

Modellierung und Existenztheorie dünner Filme auf evolvierenden Flächen

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Uwe Wolfram Fermum

aus

Bochum

Bonn, November 2009

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Hans Wilhelm Alt

2. Gutachter: Prof. Dr. Martin Rumpf

Tag der Promotion: 21. Juni 2010

Erscheinungsjahr: 2010

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
1.1	Physikalische Anwendungen	4
1.2	Zusammenfassung der Ergebnisse	7
1.3	Vorgehensweise	10
1.4	Numerische Darstellung	12
2	Modellierung dünner Filme auf evolvierenden Flächen	14
2.1	Das Ausgangsmodell	14
2.2	Modellierung der Dünnschichtgleichung	16
2.3	Modellierung der Surfactantgleichung	29
2.4	Spezielle Fälle	33
3	Existenz für die Dünnschichtgleichung auf evolvierenden Flächen	35
3.1	Galerkin-Approximation	35
3.2	Grenzübergang zu degenerierten Koeffizienten	55
3.3	Grenzübergang zu unbeschränkten Koeffizienten	72
4	Existenz für das Surfactant-System auf evolvierenden Flächen	83
4.1	Galerkin-Approximation	83
4.2	Grenzübergang zu degenerierten Koeffizienten	100
4.3	Grenzübergang zu unbeschränkten Koeffizienten	107
5	Erweiterungen und Grenzen der Methoden und des Modells	116
6	Appendix	120
6.1	Explizite Berechnung des Drucks und der Geschwindigkeit	120
6.2	Verwendete Sätze für Analysis auf Flächen	129
6.3	Symbolverzeichnis	130
	Literaturverzeichnis	131

1 Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Modellierung und Existenztheorie von dünnen Filmen inkompressibler, viskoser Flüssigkeiten auf evolvierenden, d.h. sich bewegenden, gekrümmten Flächen. Wir werden sehen, wie eine Erhaltungsgleichung für einen dünnen Film durch Lubrikationsapproximation im schwachen Sinne hergeleitet werden kann und wie wir so eine nichtlineare, degeneriert parabolische Gleichung vierter Ordnung auf einer bewegten Fläche erhalten. Weiterhin erhalten wir auf die selbe Weise eine gekoppelte nichtlineare Gleichung für die Dynamik eines unlöslichen Surfactants. Die Hauptaufgabe dieser Arbeit besteht darin, die Existenz von Lösungen dieser Gleichungen zu zeigen. Wir werden einen Existenzsatz für einen dünnen Film auf einem zweidimensionalen bewegten Substrat sowie einen Existenzsatz für das gekoppelte System von dünnem Film und Surfactant auf einem eindimensionalen bewegten Substrat beweisen. In beiden Fällen sei die Bewegung des Substrats a priori vorgegeben. Wir setzen also in dieser Arbeit voraus, dass eine Kopplung der Substratbewegung an die Dynamik des Films nicht berücksichtigt wird.

Dünne Filme auf gekrümmten Flächen treten in einer Vielzahl von technischen, physikalischen und biophysikalischen Anwendungen auf. Dabei steht die Benetzung der Alveolen (Lungenbläschen) während dem respiratorischen Zyklus in unserem besonderen Interesse. Man weiß, dass oberflächenaktive Substanzen, sogenannte Surfactants (surface active agents) eine lebensnotwendige Rolle bei der Atmung spielen. Aufgrund der Geometrie eines Alveolus macht es Sinn das gekoppelte System aus dünnem Film und Surfactant auf einer gekrümmten Fläche zu betrachten. Eine weitere Anwendung tritt bei der Enteisierung von Tragflächen in der Luftfahrt auf.

Da sich während der Atmung die Alveolen in einem Zyklus der ständigen Kontraktion und Expansion befinden, ist es sinnvoll, dünne Filme und auch das gekoppelte System nicht nur auf gekrümmten sondern auf evolvierenden Flächen zu untersuchen. Eine weitere Anwendung von nichtlinearen, degeneriert parabolischen Gleichungen vierter Ordnung auf evolvierenden Flächen besteht in der Modellierung von Phasenseparation auf der freien Oberfläche während dem Lösungsprozess von Legierungen.

1.1 Physikalische Anwendungen

Dünne Filme konstanter Oberflächenspannung

Benetzungsvorgänge von inkompressiblen, viskosen Flüssigkeiten finden eine breite Anwendung, nahe liegend sind z.B. viskose Farben und Lacke. Ein aufgetragener Film besitzt im Allgemeinen zunächst unerwünschte Unebenheiten, jedoch führen auf einem ebenen Substrat kapillare Kräfte zu einem gleichmäßigen Film auch in Abwesenheit von Gravitation. Für die Modellierung des klassischen Falls eines dünnen Films konstanter Oberflächenspannung auf einem ebenen Substrat verweisen wir auf die Übersichtsartikel [ODB] und [My]. Die Struktur der Gleichung ist eine nichtlineare, degeneriert parabolische Gleichung vierter Ordnung. Dabei ist die Erhaltungsgröße die Filmhöhe h , die im inkompressiblen Fall proportional zur lokalen Flüssigkeitsmenge ist. Eine typische Gleichung lautet:

$$\partial_t h + \operatorname{div}\left(\frac{1}{3}h^3 \nabla \Delta h\right) = 0.$$

Man sieht leicht ein, dass die entsprechenden Benetzungsvorgänge auf gekrümmten Flächen ebenfalls eine breite Anwendung finden. Im Allgemeinen wird die Oberflächenspannung in diesem Fall keinen gleichmäßigen Film produzieren. Aufgrund des Bestrebens die Oberfläche zu minimieren wird der Film sich in Einbuchtungen verdicken und auf Ausbuchtungen verdünnen. Modellgleichungen wurden in [RSw], [RRS] und [SW] entwickelt und numerisch untersucht. Dabei wurden außer Kapillarität und Viskosität auch zusätzliche Effekte berücksichtigt, wie z.B. Gravitation, Van-der-Waals-Kräfte, Marangonikräfte und Ablagerung (siehe auch [RL], [MCC]). Auf einem gekrümmten Substrat ist nicht mehr die Filmhöhe h die geeignete Erhaltungsgröße, sondern $\varrho = h - \epsilon \frac{1}{2} k h^2 + \epsilon^2 \frac{1}{3} \mathfrak{K} h^3$, die lokale Flüssigkeitsmenge oberhalb eines infinitesimalen Flächenstücks. Dabei bezeichnet k die mittlere Krümmung und \mathfrak{K} die Gauß-Krümmung des Substrats. Eine dort vorgestellte Erhaltungsgleichung als Approximation des Problems lautet:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}^M \left(\frac{1}{3} h^2 \varrho \nabla^M \kappa - \frac{1}{6} h^4 \epsilon (k Id - K) \nabla k \right) = 0. \quad (1.1.1)$$

Hierbei bezeichnet κ die mittlere Krümmung des freien Interfaces, die von der Krümmung des Substrats abhängt, und K die Weingarten-Abbildung des Substrats. Bei der Berechnung von κ treten Terme mit verschiedenen Skalierungsordnungen im Parameter ϵ auf. Dabei beschreibt $\epsilon = \frac{H}{L}$ das Verhältnis von Höhen- zu Längenskala. Man betrachtet nicht wie im klassischen Fall den Limes $\epsilon \rightarrow 0$, sondern rechnet approximativ bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Deshalb findet man in der Literatur unterschiedliche Varianten der Gleichung, die jedoch zur betrachteten Ordnung äquivalent sind.

Einen Ansatz für eine Dünnschichtgleichung auf einem gekrümmten, bewegten Substrat findet man in [How]. Die Herleitung beruht (wie im stationären Fall) auf der Tatsache, dass es ein Koordinatensystem gibt, in dem die Fundamentalformen zu jedem Zeitpunkt diagonalisieren. Die dort entwickelte Erhaltungsgleichung als Approximation des Problems lautet dann (in unserer Notation):

$$\frac{D^M}{Dt}h + \operatorname{div}^M(v)h + \operatorname{div}^M\left(\frac{1}{3}h^3\nabla^M\kappa\right) = 0.$$

Dabei bezeichnet v die Geschwindigkeit des Substrats und $\frac{D^M}{Dt}$ die konvektive Ableitung. Die lokale Veränderung der Flüssigkeitsmenge durch Kontraktion oder Expansion des Substrats wird durch den Zusatzterm der tangentialen Divergenz der Geschwindigkeit berücksichtigt.

Die Rolle oberflächenaktiver Substanzen während der Atmung

In wichtigen praktischen Fällen hängt die Oberflächenspannung von weiteren Faktoren ab, wie z.B. von der Temperatur oder von Verunreinigungen mit unlöslichen, oberflächenaktiven Substanzen. Moleküle mit hydrophilem Kopf und hydrophoben Schwänzen bilden Monolayer auf der Flüssigkeitsoberfläche und senken in hoher Konzentration die Oberflächenspannung gegenüber Regionen mit niedriger Konzentration ab. Die geringste Oberflächenspannung liegt bei kritischer Micellenbildungskonzentration vor. Gradienten der Oberflächenspannung führen zu Scherspannung auf dem Interface und treiben die Flüssigkeit in Richtung höherer Oberflächenspannung, was auch als Marangoni-Effekt bekannt ist.

Eine wichtige Rolle wird dem Marangoni-Effekt während der Atmung zugesprochen. Die Alveolen der menschlichen Lunge sind mit einem dünnen Film bedeckt, dessen Oberflächenspannung durch Surfactantmoleküle verringert wird. Während dem respiratorischen Zyklus befinden sich die Alveolen in einem Prozess ständiger Kontraktion und Expansion. Der Expansionsprozess, der gegen die Oberflächenspannung Arbeit verrichten muss, wäre ohne einen Surfactant an der Oberfläche der Flüssigkeit nicht möglich. Bei frühgeborenen Kindern ist die Lunge oft nicht dazu fähig, Surfactant in genügender Menge zu produzieren. Man spricht von RDS (Respiratory Distress Syndrome), was eine der häufigsten Todesursachen von Neugeborenen ist. Die Behandlung besteht darin, der Lunge mit Hilfe eines Aerosols künstlich zusätzlichen Surfactant zuzuführen. Die Ausbreitung des Surfactants erfolgt dann aufgrund einer Kombination verschiedener physikalischer Effekte, vor allem Advektion und Diffusion, wobei die Advektion vor allem durch Kapillarität und Marangoni-Effekt getrieben wird.

In den Arbeiten [BG], [GG], [JG] werden mathematische Modelle für die Evolution eines dünnen Films unter dem Einfluss oberflächenwirksamer Substanzen entwickelt. Dazu betrachtet man ein gekoppeltes System aus Erhaltungsgleichungen für Flüssigkeit und Surfactants und verwendet Lubrikationstheorie, um eine Gleichung vom dünnen Film Typ für die Filmhöhe h der Flüssigkeit und eine weitere, an die Geschwindigkeit der Flüssigkeit gekoppelte Advektions- und Diffusionsgleichung für die Surfactantkonzentration Γ herzuleiten. Ein solches System lautet (ohne Terme von Gravitation und Van-der-Waals-Kräften) im Mehrdimensionalen formuliert:

$$\begin{aligned} \partial_t h + \operatorname{div}\left(Sa\frac{1}{3}h^3\nabla\Delta h + \frac{1}{2}h^2\nabla\sigma\right) &= 0, \\ \partial_t \Gamma + \operatorname{div}\left(Sa\frac{1}{2}\Gamma h^2\nabla\Delta h + \Gamma h\nabla\sigma\right) &= \mathcal{P}e^{-1}\Delta\Gamma. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Dabei bezeichnen Sa und $\mathcal{P}e^{-1}$ Kapillaritäts- bzw. Diffusionskonstanten und σ die von Γ abhängige Oberflächenspannung. Terme höherer Ordnung für dieses System wurden in [RSi] betrachtet. Unter Vernachlässigung von Kapillarität und Surfactant-Diffusion wurden in [BG] und [JG] stationäre Zustände betrachtet und Ausbreitungsraten untersucht. Weiterhin wurden Ähnlichkeitslösungen und asymptotisches Verhalten studiert. In [WJ] wurden diese Überlegungen auf zweidimensionale Probleme übertragen. Die analytischen und numerischen Untersuchungen zeigen, dass der Marangoni-Effekt

am Rand des Monolayers zu einer schockartigen Ausbreitung der Flüssigkeit führt und einen Krater verringerter Filmhöhe hinterlässt. Die Filmdeformation wird durch Diffusion der Surfactants und durch Kapillarität geglättet. Häufig wird eine lineare Abhängigkeit der Oberflächenspannung von der Surfactant-Konzentration angenommen, in [BG] und [JG] wurden auch nichtlineare Modelle vorgestellt.

Tragflächenenteisung mit Hilfe von Benetzungsmitteln

Eine weitere Anwendung von dünnen Filmen mit Surfactants auf gekrümmten (stationären) Flächen tritt bei der Enteisung von Flugzeugflügeln auf. Hierbei wird ein dünner Film einer Mischung von Ethylen- oder Propylenglykol und Wasser sowie Beimengungen von Benetzungsmitteln auf die Tragflächen aufgesprüht, um eine vorhandene Eisschicht entweder thermisch oder chemisch abzuschmelzen. Glykol hat dabei die Eigenschaft den Gefrierpunkt herabzusetzen. Es treten Gradienten in der Oberflächenspannung auf, da die Wirkung der Benetzungsmittel die Oberflächenspannung zu reduzieren stark von der Konzentration von Glykol bzw. Wasser und insbesondere Schmelzwasser abhängt. Marangonieffekte können dann zum Abreißen des dünnen Films führen. Dieser Effekt wurde in [DMS] beschrieben.

Phasentrennung auf der Oberfläche bei Lösungsprozessen von Legierungen

Die letzte Anwendung, die wir hier vorstellen möchten, ist die Modellierung von Lösungsprozessen von Legierungen und der dabei auftretenden Phasentrennung an der Oberfläche. Die Gleichungen, die dabei auftreten, gehören ebenfalls zur Klasse der nichtlinearen, degeneriert parabolischen Differentialgleichungen vierter Ordnung, die bei der Existenztheorie im Wesentlichen die gleichen mathematischen Schwierigkeiten mit sich bringen.

Ziel der Arbeit von [EAKDS] war es, ein mathematisches Modell für die Ausbildung einer porösen Struktur auf der Oberfläche von Legierungen beim elektrolytischen Lösungsprozess zu entwickeln. Wird eine Legierung aus z.B. Silber und Gold einem elektrochemischen Lösungsprozess ausgesetzt, könnte man erwarten, dass das weniger edle Metall vom Elektrolyten an der Oberfläche abgetragen wird und zu einer schützenden Schicht edleren Metalls an der Oberfläche führt. Dies ist jedoch nicht der Fall. Stattdessen bildet sich eine nanoporöse Struktur aus, die Eindringen des Elektrolyten ins Innere ermöglicht und zu einem weiteren Löseprozess führt. Die Ursache ist eine spinodale Phasentrennung an der Oberfläche, die Cluster reinen Goldes sowie Bereiche verschwindender Goldkonzentration entwickelt. Ein verbreitetes Modell solcherlei Entmischung für Legierungen im Bulk ist das Cahn-Hilliard Modell. In diesem Modell ist es für die Substanz energetisch günstig, einerseits in reinen Phasen vorzuliegen, andererseits soll die (diffuse) Grenzschicht zwischen den Phasen klein gehalten werden. Wenn beim Lösungsprozess an der Oberfläche das unedlere Metall, in diesem Fall Silber, durch das Lösungsmittel abgetragen wird, sind die dabei zurückbleibenden Goldatome nicht mehr an die ursprüngliche Kristallstruktur der Legierung gebunden und können in der freien Oberfläche diffundieren. Dabei ist es für Goldatome, ähnlich wie im Bulk-Modell, energetisch günstig sich in Clustern reiner Goldphasen aufzuhalten. Diese Cluster schützen zwar unterliegendes Material von weiterer Abtragung werden aber mitunter durch den fortlaufenden Prozess in Bereichen wo das Lösungsmittel erneut angreifen kann, unterhöhlt. Dies führt zur Entwicklung der beschriebenen porösen Struktur. Die Autoren stellen eine Gleichung vom Cahn-Hilliard Typ auf der freien Oberfläche auf:

$$\partial_t^M c + v_n k c + \operatorname{div}^M \left(m(c) \nabla^M (\Delta^M c + \Psi'(c)) \right) = v_n c_0.$$

Hierbei bezeichnet c die lokale Konzentration von Goldatomen auf der Oberfläche, c_0 die Goldkonzentration im Bulk, v_n die Geschwindigkeit in Richtung der (inneren) Normalen und k die mittlere Krümmung. Ψ ist eine freie Energiefunktion, die Phasentrennung präferiert (double well potential), und $m(c)$ eine geeignete von c abhängige Mobilität. In [EE] wurde eine Gleichung dieses Typs an die Evolution der Oberfläche durch einen von c abhängigen Krümmungsfluss (mean curvature flow) gekoppelt und mit Hilfe der finite Elemente Methode auf evolvierenden Flächen numerisch untersucht.

1.2 Zusammenfassung der Ergebnisse

Einen Überblick über wichtige Arbeiten zur Modellierung dieses Themenkomplexes haben wir im vorherigen Abschnitt vorgestellt. Bevor wir die Resultate dieser Arbeit zusammenfassen, möchten wir einen Überblick über die Lösungstheorie in bisherigen analytischen und numerischen Arbeiten liefern. Die Existenztheorie für nichtlineare, degeneriert parabolische Gleichung vierter Ordnung auf eindimensionalem, planaren Substrat geht zurück auf [BF]. Weitere Arbeiten, in denen Existenz und qualitative Eigenschaften wie z.B. asymptotisches Verhalten und Positivität in Abhängigkeit vom Wachstum der Mobilität gezeigt wurden, sind [BBdP] und [BP1]. Die Lösungstheorie wurde auf den mehrdimensionalen Fall übertragen und erweitert in den Arbeiten [Gr1] und [EG]. Weitere Existenzaussagen und entsprechende Aussagen über qualitative Eigenschaften wie z.B. Positivität und asymptotisches Verhalten für den mehrdimensionalen Fall findet man in [dPGG]. Das Cauchy-Problem im Mehrdimensionalen wurde in [dPG] und [Gr2] behandelt. Für die Dünnschichtgleichung gibt es umfangreiche Literatur zu numerischen Verfahren. Wir verweisen daher auf den Artikel [BGLR], in dem finite Elemente und finite Volumen Verfahren gegenübergestellt werden, und auf die weiteren Referenzen dort. Für das gekoppelte System mit Surfactant im planaren Fall findet man in [Re1] einen lokalen Existenzsatz in der Zeit im Mehrdimensionalen unter der Vernachlässigung von Kapillarität, und mit Hinzunahme von kapillaren Termen in [Re2] unter der Voraussetzung sehr kleiner Kapillarität, Van-der-Waals-Kraft und Gravitation. Globale Existenz in der Zeit wurde für das System im Eindimensionalen in [Wie] bzw. [WG] bewiesen. In [GLR] wird ein finite Volumen Verfahren für das System vorgestellt und dessen Konvergenz in einer Dimension gezeigt. In der Arbeit [BGN] wird ebenfalls Konvergenz im Eindimensionalen für ein finite Elemente Verfahren für das System mit Van-der-Waals-Kräften bewiesen. Schließlich wird in [BN] für ein finite Elemente Verfahren im Mehrdimensionalen Konvergenz für das Surfactant-System gezeigt unter der Hinzunahme von abstoßenden Van-der-Waals-Kräften. Auf evolvierenden Flächen findet man einen Existenzsatz für die Wärmeleitungsgleichung in [DE1], in dem ein finite Elemente Verfahren vorgestellt wird. Eine Level-set Methode für parabolische Gleichungen auf evolvierenden Flächen wird im Artikel [DE2] beschrieben, in dem auch numerische Ergebnisse für Gleichungen vierter Ordnung präsentiert werden. Weiterhin wurde in [LNR] eine finite Volumen Methode für die Wärmeleitungsgleichung auf evolvierenden Flächen vorgestellt und Konvergenz gezeigt.

In dieser Arbeit wird zunächst die Erhaltungsgleichung für einen dünnen Film einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit auf einem bewegten, gekrümmten Substrat hergeleitet. Außer Kapillarität und Marangoni-Effekt werden keine weiteren physikalischen Effekte wie z.B. Gravitation und Van-der-Waals-Kräfte berücksichtigt, obwohl dies möglich wäre. Auf der Grenzschicht zum Substrat sind entweder No-Slip oder Navier-Slip Randwertbedingungen zulässig. Schließlich wird angenommen, dass die Bewegung des Substrats a priori vorgegeben und nicht an die Dynamik des Films gekoppelt ist. Die auf diese Weise hergeleitete Gleichung ist zu einer ϵ -Ordnung höher entwickelt als in [How] und erweitert auf konsistente Weise die entsprechende Gleichung für ein stationäres, gekrümmtes Substrat.

Theorem 1.1. (Erhaltungsgleichung für dünne Filme auf evolvierenden Flächen) *Es sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}$ eine orientierte, evolvierende Fläche der Dimension $d = 1, 2$ mit Normalen n . Die Filmhöhe $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ eines inkompressiblen, viskosen Flüssigkeitsfilms sei eindeutig definiert. Es sei $\epsilon = \frac{h}{L}$, das Verhältnis von Höhenskala zu Längenskala, klein vorausgesetzt. Definiere die lokale Flüssigkeitsmenge durch $\varrho = h - \epsilon \frac{1}{2} k h^2 + \epsilon^2 \frac{1}{3} h^3 \mathfrak{K}$. Hierbei ist $K = -D^M n$ die Weingarten-Abbildung, $k = \text{Tr}(K)$ die mittlere Krümmung und $\mathfrak{K} = \det(K)$ die Gauss-Krümmung. Die Geschwindigkeit eines Materialpunktes auf M zerlegen wir in Normal- und Tangentialanteil $v = v_n n + v^*$. Weiterhin setzen wir $\text{Id} - hK > 0$ positiv definit voraus. Im No-Slip Fall ist die inverse Reibungsmatrix $C^{-1} = 0$, im Navier-Slip Fall sei C^{-1} positiv definit auf dem Tangentialbündel. Wenn alles glatt ist, liefert Lubri-kationsapproximation, entwickelt bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, folgende Erhaltungsgleichung:*

$$\partial_t^M \varrho - \varrho k v_n + \text{div}^M(J) = 0,$$

$$\text{mit dem Fluss: } J = \left(\frac{1}{3}\varrho^3 + \varrho^2 C^{-1}\right)(-\nabla^M p + a(\varrho)\nabla^M k) + \varrho v^* + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$\text{und dem Druck: } p = -\text{Sa}(k + \epsilon \varrho |K|^2 + \epsilon \Delta^M \varrho) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dabei bezeichnet Sa die dimensionslose Kapillaritätskonstante. Der matrixwertige Faktor ist definiert durch $a(\varrho) = \epsilon \frac{1}{2} \varrho^2 (\varrho \text{Id} + 3C^{-1})^{-1} (k \text{Id} + K)$.

Das Skalierungsregime der Lubrikationsapproximation und die Definition der Kapillaritätskonstanten werden in Paragraph 2.15 detailliert beschrieben. Für die genaue Definition der tangentialen Komponente der Geschwindigkeit eines Materialpunktes über eine Familie von Diffeomorphismen siehe zu Beginn von Abschnitt 2.2.

Weiterhin wird in dieser Arbeit eine Erhaltungsgleichung für die Konzentration der Surfactants auf dem dünnen Film als Differentialgleichung auf dem Substrat hergeleitet. Diese Gleichung erweitert auf konsistente Weise das gekoppelte System (1.1.2) des planaren Falls auf den Fall eines gekrümmten Substrats und auf den Fall eines evolvierenden Substrats.

Theorem 1.2. (Erhaltungsgleichung für Surfactant-System auf evolvierenden Flächen) *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 1.1. Die Konzentration eines unlöslichen Surfactants Γ auf einem freien Interface Σ können wir mit der Abbildung $\varphi_h = Id + \epsilon h n$ auf das Substrat transformieren. Definiere die lokale Surfactantmenge durch $\gamma = (1 - \epsilon h k) \Gamma \circ \varphi_h$. Wenn alles glatt ist, liefert Lubrikationsapproximation, entwickelt bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, folgende Erhaltungsgleichung für ϱ und γ :*

$$\partial_t^M \varrho - v_n k \varrho + \operatorname{div}^M(J_1) = 0,$$

$$\partial_t^M \gamma - v_n k \gamma + \operatorname{div}^M(J_2) = 0, \text{ mit den Flüssen:}$$

$$J_1 = \left(\frac{1}{3} \varrho^3 + \varrho^2 C^{-1}\right) (-\nabla^M p(\varrho) + a_1(\varrho) \nabla^M k) + \epsilon \left(\frac{1}{2} \varrho^2 + \varrho C^{-1}\right) \nabla^M \sigma(\gamma) + \varrho v^* + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$J_2 = \gamma \left(\frac{1}{2} \varrho^2 + \varrho C^{-1}\right) (-\nabla^M p(\varrho) + a_2(\varrho) \nabla^M k) + \epsilon \gamma (\varrho + C^{-1}) \nabla^M \sigma(\gamma) + \gamma v^* - \mathcal{P} e^{-1} \nabla^M \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

und Matrixfaktoren $a_1(\varrho) = \epsilon \frac{1}{2} \varrho^2 (\varrho Id + 3C^{-1})^{-1} (k Id + K)$ und $a_2(\varrho) = \epsilon \frac{2}{3} \varrho^2 (\varrho Id + 2C^{-1})^{-1} (k Id + K)$.

Den dimensionslosen Diffusionskoeffizienten haben wir als inverse Péclet-Zahl $\mathcal{P} e^{-1}$ bezeichnet. Die Gleichung aus Theorem 1.1 liefert ein wohlgestelltes Problem, wenn Anfangswerte ϱ_0 hinzugenommen werden und als Randbedingungen eine Kontaktwinkelbedingung sowie eine Neumann-Bedingung des Flusses. Der folgende Satz garantiert dann Existenz von Lösungen dieses Anfangsrandwertproblems auf einem höchstens zweidimensionalen evolvierenden Substrat. Die Konstanten haben wir dabei der Einfachheit halber als 1 gesetzt. Weiterhin werden Aussagen über Regularität und Nichtnegativität der Lösungen getroffen. Dabei orientiert sich der Lösungsbegriff an [Gr1]. Wir bezeichnen die äußere Konormale von M mit ν^* und im Falle von $d = 2$ den von der Orientierung induzierten Einheitstangentienvektor des Randes mit e^* .

Theorem 1.3. (Existenzsatz für dünne Filme auf evolvierenden Flächen)

- Sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}$ eine kompakte, orientierte, zusammenhängende evolvierende Fläche der Klasse $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ der Dimension $d = 1, 2$ mit Normalen n , Weingarten-Abbildung K und Normalgeschwindigkeit $v_n n$. M kann berandet sein.
- Es existiere eine Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ der Klasse $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ mit $\partial_t \Phi_t = (v_n n) \circ \Phi_t$ und $\Phi_0 = Id_{M_0}$, sowie eine $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t^* : M_0 \rightarrow M_t$ mit $\Phi_0^* = Id_{M_0}$, worüber vermöge $\partial_t \Phi_t^* = v \circ \Phi_t^*$ eine vollständige Geschwindigkeit $v = v_n n + v^*$, zerlegt in orthogonalen und tangentialen Anteil, definiert ist. Die inversen Abbildungen seien ebenfalls in $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ beschränkt.
- Es gelte $v^* \bullet \nu^* = 0$ auf dem Rande, sowie $v_n \nu^* \bullet K e^* = 0$ ebenfalls auf dem Rande falls $d = 2$.
- Die Mobilität $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ habe die folgende Struktur:

$$m(\varrho) = \begin{cases} \varrho^n, & \text{falls } \varrho \geq 0, \\ 0, & \text{falls } \varrho \leq 0, \end{cases}$$

mit Wachstumsexponent $n \in [1, 4]$. Unter der Voraussetzung $C^{-1} \in \mathbb{R}^+$ ist die folgende Navier-Slip Mobilität ebenfalls zugelassen:

$$m(\varrho) = \begin{cases} \frac{1}{3} \varrho^3 + C^{-1} \varrho^2, & \text{falls } \varrho \geq 0, \\ 0, & \text{falls } \varrho \leq 0. \end{cases}$$

Bis auf im Nullpunkt ist m klassisch differenzierbar mit Ableitung m' . In 0 setzen wir $m'(0) = 0$.

- Sei $a : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ eine Carathéodory-Funktion, die in der ϱ -Variablen lokal Lipschitz-stetig mit sublinearem Wachstum ist.
- Sei $\varrho_0 \in H^1(M_0)$ nichtnegativ mit $G(\varrho_0) \in L^1(M_0)$. Hierbei ist die mathematische Entropie für beliebiges $A > 0$ definiert durch:

$$G(\varrho) = \int_A^\varrho \int_A^s \frac{1}{m(r)} dr ds.$$

Dann existiert eine schwache Lösung $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(H^2(M))$ mit $\nu^* \bullet \nabla^{M_t} \varrho(t) = 0$ f.ü. auf ∂M_t für f.a. $t \in [0, T]$ im folgenden schwachen Sinne:

$$0 = -(\eta(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M \eta(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt \\ - \int_0^T \int_{M_t} \left((\Delta^M \eta m(\varrho) + \nabla^M \eta \bullet \nabla^M \varrho m'(\varrho)) (-k - \varrho |K|^2 - \Delta^M \varrho) + \nabla^M \eta \bullet (m(\varrho) a(\varrho) \nabla^M k + \varrho v^*) \right) d\mathcal{H}^d dt$$

für alle Testfunktionen $\eta \in L^{2+\epsilon}(W^{2,2+\epsilon}(M)) \cap L^{4+\epsilon}(W^{1,4+\epsilon}(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ für ein $\epsilon > 0$ mit $\eta(T) = 0$ sowie $\nu^* \bullet \nabla^{M_t} \eta(t) = 0$ f.ü. auf ∂M_t für f.a. $t \in [0, T]$. Es ist $\varrho(t) \geq 0$ f.ü. für f.a. $t \in [0, T]$.

Wir bemerken, dass die in Theorem 1.3 definierte Größe G in der Literatur dünner Filme verbreitet als Entropie bezeichnet wird. Da es sich beim betrachteten Modell um ein isothermes Modell handelt, ist die relevante physikalische Größe anstelle physikalischer Entropie die freie Energie. Im betrachteten Modell, das weiterhin inkompressibel ist und nach Lubrikationsapproximation kinetische Energie vernachlässigt, stimmt die freie Energie mit der Oberflächenenergie überein. Aus diesem Grund werden wir im weiteren Verlauf die Größe G stets als mathematische Entropie bezeichnen, um ihre Rolle als mathematisches Hilfsmittel für zusätzliche Abschätzungen zu verdeutlichen.

Schließlich liefern wir eine Existenzaussage für das gekoppelte System von dünnem Film und Surfactant auf einem eindimensionalen evolvierenden Substrat. Wir bemerken, dass wir die $a_i, i = 1, 2$ aus Theorem 1.2 als beschränkt voraussetzen, weswegen es erforderlich ist, in geeigneter Weise zu trunkieren. Diese Approximation verändert die Gleichung nur im unphysikalischem Regime und ist daher nicht problematisch (siehe Kapitel 4). Um ebenfalls Wohlgestelltheit zu erhalten, nehmen wir Anfangswerte für beide Größen hinzu, sowie als Randwertbedingungen eine Kontaktwinkelbedingung sowie Neumann-Randwertbedingungen beider Flüsse. Der Lösungsbegriff orientiert sich in diesem Fall an [BF] (bzw. [WG]). Es werden ebenfalls Aussagen über die Nichtnegativität von ϱ sowie der Regularität von ϱ und γ getroffen. Die geometrischen Größen bezeichnen wir wie bisher.

Theorem 1.4. (Existenzsatz für Surfactant-System auf evolvierenden Flächen)

- Sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2$ eindimensionale, kompakte, orientierte, zusammenhängende evolvierende Kurve der Klasse $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$. M kann berandet sein.
- Es existiere eine Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ der Klasse $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ mit $\partial_t \Phi_t = (\nu_n n) \circ \Phi_t$ und $\Phi_0 = Id_{M_0}$, sowie eine $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t^* : M_0 \rightarrow M_t$ mit $\Phi_0^* = Id_{M_0}$, worüber vermöge $\partial_t \Phi_t^* = v \circ \Phi_t^*$ eine vollständige Geschwindigkeit $v = \nu_n n + v^*$, zerlegt in orthogonalen und tangentialen Anteil, definiert ist. Die Inversen seien ebenfalls in $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$ beschränkt. Es gelte $v^* \bullet \nu^* = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$.
- Die Mobilitäten haben die folgende Struktur ($i = 1, 2, 3$):

$$m_i(\varrho) = \begin{cases} \frac{1}{4-i} \varrho^{4-i}, & \text{falls } \varrho \geq 0, \\ 0, & \text{falls } \varrho \leq 0. \end{cases}$$

- Sei $a : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ eine Carathéodory-Funktion, die lokal Lipschitz und beschränkt in der ϱ -Variablen ist.

- Es gebe eine nichtnegative Funktion $f \in C_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$, gleichmäßig konvex mit strikt subquadratischem Wachstum der zweiten Ableitung f'' . Weiterhin sei die Oberflächenspannung σ über folgende Gibbs-Relation: $\sigma(\gamma) := f(\gamma) - \gamma f'(\gamma)$ definiert und es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass $|\sigma(\gamma)| \leq C(1 + f(\gamma))$.
- Sei $\varrho_0 \in H^1(M_0)$ nichtnegativ und $\gamma_0 \in L^2(M_0)$, $f'(\gamma_0) \in L^2(M_0)$.

Dann existiert eine schwache Lösung $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap C^{\frac{1}{8}}(C^{\frac{1}{2}}(M)) \cap \bigcap_{\delta > 0} L^2(H^3([\varrho \geq \delta]))$ mit $\nu^* \bullet \nabla^{M_t} \varrho(t) = 0$ f.ü. auf ∂M_t für f.a. $t \in [0, T]$ sowie ein $\gamma \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$. Der Lösungsbegriff ist im Sinne von [BF], dazu definiere $M_t^0 = \{x \in M_t \mid \varrho(x, t) = 0\}$. Es lösen ϱ, γ das folgende System:

$$\begin{aligned}
0 &= - (w_1(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_1(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt - \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^0} \nabla^M w_1 \bullet m_1(\varrho) \nabla^M \Delta^M \varrho d\mathcal{H}^d dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet \left(m_1(\varrho) (\nabla^M (k + \varrho |K|^2) + a_1(\varrho) \nabla^M k) + m_2(\varrho) \nabla^M \sigma(\gamma) + v^* \varrho \right) d\mathcal{H}^d dt, \\
0 &= - (w_2(0), \gamma_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_2(t), \gamma(t))_{L^2(M_t)} dt - \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^0} \nabla^M w_2 \bullet m_2(\varrho) \nabla^M \Delta^M \varrho d\mathcal{H}^d dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_2 \bullet \left(\gamma (m_2(\varrho) (\nabla^M (k + \varrho |K|^2) + a_2(\varrho) \nabla^M k) + m_3(\varrho) \nabla^M \sigma(\gamma) + v^*) - \nabla^M \gamma \right) d\mathcal{H}^d dt,
\end{aligned}$$

für alle Testfunktionen $w_1 \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ und $w_2 \in L^2(H^2(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $\nu^* \bullet \nabla^M w_2(t) = 0$ f.ü. auf ∂M_t für f.a. $t \in [0, T]$ und $w_1(T) = w_2(T) = 0$. Es ist $\varrho(t) \geq 0$ f.ü. für f.a. $t \in [0, T]$.

1.3 Vorgehensweise

Diese Arbeit gliedert sich wie folgt. In Kapitel 2 werden die Gleichungen für einen dünnen Film und für die Surfactant-Konzentration systematisch hergeleitet. In Kapitel 3 zeigen wir die Existenz von Lösungen für die Dünnschichtgleichung. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Lösungstheorie für das gekoppelte System mit Surfactants. Schließlich diskutieren wir in Kapitel 5 Grenzen des Modells und der mathematischen Methoden sowie mögliche Erweiterungen der vorgestellten Resultate. In den Anhang 6 haben wir einige längliche Rechnungen ausgegliedert.

Um die Gleichungen herzuleiten, gehen wir vom Ausgangsmodell, den inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in der schwachen Form aus [Al3], aus. Dieser Zugang bietet den Vorteil, dass die Rechnungen für Funktionen geringerer Differenzierbarkeitsstufe zulässig sind. Weiterhin sind Randwertbedingungen schon in der schwachen Formulierung enthalten, müssen daher nicht separat transformiert werden. Wir werden sehen, dass für die Dünnschichtgleichung beispielsweise eine kinematische Randbedingung nicht explizit vorkommt. Weiterhin ist es lediglich erforderlich, Ableitungsoperatoren erster Ordnung zu transformieren. Wir kommen ohne die Voraussetzung aus, dass das Substrat durch eine Parametrisierung gegeben ist, die für alle Zeiten die Fundamentalformen diagonalisiert. Ebenfalls ist es nicht erforderlich, Zeitableitungen der Krümmung zu berechnen.

Die gewünschte Erhaltungsgleichung für die lokale Menge an Flüssigkeit ϱ ergibt sich aus Transformation der Massenerhaltung auf das vorgegebene Substrat und anschließender Tiefenintegration. Um den Fluss zu berechnen, transformieren wir ebenfalls die Impulserhaltung auf das Substrat und reskalieren zum Parameter $\epsilon = \frac{H}{L}$. Wenn wir Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ weglassen, können wir explizit nach Druck und tangentialer Geschwindigkeit lösen. Wir werden sehen, dass der Druck bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ proportional zur linearisierten Krümmung des freien Interfaces ist. Mit der berechneten tangentialen Geschwindigkeit leiten wir dann die an die Filmgleichung gekoppelte Surfactantgleichung her.

Die Vorgehensweise in Kapitel 3 orientiert sich an der Existenztheorie für dünne Filme aus [Gr1] und am Galerkin-Ansatz auf bewegten Flächen in [DE1]. Die Wahl der Ansatzfunktionen ist dabei im wesentlichen dieselbe, mit dem Unterschied, dass eine zusätzliche Mittelwertseigenschaft berücksichtigt

wird. Die Konstruktion in [Gr1] beruht entscheidend auf Abschätzungen der Energie und (mathematischen) Entropie. Die relevante physikalische Energie ist die linearisierte Oberflächenenergie des freien Interfaces und stimmt im planaren Fall mit der H^1 -Seminorm überein. Im gekrümmten Fall hängt die linearisierte Oberflächenenergie von mittlerer Krümmung k und Weingarten-Abbildung K des Substrats ab und ist gegeben durch:

$$E(\varrho) = \int_{M_t} \left(1 - \varrho k - \frac{1}{2} \varrho^2 |K|^2 + \frac{1}{2} |\nabla^M \varrho|^2 \right) d\mathcal{H}^d.$$

Da es sich aufgrund der a priori gegebenen Substratbewegung nicht um ein geschlossenes System handelt, ist monotoner Rückgang der Energie nicht zu erwarten, wenigstens jedoch Beschränktheit der entsprechenden Größen in Abhängigkeit der Daten. Die richtige Testfunktion, um eine Abschätzung der Oberflächenenergie zu bekommen, ist die erste Variation dieses Funktionals, die mit dem Druck $p = -k - \varrho |K|^2 - \Delta^M \varrho$ übereinstimmt. Galerkin-Approximation bedingt einen eingeschränkten Raum an zulässigen Testfunktionen, der nur aus Linearkombinationen der Ansatzfunktionen besteht, mit denen sich die gewünschte Testfunktion p nicht in geeigneter Weise darstellen lässt. Daher verwenden wir, um zum Limes in der Galerkin-Approximation überzugehen, eine Hilfsabschätzung, die wie im planaren Fall die H^1 -Norm kontrolliert. Wir bezeichnen diese Energieabschätzung im Unterschied zur physikalischen Energieabschätzung als mathematische Energieabschätzung. Um von dieser Abschätzung zu profitieren, müssen wir dabei entstehende Terme ohne Vorzeichen kontrollieren, weswegen wir die Mobilität trunkieren.

Doch auch die richtige Testfunktion für diese Hilfsabschätzung, nämlich die erste Variation der H^1 -Seminorm $-\Delta^M \varrho$, wird in unserem Fall nicht zulässig sein, da im Gegensatz zum planaren Fall die Galerkin-Ansatzfunktionen nicht für alle Zeiten Eigenfunktionen zum Laplace-Beltrami-Operator sind und daher $-\Delta^M \varrho$ keine Linearkombination der Ansatzfunktionen sein wird. Aus diesem Grund betrachten wir als Ausweg eine modifizierte schwache Formulierung des Ausgangsproblems. Anstelle mit einer Testfunktionen zu multiplizieren und partiell zu integrieren, wenden wir zusätzlich den negativen Laplace-Beltrami-Operator auf die Testfunktion an und testen dann wie bisher. Im parabolischen Term werden wir dann Zeit- und Raumableitungen vertauschen, was auf einer bewegten Fläche nicht trivial ist. Das Testen mit $-\Delta^M \varrho$ für die mathematische Energieabschätzung der Ausgangsgleichung entspricht in unserer modifizierten Formulierung dem Setzen der Testfunktion als ϱ , was nach dem Galerkin-Ansatz eine zulässige Funktion im Ansatzraum ist. Um wieder zur klassischen schwachen Formulierung zurückzukommen, müssen wir nach dem Limesübergang zu jedem Zeitpunkt für die Testfunktionen den Laplace-Beltrami Operator invertieren, d.h. wir müssen das Poisson-Problem lösen.

Wegen der Nichtlinearitäten ist in allen vorgestellten Grenzübergängen starke Konvergenz zu zeigen. Aufgrund des eingeschränkten Raumes an Testfunktionen während der Galerkin-Approximation wählen wir daher die Methode von [AL] bzw. [Al2] der Abschätzung von Zeitdifferenzen. Da das Substrat bewegt ist, ist es erforderlich mit in geeigneter Weise transformierten Differenzen zu testen, was zu zusätzlichem technischen Aufwand führt.

Nach dem Limes in der Galerkin-Formulierung können wir mit der Abschätzung der mathematischen Entropie wie in [Gr1] fortfahren und zum Limes $\delta \rightarrow 0$ in der regularisierten Mobilität übergehen. Bei der Abschätzung der mathematischen Entropie bereitet der Quellterm aufgrund von lokaler Flächenänderung der Substratbewegung zusätzliche Schwierigkeiten, die wir nach genauem Studium der Struktur der mathematischen Entropie mit dem Lemma von Gronwall kontrollieren.

Um schließlich zum Grenzwert in den trunkierten Mobilitäten überzugehen, greifen wir auf die physikalische Energie zurück. Dieser Ausdruck ist außerhalb des physikalisch relevanten Regimes jedoch kein sinnvoller Energieterm. Es wird sich zeigen, dass eine Abschätzung dieser Größe erst von Nutzen ist, wenn Nichtnegativität der approximierenden Lösungen gezeigt wurde. Denn unter Verwendung von Massenerhaltung und Nichtnegativität lässt sich mit einem Trick aus [BP2] mit Hilfe multiplikativer Interpolationsabschätzungen die Äquivalenz zur H^1 -Norm zeigen. Da Lösungen von nichtdegeneriert parabolischen Gleichungen vierter Ordnung trotz strikt positiver Anfangswerte im Allgemeinen negativ werden können (siehe [BF]), ist dieser Schritt erst nach dem Limes der Regularisierung $\delta \rightarrow 0$ möglich.

Die Methode von Kapitel 4 orientiert sich an der Existenztheorie aus [WG] und dem Galerkin-Ansatz auf evolvierenden Flächen aus [DE1]. Wie in Kapitel 3 führen wir einen dreistufigen Approximations-

prozess durch: Galerkin-Approximation, Regularisierung von degenerierten Mobilitäten und schließlich Trunkierung von unbeschränkten Mobilitäten. Wir werden dabei ebenfalls mit den gleichen Problemen aus Kapitel 3 konfrontiert: eingeschränkter Raum von Testfunktionen, modifizierte schwache Formulierung, Zeitdifferenzen auf bewegtem Substrat, physikalische Energieabschätzung erst nachdem Nichtnegativität gezeigt wurde. Der wesentliche Unterschied liegt in der Restriktion auf ein eindimensionales Substrat aufgrund keiner zur Verfügung stehender geeigneter Abschätzung der mathematischen Entropie. Dieses Problem tritt bereits im planaren Fall auf. In einer Raumdimension stehen stärkere Einbettungssätze zur Verfügung, mit deren Hilfe wir gleichgradige Stetigkeit und damit gleichmäßige Konvergenz der approximierenden Lösungen zeigen können. Dies spiegelt sich in der Wahl des Lösungsbegriffes von [BF] wieder.

1.4 Numerische Darstellung

Im folgenden Abschnitt möchten wir das Verhalten eines dünnen Films auf einer einfachen gekrümmten Geometrie mit Hilfe von einigen numerischen Resultaten illustrieren. Die Simulationen wurden von M. Rumpf und O. Vanzos mit einem Optimierungsverfahren unter PDG-Nebenbedingungen durchgeführt. Wir betrachten die Entwicklung eines dünnen Films ohne Surfactants auf einem Torus mit No-Slip Randbedingung auf dem Substrat. Die lokale Menge an Flüssigkeit ϱ wird von niedrig nach hoch in den Farben blau bis rot dargestellt. In Abbildung 1 sehen wir das initiale Profil, das durch eine konstante lokale Flüssigkeitsmenge $\varrho = 0.1$ gegeben ist.

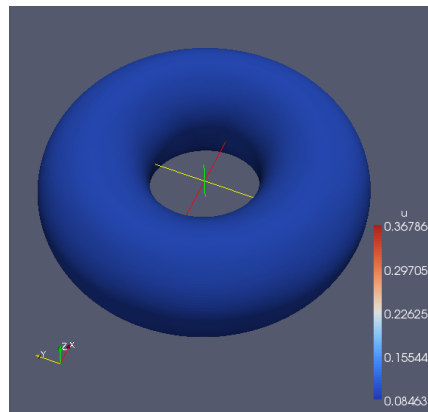


Abbildung 1: Initiales Profil eines dünnen Films mit konstanter lokaler Flüssigkeitsmenge

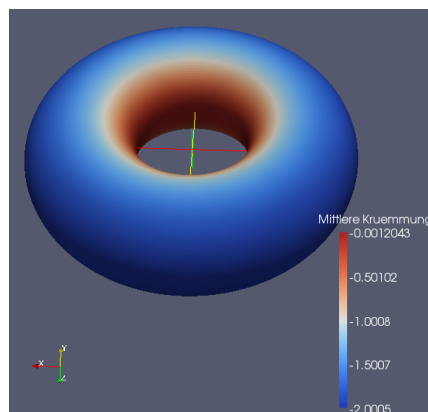


Abbildung 2: Mittlere Krümmung eines Torus

Wir bemerken, dass in unserer Notation eine Sphäre, auf deren Äußeres der Film liegt, negative mittlere Krümmung hat. Somit hat ein Torus in seinem Innenkreis maximale mittlere Krümmung und auf seinem Außenkreis minimale mittlere Krümmung (siehe Abbildung 2).

