.a., 1992.
- [8] Ciarlet, P. G.: *Mathematical elasticity/1. Three-dimensional elasticity*. Studies in mathematics and its applications; 20. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1988.
- [9] Ciarlet, P. G.: *The finite element method for elliptic problems*. Studies in mathematics and its applications; 4. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1978.
- [10] Duvaut, G., Lions, J. L.: *Inequalities in mechanics and physics*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 219. Springer, Berlin-Heidelberg-New York u.a., 1976.
- [11] Evans, L. C.: *Partial differential equations*. Graduate studies in mathematics; 19. American mathematical society, Providence, Rhode Island, 2002
- [12] Frehse, J.: *Skript zur Vorlesung Funktionalanalysis I*. Verfügbar über [www.iam.uni-bonn.de/AngewandteAnalysis/index.html](http://www.iam.uni-bonn.de/AngewandteAnalysis/index.html), 1999.
- [13] Han, W., Reddy, B. D.: *Plasticity. Mathematical theory and numerical analysis*. Interdisciplinary applied mathematics; 9. Springer, New York-London u. a., 1999.

- [14] Hencky, H.: *Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nebenspannungen*. Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics, Delft, pp. 312-317, 1924.
- [15] Holst, M.: *MCLite: An adaptive multilevel finite element MATLAB package for scalar nonlinear elliptic equations in the plane*. UCSD Technical report and guide to the MCLite software package, 2000.
- [16] John, F.: *Partial differential equations*. Applied mathematical sciences; 1. Springer, Berlin-New York-London u. a., 1986.
- [17] Johnson, C.: *Existence theorems for plasticity problems*. Journal de mathématiques et appliquées 55, pp. 431-444, 1976.
- [18] Johnson, C.: *On finite element methods for plasticity problems*. Numerische Mathematik 26, pp. 79-84., 1976.
- [19] Korneev, V. G., Langer, U.: *Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems*. Teubner-Texte zur Mathematik; 69. Teubner, Leipzig, 1984.
- [20] Kratochvíl, J., Malék, J., Rajagopal, K. R., Srinivasa, A. R.: *Modeling of the response of elastic plastic materials treated as a mixture of hard and soft regions*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) 55, pp. 500-518, 2004.
- [21] Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: *Theory of elasticity*. Course of theoretical physics-Landau; Vol. 7. Pergamon Press, London, 1959.
- [22] Mazza, E., Sayir, M. B.: *Mechanik*. Verfügbar über [www.mi.imes.ethz.ch/docs/Symposium-02-Mechanik.pdf](http://www.mi.imes.ethz.ch/docs/Symposium-02-Mechanik.pdf), 2002.
- [23] Meyers, S.: *Effektiv C++ programmieren*. Addison-Wesley, München, 2005.
- [24] Prandtl, L.: *Spannungsverteilung in plastischen Körpern*. Proceedings of the 1st International Congress on Applied Mechanics, Delft, pp. 43-54, 1924.
- [25] Rajagopal, K. R., Srinivasa, A.: *Mechanics of the inelastic behavior of materials-Part 1: Theoretical underpinnings*. International Journal of Plasticity 14, pp. 945-967, 1998.
- [26] Rajagopal, K. R., Srinivasa, A.: *Mechanics of the inelastic behavior of materials-Part 2: Inelastic response*. International Journal of Plasticity 14, pp. 969-995, 1998.
- [27] Rajagopal, K. R., Srinivasa, A.: *On the inelastic behavior of solids-Part 2: Energetics associated with discontinuous deformation twinning*. International Journal of Plasticity 11, pp. 1-35, 1997.