In Abbildung 3 (a) - (d) sieht man die Evolution des dünnen Films ausgehend vom Initialprofil aus Abbildung 1. Man erkennt deutlich, wie sich der Film in der Nähe des Innenkreises verdickt. Abdunkeln des Blautons in der Umgebung des Außenkreises weist auf die dortige Verdünnung hin. Isolinien der konstanten initialen Filmhöhe sind weiß eingezeichnet und bewegen sich in Richtung des Innenkreises.

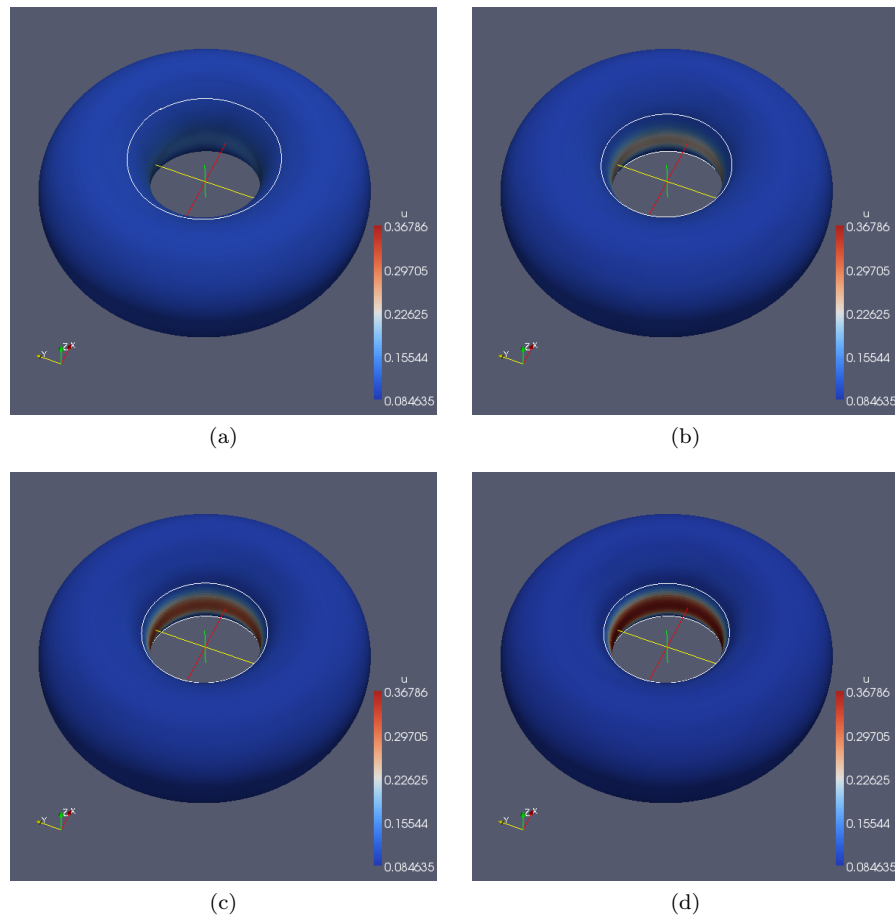


Abbildung 3: Evolution eines dünnen Films auf einem Torus

Danksagung

Ich danke Herrn Prof. Dr. Hans Wilhelm Alt für die Möglichkeit, dieses interessante Thema zu bearbeiten sowie für die vielen lehrreichen Gespräche, Vorlesungen und Seminare während meines Studiums und während der Promotionszeit. Ferner möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Martin Rumpf bedanken, dass er sich als Gutachter bereiterklärt hat und die interessante Kooperation mit seiner Gruppe vorangetrieben hat. So entstanden in der Entwicklungszeit dieser Arbeit viele interessante und fruchtbare Diskussionen mit den Herren Simplicio Nemadjeu und Orestis Vantzios, denen ich ebenfalls herzlich danke. Insbesondere möchte ich mich bei Orestis Vantzios für die Bereitstellung der numerischen Resultate auf dieser und der vorherigen Seite bedanken. Ebenfalls danke ich Herrn Alexander Raisch für die angenehme gemeinsame Zeit im Büro mit vielen interessanten Diskussionen und die Hilfe beim Korrekturlesen. Schließlich möchte ich mich bei meiner Partnerin Astrid Hartung bedanken für die Hilfe beim Korrekturlesen und die Unterstützung und Motivation in den vergangenen Jahren.

2 Modellierung dünner Filme auf evolvierenden Flächen

Ziel dieses Kapitels ist es, ein Modell für die Massenerhaltung eines dünnen Flüssigkeitsfilms auf einer bewegten, gekrümmten Fläche herzuleiten. Die Oberflächenspannung kann dabei von weiteren Größen, wie etwa der Surfactant-Konzentration auf der Oberfläche des Films abhängen. Eine Erhaltungsgleichung für die Surfactant-Konzentration wird ebenfalls entwickelt. Im letzten Teil dieses Kapitels diskutieren wir, wie sich die hergeleiteten Gleichungen auf evolvierenden Flächen in die bisherigen Modellgleichungen auf planaren und festen gekrümmten Flächen einbetten.

Um die Erhaltungsgleichung für den Film herzuleiten, gehen wir im Flüssigkeitsbulk von den inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen im schwachen Sinn aus. Die Rechenoperationen müssen dann in einem schwachen Sinn vollzogen werden, d.h. wir müssen die adjungierten Operationen auf die Testfunktionen anwenden.

2.1 Das Ausgangsmodell

Zunächst stellen wir die Gleichungen des Ausgangsmodells wie in [A13] in Distributionsform vor, nämlich Massen- und Impulserhaltung im Bulk sowie Surfactant-Erhaltung auf dem Interface. Für die Flüssigkeit sind zwei Randwertbedingungen an der Grenzfläche zum Substrat zulässig: No-Slip Randbedingungen, bei der die Flüssigkeit auf dem Substrat haftet, und Navier-Slip Randbedingungen, bei der Gleiten der Flüssigkeit auf dem Substrat zulässig ist.

Massenerhaltung

Sei $T > 0$ der Endzeitpunkt. Wir betrachten die Raumdimensionen $N = 2, 3$. Sei $D \subset [0, \infty) \times \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Die nicht-zylindrische Menge $Q \subset D$, die wir im Folgenden als den Bulk bezeichnen, werde von der Flüssigkeit ausgefüllt:

$$Q = \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \Omega_t.$$

Als Maß auf dem Bulk definieren wir $\mu_Q = \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{L}^N|_Q$. Die Massenerhaltung für eine inkompressible Flüssigkeit konstanter Dichte $\rho > 0$ ist in Distributionsform (vgl. [A13]) gegeben durch:

$$\rho \partial_t [\mu_Q] + \rho \operatorname{div}[u \mu_Q] = 0 \text{ in } \mathcal{D}'(D). \quad (2.1.1)$$

Dabei bezeichnet $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ die Geschwindigkeit der Flüssigkeit. Wir bemerken, dass in dieser Formulierung die Massenerhaltung am Rand des Gebietes schon eingebaut ist. Wir formulieren also folgende Problemstellung. Finde ein $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$, so dass für alle Testfunktionen $\zeta : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$\int_Q (\partial_t \zeta + \nabla \zeta \bullet u) d\mu_Q = 0. \quad (2.1.2)$$

Impulserhaltung

Im betrachteten Modell spielen Effekte auf den Grenzflächen eine entscheidende Rolle. Dies ist einerseits Oberflächenspannung auf dem Fluid-Gas-Interface sowie andererseits Reibung oder Haftung auf der Grenzfläche zwischen Flüssigkeit und Substrat. Diese Effekte werden in die Distributionsformulierung der Impulserhaltung eingehen.

Der Rand von $\Omega_t \subset \mathbb{R}^N$ sei zerlegt in $M_t \cup \Sigma_t \subset \partial \Omega_t$, dem Substrat M_t und dem Fluid-Interface Σ_t zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$. Wir setzen voraus, dass:

$$\Sigma = \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times \Sigma_t \quad \text{und} \quad M = \bigcup_{0 < t < T} \{t\} \times M_t$$

orientierte, evolvierende $(N-1)$ -dimensionale Flächen im Sinne folgender Definition sind (siehe [A13]).

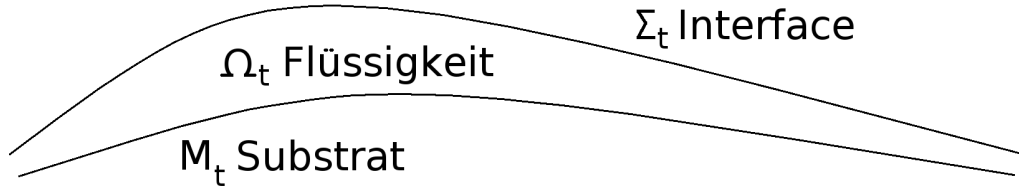


Abbildung 4: Skizze

Definition 2.1. (Evolvierende Fläche) Sei $d \in \mathbb{N}, 0 \leq d \leq N$. Man nennt Σ eine d -dimensionale evolvierende Fläche, falls Σ eine $(d+1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit eingebettet in den \mathbb{R}^{N+1} ist und der volle Tangentialraum $T_{t,x}\Sigma$ niemals alleinigen Raumanteil hat, d.h.:

$$T_{t,x}\Sigma \not\subset \{0\} \times \mathbb{R}^N \text{ für alle } (t,x) \in \Sigma.$$

Zu $\Sigma \subset \mathbb{R}^{N+1}$ und $t \in [0, t]$ definiere den Zeitschnitt $\Sigma_t = \{x \in \mathbb{R}^N | (t,x) \in \Sigma\}$.

Maße sind auf dem freien Interface sowie auf dem Substrat definiert durch: $\mu_\Sigma = \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{H}^{N-1}|_\Sigma$ und $\mu_M = \mathcal{L}^1 \otimes \mathcal{H}^{N-1}|_M$. Die Impulserhaltung im Distributionssinn lautet (vgl. [Al3]):

$$\partial_t[\rho u \mu_Q] + \operatorname{div}[(\rho u \otimes u - T)\mu_Q + \Pi \mu_\Sigma] = f_Q \mu_Q + f_M \mu_M \text{ in } \mathcal{D}'(D). \quad (2.1.3)$$

Der Spannungstensor ist gegeben durch: $T = -p \operatorname{Id} + 2\eta(Du)^S$. Dabei bezeichnet $p : Q \rightarrow \mathbb{R}$ den Druck und η die konstante dynamische Viskosität. Der Oberflächenspannungstensor ist gegeben durch: $\Pi = -\sigma(\operatorname{Id} - \nu \otimes \nu)$. Es ist $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ die Oberflächenspannung. ν bezeichnet die äußere Normale an das Flüssigkeitsinterface Σ_t . Es ist also $\operatorname{Id} - \nu \otimes \nu$ die Projektion auf den räumlichen Tangentialraum $T_x(\Sigma_t)$. Wir bemerken, dass in dieser Formulierung Randwertbedingungen schon eingebaut sind. Auf der rechten Seite befinden sich Krafterme. Es bezeichnet f_Q Kräfte im Bulk wie z.B. Corioliskräfte oder Gravitation. Die Kraft f_M bezeichnet die Kraft des Substrats M auf die Flüssigkeit. Im nächsten Abschnitt werden wir zwei mögliche Randwertbedingungen auf dem Substrat betrachten. Dort wird die Rolle von f_M erläutert.

No-Slip und Navier-Slip Randwertbedingungen

Es können Randwertbedingungen in die schwache Formulierung eingebaut werden, indem wir Informationen über die zulässigen Testfunktionen in der Distributionsformulierung Gleichung (2.1.3) geben. Wir bezeichnen von nun an die innere Normale an M_t mit n und bemerken, dass die Tatsache $(u - v) \bullet n = 0$ auf M für glatte Lösungen von (2.1.1) folgt (siehe [Al3]). Dabei ist $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ die vorgegebene Geschwindigkeit eines Materialpunktes auf dem Substrat M . Aus diesem Grund macht es Sinn, in der Impulserhaltung Testfunktionen zu betrachten, bei denen der Normalanteil der Testfunktion auf dem Substrat verschwindet. Um ein wohlgestelltes Problem zu bekommen, betrachten wir weitere mögliche Randwertbedingungen des Fluids auf dem Substrat. Zunächst die No-Slip Randbedingung, d.h.:

$$(u - v) \bullet e_i = 0, \quad i = 1 \dots N-1 \text{ auf } M.$$

Dabei bezeichnen wir eine lokale Basis des Tangentialraumes $T_x(M_t)$ mit $(e_i), i = 1 \dots N-1$. Wir fordern also, dass die Flüssigkeit auf dem Substrat haftet. In der im Folgenden verwendeten schwachen Formulierung lassen wir in diesem Fall nur Testfunktionen zu, die auf M sowohl in Normal- als auch in Tangentialrichtung verschwinden. Finde $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^N, p : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle Testfunktionen $\zeta : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\zeta = 0$ auf M und $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$\rho \int_Q (u \bullet \partial_t \zeta + D\zeta : u \otimes u) d\mu_Q = \int_Q (D\zeta : T - \zeta \bullet f_Q) d\mu_Q - \int_\Sigma D\zeta : \Pi d\mu_\Sigma. \quad (2.1.4)$$

Es tritt also f_M nicht auf, d.h. wir setzen $f_M = 0$. Eine andere Randwertbedingung ist die Navier-Slip Bedingung, bei der wir die entstehende Reibungskraft mit f_M bezeichnen. Die genaue Struktur von f_M wurde in [Al3] aus dem Entropieprinzip und dem Objektivitätsprinzip hergeleitet unter der Annahme, dass f_M linear von den Geschwindigkeiten abhängt:

$$f_M \bullet e_j = - \sum_{i=1}^{N-1} c_{ij} (u - v) \bullet e_i, \quad j = 1 \dots N-1.$$

Dabei bezeichnen $c_{ij} : M \rightarrow \mathbb{R}$, $i, j = 1 \dots N-1$ Slipkoeffizienten einer positiv-semidefiniten Reibungsmatrix $C = (c_{ij})$. Wir haben also das folgende Problem zu lösen. Finde $u : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$, $p : Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle Testfunktionen $\zeta : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\zeta \bullet n = 0$ auf M und $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$\rho \int_Q (u \bullet \partial_t \zeta + D\zeta : u \otimes u) d\mu_Q = \int_Q (D\zeta : T - \zeta \bullet f_Q) d\mu_Q - \int_\Sigma D\zeta : \Pi d\mu_\Sigma + \int_M \zeta \bullet C(u-v) d\mu_M. \quad (2.1.5)$$

Surfactant-Erhaltung

Wir nehmen an, dass Surfactant-Moleküle auf dem Interface durch Advektion und Diffusion transportiert werden (siehe z.B. [Sto],[Al3]). Die Erhaltungsgleichung für die Surfactantkonzentration ist dann ebenfalls in distributioneller Formulierung gegeben durch:

$$\partial_t [\Gamma \mu_\Sigma] + \operatorname{div} [\Gamma u \mu_\Sigma] = \operatorname{div} [D \nabla^\Sigma \Gamma \mu_\Sigma]. \quad (2.1.6)$$

Dabei bezeichnen wir die Surfactantkonzentration mit $\Gamma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ und mit D den zugehörigen Diffusionskoeffizienten. Die betrachten dann folgende schwache Formulierung. Finde eine Funktion $\Gamma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für Testfunktionen $\zeta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$ die folgende Gleichung gilt:

$$\int_\Sigma \partial_t \zeta \Gamma + \nabla \zeta \bullet (u - D \nabla^\Sigma \Gamma) d\mu_\Sigma = 0. \quad (2.1.7)$$

2.2 Modellierung der Dünnschichtgleichung

In diesem Abschnitt soll die Filmgleichung hergeleitet werden. Dies folgt in vier Schritten. Unter der Annahme, dass der Bulk sich eindeutig durch eine Höhenfunktion über dem Substrat parametrisieren lässt, werden wir die Größen aus dem Navier-Stokes System auf die Fläche transformieren. Dazu stellen wir im ersten Paragraphen die erforderlichen Werkzeuge zur Verfügung. Im nächsten Schritt wird die Massenerhaltung entlang senkrechter Strahlen zu M integriert und liefert so eine Erhaltungsgleichung für die lokale Flüssigkeitsmenge ϱ , deren Fluss noch zu bestimmen ist. Unter der Annahme, dass es sich bei dem Flüssigkeitsfilm um einen sehr dünnen Film handelt, macht es Sinn die Impulserhaltung zum Parameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ zu reskalieren und Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ zu vernachlässigen. Wir erhalten auf diese Weise ein schwaches ODE-System für Druck und tangentialer Geschwindigkeit, das wir im vierten und letzten Schritt explizit lösen.

Transformation auf die Substratfläche

In diesem Abschnitt liefern wir die Aussagen mit denen die Transformation des Ausgangsmodells vom Bulk bzw. Interface auf das Substrat erfolgt. Wir definieren Transformationsabbildungen und zeigen wie sich Ableitungsoperatoren und Integrale transformieren.

Voraussetzung 2.2. (Eindeutige Beschreibung) Wir setzen voraus, dass Punkte $x \in \Omega_t$, $t \in [0, T]$ sich durch die Abbildung $\varphi^t(\cdot, y) : M_t \rightarrow \Omega_t$ definiert durch $\varphi^t(\cdot, y) = \operatorname{Id}_{M_t} + y n_t$ eindeutig beschreiben lassen. Dabei sei $y \geq 0$ der Abstand des Punktes x zum Substrat und n_t die innere Normale an M_t . Das Interface Σ_t sei eindeutig durch $\varphi^t(\cdot, h)$ über die nichtnegative Höhenfunktion $h_t : M_t \rightarrow \mathbb{R}$ parametrisiert. Für alle $t \in [0, T]$ sei $\operatorname{Id} - h_t K$ positiv definit.

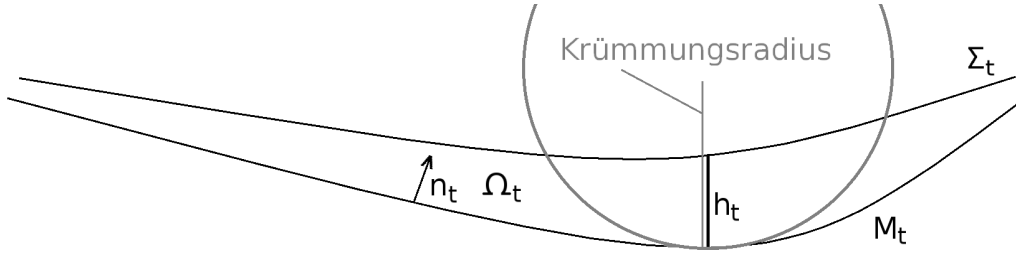


Abbildung 5: Die Filmhöhe darf die Krümmungsradien nicht überschreiten

Wir sehen ein, dass die eindeutige Beschreibung verletzt ist, wenn die Filmhöhe die Krümmungsradien des Substrats überschreitet (siehe Abbildung 5). Wir schreiben künftig abkürzend auch φ_y für $\varphi^t(\cdot, y)$, wenn klar ist welcher Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gemeint ist. Zur Definition von K siehe auch [Opr], Kapitel 2,3 oder [doC], Kapitel 3.

Definition 2.3. (Krümmung) Sei M eine d -dimensionale orientierte C^2 -Mannigfaltigkeit. Der Weingarten-Endomorphismus des Tangentialbündels $K : TM \rightarrow TM$ ist definiert durch das negative Differential $K = -D^M n$ der Gauß-Abbildung $n : M \rightarrow \mathbb{S}^d$, wobei wir $T_{n(x)}\mathbb{S}^d \cong T_x M$, $x \in M$ identifizieren. Die mittlere Krümmung $k : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als die Spur der Weingarten-Abbildung, also als Summe der Hauptkrümmungen k_i , $i = 1..N - 1$. Die Hauptkrümmungen sind die Eigenwerte von K . Die Gauß-Krümmung $\mathfrak{K} : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als Determinante von K , also als Produkt der Hauptkrümmungen.

Wir bemerken, dass in dieser Notation eine Sphäre (auf deren Äußeres der Flüssigkeitsfilm liegt) negative Krümmung hat. Es ist K symmetrisch (siehe z.B. [Opr]). Ähnlich wie bei der Transformation auf eine finite Elemente Approximationen in [DE1] wird häufig die folgende Transformationsmatrix $R_y = (Id - yK)^{-1}$, d.h. die Resolvente von K , auftreten, die ebenfalls symmetrisch ist.

Die evolvierende Fläche M besitzt einen eindeutigen Geschwindigkeitsvektor $v_n n$ in Normalenrichtung. Wir fordern nun die Existenz eines Diffeomorphismus, dessen Zeitableitung jene Normalgeschwindigkeit liefert. Um tangentielle Bewegung von Materialpunkten auf M zu berücksichtigen, definieren wir eine zusätzliche weitere tangentielle Geschwindigkeit v^* auf M über einen weiteren Diffeomorphismus, dessen Existenz wir ebenfalls voraussetzen (vgl. z.B. [DE1]). Wir bemerken hierbei, dass Glattheit der Fläche nur in dem Maße gefordert ist, dass die vorkommenden Größen definiert sind, nicht jedoch eine spezielle Struktur der Parametrisierung wie in [RRS] und [How].

Voraussetzung 2.4. (Diffeomorphismen) Es gebe eine Abbildung $\Phi : [0, T] \times M_0 \rightarrow M$, so dass Φ_t für alle $t \in [0, T]$ ein Diffeomorphismus von $M_0 \rightarrow M_t$ ist, welcher Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_t &= (v_n(t)n_t) \circ \Phi_t \text{ in } [0, T] \times M_0, \\ \Phi_0 &= Id_{M_0} \quad \text{für } t = 0. \end{aligned}$$

Es gebe weiterhin eine Abbildung $\Phi^* : [0, T] \times M_0 \rightarrow M$, so dass Φ_t^* für alle $t \in [0, T]$ ein Diffeomorphismus von $M_0 \rightarrow M_t$ ist mit $\Phi_0^* = Id_{M_0}$ für $t = 0$. Die vollständige Geschwindigkeit v eines Materialpunktes definieren wir vermöge $\partial_t \Phi_t^* = v(t) \circ \Phi_t^*$ in $[0, T] \times M_0$.

Wir zerlegen die vollständige Geschwindigkeit v vermöge $v = v_n n + v^*$. Dabei ist $v_n = v \bullet n$ die orthogonale Komponente und v^* der tangentielle Anteil, d.h. $v^*(t) \in TM_t$. Weiterhin zerlegen wir im Bulk Ω_t die Geschwindigkeit u in $v : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $w : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ folgendermaßen:

$$u \circ \varphi_y = v + w \circ \varphi_y. \quad (2.2.1)$$

Definition 2.5. (Zeitableitungen auf evolvierenden Flächen) Sei M orientierte, evolvierende Fläche mit Normale n und Normalgeschwindigkeit $v_n n$. Dann definieren wir den Ableitungsoperator nach der Zeit entlang der normalen Bewegung der Fläche als $\partial_t^M = \partial_t + (v_n n) \bullet \nabla$. Falls eine vollständige Geschwindigkeit v von M wie in Voraussetzung 2.4 definiert ist, so definieren wir die konvektive Ableitung durch $\frac{D^M}{Dt} = \partial_t + v \bullet \nabla$.

Die folgende Konsequenz aus der Kettenregel sagt aus, wie sich die Zeitableitung unter Transformation mit den Diffeomorphismus auf Definition 2.4 verhält (vgl. auch [DE1]).

Proposition 2.6. (Zeitableitung) Sei $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$ eine evolvierende C^1 -Fläche der Dimension $N-1$. Seien Φ_t, Φ_t^* die Diffeomorphismen aus Definition 2.4. Dann gilt für $f \in C^1(M)$:

1. $\partial_t(f(t) \circ \Phi_t) = (\partial_t^M f(t)) \circ \Phi_t,$
2. $\partial_t(f(t) \circ \Phi_t^*) = \left(\frac{D^M}{Dt} f(t)\right) \circ \Phi_t^*.$

Beweis. Mit der Kettenregel und den Eigenschaften der Φ_t aus Definition 2.4:

$$\partial_t(f(t) \circ \Phi_t) = (Df(t) \circ \Phi_t) \partial_t(t, \Phi_t) = (Df(t) \circ \Phi_t)(1, (v_n n) \circ \Phi_t) = (\partial_t^M f(t)) \circ \Phi_t.$$

Und analog für Φ^* . □

Um zu untersuchen wie sich Zeitableitungen von Funktionen transformieren, berechnen wir zunächst die Zeitableitung des Normalenvektors. Ein ähnlicher Beweis dieser Formel befindet sich in [Wil], Abschnitt 7.

Proposition 2.7. (Zeitableitung der Normalen) Sei $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$ eine $(N-1)$ -dimensionale, evolvierende, orientierte C^2 -Fläche mit Normalen n . Die Geschwindigkeit v eines Materialpunktes auf M fassen wir wie in Voraussetzung 2.4 auf. Wir zerlegen $v = v_n n + v^*$, d.h. in orthogonalen und tangentialen Anteil. K bezeichne die Weingarten-Abbildung von M . Dann berechnen sich die Zeitableitungen aus Definition 2.5 der Normalen nach folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} \partial_t^M n &= -\nabla^M v_n, \\ \frac{D^M}{Dt} n &= -\nabla^M v_n - K v^*. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $\Psi : D \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow M_0$ eine Kartenabbildung von M_0 . Die Formeln sind lokale Aussagen, daher reicht es sie kartenweise zu zeigen. Setze $\Psi_t^* = \Phi_t^* \circ \Psi$. Dann ist $\partial_t \Psi_t^* = v \circ \Psi_t^*$. Bezeichnen wir mit $(e_i)_{i=1, \dots, N-1}$ ein lokales ON-System des räumlichen Tangentialbündels mit der Darstellung

$$e_i(t) = \sum_{j=1}^{N-1} a_{ij}(t) \partial_{x_j} \Psi_t^*.$$

$$(e_i \bullet \frac{D^M}{Dt} n) \circ \Psi_t^* = \sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} \partial_{x_j} \Psi_t^* \bullet \partial_t(n \circ \Psi_t^*) = - \sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} \partial_{x_j} (v \circ \Psi_t^*) \bullet (n \circ \Psi_t^*).$$

Hierbei haben wir verwendet, dass $n \circ \Psi_t^*$ orthogonal ist zu $Im(D\Psi_t^*) = T_x M_t$. Es ist also mit der Zerlegung von v sowie der Definition 2.3 von K :

$$e_i \bullet \frac{D^M}{Dt} n = -(\partial_{e_i} v) \bullet n = -\partial_{e_i} v_n + v \bullet \partial_{e_i} n = -\partial_{e_i} v_n - v^* \bullet (K e_i).$$

Weil K symmetrisch ist folgt die zweite Behauptung. Schließlich ist:

$$\partial_t^M n = \frac{D^M}{Dt} n - (D^M n) v^* = -\nabla^M v_n - K v^* + K v^*.$$

□

Die folgende Aussage ist ebenfalls eine Konsequenz der Kettenregel und liefert Formeln um Ableitungsoperatoren erster Ordnung aus dem Bulk auf das Substrat zu transformieren.

Proposition 2.8. (Transformation von Ableitungen) Sei $M \subset \mathbb{R}^{N+1}$ eine $(N-1)$ -dimensionale, orientierte, evolvierende C^2 -Fläche mit Normalen n und Normalgeschwindigkeit v_n . Es bezeichne K die Weingarten-Abbildung von M . Die Abbildung $\varphi_y : M \rightarrow Q$ sei definiert durch $\varphi_y = Id + y n$. Dann transformieren sich die Ableitungen von $f \in C^1(Q)$ folgendermaßen:

1. $\partial_t^M (f \circ \varphi_y) = (\partial_t^M f) \circ \varphi_y - y \nabla^M v_n \bullet (\nabla^M f) \circ \varphi_y,$
2. $\nabla^M (f \circ \varphi_y) = (Id - y K)(\nabla^M f) \circ \varphi_y,$
3. $\partial_y (f \circ \varphi_y) = (\partial_n f) \circ \varphi_y.$

Beweis. 1. Berechne zunächst mit Proposition 2.7:

$$\partial_t^M \varphi^t(y) = v_n n + y \partial_t^M n = v_n n - y \nabla^M v_n.$$

Dann folgt mit der Kettenregel und dem Differential in Raum und Zeit:

$$\begin{aligned} \partial_t^M (f(t) \circ \varphi^t(y)) &= Df(t, \varphi^t(y)) \partial_t^M (t, \varphi^t(y)) = Df(t, \varphi^t(y))(1, v_n n) - Df(t, \varphi^t(y))(0, y \nabla^M v_n) \\ &= \partial_t^M f(t, \varphi^t(y)) - y \nabla^M v_n \bullet \nabla^M f(t, \varphi^t(y)). \end{aligned}$$

2. Zu $t \in [0, T]$ sei $(e_i(t))_{i=1..N-1}$ ein lokales ON-System des Tangentialraums $T_x M_t$. Dann gilt:

$$\partial_{e_i} \varphi_y = e_i + y \partial_{e_i} n = e_i - y K e_i = (Id - yK) e_i.$$

Dann folgt mit der Kettenregel und dem Differential im Raum:

$$\partial_{e_i} (f \circ \varphi_y) = (Df) \circ \varphi_y \partial_{e_i} \varphi_y = (Df) \circ \varphi_y (Id - yK) e_i = e_i \bullet (Id - yK) (\nabla^M f) \circ \varphi_y,$$

weil K symmetrisch ist. Somit folgt:

$$\nabla^M (f \circ \varphi_y) = \sum_{i=1}^{N-1} \partial_{e_i} (f \circ \varphi_y) e_i = (Id - yK) (\nabla^M f) \circ \varphi_y.$$

3. Schließlich ist: $\partial_y (f \circ \varphi_y) = (Df) \circ \varphi_y (\partial_y \varphi_y) = (Df) \circ \varphi_y (n) = (\partial_n f) \circ \varphi_y$. □

Wir möchten später auch totale Differentiale von Vektorfeldern transformieren. Dazu wird obiges Resultat auf Matrizen übertragen, was wir hier zeitunabhängig formulieren. Später wird die Aussage zu jedem Zeitpunkt verwendet. Es macht Sinn Vektorfelder aufzuteilen in Tangential- und Normalanteil. Dazu setzen wir die Normale n von M konstant in Normalenrichtung auf Q fort, d.h. $n \circ \varphi_y = n$ und ebenso die lokalen Basisvektoren des Tangentialraums: $e_i \circ \varphi_y = e_i$.

Proposition 2.9. (Transformation von Differentialen) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine $(N-1)$ -dimensionale, orientierte C^2 -Fläche mit Normalen n und Weingarten-Abbildung K . Die Abbildung $\varphi_y : M \rightarrow \Omega$ sei definiert durch $\varphi_y = Id + yn$ und es sei $Id - yK$ invertierbar mit der Inversen R_y . Dann transformieren sich die totalen Differentiale von einem zu M tangentialen Vektorfeld $\zeta^* \in C^1(\Omega; TM)$, sowie von einem Normalenfeld fn mit $f \in C^1(\Omega)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (D\zeta^*) \circ \varphi_y &= P^M D^M (\zeta^* \circ \varphi_y) R_y + n \otimes (K R_y \zeta^* \circ \varphi_y) + \partial_y (\zeta^* \circ \varphi_y) \otimes n, \\ (D(fn)) \circ \varphi_y &= -f \circ \varphi_y K R_y + n \otimes R_y \nabla^M (f \circ \varphi_y) + \partial_y (f \circ \varphi_y) n \otimes n. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $P^M = (Id - n \otimes n)$ die Projektion auf den Tangentialraum $T_x M$.

Beweis. Überlegen wir uns zunächst, wie das tangentiale Differential D^M von einem beliebigen Vektorfeld $\zeta \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ transformiert. Dazu berechnen wir $D^M \varphi_y = Id_{TM} - yK$. Damit folgt nach der Kettenregel $D^M (\zeta \circ \varphi_y) = (D^M \zeta) \circ \varphi_y (Id_{TM} - yK)$. Folglich ist $(D^M \zeta) \circ \varphi_y = D^M (\zeta \circ \varphi_y) R_y$. Dies gilt insbesondere auch, wenn wir für $\zeta = n \circ \varphi_y^{-1}$ die verschobene Normale setzen und es folgt $D^M (n \circ \varphi_y^{-1}) \circ \varphi_y = -K R_y$, was eine symmetrische Abbildung ist. Sei nun $(e_i)_{i=1..N-1}$ ein lokales Orthonormalsystem des Tangentialbündel konstant fortgesetzt auf Q . Mit $e_N = n$ erhalten wir ein lokales Orthonormalsystem des \mathbb{R}^N . Dann lässt sich das totale Differential von ζ^* zerlegen:

$$\begin{aligned} D\zeta^* &= \sum_{i,j=1}^N e_i \bullet (\partial_{e_j} \zeta^*) e_i \otimes e_j = P^M D^M \zeta^* + \sum_{j=1}^{N-1} n \bullet (\partial_{e_j} \zeta^*) n \otimes e_j + \sum_{i=1}^{N-1} e_i \bullet (\partial_n \zeta^*) e_i \otimes n + n \bullet (\partial_n \zeta^*) n \otimes n \\ &= P^M D^M \zeta^* - \sum_{j=1}^{N-1} (\zeta^* \bullet \partial_{e_j} n) n \otimes e_j + \partial_n \zeta^* \otimes n = P^M D^M \zeta^* - n \otimes (D^M n)^T \zeta^* + \partial_n \zeta^* \otimes n. \end{aligned}$$

Mit diesen Überlegungen können wir nun das totale Differential von ζ^* transformieren:

$$\begin{aligned} (D\zeta^*) \circ \varphi_y &= (P^M D^M \zeta^*) \circ \varphi_y - n \otimes (D^M n)^T \circ \varphi_y \zeta^* \circ \varphi_y + (\partial_n \zeta^*) \circ \varphi_y \otimes n \\ &= P^M D^M (\zeta^* \circ \varphi_y) R_y + n \otimes (K R_y \zeta^* \circ \varphi_y) + \partial_y (\zeta^* \circ \varphi_y) \otimes n, \end{aligned}$$

wobei für den letzten Term Proposition 2.8 verwendet wurde. Für die zweite Behauptung zerlegen wir: $D(fn) = fDn + n \otimes \nabla f$. Dann folgt mit dem oben Gezeigten und erneut Proposition 2.8:

$$(fDn) \circ \varphi_y + (n \otimes \nabla f) \circ \varphi_y = -f \circ \varphi_y K R_y + n \otimes R_y \nabla^M (f \circ \varphi_y) + n \otimes n \partial_y (f \circ \varphi_y).$$

□

Die Transformationen von Ableitungsoperatoren hatten wir im Sinne klassischer Ableitungen formuliert. Unter den Integralen reicht es aus, wenn diese Berechnungen fast überall gelten. Als nächstes liefern wir die Transformationsformeln für Integrale. Die folgende Aussage ist eine Konsequenz der Coarea-Formel, dem Transformationssatz auf Flächen und des Satzes von Fubini. Wir formulieren die Behauptung an dieser Stelle zeitunabhängig und verwenden sie später zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$.

Proposition 2.10. (Transformation vom Bulk auf das Substrat) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen, beschränkt und durch $M \cup \Sigma \subset \partial\Omega$ berandet mit M von der Klasse $C^{1,1}$ und Σ von der Klasse $C^{0,1}$ derart, dass sich Σ wie in Voraussetzung 2.2 eindeutig durch $\varphi_h = Id_M + hn$ über M mit $h \in C^{0,1}(M)$ parametrisieren lässt. Dabei bezeichnet n die innere Normale an M . Dann gilt für $u \in L^1(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} u d\mu_Q = \int_M \int_0^h u \circ \varphi_y \chi_y dy d\mu_M$$

und die rechte Seite ist integrierbar. Dabei ist $\chi_y = 1 - yk + y^2 \mathfrak{K}$ mit k der mittleren Krümmung und \mathfrak{K} der Gaußschen Krümmung von M .

Beweis. Sei $\varphi_y = Id_M + yn$. Definiere die Abbildung $g : \bar{\Omega} \rightarrow [0, 1]$ durch $g \circ \varphi_y = \frac{y}{h}$. Berechne das Flächenelement für die Coarea-Formel aus Satz 6.7:

$$\mathcal{J}^* g = \sqrt{\det \nabla g^T \nabla g} = |\nabla g|.$$

Um den vollständigen Gradienten zu berechnen, betrachten wir separat Normal- und Tangentialanteil nach Proposition 2.8:

$$\begin{aligned} (\nabla^M g) \circ \varphi_y &= R_y \nabla^M (g \circ \varphi_y) = -\frac{y}{h^2} R_y \nabla^M h, \\ (\partial_n g) \circ \varphi_y &= \partial_y (g \circ \varphi_y) = \frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Also ist:

$$|\nabla g| \circ \varphi_y = \sqrt{\left| \frac{y}{h^2} R_y \nabla^M h \right|^2 + \left| \frac{1}{h} \right|^2} = \frac{1}{h} \sqrt{\left| \frac{y}{h} R_y \nabla^M h \right|^2 + 1}.$$

Definiere eine Homotopie von M nach Σ mit Parameter $s \in [0, 1]$ als Abbildung $\varphi^s : M \rightarrow g^{-1}(s)$, die gegeben ist durch $\varphi^s = Id_M + shn$. Für den Transformationssatz auf Flächen 6.8 berechnen wir fast überall das Flächenelement:

$$|\mathcal{J} \varphi^s| = \sqrt{\det((D^M \varphi^s)^T D^M \varphi^s)}.$$

Es ist $D^M \varphi^s = Id_{TM} - shK + sn \otimes \nabla^M h$. Weil die Weingarten-Abbildung K symmetrisch ist folgt:

$$|\mathcal{J} \varphi^s| = \sqrt{\det[(Id_{TM} - shK)^2 + s^2 \nabla h \otimes \nabla h]}.$$

Nach der Coarea-Formel aus Satz 6.7 und dem Transformationssatz 6.8 verwenden wir den Satz von Fubini und die Substitution $y = hs$. So folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u dx &= \int_0^1 \int_{g^{-1}(s)} u \frac{1}{\mathcal{J}^*g} d\mathcal{H}^{n-1} ds = \int_0^1 \int_M u \circ \varphi^s \frac{|\mathcal{J}\varphi^s|}{\mathcal{J}^*g \circ \varphi^s} d\mathcal{H}^{n-1} ds \\ &= \int_M \int_0^1 u \circ \varphi^s h \frac{\sqrt{\det[(Id_{TM} - shK)^2 + s^2 \nabla^M h \otimes \nabla^M h]}}{\sqrt{|sR_{sh} \nabla^M h|^2 + 1}} ds d\mu_M \\ &= \int_M \int_0^h u \circ \varphi_y \frac{\sqrt{\det[(Id_{TM} - yK)^2 + (\frac{y}{h})^2 \nabla^M h \otimes \nabla^M h]}}{\sqrt{|\frac{y}{h} R_y \nabla^M h|^2 + 1}} dy d\mu_M. \end{aligned}$$

Das Flächenelement können wir noch weiter vereinfachen, indem wir im Zähler unter der Wurzel zweimal den Faktor $\det(Id_{TM} - yK)$ ausklammern. Dabei verwenden wir die Symmetrie von R_h :

$$\sqrt{\det\left[(Id - yK)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2 \nabla^M h \otimes \nabla^M h\right]} = |\det(Id - yK)| \sqrt{\det\left[Id + \left(\frac{y}{h}\right)^2 R_h \nabla^M h \otimes R_h \nabla^M h\right]}$$

Dann können wir explizit die Determinante berechnen:

$$\sqrt{\det\left[Id_{TM} + \left(\frac{y}{h}\right)^2 R_h \nabla^M h \otimes R_h \nabla^M h\right]} = \sqrt{1 + \left|\frac{y}{h} R_h \nabla^M h\right|^2}.$$

Dieser Term kürzt sich dann mit dem Nenner vom Flächenelement der Coarea-Formel. Wir können also als gesamtes Flächenelement definieren:

$$\chi_y = |\det(Id_{TM} - yK)| = 1 - yk + y^2 \mathfrak{K}.$$

Hierbei haben wir die Beträge weglassen, da $Id_{TM} - yK$ nach Voraussetzung positiv definit ist. \square

Folgende Aussage ist das entsprechende Pendant zur Transformation von Integralen auf dem Interface.

Proposition 2.11. (Transformation vom Interface auf das Substrat) Sei M Fläche der Klasse $C^{1,1}$ und Σ Fläche der Klasse $C^{0,1}$ derart, dass sich Σ wie in Voraussetzung 2.2 eindeutig durch $\varphi_h = Id + hn$ über M mit $h \in C^{0,1}(M)$ parametrisieren lässt. Dabei bezeichnet n die Normale an M . Für $u \in L^1(\Sigma)$ gilt dann:

$$\int_{\Sigma} u d\mu_{\Sigma} = \int_M u \circ \varphi_h \chi_h d\mu_M$$

und die rechte Seite ist integrierbar. Dabei ist χ_h definiert als $\chi_h = (1 - hk + h^2 \mathfrak{K}) \sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2}$ mit der mittleren Krümmung k , der Gaußschen Krümmung \mathfrak{K} und der Resolvente der Weingarten Abbildung $R_h = (Id - hK)^{-1}$ von M .

Beweis. Mit dem Transformationssatz wie in der zweiten Hälfte des Beweises von Proposition 2.10 mit $s = 1$. \square

In nächsten Paragraphen, bei der Berechnung des Flusses, werden wir nur bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ genau rechnen, dennoch macht es Sinn das Oberflächenelement bis auf die Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ zu expandieren, da die analytische Behandlung des Problems in Kapitel 3 auf einer Abschätzung der Oberflächenenergie beruht.

Proposition 2.12. (Linearisierte Oberflächenenergie) Sei χ_h das Flächenelement aus Proposition 2.11 zur Filmhöhe $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. Bezeichne k die mittlere Krümmung und \mathfrak{K} die Gauß-Krümmung des Substrats M . Nach Entwicklung in h ergibt sich:

$$\chi_h = 1 - hk + h^2 \mathfrak{K} + \frac{1}{2} |\nabla^M h|^2 + \mathcal{O}(h^3).$$

Beweis. Nach Taylor-Entwicklung:

$$\chi_h = (1 - hk + h^2\mathfrak{K})\sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2} = 1 - hk + h^2\mathfrak{K} + \frac{1}{2}|\nabla^M h|^2 + \mathcal{O}(h^3).$$

□

Um Ableitungen auf dem Interface zu transformieren, ist es nützlich zu zeigen, wie sich die Normale von Σ durch die Normale von M , die Filmhöhe und die Substratkrümmung schreiben lässt. Die folgende Proposition formulieren wir zeitunabhängig und wenden sie dann in unserer Situation für jeden Zeitpunkt an.

Proposition 2.13. (Normale an Σ) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine $N - 1$ dimensionale, orientierte C^2 -Fläche mit Normalen n . Ferner sei Σ eine C^1 -Fläche, die eindeutig im Sinne von Voraussetzung 2.2 durch die Abbildung $\varphi_h = Id + hn$ mit einer Höhenfunktion $h \in C^1(M)$ parametrisiert ist. Es bezeichne K die Weingarten-Abbildung von M und $R_y = (Id - hK)^{-1}$. Dann lässt sich die Normale von Σ darstellen durch:

$$\nu \circ \varphi_h = \frac{n - R_h \nabla^M h}{\sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2}}.$$

Beweis. Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Abbildung auf einer offenen Umgebung $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ von Σ mit der Eigenschaft, dass $f(x) = 0$ genau dann, wenn $x \in \Sigma$ und $f(x) > 0$ genau dann, wenn $x \in \Omega$. Dann ist die äußere Normale an Σ gegeben durch $\nu = -\frac{\nabla f}{|\nabla f|}|_{\Sigma}$. Es lässt sich solch ein f festlegen durch $f \circ \varphi_y = h - y$. Damit können wir den vollständigen Gradienten ∇f berechnen. Einerseits ist mit Hilfe von Proposition 2.8: $\nabla^M(f \circ \varphi_y) = (Id - yK)(\nabla^M f) \circ \varphi_y$. Andererseits ist $\nabla^M(f \circ \varphi_y) = \nabla^M h$. Ferner ist ebenfalls nach Proposition 2.8: $\partial_y(f \circ \varphi_y) = (\partial_n f) \circ \varphi_y$. Andererseits ist $\partial_y(f \circ \varphi_y) = -1$. Also ist $(\nabla f) \circ \varphi_y = R_y \nabla^M h - n$ und damit $|\nabla f| \circ \varphi_y = \sqrt{1 + |R_y \nabla^M h|^2}$. Damit folgt die Behauptung. □

Damit können wir berechnen, wie sich der tangentielle Gradient auf dem freien Interface transformiert. Dabei geben wir nur eine Approximation bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$, da wir später ebenfalls nur bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ genau rechnen werden. Wieder formulieren wir das Resultat zeitunabhängig.