- [28] Rannacher, R., Suttmeier, F. T.: *Error estimation and adaptive mesh design for FE models in elasto-plasticity*. Error-Controlled Adaptive FEMs in Solid Mechanics (Editor E. Stein), John Wiley, Chichester, pp. 5–52, 2002.
- [29] Reuss, E.: *Berücksichtigung der elastischen Formänderungen in der Plastizitätstheorie*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM) 10, pp. 266-274, 1930.
- [30] Ruzicka, M.: *Skript zur Vorlesung Funktionalanalysis II*. Verfügbar über [www.iam.uni-bonn.de/AngewandteAnalysis/index.html](http://www.iam.uni-bonn.de/AngewandteAnalysis/index.html), 1999.
- [31] Stroustrup, B.: *Die C++ Programmiersprache*. Addison-Wesley, München, 2000.
- [32] Suttmeier, F. T.: *Adaptive finite element approximation of problems in elasto-Plasticity Theory*. Dissertation, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, 1996.
- [33] Suttmeier, F. T.: *Fehlerschätzung und adaptive Gittersteuerung für Elasto-Plastizitätsprobleme*. Verfügbar über [www.mathematik.uni-dortmund.de/lx/research/projects/suttmeier/plastiwww/node4.html](http://www.mathematik.uni-dortmund.de/lx/research/projects/suttmeier/plastiwww/node4.html), 2000.
- [34] Suttmeier, F. T.: *An adaptive displacement/pressure finite element scheme for treating incompressibility effects in elasto-plastic materials*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 17(4):369-382, 2001.
- [35] Temam, R.: *Mathematical problems in plasticity*. Gauthier-Villars, Paris, 1985.
- [36] Temam, R.: *Navier-Stokes equation*. Studies in mathematics and its applications; 2. North-Holland Publishing Company, Amsterdam-New York-Oxford, 1977.
- [37] Truesdell, C.: *A first course in rational continuum mechanics*. Pure and applied mathematics; 71. Academic Press, New York-San Francisco-London, 1977.
- [38] Verfürth, R.: *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh refinement techniques*. Wiley Teubner series advances in numerical mathematics. Willey/Teubner, Stuttgart, 1996.
- [39] Sohr, H.: *The Navier-Stokes equations: an elementary functional analytic approach*. Birkhäuser advanced texts. Birkhäuser, 2001.
- [40] Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z.: *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 24 337 - 357, 1987.

**Weitere Quellen**

- Frehse, J.: *Mitschrift zur Vorlesung "Kontinuumsmechanik"*, WS99/00.
- Rumpf, M.: *Mitschrift zur Vorlesung "Numerik partieller Differentialgleichungen"*, WS98/99, SS99.
- *PlanetMath.org*. Verfügbar über <http://planetmath.org/encyclopedia/>.
- *Mathematic online lexikon*. Verfügbar über <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/lexikon/>.
- *Wikipedia, freie Enzyklopädie: Kontinuumsmechanik*. Verfügbar über <http://de.wikipedia.org/wiki/Kontinuumsmechanik>.
- Mielke, A., Groves, M. D.: *Angewandte Analysis*. Verfügbar über [www.wias-berlin.de/people/mielke/diverses/brosch.pdf](http://www.wias-berlin.de/people/mielke/diverses/brosch.pdf).