Proposition 2.14. (Transformation von Ableitungen auf Σ) Sei Σ eine C^1 -Fläche, die durch die Abbildung $\varphi_h : M \rightarrow \Sigma$, definiert durch $\varphi_h = Id + hn$ mit einer Höhenfunktion $h \in C^1(M)$, eindeutig im Sinne von Voraussetzung 2.2 über einer orientierten C^2 -Fläche M mit Normale n parametrisiert ist. Dann transformieren sich die Ableitungen von $f \in C^1(\Sigma)$ folgendermaßen:

$$(\nabla^\Sigma f) \circ \varphi_h = (Id + hK + n \otimes \nabla^M h) \nabla^M(f \circ \varphi_h) + \mathcal{O}(h^2).$$

Beweis. Berechne zunächst $D^M \varphi_h : TM \rightarrow T\Sigma$ durch $D^M \varphi_h = Id_{TM} - hK + n \otimes \nabla^M h$. Damit ist:

$$\nabla^M(f \circ \varphi_h) = (D^M(f \circ \varphi_h))^T = (D^M \varphi_h)^T (\nabla^\Sigma f) \circ \varphi_h = (Id_{TM} - hK + \nabla^M h \otimes n) (\nabla^\Sigma f) \circ \varphi_h,$$

weil K symmetrisch ist. Sei $R_h = (Id_{TM} - hK)^{-1} \in End(TM)$. Dann ist:

$$R_h (Id_{TM} - hK + \nabla^M h \otimes n) = Id_{TM} + (R_h \nabla^M h) \otimes n.$$

Wir behaupten, dass $Id_{TM} + n \otimes (R_h \nabla^M h)$ als Abbildung $TM \rightarrow T\Sigma$ die inverse Abbildung zu $R_h (D^M \varphi_h)^T$ bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ ist. In der Tat, denn wegen $Id_{TM} = Id - n \otimes n$ ist:

$$\begin{aligned} (Id_{TM} + n \otimes R_h \nabla^M h) (Id_{TM} + R_h \nabla^M h \otimes n) &= Id_{TM} + n \otimes R_h \nabla^M h + R_h \nabla^M h \otimes n + \mathcal{O}(h^2) \\ &= Id - (n - R_h \nabla^M h) \otimes (n - R_h \nabla^M h) + \mathcal{O}(h^2) = Id - \nu \otimes \nu + \mathcal{O}(h^2) = Id_{T\Sigma} + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Wobei im vorletzten Schritt Proposition 2.13 verwendet wurde. Und umgekehrt:

$$(Id_{TM} + R_h \nabla^M h \otimes n) (Id_{TM} + n \otimes R_h \nabla^M h) = Id_{TM} + \mathcal{O}(h^2).$$

Damit folgt also:

$$(Id_{TM} + n \otimes R_h \nabla^M h) R_h \nabla^M(f \circ \varphi_h) = (1 + \mathcal{O}(h^2)) (\nabla^\Sigma f) \circ \varphi_h.$$

Es ist $\nabla^\Sigma f \in T\Sigma = Im(D\varphi_h) = TM + n\mathcal{O}(h)$. Daher skaliert $(\nabla^\Sigma f) \circ \varphi_h$ wie $\nabla^M(f \circ \varphi_h)$. Mit der Taylorentwicklung $R_h = Id_{TM} + hK + \mathcal{O}(h^2)$ folgt schließlich die Behauptung. □

Tiefenintegration

Ausgehend von der Distributionsformulierung der Massenerhaltung in (2.1.1) leiten wir eine Erhaltungsgleichung für die lokale Fluidmenge her. Wir werden nicht wie sonst in der Literatur (vgl. [ODB], [RRS], [RSw], [How], [FHO]) eine kinematische Randwertbedingung benötigen, da diese schon in der Distributionsformulierung implizit enthalten ist. Um die Herleitung an dieser Stelle durchzuführen setzen wir voraus, dass die Funktionen glatt sind, bemerken aber, dass sie gültig ist, sofern die Größen definiert sind. Zu einem späteren Zeitpunkt zeigen wir, wie man eine Formulierung herleitet, die nur zweite Ableitungen unter dem Integral verwendet. Mit Proposition 2.10 folgt aus der Gleichung der Massenerhaltung (2.1.2):

$$\int_M \int_0^h [(\partial_t \zeta) \circ \varphi_y + (u \bullet \nabla \zeta) \circ \varphi_y] \chi_y dy d\mu_M = 0.$$

Zerlege $u \circ \varphi_y = v + w \circ \varphi_y$ wie in Gleichung (2.2.1) und weiterhin v und w in normale und tangentiale Komponenten durch $v = v_n n + v^*$ und $w = w_n n + w^*$. Mit Proposition 2.8 folgt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \int_0^h [\partial_t \zeta + (v_n n + w_n n + w^* + v^*) \bullet \nabla \zeta] \circ \varphi_y \chi_y dy d\mu_M \\ &= \int_M \int_0^h [\partial_t^M (\zeta \circ \varphi_y) + w_n \circ \varphi_y \partial_y (\zeta \circ \varphi_y) + (y \nabla^M v_n + w^* \circ \varphi_y + v^*) \bullet R_y \nabla^M (\zeta \circ \varphi_y)] \chi_y dy d\mu_M. \end{aligned}$$

Wir wählen nun eine Testfunktion unabhängig von y , d.h. eine Funktion $\zeta : M \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir konstant in Normalenrichtung durch $\zeta = \zeta \circ \varphi_y$ auf Q fort. Dann verschwindet die Ableitung nach y und es folgt:

$$0 = \int_M \partial_t^M \zeta \int_0^h \chi_y dy + \nabla^M \zeta \bullet \int_0^h \chi_y R_y (w^* \circ \varphi_y + v^* + y \nabla^M v_n) dy d\mu_M, \quad (2.2.2)$$

wobei wir verwendet haben, dass R_y symmetrisch ist. Dies ist eine Erhaltungsgleichung in Distributionsform auf der Fläche M .

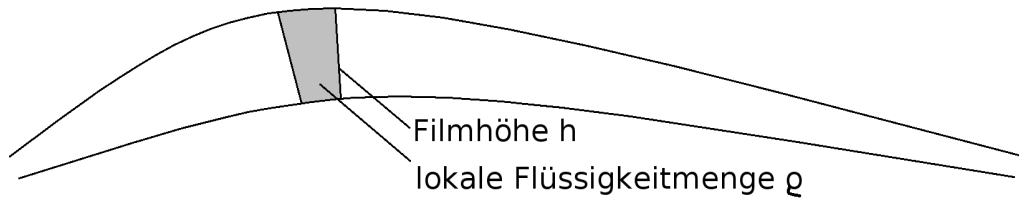


Abbildung 6: Flüssigkeitsmenge oberhalb eines infinitesimalen Flächenstücks

Die Erhaltungsgröße ist dabei die lokale Flüssigkeitsmenge und mit dem Flächenelement χ_y aus Proposition 2.10 definiert durch (siehe Abbildung 6):

$$\varrho = \int_0^h \chi_y dy = \int_0^h (1 - yk + y^2 \mathfrak{K}) dy = h - \frac{1}{2} y^2 k + \frac{1}{3} y^3 \mathfrak{K}.$$

Den Fluss bezeichnen wir mit $J = \int_0^h \chi_y R_y (w^* \circ \varphi_y + v^* + y \nabla^M v_n) dy$. Setzt man Glattheit voraus, so ist dies nach Theorem (2.8) aus [Al3] äquivalent zu: $\partial_t^M \varrho - \varrho k v_n + \operatorname{div}^M (J) = 0$.

Skalierung 2.15.

Um den Fluss zu berechnen, werden wir die Impulserhaltung entdimensionalisieren. Die Tatsache, dass es sich um einen dünnen Film handelt, nutzen wir aus, um einen Skalierungsparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ zu

identifizieren. Die dabei auftretenden Längenskalen sind H für die typische Filmhöhe und L für die typische Ausdehnung des Substrats M . Nachdem alle Größen, wie im folgenden beschrieben, reskaliert sind, werden wir unter der Annahme, dass $\epsilon \ll 1$ sehr klein ist, approximativ rechnen und Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ vernachlässigen.

Wir bezeichnen weiterhin mit W die typische Geschwindigkeitskala, die wir später noch genauer spezifizieren. Über Geschwindigkeits- und Längenskala ist dann die Zeitskala festgelegt. Wir nehmen an, dass die tangentielle Bewegung des Flüssigkeitsfilms relativ zum Substrat von der gleichen Größenordnung der Substratbewegung ist. Wir werden stets entdimensionalisierte Größen mit einem Hut, z.B. \hat{v} , bezeichnen. Koordinaten und Geschwindigkeiten skalieren folgendermaßen:

$\hat{t} = \frac{W}{L}t$	$\hat{x}_i = \frac{1}{L}x_i, i = 1 \dots N-1$	$\hat{y} = \frac{1}{H}y$
$\hat{v} = \frac{1}{W}v$	$\hat{w}^* = \frac{1}{W}w^*$	$\hat{w}_n = \frac{L}{HW}w_n$

Wir bemerken, dass die mittlere Krümmung des Substrates k , die skaliert wie inverse Radien, d.h. $\hat{k} = Lk$, implizit in der reskalierten Geometrie enthalten ist.

Bei der Schmierfilmapproximation ist der Druck so zu skalieren, dass Terme führender Ordnung in der Stokes-Gleichung in der gleichen Skalierungsordnung liegen, d.h. Gradienten des Druckes mit zweiten Ableitungen der (tangentialen) Geschwindigkeit in Normalenrichtung zum Substrat multipliziert mit der konstanten dynamischen Viskosität η . Damit ergibt sich das Skalierungsverhalten P für den Druck aus $\frac{P}{L} = \frac{\eta W}{H^2}$. Die Reibungskoeffizienten des Substrats skalieren wir ebenfalls derart, dass Reibungstermen und viskose Terme in der gleichen Ordnung liegen. Da Reibung auf dem (niederdimensionalen) Substrat stattfindet, macht es Sinn mit $\frac{\eta}{H}$ zu entdimensionalisieren. Als Skala für die Oberflächenspannung S wählen wir wie in [JG] die maximal mögliche Differenz in der Oberflächenspannung, d.h. $S = \sigma_0 - \sigma_M$. Dabei ist σ_0 die maximal mögliche Oberflächenspannung ohne Vorhandensein von Surfactantmolekülen und σ_M die kleinstmögliche Oberflächenspannung, die bei kritischer Micellenbildungskonzentration vorliegt. Wenn wir annehmen, dass f_Q hauptsächlich Corioliskräfte enthält, macht es Sinn anzunehmen, dass f_Q wie $\rho \partial_t u$ skaliert. In diesem Modell wird die Gravitationskraft vernachlässigt. Das entspricht einem sehr kleinem Regime der Bond-Zahl (vgl. [ODB]). Damit ergibt sich:

$\hat{p} = \frac{H^2}{LW\eta}P$	$\hat{c}_{i,j} = \frac{H}{\eta}c_{i,j}, \quad i, j = 1 \dots N-1$	$\hat{\sigma} = \frac{1}{S}(\sigma - \sigma_M)$	$\hat{f}_Q = \frac{L}{\rho W^2}f_Q$
---------------------------------	---	---	-------------------------------------

Das Flächenelement im Bulk χ_y skaliert mit Faktor 1 und wird so zu $\chi_{\hat{y}} = 1 - \epsilon \hat{y} \hat{k} + \epsilon^2 \hat{y}^2 \hat{\mathcal{R}}$. Die lokale Flüssigkeitsmenge ϱ skaliert mit H und wird damit zu $\hat{\rho} = \hat{h} - \frac{1}{2} \epsilon \hat{h}^2 \hat{k} + \frac{1}{3} \epsilon^2 \hat{h}^3 \hat{\mathcal{R}}$. Bei der Entdimensionalisierung der Impulserhaltung treten bestimmte charakteristische dimensionslose Kennzahlen auf. Das Verhältnis von Trägheit zu Viskosität wird als Reynolds-Zahl $\mathcal{R}e = \frac{WL\rho}{\eta}$ bezeichnet. Wir nehmen an, dass $\mathcal{R}e = \mathcal{O}(1)$ ist, so dass später Trägheitsterme von der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ sind und vernachlässigt werden. Ferner müssen wir angeben, in welchem Verhältnis Marangonieffekt und Kapillarität stehen. Dazu definieren wir wie in [JG] die Kapillaritätskonstante durch $\mathcal{S}a = \frac{\sigma_M \epsilon^2}{S}$, von der wir annehmen, dass $\mathcal{S}a = \mathcal{O}(1)$. Dabei ist wiederum σ_M die maximale Oberflächenspannung, und S die maximal mögliche Differenz der Oberflächenspannung.

Reynolds-Zahl	Kapillaritätskonstante
$\mathcal{R}e = \frac{WL\rho}{\eta}$	$\mathcal{S}a = \frac{\sigma_M \epsilon^2}{S}$

Es verbleibt anzugeben, in welchem Regime das Zusammenspiel von Kapillarität und Marangonieffekt ist, wodurch letztlich über das Skalierungsverhalten des Drucks die Geschwindigkeitsskala und damit die Zeitskala festgelegt wird. Die Kapillarität hängt von der Krümmung des freien Interfaces ab, welche aufgrund der Lubrikationsannahme $\epsilon \ll 1$ zur führenden Ordnung mit der Krümmung des Substrats übereinstimmt. Im planaren Fall war das freie Interface eine kleine Störung eines ebenen Substrats mit Krümmung niedriger Ordnung $\mathcal{O}(\frac{H}{L^2})$. Im gekrümmten Fall ist die Substratkrümmung der Term höchster Ordnung $\mathcal{O}(\frac{1}{L})$, es sind also im Druck Terme unterschiedlicher Ordnung zu erwarten. Um das

gleiche Regime von Kapillarität und Marangonieffekt zu modellieren, müssen wir also nicht $S = PH$ fordern wie im planaren Fall (vgl. [JG]), sondern $S = \epsilon PH$, denn dann liegen Marangonikräfte in der gleichen Ordnung wie Anteile der kleinen Störung der Substratkrümmung aufgrund des dünnen Filmes. Vermöge der Relation $\frac{P}{L} = \frac{\eta W}{H^2}$ folgt dann für W und damit für die Zeitskala $W = \frac{S}{\eta}$. Auf diese Weise liegen Marangoniterme wie im planaren Fall in einer Ordnung mit Termen höchster Ableitungsordnung der Filmhöhe anstelle von Gradienten des vollständigen Druckes.

Der Fluss J skaliert mit einem Faktor HW und ist entdimensionalisiert gegeben durch:

$$\begin{aligned} \hat{J} &= \int_0^{\hat{h}} \chi_{\hat{y}} R_{\hat{y}} (\hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} + \hat{v}^* + \hat{y} \nabla^{\hat{M}} \hat{v}_n) d\hat{y} \\ &= \int_0^{\hat{h}} (Id - \epsilon \hat{y} (\hat{k} Id - \hat{K})) \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} + \hat{h} (1 - \epsilon \frac{1}{2} \hat{h} \hat{k}) \hat{v}^* + \epsilon \frac{1}{2} \hat{h}^2 (\hat{K} \hat{v}^* + \nabla^{\hat{M}} \hat{v}_n) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Die entdimensionalisierte Erhaltungsgleichung wird dann, wenn wir den gemeinsamen Vorfaktor $\frac{HW}{L}$ kürzen, zu: $\partial_t^{\hat{M}} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{k} \hat{v}_n + \text{div}^{\hat{M}}(\hat{J}) = 0$.

Bestimmung des Flusses

Um den Fluss aus Gleichung (2.2.3) zu berechnen, ist es erforderlich den Anteil \hat{w}^* der tangentialen Geschwindigkeit zu berechnen. Wir werden dazu die Impulserhaltung reskalieren und Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ weglassen. Anschließend können wir explizit nach Druck \hat{p} und tangentialer Geschwindigkeit \hat{u}^* lösen. Wir liefern hier die Ergebnisse vorweg und zeigen wie davon ausgehend die gewünschte Erhaltungsgleichung folgt. Während dieser Herleitung verzichten wir darauf, die reskalierten Größen mit einem Hütchen zu bezeichnen. Es wird sich zeigen, dass der Druck genau mit dem Druck des stationären gekrümmten Falls aus [RRS] und [RSw] übereinstimmt. Er ist konstant in Normalenrichtung zum Substrat und proportional zur linearisierten Interfacekrümmung:

$$p = -\mathcal{S}a(k + \epsilon h |K|^2 + \epsilon \Delta^M h) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.2.4)$$

Dabei bezeichnet $|K|$ die Euklidische Norm der Weingarten-Abbildung. Der Anteil w^* der tangentialen Geschwindigkeit erweitert ebenfalls konsistent den stationären Fall. Setzen wir $v^* = 0, v_n = 0$, so stimmt die hier berechnete Geschwindigkeit präzise mit der in [RRS] und [RSw] überein. Sie ist, wenn alles glatt ist, in Abhängigkeit vom Abstand y zum Substrat durch ein polynomiales Profil gegeben:

$$\begin{aligned} w^* \circ \varphi_y &= \left(\frac{1}{2} y^2 - hy - hC^{-1} + \epsilon \frac{1}{6} y^3 k + \epsilon \frac{1}{2} h^2 y k - \epsilon \frac{1}{2} h y^2 k + \epsilon \frac{1}{6} y^3 K + \epsilon y h K C^{-1} + \epsilon \frac{1}{2} h^2 k C^{-1} \right) \nabla^M p \\ &\quad + \epsilon (y + C^{-1}) \nabla^M \sigma - \epsilon K y v^* - \epsilon y \nabla^M v_n + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Dabei haben wir im Navier-Slip Fall vorauszusetzen, dass die Slipkoeffizientenmatrix C positiv definit ist. Im No-Slip Fall tritt der Term mit C^{-1} nicht auf.

Satz 2.16. (Erhaltungsgleichung für den Flüssigkeitsfilm) *Es gelte Voraussetzung 2.2 und die Slipmatrix C sei positiv definit. Wenn alles hinreichend glatt ist, lässt sich das Ausgangsproblem aus Paragraph 2.1 durch Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Paragraph 2.15 beschrieben, entwickelt bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, auf folgende Erhaltungsgleichung vereinfachen:*

$$\partial_t^M \rho - \rho k v_n + \text{div}^M(J) = 0,$$

$$\text{mit dem Fluss: } J = \left(\frac{1}{3} \rho^3 + \rho^2 C^{-1} \right) \left(-\nabla^M p + a(\rho) \nabla^M k \right) + \epsilon \left(\frac{1}{2} \rho^2 + \rho C^{-1} \right) \nabla^M \sigma + \rho v^* + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

$$\text{und dem Druck: } p = -\mathcal{S}a(k + \epsilon \rho |K|^2 + \epsilon \Delta^M \rho) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

sowie dem matrixwertigen Faktor: $a(\rho) = \epsilon \frac{1}{2} \rho^2 (\rho Id + 3C^{-1})^{-1} (k Id + K)$.

Beweis. Wenn wir die tangentiale Geschwindigkeit aus Gleichung (2.2.5) in den Fluss aus Gleichung (2.2.3) einsetzen fallen die Terme $\nabla^M v_n$ und $K v^*$ weg und wir erhalten:

$$J = -\left(\frac{1}{3} h^3 (1 - \epsilon h (k Id - \frac{1}{2} K)) + h^2 (1 - \epsilon h k) C^{-1} \right) \nabla^M p + \epsilon \left(\frac{1}{2} h^2 + h C^{-1} \right) \nabla^M \sigma + (h - \frac{1}{2} \epsilon h k) v^* + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Um eine geschlossene Gleichung für die lokale Flüssigkeitsmenge ϱ zu erhalten, drücken wir h durch $\varrho = h(1 - \epsilon \frac{1}{2}hk)$ aus und begehen dabei wieder einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$. Damit wird der Fluss zu:

$$J = \left(-\frac{1}{3}\rho^3(1 + \epsilon\rho\frac{1}{2}(kId + K)) - \rho^2C^{-1} \right) \nabla^M p + \epsilon \left(\frac{1}{2}\rho^2 + \rho C^{-1} \right) \nabla^M \sigma + \rho v^* + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Wir setzen abkürzend den matrixwertigen Koeffizienten $a(\varrho) = \epsilon \frac{1}{2}\varrho^2(\varrho Id + 3C^{-1})^{-1}(kId + K)$. Es ist dabei $\varrho Id + 3C^{-1}$ positiv definit und invertierbar weil ϱ nach Voraussetzung 2.2 nichtnegativ und C^{-1} positiv definit ist. Wenn wir den Druck $p = -k - \epsilon\varrho|K|^2 - \epsilon\Delta^M \varrho + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ einsetzen, ergibt sich:

$$J = Sa \left(\frac{1}{3}\rho^3 + \rho^2 C^{-1} \right) \left(\nabla^M (k + \epsilon\varrho|K|^2 + \epsilon\Delta^M \varrho) + a(\varrho)\nabla^M k \right) + \epsilon \left(\frac{1}{2}\rho^2 + \rho C^{-1} \right) \nabla^M \sigma + \rho v^* + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

□

Da die Interface-Krümmung eine entscheidende Rolle spielen wird, überlegen wir zunächst, wie wir sie mit Hilfe der Filmhöhe und der Substratkrümmung ausdrücken können. Dabei erhalten wir ein äquivalentes Ergebnis zu [RSw], ohne von einer speziellen Parametrisierung von M Gebrauch zu machen. Wir benutzen dazu die Darstellung des Krümmungsvektors als Distribution.

Definition 2.17. (Krümmungsvektor im Distributionssinn) Sei $\Sigma \subset \mathbb{R}^N$ eine $C^{0,1}$ Fläche der Dimension $N - 1$. Es ist der Krümmungsvektor $\vec{\kappa}$ von Σ als Distribution folgendermaßen definiert:

$$\vec{\kappa}[\zeta] = - \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma}(\zeta) d\mathcal{H}^{N-1} \quad \text{für Testfunktionen } \zeta \in C_0^1(\Sigma; \mathbb{R}^N).$$

Um den auf M transformierten Krümmungsvektor $\vec{\kappa} \circ \varphi_h$ zu berechnen, würden wir, wenn alles glatt ist, zu $\xi : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit kompaktem Träger in M (d.h. es ist $\xi = 0$ auf ∂M) in Definition 2.17 die Testfunktion durch $\zeta \circ \varphi_h = \frac{\xi}{\chi_h}$ definieren und mit partieller Integration nach Satz 6.10 und Proposition 2.11 rechnen:

$$- \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma}(\zeta) d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\Sigma} \vec{\kappa} \bullet \zeta d\mathcal{H}^{N-1} = \int_M \vec{\kappa} \circ \varphi_h \bullet (\zeta \circ \varphi_h) \chi_h d\mathcal{H}^{N-1} = \int_M \xi \bullet \vec{\kappa} \circ \varphi_h d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Entsprechend erhalten wir die mittlere Krümmung $\kappa \circ \varphi_h$ von Σ in dem wir $\xi = \eta \sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2} n$ für eine Testfunktion $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger in M setzen und folgendermaßen rechnen:

$$\int_M \xi \bullet \vec{\kappa} \circ \varphi_h d\mathcal{H}^{N-1} = \int_M \eta \sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2} n \bullet \frac{n - R_h \nabla^M h}{\sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2}} \kappa \circ \varphi_h d\mathcal{H}^{N-1} = \int_M \eta \kappa \circ \varphi_h d\mathcal{H}^{N-1}.$$

Dabei haben wir verwendet, dass der Krümmungsvektor in Richtung der Normalen ν zeigt, und die explizite Form von ν aus Proposition 2.13. Es macht also Sinn die mittlere Krümmung und den Krümmungsvektor von Σ als Distribution auf M folgendermaßen zu definieren:

Definition 2.18. (Krümmung von Σ als Distribution auf M) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte $C^{1,1}$ -Hyperfläche mit Normale n . Sei Σ von der Klasse $C^{1,1}$ durch die Abbildung $\varphi_h = Id + hn$ eindeutig im Sinne von Voraussetzung 2.2 über M durch die Höhenfunktion $h \in C^{1,1}(M)$ parametrisiert. Die Jacobische dieser Abbildung χ_h , definiert wie in Proposition 2.11, ist dann positiv. Wir definieren den Krümmungsvektor von Σ als Distribution auf M durch:

$$(\vec{\kappa} \circ \varphi_h)[\xi] = - \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma} \left(\frac{\xi}{\chi_h} \circ \varphi_h^{-1} \right) d\mathcal{H}^{N-1}$$

für Testfunktionen $\xi \in C_0^1(M; \mathbb{R}^N)$. Weiterhin definieren wir die mittlere Krümmung von Σ als Distribution auf M durch:

$$(\kappa \circ \varphi_h)[\eta] = - \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma} \left(\frac{\eta \sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2} n}{\chi_h} \circ \varphi_h^{-1} \right) d\mathcal{H}^{N-1}$$

für Testfunktionen $\eta \in C_0^1(M)$.

Satz 2.19. (Krümmung in Abhängigkeit von der Filmhöhe) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine orientierte $C^{2,1}$ -Fläche der Dimension $N - 1$ mit Normalen n . Sei Σ über M durch die Abbildung $\varphi_h = Id + hn$ mit der Höhenfunktion $h \in C^{1,1}(M)$ parametrisiert. Sei K die Weingarten-Abbildung und k die mittlere Krümmung von M . Dann lassen sich mittlere Krümmung und Krümmungsvektor von Σ als Distribution auf M bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ entwickeln:

$$\begin{aligned}\kappa \circ \varphi_h[\eta] &= \int_M \left((k + h|K|^2)\eta - \nabla^M h \bullet \nabla^M \eta \right) d\mathcal{H}^{N-1} + \mathcal{O}(h^2), \\ \vec{\kappa} \circ \varphi_h[\zeta] &= \int_M \left((k + h|K|^2)\zeta \bullet (n - R_h \nabla^M h) - \nabla^M h \bullet \nabla^M (\zeta \bullet (n - R_h \nabla^M h)) \right) d\mathcal{H}^{N-1} + \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

für Testfunktionen $\eta \in C_0^1(M)$ bzw. $\zeta \in C_0^1(M; \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Sei $\eta \in C_0^1(M)$. Mit Definition 2.18 ist dann, wenn wir $\omega = \sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2}$ abkürzen:

$$\begin{aligned}(\kappa \circ \varphi_h)[\eta] &= - \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma} \left(\frac{\eta \omega n}{\chi_h} \circ \varphi_h^{-1} \right) d\mathcal{H}^{N-1} \\ &= - \int_{\Sigma} \nabla^{\Sigma} \left(\frac{\eta \omega}{\chi_h} \circ \varphi_h^{-1} \right) \bullet n \circ \varphi_h^{-1} d\mathcal{H}^{N-1} - \int_{\Sigma} \left(\frac{\eta \omega}{\chi_h} \circ \varphi_h^{-1} \right) \operatorname{div}^{\Sigma} (n \circ \varphi_h^{-1}) d\mathcal{H}^{N-1}.\end{aligned}$$

Mit Proposition 2.11 und 2.14 folgt dann, wenn wir wegen $\omega = 1 + \mathcal{O}(h^2)$ Terme der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ zusammenfassen:

$$(\kappa \circ \varphi_h)[\eta] = - \int_M \nabla^M \left(\frac{\eta}{\chi_h} \right) \bullet \nabla^M h \chi_h d\mathcal{H}^{N-1} - \int_M \eta (\operatorname{div}^{\Sigma} (n \circ \varphi_h^{-1})) \circ \varphi_h d\mathcal{H}^{N-1} + \mathcal{O}(h^2).$$

Wie im Beweis von Proposition 2.14 folgt für Vektorfelder $\zeta \in C^1(\Sigma; \mathbb{R}^N)$ mit der Kettenregel:

$$D^M(\zeta \circ \varphi_h) = (D^{\Sigma} \zeta) \circ \varphi_h D^M \varphi_h = (D^{\Sigma} \zeta) \circ \varphi_h (Id_{TM} - hK + n \otimes \nabla^M h).$$

Damit folgt wie im Beweis von Proposition 2.14:

$$(D^{\Sigma} \zeta) \circ \varphi_h = D^M(\zeta \circ \varphi_h) R_h (Id_{TM} + R_h \nabla^M h \otimes n) + \mathcal{O}(h^2).$$

Wenn wir als $\zeta = n \circ \varphi_h^{-1}$ die verschobene Normale setzen und die Spur berechnen ergibt sich:

$$\operatorname{div}^{\Sigma} (n \circ \varphi_h^{-1}) \circ \varphi_h = \operatorname{Tr}((D^M n) R_h) + \mathcal{O}(h^2) = -\operatorname{Tr}(K R_h) + \mathcal{O}(h^2) = -k - h|K|^2 + \mathcal{O}(h^2).$$

Nach Proposition 2.12 ist $\chi_h = 1 + \mathcal{O}(h)$ und wir können erneut Terme der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ zusammenfassen und erhalten insgesamt:

$$(\kappa \circ \varphi_h)[\eta] = - \int_M \nabla^M \eta \bullet \nabla^M h d\mathcal{H}^{N-1} + \int_M \eta (k + h|K|^2) d\mathcal{H}^{N-1} + \mathcal{O}(h^2).$$

Die Behauptung für den Krümmungsvektor folgt aus der Tatsache, dass der Krümmungsvektor ein Vielfaches der Normalen ist zusammen mit der Darstellung der Normalen aus Proposition 2.13. \square

Um den Druck zu berechnen, wählen wir in der Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) Testfunktionen in Normalenrichtung. Wenn wir Reskalieren und Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ vernachlässigen, wird sich dabei herausstellen, dass der Druck mit der linearisierten Krümmung aus Satz 2.19 übereinstimmt.

Satz 2.20. (Expliziter Druck) Betrachte die Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) aus Abschnitt 2.1. Voraussetzung 2.2 sei für alle Zeiten erfüllt. Dann ist die Distributionslösung für den skalierten Druck $\hat{p} \in \mathcal{D}(\hat{D})$ der Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ konstant in Normalenrichtung zu \hat{M} und gegeben durch:

$$\int_{\hat{M}} \hat{p} \zeta d\mu_{\hat{M}} = \mathcal{S}a \int_{\hat{M}} (-\zeta \hat{k} - \epsilon \hat{h} \zeta |\hat{K}|^2 + \epsilon \nabla^{\hat{M}} \zeta \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h}) d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

für Testfunktionen $\zeta \in C_0^1(\hat{M})$.

Beweis. Siehe Anhang 6. □

Wenn alles glatt ist, ist dies äquivalent zu $\hat{p} = -\mathcal{S}a(\hat{k} + \hat{h}|\hat{K}|^2 + \epsilon\Delta^{\hat{M}}\hat{h})$. Wir schreiben von nun an auch für $\zeta \in C_0^1(\hat{M})$:

$$\hat{\mathcal{P}}(\zeta) = \mathcal{S}a \int_{\hat{M}} (-\zeta\hat{k} - \epsilon\hat{h}\zeta|\hat{K}|^2 + \epsilon\nabla^{\hat{M}}\zeta \bullet \nabla^{\hat{M}}\hat{h})d\mu_{\hat{M}}.$$

Um die Geschwindigkeit zu bestimmen, wählen wir Testfunktionen, die tangential zum Substrat sind. Wie beim Druck transformieren wir alle Integrale und Ableitungsoperatoren auf das Substrat und reskalieren gemäß Abschnitt 2.15. Die Geschwindigkeit bestimmen wir dann explizit in zwei Schritten. Zunächst lassen wir Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ weg und erhalten in jedem Punkt auf M eine schwache ODE zweiter Ordnung für die tangentielle Geschwindigkeit, die wir lösen. Im zweiten Schritt setzen wir dann die erhaltene Lösung in das ursprüngliche Problem ein, um die Lösung zur nächsthöheren Ordnung mit der gleichen Methode zu berechnen.

Satz 2.21. (Explizite Geschwindigkeit) Betrachte die Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) aus Abschnitt 2.1. Voraussetzung 2.2 sei für alle Zeiten erfüllt. Weiterhin sei die Slipmatrix C positiv definit. Dann besitzt die Distributionslösung für die tangentielle Geschwindigkeit der Flüssigkeit $\hat{u}^* \in \mathcal{D}(\hat{D})$ der Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ ein quadratisches Profil und ist gegeben durch $\hat{u}^* \circ \varphi_y = \hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_y$ mit:

$$\int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} \bullet \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} = \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} (\hat{h}\hat{y} - \frac{1}{2}\hat{y}^2 + \hat{h}(\hat{C}^{-1})^T)\xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

für Testfunktionen $\xi \in C^2(Q; \mathbb{R}^N)$ mit $n \bullet \xi \circ \varphi_{\hat{y}} = 0$ und kompaktem Träger von $\xi \circ \varphi_{\hat{y}}$ in \hat{M} . Dabei ist \mathcal{P} der Druck als Distribution aus Satz 2.20.

Wenn alles glatt ist, ist diese Behauptung äquivalent zu $\hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} = (\frac{1}{2}\hat{y}^2 - \hat{h}\hat{y} - \hat{h}\hat{C}^{-1})\nabla^{\hat{M}}p + \mathcal{O}(\epsilon)$.

Beweis. Siehe Anhang 6. □

Satz 2.22. (Explizite Geschwindigkeit zu höherer Ordnung) Betrachte die Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) aus Abschnitt 2.1. Voraussetzung 2.2 sei für alle Zeiten erfüllt. Weiterhin sei die Slipmatrix C positiv definit. Dann besitzt die Distributionslösung für die tangentielle Geschwindigkeit der Flüssigkeit $\hat{u}^* \in \mathcal{D}(\hat{D})$ der Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ein kubisches Profil und ist gegeben durch $\hat{u}^* \circ \varphi_y = \hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_y$ mit:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} \bullet \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} &= \epsilon \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \xi \circ \varphi_{\hat{y}} \bullet ((y \operatorname{Id} + C^{-1})\nabla^{\hat{M}}\hat{\sigma} - yKv^* - y\nabla^{\hat{M}}\hat{v}_n) d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} \\ &\quad - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} W(\hat{y})^T \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

für Testfunktionen $\xi \in C^2(Q; \mathbb{R}^N)$ mit $n \bullet \xi \circ \varphi_y = 0$ und kompaktem Träger von $\xi \circ \varphi_{\hat{y}}$ in \hat{M} . Dabei ist \mathcal{P} der Druck als Distribution aus Satz 2.20 und $W(\hat{y})$ ist gegeben durch:

$$W(\hat{y}) = (\frac{1}{2}\hat{y}^2 - \hat{h}\hat{y} + \epsilon\frac{1}{6}\hat{y}^3k + \epsilon\frac{1}{2}\hat{h}^2\hat{y}\hat{k} - \epsilon\frac{1}{2}\hat{h}\hat{y}^2k) \operatorname{Id} - \hat{h}\hat{C}^{-1} + \epsilon\frac{1}{6}\hat{y}^3K + \epsilon\hat{y}\hat{h}\hat{K}\hat{C}^{-1} + \epsilon\frac{1}{2}\hat{h}^2\hat{k}C^{-1}.$$

Wenn alles glatt ist, ist diese Behauptung äquivalent zu Gleichung (2.2.5):

$$\hat{w}^* = W(\hat{y})\nabla^{\hat{M}}\hat{p} + \epsilon(\hat{y}\operatorname{Id} + \hat{C}^{-1})\nabla^{\hat{M}}\hat{\sigma} - \epsilon\hat{K}\hat{y}\hat{v}^* - \epsilon\hat{y}\nabla^{\hat{M}}\hat{v}_n + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Beweis. Siehe Anhang 6. □

Damit können wir die Rechnungen aus Satz 2.16 in einer schwachen Form wiederholen, die nur zweite Ableitungen von h unter dem Integral verwendet. Ausgehend von der skalierten Version der tiefenintegrierten schwachen Massenerhaltung aus Gleichung (2.2.2) folgt, wenn wir zu einer Funktion $\zeta \in C_0^3(M)$ in Satz 2.22 $\xi \circ \varphi_y = \chi_y R_y \nabla^M \zeta$ setzen:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \partial_t^M \zeta \varrho d\mu_M + \int_M \int_0^h \chi_y R_y \nabla^M \zeta \bullet w^* \circ \varphi_y dy d\mu_M + \int_M \int_0^h \chi_y R_y \nabla^M \zeta \bullet (v^* + \epsilon y \nabla^M v_n) dy d\mu_M \\ &= \int_M \partial_t^M \zeta \varrho d\mu_M - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h W(y)^T \chi_y R_y \nabla^M \zeta dy \right) + \int_M \int_0^h \chi_y R_y \nabla^M \zeta \bullet (v^* + \epsilon y \nabla^M v_n) dy d\mu_M \\ &\quad + \epsilon \int_M \int_0^h \chi_y R_y \nabla^M \zeta \bullet ((y \operatorname{Id} + C^{-1}) \nabla^M \sigma - y K v^* - y \nabla^M \hat{v}_n) dy d\mu_M + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir darauf verzichtet, die Skalierungshütchen zu führen. Per Definition ist $\varrho = \int_0^h \chi_y dy$. Ferner ist $R_y = \operatorname{Id} + \epsilon y K + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ und wir können weitere Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ zusammenfassen. Dann fallen die Terme mit $K v^*$ und $\nabla^M v_n$ weg und wir können die elementaren Integrale berechnen:

$$0 = \int_M \partial_t^M \zeta \varrho d\mu_M - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M (A_h^T \nabla^M \zeta) \right) + \int_M \nabla^M \zeta \bullet \left(\epsilon \left(\frac{1}{2} h^2 \operatorname{Id} + h C^{-1} \right) \nabla^M \sigma + \varrho v^* \right) d\mu_M + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dabei haben wir abkürzend $A_h^T = \int_0^h W(y)^T \chi_y R_y dy$ geschrieben, was wir im Beweis von Satz 2.16 bereits berechnet haben. Wenn wir wieder h durch ϱ ausdrücken, wobei wir wieder einen Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ begehen, erhalten wir mit der Definition des distributionellen Drucks:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \partial_t^M \zeta \varrho d\mu_M - \mathcal{S}a \int_M k \operatorname{div}^M \left(\left(\frac{1}{3} \varrho^3 + C^{-1} \varrho^2 \right) (\operatorname{Id} + a(\varrho)) \nabla^M \zeta \right) d\mu_M \\ &\quad - \epsilon \mathcal{S}a \int_M (|\varrho K|^2 - \nabla^M \varrho \bullet \nabla^M) (\operatorname{div}^M \left(\left(\frac{1}{3} \varrho^3 + C^{-1} \varrho^2 \right) \nabla^M \zeta \right)) d\mu_M \\ &\quad + \int_M \nabla^M \zeta \bullet \left(\epsilon \left(\frac{1}{2} \varrho^2 \operatorname{Id} + \varrho C^{-1} \right) \nabla^M \sigma + \varrho v^* \right) d\mu_M + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir schon mit dem matrixwertigen Faktor $a(\varrho)$ wie in Satz 2.16 geschrieben und der ∇^M -Operator ist so zu verstehen, dass er auf den Ausdruck in der Klammer angewendet wird. Dies ist eine schwache Formulierung, die nur zweite Ableitungen von ϱ benötigt. Wenn wir durch partielle Integration eine Ableitung von der Testfunktion entfernen, erhalten wir die Formulierung des Lösungsbegriffs von Theorem 1.3, der ebenfalls nur integrierbare zweite Ableitungen verwendet. Wenn alles glatt ist, so ist diese Formulierung äquivalent zur starken Version aus Satz 2.16.

2.3 Modellierung der Surfactantgleichung

Ausgehend von der Erhaltungsgleichung für die Surfactantkonzentration auf Σ in ihrer schwachen Formulierung 2.1.7 möchten wir nun eine Erhaltungsgleichung für die auf M transformierte Surfactantdichte herleiten. Die Ausgangsgleichung ist auf dem Interface definiert und hängt von der Fluidgeschwindigkeit ab. Transformation auf das Substrat, Reskalierung und Einsetzen der berechneten Geschwindigkeit der Flüssigkeit liefert dann die gewünschte Gleichung. Um die Zeitableitung in geeigneter Weise auf das Substrat zu transformieren brauchen wir an dieser Stelle eine kinematische Randwertbedingung.

Proposition 2.23. (Kinematische Randbedingung) *Sei M eine orientierte, evolvierende Hyperfläche der Klasse C^2 mit Normale n , Geschwindigkeitsvektor $v = v_n n + v^*$ zerlegt in Orthogonal- und Tangentialteil sowie Weingarten-Abbildung K mit zugehöriger Resolvente R_h . Sei Σ eine evolvierende Fläche der Klasse C^1 mit Geschwindigkeit u die über M durch die Abbildung $\varphi_h = \operatorname{Id} + h n$ eindeutig im Sinne von Voraussetzung 2.2 mit einer Höhenfunktion $h \in C^1(M)$ parametrisiert ist. Zerlege $u \circ \varphi_h = v + w \circ \varphi_h$ und weiterhin $w = w_n n + w^*$ ebenfalls in Orthogonal- und Tangentialteil. Dann gilt auf M die folgende Relation:*

$$\partial_t^M h = (w_n) \circ \varphi_h - (v^* + w^* \circ \varphi_h + h \nabla^M v_n) \bullet R_h \nabla^M h.$$

Beweis. Sei Q eine Umgebung von Σ . Definiere die Abbildung $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ durch $f \circ \varphi_y = h - y$. Es ist $f = 0$ auf Σ und damit $\partial_t^\Sigma f = 0$ auf Σ . Einerseits ist $\partial_t^M(f \circ \varphi_y) = \partial_t^M h$ und $\nabla^M(f \circ \varphi_y) = \nabla^M h$. Andererseits können wir die Zeitableitung von $f \circ \varphi_y$ nach Proposition 2.8 berechnen:

$$\begin{aligned} \partial_t^M(f \circ \varphi_y) &= (\partial_t f) \circ \varphi_y + v_n n \bullet (\nabla f) \circ \varphi_y - y \nabla^M v_n \bullet (\nabla^M f) \circ \varphi_y \\ &= (\partial_t^\Sigma f) \circ \varphi_y + ((v_n n - (u \bullet \nu)\nu) \bullet \nabla f) \circ \varphi_y - y \nabla^M v_n \bullet R_y \nabla^M(f \circ \varphi_y). \end{aligned}$$

Wir setzen nun $y = h$ und schreiben von nun an der Übersicht halber u anstatt $u \circ \varphi_h$ und analog für die anderen Ausdrücke. Im Folgenden haben wir $v_n n - (u \bullet \nu)\nu$ zu berechnen. Es ist $\nabla f = -n + R_h \nabla^M h$ und durch Proposition 2.13 ist die Normale an Σ gegeben durch $\nu \circ \varphi_h = \frac{n - R_h \nabla^M h}{\sqrt{1 + |R_h \nabla^M h|^2}}$. Dann ist:

$$(u \bullet \nu)\nu = \left(\frac{v_n + w_n - (v^* + w^*) \bullet R_h \nabla^M h}{1 + |R_h \nabla^M h|^2} \right) (n - R_h \nabla^M h). \quad (2.3.1)$$

Und damit:

$$v_n n - (u \bullet \nu)\nu = \frac{((v^* + w^*) \bullet R_h \nabla^M h - w \bullet n)(n - R_h \nabla^M h) + |R_h \nabla^M h|^2 v_n n + v_n R_h \nabla^M h}{1 + |R_h \nabla^M h|^2}.$$

Mit obigem f folgt dann:

$$\begin{aligned} (v_n n - (u \bullet \nu)\nu) \bullet (\nabla f) \circ \varphi_y &= (v_n n - (u \bullet \nu)\nu) \bullet (R_h \nabla^M h - n) \\ &= \frac{(w_n - (v^* + w^*) \bullet R_h \nabla^M h)(1 + |R_h \nabla^M h|^2)}{1 + |R_h \nabla^M h|^2} = w_n - (v^* + w^*) \bullet R_h \nabla^M h. \end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt: $\partial_t^M h = w_n - (v^* + w^*) \bullet R_h \nabla^M h - h \nabla^M v_n \bullet R_h \nabla^M h$. \square

Wir bemerken, dass der Beweis der kinematischen Randwertbedingung exakt ist und nicht approximativ bis auf einen Fehler etwa der Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$. Ein Beweis mit speziellen Parametrisierungen taucht in der Arbeit [FHO] auf. Ohne Beweis kann man sie finden in [How].

Proposition 2.24. (Transformation von Zeitableitungen auf Σ) Sei M eine orientierte, evolvierende C^2 -Fläche mit Normale n und Geschwindigkeitsvektor $v = v_n n + v^*$ zerlegt in Orthogonal- und Tangentialteil. Sei Σ eine evolvierende C^1 -Fläche mit Geschwindigkeitsvektor u , die über M durch die Abbildung $\varphi_h = Id + \epsilon h n$ eindeutig im Sinne von Voraussetzung 2.2 mit einer Höhenfunktion $h \in C^1(M)$ parametrisiert ist. Zerlege $u \circ \varphi_h = v_n n + v^* + \epsilon w_n \circ \varphi_h + w^* \circ \varphi_h$. Dann transformieren sich die Zeitableitungen von $f \in C^1(\Sigma)$ folgendermaßen:

$$(\partial_t^\Sigma f) \circ \varphi_h = \partial_t^M(f \circ \varphi_h) + \epsilon \nabla^M(f \circ \varphi_h) \bullet (h \nabla^M v_n - v_n \nabla^M h) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Beweis. Schreiben wir φ_h^t , um die Abhängigkeit von der Zeit zu verdeutlichen. Nach der Kettenregel ist: $\partial_t^M(f(t) \circ \varphi_h^t) = Df(t) \circ \varphi_h^t(1, \partial_t^M \varphi_h^t)$. Berechnen wir nun $\partial_t^M \varphi_h^t$ mit Hilfe von Proposition 2.7:

$$\partial_t^M \varphi_h^t = v_n n + \epsilon \partial_t^M h n + \epsilon h \partial_t^M n = v_n n + \epsilon \partial_t^M h n - \epsilon h \nabla^M v_n.$$

Mit Proposition 2.23 folgt mit der \mathcal{O} -Notation:

$$\partial_t^M \varphi_h^t = v_n n + \epsilon(w_n \circ \varphi_h - (v^* + w^* \circ \varphi_h) \bullet \nabla^M h)n - \epsilon h \nabla^M v_n + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Im Beweis von Proposition 2.23 hatten wir $(u \bullet \nu)\nu$ in Gleichung (2.3.1) berechnet. Wenn wir Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ zusammenfassen, folgt damit:

$$((u \bullet \nu)\nu) \circ \varphi_h^t = (v_n + \epsilon w_n \circ \varphi_h - \epsilon(v^* + w^* \circ \varphi_h) \bullet \nabla^M h)n - \epsilon v_n \nabla^M h + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Damit ist $\partial_t^M \varphi_h^t = ((u \bullet \nu)\nu) \circ \varphi_h^t - \epsilon(h \nabla^M v_n - v_n \nabla^M h) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ und es folgt:

$$\partial_t^M(f(t) \circ \varphi_h^t) = (\partial_t^\Sigma f(t)) \circ \varphi_h^t - \epsilon \nabla^\Sigma f(t) \circ \varphi_h^t \bullet (h \nabla^M v_n - v_n \nabla^M h) + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Die Behauptung folgt dann, wenn wir noch Proposition 2.14 auf $\nabla^\Sigma f$ anwenden und erneut Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ weglassen. \square

Wenn wir die lokale Surfactantdichte als Erhaltungsgröße auf M auffassen, hängt diese einerseits von der Surfactantdichte auf Σ ab, wie auch andererseits vom Flächenelement aus Proposition 2.11. Wie bei der Flüssigkeit die richtige Erhaltungsgröße ρ ist und nicht die Filmhöhe h , so ist ebenfalls nicht Γ die richtige Erhaltungsgröße für die Surfactants. Wir definieren daher:

$$\gamma = \Gamma \circ \varphi_h \chi_h \quad (2.3.2)$$

mit dem Flächenelement χ_h aus Proposition 2.11. Entwickelt bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ist dann $\gamma = \Gamma \circ \varphi_h (1 - \epsilon h k) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Bei der Entdimensionalisierung der Surfactantgleichung müssen wir noch angeben wie die Diffusivität der Surfactantmoleküle im Interface skaliert. Dazu definieren wir wie in [GG] als reskalierten Diffusionskoeffizienten die inverse Peclet-Zahl $\mathcal{P}e^{-1} = \frac{\eta D}{SH}$, die das Regime von Surfactants, Viskosität, Diffusion und Geometrie wie im klassischen Fall widerspiegelt.

Satz 2.25. (Erhaltungsgleichung für die Surfactantkonzentration) *Wenn alles hinreichend glatt ist, lässt sich unter den Voraussetzungen von Satz 2.16, die an das Ausgangsproblem für die Flüssigkeit aus Abschnitt 2.1 gekoppelte Gleichung für die Surfactant-Erhaltung (2.1.6) durch Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, entwickelt bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$, auf folgende Erhaltungsgleichung vereinfachen:*

$$\partial_t^{\hat{M}} \hat{\gamma} - \hat{\gamma} \hat{k} \hat{\nu}_n + \operatorname{div}^{\hat{M}}(\hat{J}) = 0,$$

mit dem Fluss:

$$\hat{J} = \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} \hat{\rho}^2 + \hat{\rho} \hat{C}^{-1} \right) (-\nabla^{\hat{M}} \hat{p}(\hat{\rho}) + a_2(\hat{\rho}) \nabla^{\hat{M}} \hat{k}) + \epsilon \hat{\gamma} (\hat{\rho} + \hat{C}^{-1}) \nabla^{\hat{M}} \hat{\sigma}(\hat{\gamma}) + \hat{\gamma} \hat{v}^* - \mathcal{P}e^{-1} \nabla^{\hat{M}} \hat{\gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

und dem Druck: $\hat{p} = -\mathcal{S}a(\hat{k} + \epsilon \hat{\rho} |\hat{K}|^2 + \epsilon \Delta^{\hat{M}} \hat{\rho}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

und dem matrixwertigen Faktor: $a_2(\hat{\rho}) = \epsilon \frac{2}{3} \hat{\rho}^2 (\hat{\rho} Id + 2\hat{C}^{-1})^{-1} (\hat{k} Id + \hat{K})$.

Beweis. Mit Proposition 2.11 und der Abbildung $\varphi_h = Id + hn$ können wir in der schwachen Formulierung der Surfactant-Erhaltung (2.1.7) zu jedem Zeitpunkt die Integrale auf M_t transformieren:

$$\int_M (\partial_t \zeta \Gamma + \nabla \zeta \bullet (\Gamma u - D \nabla^\Sigma \Gamma)) \circ \varphi_h \chi_h d\mu_M = 0.$$

Wenn wir etwas umformulieren und die Definition von γ aus (2.3.2) einsetzen:

$$0 = \int_M \underbrace{(\partial_t^\Sigma \zeta) \circ \varphi_h \gamma}_{(1)} + \underbrace{(\nabla^\Sigma \zeta \bullet (u - (u \bullet \nu) \nu)) \circ \varphi_h \gamma}_{(2)} - \underbrace{(D \nabla^\Sigma \zeta \bullet \nabla^\Sigma \Gamma) \circ \varphi_h \chi_h}_{(3)} d\mu_M.$$

Nun behandeln wir die Terme einzeln, die wir fortan als (1), (2), (3) bezeichnen. Wir bemerken im voraus, dass wir nach der Skalierung gemäß Abschnitt 2.15 in allen Termen den gemeinsamen Faktor $L^{N-1} G$ kürzen werden. Die reskalierten Terme bezeichnen wir mit $(\hat{1}), (\hat{2}), (\hat{3})$.

1. Term (1) erhält als Skalierungsfaktor genau den gemeinsamen Vorfaktor, der dann gekürzt wird. Es folgt nach Proposition 2.24:

$$(\hat{1}) = \int_{\hat{M}} \left[(\partial_t^{\hat{M}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{h}}) + (\epsilon \hat{h} \nabla^{\hat{M}} \hat{\nu}_n - \epsilon \hat{\nu}_n \nabla^{\hat{M}} \hat{h}) \bullet \nabla^{\hat{M}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{h}}) \right] \hat{\gamma} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

2. Für Term (2) macht es Sinn zunächst die skalierte, tangentielle Geschwindigkeit auf Σ zu berechnen. Dies folgt aus Skalieren gemäß Abschnitt 2.15 von Gleichung (2.3.1):

$$\frac{1}{W} (u - (u \bullet \nu) \nu) \circ \varphi_h = \hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{h}} + \epsilon \hat{\nu}_n \nabla^{\hat{M}} \hat{h} + \epsilon (\hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{h}}) \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h} n + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Dann folgt :

$$(\hat{2}) = \int_{\hat{M}} (\nabla^{\hat{\Sigma}} \zeta) \circ \varphi_{\hat{h}} \bullet (\hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{h}} + \epsilon \hat{\nu}_n \nabla^{\hat{M}} \hat{h} + \epsilon (\hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{h}}) \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h} n) \hat{\gamma} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Im nächsten Schritt verwenden wir Proposition 2.14. Weil die Terme in Normalenrichtung jeweils die Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ haben folgt:

$$\begin{aligned} (\hat{2}) &= \int_{\hat{M}} R_{\hat{h}} \nabla^{\hat{M}} \zeta \circ \varphi_h \bullet (\hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{h}} + \epsilon \hat{v}_n \nabla^{\hat{M}} \hat{h}) \hat{\gamma} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \int_{\hat{M}} \nabla^{\hat{M}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{h}}) \bullet (R_{\hat{h}} \hat{v}^* + R_{\hat{h}} (\hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{h}}) + \epsilon \hat{v}_n \nabla^{\hat{M}} \hat{h}) \hat{\gamma} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde die Symmetrie von $R_{\hat{h}}$ verwendet und die Tatsache $R_{\hat{h}} = Id + \mathcal{O}(\epsilon)$.

3. Term (3) bekommt einen Skalierungsfaktor von $\frac{L^{N-1} DG}{WL}$. Nach Kürzen des gemeinsamen Vorfaktors bleibt schließlich ein Faktor von $\epsilon \mathcal{P} e^{-1}$. Also ist:

$$(\hat{3}) = -\mathcal{P} e^{-1} \epsilon \int_{\hat{M}} (\nabla^{\hat{M}} \zeta \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{\Gamma}) \circ \varphi_{\hat{h}} \chi_{\hat{h}} d\mu_{\hat{M}}.$$

Hierfür folgt dann nach Proposition 2.14 genau wie oben, weil Terme in Normalenrichtung jeweils die Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ haben:

$$(\hat{3}) = -\epsilon \mathcal{P} e^{-1} \int_{\hat{M}} \nabla^{\hat{M}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{h}}) \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{\gamma} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Im Rest des Beweises verzichten wir darauf die Skalierungshütchen zu führen. Wenn wir Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ weglassen und zusammenfassen, fällt der Term mit $v_n \nabla^M h$ weg und wir erhalten:

$$\int_M (\partial_t^M (\zeta \circ \varphi_h) \gamma + \nabla^M (\zeta \circ \varphi_h) \bullet (R_h v^* + R_h w^* \circ \varphi_h + \epsilon h \nabla^M v_n) \gamma - \epsilon \mathcal{P} e^{-1} \nabla^M (\zeta \circ \varphi_h) \bullet \nabla^M \gamma) d\mu_M = 0.$$

Setzt man Glattheit voraus, so ist nach [Al3] dies äquivalent zur starken Formulierung:

$$\partial_t^M \gamma - v_n k \gamma + \operatorname{div}^M (J) = 0,$$

mit dem Fluss: $J = (R_h v^* + R_h w^* \circ \varphi_h + \epsilon h \nabla^M v_n) \gamma - \epsilon \mathcal{P} e^{-1} \nabla^M \gamma$. Um J zu berechnen setzen wir in die tangentielle Geschwindigkeit w^* aus Gleichung (2.2.5) für $y = h$ und erhalten:

$$\begin{aligned} w^* &= \left(-\frac{1}{2} h^2 (Id - \frac{1}{3} \epsilon h (k Id + K)) - h (Id - \epsilon h (\frac{1}{2} k Id + K)) C^{-1} \right) \nabla^M p \\ &\quad + \epsilon (h Id + C^{-1}) \nabla^M \sigma - \epsilon K h v^* - \epsilon h \nabla^M v_n + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Wenn wir diese Geschwindigkeit in J einsetzen fallen wegen $R_h = Id + \epsilon h K + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ die Terme von $K v^*$ und $\nabla^M v_n$ weg. Damit ergibt sich für den Fluss bis auf $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ genau:

$$\begin{aligned} J &= \gamma (Id + \epsilon h K) \left(\left(-\frac{1}{2} h^2 (Id - \frac{1}{3} \epsilon h (k Id + K)) - h (Id - \epsilon h (\frac{1}{2} k Id + K)) C^{-1} \right) \nabla^M p + \epsilon (h Id + C^{-1}) \nabla^M \sigma \right) \\ &\quad + \gamma v^* - \epsilon \mathcal{P} e^{-1} \nabla^M \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \gamma \left(-\frac{1}{2} h^2 (Id - \frac{1}{3} \epsilon h (k Id - 2K)) - h (1 - \frac{1}{2} \epsilon h k) C^{-1} \right) \nabla^M p + \epsilon \gamma (h Id + C^{-1}) \nabla^M \sigma \\ &\quad + \gamma v^* - \epsilon \mathcal{P} e^{-1} \nabla^M \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Die endgültige Gleichung möchten wir an die Erhaltungsgleichung für die lokale Flüssigkeitsmenge ϱ aus Satz 2.16 koppeln. Daher macht es Sinn, dass wir anstelle von h alles mit $\varrho = h(1 - \frac{1}{2} \epsilon h k) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ ausdrücken. Für den Druck bedeutet dies $p = -k - \epsilon \varrho |K|^2 - \epsilon \Delta^M \varrho + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Damit ergibt sich schließlich für den Fluss:

$$\begin{aligned} J &= \gamma \left(v^* + \left(\frac{1}{2} \varrho^2 + \varrho C^{-1} \right) \nabla^M (k + \epsilon \varrho |K|^2 + \epsilon \Delta^M \varrho) + \frac{1}{3} \epsilon \varrho^3 (k Id + K) \nabla^M k + \epsilon (\varrho + C^{-1}) \nabla^M \sigma \right) \\ &\quad - \epsilon \mathcal{P} e^{-1} \nabla^M \gamma + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Wenn wir mit dem Matrixfaktor $a_2(\hat{\varrho}) = \epsilon \frac{2}{3} \hat{\varrho}^2 (\hat{\varrho} Id + 2\hat{C}^{-1})^{-1} (\hat{k} Id + \hat{K})$ schreiben folgt die Behauptung. \square

2.4 Spezielle Fälle

Im letzten Paragraphen dieses Kapitels möchten wir einige spezielle Fälle diskutieren.

1. Konstante Oberflächenspannung: In diesem Fall verschwinden Marangoni-Terme $\nabla^M \sigma$ und in der Definition der Kapillaritätskonstante $\mathcal{S}a = \frac{\epsilon^2 \sigma}{\eta W}$ ist die kritische Micellenbildungskonzentration σ_M durch die konstante Oberflächenspannung σ zu ersetzen. Diese Definition stimmt mit der Definition in [RRS] überein. Die Gleichung lautet dann:

$$\partial_t^M \varrho - \varrho k v_n + \operatorname{div}^M \left(\left(\frac{1}{3} \varrho^3 + \varrho^2 C^{-1} \right) (-\nabla^M p + a(\varrho) \nabla^M k) + \varrho v^* \right) = 0, \quad (2.4.1)$$

mit dem Druck $p = -\mathcal{S}a(k + \epsilon \varrho |K|^2 + \epsilon \Delta^M \varrho)$ wie bisher sowie dem matrixwertigen Faktor $a(\varrho) = \epsilon \frac{1}{2} \varrho^2 (\varrho Id + 3C^{-1})^{-1} (k Id + K)$. Diese Gleichung werden wir in Kapitel 3 betrachten.

2. No-Slip Limes: Betrachten wir in Gleichung (2.4.1) formal den No-Slip Limes:

$$\inf_{x \in M, |\xi|=1} \xi \bullet C(x) \xi \longrightarrow \infty.$$

Dann konvergiert $C^{-1} \longrightarrow 0$ und wir erhalten folgende Erhaltungsgleichung für den No-Slip Fall:

$$\partial_t^M \varrho - \varrho k v_n + \operatorname{div}^M \left(\frac{1}{3} \varrho^3 (-\nabla^M p + \epsilon \frac{1}{2} \varrho (k Id + K) \nabla^M k) + \varrho v^* \right) = 0. \quad (2.4.2)$$

Der Beweis von Satz 2.16 angewendet auf den No-Slip Fall des Ausgangsmodells aus Abschnitt 2.1 liefert genau diese Gleichung. Diese Gleichung werden wir in Kapitel 3 ebenfalls betrachten.

3. Festes Substrat: Ist das Substrat unbewegt, so sind $v_n = 0$ und $v^* = 0$. Wir erhalten im No-Slip Fall von Gleichung (2.4.2) folgende Erhaltungsgleichung:

$$\partial_t^M \varrho + \operatorname{div}^M \left(\frac{1}{3} \varrho^3 (-\nabla^M p + \epsilon \frac{1}{2} \varrho (k Id + K) \nabla^M k) \right) = 0.$$

Diese Gleichung ist zur betrachteten Ordnung äquivalent zu den Gleichungen aus [RRS], [RSw].

4. Planarer Fall: Betrachten wir nun das System mit Surfactant im Spezialfall eines planaren, stationären Substrats, d.h. $K = 0, v^* = 0, v_n = 0$. Dann stimmen die Erhaltungsgrößen ϱ mit der Filmhöhe h und γ mit der Surfactantkonzentration Γ überein. Wir erhalten das System:

$$\begin{aligned} \partial_t h + \epsilon \operatorname{div} \left(\mathcal{S}a \left(\frac{1}{3} h^3 + h^2 C^{-1} \right) \nabla \Delta h + \left(\frac{1}{2} h^2 + h C^{-1} \right) \nabla \sigma \right) &= 0, \\ \partial_t \Gamma + \epsilon \operatorname{div} \left(\Gamma \left(\frac{1}{2} h^2 + h C^{-1} \right) \nabla \Delta h + (h + C^{-1}) \nabla \sigma \right) &= \epsilon \mathcal{P} e^{-1} \Delta \Gamma. \end{aligned}$$

Nach Reskalieren der Zeitskala erhalten wir genau das hergeleitete System aus [Wie] und im No-Slip Fall aus [JG] im mehrdimensionalen Fall.

5. Hyperbolische Gleichung: Wenn man in Gleichung (2.4.1) formal zum Grenzwert $\epsilon \longrightarrow 0$ übergeht, geht ϱ im Limes zu h über. Wir erhalten eine hyperbolische Erhaltungsgleichung für die Filmhöhe h , die nur von Gradienten der Substratkrümmung getrieben wird:

$$\partial_t^M h - h k v_n + \operatorname{div}^M \left(\mathcal{S}a \left(\frac{1}{3} h^3 + C^{-1} h^2 \right) \nabla^M k + h v^* \right) = 0.$$

Diese Gleichung wurde für den No-Slip Fall, d.h. $C^{-1} = 0$, und für festes Substrat, d.h. $v_n = 0, v^* = 0$, in [RRS] und [How] mit der Methode der Charakteristiken analytisch untersucht. Dabei zeigt sich, dass der Film entlang der Richtung des Krümmungsgradienten transportiert wird und sich in lokalen Minima der Krümmung verdünnt und in lokalen Maxima der Krümmung verdickt. Schockprofile und Blow-up Verhalten wurden in [How] beschrieben.

6. Nahezu konstante mittlere Krümmung: Wenn die mittlere Krümmung nahezu konstant ist, d.h. es lässt sich sinnvoll schreiben $k = k_0 + \epsilon k_1$ mit einer räumlichen Konstanten k_0 , so reduziert sich Gleichung (2.4.1), wenn wir Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ weglassen, zu:

$$\partial_t^M \varrho - \varrho k v_n + \operatorname{div}^M \left(\epsilon \mathcal{S}a m(\varrho) \nabla^M (k_1 + \varrho |K|^2 + \Delta^M \varrho) + \varrho v^* \right) = 0, \quad (2.4.3)$$

mit Mobilität $m(\varrho)$ wie im Navier-Slip oder No-Slip Fall. Die modifizierte Kapillaritätskonstante ϵSa stimmt nun mit der Kapillaritätskonstanten $\frac{1}{Ca}$ aus [ODB] im planaren Fall überein. Mit dieser Definition kann man unter der Annahme $\mathcal{O}(\frac{1}{Ca}) = 1$ nun zum Limes $\epsilon \rightarrow 0$ übergehen und man erhält eine parabolische Gleichung für die Filmhöhe h :

$$\partial_t^M h - hk_0 v_n + \operatorname{div}^M \left(\frac{1}{Ca} m(h) \nabla^M (k_1 + h|K|^2 + \Delta^M h) + hv^* \right) = 0.$$

7. Gradientenflussstruktur: Folgende Gleichung ist zur betrachteten Ordnung ebenfalls äquivalent zu (2.4.1) sowie für festes Substrat zu den Gleichungen in [RRS] bzw. [RSw]:

$$\partial_t^M \varrho - v_n k \varrho + \operatorname{div}^M (-A(\varrho) \nabla^M p + v^* \varrho) = 0. \quad (2.4.4)$$

Dabei ist die matrixwertige Mobilität gegeben durch $A(\varrho) = \frac{1}{3} \varrho^3 Id + \varrho^2 C^{-1} + \epsilon \frac{1}{6} \varrho^4 (k Id + K)$ und der Druck wie bisher durch $p = -Sa(k + \varrho|K|^2 + \Delta^M \varrho)$. Das folgende Energiefunktional:

$$E(\varrho) = \frac{Sa}{\epsilon} \int_M 1 - \epsilon k \varrho - \frac{1}{2} \varrho^2 |K|^2 + \frac{1}{2} |\nabla^M \varrho|^2 d\mathcal{H}^{N-1}$$

stimmt mit der Linearisierung der Gesamtoberfläche (vgl. Proposition 2.12) überein. Gleichung (2.4.4) für festes Substrat (d.h. $v_n = 0, v^* = 0$) kann dann als Gradientenfluss von E auf einer geeigneten Mannigfaltigkeit (z.B. mit Randwerten und Massenerhaltung) bzgl. der Metrik:

$$g_\varrho(s_1, s_2) = \int_{[\varrho > 0]} \nabla^M p_1 \bullet A(\varrho) \nabla^M p_2 d\mathcal{H}^{N-1}$$

aufgefasst werden. Der Zusammenhang zwischen s_i und p_i , $i = 1, 2$ ist vermöge folgender elliptischen Gleichung hergestellt:

$$\int_M s \zeta d\mathcal{H}^{N-1} + \int_{[\varrho > 0]} \nabla^M \zeta \bullet A(\varrho) \nabla^M p d\mathcal{H}^{N-1} = 0.$$

Die Mobilität $A(\varrho)$ ist positiv definit im physikalischen Regime. Verschwindet die Filmhöhe oder übersteigt die Filmhöhe in kritischer Weise die Krümmungsradien, so ist $A(\varrho)$ im allgemeinen nicht positiv definit und die elliptische Gleichung nicht wohlgestellt. Matrixwertige Mobilitäten vor Termen höchster Ableitungsstufe führen im Existenzbeweis in Kapitel 3 zu Schwierigkeiten.

8. Anderes Skalierungsregime: Wir hatten in Satz 2.16 Marangoni-Terme derart skaliert, dass sie sich in der ϵ -Ordnung der Terme höchster Ableitungsordnung befanden. Damit modellierten wir das Regime, in dem Marangoniterme wie im planaren Fall von der gleichen Größenordnung sind, wie Störungen der Substratkrümmung aufgrund des dünnen Films. Eine Alternative dazu ist es, Marangoni-Terme so zu skalieren, dass sie sich in der gleichen Ordnung wie der Gradient des vollständigen Druckes befinden, d.h. zu führender Ordnung wie Gradienten der Substratkrümmung. Dazu muss man ein anderes Regime von Kapillarität und Marangonieffekt wählen, nämlich $S = PH$ und eine andere Kapillaritätskonstante $Sa' = \frac{\sigma_0 \epsilon}{S}$ definieren. Wenn man dann die Rechnungen durchführt, erhält man mit dem Druck $p = -Sa'(k + \epsilon h|K|^2 + \epsilon \Delta^M h) - \epsilon \sigma k$ folgende Formel für die tangentielle Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} w^* = & \left(\frac{1}{2} y^2 - hy - hC^{-1} + \epsilon \frac{1}{6} y^3 k + \epsilon \frac{1}{2} h^2 y k - \epsilon \frac{1}{2} h y^2 k + \epsilon \frac{1}{6} y^3 K + \epsilon y h K C^{-1} + \epsilon \frac{1}{2} h^2 k C^{-1} \right) \nabla^M p \\ & + (y + C^{-1} + \epsilon \frac{1}{2} y^2 k - \epsilon y h k - \epsilon h k C^{-1} - \epsilon y K C^{-1}) \nabla^M \sigma - \epsilon K y v^* - \epsilon y \nabla^M v_n + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Mit dieser Geschwindigkeit lässt sich auf analoge Weise eine Erhaltungsgleichung für ϱ herleiten:

$$\partial_t^M \varrho - \varrho k v_n + \operatorname{div}^M (-A_1(\varrho) \nabla^M p + A_2(\varrho) \nabla^M \sigma + \varrho v^*) = 0$$

mit den matrixwertigen Mobilitäten:

$$\begin{aligned} A_1(\varrho) &= \frac{1}{3} \rho^3 Id + \varrho^2 C^{-1} + \epsilon \frac{1}{6} \varrho^4 (k Id + K), \\ A_2(\varrho) &= \frac{1}{2} \rho^2 Id + \varrho (1 - \epsilon \varrho k) C^{-1} + \epsilon \frac{1}{6} \rho^3 (k Id + 4K). \end{aligned}$$

3 Existenz für die Dünnschichtgleichung auf evolvierenden Flächen

Ziel dieses Kapitels ist es, einen Existenzsatz für die Gleichung eines dünnen Films mit konstanter Oberflächenspannung auf einer evolvierenden Fläche zu zeigen. Dazu führen wir ein dreistufiges Approximationsargument durch. Nach Regularisierung und Beschränkung der Mobilitätskoeffizienten erhalten wir approximative Probleme, die wir mit Galerkin-Approximation lösen. Im zweiten Schritt ist es dann erforderlich in der Regularisierung der degenerierten Mobilitäten zum Limes überzugehen. Der letzte Schritt besteht darin sich von der Beschränktheit der Mobilitäten zu lösen.

3.1 Galerkin-Approximation

In diesem Paragraphen beschäftigen wir uns mit dem ersten Approximationsschritt, der Galerkin-Approximation. Dazu werden wir die Ansatzfunktionen und die relevante Formulierung vorstellen und das resultierende System gewöhnlicher Differentialgleichungen lokal in der Zeit lösen. Im zweiten Schritt verwenden wir eine Hilfsabschätzung, die wir mathematische Energieabschätzung nennen, um Fortsetzbarkeit und schwache Konvergenz der Lösungen zu zeigen. Da es sich um ein nichtlineares Problem handelt, ist es erforderlich für den Grenzübergang starke Konvergenz zu zeigen. Schließlich werden wir im vierten und letztem Teil zum Limes in der Galerkin-Formulierung übergehen, indem wir die Konvergenz der Folge von Lösungen und geeigneter Testfunktionen benutzen.

Galerkin-Ansatz

Als erstes werden wir Voraussetzungen, die für den Beweis des Existenzsatzes erforderlich sind, vorstellen. Im weiteren Verlauf definieren wir Lösungsräume, elliptische Operatoren und eine geeignete Schwache Formulierung. Es wird sich dabei zeigen, dass die schwache Formulierung des klassischen Falls für unsere Zwecke nicht geeignet ist.

Voraussetzung 3.1. (Voraussetzung an die Fläche) Sei $T > 0$, $d = 1, 2$. Sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{d+1}$ eine kompakte, orientierte, zusammenhängende evolvierende Fläche der Klasse $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$ und Dimension d mit Normale n und Normalgeschwindigkeit $v_n n$. M kann berandet sein mit äußerer Konormale ν^* .

Wie in Abschnitt 2 Voraussetzung 2.4 (und wie z.B. in [DE1]) setzen wir die Existenz von bestimmten Diffeomorphismen voraus. Die Normalgeschwindigkeit der Fläche $v_n n$ ist durch die Definition von M eindeutig festgelegt. Wir fordern die Existenz eines Diffeomorphismus Φ , dessen Zeitableitung jene Normalgeschwindigkeit $v_n n$ liefert. Um eine mögliche tangentialen Komponente von Bewegungen von Materialpunkten zu berücksichtigen, verlangen wir weiterhin die Existenz eines Diffeomorphismus Φ^* , dessen Zeitableitung wir als die vollständige Geschwindigkeit v der Fläche M bezeichnen. Wenn wir den tangentialen Anteil von v mit v^* bezeichnen, so lässt sich die Geschwindigkeit folgendermaßen orthogonal zerlegen: $v = v_n n + v^*$.

Voraussetzung 3.2. (Voraussetzungen an Diffeomorphismen) Es existiere eine Abbildung $\Phi : [0, T] \times M_0 \rightarrow M$ der Klasse $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$, so dass Φ_t für alle $t \in [0, T]$ ein Diffeomorphismus von $M_0 \rightarrow M_t$ ist, welcher Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_t &= (v_n(t)n_t) \circ \Phi_t \text{ in } [0, T] \times M_0, \\ \Phi_0 &= Id_{M_0} \quad \text{für } t = 0. \end{aligned}$$

Es gebe weiterhin eine Abbildung $\Phi^* : [0, T] \times M_0 \rightarrow M$ der Klasse $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$, so dass Φ_t^* für alle $t \in [0, T]$ ein Diffeomorphismus von $M_0 \rightarrow M_t$ ist, mit der Eigenschaft, dass $\Phi_0^* = Id_{M_0}$ für $t = 0$. Die vollständige Geschwindigkeit v von M sei dann definiert durch:

$$\partial_t \Phi_t^* = v(t) \circ \Phi_t^* \text{ in } [0, T] \times M_0.$$

Wir setzen voraus, dass die inversen Abbildungen der Φ_t bzw. Φ_t^* ebenfalls in $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$ beschränkt sind.

Die Regularität von v^* ist insbesondere über die Relation $v = v_n n + v^*$ durch die Regularität der Diffeomorphismenfamilien aus Voraussetzung 3.2 gegeben.

Ausdehnung der Fläche am Rand würde zu einer lokalen Zunahme der Oberflächenenergie führen. Dies möchten wir nicht berücksichtigen, weswegen es Sinn macht $\nu^* \bullet v^* = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$ zu fordern. In der Tat folgt diese Bedingung bereits aus der Existenz der speziellen Diffeomorphismenfamilien aus Voraussetzungen 3.2, wie die folgende Überlegung zeigt: Zu $t, t+s \in [0, T]$ und $x_t \in \partial M_t$ ist $\Phi_t \circ \Phi_{t+s}^{-1} \circ \Phi_{t+s}^* \circ \Phi_t^{*-1}(x_t) \in \partial M_t$. Folglich ist $\partial_s(\Phi_t \circ \Phi_{t+s}^{-1} \circ \Phi_{t+s}^* \circ \Phi_t^{*-1}(x_t))|_{s=0} \in T\partial M_t$. Eine leichte Rechnung liefert $\partial_s(\Phi_t \circ \Phi_{t+s}^{-1} \circ \Phi_{t+s}^* \circ \Phi_t^{*-1}(x_t))|_{s=0} = v^*(x_t)$. Damit folgt $\nu^* \bullet v^* = 0$ auf ∂M_t . Falls die Fläche berandet ist, benötigen wir im Zweidimensionalen eine zusätzliche technische Voraussetzung. Bei der Konstruktion der Galerkinfunktionen und bei der Konstruktion einer geeigneten Folge von Testfunktionen ist es erforderlich, Funktionen auf einen anderen Zeitpunkt zu transformieren. Um dann wieder zulässige Testfunktionen zu erhalten, muss eine Bedingung an die Ableitung in Konormalenrichtung am Rand beachtet werden. Dies gewährleistet die folgende zusätzliche Voraussetzung.

Voraussetzung 3.3. (Voraussetzung am Rand) Sei M aus Voraussetzung 3.1 mit orthogonaler Geschwindigkeitskomponente v_n , äußere Konormalen ν^* und Weingarten-Abbildung K . Falls $d = 2$ so bezeichnen wir mit e^* den durch die induzierte Orientierung eindeutig bestimmten Einheitstangentenvektor des Randes. Dann setzen wir für alle $t \in [0, T]$ voraus: $v_n \nu^* \bullet K e^* = 0$ auf ∂M_t .

Voraussetzung 3.3 ist z.B. erfüllt, wenn ∂M_t für alle $t \in [0, T]$ eine Hauptkrümmungslinie von M_t ist oder falls $v_n = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Wir beschäftigen uns mit folgendem starken Problem.

Definition 3.4. (Starke Formulierung) Gesucht ist eine Funktion $\varrho : M \rightarrow \mathbb{R}$, die folgendes Anfangsrandwertproblem löst:

$$\begin{aligned} \partial_t^M \varrho - v_n k \varrho + \operatorname{div}^M(J(\varrho)) &= 0 \text{ auf } M, \\ \nu^* \bullet \nabla^M \varrho &= \nu^* \bullet J(\varrho) = 0 \text{ auf } \partial M_t, t \in [0, T], \\ \varrho(0) &= \varrho_0 \text{ auf } M_0. \end{aligned}$$

Dabei sind Fluss J und Druck p in Abhängigkeit von ϱ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} J(\varrho) &= m(\varrho)(-\nabla^M p(\varrho) + a(\varrho)\nabla^M k) + \varrho v^*, \\ p(\varrho) &= -k - \varrho |K|^2 - \Delta^M \varrho. \end{aligned}$$

Es bezeichnet k die mittlere Krümmung und K die Weingarten-Abbildung von M . Mit $|K|$ bezeichnen wir die Euklidische Norm von K .

Wir werden eine Familie von Mobilitäten zulassen. Da physikalische Lösungen nichtnegativ sind, macht es Sinn bei 0 nach unten hin zu beschränken.

Voraussetzung 3.5. (Voraussetzung an den Mobilitätskoeffizient) Wir setzen voraus, dass der Mobilitätskoeffizient $m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die folgende Struktur hat:

$$m(s) = \begin{cases} s^n & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s \leq 0, \end{cases}$$

mit einem Exponenten $1 \leq n \leq 4$. Ebenfalls zugelassen ist die Mobilität des Navier-Slip Falls:

$$m(s) = \begin{cases} \frac{1}{3}s^3 + C^{-1}s^2 & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s \leq 0, \end{cases}$$

mit einer Konstanten $C^{-1} > 0$.

Kompliziertere Mobilitäten sind ebenfalls denkbar. Im Fall einer bewegten Fläche muss jedoch Lemma 3.45, das man bei evolvierenden Flächen bei der mathematischen Entropieabschätzung benötigt, im

konkreten Fall nachgeprüft werden. Matrixwertige Mobilitäten (beispielsweise von anisotropen Slip-Koeffizienten C^{-1}) sind nicht zugelassen, da für die mathematische Entropieabschätzung die Mobilität als Skalar invertiert wird. Prinzipiell können die Slip-Koeffizienten von (x, t) abhängen, was wir hier jedoch nicht berücksichtigen. Wir geben dafür in Proposition 5.2 eine Beweisidee.

Bei der Herleitung der Erhaltungsgleichung in Kapitel 2 haben wir gesehen, dass Gradienten der Krümmung zu höherer Ordnung eingehen. Dabei tritt ein zur Mobilität zusätzlicher matrixwertiger Vorfaktor des Krümmungsgradienten auf.

Voraussetzung 3.6. (Voraussetzung an den matrixwertigen Faktor) Wir setzen voraus, dass $a : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(d+1) \times (d+1)}$ eine Carathéodory-Funktion und lokal Lipschitz-stetig in der s -Variablen ist, sowie folgender zusätzlichen Wachstumsbedingung genügt. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und für fast alle $x \in M$ gilt:

$$|a(x, s)| \leq C(1 + |s|).$$

Zur Definition einer Carathéodory-Funktion siehe z.B. [Rüz]. Im konkreten Fall ist für die No-Slip Bedingung $a(s) = \frac{1}{2}s(kId + K)$ und für die Navier-Slip Bedingung $a(s) = \frac{\frac{1}{2}s^2}{s+3C^{-1}}(kId + K)$ falls $s \geq 0$ und in beiden Fällen $a(s) = 0$ falls $s \leq 0$ gegeben. Also ist in beiden Fällen Voraussetzung 3.6 aufgrund der Beschränktheit der Krümmung aus Voraussetzung 3.1 erfüllt. Die Voraussetzungen an die Anfangswerte werden wir derart stellen, dass Anfangsenergie und mathematische Anfangsentropie endlich sind. Die Energie wird durch die H^1 -Norm kontrolliert, und kontrolliert unter zusätzlichen Bedingungen ebenfalls die H^1 -Norm. Die mathematische Entropie ist gegeben als zweifache Stammfunktion der inversen Mobilität.

Definition 3.7. (Mathematische Entropie) Sei $A > 0$ beliebig. Dann definieren wir zur Mobilität m aus Definition 3.5 für $s > 0$:

$$g(s) = \int_A^s \frac{1}{m(r)} dr, \quad G(s) = \int_A^s g(r) dr.$$

Wie schon in Kapitel (1) erwähnt, bezeichnen wir die, in der Literatur dünner Filme üblicherweise als Entropie bezeichnete, Größe G in dieser Arbeit als mathematische Entropie. Im hier betrachteten isothermen Fall werden wir eine Abschätzung der freien Energie zeigen, die in unserer Situation mit der Oberflächenenergie übereinstimmt. Die Abschätzung der mathematischen Energie dient uns darüber hinaus um zusätzliche Abschätzungen der Lösungen zu erhalten.

Voraussetzung 3.8. (Voraussetzung an die Anfangswerte) Die Anfangswerte $\varrho_0 : M_0 \rightarrow \mathbb{R}$ seien nichtnegativ und wir setzen voraus, dass $\varrho_0 \in H^1(M_0)$ mit $\|G(\varrho_0)\|_{L^1(M_0)} < \infty$.

Es bezeichne $R = \int_{M_0} \varrho_0 d\mathcal{H}^d$ die Gesamtmasse von ϱ_0 .

Definition 3.9. (Sobolev-Räume auf evolvierenden Flächen) Sei $1 \leq p, q \leq \infty$ und $d, m \in \mathbb{N}$. Sei M eine d -dimensionale, orientierte, evolvierende Fläche der Klasse $C^0(C^m)$ mit Normale n und mittlerer Krümmung k . Wir sagen, dass $w \in L^q(W^{m,p}(M))$ falls $w : M \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktion ist mit $w(t) \in W^{m,p}(M_t)$ für fast alle $t \in [0, T]$ und falls gelte:

$$\|w\|_{L^q(W^{m,p}(M))} := \left(\int_0^T \|w(t)\|_{W^{m,p}(M_t)}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Zur Definition von Sobolev-Räumen auf Flächen, etwa $W^{m,p}(M_t)$ für $t \in [0, T]$, siehe z.B. [Aub]. Falls M von der Klasse $C^1(C^m)$ ist mit Normalengeschwindigkeit $v_n n$, definieren wir weiterhin: Wir sagen, dass $w \in W^{1,q}(W^{m,p}(M))$ falls $w \in L^q(W^{m,q}(M))$ und es existiert eine Funktion $\partial_t^M w \in L^q(W^{m,q}(M))$, so dass:

$$\int_0^T \int_{M_t} \partial_t^M w \zeta d\mathcal{H}^d dt = - \int_0^T \int_{M_t} w (\partial_t^M \zeta - \zeta v_n k) d\mathcal{H}^d dt$$

für alle Funktionen $\zeta \in C^1(M)$ mit $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$ und $\zeta(t) = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$.

Definiere zu $t \in [0, T]$ den elliptischen und homogenen Lösungsraum:

$$V^t = \left\{ \varrho \in H^3(M_t) \mid \int_{M_t} \varrho d\mathcal{H}^d = R \text{ und } \nu^* \bullet \nabla^M \varrho = 0 \text{ f.ü. auf } \partial M_t \right\},$$

$$V_0^t = \left\{ \zeta \in H^3(M_t) \mid \int_{M_t} \zeta d\mathcal{H}^d = 0 \text{ und } \nu^* \bullet \nabla^M \zeta = 0 \text{ f.ü. auf } \partial M_t \right\}.$$

Wir schreiben oft ∇^M anstelle von ∇^{M_t} wenn klar ist, um welchen Zeitpunkt es sich handelt. Definiere die über dem Zeitintervall $[0, T]$ integrierten Lösungsräume:

$$L^2(V) = \{ \varrho \in L^2(H^3(M)) \mid \varrho(t) \in V^t \text{ für fast alle } t \in [0, T] \},$$

$$L^2(V_0) = \{ \zeta \in L^2(H^3(M)) \mid \zeta(t) \in V_0^t \text{ für fast alle } t \in [0, T] \}.$$

Wir werden die geeigneten Approximationsprobleme über die folgenden Mobilitäten definieren:

Definition 3.10. (Approximierende Mobilitäten) Zu $\beta, \delta > 0$ und den Mobilitäten m aus Definition 3.5 definieren wir:

$$m^\beta(s) = \frac{m(s)}{1 + \beta m(s)},$$

$$m^{\beta\delta}(s) = \begin{cases} m^\beta(s + \delta), & \text{falls } s \geq 0, \\ m^\beta(\delta), & \text{falls } s \leq 0. \end{cases}$$

Die Regularisierung erfolgt leicht anders als im klassischen Fall, um den Beweis von Lemma 3.45 zu vereinfachen. Dennoch sehen wir ein, dass $0 \leq m^\beta(s) \leq C_\beta$ und $0 < c_\delta \leq m^{\beta\delta}(s) \leq C_\beta$.

Definition 3.11. (Elliptische Operatoren) Zu $\beta, \delta > 0$ definieren wir für $t \in [0, T]$ den regularisierten, elliptischen Operator $\mathcal{A}_t^{\beta\delta} : V^t \rightarrow H^1(M_t)^*$ durch:

$$\langle \mathcal{A}_t^{\beta\delta}(\varrho), w \rangle_{H^1(M_t)} = - \int_{M_t} \nabla^M w \bullet \left(m^{\beta\delta}(\varrho)(-\nabla^M p(\varrho) + a(\varrho)\nabla^M k) + \varrho v^* \right) d\mathcal{H}^d$$

für $w \in H^1(M_t)$. Wir definieren den auf dem Zeitintervall $[0, T]$ integrierten elliptischen Operator $\mathcal{A}^{\beta\delta} : L^2(V) \rightarrow L^2(H^1(M))^*$ durch:

$$\langle \langle \mathcal{A}^{\beta\delta}(\varrho), w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = \int_0^T \langle \mathcal{A}_t^{\beta\delta}(\varrho(t)), w(t) \rangle_{H^1(M_t)} dt$$

für $w \in L^2(H^1(M))$.

Man sieht leicht mit Voraussetzung 3.1 und der Hölder-Ungleichung ein, dass der oben definierte Operator wohldefiniert ist. Eine mögliche schwache Formulierung erhält man, indem man die starke Formulierung aus Definition 3.4 mit einer Testfunktion w multipliziert, partiell integriert und dabei die Randwerte ausnutzt. Diese klassische schwache Formulierung werden wir im weiteren Verlauf als schwache Formulierung (A) bezeichnen (siehe Definition 3.35). Um jedoch eine geeignete Energieabschätzung zu bekommen, ist es erforderlich mit $p = -k - \varrho|K|^2 - \Delta^M \varrho$ oder wenigstens für eine Hilfsabschätzung mit $-\Delta^M \varrho$ zu testen. Dazu muss diese Testfunktion bei einem Galerkin-Ansatz in den jeweiligen Ansatzräumen sein, was im Gegensatz zum planaren Fall (siehe [Gr1] oder [EG]), wo man eine Basis aus Eigenfunktionen des Laplace-Operators wählen kann, nicht der Fall sein wird. Ebenfalls wird der Ansatz in [EG] nicht ans Ziel führen, da $-k - \varrho|K|^2$ nicht im Ansatzraum liegen wird. Um dieses Problem zu umgehen, wählen wir eine andere schwache Formulierung (B) für die Galerkin-Gleichungen. Wir testen für $t \in [0, T]$ zu einer Testfunktion $\zeta \in V_0^t$ die starke Formulierung aus Definition 3.4 mit $w = -\Delta^{M_t} \zeta$ und integrieren partiell. Dann wird die Galerkin-Lösung ϱ_N , die im Ansatzraum liegt, die geeignete Testfunktion für die Hilfsabschätzung sein.

Bei der partiellen Integration tauchen keine Randterme auf und wir erhalten:

$$0 = \int_{M_t} (\nabla^M \zeta \bullet \nabla^M \partial_t^M \varrho - \nabla^M \zeta \bullet (v_n k \nabla^M \varrho + \nabla^M (v_n k) \varrho)) d\mathcal{H}^d - \langle \mathcal{A}_t^{\beta\delta}(\varrho), \Delta^M \zeta \rangle_{H^1(M_t)}. \quad (3.1.1)$$

Um im Folgenden die Zeitableitung auf die Testfunktion zu übertragen, müssen wir Ortsableitungen mit Zeitableitungen vertauschen. Dies ist ohne Weiteres nicht möglich, da M von der Zeit abhängt. Das folgende Vertauschungsergebnis ist in integrierter Version in [DE1] zu finden. Ferner lässt es sich folgern, wenn man die Formeln für Zeitableitungen der ersten Fundamentalform aus [How] und [FHO] verwendet, die jedoch eine Substratbewegung fordern, die die Hauptkrümmungsrichtungen erhält. Eine eindimensionale Form für Kurven steht in [DKS].

Proposition 3.12. (Kommutator) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine C^2 -evolvierte, orientierte Hyperfläche mit Normale n , Weingarten-Abbildung K und Normalgeschwindigkeit $v_n n$. Es existieren Diffeomorphismen wie in Voraussetzung 3.2, deren Regularität wir hier als C^2 fordern. So lässt sich eine Geschwindigkeit $v = v^* + v_n n$ festlegen, die wir in tangentialen und orthogonalen Anteil zerlegen. Für $f \in C^2(M)$ gilt dann folgendes Vertauschungsergebnis von räumlichen Ableitungen mit den zeitlichen Ableitungen aus Definition 2.5:

$$\begin{aligned} \nabla^M \partial_t^M f &= \partial_t^M \nabla^M f - v_n K \nabla^M f - (\nabla^M v_n \bullet \nabla^M f) n, \\ \nabla^M \frac{D^M}{Dt} f &= \frac{D^M}{Dt} \nabla^M f + ((P^M D^M v^*)^T - v_n K) \nabla^M f - (\nabla^M v_n \bullet \nabla^M f + v^* \bullet K \nabla^M f) n. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $P^M = Id - n \otimes n$ die Projektion auf den Tangentialraum.

Beweis. Sei $\Psi_0 : D \rightarrow M_0$ eine Kartenabbildung von M_0 . Definiere $\Psi : D \times [0, T] \rightarrow M$ durch $\Psi_t = \Phi_t^* \circ \Psi_0$ mit dem Φ_t^* aus Voraussetzung 3.2. Damit folgt $\partial_t \Psi_t = v(t) \circ \Psi_t$. Weiterhin ist Ψ_t Kartenabbildung von M_t mit Metrik $g_{ij}(t) = \partial_{x_i} \Psi_t \bullet \partial_{x_j} \Psi_t$, $G = (g_{ij})$ und $(g^{ij}) = G^{-1}$. Es lässt sich dann der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ folgendermaßen darstellen:

$$(\nabla^M f) \circ \Psi = \sum_{i,j=1}^{N-1} g^{ij} \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi.$$

Damit können wir dann mit Proposition 2.6 rechnen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{D^M}{Dt} \nabla^M f \right) \circ \Psi &= \partial_t ((\nabla^M f) \circ \Psi) = \partial_t \left(\sum_{i,j=1}^{N-1} g^{ij} \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^{N-1} \left(\partial_t (g^{ij}) \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi + g^{ij} \partial_{x_i} \partial_t (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi + g^{ij} \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} (v \circ \Psi) \right). \quad (\star) \end{aligned}$$

In [DE1] wurde gezeigt:

$$\partial_t g^{ij} = - \sum_{k,l=1}^{N-1} g^{ik} g^{jl} (\partial_{x_k} (v \circ \Psi) \bullet \partial_{x_l} \Psi + \partial_{x_l} (v \circ \Psi) \bullet \partial_{x_k} \Psi).$$

Somit wird der erste Term in (\star) zu:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{N-1} \partial_t (g^{ij}) \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi &= - \sum_{i,j,k,l=1}^{N-1} g^{ik} g^{jl} \left(\partial_{x_k} (v \circ \Psi) \bullet \partial_{x_l} \Psi + \partial_{x_l} (v \circ \Psi) \bullet \partial_{x_k} \Psi \right) \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi \\ &= - \sum_{k,l=1}^{N-1} [(\partial_{e_k} v \bullet e_l + \partial_{e_l} v \bullet e_k) (\partial_{e_k} f) e_l] \circ \Psi_t. \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Dabei ist $e_k, k = 1 \dots N-1$ eine lokale Basis des Tangentialraums. Für den zweiten Term in (\star) gilt nach Proposition 2.6 und der Darstellung des Gradienten:

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} g^{ij} \partial_{x_i} \partial_t (f \circ \Psi) \partial_{x_j} \Psi = (\nabla^M \frac{D^M}{Dt} f) \circ \Psi.$$

Und schließlich für den dritten Term in (\star):

$$\sum_{i,j=1}^{N-1} g^{ij} \partial_{x_i} (f \circ \Psi) \partial_{x_j} (v \circ \Psi) = \sum_{k=1}^{N-1} [(\partial_{e_k} f)(\partial_{e_k} v)] \circ \Psi.$$

Es ist:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} (\partial_{e_k} f)(\partial_{e_k} v) &= \sum_{k,l=1}^{N-1} (\partial_{e_k} f)(e_l \bullet \partial_{e_k} v) e_l + \sum_{k=1}^{N-1} (\partial_{e_k} f)(n \bullet \partial_{e_k} v) n \\ &= \sum_{k,l=1}^{N-1} (\partial_{e_k} f)(e_l \bullet \partial_{e_k} v) e_l + (\nabla^M f \bullet \nabla^M v_n + v^* \bullet K \nabla^M f) n. \end{aligned} \quad (\dagger\dagger)$$

Beim Zusammenfassen fällt der erste Term in (\dagger) mit dem ersten Term in ($\dagger\dagger$) weg und es folgt:

$$\begin{aligned} \frac{D^M}{Dt} (\nabla^M f) &= - \sum_{k,l=1}^{N-1} (\partial_{e_l} v \bullet e_k) (\partial_{e_k} f) e_l + \nabla^M \frac{D^M}{Dt} f + (\nabla^M f \bullet \nabla^M v_n + v^* \bullet K \nabla^M f) n \\ &= -(P^M D^M v)^T \nabla^M f + \nabla^M \frac{D^M}{Dt} f + (\nabla^M f \bullet \nabla^M v_n + v^* \bullet K \nabla^M f) n \end{aligned}$$

Es ist dann $(P^M D^M v)^T = (P^M D^M v^*)^T + (P^M (-v_n K + n \otimes \nabla^M v_n))^T = (P^M D^M v^*)^T - v_n K$ weil K symmetrisch ist. Damit folgt die zweite Behauptung. Die erste folgt analog mit $\Psi_t = \Phi_t \circ \Psi_0$ mit $\partial_t \Phi_t = (v_n n) \circ \Phi_t$ aus Voraussetzung 3.2. \square

Richtungsableitungen entlang der tangentialen Geschwindigkeit v^* können ähnlich wie eine Zeitableitung behandelt werden. Daher macht es Sinn auch das folgende Vertauschungsergebnis bereitzustellen.