## Sachverzeichnis

- Approximation, Norton-Hoff
  - Hencky-Modell 31
  - Prandtl-Reuss-Modell 46
- charakteristisches Polynom 8
- Deformation,
  - elastische 12
  - linear elastische 12
  - plastische 15
- Deformationsgeschichte 11
- deformierende Krafe
  - s. Kraft, äußere
- Deviator 8
- Diagram,  $\sigma$ - $\varepsilon$  15
- Dirac-Funktional 80
- Dissipationsgeschwindigkeit 16
- Dissipationsungleichung, lokale 16
- Einstein'sche Summenkonvention 8
- elastischer Bereich 18
- elastisches Entladen 18
- Elastizitätstensor 12
- Energie-Norm 68
- Fehlerabschätzung,
  - residuale 74
  - ZZ-Fehlerschätzer 76
- Fließbedingung, von Mises' 18
- Fließfläche 18
- Fließgrenze 17
- Fließpunkt 18
- Formulierung, gemischte 22
  - primal-gemischte 23
  - dual-gemischte 23
- Funktion,
  - von Mises' 15
  - Treppenfunktion 47
- Geschwindigkeit 6
- Gleichung
  - Bewegungsgleichung 8
  - Gleichgewichtsgleichung 8
  - Helmholtz-Potential 12
  - Helmholtz freie Energie
    - s. Helmholtz-Potential
  - homogen 12
  - Initialisierungsfließpunkt 15
  - Interpolation, lineare 47, 58
  - isotrop 13
  - Jacobi-Matrix 9
  - koerzitiv 22
  - Konfiguration,
    - aktuelle 6
    - natürliche 19
    - Referenzkonfiguration 6
  - Kraft, äußere 6
  - Lamé-Koeffizienten 13
  - Modell,
    - Hencky 23
    - Prandtl-Reuss 22
  - Moment,
    - Drehmoment 7
    - lineares 7
  - Norm,
    - Frobenius-Norm eines Tensors 15
    - $l_2$ -Norm 10
    - $L^2$ -Norm eines Tensors 24
    - $L^q$ -Norm 32
  - Norton-Hoff-Lösung 31
  - plastische Länge 27
  - plastischer Multiplikator 21
  - Problem,
    - quasistatisches 13, 17, 45
    - stationäres 13, 30
  - plastische Beladung 18
  - Postulat der minimalen Dissipationsgeschwindigkeit 20
  - Residuum 71

- safe load condition 30
  - zeitabhängige 46
- Spannung,
  - zulässige 18
  - s. Spannungstensor
- Spannungstensor 7
- Spannungsvektor, Cauchy 7
- Symmetrieeigenschaften,
  - einer Matrix 22
  - des Elastizitätstensors 12
- symmetrische Ableitung 10
- Stoffgesetz von Hook,
  - lineares 12
  - verallgemeinertes 16
- Träger 60
- unkomprimierbar 11
- Variationsungleichung,
  - Hencky-Modell 39
  - Prandtl-Reuss-Modell 63
- Verfestigung 16
- Verschiebung 6
- Verzerrung 9
  - elastische 16
  - plastische 16
- Verzerrungstensor 10

## Symbolverzeichnis

|                                   |  |
|-----------------------------------|--|
| $\dot{u}, \ddot{u}$               | Zeitableitung von $u$ bzw. $\dot{u}$ 6               |
| $a \wedge b$                      | Vektorprodukt 7                                      |
| $\int_{\partial V} \varphi \, do$ | Oberflächenintegral 7                                |
| $div \sigma$                      | Divergenz 8  |
| $Id$                              | Identität 8  |
| $tr A$                            | Spur der Matrix $A$ 8                                |
| $A^D$                             | Deviator des tensors $A$ 8                           |
| $P(\cdot)$                        | charakteristisches Polynom 8                         |
| $\det$                            | Determinante 8                                       |
| $\nabla \phi$                     | Gradient $\phi$ 9                                    |
| $ b $                             | $l_2$ -Norm des Vektors $b$ 10                       |
| $a \cdot b$                       | Skalarprodukt der Vektoren $a$ und $b$ 10            |
| $\varepsilon(u)$                  | symmetrische Ableitung von $u$ 10                    |
| $A : B$                           | Skalarprodukt der Tensoren $A$ und $B$ 12            |
| $\delta_{kl}$                     | Kronecker-Symbol 13                                  |
| $Aa$                              | Multiplikation der Matrix $A$ mit dem Vektor $a$ 14  |
| $ A $                             | Frobenius-Norm der Matrix $A$ 15                     |
| $\nabla_\lambda$                  | Gradient bezüglich $\lambda$ 19                      |
| $\Pi(\cdot)$                      | Projektion auf den Raum der zulässigen Spannungen 24 |
| $\ \cdot\ $                       | $L^2$ -Norm eines Tensors 24                         |
| $\ \cdot\ _{L^q(\Omega)}$         | $L^q$ -Norm 32                                       |
| $supp \varphi$                    | Träger der Funktion $\varphi$ 41                     |
| $V \subset\subset \Omega$         | Teilmenge $V$ ist in $\Omega$ kompakt enthalten 41   |
| $\ \tau\ _W$                      | $\sqrt{\int_\Omega \tau : \tau \, dx}$ 45            |
| $\ \tau\ _{L^q(0,T;W)}$           | $(\int_I \ \tau(t)\ ^q \, dt)^{\frac{1}{q}}$ 45      |
| $\ \tau\ _{L^\infty(0,T;W)}$      | $ess \sup_{t \in I} \ \tau(t)\ $ 45                  |
| $\ \cdot\ _A$                     | Energienorm 68                                       |
| $\#A$                             | Anzahl der Elemente der Menge $A$ 76                 |

## Mengen

|                                  |  |
|----------------------------------|--|
| $\Omega$                         | Körper in der Anfangskonfiguration 6                                   |
| $I$                              | Zeitintervall 6  |
| $\Omega_t$                       | Körper in der aktuellen Konfiguration 6                                |
| $\partial\Omega$                 | Rand von $\Omega$ 14   |
| $\Gamma_D$                       | Dirichlet-Rand 14  |
| $\Gamma_N$                       | Neumann-Rand 14  |
| $[H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3$ | Abschluß von $V$ bezüglich $H^{1,2}$ -Norm 14                          |
| $S$                              | Menge der zulässigen Spannungen 18                                     |
| $S^c$                            | Komplement der Menge $S$ 18  |
| $W$                              | Raum der symmetrischen $[L^2(\Omega)]^{dim \times dim}$ -Funktionen 22 |
| $V$                              | $[H_{\Gamma_D}^{1,2}(\Omega)]^3$ 22                                    |

|                              |   |
|------------------------------|---|
| $H^{div}$                    | $\{\tau \in W \mid \operatorname{div} \tau \in [L^2(\Omega)]^3\}$ 22  |
| $H_{f,g}^{div}$              | $\{\tau \in H^{div} \mid -\operatorname{div} \tau = f \text{ in } \Omega, \tau n = g \text{ auf } \Gamma_N\}$ 23    |
| $H_{*,g}^{div}$              | $\{\tau \in H^{div} \mid \tau n = g \text{ auf } \Gamma_N\}$ 23   |
| $\Pi(\Sigma)$                | Projektion der Menge $\Sigma$ auf die deviatorische Ebene 23  |
| $\Omega_s$ bzw. $\Omega_h$   | weiche bzw. harte Referenzkonfigurationen 26  |
| $K$                          | $\{(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W \mid \alpha \sigma_s + (1 - \alpha) \sigma_h \in H_{f,g}^{div}(\Omega)\}$ 31 |
| $M$                          | $\{(\sigma_s, \sigma_h) \in W \times W \mid  \sigma_s^D  \leq \mu_s,  \sigma_h^D  \leq \mu_h\}$ 31                  |
| $K^q$                        | zulässige Menge der statischen Norton-Hoff-Approximation 31   |
| $V \pm k$                    | $\{x \pm k e_j \mid x \in V, j \in \{1, 2, 3\}\}$ 44  |
| $C(t_0, T; [L^2(\Omega)]^3)$ | stetige bezüglich des ersten Argumentes Funktionen 46   |
| $K^q(t_n)$                   | zulässige Menge der quasi-statischen Norton-Hoff-Approximation 47   |
| $ f (t) > \mu(t)$            | $\{x \in \Omega \mid  f (t, x) > \mu(t)\}$ 51   |