Proposition 3.13. (Kommutator für tangentielle Geschwindigkeit) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine C^2 -evolvierende, orientierte Hyperfläche mit Normale n , Weingarten-Abbildung K und Normalgeschwindigkeit v_n . Es existieren Diffeomorphismen wie in Voraussetzung 3.2, deren Regularität wir hier als C^2 fordern. So lässt sich eine Geschwindigkeit $v = v^* + v_n n$ festlegen, die wir in tangentialen und orthogonalen Anteil zerlegen. Für $f \in C^2(M)$ gilt dann:

$$\nabla^M (v^* \bullet \nabla^M f) = (v^* \bullet \nabla^M) \nabla^M f + (P^M D^M v^*)^T \nabla^M f - (v^* \bullet K \nabla^M f) n.$$

Dabei bezeichnet $P^M = Id - n \otimes n$ die Projektion auf den Tangentialraum.

Beweis. Folgt aus Proposition 3.12 indem wir beide Aussagen voneinander abziehen. \square

Um im Folgenden in Gleichung (3.1.1) die Zeitableitung auf die Testfunktion zu übertragen, verwenden wir zweimal Proposition 3.12 und das Transporttheorem für Flächen 6.9:

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet \nabla^M \partial_t^M \varrho d\mathcal{H}^d &= \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet (\partial_t^M \nabla^M \varrho - v_n K \nabla^M \varrho) d\mathcal{H}^d \\ &= \frac{d}{dt} \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet \nabla^M \varrho d\mathcal{H}^d - \int_{M_t} \partial_t^M \nabla^M \zeta \bullet \nabla^M \varrho d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet v_n (kId - K) \nabla^M \varrho d\mathcal{H}^d \\ &= \frac{d}{dt} \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet \nabla^M \varrho d\mathcal{H}^d - \int_{M_t} \nabla^M \partial_t^M \zeta \bullet \nabla^M \varrho d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet v_n (kId - 2K) \nabla^M \varrho d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Dabei verschwinden die Anteile in Normalenrichtung aus Proposition 3.12, da stets Skalarprodukte mit tangentialen Gradienten gebildet werden. Ferner haben wir verwendet, dass K symmetrisch ist. Die Zusatzterme werden wir im weiteren wie elliptische Terme behandeln. Daher macht es Sinn zusammen mit den restlichen Termen aus 3.1.1 einen neuen elliptischen Operator zu definieren.

Definition 3.14. (Elliptische Operatoren) Definiere zu $\beta, \delta > 0$ für $t \in [0, T]$ den neuen elliptischen Operator $\mathcal{B}_t^{\beta\delta} : V^t \longrightarrow (V_0^t)^*$ durch:

$$\langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho), \zeta \rangle_{V_0^t} = - \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet (2v_n K \nabla^M \varrho + \varrho \nabla^M (v_n k)) d\mathcal{H}^d - \langle \mathcal{A}_t^{\beta\delta}(\varrho), \Delta^M \zeta \rangle_{H^1(M_t)}$$

für $\zeta \in V_0^t$. Entsprechend den auf dem Zeitintervall $[0, T]$ zeitintegrierten elliptischen Operator $\mathcal{B}^{\beta\delta} : L^2(V) \longrightarrow L^2(V_0)^*$ durch:

$$\langle \langle \mathcal{B}^{\beta\delta}(\varrho), \zeta \rangle \rangle_{L^2(V_0)} = \int_0^T \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho(t)), \zeta(t) \rangle_{V_0^t} dt$$

für $\zeta \in L^2(V_0)$.

Wie in Definition 3.11 folgt auch hier mit Voraussetzung 3.1 und der Hölder-Ungleichung, dass die Operatoren wohldefiniert sind. Da im parabolischen Teil oft das Skalarprodukt der $H^1(M_t)$ -Seminorm vorkommen wird, definieren wir abkürzenderweise zu $w_1, w_2 \in H^1(M_t), t \in [0, T]$:

$$(w_1, w_2)_{H^t} = \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet \nabla^M w_2 d\mathcal{H}^d.$$

Gleichung (3.1.1) haben wir somit umgeformt zu:

$$\frac{d}{dt} (\zeta(t), \varrho(t))_{H^t} - (\partial_t^M \zeta(t), \varrho(t))_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho(t)), \zeta(t) \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Bei der Definition der Galerkin-Funktionen folgen wir dem Ansatz aus [DE1] bis auf eine kleine Modifikation für die Mittelwerte der Ansatzfunktionen.

Definition 3.15. (Galerkin-Funktionen) Sei $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ ein $L^2(M_0)$ -orthonormales System aus Eigenfunktionen von $-\Delta^{M_0}$ mit Neumann-Randwertbedingung und verschwindendem Mittelwert zu den Eigenwerten $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Sei $\Phi_t : M_0 \longrightarrow M_t$ der Diffeomorphismus aus Definition 3.2. Zu $j \in \mathbb{N}$ setze $\varphi_j^t = \varphi_j^0 \circ \Phi_t^{-1} - \bar{\varphi}_j^t$ für $t \in [0, T]$. Dabei bezeichnet $\bar{\varphi}_j^t = \int_{M_t} \varphi_j^0 \circ \Phi_t^{-1} d\mathcal{H}^d$ den Mittelwert. Ergänze für $t \in [0, T]$ das System um die räumlich konstante Funktion $\varphi_0^t = 1/\sqrt{\mathcal{H}^d(M_t)}$. Setze schließlich $X_N^t = \text{Span}(\varphi_j^t, j = 0 \dots N)$ und zu $t_0 \in [0, T]$:

$$\Xi_N^{t_0} = \left\{ \varrho : M \longrightarrow \mathbb{R} \mid \varrho(t) = \sum_{j=0}^N a_j(t) \varphi_j^t \text{ mit } a_j \in C^1[0, t_0], j = 0 \dots N \right\}.$$

Um zu zeigen, dass diese Ansatzfunktionen bei einem zweidimensionalen Substrat tatsächlich im Lösungsraum liegen, ist es erforderlich das Transformationsverhalten der äußeren Konormalen zu untersuchen. Dazu wird das folgende Lemma von Bedeutung sein.

Lemma 3.16. (Zeitableitung von Tangentialvektoren des Randes) Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine zweidimensionale, orientierte, evolvierende Fläche der Klasse C^2 mit Normalen n , Normalgeschwindigkeitsvektor $v_n n$ sowie Weingarten-Abbildung K . Bezeichnen wir mit ν^* die äußere Konormale des Randes und mit e^* den Einheitstangentienvektor des Randes (e^* ist durch die induzierte Orientierung eindeutig festgelegt). Es existiere eine Abbildung $\Phi : [0, T] \times M_0 \longrightarrow M$ der Klasse C^2 derart, dass Φ_t Diffeomorphismus von M_0 nach $M_t, t \in [0, T]$ ist mit der Eigenschaft $\partial_t \Phi_t = (v_n n) \circ \Phi_t$. Dann berechnet sich die Zeitableitung von e^* nach folgender Formel:

$$\partial_t^M e^* = -v_n (\nu^* \bullet K e^*) \nu^* + (e^* \bullet \nabla^M v_n) n.$$

Beweis. Die Einschränkung $\Phi_t|_{\partial M_0} : \partial M_0 \longrightarrow \partial M_t$ ist ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus des Randes, daher bildet $D^{M_0} \Phi_t$ den Tangentialraum des Randes $T\partial M_0$ auf $T\partial M_t$ ab. Da die Tangentialräume des Randes eindimensional sind, folgt für die Einheitsbasisvektoren des Randes $e^*(t) \circ \Phi_t = c(t) D^{M_0} \Phi_t e^*(0)$ für $c(t) = \frac{1}{|D\Phi_t e^*(0)|} > 0$. Somit folgt für die Zeitableitung nach Proposition 2.6 und anschließend nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \partial_t^M (e^*(t)) \circ \Phi_t &= \partial_t (e^*(t) \circ \Phi_t) = \dot{c}(t) D^{M_0} \Phi_t e^*(0) + c(t) D^{M_0} ((v_n(t) n(t)) \circ \Phi_t) e^*(0) \\ &= \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} e^*(t) \circ \Phi_t + (-v_n(t) K(t) + n(t) \otimes \nabla^{M_t} v_n(t)) \circ \Phi_t e^*(t) \circ \Phi_t. \end{aligned}$$

Transformieren wir die Gleichung mit Φ_t^{-1} auf M_t und multiplizieren mit $e^*(t)$ so folgt:

$$0 = e^*(t) \bullet \partial_t^M e^*(t) = \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} \circ \Phi_t^{-1} - v_n(t) e^*(t) \bullet K(t) e^*(t).$$

Damit können wir $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)}$ in die obige Gleichung einsetzen und erhalten, wenn wir die Zeitargumente nicht mehr führen:

$$\begin{aligned} \partial_t^M e^* &= v_n(e^* \bullet K e^*) e^* - v_n K e^* + (\nabla^M v_n \bullet e^*) n \\ &= -v_n(\nu^* \bullet K e^*) \nu^* + (\nabla^M v_n \bullet e^*) n \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt noch einmal ausgenutzt, dass e^* und ν^* an ∂M_t eine lokale Orthonormalbasis von TM_t bilden. \square

Voraussetzung 3.3 wird in folgender Proposition verwendet. Sie stellt sicher, dass die Randbedingung für die Richtungsableitung in Konormalenrichtung bei Transformationen erhalten bleibt.

Proposition 3.17. (Transformation der äußeren Konormalen) Sei M wie in Voraussetzung 3.1 und 3.3 mit Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ wie in Definition 3.2. Zu $t \in [0, T]$ bezeichne $\nu^*(t)$ die äußere Konormale an ∂M_t . Dann bildet $D^{M_0} \Phi_t : \text{Span}(\nu^*(0)) \rightarrow \text{Span}(\nu^*(t))$ ab.

Beweis. Bezeichnen wir mit $e^*(t)$ den Einheitstangentenvektor des Randes ∂M_t (Es ist $e^*(t)$ durch die auf dem Rand induzierte Orientierung eindeutig bestimmt). Der Bildraum von $D^{M_0} \Phi_t$ ist gegeben durch $TM_t = \text{Span}(e^*(t), \nu^*(t))$ und $e^*(t), \nu^*(t)$ sind orthonormal. Um zu zeigen, dass $D^{M_0} \Phi_t \nu^*(0)$ ein Vielfaches von $\nu^*(t)$ ist, reicht es zu zeigen, dass $0 = e^*(t) \circ \Phi_s \bullet D^{M_0} \Phi_t \nu^*(0)$ oder äquivalent $0 = \nu^*(0) \bullet (D^{M_0} \Phi_t)^T e^*(t) \circ \Phi_s$. Dazu berechnen wir nach dem Hauptsatz und anschließend mit Proposition 2.6:

$$\begin{aligned} (D^{M_0} \Phi_t)^T e^*(t) \circ \Phi_s &= e^*(0) + \int_0^t \frac{d}{ds} ((D^{M_0} \Phi_s)^T e^*(s) \circ \Phi_s) ds \\ &= e^*(0) + \int_0^t (D^{M_0} ((v_n n) \circ \Phi_s))^T e^*(s) + (D^{M_0} \Phi_s)^T (\partial_s^M e^*(s)) \circ \Phi_s ds. \end{aligned}$$

Es ist nach der Kettenregel und weil K symmetrisch ist:

$$\begin{aligned} (D^{M_0} ((v_n n) \circ \Phi_s))^T &= (D^{M_0} \Phi_s)^T (-v_n K + n \otimes \nabla^M v_n)^T \circ \Phi_s ds \\ &= (D^{M_0} \Phi_s)^T (-v_n K + \nabla^M v_n \otimes n) \circ \Phi_s. \end{aligned}$$

In Proposition 3.16 hatten wir die Zeitableitung des Tangentialvektors des Randes berechnet:

$$\partial_s^M e^* = -v_n(\nu^* \otimes \nu^*) K e^* + (e^* \bullet \nabla^M v_n) n.$$

Damit folgt, wenn wir den Zeitparameter s im Integral nicht mehr führen:

$$\begin{aligned} (D^{M_0} \Phi_t)^T e^*(t) \circ \Phi_s &= e^*(0) + \int_0^t (D^{M_0} \Phi_s)^T ((-v_n K + \nabla^M v_n \otimes n - v_n(\nu^* \otimes \nu^*) K) e^*) \circ \Phi_s ds \\ &\quad + \int_0^t (D^{M_0} \Phi_s)^T ((e^* \bullet \nabla^M v_n) n) \circ \Phi_s ds. \end{aligned}$$

Der Term mit $(\nabla^M v_n \otimes n) e^*$ im ersten Integral verschwindet, da n und e^* senkrecht stehen. Multiplizieren wir die Gleichung mit $\nu^*(0)$ so folgt:

$$\begin{aligned} \nu^*(0) \bullet (D^{M_0} \Phi_t)^T e^*(t) \circ \Phi_s &= - \int_0^t \nu^*(0) \bullet (D^{M_0} \Phi_s)^T ((v_n K + v_n(\nu^* \otimes \nu^*) K) e^*) \circ \Phi_s ds \\ &\quad + \int_0^t \nu^*(0) \bullet (D^{M_0} \Phi_s)^T ((e^* \bullet \nabla^M v_n) n) \circ \Phi_s ds. \end{aligned}$$

Das zweite Integral verschwindet, da $D^{M_0}\Phi_s\nu^*(0) \in TM_s$ und daher senkrecht zu $n(s)$ steht. Im ersten fassen wir die Krümmungsterme zusammen, indem wir wieder verwenden, dass $e^*(s), \nu^*(s)$ ein lokales Orthonormalsystem von TM_s bilden, und erhalten:

$$\nu^*(0) \bullet (D^{M_0}\Phi_t)^T e^*(t) \circ \Phi_s = - \int_0^t \nu^*(0) \bullet (D^{M_0}\Phi_s)^T (\nu_n(e^* \otimes e^* + 2\nu^* \otimes \nu^*)Ke^*) \circ \Phi_s ds.$$

Nach Voraussetzung 3.3 verschwindet $\nu_n\nu^* \bullet Ke^*$ auf ∂M_t . Somit können wir abschätzen:

$$|\nu^*(0) \bullet (D^{M_0}\Phi_t)^T e^*(t) \circ \Phi_s| \leq \int_0^t |\nu^*(0) \bullet (D^{M_0}\Phi_s)^T e^*(s) \circ \Phi_s| F(s) ds,$$

mit $F(s) = |\nu_n(s)e^*(s) \bullet K(s)e^*(s)| \circ \Phi_s$. Die Behauptung folgt dann mit dem Lemma von Gronwall. \square

Damit lassen sich alle wesentlichen Eigenschaften der Galerkin-Funktionen zeigen.

Proposition 3.18. (Eigenschaften der Ansatzfunktionen) Sei M wie in Voraussetzung 3.1, 3.2 und 3.3. Dann besitzen die Galerkin-Funktionen aus Definition 3.15 folgende Eigenschaften:

1. $(\varphi_j^0)_{j \geq 0}$ ist ein vollständiges ON-System in $L^2(M_0)$. Für $j \geq 1$ gilt für die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_j > 0$.
2. Es gilt $\partial_t^M \varphi_j^t = \text{const}(t)$ für $j \geq 0$.
3. Für $j \geq 0$ gilt $\nu^* \bullet \nabla^M \varphi_j^t = 0$ auf ∂M_t für $t \in [0, T]$.
4. $\int_{M_t} \varphi_j^t d\mathcal{H}^d = 0$ für $j \geq 1$ für $t \in [0, T]$.

Beweis. 1. Folgt nach dem Spektralsatz (siehe [Tay]).

2. Mit Proposition 2.6:

$$(\partial_t^M \varphi_j^t) \circ \Phi_t = \partial_t(\varphi_j^t \circ \Phi_t) = \partial_t \varphi_j^0 - \partial_t \left(\int_{M_t} \varphi_j^0 \circ \Phi_t^{-1} d\mathcal{H}^d \right).$$

Auf der rechten Seite verschwindet der erste Term und der zweite ist eine (zeitabhängige) räumliche Konstante.

3. Es ist:

$$\nu^*(t) \bullet \nabla^{M_t} \varphi_j^t = \nu^*(t) \bullet (D^{M_t}\Phi_t^{-1})^T (\nabla^{M_0}\varphi_j^0) \circ \Phi_t^{-1} = D^{M_t}\Phi_t^{-1}\nu^*(t) \bullet (\nabla^{M_0}\varphi_j^0) \circ \Phi_t^{-1}.$$

Ferner ist nach Proposition 3.17 $\nu^*(t) \circ \Phi_t = c(t)D^{M_0}\Phi_t\nu^*(0)$ mit $c(t) = \frac{1}{|D^{M_0}\Phi_t\nu^*(0)|}$. Weil $(D^{M_t}\Phi_t^{-1}) \circ \Phi_t$ die inverse Abbildung zu $D^{M_0}\Phi_t$ ist folgt $(D^{M_t}\Phi_t^{-1}\nu^*(t)) \circ \Phi_t = c(t)\nu^*(0)$. Damit folgt die Behauptung aus der Neumann-Randwertbedingung der φ_j^0 .

4. Der Mittelwert von φ_j^t verschwindet nach Konstruktion für $j \geq 1$. \square

In [DE1] hat man davon profitiert, dass die dortigen Galerkin-Ansatzfunktionen die Eigenschaft $\partial_t^M \varphi_j^t = 0$ (in unserer Notation) erfüllen. In unserem Fall gilt dies nicht, die Zeitableitungen sind jedoch räumlich konstante Funktionen. Da wir die parabolischen Terme im Skalarprodukt der H^1 -Seminorm formulieren, fallen die entsprechenden Terme ebenfalls weg. Weiterhin erfüllen auch die Gradienten der Ansatzfunktionen zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Orthogonalitätsrelation in der H^1 -Seminorm, was noch häufiger von Nutzen sein wird.

Proposition 3.19. (Orthogonalsystem der Gradienten) Sei M_0 eine C^2 -Fläche. Sei $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ ein $L^2(M_0)$ -orthonormales System aus Eigenfunktionen von $-\Delta^{M_0}$ mit Neumann-Randwertbedingung zu den Eigenwerten $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Dann ist $(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \nabla^{M_0} \varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von $L^2(M_0; \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Nach partieller Integration für $j, l \in \mathbb{N}$:

$$\int_{M_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \nabla^{M_0} \varphi_l^0 \bullet \nabla^{M_0} \varphi_j^0 d\mathcal{H}^d = - \int_{M_0} \frac{1}{\sqrt{\lambda_l}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \Delta^{M_0} \varphi_l^0 \varphi_j^0 d\mathcal{H}^d = \frac{\sqrt{\lambda_l}}{\sqrt{\lambda_j}} \int_{M_0} \varphi_l^0 \varphi_j^0 d\mathcal{H}^d = \delta_{lj}.$$

□

Um Existenztheorie für gewöhnliche Differentialgleichungen für die Galerkin-Gleichungen zu verwenden, müssen wir Invertierbarkeit der Steifigkeitsmatrix vor dem Zeitableitungsterm zeigen. Um später Fortsetzbarkeit der Lösungen zu bekommen, zeigen wir Invertierbarkeit für alle Zeiten.

Lemma 3.20. (*Die Steifigkeitsmatrix ist invertierbar*) Sei $N \in \mathbb{N}$. Zu $t \in [0, T]$ definiere ausgehend von den Galerkin-Funktionen φ_j^t aus Definition 3.15 die Matrix:

$$B_{jl}(t) = \int_{M_t} \nabla^{M_t} \varphi_j^t \bullet \nabla^{M_t} \varphi_l^t d\mathcal{H}^d, \quad j, l = 1 \dots N.$$

Dann ist diese Matrix für alle $t \in [0, T]$ symmetrisch und positiv definit, also invertierbar.

Beweis. Symmetrie ist klar. Sei $\xi \in \mathbb{R}^N$. Dann betrachte

$$\begin{aligned} \xi \bullet B(t) \xi &= \sum_{j,l=1}^N \xi_j \xi_l B_{jl}(t) = \int_{M_t} \sum_{l=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \nabla^{M_t} \varphi_j^t \right) \bullet \xi_l \nabla^{M_t} \varphi_l^t d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_t} \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \nabla^{M_t} \varphi_j^t \right) \bullet \left(\sum_{l=1}^N \xi_l \nabla^{M_t} \varphi_l^t \right) d\mathcal{H}^d = \int_{M_t} \left| \sum_{j=1}^N \xi_j \nabla^{M_t} \varphi_j^t \right|^2 d\mathcal{H}^d \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Matrix nichtnegativ definit. Sei nun $\xi \bullet B(t) \xi = 0$. Dann folgt nach dem Transformationsatz 6.8 und der Kettenregel:

$$0 = \int_{M_t} \left| \sum_{j=1}^N \xi_j \nabla^{M_t} \varphi_j^t \right|^2 d\mathcal{H}^d = \int_{M_0} \left| \sum_{j=1}^N \xi_j (D^{M_t} \Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0} \varphi_j^0 \right|^2 \mathcal{J} \Phi_t d\mathcal{H}^d.$$

Dabei haben wir die Definition der Galerkinfunktionen 3.15 verwendet. Der abgezogene Mittelwert verschwindet dabei unter dem Gradienten. Der Integrand ist nichtnegativ, also folgt fast überall: $0 = \left| \sum_{j=1}^N \xi_j (D^{M_t} \Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0} \varphi_j^0 \right|^2 \mathcal{J} \Phi_t$. Die Jacobische ist positiv auf M_t . Damit folgt dann:

$$0 = \sum_{j=1}^N \xi_j (D^{M_t} \Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0} \varphi_j^0 = (D^{M_t} \Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \sum_{j=1}^N \xi_j \nabla^{M_0} \varphi_j^0.$$

Es ist Φ_t ein Diffeomorphismus, also ist die Matrix $(D^{M_t} \Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t$ invertierbar, somit folgt fast überall auf M_t : $0 = \sum_{j=1}^N \xi_j \nabla^{M_0} \varphi_j^0$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\nabla^{M_0} \varphi_l^0, l = 1 \dots N$ und integrieren über M_0 , dann folgt mit Proposition 3.19:

$$0 = \sum_{j=1}^N \xi_j \int_{M_0} \nabla^{M_0} \varphi_j^0 \bullet \nabla^{M_0} \varphi_l^0 d\mathcal{H}^d = \sum_{j=1}^N \xi_j \sqrt{\lambda_j} \sqrt{\lambda_l} \int_{M_0} \frac{\nabla^{M_0} \varphi_j^0}{\sqrt{\lambda_j}} \bullet \frac{\nabla^{M_0} \varphi_l^0}{\sqrt{\lambda_l}} d\mathcal{H}^d = \sum_{j=1}^N \xi_j \sqrt{\lambda_j} \sqrt{\lambda_l} \delta_{jl} = \xi_l \lambda_l.$$

Schließlich verwenden wir, dass die Eigenwerte λ_l für $l \geq 1$ positiv sind und folgern $\xi = 0$. □

Damit lässt sich lokale Existenz in der Zeit für die Galerkin-Gleichungen zeigen.

Satz 3.21. (*Existenz von Galerkin-Lösungen*) Seien $\beta, \delta > 0$. Sei $\mathcal{B}^{\beta\delta}$ der elliptische Operator aus Definition 3.14. Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $0 < T_N^* \leq T$ und genau ein $\varrho_N \in \Xi_N^{T_N^*}$ im Ansatzraum aus Definition 3.15, so dass für alle $t \in [0, T_N^*]$ die folgende Galerkin-Gleichung erfüllt ist:

$$\frac{d}{dt} (\zeta(t), \varrho_N(t))_{H^t} - (\partial_t^M \zeta(t), \varrho_N(t))_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta} (\varrho_N(t)), \zeta(t) \rangle_{V_0^t} = 0 \text{ für alle } \zeta \in \Xi_N^{T_N^*}.$$

Beweis. Wir machen den Ansatz:

$$\varrho_N(t) = \sum_{j=0}^N a_j^N(t) \varphi_j^t \quad (3.1.2)$$

und wählen als Startwerte $a_j^N(0) = (\varrho_0, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}$, $j \leq N$. Wenn wir $\zeta = \varphi_l^t$, $l = 1 \dots N$ in der Behauptung setzen, so haben wir nach Proposition 3.18 zu lösen:

$$\frac{d}{dt} (\varphi_l^t, \varrho_N)_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \varphi_l^t \rangle_{V_0^t} = 0 \text{ für } l = 1 \dots N.$$

Hierbei haben wir benutzt, dass die Ausdrücke $\partial_t^M \varphi_j^t$ räumlich konstante Funktionen sind und daher im Skalarprodukt der H^1 -Seminorm verschwinden. Dies ist mit dem Ansatz von ϱ_N nichts anderes als:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{j=1}^N a_j^N(t) (\varphi_j^t, \varphi_l^t)_{H^t} \right) + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \varphi_l^t \rangle_{V_0^t} \\ &= \sum_{j=1}^N \frac{d}{dt} a_j^N(t) (\varphi_j^t, \varphi_l^t)_{H^t} + \sum_{j=1}^N a_j^N(t) \frac{d}{dt} (\varphi_j^t, \varphi_l^t)_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \varphi_l^t \rangle_{V_0^t}. \end{aligned}$$

Dies ist ein System von N gewöhnlichen Differentialgleichungen mit den Unbekannten a_j^N , $j = 1 \dots N$. Die Information über die Gesamtmasse von $\varrho_N(t)$, $t \in [0, T]$ ist nach dem Ansatz in (3.1.2) und nach der Wahl der Galerkinfunktionen aus Definition 3.15 im Koeffizienten $a_0^N(t)$ enthalten. Um eine Lösung ϱ_N mit konstanter Gesamtmasse R zu erhalten, sollte erfüllt sein:

$$R = \int_{M_t} \varrho_N(t) d\mathcal{H}^d = a_0^N(t) \int_{M_t} \varphi_0^t d\mathcal{H}^d = a_0^N(t) \sqrt{\mathcal{H}^d(M_t)}.$$

Wir definieren daher $a_0^N(t) = R / \sqrt{\mathcal{H}^d(M_t)}$ und setzen dies im obigen System gewöhnlicher Differentialgleichungen ein. Die Steifigkeitsmatrix $B_{jl}(t) = (\varphi_j^t, \varphi_l^t)_{H^t}$ ist nach Lemma 3.20 für alle $t \in [0, T]$ invertierbar. Aus den Voraussetzungen 3.1 und 3.6 folgt, dass die übrigen Ausdrücke stetig und lokal Lipschitz sind. Also existieren nach dem Satz von Picard eindeutige Lösungen $a_j^N \in C^1([0, T_N^*])$ für $N \in \mathbb{N}$ mit $T_N^* > 0$. Sei nun $\zeta \in \Xi_N^*$ eine Testfunktion mit der Darstellung $\zeta = \sum_{l=1}^N b_l^N(t) \varphi_l^t$. Über die Gleichung summieren ergibt:

$$\sum_{l=1}^N b_l^N(t) \frac{d}{dt} (\varphi_l^t, \varrho_N)_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \zeta \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Dies ist nichts anders als

$$\frac{d}{dt} (\zeta, \varrho_N)_{H^t} - \int_{M_t} \sum_{l=1}^N \frac{d}{dt} b_l^N(t) \nabla^M \varphi_l^t \bullet \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \zeta \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Wegen $\partial_t^M \varphi_j^t = \text{const}(t)$ ist dies äquivalent zu:

$$\frac{d}{dt} (\zeta, \varrho_N)_{H^t} - (\partial_t^M \zeta, \varrho_N)_{H^1 t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \zeta \rangle_{V_0^t} = 0.$$

□

Energieabschätzung

Um im folgenden Abschnitt eine mathematische Energieabschätzung für die Galerkin-Approximation zu erhalten, wählen wir die zulässige Testfunktion $\zeta = \varrho_N \in \Xi_N^*$. Um eine möglichst gute Abschätzung in den Normen der Krümmung und Geschwindigkeit zu bekommen, verwenden wir für $t \in [0, T]$ die Sobolevsche Einbettung $W^{1,2}(M_t) \hookrightarrow L^p(M_t)$ für $p < \infty$ und $W^{1,q}(M_t) \hookrightarrow L^\infty(M_t)$ für $q > 2$ in physikalischen Raumdimensionen $d = 1, 2$. Die Abschätzkonstante der Einbettung kann unabhängig von $t \in [0, T]$ gewählt werden aufgrund von Voraussetzung 3.2 an M mit dem Transformationsatz 6.8 und der Kettenregel.

Satz 3.22. (Mathematische Energieabschätzung) Sei $\beta, \delta > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen die Lösungen $\varrho_N \in \Xi_N^{T_N^*}$ aus Satz 3.21 auf dem Lösungsintervall $[0, T_N^*]$ die folgende Abschätzung:

$$\frac{1}{2} \operatorname{esssup}_{t \in [0, T_N^*]} \|\varrho_N(t)\|_{H^1(M_t)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{T_N^*} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N(t)) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt \leq C_\beta.$$

Dabei ist die Konstante $C_\beta > 0$ von $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ unabhängig und hängt für ein $\epsilon > 0$ von den Normen $v^* \in L^1(W^{2,2+\epsilon}(M))$, $v_n \in L^2(W^{1,2+\epsilon}(M))$ und $K \in L^4(W^{1,2+\epsilon}(M))$ ab.

Beweis. Es ist $\varrho_N \in \Xi_N^{T_N^*}$, daher ist es in Satz 3.21 zugelassen, $\zeta = \varrho_N$ zu setzen. Damit ergibt sich:

$$\frac{d}{dt} \|\nabla^M \varrho_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2 - (\partial_t^M \varrho_N(t), \varrho_N(t))_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N(t)), \varrho_N(t) \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Von nun an führen wir die Zeitargumente nicht mehr gesondert auf. Für den zweiten Term gilt dann nach Proposition 3.12 und dem Transporttheorem für Flächen 6.9:

$$\begin{aligned} - \int_{M_t} \nabla^M \partial_t^M \varrho_N \bullet \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d &= -\frac{1}{2} \int_{M_t} (\partial_t^M |\nabla^M \varrho_N|^2 - v_n \nabla^M \varrho_N \bullet K \nabla^M \varrho_N) d\mathcal{H}^d \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla^M \varrho_N\|_{L^2(M_t)}^2 + \int_{M_t} v_n \nabla^M \varrho_N \bullet \left(-\frac{1}{2} k Id + K\right) \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Die Randterme verschwinden, da nach Voraussetzung 3.2 $\nu^* \bullet v^* = 0$ auf ∂M_t , $t \in [0, T]$ gilt. Den zweiten Term bringen wir auf die rechte Seite und schätzen mit der Hölder-Ungleichung ab:

$$\left| \int_{M_t} v_n \nabla^M \varrho_N \bullet \left(-\frac{1}{2} k Id + K\right) \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \right| \leq C \|v_n\|_{L^\infty(M_t)} \|K\|_{L^\infty(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2.$$

Diesen Term kontrolliert später das Gronwall-Lemma. Für den elliptischen Term rechnen wir:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_t^{\beta\delta}(\varrho_N), \varrho_N \rangle_{V_0^t} &= \int_{M_t} (m^{\beta\delta}(\varrho_N)(-\nabla^M p + a(\varrho_N) \nabla^M k) + v^* \varrho_N) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \\ &\quad - \int_{M_t} \nabla^M \varrho_N \bullet (2v_n K \nabla^M \varrho_N + \varrho_N \nabla^M (v_n k)) d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d - \int_{M_t} \nabla^M \varrho_N \bullet (2v_n K \nabla^M \varrho_N + \varrho_N \nabla^M (v_n k)) d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_{M_t} \left(m^{\beta\delta}(\varrho_N) \nabla^M (k + \varrho_N |K|^2) + m^{\beta\delta}(\varrho_N) a(\varrho_N) \nabla^M k + \varrho_N v^* \right) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Das erste Integral ist der nichtnegative Term in der Abschätzung. Das zweite Integral bringen wir auf die rechte Seite und schätzen zu $\epsilon > 0$ mit der Hölder-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_{M_t} \nabla^M \varrho_N \bullet (2v_n K \nabla^M \varrho_N + \varrho_N \nabla^M (v_n k)) d\mathcal{H}^d \right| &\leq C \|v_n\|_{L^\infty(M_t)} \|K\|_{L^\infty(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2 \\ &\quad + \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)} \left(\|v_n\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)} \|k\|_{L^\infty(M_t)} + \|k\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)} \|v_n\|_{L^\infty(M_t)} \right) \|\varrho_N\|_{L^{\frac{4+2\epsilon}{\epsilon}}(M_t)} \\ &\leq C \|v_n\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)} \|K\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt die Sobolevsche Einbettung verwendet. Wir erhalten einen weiteren Gronwall-Term. Als nächstes behandeln wir den v^* -Term. Dazu integrieren wir zweimal partiell. Es entstehen keine Randterme, da $\nu^* \bullet v^* = 0$ nach Voraussetzung 3.2 und $\nu^* \bullet \nabla^M \varrho_N = 0$ erfüllt ist.

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \varrho_N v^* \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d &= - \int_{M_t} \operatorname{div}^M(v^*) \varrho_N \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d - \int_{M_t} v^* \bullet \nabla^M \varrho_N \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_t} \operatorname{div}^M(v^*) |\nabla^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} \nabla^M \operatorname{div}^M(v^*) \bullet \varrho_N \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} \nabla^M(v^* \bullet \nabla^M \varrho_N) \bullet \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Integrale schätzen wir zu $\epsilon > 0$ mit der Hölder-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{M_t} \operatorname{div}^M(v^*) |\nabla^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d \right| + \left| \int_{M_t} \nabla^M \operatorname{div}^M(v^*) \bullet \varrho_N \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \right| \\ & \leq \|v^*\|_{W^{1,\infty}(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2 + \|v^*\|_{W^{2,2+\epsilon}(M_t)} \|\varrho_N\|_{L^{\frac{4+2\epsilon}{\epsilon}}(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)} \\ & \leq C \|v^*\|_{W^{2,2+\epsilon}(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt wieder die Sobolevsche Einbettung verwendet. Wir erhalten einen weiteren Gronwall-Term. Im verbleibenden Ausdruck können wir mit Proposition 3.13 Gradient ∇^M und Richtungsableitung $v^* \bullet \nabla^M$ vertauschen und so den letzten Term anschließend mit der Kettenregel und dann mit partieller Integration auf Flächen aus Satz 6.10 weiter behandeln:

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \nabla^M(v^* \bullet \nabla^M \varrho_N) \bullet \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d &= \int_{M_t} (v^* \bullet \nabla^M) \nabla^M \varrho_N \bullet \nabla^M \varrho_N + \nabla^M \varrho_N \bullet (P^M D^M v^*)^S \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_t} \frac{1}{2} (v^* \bullet \nabla^M) |\nabla^M \varrho_N|^2 + \nabla^M \varrho_N \bullet (P^M D^M v^*)^S \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_t} -\frac{1}{2} \operatorname{div}^M(v^*) |\nabla^M \varrho_N|^2 + \nabla^M \varrho_N \bullet (P^M D^M v^*)^S \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Damit können wir also den v^* -Term auf die rechte Seite bringen und folgendermaßen abschätzen:

$$\left| \int_{M_t} v^* \bullet \varrho_N \nabla^M \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \right| \leq C \|v^*\|_{W^{2,2+\epsilon}(M_t)} \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2.$$

Die verbleibenden Terme im elliptischen Teil bringen wir ebenfalls auf die rechte Seite und schätzen mit der Young-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{M_t} \left(m^{\beta\delta}(\varrho_N) \nabla^M(k + \varrho_N |K|^2) + m^{\beta\delta}(\varrho_N) a(\varrho_N) \nabla^M k \right) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N) |\nabla^M(k + \varrho_N |K|^2) + a(\varrho_N) \nabla^M k|^2 d\mathcal{H}^d + \frac{1}{2} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Es lässt sich der zweite Term in den positiven Term auf der linken Seite absorbieren. Für den Rest verwenden wir an dieser Stelle die Wachstumsbedingung aus Voraussetzung 3.6 der Koeffizienten $a(s)$ und die Beschränktheit der Mobilitäten $m^{\beta\delta}$ aus Definition 3.10 und schätzen zu $\epsilon > 0$ mit der Hölder-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} & \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N) |\nabla^M(k + \varrho_N |K|^2) + a(\varrho_N) \nabla^M k|^2 d\mathcal{H}^d \\ & \leq C^\beta \left(1 + \|k\|_{H^1(M_t)}^2 + \|K\|_{L^\infty(M_t)}^4 + \|K\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^2 \|K\|_{L^\infty(M_t)}^2 \right) (1 + \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir wieder die Sobolevsche Einbettung auf ϱ_N angewendet. Damit erhalten wir insgesamt, wenn wir zu $N \in \mathbb{N}$ über $[0, t_N^*]$ für $t_N^* \in [0, T_N^*]$ integrieren und die Daten in v_n, v^* und K noch mit der Sobolev-Einbettung und der Young-Ungleichung zusammenfassen (Diese Vereinfachung ist nicht zwingend):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho_N(t_N^*)\|_{L^2(M_{t_N^*})}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_N^*} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d dt \leq \|\nabla^M \varrho_N(0)\|_{L^2(M_0)}^2 \\ & + C_\beta \int_0^{t_N^*} (1 + \|v_n\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^2 + \|v^*\|_{W^{2,2+\epsilon}(M_t)}^2 + \|K\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^4) (1 + \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2) dt. \end{aligned}$$

Für den Term von den Anfangswerten überlegen wir uns aufgrund des Ansatzes aus (3.1.2) wenn wir einen Faktor λ_j einfügen und wieder herausdividieren:

$$\nabla^M \varrho_N(0) = \sum_{j=1}^N (\varrho_0, -\Delta^M \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} \frac{\nabla^M \varphi_j^0}{\lambda_j} = \sum_{j=1}^N (\nabla^M \varrho_0, \frac{\nabla^M \varphi_j^0}{\sqrt{\lambda_j}})_{L^2(M_0)} \frac{\nabla^M \varphi_j^0}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

Bei der partiellen Integration entsteht kein Randterm aufgrund der Wahl der Eigenfunktionen φ_j^0 mit Neumann-Randbedingung. Aufgrund von Proposition 3.19 und der Besselschen Ungleichung (vgl. z.B. Kapitel 7 [Al1]) folgt dann $\|\nabla^M \varrho_N(0)\|_{L^2(M_0)} \leq \|\nabla^M \varrho_0\|_{L^2(M_0)}$, was beschränkt ist nach Voraussetzung 3.8 an die Anfangswerte. Damit lautet die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho_N(t_N^*)\|_{L^2(M_{t_N^*})}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_N^*} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & \leq C + C_\beta \int_0^{t_N^*} (1 + \|v_n\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^2 + \|v^*\|_{W^{2,2+\epsilon}(M_t)} + \|K\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^4) (1 + \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2) dt. \end{aligned}$$

Es hat ϱ_N konstante Gesamtmasse R . Daher lässt sich auf die linke Seite die Poincaré-Ungleichung 6.13 anwenden. Der Faktor $1 + \|v_n\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^2 + \|v^*\|_{W^{2,2+\epsilon}(M_t)} + \|K\|_{W^{1,2+\epsilon}(M_t)}^4$ auf der rechten Seite ist nach Voraussetzung 3.1 und 3.2 an M eine integrierbare Funktion. Damit folgt die Behauptung mit dem Lemma von Gronwall und die Abschätzungs-konstante hängt von $\epsilon > 0$ und den Größen in der Behauptung ab. \square

Die Konstante C_β ist von $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ unabhängig, nicht jedoch von $\beta > 0$, da wir die Beschränktheit der Mobilitätskoeffizienten ausgenutzt haben. Im letzten Schritt erst, nachdem wir Nichtnegativität der Lösungen gezeigt haben, werden wir Abschätzungen unabhängig von $\beta > 0$ erhalten. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen haben wir für $N \in \mathbb{N}$ lokal in der Zeit gelöst. Wir zeigen nun, dass sich diese Lösung für alle $N \in \mathbb{N}$ auf ganz $[0, T]$ fortsetzen lässt.

Proposition 3.23. (Fortsetzen von Lösungen) Sei $\beta, \delta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen lassen sich die Lösungen ϱ_N aus Satz 3.21 für alle $N \in \mathbb{N}$ auf ganz $[0, T]$ fortsetzen. Ebenfalls gilt dann Satz 3.22 auf $[0, T]$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. Es gilt nach Ansatz (3.1.2) von ϱ_N und der Definition der Galerkin-Funktionen 3.15:

$$\varrho_N \circ \Phi_t = \sum_{j=1}^N a_j^N(t) (\varphi_j^0 + \text{const}_j).$$

Wenn wir nun in dieser Identität das Skalarprodukt $(\cdot, \varphi_k^0)_{L^2(M_0)}$, $k \geq 1$ bilden, fällt für alle $j \in \mathbb{N}$ der Term $(\text{const}_j, \varphi_k^0)_{L^2(M_0)}$ weg, da die φ_k^0 für $k \geq 1$ auf M_0 verschwindenden Mittelwert besitzen. Damit ergibt sich: $a_k^N(t) = (\varphi_k^0, \varrho_N \circ \Phi_t)_{L^2(M_0)}$. Es ist $\|\varphi_k^0\|_{L^2(M_0)} = 1$, somit ist nach Cauchy-Schwarz und dem Transformationssatz für Flächen 6.8:

$$|a_k^N(t)| \leq \|\varrho_N \circ \Phi_t\|_{L^2(M_0)} \leq \|\varrho_N\|_{L^2(M_t)} \|\mathcal{J}\Phi_t^{-1}\|_{C^0(M_t)} \leq C \|\varrho_N\|_{L^2(M_t)}.$$

Es ist $\mathcal{J}\Phi_t^{-1}$ gleichmäßig beschränkt wegen Voraussetzung 3.2 an M . Mit Satz 3.22 bleibt dieser Ausdruck beschränkt. Lemma 3.20 garantiert die Invertierbarkeit der Steifigkeitsmatrix für alle Zeiten $t \in [0, T]$. Damit können wir die Lösungen ϱ_N aus Satz 3.21 auf das gesamte Zeitintervall $[0, T]$ fortsetzen. \square

Wie im planaren Fall folgern wir nun aus Randwerten und der Mittelwerteigenschaft folgende Aussage.

Proposition 3.24. (Äquivalentes Skalarprodukt) Sei M_0 eine zusammenhängende, kompakte C^3 -Fläche. Dann ist auf dem Raum

$$V_0^0 = \left\{ v \in H^3(M_0) \mid \int_{M_0} v d\mathcal{H}^d = 0 \text{ und } \nu^* \bullet \nabla^{M_0} v = 0 \text{ f.ü. auf } \partial M_0 \right\}$$

das Produkt $(u, v)_{V_0^0} = \int_{M_0} \nabla^{M_0} \Delta^{M_0} u \bullet \nabla^{M_0} \Delta^{M_0} v d\mathcal{H}^d$ äquivalent zum vollen Skalarprodukt in $H^3(M_0)$.

Beweis. Zu $u \in V^0$ setze $f = \Delta^{M_0} u$. Dann ist $f \in H^1(M_0)$ und es lässt sich Regularitätstheorie für das Neumann-Problem (siehe z.B. [Tay], Abschnitt 5) mit verschwindendem Mittelwert anwenden:

$$\|u\|_{H^3(M_0)} \leq C \|f\|_{H^1(M_0)} = C \|\Delta^{M_0} u\|_{H^1(M_0)} \leq C \|\nabla^{M_0} \Delta^{M_0} u\|_{L^2(M)},$$

wobei im letzten Schritt die Poincaré-Ungleichung für verschwindenden Mittelwert aus Satz 6.13 verwendet wurde. Dabei verschwindet der Mittelwert von $\Delta^{M_0} u$ nach dem Gaußschen Satz aufgrund der Neumann-Randwerte von u . \square

Proposition 3.24 werden wir zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ auf die Fläche M_t anwenden. Die Konstante $C_0 > 0$ mit $\|u\|_{H^3(M_t)} \leq C_0 \|\nabla^M \Delta^M u\|_{L^2(M_t)}$ für $u \in V_t^0, t \in [0, T]$ lässt sich unabhängig von $t \in [0, T]$ auswählen. Dazu überlegen wir uns, dass die Abschätzungskonstante aus Proposition 3.24 von den Daten abhängt, genauer gesagt von der (räumlichen) $C^{1,1}$ -Norm der metrischen Koeffizienten (vgl. [Tay], [Al1]). Nach Voraussetzung 3.1 an M ist diese Norm jedoch gleichmäßig in $t \in [0, T]$ beschränkt. Ebenfalls lässt sich die Konstante der Poincaré-Ungleichung wie in Satz 6.13 gleichmäßig in $t \in [0, T]$ wählen.

Wir sehen nun wie schwache Konvergenz der Lösungen und Beschränktheit des elliptischen Operators folgt.

Folgerung 3.25. (Schwache Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert zu $\beta, \delta > 0$ ein $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(V) \cap L^\infty(H^1(M))$, so dass die Lösungen aus Satz 3.21 nach Auswahl einer Teilfolge $\varrho_N \rightharpoonup \varrho_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(H^3(M))$ und $\varrho_N \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho_{\beta\delta}$ schwach* in $L^\infty(H^1(M))$ für $N \rightarrow \infty$ konvergieren.*

Beweis. Aufgrund der Tatsache, dass für $\delta > 0$ die regularisierte Mobilität aus Definition 3.10 strikt positiv $m^{\beta\delta}(s) \geq c_\delta$ ist, folgt aus Satz 3.22 und Proposition 3.23, dass $\nabla^M \Delta^M \varrho_N$ unabhängig von $N \in \mathbb{N}$ beschränkt in $L^2(L^2(M))$ ist. Ferner sind die $\varrho_N \in \Xi_N^T \subset L^2(V)$. Mit Proposition 3.24 folgt also, dass $\varrho_N - \bar{\varrho}_N$ beschränkt in $L^2(H^3(M))$ ist, wobei $\bar{\varrho}_N(t) = \int_{M_t} \varrho_N(t) d\mathcal{H}^d$ den Mittelwert von ϱ_N bezeichnet. Da alle $\varrho_N(t)$ konstante Gesamtmasse R haben ist der Mittelwert für alle $t \in [0, T]$ unabhängig von N . Also ist ϱ_N beschränkt in $L^2(H^3(M))$. Dies ist ein reflexiver Banachraum und folglich haben wir für eine Teilfolge schwache Konvergenz $\varrho_N \rightharpoonup \varrho_{\beta\delta}$ in $L^2(H^3(M))$. Weiterhin ist $L^2(V)$ eine konvexe, abgeschlossene Teilmenge von $L^2(H^3(M))$, daher ist $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(V)$ nach dem Lemma von Mazur. Ferner ist $L^1(H^1(M)^*)$ separabler Banachraum und $L^1(H^1(M)^*)^* \simeq L^\infty(H^1(M))$ (siehe z.B. [GGZ], Kapitel 1). Es konvergiert also $\varrho_N \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho_{\beta\delta}$ nach Auswahl einer weiteren Teilfolge. \square

Folgerung 3.26. (Beschränktheit des elliptischen Operators) *Sei $\beta, \delta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die elliptischen Operatoren $\mathcal{B}^{\beta\delta}$ aus Definition 3.14 angewendet auf die Lösungen ϱ_N aus Satz 3.21 im folgenden Sinne beschränkt: $\|\mathcal{B}^{\beta\delta}(\varrho_N)\|_{L^2(H^3(M))^*} \leq C_\beta$ mit einer von $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ unabhängigen Konstanten $C_\beta > 0$.*

Beweis. Sei $\zeta \in L^2(H^3(M))$. Es ist:

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathcal{B}^{\beta\delta}(\varrho_N), \zeta \rangle \rangle_{L^2(H^3(M))} &= - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet (2v_n K \nabla^M \varrho_N + \varrho_N \nabla^M (v_n k)) d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \Delta^M \zeta \bullet \left(m^{\beta\delta}(\varrho_N) (\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2 + \Delta^M \varrho_N) + a(\varrho_N) \nabla^M k) + \varrho_N v^* \right) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Aus der Energieabschätzung aus Satz 3.22 folgt, dass $\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_N)} \nabla^M \Delta^M \varrho_N$ durch eine Konstante $C_\beta > 0$ in der $L^2(L^2(M))$ -Norm abgeschätzt ist. Der weitere Vorfaktor $\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_N)}$ ist wegen der β -Beschränkung aus Definition 3.10 in $L^\infty(L^\infty(M))$ beschränkt. $m^{\beta\delta}(\varrho_N) \nabla^M k$ ist ebenfalls beschränkt in $L^2(L^2(M))$, weil der Vorfaktor in $L^\infty(L^\infty(M))$ ist und $\nabla^M k$ beschränkt ist aufgrund von Voraussetzung 3.1. Aus der Wachstumsbedingung aus Voraussetzung 3.6 folgt ebenfalls die gewünschte Beschränktheit in $L^2(L^2(M))$ für den $a(\varrho_N)$ -Term. Es ist $\nabla^M (\varrho_N |K|^2) = |K|^2 \nabla^M \varrho_N + \varrho_N \nabla^M (|K|^2)$ in $L^2(L^2(M))$ beschränkt weil $\varrho_N \in L^\infty(H^1(M))$ nach der Energieabschätzung aus Satz 3.22 und weil die Krümmungsterme beschränkt sind wegen Voraussetzung 3.1 an die Fläche. Die Behauptung für die verbleibenden Terme folgt auf analoge Weise. \square

Kompaktheit

Um in den Nichtlinearitäten zum Limes übergehen zu können, zeigen wir starke Konvergenz von $\nabla^M \varrho_N$. Dazu benötigen wir Kompaktheit in der Zeit. Wir bemerken, dass die Methode aus [Gr1] hier versagt, da die Ansatzfunktionen zu einem späteren Zeitpunkt im Allgemeinen nicht mehr orthogonal sind und daher der Satz von Aubin-Lions an dieser Stelle nicht verwendbar ist. Stattdessen verwenden wir die Methode aus [AL] und testen mit Zeitdifferenzen. Da der Definitionsbereich zeitabhängig ist, werden wir eine Abschätzung transformierter Zeitdifferenzen erhalten. Wir erhalten dann starke Konvergenz mit dem abstrakten Kompaktheitssatz aus [Al2].

Satz 3.27. (Abschätzen von Zeitdifferenzen) Sei $\beta, \delta > 0$ und M wie in Voraussetzung 3.1 mit den Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ aus Definition 3.2. Definiere zu den Lösungen ϱ_N aus Satz 3.21 $u_N : M_0 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ durch: $u_N(t) = (D\Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0}(\varrho_N(t) \circ \Phi_t) \sqrt{\mathcal{J}\Phi_t}$. Dann existiert unter den getroffenen Voraussetzungen eine Konstante $C_\delta^\beta > 0$, so dass für alle $h > 0$ die folgende Abschätzung von Zeitdifferenzen gilt:

$$\int_0^{T-h} \|u_N(t+h) - u_N(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \leq C_\delta^\beta h.$$

Dabei ist die Konstante C_δ^β unabhängig von $N \in \mathbb{N}$, aber im Allgemeinen abhängig von $\delta, \beta > 0$.

Beweis. Wenn wir in Satz 3.21 für $\zeta(s) = \varphi_j^s, s \in [0, T]$ setzen, dann folgt:

$$\frac{d}{ds}(\varphi_j^s, \varrho_N(s))_{H^s} + \langle \mathcal{B}_s^{\beta\delta}(\varrho_N(s)), \varphi_j^s \rangle_{V_0^s} = 0, \text{ für } j = 1 \dots N.$$

Zu $t \in [0, T-h]$ integrieren wir diese Gleichung über $s \in [t, t+h]$. Dann ergibt sich für den parabolischen Teil:

$$\int_t^{t+h} \frac{d}{ds}(\varphi_j^s, \varrho_N(s))_{H^s} ds = (\varphi_j^{t+h}, \varrho_N(t+h))_{H^{t+h}} - (\varphi_j^t, \varrho_N(t))_{H^t}.$$

Wir verwenden die Schreibweise: $\Phi_t^{s-t} = \Phi_s \circ \Phi_t^{-1} : M_t \rightarrow M_s$. Wir bemerken folgenden Zusammenhang zwischen den Galerkin-Funktionen aus Definition 3.15 und den Transformationsabbildungen aus Definition 3.2:

$$\varphi_j^s \circ \Phi_t^{s-t} = \varphi_j^0 \circ \Phi_s^{-1} \circ \Phi_s \circ \Phi_t^{-1} + \text{const}_j(s) = \varphi_j^t + \text{const}_j(t, s).$$

Damit folgt dann:

$$\sum_{j=0}^N a_j^N(t) \varphi_j^{t+h} = \sum_{j=0}^N a_j^N(t) \varphi_j^t \circ \Phi_{t+h}^{-h} + \text{const}_N(t, h) = \varrho_N(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h} + \text{const}_N(t, h).$$

Multiplizieren wir die erhaltene Gleichung mit $a_j^N(t+h) - a_j^N(t)$ und summieren über $j = 1 \dots N$. Die räumlich konstanten Terme fallen unter den Gradienten weg und es ergibt sich für den parabolischen Teil:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left(a_j^N(t+h) - a_j^N(t) \right) \left((\varphi_j^{t+h}, \varrho_N(t+h))_{H^{t+h}} - (\varphi_j^t, \varrho_N(t))_{H^t} \right) \\ &= \left(\varrho_N(t+h) - \varrho_N(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h}, \varrho_N(t+h) \right)_{H^{t+h}} - \left(\varrho_N(t+h) \circ \Phi_t^h - \varrho_N(t), \varrho_N(t) \right)_{H^t}. \quad (\star) \end{aligned}$$

Beide Terme in (\star) transformieren wir mit dem Transformationssatz auf Flächen 6.8 auf den Startzeitpunkt $t = 0$. Dazu definieren wir $\tilde{\varrho}_N(t) = \varrho_N(t) \circ \Phi_t$ für $t \in [0, T]$. Für den ersten Term von (\star) folgt dann anschließend mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} & \int_{M_{t+h}} \nabla^{M_{t+h}}(\varrho_N(t+h) - \varrho_N(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h}) \bullet \nabla^{M_{t+h}} \varrho_N(t+h) d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_0} (D\Phi_{t+h}^{-1})^T \circ \Phi_{t+h} \nabla^{M_0}(\tilde{\varrho}_N(t+h) - \tilde{\varrho}_N(t)) \bullet (D\Phi_{t+h}^{-1})^T \circ \Phi_{t+h} \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h) \mathcal{J}\Phi_{t+h} d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term von (\star) analog:

$$\begin{aligned} & \int_{M_t} \nabla^{M_t}(\varrho_N(t+h) \circ \Phi_t^h - \varrho_N(t)) \bullet \nabla^{M_t} \varrho_N(t) d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_0} (D\Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0}(\tilde{\varrho}_N(t+h) - \tilde{\varrho}_N(t)) \bullet (D\Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t) \mathcal{J}\Phi_t d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen setzen wir $A_t = (D\Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \sqrt{\mathcal{J}\Phi_t}$ und analog für $t+h$. Damit ergibt sich insgesamt für (\star) wenn wir Terme einfügen und wieder abziehen:

$$\begin{aligned} (\star) = \int_{M_0} |A_t \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t) - A_{t+h} \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h)|^2 d\mathcal{H}^d &+ \int_{M_0} (A_t - A_{t+h}) \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t) \bullet A_{t+h} \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h) d\mathcal{H}^d \\ &+ \int_{M_0} (A_{t+h} - A_t) \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h) \bullet A_t \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Der erste Term ist, wenn wir über $t \in [0, T-h]$ integrieren, der gewünschte nichtnegative Term aus der Behauptung. Nach der Voraussetzung 3.2 an M konvergiert nach den Eulerschen Entwicklungsformeln aus Satz 6.11 $\frac{1}{h}(D\Phi_t^h - Id)|_{M_t} \rightarrow -v_n K + n \otimes \nabla^M v_n$ und $\frac{1}{h}(1 - \mathcal{J}\Phi_t^h) \rightarrow -v_n k$ gleichmäßig in t . Zusammen mit der Tatsache, dass $\mathcal{J}\Phi_t$ gleichmäßig positiv ist folgt, dass A_t gleichmäßig Lipschitz in t ist. Somit können wir die anderen Terme auf die rechte Seite bringen und abschätzen und schließlich mit der Energieabschätzung aus Satz 3.22 gleichmäßig abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{M_0} (A_t - A_{t+h}) \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t) \bullet A_{t+h} \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h) d\mathcal{H}^d \right| &\leq Ch \|\nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t)\|_{L^2(M_0)} \|\nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h)\|_{L^2(M_0)} \\ &\leq C_\beta h, \end{aligned}$$

und für den anderen Term analog. Für den elliptischen Term schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{j=1}^N (a_j^N(t+h) - a_j^N(t)) \int_t^{t+h} \langle \mathcal{B}^{\beta\delta}(\varrho_N(s)), \varphi_j^s \rangle_{V_0^s} ds \right| \\ &= \left| h \int_t^{t+h} \langle \mathcal{B}^{\beta\delta}(\varrho_N(s)), \varrho_N(t+h) \circ \Phi_s^{t+h-s} - \varrho_N(t) \circ \Phi_s^{s-t} \rangle_{V_0^s} ds \right| \\ &\leq h \int_t^{t+h} \|\mathcal{B}_s^{\beta\delta}(\varrho_N(s))\|_{H^3(M_s)^*} \|\varrho_N(t+h) \circ \Phi_s^{t+h-s} - \varrho_N(t) \circ \Phi_s^{s-t}\|_{H^3(M_s)} ds \\ &\leq Ch \int_t^{t+h} \|\mathcal{B}_s^{\beta\delta}(\varrho_N(s))\|_{H^3(M_s)^*} (\|\varrho_N(t)\|_{H^3(M_t)} + \|\varrho_N(t+h)\|_{H^3(M_{t+h})}) ds. \end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die Konstante aus bis zu dritten Ableitungen der Diffeomorphismen. Aufgrund der Regularisierung ist $\|\varrho_N\|_{L^2(H^3(M))}^2$ gleichmäßig in $N \in \mathbb{N}$ aber nicht gleichmäßig in $\delta > 0$ abgeschätzt. Damit ergibt sich insgesamt mit Folgerung 3.26 sowie der Faltungsabschätzung, wenn wir noch über $[0, T-h]$ integrieren:

$$\int_0^{T-h} \|A_t \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t) - A_{t+h} \nabla^{M_0} \tilde{\varrho}_N(t+h)\|_{L^2(M_t)}^2 dt \leq C_\beta^\delta h.$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Folgerung 3.28. (Starke Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta, \delta > 0$ für den Limes $\varrho_{\beta\delta}$ aus Folgerung 3.25, dass die Lösungen aus Satz 3.21 nach Auswahl einer weiteren Teilfolge $\varrho_N \rightarrow \varrho_{\beta\delta}$ für $N \rightarrow \infty$ in $L^2(H^1(M))$ stark konvergieren.*

Beweis. Zu $\beta, \delta > 0$ ist ϱ_N gleichmäßig in $L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(H^3(M))$ beschränkt. Wegen der Kettenregel und Voraussetzung 3.2 an M , folgt dass $(D\Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0}(\varrho_N(t) \circ \Phi_t) \sqrt{\mathcal{J}\Phi_t}$ beschränkt ist in $L^2(H^2(M_0)) \cap L^\infty(L^2(M_0))$. Es bettet $H^2(M_0) \hookrightarrow L^2(M_0)$ kompakt ein. Zusammen mit der Abschätzung von Zeitdifferenzen liefert der abstrakte Kompaktheitssatz aus [Al2] (siehe auch [Be]) dann die Präkompaktheit von $(D\Phi_t^{-1})^T \circ \Phi_t \nabla^{M_0}(\varrho_N(t) \circ \Phi_t) \sqrt{\mathcal{J}\Phi_t}$ in $L^1(L^2(M_0))$. Dies ist nach dem Transformationsatz auf Flächen 6.8 und der Kettenregel äquivalent zur Präkompaktheit von $\nabla^M \varrho_N$ in $L^1(L^2(M))$. Die $(\varrho_N)_{N \in \mathbb{N}}$ haben konstante Gesamtmasse, daher ist ϱ_N präkompakt in $L^1(H^1(M))$ nach der Poincaré-Ungleichung 6.13. Den Limes können wir mit Folgerung 3.25 als $\varrho_{\beta\delta}$ identifizieren. \square

Ferner ist ϱ_N beschränkt in $L^\infty(H^1(M))$. Damit konvergiert eine Teilfolge $\varrho_N \rightarrow \varrho_{\beta\delta}$ sogar in $L^q(H^1(M))$ für alle $q < \infty$ und zusammen mit der Sobolevschen Einbettung in $L^p(L^p(M))$ für alle $p < \infty$. Mit den gezeigten Konvergenzen können wir in der mathematischen Energieabschätzung des Galerkin-Problems zum Limes übergehen und erhalten die entsprechende Abschätzung für die Limiten.

Folgerung 3.29. (Energieabschätzung des δ -Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen zu $\beta, \delta > 0$ die Limiten $\varrho_{\beta\delta}$ aus Folgerung 3.25 die folgende Abschätzung:*

$$\operatorname{esssup}_{t \in [0, T]} \|\varrho_{\beta\delta}(t)\|_{H^1(M_t)}^2 + \int_0^T \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt \leq C_\beta,$$

mit einer von $\delta > 0$ unabhängigen Konstanten $C_\beta > 0$.

Beweis. Nach Satz 3.22 folgt:

$$\|\varrho_N\|_{L^\infty(H^1(M))}^2 + \|\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_N)} \nabla^M \Delta^M \varrho_N\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C_\beta,$$

mit einer von $\delta > 0$ unabhängigen Konstanten $C_\beta > 0$. Damit konvergiert nach Auswahl einer Teilfolge $\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_N)} \nabla^M \Delta^M \varrho_N \rightharpoonup J'_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(L^2(M))$ für ein $J'_{\beta\delta} \in L^2(L^2(M))$ und mit der Unterhalbstetigkeit der Norm und der Konvergenz aus Folgerung 3.25 folgt:

$$\|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^\infty(H^1(M))}^2 + \|J'_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C_\beta.$$

Mit der starken Konvergenz $\varrho_N \rightarrow \varrho_{\beta\delta}$ in $L^p(L^p(M))$ für alle $p < \infty$ und der schwachen Konvergenz $\nabla^M \Delta^M \varrho_N \rightharpoonup \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ in $L^2(L^2(M))$ konvergiert damit für alle $\epsilon > 0$ ebenfalls schwach $\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_N)} \nabla^M \Delta^M \varrho_N \rightharpoonup \sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ in $L^{2-\epsilon}(L^{2-\epsilon}(M))$. Mit dem Fundamentallemma der Variationsrechnung können wir dann den Grenzwert als $J'_{\beta\delta} = \sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ identifizieren. \square

Übergang zum Grenzwert

Um in der Galerkin-Formulierung zum Grenzwert $N \rightarrow \infty$ überzugehen, konstruieren wir für beliebiges $\zeta \in W^{1,1}(H^1(M)) \cap L^2(V_0)$ (Siehe Definition 3.9) eine approximierende Folge von Testfunktionen $\zeta_N \in \Xi_N^T$ mit $\zeta_N \rightarrow \zeta$ bzgl. der $W^{1,1}(H^1(M))$ und $L^2(H^3(M))$ -Normen. Dazu zeigen wir zunächst, dass die Menge der Ansatzfunktionen $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N^0$ zum Zeitpunkt $t = 0$ dicht im Raum V_0^0 liegt.

Proposition 3.30. (Die Galerkin-Funktionen liegen dicht zum Zeitpunkt $t = 0$) *Sei M_0 eine C^3 -Fläche und V_0^0 wie in Proposition 3.24. Sei $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ ein $L^2(M_0)$ -orthonormales System aus Eigenfunktionen von $-\Delta^{M_0}$ mit Neumann-Randwertbedingungen und verschwindendem Mittelwert ergänzt um die konstante Funktion φ_0^0 . Setze $X_N^0 = \operatorname{Span}(\varphi_j^0, j = 1 \dots N)$. Dann ist der Raum $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N^0$ dicht in V_0^0 sowie $\operatorname{Span}(\varphi_0^0) \oplus \bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N^0$ dicht in $H^1(M_0)$.*

Beweis. Angenommen es ist $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N^0$ nicht dichte Teilmenge von V_0^0 . Dann ist $\operatorname{clos}(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} X_N^0) \subset V_0^0$ ein echter Unterraum und es existiert eine nichttriviale Ergänzung die orthogonal bezüglich des V_0^0 -Skalarproduktes aus Proposition 3.24 gewählt werden kann. Es existiert also ein $\zeta \in V_0^0$ mit $\zeta \neq 0$ und $0 = (\zeta, \varphi_j^0)_{V_0^0}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann gilt jedoch, wenn wir durch partielle Integration die Ableitungen auf φ_j^0 wälzen und dabei die Neumann-Randwerte von φ_j^0 und ζ verwenden:

$$0 = (\zeta, \varphi_j^0)_{V_0^0} = (\nabla^{M_0} \Delta^{M_0} \zeta, \nabla^{M_0} \Delta^{M_0} \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} = \lambda_j^3 (\zeta, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}.$$

Es ist dann also $0 = (\zeta, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Aus der Dichtheit der $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ in $L^2(M_0)$ aus Proposition 3.18 folgt dann $\zeta = 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Die Dichtheit in $H^1(M_0)$ zeigt man analog, indem man die $H^1(M_0)$ -Seminorm betrachtet. Dies ist ausreichend, da die konstanten Funktionen enthalten sind. \square

Die Idee für die Konstruktion der approximierenden Testfunktionen ist es, die gewünschte Funktion zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ von M_t auf M_0 zu transformieren, dann auf den endlich dimensionalen Raum von Eigenfunktionen zu projizieren und die resultierende Funktion wieder zurück auf M_t zu transformieren. Daher ist es nützlich einige Eigenschaften der orthogonalen Projektion auf die Eigenfunktionen zu kennen.

Proposition 3.31. (Eigenschaften der Projektion) Sei M_0 eine C^3 -Fläche und V_0^0 wie in Proposition 3.24. Sei $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}_0}$ ein $L^2(M_0)$ -orthonormales System aus Eigenfunktionen von $-\Delta^{M_0}$ mit Neumann-Randwertbedingung und verschwindendem Mittelwert ergänzt um die konstante Funktion φ_0^0 . Setze $X_N^0 = \text{Span}(\varphi_j^0, j = 0 \dots N)$. Definiere $Q_N : L^2(M_0) \rightarrow X_N^0$ als die $L^2(M_0)$ -orthogonale Projektion auf X_N^0 . Dann gilt:

1. Für $N \in \mathbb{N}$ ist die Norm von Q_N als Operator von $H^1(M_0) \rightarrow H^1(M_0)$ abgeschätzt durch 1.
2. Für $w \in H^1(M_0)$ gilt $\|Q_N(w) - w\|_{H^1(M_0)} \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$.
3. Für alle $N \in \mathbb{N}$ ist die Norm von Q_N als Operator von $V_0^0 \rightarrow V_0^0$ abgeschätzt durch 1.
4. Für $\zeta \in V_0^0$ gilt $\|Q_N(\zeta) - \zeta\|_{V_0^0} \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$.

Beweis. Zu $f \in L^2(M_0)$ hat $Q_N(f)$ die folgende Darstellung: $Q_N(f) = \sum_{j=0}^N (f, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} \varphi_j^0$. Wir zeigen nur die (aufwändigeren) Behauptungen für den Raum V_0^0 . Die Aussagen für $H^1(M_0)$ lassen sich analog zeigen, wenn wir die $H^1(M_0)$ -Seminorm verwenden. Dies ist ausreichend, da die Abbildung Q_N den Mittelwert nicht verändert. Ein Beweis von Behauptung 1 findet sich auch schon innerhalb des Beweises von Satz 3.22 an der Stelle, wo die approximierten Anfangswerte abgeschätzt wurden. Zeigen wir also, dass die Operatornorm von Q_N als Operator von V_0^0 nach V_0^0 gleichmäßig durch 1 beschränkt ist. Dazu benutzen wir, dass $\varphi_j^0, j \in \mathbb{N}$ ein $L^2(M_0)$ -orthogonales System von Eigenfunktionen von $-\Delta^{M_0}$ ist und dass wegen $\zeta \in V_0^0$ und der Neumann-Bedingung von φ_j^0 keine Randwerte bei partieller Integration auftreten:

$$\begin{aligned} \|Q_N(\zeta)\|_{V_0^0}^2 &= \int_{M_0} |\nabla^{M_0} \Delta^{M_0} Q_N(\zeta)|^2 d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_0} \sum_{j,l=1}^N (\zeta, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} (\zeta, \varphi_l^0)_{L^2(M_0)} \lambda_j \lambda_l \nabla^{M_0} \varphi_j^0 \bullet \nabla^{M_0} \varphi_l^0 d\mathcal{H}^d \\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j^3 (\zeta, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}^2 \leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^3 (\zeta, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (\zeta, \Delta^{M_0} \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} (\Delta^{M_0} \zeta, \Delta^{M_0} \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (\nabla^{M_0} \Delta^{M_0} \zeta, \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} \nabla^{M_0} \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}^2 \leq \|\zeta\|_{V_0^0}^2, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Proposition 3.19 und die Besselsche Ungleichung (vgl. z.B. Kapitel 7 [A1]) verwendet wurde. Zeigen wir nun, dass $\|Q_N(\zeta) - \zeta\|_{V_0^0} \rightarrow 0$ für $\zeta \in V_0^0$. Dazu schieben wir ein $\zeta_{\tilde{N}} \in X_{\tilde{N}}^0$ ein, das wir wieder abziehen:

$$\begin{aligned} \|Q_N(\zeta) - \zeta\|_{V_0^0} &\leq \|Q_N(\zeta) - Q_N(\zeta_{\tilde{N}})\|_{V_0^0} + \|Q_N(\zeta_{\tilde{N}}) - \zeta_{\tilde{N}}\|_{V_0^0} + \|\zeta_{\tilde{N}} - \zeta\|_{V_0^0} \\ &\leq \|Q_N(\zeta_{\tilde{N}}) - \zeta_{\tilde{N}}\|_{V_0^0} + 2\|\zeta_{\tilde{N}} - \zeta\|_{V_0^0}, \end{aligned}$$

wegen der im ersten Teil gezeigten Beschränktheit. Wähle jetzt zu $\epsilon > 0$ mit Proposition 3.30 $\zeta_{\tilde{N}} \in X_{\tilde{N}}^0$ so, dass der letzte Term $\|\zeta_{\tilde{N}} - \zeta\|_{V_0^0} < \epsilon$ ist und wähle dann zu diesem $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass der erste Term verschwindet wegen $X_N^0 \subset X_{\tilde{N}}^0$ für $N \geq \tilde{N}$. \square

Zu $\zeta \in L^2(V_0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ (Siehe Definition 3.9) mit $\zeta(T) = 0$ konstruieren wir nun eine geeignete Folge von Testfunktionen $\zeta_N \in \Xi_N^T$, um in der Gleichung zum Limes überzugehen.

Proposition 3.32. (Approximation von Testfunktionen) Sei M wie in Voraussetzung 3.1, 3.2 und 3.3. Seien zu $N \in \mathbb{N}, t \in [0, T]$ die Galerkin-Räume X_N^t aus Definition 3.15. Dann existiert zu $\zeta \in L^2(V^0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ eine Folge $(\zeta_N)_{N \in \mathbb{N}}$ mit $\zeta_N(t) \in X_N^t$ für $t \in [0, T]$, so dass für $N \rightarrow \infty$ die folgenden Konvergenzen gelten:

1. $\zeta_N \rightarrow \zeta$ in $L^2(H^3(M))$.
2. $\zeta_N(0) \rightarrow \zeta(0)$ in $H^1(M_0)$.
3. $\partial_t^M \zeta_N \rightarrow \partial_t^M \zeta$ in $L^1(H^1(M))$.

Beweis. 1. Für fast alle $t \in [0, T]$ ist $\zeta(t) \in V_t^0$. Setze $\tilde{\zeta}(t) = \zeta(t) \circ \Phi_t$. Dann ist $\tilde{\zeta}(t) \in H^3(M_0)$ nach dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel. Definiere $\tilde{\zeta}_N(t) = Q_N(\tilde{\zeta}(t))$ und schließlich $\zeta_N(t) = \tilde{\zeta}_N(t) \circ \Phi_t^{-1}$. Es hat ζ_N die folgende Darstellung:

$$\zeta_N(t) = \sum_{j=0}^N (\zeta(t) \circ \Phi_t, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} \varphi_j^0 \circ \Phi_t^{-1}.$$

Folglich ist $\zeta_N(t) \in X_N(t)$ für fast alle $t \in [0, T]$. Die Behauptung ist nun, dass für fast alle $t \in [0, T]$ die Folge $\zeta_N(t) \rightarrow \zeta(t)$ für $N \rightarrow \infty$ in $H^3(M_t)$ konvergiert. Dazu verwendeten wir Transformationssatz 6.8 und Kettenregel:

$$\begin{aligned} \|\zeta_N(t) - \zeta(t)\|_{H^3(M_t)} &\leq C \|\tilde{\zeta}_N(t) - \tilde{\zeta}(t)\|_{H^3(M_0)} = C \|Q_N(\tilde{\zeta}(t)) - \tilde{\zeta}(t)\|_{H^3(M_0)} \\ &= C \|Q_N(\tilde{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(t)) - (\tilde{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(t))\|_{H^3(M_0)}. \end{aligned}$$

Hierbei ist $\bar{\zeta}(t) = \int_{M_0} \tilde{\zeta}(t) d\mathcal{H}^d$ und wir haben die Tatsache verwendet, dass Q_N den Mittelwert nicht verändert. Wir möchten nun Proposition 3.31 auf die Funktion $\tilde{\zeta}(t) - \bar{\zeta}(t)$ anwenden. Es bleibt also die Neumann-Randwertbedingung $\nu_0^* \bullet \nabla^{M_0} \tilde{\zeta}(t) = 0$ fast überall auf ∂M_0 zu zeigen. Dabei bezeichnet ν_0^* die äußere Konormale an ∂M_0 . Dazu überlegen wir uns zunächst mit der Kettenregel:

$$\nu_0^* \bullet \nabla^{M_0} \tilde{\zeta}(t) = \nu_0^* \bullet (D^{M_0} \Phi_t)^T (\nabla^{M_t} \zeta(t)) \circ \Phi_t = D^{M_0} \Phi_t \nu_0^* \bullet (\nabla^{M_t} \zeta(t)) \circ \Phi_t.$$

Weil $\zeta(t) \in V_0^t$ für fast alle $t \in [0, T]$ ist $\nu_t^* \bullet \nabla^{M_t} \zeta(t) = 0$ fast überall auf ∂M_t . Nach Proposition 3.17 ist $D^{M_0} \Phi_t \nu_0^* \in \text{Span}(\nu_t^*)$, somit verschwindet dieser Term ebenfalls. Um schließlich mit dem Konvergenzssatz von Lebesgue $\zeta_N \rightarrow \zeta$ in $L^2(H^3(M))$ zu schließen, benutzen wir erneut den Transformationssatz 6.8 und die Kettenregel sowie Propositionen 3.24 und 3.31 und folgern dann:

$$\|\zeta_N(t) \circ \Phi_t\|_{H^3(M_t)} \leq C \|\tilde{\zeta}_N(t)\|_{H^3(M_0)} \leq C \|\tilde{\zeta}_N(t)\|_{V_0^0} \leq C \|\tilde{\zeta}(t)\|_{V_0^0} \leq C \|\zeta(t)\|_{H^3(M_t)}$$

für fast alle $t \in [0, T]$.

2. Die zweite Behauptung wurde schon in Proposition 3.31 gezeigt.
3. Für die dritte Behauptung reicht es nach dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel sowie Proposition 2.6 zu zeigen, dass $\partial_t \tilde{\zeta}_N \rightarrow \partial_t \tilde{\zeta}(t)$ in $L^1(H^1(M_0))$. Dazu überlegen wir uns

$$\partial_t \tilde{\zeta}_N = \partial_t \sum_{j=0}^N (\tilde{\zeta}(t), \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} \varphi_j^0 = \sum_{j=0}^N (\partial_t \tilde{\zeta}(t), \varphi_j^0)_{L^2(M_0)} \varphi_j^0 = Q_N(\partial_t \tilde{\zeta}(t)).$$

Es ist nach Proposition 2.6 $\partial_t(\zeta \circ \Phi_t) = (\partial_t^M \zeta) \circ \Phi_t$ für fast alle $t \in [0, T]$ in $H^1(M_0)$ nach dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel. Also folgt nach Proposition 3.31 für fast alle $t \in [0, T]$ die Konvergenz $\partial_t(\tilde{\zeta}_N) \rightarrow \partial_t \tilde{\zeta}(t)$ in $H^1(M_0)$. Ferner folgt nach Proposition 3.31 sowie dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel:

$$\|\partial_t \tilde{\zeta}_N(t)\|_{H^1(M_0)} = \|Q_N(\partial_t \tilde{\zeta}(t))\|_{H^1(M_0)} \leq \|\partial_t \tilde{\zeta}(t)\|_{H^1(M_0)} \leq C \|\partial_t^M \zeta\|_{H^1(M_t)}.$$

Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt dann $\partial_t \tilde{\zeta}_N(t) \longrightarrow \partial_t \tilde{\zeta}(t)$ in $L^1(H^1(M_0))$. Daraus folgt wieder nach dem Transformationsatz 6.8 und der Kettenregel:

$$\|\partial_t^M \zeta_N - \partial_t^M \zeta\|_{L^1(H^1(M))} \leq C \|\partial_t \tilde{\zeta}_N - \partial_t \tilde{\zeta}\|_{L^1(H^1(M_0))} \longrightarrow 0.$$

□

Damit können wir zum Limes in den Galerkin-Gleichungen übergehen und erhalten so zu $\delta, \beta > 0$ Lösungen im folgenden Sinne:

Definition 3.33. (Schwache Formulierung $B^{\beta\delta}$) Seien $\beta, \delta > 0$. Sei $B^{\beta\delta}$ der Operator aus Definition 3.14. Sei $\varrho_0 \in H^1(M_0)$. Gesucht ist eine Funktion $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(V)$, die folgende schwache Differentialgleichung löst:

$$-(\zeta(0), \varrho_0)_{H^0} - \int_0^T (\partial_t^M \zeta(t), \varrho(t))_{H^t} dt + \langle B^{\beta\delta}(\varrho), \zeta \rangle_{L^2(V_0)} = 0$$

für alle Testfunktionen $\zeta \in L^2(V_0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ mit $\zeta(T) = 0$.

Satz 3.34. (Lösung des nichtdegenerierten Problems) Unter den getroffenen Voraussetzungen ist zu $\beta, \delta > 0$ der Limes $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(V) \cap L^\infty(H^1(M))$ aus Folgerung 3.25 und Folgerung 3.28 eine Lösung der schwachen Formulierung ($B^{\beta\delta}$) aus Definition 3.33.

Beweis. Mit den zu $\zeta \in L^2(V_0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ mit $\zeta(T) = 0$ in Proposition 3.32 konstruierten Testfunktionen ζ_N können wir wie im Beweis von Satz 3.21 $\zeta = \zeta_N$ setzen und erhalten für fast alle $t \in [0, T]$:

$$\frac{d}{dt} (\zeta_N(t), \varrho_N(t))_{H^t} - (\partial_t^M \zeta_N(t), \varrho_N(t))_{H^t} + \langle B_t^{\beta\delta}(\varrho_N(t)), \zeta_N(t) \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Integriere jetzt über $[0, T]$. Es ist wegen $\zeta(T) = 0$ nach Konstruktion auch $\zeta_N(T) = 0$. Damit ergibt sich:

$$-(\zeta_N(0), \varrho_N(0))_{H^0} - \int_0^T (\partial_t^M \zeta_N(t), \varrho_N(t))_{H^t} dt + \langle B^{\beta\delta}(\varrho_N), \zeta_N \rangle_{L^2(V_0)} = 0.$$

Nach Konstruktion von $\varrho_N(0)$ und Proposition 3.31 konvergiert $\varrho_N(0) \longrightarrow \varrho_0$ in $H^1(M_0)$. Zusammen mit der Konvergenz $\zeta_N(0) \longrightarrow \zeta(0)$ in $H^1(M_0)$ aus Proposition 3.32 können wir im ersten Term zum Limes übergehen. Proposition 3.32 liefert $\partial_t^M \zeta_N \longrightarrow \partial_t^M \zeta$ in $L^1(H^1(M))$ und Folgerung 3.25 liefert $\varrho_N \xrightarrow{*} \varrho_{\beta\delta}$ in $L^\infty(H^1(M))$. Daher können wir im zweiten Term zum Limes übergehen. Aufgrund der starken Konvergenz der beschränkten Mobilität $m^{\beta\delta}(s)$ erhalten wir die Konvergenz des Flusses:

$$m^{\beta\delta}(\varrho_N) \nabla^M (\Delta^M \varrho_N + \varrho_N |K|^2 + k) \rightarrow m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M (\Delta^M \varrho_{\beta\delta} + \varrho_{\beta\delta} |K|^2 + k) \text{ in } L^2(L^2(M))$$

aufgrund der schwachen Konvergenz von $\nabla^M \Delta^M \varrho_N$ in $L^2(L^2(M))$ aus Folgerung 3.25 zusammen mit der starken Konvergenz $\varrho_N \longrightarrow \varrho_{\beta\delta}$ in $L^2(H^1(M))$ aus Folgerung 3.28 und den Eigenschaften von K , die aus Voraussetzung 3.1 an die Fläche folgen. Mit der Konvergenz $\zeta_N \longrightarrow \zeta$ in $L^2(H^3(M))$ aus Proposition 3.32 können wir daher im dritten Term zum Limes übergehen. □

3.2 Grenzübergang zu degenerierten Koeffizienten

Dieser Paragraph befasst sich mit dem zweiten Grenzübergang, nämlich dem Limes $\delta \longrightarrow 0$ in den nichtdegenerierten Koeffizienten. Wie im planaren Fall wird die mathematische Entropieabschätzung bei diesem Grenzübergang eine zentrale Rolle spielen und es wird ein weiterer Lösungsbegriff (C) eingeführt werden. Doch bevor wir mit der mathematischen Entropieabschätzung beginnen, müssen wir von der Formulierung (B) zur klassischen schwachen Formulierung (A) zurückkehren. Dazu werden wir für die Testfunktion in jedem Zeitpunkt ein Poisson-Problem lösen und zeigen, dass dies verträglich mit der Zeitregularität gemacht werden kann.

Rekonstruktion der klassischen schwachen Formulierung

Unser nächstes Ziel besteht darin zu zeigen, dass zu $\beta, \delta > 0$ die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}$ des nichtdegenerierten Problems in der Formulierung $(B^{\beta\delta})$ von Satz 3.34 auch Lösungen des nichtdegenerierten Problems in seiner klassischen schwachen Formulierung $(A^{\beta\delta})$ sind.

Definition 3.35. (Schwache Formulierung $A^{\beta\delta}$) Seien $\beta, \delta > 0$. Sei $\mathcal{A}^{\beta\delta}$ der Operator aus Definition 3.14. Sei $\varrho_0 \in L^2(M_0)$. Gesucht ist eine Funktion $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(V^0)$, die folgende schwache Differentialgleichung löst:

$$-(w(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \mathcal{A}^{\beta\delta}(\varrho), w \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0$$

für alle Testfunktionen $w \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(T) = 0$.

Wenn wir durch das Poisson-Problem Testfunktionen punktweise in der Zeit konstruieren, wird es erforderlich sein zu zeigen, dass die resultierende Testfunktion eine Abschätzung von Differenzenquotienten erfüllt. Dazu wird das folgende Lemma nützlich sein.

Lemma 3.36. (Differenzen von Lösungen des Laplace-Beltrami Operators) Seien M_1, M_2 kompakte, zusammenhängende C^1 -Flächen mit einem Diffeomorphismus $\Phi : M_1 \rightarrow M_2$. Zu Funktionen $f_i \in L^2(M_i), i = 1, 2$ seien $u_i \in H^1(M_i)$ Lösungen des Neumann-Problems $-\Delta^{M_i} u_i = f_i$ im schwachen Sinne. Dann ist folgende Gleichung im schwachen Sinne auf M_1 erfüllt:

$$-\Delta^{M_1}(u_1 - u_2 \circ \Phi) = -\operatorname{div}^{M_1} \left(((D\Phi^{-1})^T D\Phi^{-1}) \circ \Phi \mathcal{J}\Phi - Id \right) \nabla^{M_1}(u_2 \circ \Phi) + f_1 - f_2 \circ \Phi \mathcal{J}\Phi$$

und es existiert eine Konstante $C > 0$, so dass folgende Abschätzung gilt:

$$\begin{aligned} \|\nabla^{M_1}(u_1 - u_2 \circ \Phi)\|_{L^2(M_1)} &\leq \|Id - ((D\Phi^{-1})^T D\Phi^{-1}) \circ \Phi \mathcal{J}\Phi\|_{C^0(M_1)} \|\nabla^{M_1}(u_2 \circ \Phi)\|_{L^2(M_1)} \\ &\quad + C(\|\mathcal{J}\Phi - 1\|_{C^0(M_1)} \|f_2 \circ \Phi\|_{L^2(M_1)} + \|f_1 - f_2 \circ \Phi\|_{L^2(M_1)}). \end{aligned}$$

Es ist $C > 0$ die Poincaré-Konstante für verschwindenden Mittelwert von M_1 und insbesondere von $u_i, f_i, i = 1, 2$ unabhängig.

Beweis. Sei $v \in H^1(M_1)$ eine Testfunktion. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\int_{M_1} \nabla^{M_1} u_1 \bullet \nabla^{M_1} v d\mathcal{H}^d = \int_{M_1} f_1 v d\mathcal{H}^d. \quad (\star)$$

Zu $v \in H^1(M_1)$ ist $w = v \circ \Phi^{-1} \in H^1(M_2)$ nach dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel. Damit gilt:

$$\int_{M_2} \nabla^{M_2} u_2 \bullet \nabla^{M_2} w d\mathcal{H}^d = \int_{M_2} f_2 w d\mathcal{H}^d.$$

Bezeichnen wir $\tilde{u}_2 = u_2 \circ \Phi$ und $\tilde{f}_2 = f_2 \circ \Phi$, dann folgt nach dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel:

$$\int_{M_1} (D\Phi^{-1})^T \circ \Phi \nabla^{M_1} \tilde{u}_2 \bullet (D\Phi^{-1})^T \circ \Phi \nabla^{M_1} v \mathcal{J}\Phi d\mathcal{H}^d = \int_{M_1} \tilde{f}_2 v \mathcal{J}\Phi d\mathcal{H}^d. \quad (\dagger)$$

Bezeichnen wir weiterhin $A = (D\Phi^{-1}(D\Phi^{-1})^T) \circ \Phi$, dann folgt die erste Behauptung, wenn wir die Gleichungen (\star) und (\dagger) voneinander abziehen und die richtigen Terme ergänzen und wieder abziehen:

$$\int_{M_1} \nabla^{M_1} v \bullet \nabla^{M_1}(u_1 - \tilde{u}_2) d\mathcal{H}^d = \int_{M_1} \nabla^{M_1} v \bullet (A\mathcal{J}\Phi - Id) \nabla^{M_1} \tilde{u}_2 d\mathcal{H}^d + \int_{M_1} (f_1 - \tilde{f}_2 \mathcal{J}\Phi) v d\mathcal{H}^d.$$

Bezeichnen wir die Mittelwerte auf M_1 mit $\bar{u}_1 = \int_{M_1} u_1 d\mathcal{H}^d$ und $\bar{u}_2 = \int_{M_1} \tilde{u}_2 d\mathcal{H}^d$. Setzen wir nun $v = u_1 - \tilde{u}_2 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$, dann hat diese Testfunktion auf M_1 verschwindenden Mittelwert und die

zweite Behauptung folgt mit der Hölder- und der Poincaré-Ungleichung aus Satz 6.13 wenn wir einen Faktor kürzen:

$$\begin{aligned}
\|\nabla^{M_1}(u_1 - \tilde{u}_2)\|_{L^2(M_1)}^2 &\leq \|\nabla^{M_1}(u_1 - \tilde{u}_2)\|_{L^2(M_1)} \|Id - A\mathcal{J}\Phi\|_{C^0(M_1)} \|\nabla^{M_1}\tilde{u}_2\|_{L^2(M_1)} \\
&\quad + \|u_1 - \tilde{u}_2 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_{L^2(M_1)} \|\mathcal{J}\Phi - 1\|_{C^0(M_1)} \|\tilde{f}_2\|_{L^2(M_1)} \\
&\quad + \|u_1 - \tilde{u}_2 - (\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\|_{L^2(M_1)} \|f_1 - \tilde{f}_2\|_{L^2(M_1)} \\
&\leq \|\nabla^{M_1}(u_1 - \tilde{u}_2)\|_{L^2(M_1)} \left(\|Id - A\mathcal{J}\Phi\|_{C^0(M_1)} \|\nabla^{M_1}\tilde{u}_2\|_{L^2(M_1)} \right. \\
&\quad \left. + C\|\mathcal{J}\Phi - 1\|_{C^0(M_1)} \|\tilde{f}_2\|_{L^2(M_1)} + C\|f_1 - \tilde{f}_2\|_{L^2(M_1)} \right).
\end{aligned}$$

□

Das folgende Resultat für diskrete partielle Integration auf evolvierenden Flächen wird ebenfalls von Nutzen sein.

Proposition 3.37. (Diskrete partielle Integration auf evolvierenden Flächen) Sei $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d+1}$ eine d -dimensionale evolvierende Fläche der Klasse $C^0(C^1)$ mit einer Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ wie in Definition 3.2. Zu $h \in \mathbb{R}$ setze $\Phi_t^h = \Phi_{t+h} \circ \Phi_t^{-1}$. Dann gilt für $f, g \in L_{loc}^2(L^2(M))$ und $a, b \in \mathbb{R}$ folgende Formel für die diskrete partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{M_t} f(t) \frac{g(t+h) \circ \Phi_t^h - g(t)}{h} d\mathcal{H}^d dt &= - \int_a^b \int_{M_t} \frac{f(t) - f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} \mathcal{J}\Phi_t^{-h}}{h} g(t) d\mathcal{H}^d dt \\
&\quad + \int_b^{b+h} \int_{M_t} f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} g(t) \mathcal{J}\Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt - \int_a^{a+h} \int_{M_t} f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} g(t) \mathcal{J}\Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt.
\end{aligned}$$

Beweis. Nach dem Transformationssatz 6.8:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{M_t} f(t) \frac{g(t+h) \circ \Phi_t^h - g(t)}{h} d\mathcal{H}^d dt &= \frac{1}{h} \int_a^b \int_{M_{t+h}} f(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h} g(t+h) \mathcal{J}\Phi_{t+h}^{-h} d\mathcal{H}^d dt \\
&\quad - \frac{1}{h} \int_a^b \int_{M_t} f(t) g(t) d\mathcal{H}^d dt.
\end{aligned}$$

Nach einer Indexverschiebung:

$$\frac{1}{h} \int_a^b \int_{M_{t+h}} f(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h} g(t+h) \mathcal{J}\Phi_{t+h}^{-h} d\mathcal{H}^d dt = \frac{1}{h} \int_{a+h}^{b+h} \int_{M_t} f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} g(t) \mathcal{J}\Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt.$$

Wenn wir alles zusammenfassen und die fehlenden Terme ergänzen:

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{M_t} f(t) \frac{g(t+h) \circ \Phi_t^h - g(t)}{h} d\mathcal{H}^d dt &= - \int_a^b \int_{M_t} \frac{f(t) - f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} \mathcal{J}\Phi_t^{-h}}{h} g(t) d\mathcal{H}^d dt \\
&\quad + \int_b^{b+h} \int_{M_t} f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} g(t) \mathcal{J}\Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt - \int_a^{a+h} \int_{M_t} f(t-h) \circ \Phi_t^{-h} g(t) \mathcal{J}\Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt.
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.38. (Lösung des Poisson-Problems für Testfunktionen) Sei M wie in Voraussetzung 3.1 und 3.2 sowie $w \in W^{1,1}(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ mit $\int_{M_t} w(t) d\mathcal{H}^d = 0$ für alle $t \in [0, T]$. Dann existiert ein $\zeta \in W^{1,1}(H^1(M)) \cap L^2(V^0)$ mit $-\Delta^M \zeta(t) = w(t)$ für fast alle $t \in [0, T]$.