Soweit nichts anderes aus dem Kontext ersichtlich ist, sind die folgenden Variablen- bzw. Funktionsnamen festgelegt:

|  |  |
|--|--|
| $u$  | Verschiebung 6   |
| $v$  | Geschwindigkeit 6  |
| $\sigma$   | Spannungstensor 7  |
| $\phi_t(x)$  | aktuelle Position des Punktes mit den Anfangskoordinaten $x$ 9 |
| $J_t$  | Determinante der Jacobi-Matrix von $\phi_t$ 9                  |
| $\psi^t(s)$  | Deformationsgeschichte 11                                      |
| $\psi$   | Helmholtz-Potential 12   |
| $(C_{ijkl})_{ijkl=1}^3$                              | Elastizitätstensor 12  |
| $\lambda, \mu$                                       | Lamé-Koeffizienten 13  |
| $u _{\Gamma_D}$                                      | Einschränkung von $u$ auf $\Gamma_D$ 14                        |
| $F$  | Fließfunktion von R. von Mises' 15                             |
| $\sigma_0$   | Fließpunkt 15  |
| $\varepsilon^e$ bzw. $\varepsilon^p$                 | elastischer bzw. plastischer Anteil der Verzerrung 16          |
| $\delta(\dot{\varepsilon})$                          | Dissipationsgeschwindigkeit 16                                 |
| $\psi^e$   | elastischer Anteil der Helmholtz Energie 17                    |
| $\psi^p$   | plastischer Anteil der Helmholtz Energie 17                    |
| $(A_{ijkl})_{ijkl=1}^3$                              | Inverse des Elastizitätstensors $C$ 22                         |
| $t_n$  | $n$ . Stützstelle 25   |
| $\phi_n$   | Funktionswert von $\phi$ an der Stelle $t_n$ 25                |
| $\alpha$   | Anteil des weichen Stoffes in der Mischung 26                  |
| $\psi_s$ bzw. $\psi_h$                               | Helmholtzpotential des weichen bzw. harten Stoffes 27          |
| $\dot{\varepsilon}_s^e$ bzw. $\dot{\varepsilon}_h^e$ | weicher bzw. harter Anteil der elastischen Verzerrung 27       |
| $\dot{\varepsilon}_s^p$ bzw. $\dot{\varepsilon}_h^p$ | weicher bzw. harter Anteil der plastischen Verzerrung 27       |
| $\sigma_s, \sigma_h$                                 | weicher und harter Anteil der Spannung $\sigma$ 27             |
| $\gamma$   | plastische Länge 27  |
| $\mu_s, \mu_h$                                       | weiche und harte Fließgrenze 28                                |
| $J(\cdot, \cdot)$                                    | das zu minimierende Funktional für das Hencky-Modell 31        |
| $J_q(\cdot, \cdot)$                                  | Norton-Hoff-Approximation für das Hencky-Modell 31             |
| $J_n(\cdot, \cdot)$                                  | zu minimierendes Funktional für das Prandtl-Reuss-Modell 45    |

|                        |   |
|------------------------|---|
| $J_{qn}(\cdot, \cdot)$ | Norton-Hoff-Approximation für das Prandtl-Reuss-Modell 46               |
| $\bar{\tau}(t)$        | Treppenfunktion von $\tau(t)$ 47  |
| $\tilde{f}(t)$         | lineare Interpolation von $f$ 47  |
| $\hat{f}(t)$           | $\frac{1}{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\xi) d\xi, t \in [t_{n-1}, t_n)$ 57 |
| $dim$                  | Raumsdimension 67   |
| $comp(j), base(j)$     | Charakteristiken der FE-Basisfunktionen 72                              |
| $e_u$                  | exakter Verschiebungsfehler 74  |
| $[\cdot]_{\Gamma}$     | Sprung an der Kante $\Gamma$ 74   |
| $e_u^h$                | approximativer Verschiebungsfehler 82                                   |
| $e_{\sigma}$           | exakter Spannungsfehler 83  |
| $e_{\sigma}^h$         | approximativer Spannungsfehler 83                                       |
| $E^{rel}$              | relativer Fehler 87   |