Beweis. Für $T < t \leq T + \epsilon$ mit $\epsilon > 0$ setzen wir w durch $w(T+h) = w(T-h)$ für $0 \leq h \leq \epsilon$ fort. Es ist dann $w(t) \in L^2(M_t)$ für alle und $w(t) \in H^1(M_t)$ für fast alle $t \in [0, T + \epsilon]$. Ferner ist die Kompatibilitätsbedingung erfüllt. Wir können daher $-\Delta^M \zeta(t) = w(t)$ mit Neumann-Randwertbedingungen und verschwindendem Mittelwert von $\zeta(t)$ für alle $t \in [0, T + \epsilon]$ im schwachen Sinn lösen. Zur Messbarkeit definiere vermöge dieser Zuordnung die Abbildung $\Theta(t) : U_t \rightarrow H^1(M_0)$ durch $w(t) \circ \Phi_t \mapsto \zeta(t) \circ \Phi_t$

wobei $U_t = \{\tilde{w} \in L^2(M_0) \mid (\mathcal{J}\Phi_t, \tilde{w})_{L^2(M_0)} = 0\}$. Man sieht leicht mit Lemma 3.36 ein, dass Θ stetig in $t \in [0, T + \epsilon]$ und $\Theta(t)$ stetig von U_t nach $H^1(M_0)$ ist. Messbarkeit von $w \circ \Phi_t$ garantiert die punktweise Approximierbarkeit von $w \circ \Phi_t$ durch Treppenfunktionen. Mit den Eigenschaften von Θ lässt sich leicht die punktweise Approximierbarkeit durch Treppenfunktionen und folglich Messbarkeit von $\zeta \circ \Phi_t$ zeigen. Die Norm von ζ lässt sich mit L^2 -Regularitätstheorie für den Laplace-Beltrami Operator abschätzen durch $\|\zeta(t)\|_{H^3(M_t)} \leq C\|w(t)\|_{H^1(M_t)}$, wobei die Konstante von der $C^{2,1}$ -Norm der Φ_t abhängt und daher nach Voraussetzung 3.2 gleichmäßig in der Zeit gewählt werden kann. Damit ist also $\zeta \in L^2(H^3(M))$. Um zu zeigen, dass $\zeta \in W^{1,1}(H^1(M))$ im Sinne von Definition 3.9 ist, zeigen wir, dass Differenzenquotienten von ζ Cauchy-Folgen sind. Zu $h > 0$ verwenden wir mit $\Phi_t^h = \Phi_{t+h} \circ \Phi_t^{-1}$ folgende Schreibweise für Differenzenquotienten:

$$\partial_t^{hM} f(t) = \frac{f(t+h) \circ \Phi_t^h - f(t)}{h}.$$

Ferner schreiben wir abkürzend $A_t^h = (D\Phi_{t+h}^{-h}(D\Phi_{t+h}^{-h})^T) \circ \Phi_t^h$ dann folgt, wenn wir Lemma 3.36 auf $M_1 = M_t, M_2 = M_{t+h}, u_1 = \zeta(t), u_2 = \zeta(t+h), f_1 = w(t), f_2 = w(t+h), \Phi = \Phi_t^h$ anwenden, die folgende Gleichung für fast alle $t \in [0, T]$ und fast alle $\epsilon > h > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \nabla^M v \bullet \nabla^M \partial_t^{hM} \zeta(t) d\mathcal{H}^d &= - \int_{M_t} \nabla^M v \bullet \partial_t^{hM} (A_t^h \mathcal{J}\Phi_t^h) \nabla^M (\zeta(t+h) \circ \Phi_t^h) d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_{M_t} v \partial_t^{hM} (w(t) \mathcal{J}\Phi_t^h) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Um einen Grenzwert für $h \rightarrow 0$ zu finden, zeigen wir nun, dass die Folge der Differenzenquotienten eine Cauchy-Folge bilden. Wir betrachten dazu zwei verschiedene Zeitschrittweiten $\epsilon > h_1, h_2 > 0$ und ziehen für diese die Gleichungen voneinander ab:

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \nabla^M v \bullet \nabla^M (\partial_t^{h_1M} \zeta(t) - \partial_t^{h_2M} \zeta(t)) d\mathcal{H}^d &= \int_{M_t} v (\partial_t^{h_1M} (w(t) \mathcal{J}\Phi_t^{h_1}) - \partial_t^{h_2M} (w(t) \mathcal{J}\Phi_t^{h_2})) d\mathcal{H}^d \\ &\quad - \int_{M_t} \nabla^M v \bullet \left(\partial_t^{h_1M} (A_t^{h_1} \mathcal{J}\Phi_t^{h_1}) \nabla^M (\zeta(t+h_1) \circ \Phi_t^{h_1}) - \partial_t^{h_2M} (A_t^{h_2} \mathcal{J}\Phi_t^{h_2}) \nabla^M (\zeta(t+h_2) \circ \Phi_t^{h_2}) \right) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Die Abschätzung nun ist analog zum zweiten Teil im Beweis von Lemma 3.36. Definiere zu $h = h_1, h_2$ die Mittelwerte der Differenzenquotienten durch $\bar{\zeta}_t^h = \int_{M_t} \partial_t^{hM} \zeta(t) d\mathcal{H}^d$. Dann setze als Testfunktion $v = \partial_t^{h_1M} \zeta(t) - \partial_t^{h_2M} \zeta(t) - \bar{\zeta}_t^{h_1} + \bar{\zeta}_t^{h_2}$. Weiterhin bezeichnen wir $\tilde{\zeta}(t+h) = \zeta(t+h) \circ \Phi_t^h$ und analog $\tilde{w}(t+h)$. Dann folgt mit Cauchy-Schwarz und der Poincaré-Ungleichung für verschwindenden Mittelwert aus Satz 6.13, wenn wir einen Faktor kürzen, die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\nabla^M (\partial_t^{h_1M} \zeta(t) - \partial_t^{h_2M} \zeta(t))\|_{L^2(M_t)} &\leq \|\partial_t^{h_1M} (A_t^{h_1} \mathcal{J}\Phi_t^{h_1}) - \partial_t^{h_2M} (A_t^{h_2} \mathcal{J}\Phi_t^{h_2})\|_{C^0(M_t)} \|\nabla^M \tilde{\zeta}(t+h_1)\|_{L^2(M_t)} \\ &\quad + \|\partial_t^{h_2M} (A_t^{h_2} \mathcal{J}\Phi_t^{h_2})\|_{C^0(M_t)} \|\nabla^M (\tilde{\zeta}(t+h_1) - \tilde{\zeta}(t+h_2))\|_{L^2(M_t)} \\ &\quad + C \|\partial_t^{h_1M} w(t) - \partial_t^{h_2M} w(t)\|_{L^2(M_t)} \\ &\quad + C \|\partial_t^{h_1M} \mathcal{J}\Phi_t\|_{C^0(M_t)} \|\tilde{w}(t+h_1) - \tilde{w}(t+h_2)\|_{L^2(M_t)} \\ &\quad + C \|\partial_t^{h_1M} \mathcal{J}\Phi_t - \partial_t^{h_2M} \mathcal{J}\Phi_t\|_{C^0(M_t)} \|\tilde{w}(t+h_2)\|_{L^2(M_t)}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für fast alle $t \in [0, T]$. Wenn wir dann in der Zeit über $[0, T]$ integrieren folgt, dass die rechte Seite für $h_1, h_2 \rightarrow 0$ gegen 0 konvergiert. In der Tat, denn Differenzenquotienten von A_t^h und $\mathcal{J}\Phi_t^h$ sind in der C^0 -Norm Cauchyfolgen nach Voraussetzung 3.2 an M . Ferner sind nach Voraussetzungen an w und dem bereits gezeigten für ζ zusammen mit der Kettenregel und dem Transformationssatz 6.8 die Normen $\|\nabla^M \tilde{\zeta}(t+h_1)\|_{L^2(M_t)}$ und $\|\tilde{w}(t+h_2)\|_{L^2(M_t)}$ integrierbar in der Zeit. Weiterhin konvergieren Differenzen dieser Funktionen zu unterschiedlichen Zeitpunkten $t+h_1$ und $t+h_2$ in der $L^1(L^2)$ -Norm gegen 0. Zusammen mit der Poincaré-Ungleichung für verschwindenden Mittelwert aus Satz 6.13 folgt also, dass die Folge $\omega_0^h = \partial_t^{hM} \zeta - \bar{\zeta}_t^h$ für $h \rightarrow 0$ eine Cauchy-Folge in $L^1(H^1(M))$ ist und wegen Vollständigkeit einen Limes $\omega_0 \in L^1(H^1(M))$ besitzt.

Um zu zeigen, dass $\partial_t^{h,M}\zeta$ eine Cauchy-Folge ist zeigen wir als nächstes, dass die Mittelwerte $\bar{\zeta}_{/t}^h$ in $L^1([0, T])$ konvergieren. Aus der Tatsache, dass $\zeta(t)$ und $\zeta(t+h)$ für fast alle $t \in [0, T]$, $\epsilon > h > 0$ verschwindenden Mittelwert auf M_t bzw. M_{t+h} besitzen, folgt dann mit dem Transformationssatz 6.8 für Flächen:

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_{/t}^h &= \frac{1}{h} \int_{M_t} (\zeta(t+h) \circ \Phi_t^h - \zeta(t)) d\mathcal{H}^d = \frac{1}{h} \int_{M_t} \zeta(t+h) \circ \Phi_t^h d\mathcal{H}^d \\ &= \frac{1}{h} \frac{1}{\mathcal{H}^d(M_t)} \int_{M_{t+h}} \zeta(t+h) \mathcal{J}\Phi_{t+h}^{-h} d\mathcal{H}^d = \frac{1}{\mathcal{H}^d(M_t)} \int_{M_{t+h}} \zeta(t+h) \frac{\mathcal{J}\Phi_{t+h}^{-h} - 1}{h} d\mathcal{H}^d. \quad (\star)\end{aligned}$$

Damit liegt es nah, dass $\bar{\zeta}_{/t}^h \rightarrow \bar{\zeta}_{/t}$ in $L^1[0, T]$ für $h \rightarrow 0$ gilt, wobei $\bar{\zeta}_{/t}(t) = \int_{M_t} \zeta(t) v_n(t) k(t) d\mathcal{H}^d$. In der Tat:

$$\int_0^T |\bar{\zeta}_{/t}^h - \bar{\zeta}_{/t}(t)| dt \leq \int_0^T |\bar{\zeta}_{/t}^h - \bar{\zeta}_{/t}(t+h)| dt + \int_0^T |\bar{\zeta}_{/t}(t+h) - \bar{\zeta}_{/t}(t)| dt.$$

Der zweite Term auf der rechten Seite konvergiert für $h \rightarrow 0$ gegen 0, weil $\zeta v_n k \in L^1(L^1(M))$. Den ersten schätzen wir weiter ab und benutzen (\star) :

$$\begin{aligned}\int_0^T |\bar{\zeta}_{/t}^h - \bar{\zeta}_{/t}(t+h)| dt &\leq \int_0^T \int_{M_{t+h}} |\zeta(t+h)| \left| \left(\frac{\mathcal{J}\Phi_{t+h}^{-h} - 1}{h} \right) \frac{\mathcal{H}^d(M_{t+h})}{\mathcal{H}^d(M_t)} - v_n(t+h)k(t+h) \right| d\mathcal{H}^d dt \\ &\leq C \|\zeta\|_{L^1(L^1(M))} \left\| \left(\frac{\mathcal{J}\Phi_{t+h}^{-h} - 1}{h} \right) \frac{\mathcal{H}^d(M_{t+h})}{\mathcal{H}^d(M_t)} - v_n k \right\|_{C^0(C^0(M))}.\end{aligned}$$

und die rechte Seite konvergiert gegen 0 nach der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 und der Stetigkeit von M . Damit haben wir die Konvergenz $\partial_t^{h,M}\zeta \rightarrow \omega = \omega_0 + \bar{\zeta}_{/t}$ in $L^1(H^1(M))$ gezeigt. Es verbleibt zu zeigen, dass tatsächlich ω die distributionelle Zeitableitung von ζ ist. Dazu sei $\eta \in C_0^\infty(M)$ eine Testfunktion. Dann folgt durch diskrete partielle Integration wie in Proposition 3.37, falls wir zu $\eta \in C_0^\infty(M)$ die Schrittweite $h > 0$ klein genug wählen, dass Randterme in der Zeit verschwinden:

$$\int_0^T \int_{M_t} \eta(t) \frac{\zeta(t+h) \circ \Phi_t^h - \zeta(t)}{h} d\mathcal{H}^d dt = - \int_0^T \int_{M_t} \zeta(t) \frac{\eta(t) - \eta(t-h) \circ \Phi_t^{-h}}{h} \mathcal{J}\Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt.$$

Wenn wir in dieser Identität zum Limes $h \rightarrow 0$ übergehen folgt aufgrund der Differenzierbarkeit von η und der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 zusammen mit der zuvor gezeigten Konvergenz von $\partial_t^{h,M}\zeta \rightarrow \omega$ schließlich:

$$\int_0^T \int_{M_t} \eta \omega d\mathcal{H}^d dt = - \int_0^T \int_{M_t} \zeta (\partial_t^M \eta - \eta v_n k) d\mathcal{H}^d dt,$$

für alle $\eta \in C_0^\infty(M)$. Damit ist ω schwache Zeitableitung von ζ auf der evolvierenden Fläche M im Sinne von Definition 3.9. \square

Folgende Proposition zeigt, wie schwache Formulierung (B) Formulierung (A) impliziert. Wir zeigen hier nur diese Richtung, die für den Beweis des Existenzsatzes erforderlich ist. Die Rückrichtung wurde für eindimensionale Gebiete in [Rai] gezeigt. Wir gehen davon aus, dass für höher dimensionale Gebiete bzw. Flächen der Beweis der Rückrichtung analog geht, jedoch mit einem aufwändigeren Approximationsargument.

Proposition 3.39. (Rekonstruktion der Formulierung A) Sei M wie in Voraussetzung 3.1 und 3.2. Sei $\varrho_0 \in H^1(M_0)$. Sei $\varrho \in L^\infty(H^1(M))$ mit $\int_{M_t} \varrho(t) d\mathcal{H}^d = \int_{M_0} \varrho_0 d\mathcal{H}^d$ für f.a. $t \in [0, T]$. Es sei $\mathcal{A} \in L^2(H^1(M))^*$ ein Operator mit $\langle \mathcal{A}, c \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0$ für räumlich konstante Funktionen $c \in L^2([0, T])$. Definiere $\mathcal{B} \in L^2(V_0)^*$ durch:

$$\langle \mathcal{B}, \zeta \rangle_{L^2(V_0)} = - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet (2v_n K \nabla^M \varrho + \varrho \nabla^M (v_n k)) d\mathcal{H}^d dt - \langle \mathcal{A}, \Delta^M \zeta \rangle_{L^2(H^1(M))}$$

für $\zeta \in L^2(V_0)$. Es gelte

$$-(\zeta(0), \varrho_0)_{H^0} - \int_0^T (\partial_t^M \zeta(t), \varrho(t))_{H^1} dt + \langle \langle \mathcal{B}, \zeta \rangle \rangle_{L^2(V_0)} = 0$$

für alle Testfunktionen $\zeta \in L^2(V^0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ mit $\zeta(T) = 0$. Dann ist ϱ Lösung des folgenden schwachen Problems:

$$-(w(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \langle \mathcal{A}, w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0$$

für alle Testfunktionen $w \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(T) = 0$.

Beweis. Sei $w \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(T) = 0$. Zunächst gelte $\int w(t) d\mathcal{H}^d = 0$ für $t \in [0, T]$. Von dieser Forderung lösen wir uns später. Dann können wir das in Lemma 3.38 konstruierte $\zeta \in L^2(V^0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ mit $-\Delta^M \zeta(t) = w(t)$ einsetzen:

$$\begin{aligned} & -(\zeta(0), \varrho_0)_{H^1(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M \zeta, \varrho)_{H^1(M_t)} dt \\ & - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet (2\nu_n K \nabla^M \varrho + \varrho \nabla^M (\nu_n k)) d\mathcal{H}^d dt - \langle \langle \mathcal{A}, \Delta^M \zeta \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich trivialerweise für den elliptischen Term:

$$-\langle \langle \mathcal{A}, \Delta^M \zeta \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = \langle \langle \mathcal{A}, w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))}.$$

Für die verbleibenden Terme beachten wir, dass aufgrund der Regularität von w nach Konstruktion von ζ für alle $t \in [0, T]$ gilt:

$$\int_{M_t} \nabla^M \zeta(t) \bullet \nabla^M v d\mathcal{H}^d = \int_{M_t} w(t) v d\mathcal{H}^d \text{ für } v \in H^1(M_t). \quad (\star)$$

In der Tat, denn es ist $w(t) \in L^2(M_t)$ für alle $t \in [0, T]$, somit macht die schwache Formulierung der Poisson-Gleichung für alle $t \in [0, T]$ Sinn. Damit folgt die Behauptung für die Anfangsdaten aus (\star) wenn wir $v = \varrho_0 \in H^1(M_0)$ setzen. Zu $h > 0$ verwenden wir wieder wie in Lemma 3.38 folgende Schreibweise für Differenzenquotienten:

$$\partial_t^{h,M} f(t) = \frac{f(t+h) \circ \Phi_t^h - f(t)}{h}.$$

Ferner schreiben wir abkürzend $A_t^h = (D\Phi_{t+h}^{-h} (D\Phi_{t+h}^{-h})^T) \circ \Phi_t^h$. Als nächstes wenden wir die erste Aussage aus Lemma 3.36 auf $M_1 = M_t, M_2 = M_{t+h}, u_1 = \zeta(t), u_2 = \zeta(t+h), f_1 = w(t), f_2 = w(t+h)$ an. Wenn wir dann als Testfunktion $\varrho(t) \in H^1(M_t)$ für fast alle $t \in [0, T]$ wählen und durch $h > 0$ teilen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{M_t} \nabla^M \varrho(t) \bullet \nabla^M \partial_t^{h,M} \zeta(t) d\mathcal{H}^d &= - \int_{M_t} \nabla^M \varrho(t) \bullet \partial_t^{h,M} (A_t^h \mathcal{J} \Phi_t^h) \nabla^M (\zeta(t+h) \circ \Phi_t^h) d\mathcal{H}^d \\ &+ \int_{M_t} \varrho(t) \partial_t^{h,M} (w(t) \mathcal{J} \Phi_t^h) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt über $[0, T]$ integrieren, können wir zum Limes $h \rightarrow 0$ übergehen und die Eulerschen Entwicklungsformeln aus Satz 6.11 benutzen. Der Anteil in Normalenrichtung verschwindet dabei:

$$\int_{M_t} \nabla^M \varrho(t) \bullet (\nabla^M \partial_t^M \zeta + 2\nu_n K \nabla^M \zeta + \nu_n k \nabla^M \zeta) d\mathcal{H}^d = \int_{M_t} \varrho(t) (\partial_t^M w + \nu_n k w) d\mathcal{H}^d.$$

Die letzte Gleichung ist, wenn wir $w(t) = -\Delta^M \zeta$ im zweiten Term wieder ersetzen, nach einer partiellen Integration äquivalent zu:

$$\int_{M_t} \nabla^M \varrho(t) \bullet (\nabla^M \partial_t^M \zeta + 2\nu_n K \nabla^M \zeta) d\mathcal{H}^d = \int_{M_t} \varrho(t) (\partial_t^M w + \nabla^M (\nu_n k) \nabla^M \zeta) d\mathcal{H}^d.$$

Damit können wir den verbleibenden Term in der Gleichung identifizieren. Im letzten Schritt müssen wir uns noch von der zunächst getroffenen Voraussetzung, dass w verschwindenden Mittelwert hat, lösen. Sei dazu $w \in W^{1,1}(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ mit $w(T) = 0$ und beliebigem Mittelwert. Bezeichne $\bar{w}(t) = \int_{M_t} w(t) dt$. Dann ist $\tilde{w} = w - \bar{w}$ für das bereits gezeigte eine zulässige Testfunktion. Dann gilt:

$$-(w(0) - \bar{w}(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w - \partial_t^M \bar{w}, \varrho)_{L^2(M_t)} dt + \langle \mathcal{A}(\varrho), w - \bar{w} \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0.$$

Im elliptischen Term verschwindet \bar{w} nach Voraussetzung. Für die verbleibenden \bar{w} -Terme überlegen wir uns aufgrund der Tatsache, dass $\varrho(t)$ für f.a. $t \in [0, T]$ konstante Masse $R = \int_{M_0} \varrho d\mathcal{H}^d$ hat:

$$(\bar{w}(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} + \int_0^T (\partial_t^M \bar{w}, \varrho)_{L^2(M_t)} dt = R\bar{w}(0) + R \int_0^T \frac{d}{dt} \bar{w}(t) dt = 0.$$

□

Damit folgt die Existenzaussage für die übliche schwache Formulierung.

Folgerung 3.40. (Lösung der Formulierung $\mathcal{A}^{\beta\delta}$) *Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert zu $\beta, \delta > 0$ eine Lösung $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(V) \cap L^\infty(H^1(M))$ der folgenden schwachen Formulierung:*

$$-(w(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \mathcal{A}^{\beta\delta}(\varrho), w \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0,$$

für Testfunktionen $w \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(T) = 0$.

Mathematische Entropieabschätzung

Beim Übergang zum Limes $\delta \rightarrow 0$ verlieren wir gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen in $L^2(H^3(M))$. Um dennoch den Fluss im Limes identifizieren zu können, brauchen wir zusätzliche Information über die Konvergenz von $\varrho_{\beta\delta}$. Hierfür ist eine weitere Abschätzung erforderlich, die wir mathematische Entropieabschätzung nennen. Es wird Sinn machen im parabolischen Teil die konvektive Ableitung $\frac{D^M}{Dt}$ statt ∂_t^M zu führen (Siehe Definition 2.5). Der entsprechende Lösungsbegriff zu Definition 3.35 ist folgende Formulierung ($\tilde{\mathcal{A}}^{\beta\delta}$), die einfach eine Umformulierung bedeutet:

$$-(w(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T \left(\frac{D^M}{Dt} w(t), \varrho_{\beta\delta}(t) \right)_{L^2(M_t)} dt + \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}), w \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0 \quad (3.2.1)$$

für alle Testfunktionen $w \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(T) = 0$. Hierbei ist der modifizierte elliptische Operator $\tilde{\mathcal{A}}^{\beta\delta} : L^2(V) \rightarrow L^2(H^1(M))^*$ definiert durch:

$$\langle \tilde{\mathcal{A}}^{\beta\delta}(\varrho), w \rangle_{L^2(H^1(M))} = \langle \mathcal{A}^{\beta\delta}(\varrho), w \rangle_{L^2(H^1(M))} + \int_0^T \int_{M_t} \varrho(t) v^* \bullet \nabla^M w(t) d\mathcal{H}^d dt.$$

Damit wir für weitere Abschätzungen geeignete Testfunktionen einsetzen können, ist es erforderlich diese in der Zeit zu regularisieren.

Proposition 3.41. (Zeitglättung von Testfunktionen) *Sei M eine kompakte, evolvierende Fläche der Klasse $C^1(C^1)$ mit Diffeomorphismen $\Phi_t^* : M_0 \rightarrow M_t, t \in [0, T]$ wie in Definition 3.2. Zu $t, s \in [0, T]$ setze $\Phi_t^{*s-t} = \Phi_s \circ \Phi_t^{-1}$. Sei $1 \leq p, q < \infty$. Sei $w \in L^p(W^{1,q}(M))$. Dann ist die zu $t_0 \in [0, T]$ und zur Schrittweite $h > 0$ durch:*

$$w_h^{t_0}(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} w(s) \circ \Phi_t^{*s-t} \chi_{(-\infty, t_0]}(s) ds$$

definierte Testfunktion $w_h^{t_0} \in W^{1,p}(W^{1,q}(M))$. Weiterhin ist $w_h^{t_0}(t_0) = 0$ und es gilt $w_h^{t_0} \rightarrow w \chi_{[0, t_0]}$ in $L^p(W^{1,q}(M))$.

Beweis. Wenn wir die Zeitableitung $\frac{D^M}{Dt} w_h^{t_0}$ berechnen, verschwindet mit Proposition 2.6 der Term in dem die Zeitableitung auf den Integranden fällt, und wir erhalten mit $\chi_{(-\infty, t_0]}(t+h) = \chi_{(-\infty, t_0-h]}(t)$:

$$\frac{D^M}{Dt} w_h^{t_0}(t) = \frac{1}{h} \left(w(t+h) \circ \Phi_t^{*h} - w(t) \right) \chi_{(-\infty, t_0-h]}(t) - w(t) \frac{1}{h} \chi_{[t_0-h, t_0)}(t). \quad (3.2.2)$$

Die Behauptung $w_h^{t_0}, \frac{D^M}{Dt} w_h^{t_0} \in L^p(W^{1,q}(M))$ folgt dann nach der Kettenregel aus der gleichmäßigen Beschränktheit der $D\Phi_t^{*h}$ bzw $D\Phi_t^{*s-t}$. Die Tatsache $w_h^{t_0}(t_0) = 0$ ist klar. Für $h \rightarrow 0$ folgt die Konvergenz $w_h^{t_0} \rightarrow w \chi_{[0, t_0]}$ aus der Faltungsabschätzung. \square

Die wie oben regularisierten Testfunktionen sind dann in der Evolutionsgleichung gemäß folgender Proposition zu handhaben.

Proposition 3.42. (Diskrete Partielle Integration für zeitgeglättete Testfunktionen) Sei M eine kompakte, evolvierende $C^1(C^1)$ -Fläche mit Diffeomorphismen $\Phi_t^* : M_0 \rightarrow M_t, t \in [0, T]$ wie in Definition 3.2. Zu $h \in \mathbb{R}$ setze $\Phi_t^{*h} = \Phi_{t+h}^* \circ \Phi_t^{*-1}$. Zu $w \in L^2(L^2(M))$ und $t_0 \in [0, T]$ und $h > 0$ konstruiere $w_h^{t_0}$ wie in Proposition 3.41. Dann gilt für $\varrho \in L^2(L^2(M))$ und $\varrho_0 \in L^2(M_0)$, wenn wir ϱ_0, M_t, Φ_t^* für $t \leq 0$ konstant fortsetzen, die folgende diskrete partielle Integration:

$$- \int_0^T \int_{M_t} \left(\frac{D^M}{Dt} w_h^{t_0}(t) \right) \varrho(t) d\mathcal{H}^d dt - \int_{M_0} w_h^{t_0}(0) \varrho_0 d\mathcal{H}^d = \int_0^{t_0} \int_{M_t} w(t) \frac{\varrho(t) - \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt.$$

Beweis. Es ist nach Gleichung (3.2.2) aus dem Beweis von Proposition 3.41:

$$- \int_0^T \int_{M_t} \frac{D^M}{Dt} w_h^{t_0}(t) \varrho(t) d\mathcal{H}^d dt = - \int_0^{t_0-h} \int_{M_t} \frac{w(t+h) \circ \Phi_t^{*h} - w(t)}{h} \varrho(t) d\mathcal{H}^d dt + \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{M_t} \varrho(t) w(t) d\mathcal{H}^d dt.$$

Ferner ist nach Proposition 3.37 angewendet auf Φ_t^* :

$$\begin{aligned} - \int_0^{t_0-h} \int_{M_t} \frac{w(t+h) \circ \Phi_t^{*h} - w(t)}{h} \varrho(t) d\mathcal{H}^d dt &= \int_0^{t_0-h} \int_{M_t} \frac{\varrho(t) - \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} w(t) d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{M_t} \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} w(t) \mathcal{J} \Phi_t^{*-h} d\mathcal{H}^d dt + \int_0^h \int_{M_t} \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} w(t) \mathcal{J} \Phi_t^{*-h} d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Wir sehen an dieser Stelle, dass die Terme am Endzeitpunkt sich zu einem weiteren Differenzenquotient wie in der rechten Seite der Behauptung zusammensetzen. Den Term vom Anfangszeitpunkt betrachten wir weiter, indem wir mit dem Transformationsatz 6.8 auf M_0 transformieren und die Konstruktion des $w_h^{t_0}$ verwenden:

$$\begin{aligned} \int_0^h \int_{M_t} \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} w(t) \mathcal{J} \Phi_t^{*-h} d\mathcal{H}^d dt &= \int_0^h \int_{M_0} \varrho(t-h) \circ \Phi_{t-h}^* w(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_{t-h}^* d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_0^h \int_{M_0} \varrho_0 w(t) \circ \Phi_t^* d\mathcal{H}^d dt = \int_{M_0} w_h^{t_0}(0) \varrho_0 d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Wenn wir alles zusammenfassen folgt die Behauptung:

$$- \int_0^T \int_{M_t} \left(\frac{D^M}{Dt} w_h^{t_0} \right) \varrho d\mathcal{H}^d dt = \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{\varrho(t) - \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} w(t) d\mathcal{H}^d dt + \int_{M_0} w_h^{t_0}(0) \varrho_0 d\mathcal{H}^d dt. \quad \square$$

Wie im planaren Fall definieren wir zu den regularisierten Mobilitäten die entsprechende regularisierte (mathematische) Entropie.

Definition 3.43. (Regularisierte mathematische Entropie) Sei $A > 0$ wie in Definition 3.7. Dann definieren wir für $\beta, \delta > 0$ zu den approximierenden Mobilitäten aus Definition 3.10 folgende regularisierte mathematische Entropie zu $s \in \mathbb{R}$:

$$g^{\beta\delta}(s) = \int_A \frac{1}{m^{\beta\delta}(r)} dr, \quad G^{\beta\delta}(s) = \int_A g^{\beta\delta}(r) dr.$$

Für $s > 0$ definieren wir:

$$g^\beta(s) = \int_A \frac{1}{m^\beta(r)} dr, \quad G^\beta(s) = \int_A g^\beta(r) dr.$$

Satz 3.44. (Mathematische Entropieabschätzung) Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta, \delta > 0$ für die Lösung $\varrho_{\beta\delta}$ aus Satz 3.34 die folgende Abschätzung der regularisierten mathematischen Entropie aus Definition 3.43:

$$\|G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})\|_{L^\infty(L^1(M))} + \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2)$$

mit einer von $\delta, \beta > 0$ unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Beweis. Wir möchten in Gleichung (3.2.1) mit dem (mathematischen) chemischen Potential $g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})$ aus Definition 3.43 testen. Um die Zeitregularität zu gewährleisten, glätten wir zu $t_0 \in [0, T]$ und $h > 0$ die Funktion $g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})$ in der Zeit wie in Proposition 3.41. Die notwendige Integrierbarkeit folgt dann aus der Energieabschätzung 3.29 folgendermaßen:

$$\|g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq \frac{1}{c_\delta} \int_M |\varrho_{\beta\delta} - A|^2 d\mu_M \leq C_\delta(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2) \leq C_\beta^\delta, \quad (*)$$

$$\|\nabla^M(g^{\beta\delta} \circ \varrho_{\beta\delta})\|_{L^2(L^2(M))}^2 = \|g^{\beta\delta'}(\varrho_{\beta\delta})\nabla^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq \frac{1}{c_\delta} \|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C_\beta^\delta.$$

Dann können wir Proposition 3.42 anwenden. Den entstehenden parabolischen Term formen wir um, indem wir Terme einfügen und wieder abziehen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_{M_t} g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt \quad (\dagger) \\ &+ \int_0^{t_0} \int_{M_t} g_\beta^\delta(\varrho_{\beta\delta}(t)) \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \left(\frac{1 - \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} \right) d\mathcal{H}^d dt. \quad (\#) \end{aligned}$$

Wegen der Konvexität von $G^{\beta\delta}(s)$ können wir (\dagger) nach unten hin abschätzen:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_{M_t} g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt \\ & \geq \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) d\mathcal{H}^d dt - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h}) d\mathcal{H}^d dt. \quad (\dagger\dagger) \end{aligned}$$

Den zweiten Term in $(\dagger\dagger)$ transformieren wir auf M_{t-h} und fügen Terme ein, die wir wieder abziehen:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h}) d\mathcal{H}^d dt = -\frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t-h)) \mathcal{J} \Phi_{t-h}^{*h} d\mathcal{H}^d dt \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t-h)) d\mathcal{H}^d dt - \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t-h)) \frac{\mathcal{J} \Phi_{t-h}^{*h} - 1}{h} d\mathcal{H}^d dt. \quad (\dagger\dagger\dagger) \end{aligned}$$

Wenn wir $(\dagger\dagger)$ und $(\dagger\dagger\dagger)$ zusammenfassen entsteht eine Teleskopsumme. Dann können wir (\dagger) insgesamt nach unten hin abschätzen:

$$(\dagger) \geq \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{M_t} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) d\mathcal{H}^d dt - \int_{M_0} G^{\beta\delta}(\varrho_0) d\mathcal{H}^d - \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t-h)) \frac{\mathcal{J} \Phi_{t-h}^{*h} - 1}{h} d\mathcal{H}^d dt. \quad (\#\#)$$

Es ist $G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) \in L^2(L^2(M))$ aufgrund der selben Überlegung wie in (\star) . Dann folgt für $\beta, \delta > 0$ im Limes $h \rightarrow 0$ aufgrund der Integrierbarkeit von $\varrho_{\beta\delta}$ und $G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})$ und der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 die folgende Konvergenz für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} [(\#) + (\#\#)] &= \int_{M_{t_0}} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t_0)) d\mathcal{H}^d - \int_{M_0} G^{\beta\delta}(\varrho_0) d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_{M_t} (g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \varrho_{\beta\delta}(t) - G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t))) \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Dies sind genau die Terme, die man nach einer formalen Rechnung erwartet hätte. Wegen Proposition 3.41 konvergiert für $h \rightarrow 0$ der elliptische Teil, der sich weiter umformen lässt:

$$\begin{aligned} \langle \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}), g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M (g^{\beta\delta} \circ \varrho_{\beta\delta}) \bullet m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) (-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta} \bullet (-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} \Delta^M \varrho_{\beta\delta}(t) (k + \varrho_{\beta\delta}(t) |K|^2 + \Delta^M \varrho_{\beta\delta}(t) + \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) \bullet a(\varrho_{\beta\delta}(t)) \nabla^M k) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Wenn wir nun die positiven Terme auf der linken Seite sammeln und die anderen auf die rechte Seite bringen, folgt mit der Young Ungleichung:

$$\begin{aligned} \|G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} &+ \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}(t)\|_{L^2(M_t)}^2 dt \leq \|G^{\beta\delta}(\varrho_0)\|_{L^1(M_0)} \\ &+ \int_0^{t_0} \int_{M_t} |g^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \varrho_{\beta\delta}(t)| |\operatorname{div}^M(v)| d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) |\operatorname{div}^M(v)| d\mathcal{H}^d dt \\ &+ \frac{1}{2} \|k + \varrho_{\beta\delta} |K|^2\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2 + \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}| |a(\varrho_{\beta\delta})| |\nabla^M k| d\mathcal{H}^d dt \\ &= (I) + (II) + (III) + (IV) + (V). \end{aligned}$$

Für Term (I) beachten wir, dass nach Konstruktion der regularisierten mathematischen Entropien aus Definition 3.43:

$$G^{\beta\delta}(s) = G^\delta(s) + \beta |A - s|^2 \leq G(s) + |A - s|^2$$

falls $\beta \leq 1$. Daher ist nach Voraussetzung 3.8 an die Anfangswerte dieser Term beschränkt durch $(I) \leq \|G(\varrho_0)\|_{L^1(M_0)} + C(1 + \|\varrho_0\|_{L^2(M_0)}^2) \leq C$. Term (II) können wir mit Lemma 3.45 folgendermaßen abschätzen: $(II) \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2) + (III)$. Es entsteht also ein weiterer Term (III) . Diesen kontrollieren wir später mit dem Gronwall-Lemma. Term (IV) schätzen wir ab durch $(IV) \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2)$. Term (V) schätzen wir mit der Hölder-Ungleichung und der Wachstumsbedingung aus Voraussetzung 3.6 von $a(s)$ ab:

$$(V) \leq C \|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))} (1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}) \|\nabla^M k\|_{L^\infty(L^\infty(M))}.$$

Wenn wir in $\|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}$ partiell integrieren und die Neumann-Randwerte ausnutzen, können wir (V) weiter abschätzen (Wir führen das Zeitintervall $[0, t_0]$ hier nicht):

$$(V) \leq C \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^{\frac{1}{2}} (1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^{\frac{3}{2}}) \leq \epsilon \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 + C_\epsilon (1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2).$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die Young-Ungleichung verwendet. Wenn wir nun $\epsilon = \frac{1}{4}$ wählen, können wir den ersten Term in die linke Seite absorbieren und es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} &+ \frac{1}{4} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}(t)\|_{L^2(M_t)}^2 dt \\ &\leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2) + \int_0^{t_0} \|G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t))\|_{L^1(M_t)} \|\operatorname{div}^M(v)\|_{L^\infty(M_t)} dt. \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt:

$$\operatorname{esssup}_{t \in [0, T]} \|G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})\|_{L^1(M_t)} + \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2).$$

□

Die rechte Seite in der Behauptung von Satz 3.44 lässt sich aufgrund von Folgerung 3.29 durch eine Konstante $C_\beta > 0$ abschätzen, die von $\delta > 0$ unabhängig, im Allgemeinen nicht jedoch von $\beta > 0$, ist. Um im bewegten Fall den Term von $\operatorname{div}^M(v)$ mit dem Gronwall-Lemma zu kontrollieren, hatten wir eine weitere Abschätzung benötigt. Aufgrund der Analogie zur Young-Ungleichung für allgemeine konvexe Funktionen bezeichnen wir die folgende Aussage als Young-Ungleichung für die mathematische Entropie. Die wesentliche Idee hinter dieser Abschätzung besteht darin, dass Integrieren des (mathematischen) chemischen Potentials $g(s)$, da es sich um ein gebrochenes Polynom handelt, dem Erhöhen des Exponenten um 1 entspricht.

Lemma 3.45. (Eine Young-Ungleichung für die mathematische Entropie) Sei $m(s) = s^n$ für $n \geq 1$ oder $m(s) = s^3 + cs^2$ für eine Konstante $c > 0$. Zu $\beta, \delta \in (0, 1)$ seien $m^{\beta\delta}(s)$ die regularisierten Mobilitäten aus Definition 3.10. Dann gilt für die dazugehörigen regularisierten mathematischen Entropien aus Definition 3.43 folgende Ungleichung:

$$|sg^{\beta\delta}(s)| \leq C(1 + s^2 + G^{\beta\delta}(s))$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit einer von $\beta, \delta > 0$ unabhängigen Konstanten $C > 0$. Im Falle der Mobilität $m(s) = s^3 + cs^2$ ist nicht gezeigt, dass C von c unabhängig ist.

Beweis. Nach Konstruktion der regularisierten mathematischen Entropien in Definition 3.43 gilt folgender Zusammenhang: $g^{\beta\delta}(s) = g^\delta(s) + \beta(s - A)$ und $G^{\beta\delta}(s) = G^\delta(s) + \frac{1}{2}\beta(s - A)^2$. Daher reicht es, wenn $\beta < 1$ ist, die Aussage für $g^\delta(s)$ und $G^\delta(s)$ zu zeigen. OBdA. wählen wir A in Definition 3.43 als $A = 1$, anderenfalls geht der Wert von A in die Abschätzungskonstante ein. Wir betrachten die Fälle $m(s) = s^n$ für $n = 1, n \in (0, 1), n = 2, n > 2$ sowie $m(s) = cs^2 + s^3$ separat. Die Vorgehensweise ist dabei immer die Gleiche. Wir schätzen $sg(s)$ dem Betrage nach ab, drücken kritische Terme mit Hilfe von $G(s)$ aus und lassen im Anschluss negative Terme weg. Dabei verwenden wir für $s \in \mathbb{R}$ die Schreibweise $s^+ = \max(s, 0)$ und $s^- = \min(s, 0)$ und machen jeweils die Fallunterscheidung für $s \geq 0$ und $s \leq 0$.

1. ($n = 2$): Die Mobilität ist gegeben durch:

$$m^\delta(s) = \begin{cases} (s + \delta)^2 & \text{falls } s \geq 0, \\ \delta^2 & \text{falls } s \leq 0. \end{cases}$$

Das (mathematische) chemische Potential lässt sich berechnen:

$$g^\delta(s) = \int_1^s \frac{1}{m^\delta(r)} dr = \int_1^{s^+} \frac{1}{m^\delta(r)} dr + \int_0^{s^-} \frac{1}{m^\delta(r)} dr = -\frac{1}{\delta + s^+} + \frac{1}{\delta + 1} + \frac{s^-}{\delta^2}.$$

Die mathematische Entropie lässt sich berechnen:

$$\begin{aligned} G^\delta(s) &= \int_1^{s^+} g^\delta(r) dr + \int_0^{s^-} g^\delta(r) dr = \int_1^{s^+} \left(-\frac{1}{\delta + r} + \frac{1}{\delta + 1} \right) dr + \int_0^{s^-} \left(-\frac{1}{\delta} + \frac{1}{\delta + 1} + \frac{r}{\delta^2} \right) dr \\ &= -\log(\delta + s^+) + \log(\delta + 1) - \frac{s^-}{\delta} + \frac{s^- + s^+ - 1}{\delta + 1} + \frac{1}{2} \frac{|s^-|^2}{\delta^2}. \end{aligned}$$

(a) Für ($s \geq 0$) schätzen wir ab:

$$|s^+ g^\delta(s^+)| = \left| -\frac{s^+}{\delta + s^+} + \frac{s^+}{\delta + 1} \right| \leq C(1 + |s|).$$

(b) Für ($s \leq 0$) schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |s^- g^\delta(s^-)| &= \left| -\frac{s^-}{\delta} + \frac{s^-}{\delta+1} + \frac{|s^-|^2}{\delta^2} \right| \leq -\frac{s^-}{\delta} - \frac{s^-}{\delta+1} + \frac{|s^-|^2}{\delta^2} \\ &= 2G^\delta(s^-) + \underbrace{2\log(\delta)}_{\leq 0} - 2\log(\delta+1) + \underbrace{\frac{s^-}{\delta}}_{\leq 0} - 3\frac{s^-}{\delta+1} + \frac{1}{\delta+1} \leq 2G^\delta(s^-) + C(1+|s|). \end{aligned}$$

2. ($n \neq 2$): Die Mobilität ist gegeben durch:

$$m^\delta(s) = \begin{cases} (s+\delta)^n & \text{falls } s \geq 0, \\ \delta^n & \text{falls } s \leq 0. \end{cases}$$

Das (mathematische) chemische Potential lässt sich ebenfalls berechnen:

$$g^\delta(s) = \int_1^{s^+} \frac{1}{m^\delta(r)} dr + \int_0^{s^-} \frac{1}{\delta^n} dr = -\frac{(s^+ + \delta)^{1-n}}{n-1} + \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} + \frac{s^-}{\delta^n}.$$

Die mathematische Entropie lässt sich berechnen:

$$\begin{aligned} G^\delta(s) &= \int_1^{s^+} g^\delta(r) dr + \int_0^{s^-} \left(-\frac{\delta^{1-n}}{n-1} + \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} + \frac{r}{\delta^n} \right) dr \\ &= \frac{(s^+ + \delta)^{2-n}}{(n-2)(n-1)} - \frac{(1+\delta)^{2-n}}{(n-2)(n-1)} + \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} (s^+ - 1) - s^- \frac{\delta^{1-n}}{n-1} + s^- \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} + \frac{|s^-|^2}{2\delta^n}. \end{aligned}$$

(a) Für ($n > 2$) und $s \geq 0$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |s^+ g^\delta(s^+)| &\leq |s^+ \frac{(s^+ + \delta)^{1-n}}{n-1}| + |s^+ \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1}| = s^+ \frac{(s^+ + \delta)^{1-n}}{n-1} + s^+ \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} \\ &\leq \frac{(s^+ + \delta)^{2-n}}{n-1} + s^+ \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} \\ &= (n-2)G(s^+) + \frac{(1+\delta)^{2-n}}{n-1} + \frac{(n-2)(\delta+1)^{1-n}}{n-1} + \frac{(1+\delta)^{2-n}}{n-1} - (n-3)s^+ \frac{(\delta+1)^{1-n}}{n-1} \\ &\leq (n-2)G(s^+) + C(1+|s|). \end{aligned}$$

(b) Für ($1 < n < 2$) und $s \geq 0$ schätzen wir ab:

$$|s^+ g(s^+)| \leq |s^+ \frac{(s^+ + \delta)^{1-n}}{n-1}| + |s^+ \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1}| \leq C(1+|s|).$$

(c) Für $n \neq 2$ und $s \leq 0$ schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |s^- g^\delta(s^-)| &\leq |s^- \frac{\delta^{1-n}}{n-1}| + |s^- \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1}| + \left| \frac{|s^-|^2}{\delta^n} \right| \leq -s^- \frac{\delta^{1-n}}{n-1} + -s^- \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} + \frac{|s^-|^2}{\delta^n} \\ &= 2G(s^-) + s^- \frac{\delta^{1-n}}{n-1} + (2-3s^-) \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} - \frac{2\delta^{2-n}}{(n-2)(n-1)} + \frac{2(1+\delta)^{2-n}}{(n-2)(n-1)} \\ &\leq 2G(s^-) + (2-3s^-) \frac{(1+\delta)^{1-n}}{n-1} + 2 \frac{(1+\delta)^{2-n}}{(n-2)(n-1)} \leq 2G^\delta(s^-) + C(1+|s|). \end{aligned}$$

3. ($n = 1$): Die Mobilität ist gegeben durch:

$$m^\delta(s) = \begin{cases} s + \delta & \text{falls } s \geq 0, \\ \delta & \text{falls } s \leq 0. \end{cases}$$

Das (mathematische) chemische Potential lässt sich ebenfalls berechnen:

$$g^\delta(s) = \int_1^{s^+} \frac{1}{r+\delta} dr + \int_0^{s^-} \frac{1}{\delta} dr = \log(s^+ + \delta) - \log(1 + \delta) + \frac{s^-}{\delta}.$$

Die mathematische Entropie lässt sich berechnen:

$$\begin{aligned} G^\delta(s) &= \int_1^{s^+} (\log(r + \delta) - \log(1 + \delta)) dr + \int_0^{s^-} \left(\log(\delta) - \log(1 + \delta) + \frac{r}{\delta} \right) dr \\ &= (s^+ + \delta) \log(s^+ + \delta) + 1 - s^+ - (s^+ + \delta) \log(1 + \delta) + s^- \log(\delta) - s^- \log(1 + \delta) + \frac{|s^-|^2}{2\delta}. \end{aligned}$$

(a) Für ($s \geq 0$) schätzen wir ab:

$$|s^+ g^\delta(s^+)| = |s^+ \log(s^+ + \delta)| + |s^+ \log(1 + \delta)| \leq C(1 + |s|^2).$$

(b) Für ($s \leq 0$) schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} |s^- g^\delta(s^-)| &\leq |s^- \log(\delta)| + |s^- \log(1 + \delta)| + \frac{|s^-|^2}{\delta} \\ &\leq 2G^\delta(s^-) - s^- \log(\delta) + C(1 + |s|) \leq 2G^\delta(s^-) + C(1 + |s|). \end{aligned}$$

4. Spezielle Mobilität für die Navier-Slip Bedingung:

$$m^\delta(s) = \begin{cases} c(s + \delta)^2 + (s + \delta)^3 & \text{falls } s \geq 0, \\ c\delta^2 + \delta^3 & \text{falls } s \leq 0. \end{cases}$$

Die inverse Mobilität lässt sich für $s \geq 0$ folgendermaßen zerlegen:

$$\frac{1}{m^\delta(s)} = \frac{1}{c(s + \delta)^2 + (s + \delta)^3} = -\frac{1}{c^2} \frac{1}{s + \delta} + \frac{1}{c^2} \frac{1}{c + s + \delta} + \frac{1}{c(s + \delta)^2}.$$

Somit lassen sich (mathematisches) chemisches Potential und mathematische Entropie wie oben berechnen und wir erhalten:

$$g^\delta(s) = \frac{1}{c^2} \left(\log\left(\frac{c + s^+ + \delta}{s^+ + \delta}\right) - \frac{c}{s^+ + \delta} - \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) + \frac{c}{1 + \delta} \right) + \frac{s^-}{c\delta^2 + \delta^3}$$

bzw.:

$$\begin{aligned} G^\delta(s) &= \frac{1}{c^2} \left((c + \delta + s^+) \log\left(\frac{c + \delta + s^+}{\delta + s^+}\right) - (c + \delta + 1) \log\left(\frac{c + \delta + 1}{\delta + 1}\right) \right) + \frac{1}{2} \frac{(s^-)^2}{c\delta^2 + \delta^3} \\ &\quad + \frac{1}{c^2} (s^+ - 1) \left(\frac{c}{1 + \delta} - \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) \right) + \frac{1}{c^2} s^- \left(\log\left(\frac{c + \delta}{\delta}\right) - \frac{c}{\delta} - \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) + \frac{c}{1 + \delta} \right). \end{aligned}$$

(a) Für ($s \geq 0$) schätzen wir ab indem wir negative Terme auf der rechten Seite weglassen:

$$\begin{aligned} |s^+ g(s^+)| &= \frac{1}{c^2} \left| s^+ \log\left(\frac{c + s^+ + \delta}{s^+ + \delta}\right) - \frac{cs^+}{s^+ + \delta} - s^+ \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) + \frac{cs^+}{1 + \delta} \right| \\ &= \frac{1}{c^2} \left(s^+ \log\left(\frac{c + s^+ + \delta}{s^+ + \delta}\right) + \frac{cs^+}{s^+ + \delta} + s^+ \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) + \frac{cs^+}{1 + \delta} \right) \\ &= G^\delta(s^+) + \frac{1}{c^2} \left(-(c + \delta) \log\left(\frac{c + s^+ + \delta}{s^+ + \delta}\right) + (c + \delta + 1) \log\left(\frac{c + \delta + 1}{\delta + 1}\right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{c^2} (s^+ - 1) \left(\frac{c}{1 + \delta} - \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{cs^+}{s^+ + \delta} + s^+ \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) + \frac{cs^+}{1 + \delta} \right) \\ &\leq G^\delta(s^+) + \frac{1}{c^2} (c + \delta + 1) \log\left(\frac{c + \delta + 1}{\delta + 1}\right) \\ &\quad - \frac{1}{c^2} (s^+ - 1) \left(\frac{c}{1 + \delta} - \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) \right) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{cs^+}{s^+ + \delta} + s^+ \log\left(\frac{c + 1 + \delta}{1 + \delta}\right) + \frac{cs^+}{1 + \delta} \right) \\ &\leq G^\delta(s^+) + C(1 + |s|). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt verwendet, dass $\frac{cs}{s+\delta}$ für $s \geq 0$ Werte zwischen 0 und c annimmt. Die Konstante C hängt von c ab.

- (b) Für ($s \leq 0$) schätzen wir ab: Es ist $g^\delta(s)$ monoton wachsend und daher für $s \leq 1$ negativ. Somit ist $|s^- g^\delta(s^-)| = s^- g(s^-)$. Damit können wir weiter abschätzen in dem wir negative Terme auf der rechten Seite weglassen:

$$\begin{aligned} s^- g^\delta(s^-) &= \frac{s^-}{c^2} \left(\log\left(\frac{c+\delta}{\delta}\right) - \frac{c}{\delta} - \log\left(\frac{c+1+\delta}{1+\delta}\right) + \frac{c}{1+\delta} \right) + \frac{(s^-)^2}{c\delta^2 + \delta^3} \\ &= 2G^\delta(s^-) - \frac{2}{c^2} \left((c+\delta) \log\left(\frac{c+\delta}{\delta}\right) - (c+\delta+1) \log\left(\frac{c+\delta+1}{\delta+1}\right) \right) \\ &\quad + \frac{2}{c^2} \left(\frac{c}{1+\delta} - \log\left(\frac{c+1+\delta}{1+\delta}\right) \right) - \frac{1}{c^2} s^- \left(\log\left(\frac{c+\delta}{\delta}\right) - \frac{c}{\delta} - \log\left(\frac{c+1+\delta}{1+\delta}\right) + \frac{c}{1+\delta} \right) \\ &\leq 2G^\delta(s^-) + \frac{2}{c^2} (c+\delta+1) \log\left(\frac{c+\delta+1}{\delta+1}\right) - \frac{2}{c^2} f(1+\delta) + \frac{1}{c^2} |s^-| (f(\delta) - f(1+\delta)) \\ &\leq 2G^\delta(s^-) + C. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Funktion $f(x) = \log\left(\frac{c+x}{x}\right) - \frac{c}{x}$ eingesetzt und im letzten Schritt die Tatsache verwendet, dass $f(s)$ für $s \geq 0$ monoton wachsend ist. Die Konstante C hängt von c ab. □

Beim Limesübergang $\delta \rightarrow 0$ verlieren wir Kontrolle über die $L^2(H^3(M))$ -Norm. Es macht daher Sinn einen neuen Lösungsraum zu definieren. Setze zu $t \in [0, T]$:

$$W^t = \left\{ \varrho \in H^2(M_t) \mid \int_{M_t} \varrho(t) d\mathcal{H}^d = R \text{ und } \nu^* \bullet \nabla^M \varrho = 0 \text{ f.ü. auf } \partial M_t \right\}.$$

Wir werden sehen, dass in der endgültigen Formulierung nach dem Limes $\beta \rightarrow 0$ die Testfunktionen in einem geringfügig besseren Raum liegen müssen. Definiere daher zu $\epsilon > 0$:

$$W_\epsilon^t = \left\{ \varrho \in W^{2,2+\epsilon}(M_t) \mid \nu^* \bullet \nabla^M \varrho = 0 \text{ f.ü. auf } \partial M_t \right\}.$$

Entsprechend die zeitintegrierten Lösungsräume:

$$\begin{aligned} L^2(W) &= \left\{ \varrho \in L^2(H^2(M)) \mid \varrho(t) \in W^t \text{ für fast alle } t \in [0, T] \right\}, \\ L^{2+\epsilon}(W_\epsilon) &= \left\{ \eta \in L^{2+\epsilon}(W^{2,2+\epsilon}(M)) \mid \eta(t) \in W_\epsilon^t \text{ für fast alle } t \in [0, T] \right\}. \end{aligned}$$

Die mathematische Energieabschätzung liefert $L^\infty(H^1(M))$ -Beschränktheit der Lösungen und die mathematische Entropieabschätzung $L^2(H^2(M))$ -Beschränktheit. Für den Limesübergang wird es jedoch erforderlich sein, Konvergenz der Gradienten mit besserer Raumintegrabilität zu haben. Dazu verwenden wir folgende multiplikative Interpolationsabschätzungen.

Lemma 3.46. (Interpolation) *Sei M eine zusammenhängende, d -dimensionale, kompakte Fläche der Klasse C^1 . Sei $p, r \geq 1$. Es gelte einer der Fälle:*

1. $d = 1$ und $r \leq q \leq \infty$,
2. $d \geq 2$ und $p < d$ und $q \in [r, \frac{dp}{d-p}]$,
3. $p \geq d \geq 2$ und $r \leq q < \infty$.

Dann gibt es eine Konstante $C_M > 0$, so dass für alle $u \in W^{1,p}(M)$:

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C_M \|u\|_{W^{1,p}(M)}^\alpha \|u\|_{L^r(M)}^{1-\alpha}$$

mit $-\frac{d}{q} = \alpha(1 - \frac{d}{p}) + (1 - \alpha)(-\frac{d}{r})$.

Beweis. Zeigen wir die Behauptung zunächst für Funktionen $W^{1,p}(\Omega)$ mit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, beschränkt und C^1 -berandet. Setze $\bar{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u d\mathcal{L}^d$ und $v = u - \bar{u}$. Dann hat v verschwindenden Mittelwert und wir können die multiplikative Interpolationsabschätzung aus [LSU], Kapitel II verwenden:

$$\|v\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|v\|_{L^r(\Omega)}^{1-\alpha}.$$

Es folgt also für u :

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^\alpha \|u - \bar{u}\|_{L^r(\Omega)}^{1-\alpha} + \|\bar{u}\|_{L^q(\Omega)}.$$

Nach der Hölder-Ungleichung folgt für beliebige $1 \leq r, q \leq \infty$:

$$\|\bar{u}\|_{L^q(\Omega)} \leq |\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \|u\|_{L^r(\Omega)}.$$

Somit folgt also:

$$\|\bar{u}\|_{L^q(\Omega)} = \|\bar{u}\|_{L^q(\Omega)}^\alpha \|\bar{u}\|_{L^q(\Omega)}^{1-\alpha} \leq (|\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega)})^\alpha (|\Omega|^{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}} \|u\|_{L^r(\Omega)})^{1-\alpha}.$$

Damit folgt die Behauptung für $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Die Behauptung folgt für M , wenn wir M über Karten parametrisieren und mit einer endlichen Zerlegung der Eins argumentieren. Ableitungsterme der Parametrisierung sind dann nach Voraussetzung an M gleichmäßig beschränkt. \square

In unserer Situation gilt das eben gezeigte Lemma mit einer Konstanten $C > 0$ gleichmäßig für alle Zeitpunkte $t \in [0, T]$, da die Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ aus Voraussetzung 3.2 und ihre Inversen gleichmäßig in $t \in [0, T]$ beschränkte C^1 -Normen haben.

Lemma 3.47. (Interpolation) *Sei M eine zusammenhängende, kompakte, evolvierende Fläche der Klasse $C^0(C^1)$ der Dimension d . Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle Funktionen $u \in L^2(H^1(M)) \cap L^\infty(L^2(M))$ gilt $u \in L^r(L^q(M))$ und:*

$$\|u\|_{L^r(L^q(M))} \leq C \|u\|_{L^2(H^1(M))}^{\frac{2}{r}} \|u\|_{L^\infty(L^2(M))}^{1-\frac{2}{r}}.$$

Es ist dabei $\frac{1}{r} + \frac{d}{2q} = \frac{d}{4}$ mit:

1. $2 \leq r \leq \infty$, $2 \leq q \leq \frac{2d}{d-2}$ für $d \geq 3$.
2. $2 \leq r \leq \infty$, $2 \leq q < \infty$ für $d = 2$.
3. $4 \leq r \leq \infty$, $2 \leq q \leq \infty$ für $d = 1$.

Beweis. Folgt wie in [LSU], Kapitel II aus Lemma 3.46, wenn wir die Volumina der M_t gleichmäßig in $t \in [0, T]$ abschätzen. \square

Folgerung 3.48. (Schwache Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert zu $\beta > 0$ ein $\varrho_\beta \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^4(W^{1,4}(M)) \cap L^2(W)$, so dass die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}$ zu $\beta, \delta > 0$ aus Satz 3.34 nach Auswahl einer Teilfolge in der $L^2(H^2(M))$ und $L^4(W^{1,4}(M))$ -Norm für $\delta \rightarrow 0$ schwach gegen ϱ_β konvergieren. Die Konvergenz ist weiterhin schwach* in $L^\infty(H^1(M))$.*

Beweis. Aufgrund der mathematischen Entropieabschätzung aus Satz 3.44 zusammen mit der Energieabschätzung 3.29 ist $\Delta^M \varrho_N$ in $L^2(L^2(M))$ gleichmäßig in $\delta > 0$ beschränkt. Aufgrund der Kontaktwinkelbedingung und der festen Gesamtmasse ist mit einer analogen Argumentation wie in Proposition 3.24 die $L^2(L^2(M))$ -Norm von $\Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ äquivalent zur vollständigen $L^2(H^2(M))$ -Norm. Ferner ist $\varrho_{\beta\delta}$ wegen Folgerung 3.29 gleichmäßig in $\delta > 0$ beschränkt in $L^\infty(H^1(M))$. Aus Lemma 3.47 für $d = 1, 2$ und $r, q = 4$ folgt dann die Beschränktheit in $L^4(W^{1,4}(M))$. Es sind $L^4(W^{1,4}(M))$ und $L^2(H^2(M))$ reflexive Banachräume, daher konvergiert eine Teilfolge schwach. Weiterhin ist $L^2(W)$ abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $L^2(H^2(M))$, daher liegt der Grenzwert nach dem Lemma von Mazur ebenfalls in $L^2(W)$. Die schwach*-Konvergenz folgt schließlich wie in Folgerung 3.25 nach Auswahl einer weiteren Teilfolge. \square

Kompaktheit

Wie beim Grenzübergang in den Galerkin-Gleichungen müssen wir auch im nächsten Approximationsschritt starke Konvergenz zeigen. Hierbei gehen wir analog zu [dPGG] vor. Nach der Methode von [AL] zeigen wir eine Abschätzung von Zeitdifferenzen, die uns mit dem abstrakten Kompaktheitssatz aus [Al2] starke Konvergenz der approximativen Lösungen liefert. Im zweiten Schritt lässt sich die Konvergenz mit dem Kompaktheitssatz von Simon aus [Sim] dann auf Gradienten der approximativen Lösungen hochziehen.

Satz 3.49. (Zeitkompaktheit) *Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen zu $\beta, \delta > 0$ die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}$ aus Satz 3.34 die folgende Abschätzung von Zeitdifferenzen:*

$$\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \|f_{\beta\delta}(t+h) - f_{\beta\delta}(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \leq C_\beta$$

mit einer von $h > 0, \delta > 0$ unabhängigen Konstanten $C_\beta > 0$. Dabei ist $f_{\beta\delta}(t) = \varrho_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_t^*$ mit dem Diffeomorphismus Φ_t^* aus Definition 3.2.

Beweis. Sei $w \in L^2(H^1(M))$ zunächst eine beliebige Testfunktion. Dann setzen wir das zu $h > 0$ und $w\chi_{[h,T]}$ in Proposition 3.41 konstruierte w_h^T in Gleichung (3.2.1) ein. Proposition 3.42 liefert dann:

$$\int_h^T \int_{M_t} w(t) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt + \langle \tilde{\mathcal{A}}^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}), w_h^T \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0. \quad (\star)$$

Wir transformieren den parabolischen Term auf M_0 :

$$\begin{aligned} & \int_h^T \int_{M_t} w(t) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J} \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_h^T \int_{M_0} w(t) \circ \Phi_t^* \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_t^* - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_{t-h}^* \mathcal{J} \Phi_{t-h}^*}{h} d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Definiere w vermöge $w(t) \circ \Phi_t^* = \varrho_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_t^* - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_{t-h}^* \mathcal{J} \Phi_{t-h}^*$. Dann ist w wegen der Kettenregel und Voraussetzung 3.2 an M eine zugelassene Testfunktion. Nach einer Zeitverschiebung ist dann der parabolische Term wie in der Behauptung. Wenn wir die konstruierte Testfunktion in den elliptischen Teil einsetzen wird (\star) zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \|f_{\beta\delta}(t+h) - f_{\beta\delta}(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \\ &= \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \left(\int_t^{t+h} [f_{\beta\delta}(s) - f_{\beta\delta}(s-h)] \circ \Phi_t^{*-1} \chi_{[h,T]}(s) ds \right) \bullet m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})(\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) - a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Nun schätzen wir den elliptischen Term mit der Hölder-Ungleichung ab. Wenn wir auf die f -Terme auf der rechten Seite noch den Transformationssatz 6.8 und die Kettenregel verwenden folgt mit der Voraussetzung 3.2 an M :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \|f_{\beta\delta}(t+h) - f_{\beta\delta}(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \leq C \int_0^T \int_t^{t+h} (\|\nabla^M f_{\beta\delta}(s)\|_{L^4(M_0)} + \|\nabla^M f_{\beta\delta}(s-h)\|_{L^4(M_0)}) ds \\ & \quad \cdot \|\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t))}\|_{L^4(M_t)} \|\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t))}(\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}(t)) - a(\varrho_{\beta\delta}(t)) \nabla^M k)\|_{L^2(M_t)} dt \\ & \leq C \|\nabla^M f_{\beta\delta}\|_{L^4(L^4(M))} \|\sqrt{m(\varrho_{\beta\delta})}\|_{L^4(L^4(M))} \|\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})}(\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) - a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k)\|_{L^2(L^2(M))}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Hölder-Ungleichung in der Zeit und die Faltungsabschätzung verwendet wurde. Die Mobilitäten sind nach Konstruktion in Definition 3.10 beschränkt, der restliche Flussterm ebenfalls nach der Voraussetzung 3.1 an M und Folgerung 3.29 durch eine von $\delta > 0$ unabhängige Konstante $C_\beta > 0$. Schließlich ist $\nabla^M f$ ebenfalls beschränkt aufgrund der Voraussetzung 3.1 an M und Folgerung 3.48. \square

Folgerung 3.50. (Starke Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta > 0$ für ϱ_β aus Folgerung 3.48, dass die Lösungen aus Satz 3.34 nach Auswahl einer weiteren Teilfolge $\varrho_{\beta\delta} \rightarrow \varrho_\beta$ für $\delta \rightarrow 0$ in $L^p(L^p(M))$ für $1 \leq p < \infty$ stark konvergieren.*

Beweis. Setze $f_{\beta\delta}(t) = \varrho_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_t^*$ wie im vorherigen Satz 3.49. Zu $\beta > 0$ ist $f_{\beta\delta}$ nach Folgerung 3.48 und Voraussetzung 3.2 an M zusammen mit der Kettenregel gleichmäßig bzgl. $\delta > 0$ in $L^2([0, T]; H^2(M_0)) \cap L^\infty([0, T]; L^2(M_0))$ beschränkt. Zusammen mit der Abschätzung von Zeitdifferenzen liefert der abstrakte Kompaktheitssatz aus [Al2] (siehe auch [Be]) dann die Präkompaktheit von f in $L^1([0, T]; L^2(M_0))$. Nach dem Transformationssatz 6.8 ist dies äquivalent zur Präkompaktheit von $\varrho_{\beta\delta}$ in $L^1(L^2(M))$. Die Folge ist gleichmäßig in $\delta > 0$ beschränkt in $L^\infty(H^1(M))$ aufgrund von Folgerung 3.29, damit folgt mit der Sobolevschen Einbettung auch die Präkompaktheit in $L^p(L^p(M))$ für $p < \infty$. Der Grenzwert lässt sich mit dem schwachen Limes aus Folgerung 3.48 identifizieren. \square

Mit dem Kompaktheitssatz von Simon lässt sich die starke Konvergenz der Funktionen wie in [dPGG] mit Hilfe der Beschränktheit zweiter Raumableitungen zu starker Konvergenz der Gradienten hochziehen, was wir an dieser Stelle allgemein formulieren.

Proposition 3.51. (Starke Konvergenz der Gradienten) *Sei M wie in Voraussetzung 3.1 und 3.2. Sei $(\varrho_\delta)_{\delta>0}$ eine beschränkte Folge in $L^2(H^2(M)) \cap L^\infty(H^1(M))$ und es gelte ferner $\varrho_\delta \rightarrow \varrho$ stark in $L^2(L^2(M))$ für $\delta \rightarrow 0$ für ein $\varrho \in L^2(L^2(M))$. Dann ist die Folge $(\varrho_\delta)_{\delta>0}$ beschränkt in $L^4(W^{1,4}(M))$ und konvergiert stark in $L^p(W^{1,p}(M))$ für alle $1 \leq p < 4$.*

Beweis. Nach dem Transformationssatz 6.8 ist mit den Diffeomorphismen aus Definition 3.2:

$$\|\varrho_\delta - \varrho\|_{L^2(L^2(M))} = \|(\varrho_\delta \circ \Phi - \varrho \circ \Phi) \sqrt{\mathcal{J}\Phi}\|_{L^2([0, T]; L^2(M_0))}.$$

Wir setzen $\tilde{\varrho}_\delta = \varrho_\delta \circ \Phi$. Es ist nach Voraussetzung $\mathcal{J}\Phi^{-1}$ gleichmäßig nach unten beschränkt, daher folgt $\|\tilde{\varrho}_\delta - \tilde{\varrho}\|_{L^2([0, T]; L^2(M_0))} \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$. Aus der Charakterisierung von kompakten Mengen in L^p -Räumen ([Sim], Abschnitt 3) folgt dann:

$$\sup_{\delta>0} \int_0^{T-h} \|\tilde{\varrho}_\delta(t+h) - \tilde{\varrho}_\delta(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0.$$

Weiterhin ist $\tilde{\varrho}_\delta$ nach dem Transformationssatz und der Kettenregel, sowie Voraussetzung 3.2 an M gleichmäßig beschränkt in $L^2([0, T]; H^2(M_0))$. Es bettet $H^2(M_0) \hookrightarrow H^1(M_0)$ kompakt ein und $H^1(M_0) \hookrightarrow L^2(M_0)$ stetig. Aus dem Kompaktheitssatz von Simon ([Sim], Abschnitt 8) folgt dann die Konvergenz $\tilde{\varrho}_\delta \rightarrow \tilde{\varrho}$ in $L^2([0, T]; H^1(M_0))$. Wieder mit dem Transformationssatz 6.8 und der Kettenregel folgt dann die Konvergenz $\varrho_\delta \rightarrow \varrho$ in $L^2(H^1(M))$. Die Beschränktheit aus der Voraussetzung impliziert zusammen mit Lemma 3.47 die gleichmäßige Beschränktheit in $L^4(W^{1,4}(M))$. Damit lässt sich die starke Konvergenz auf $L^p(W^{1,p}(M))$ für alle $p < 4$ hochziehen. \square

Übergang zum Grenzwert

Im Limesübergang $\delta \rightarrow 0$ verlieren wir die Kontrolle von dritten Ableitungen von ϱ_β . Der neue Lösungsbegriff darf maximal Ableitungen zweiter Ordnung enthalten. Wir integrieren daher in der schwachen Formulierung (A) ein weiteres mal partiell, wobei zweite Ableitungen auf die Testfunktion fallen sowie eine Ableitung auf die Mobilität. Es macht Sinn für die somit entstehenden elliptischen Term einen neuen Operator zu definieren.

Definition 3.52. (Elliptische Operatoren) *Zu $\beta > 0$ und $t \in [0, T]$ sei der elliptische Operator $\mathcal{C}_t^\beta : W^t \cap H^1(M_t) \rightarrow (W^t \cap W^{1,4}(M_t))^*$ definiert durch:*

$$\langle \mathcal{C}_t^\beta(\varrho), \eta \rangle_{W^t} = - \int_{M_t} \Delta^M \eta m^\beta(\varrho) p(\varrho) + \nabla^M \eta \bullet (\nabla^M \varrho m^{\beta'}(\varrho) p(\varrho) + m(\varrho) a(\varrho) \nabla^M k + \varrho v^*) d\mathcal{H}^d$$

für $\eta \in W^t \cap W^{1,4}(M_t)$. Dabei setzen wir $m^{\beta'}(0) = 0$. Ebenfalls zu $\beta > 0$ definieren wir den Operator $\mathcal{C}^\beta : L^2(W) \cap L^\infty(H^1(M)) \rightarrow (L^2(W) \cap L^4(W^{1,4}(M)))^*$ durch:

$$\langle \langle \mathcal{C}^\beta(\varrho), \eta \rangle \rangle_{L^2(W)} = \int_0^T \langle \mathcal{C}^\beta(\varrho(t)), \eta(t) \rangle_{W^t} dt$$

für $\eta \in L^2(W) \cap L^4(W^{1,4}(M))$.

Die zugehörige Formulierung bezeichnen wir entsprechend mit (C).

Definition 3.53. (Schwache Formulierung \mathcal{C}^β) Sei $\beta > 0$. Sei \mathcal{C}^β der Operator aus Definition 3.52. Sei $\varrho \in L^2(M_0)$. Gesucht ist eine Funktion $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(W)$, die folgende schwache Differentialgleichung löst:

$$-(\eta(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M \eta(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \langle \mathcal{C}^\beta(\varrho), \eta \rangle \rangle_{L^2(W)} = 0$$

für alle Testfunktionen $\eta \in L^{2+\epsilon}(W_\epsilon) \cap L^{4+\epsilon}(W^{1,4+\epsilon}(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ für ein $\epsilon > 0$ mit $\eta(T) = 0$.

Die etwas bessere Integrabilität in der Testfunktion fordern wir an dieser Stelle schon, womit wir in Satz 3.54 und Folgerung 3.65 zum Limes übergehen können.

Satz 3.54. (Lösung des degenerierten Problems) Unter den getroffenen Voraussetzungen ist zu $\beta > 0$ der Limes $\varrho_\beta \in L^2(W) \cap L^\infty(H^1(M))$ aus Folgerung 3.48 und Folgerung 3.50 eine Lösung der schwachen Formulierung (\mathcal{C}^β) aus Definition 3.53.

Beweis. Nach Folgerung 3.40 ist $\varrho_{\beta\delta} \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(V)$ eine Lösung von:

$$-(w(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w(t), \varrho_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \langle \mathcal{A}^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}), w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0$$

für alle Testfunktionen $w \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(T) = 0$. Setzen wir nun zu einem $\epsilon > 0$ als Testfunktion $w = \eta$ mit einem $\eta \in L^{2+\epsilon}(W_\epsilon) \cap L^{4+\epsilon}(W^{1,4+\epsilon}(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $\eta(T) = 0$, dann können wir im elliptischen Teil partiell integrieren und erhalten:

$$\begin{aligned} & -(\eta(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M \eta(t), \varrho_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt + \underbrace{\int_0^T \int_{M_t} \Delta^M \eta m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})(k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2 + \Delta^M \varrho_{\beta\delta}) d\mathcal{H}^d dt}_{(I)} \\ & + \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \eta \bullet \left(\underbrace{\nabla^M \varrho_{\beta\delta} m^{\beta\delta'}(\varrho_{\beta\delta})(k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2 + \Delta^M \varrho_{\beta\delta})}_{(II)} - \underbrace{(m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k + \varrho_{\beta\delta} v^*)}_{(III)} \right) d\mathcal{H}^d dt = 0. \end{aligned}$$

Hierbei ist $m^{\beta\delta'}(0) = 0$ zu setzen, falls $m^{\beta\delta}$ nicht in 0 klassisch differenzierbar ist. Aufgrund der starken Konvergenz aus Folgerung 3.50 können wir dann im parabolischen Term zum Grenzwert übergehen. Die elliptischen Terme betrachten wir genauer und bezeichnen sie mit (I), (II) und (III). Der kritische Term in (I) ist $\Delta^M \varrho_{\beta\delta}$. Dieser konvergiert schwach in $L^2(L^2(M))$. Der Faktor $m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})$ konvergiert punktweise fast überall nach Folgerung 3.50 nach Auswahl einer Teilfolge und bleibt dabei gleichmäßig in $\delta > 0$ beschränkt in $L^\infty(L^\infty(M))$ aufgrund der Beschränktheit der approximierenden Mobilitäten aus Definition 3.10. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue konvergiert also $\Delta^M \eta m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})$ stark in $L^2(L^2(M))$. Die Terme k und $\varrho_{\beta\delta}|K|^2$ sind unkritisch. Ebenfalls konvergiert $\Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ in (II) schwach in $L^2(L^2(M))$. Der Term $m^{\beta\delta'}(\varrho_{\beta\delta})$ ist nach Konstruktion der approximierenden Mobilitäten aus Definition 3.10 gleichmäßig beschränkt in $L^\infty(L^\infty(M))$ und konvergiert punktweise fast überall nach Folgerung 3.50. Der Term $\nabla^M \varrho_{\beta\delta}$ konvergiert nach Proposition 3.51 in $L^{4-\epsilon}(L^{4-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$. Nach dem allgemeinen Konvergenzsatz von Lebesgue konvergiert dann das Produkt $\nabla^M \varrho_{\beta\delta} m^{\beta\delta'}(\varrho_{\beta\delta})$ stark in $L^{4-\epsilon}(L^{4-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$. Die Testfunktion liegt in $L^{4+\epsilon}(W^{1,4+\epsilon}(M))$ für ein $\epsilon > 0$, dies ist ausreichend damit Term (II) konvergiert. Term (III) ist ebenfalls unkritisch und die Konvergenz folgt sofort aus Folgerung 3.50, der Wachstumsbedingung aus Voraussetzung 3.6 an a und Voraussetzung 3.1 an die Fläche M . \square

3.3 Grenzübergang zu unbeschränkten Koeffizienten

Im letzten Teil müssen wir uns noch von der Beschränkung der Mobilitäten lösen. Die Vorgehensweise im Grenzübergang ist im wesentlichen dieselbe wie im vorherigen Paragraphen. Jedoch müssen wir Abschätzungen unabhängig von $\beta > 0$ bereitstellen.

Physikalische Energieabschätzung

Um Abschätzungen unabhängig von $\beta > 0$ zu erhalten, testen wir mit p und erhalten eine Ungleichung, die wir physikalische Energieabschätzung nennen. Wir werden sehen, dass sich die physikalische Energie nach unten durch die H^1 -Norm von ϱ abschätzen lässt. Dabei folgen wir einer Idee von Bertozzi und Pugh (siehe [BP2]) und benutzen Nichtnegativität sowie Massenerhaltung.

Satz 3.55. (Nichtnegativität) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt für die Lösungen ϱ_β zu $\beta > 0$ aus Satz 3.54 dass $\varrho_\beta(t) \geq 0$ fast überall, für fast alle $t \in [0, T]$.*

Beweis. Sei $w \in L^2(H^1(M))$ eine Testfunktion. Dann können wir die zu $h > 0$ und $t_0 \in [0, T]$ in Proposition 3.41 konstruierte Testfunktion $w_h^{t_0}$ in Gleichung (3.2.1) einsetzen. Dann ist mit Proposition 3.42 der parabolische Teil gegeben durch den folgenden Ausdruck, den wir umformen in dem wir Terme einschieben und wieder abziehen:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \int_{M_t} w(t) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \mathcal{J}\Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} w(t) \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt \\ &+ \int_0^{t_0} \int_{M_t} w(t) \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h} \frac{1 - \mathcal{J}\Phi_t^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt = (\star) + (\dagger). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir $\varrho_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \varrho_{\beta\delta}(s) \circ \Phi_t^{*s-t} ds$, wobei wir ϱ_0 auf M_0 für $t \leq 0$ fortsetzen. Dann ist nach Proposition 2.6:

$$\frac{D^M}{Dt} \varrho_h(t) = \frac{\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h}}{h}.$$

Setzen wir nun in (\star) als Testfunktion $w = \varrho_h^- = \min(0, \varrho_h)$, dann ergibt sich mit der Regel für schwache Ableitungen des negativen Anteils:

$$\begin{aligned} (\star) &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} \varrho_h^-(t) \frac{D^M}{Dt} \varrho_h(t) d\mathcal{H}^d dt = \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{D^M}{Dt} \frac{|\varrho_h^-(t)|^2}{2} d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{2} \|\varrho_h^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 - \frac{1}{2} \|\varrho_h^-(0)\|_{L^2(M_0)}^2 - \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_h^-(t)|^2 \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt das Transporttheorem 6.9 verwendet wurde. Für den Term von den Anfangswerten gilt aufgrund von Voraussetzung 3.8:

$$\varrho_h^-(0) = \min\left(\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \varrho_0, 0\right) = \min(\varrho_0, 0) = 0.$$

Es konvergiert $\varrho_h^- \rightarrow \varrho_{\beta\delta}^- = \min(\varrho_{\beta\delta}, 0)$ für $h \rightarrow 0$ in $L^2(L^2(M))$ nach der Faltungsabschätzung und dem allgemeinen Konvergenzsatz von Lebesgue. Damit konvergiert auch $\varrho_h^-(t_0) \rightarrow \varrho_{\beta\delta}^-(t_0)$ in $L^2(M_0)$ für fast alle $t_0 \in [0, T]$ nach Auswahl einer Teilfolge. Weiterhin folgt für (\dagger) aus der Konvergenz der ϱ_h^- in $L^2(L^2(M))$ zusammen mit der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 die Konvergenz:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\dagger) = \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}^-(t)|^2 \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt.$$

Für den elliptischen Term berechnen wir zunächst den Gradienten: $\nabla^M \varrho_h^- = \chi_{[\varrho_h \leq 0]} \nabla^M \varrho_h$. Es ist:

$$\nabla^{M_t} \varrho_h(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \nabla^{M_t} (\varrho_{\beta\delta}(s) \circ \Phi_t^{*s-t}) ds = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t (D\Phi_t^{*s-t})^T (\nabla^{M_s} \varrho_{\beta\delta}(s)) \circ \Phi_t^{*s-t} ds.$$

Und weil nach Voraussetzung 3.2 $D\Phi_t^{*s-t} \rightarrow Id$ gleichmäßig konvergiert für $|t-s| \leq h \rightarrow 0$ folgt die Konvergenz $\nabla^M \varrho_h^- \rightarrow \nabla^M \varrho_{\beta\delta}^-$ in $L^2(L^2(M))$ für $h \rightarrow 0$ nach der Faltungsabschätzung und

dem allgemeinen Konvergenzsatz von Lebesgue. Damit können wir zum Grenzwert übergehen und erhalten für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|\varrho_{\beta\delta}^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}^-(t)|^2 \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \langle \tilde{\mathcal{A}}_t^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)), \varrho_{\beta\delta}^-(t) \rangle_{H^1(M_t)} = 0.$$

Der zweite Term ist ein Gronwall-Term. Untersuchen wir den elliptischen Term nun etwas genauer. Wir machen uns zunutze, dass $\nabla^M \varrho_{\beta\delta}^-$ verschwindet, falls $\varrho_{\beta\delta} \geq 0$. Aber falls $\varrho_{\beta\delta} \leq 0$ ist $m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) = m^\beta(\delta)$. Damit folgt also:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \langle \tilde{\mathcal{A}}_t^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)), \varrho_{\beta\delta}^-(t) \rangle_{H^1(M_t)} dt &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}^-(t) \bullet m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) (\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) - a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}^-(t) \bullet \sqrt{m^\beta(\delta)} \sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t))} (\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) - a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir $J'_{\beta\delta} = \sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t))} (\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) - a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k)$, dann ist $\|J'_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}$ gleichmäßig in $\delta > 0$ durch eine Konstante $C_\beta > 0$ beschränkt. In der Tat, dies folgt aus Folgerung 3.29 zusammen mit den Wachstumsbedingungen aus Voraussetzung 3.6 an a und Voraussetzung 3.1 an M . Damit lässt sich der elliptische Term abschätzen:

$$\int_0^{t_0} \langle \tilde{\mathcal{A}}_t^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)), \varrho_{\beta\delta}^-(t) \rangle_{H^1(M_t)} dt \leq \sqrt{m^\beta(\delta)} \|J'_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))} \|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))} \leq C_\beta \sqrt{m^\beta(\delta)},$$

wobei wieder Folgerung 3.29 verwendet wurde. Mit dem Lemma von Gronwall ergibt sich dann für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|\varrho_{\beta\delta}^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 \leq C_\beta \sqrt{m^\beta(\delta)}, \quad (\#)$$

mit einer neuen Konstante $C_\beta > 0$ die zusätzlich von $\operatorname{div}^M(v)$ und $T > 0$ abhängt. Wenn wir nun für $\beta > 0$ in (#) zum Limes für eine Teilfolge $\delta \rightarrow 0$ übergehen, erhalten wir wegen Folgerung 3.50: $\frac{1}{2} \|\varrho_\beta^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 = 0$ für fast alle $t_0 \in [0, T]$. \square

Die mathematische Entropieabschätzung hatte auf der rechten Seite noch einen Term $\|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2$, den wir mit der mathematischen Energieabschätzung kontrolliert haben, also folglich nicht unabhängig von $\beta > 0$. Um die mathematische Entropieabschätzung unabhängig von $\beta > 0$ zu bekommen, interpolieren wir $L^2(M_t)$ zwischen $L^1(M_t)$ und $H^1(M_t)$. Die $L^1(M_t)$ -Norm ist dann gleichmäßig beschränkt aufgrund von Massenerhaltung und Nichtnegativität. Wir behandeln nur den Fall $d = 2$, da $d = 1$ leichter zu handhaben ist.

Folgerung 3.56. (Mathematische Entropieabschätzung des β -Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta > 0$ für die Lösung ϱ_β aus Satz 3.54 die folgende Abschätzung der mathematischen Entropie aus Definition 3.43:*

$$\|G^\beta(\varrho_\beta)\|_{L^\infty(L^1(M))} + \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C$$

mit einer von $\beta > 0$ unabhängigen Konstanten $C > 0$.

Beweis. Satz 3.44 zusammen mit Folgerung 3.29 liefert für $\beta, \delta > 0$:

$$\|G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})\|_{L^\infty(L^1(M))} + \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2) \leq C_\beta. \quad (\star)$$

Es konvergiert nach Auswahl einer Teilfolge punktweise $G^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}) \rightarrow G^\beta(\varrho_\beta)$ nach Folgerung 3.50. Mit dem Lemma von Fatou können wir dann zu $\beta > 0$ im ersten Term von (\star) zum Limes inferior für $\delta \rightarrow 0$ übergehen. Der zweite Term in (\star) ist unterhalbstetig bzgl. der schwachen Konvergenz aus Folgerung 3.48. Die rechte Seite von (\star) konvergiert schließlich stark aufgrund von Folgerung 3.50. Damit ergibt sich:

$$\|G^\beta(\varrho_\beta)\|_{L^\infty(L^1(M))} + \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\varrho_\beta\|_{L^2(L^2(M))}^2). \quad (\dagger)$$

Um die rechte Seite von (†) weiter abzuschätzen, benutzen wir Lemma 3.46. Damit gilt dann für fast alle $t \in [0, T]$:

$$\|\varrho_\beta(t)\|_{L^2(M_t)} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{W^{1,2}(M_t)}^{\frac{1}{2}} \|\varrho_\beta(t)\|_{L^1(M_t)}^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Satz 3.55 ist $\varrho_\beta(t) \geq 0$ fast überall, für fast alle $t \in [0, T]$. Daher stimmt $\|\varrho_\beta(t)\|_{L^1(M_t)}$ für fast alle $t \in [0, T]$ mit der Gesamtmasse überein. Ferner ist $\varrho_\beta(t) \in W_t$ für fast alle $t \in [0, T]$, daher ist diese Gesamtmasse konstant. Wir erhalten also folgende Abschätzung $\|\varrho_\beta(t)\|_{L^2(M_t)} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{W^{1,2}(M_t)}^{\frac{1}{2}}$ mit einer neuen Konstanten $C > 0$. Über die Zeit integriert ergibt dies, wenn wir noch in der Zeit Höldern: $\|\varrho_\beta\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C \|\varrho_\beta\|_{L^2(W^{1,2})}$. Schließlich verwenden wir noch, dass auf $L^2(W)$ die $L^2(L^2(M))$ -Norm von $\Delta^M \varrho_\beta$ äquivalent zur vollständigen $L^2(H^2(M))$ -Norm ist. Damit wird (†) zu:

$$\|G^\beta(\varrho_\beta)\|_{L^\infty(L^1(M))} + \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(L^2(M))})$$

und wir können mit der Young-Ungleichung den Term auf der rechten Seite in die linke absorbieren. \square

Die physikalisch relevante Abschätzung ist die Abschätzung der linearisierten Oberflächenenergie des freien Interfaces. Das Oberflächenelement wurde in Proposition 2.11 hergeleitet und die Linearisierung in Proposition 2.12. Wir definieren daher:

Definition 3.57. (Physikalische Energie) Sei M eine kompakte Fläche der Klasse C^2 mit mittlerer Krümmung k und Weingarten-Abbildung K . Definiere das Funktional $E : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$E(\varrho) = \int_M 1 - \varrho k - \frac{1}{2} \varrho^2 |K|^2 + \frac{1}{2} |\nabla^M \varrho|^2 d\mathcal{H}^d.$$

Um von der physikalischen Energieabschätzung zu profitieren, müssen wir zeigen, dass sich dadurch die $H^1(M_t)$ -Norm kontrollieren lässt. Wir benutzen dazu den gleichen Trick wie oben und interpolieren die $L^2(M_t)$ -Norm durch die $L^1(M_t)$ und $H^1(M_t)$ -Norm. Wir behandeln ebenfalls nur den Fall $d = 2$, da der Fall $d = 1$ leichter handzuhaben ist. Die folgende Aussage formulieren wir zeitunabhängig und verwenden sie später zu jedem Zeitpunkt.

Proposition 3.58. (Die Energie kontrolliert die H^1 -Norm) Sei M eine kompakte, zusammenhängende C^2 -Fläche und $E : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ das Energiefunktional aus Definition 3.57. Für $R > 0$ sei $Z \subset H^1(M)$ definiert durch:

$$Z = \{\varrho \in H^1(M) \mid \varrho \geq 0 \text{ fast überall und } \int_M \varrho d\mathcal{H}^d = R\}.$$

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $\varrho \in Z$ die folgende Abschätzung gilt

$$\|\varrho\|_{H^1(M)}^2 \leq C_M(E(\varrho) + 1).$$

Beweis. Nach Lemma 3.46 gilt die folgende Interpolationsabschätzung für Funktionen $\varrho \in H^1(M)$:

$$\|\varrho\|_{L^2(M)} \leq C \|\varrho\|_{H^1(M)}^{\frac{1}{2}} \|\varrho\|_{L^1(M)}^{\frac{1}{2}}.$$

Da $\varrho \in H^1(M)$ nichtnegativ ist gilt:

$$\|\varrho\|_{L^1(M)} = \int_M |\varrho| d\mathcal{H}^d = \int_M \varrho d\mathcal{H}^d = R.$$

Schätzen wir mit der Hölder-Ungleichung nach unten hin ab:

$$E(\varrho) \geq \mathcal{H}^d(M) - \|k\|_{L^2(M)} \|\varrho\|_{L^2(M)} - \|K\|_{L^\infty(M)}^2 \|\varrho\|_{L^2(M)} + \frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho\|_{L^2(M)}^2.$$

Auf Z gilt die folgende Poincaré-Ungleichung: $\|\varrho\|_{L^2(M)} \leq C(1 + \|\nabla^M \varrho\|_{H^1(M)})$. Damit folgt wenn wir die obigen Überlegungen anwenden:

$$E(\varrho) \geq \mathcal{H}^d(M) - \|k\|_{L^2(M)} \|\varrho\|_{H^1(M)}^{\frac{1}{2}} - \|K\|_{L^\infty(M)}^2 \|\varrho\|_{H^1(M)} + c_0 \|\varrho\|_{H^1(M)}^2 - C.$$

Dann können wir mit der Young-Ungleichung die negativen ϱ -Terme in den positiven absorbieren und es folgt die Behauptung. \square

Die Konstante aus Proposition 3.58 hängt von der Fläche ab. Wenn wir sie zu jedem Zeitpunkt anwenden, sei bemerkt, dass die Konstante unabhängig von der Zeit gewählt werden kann. Dies folgt einerseits, weil die Konstante aus Lemma 3.46 zeitunabhängig gewählt werden kann, andererseits weil die Konstante der Poincaré-Ungleichung aus Satz 6.13 unabhängig von der Zeit gewählt werden kann und schließlich weil k und K nach Voraussetzung 3.1 in $L^\infty(L^\infty(M))$ beschränkt sind.

Satz 3.59. (Physikalische Energieungleichung des δ -Problems) *Zu $t_0 \in [0, T]$ betrachten wir $E_{t_0} : H^1(M_{t_0}) \rightarrow \mathbb{R}$, die Energie aus Definition 3.57. Dann erfüllt unter den getroffenen Voraussetzungen zu $\beta, \delta > 0$ die Lösung $\varrho_{\beta\delta}$ aus Satz 3.54 für fast alle $t_0 \in [0, T]$ die folgende Energieungleichung:*

$$\begin{aligned} E_{t_0}(\varrho_{\beta\delta}(t_0)) + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} m^\beta(\varrho_{\beta\delta}(t)) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}(t))|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ \leq E_0(\varrho_0) + C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; H^1(M))}^2 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^{n+2}([0, t_0]; L^{n+2}(M))}^{n+2}). \end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C > 0$, von $\delta > 0$ und $\beta > 0$ unabhängig. Dabei bezeichnet n den Wachstums-exponenten der Mobilität aus Voraussetzung 3.5.

Beweis. Wir wählen zu $h > 0$ und $t_0 \in [0, T]$ als Testfunktion eine in der Zeit regularisierte Form des Druckes $w = w_1^h + w_2^h + w_3^h$ in Gleichung (3.2.1), wobei:

$$\begin{aligned} w_1^h(t) &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (-\Delta^M \varrho(s)) \circ \Phi_t^{*s-t} \chi_{(-\infty, t_0]}(s) ds, \\ w_2^h(t) &= -k \eta_h(t), \\ w_3^h(t) &= \frac{1}{h} \int_{t-h}^t (-\varrho_{\beta\delta}(s) |K|^2) \circ \Phi_t^{*s-t} \chi_{(-\infty, t_0-h]}(s) ds. \end{aligned}$$

Dabei ist η_h eine stückweise lineare Abschneidefunktion mit $\eta_h(t) = 1$ für $t \leq t_0 - h$ und $\eta_h(t) = 0$ für $t \geq t_0$. Für w_3^h setze ϱ_0 auf M_0 für $t \leq 0$ konstant fort. Behandeln wir die w_i^h -Terme $i = 1, 2, 3$ separat. Die zugehörigen parabolischen Teile von w_1^h, w_2^h und w_3^h bezeichnen wir mit $(\star), (\dagger)$ und (\sharp) .

1. Es entsteht w_1^h auf die gleiche Weise wie in Proposition 3.41. Daher nimmt mit Proposition 3.42 der parabolische Term mit dieser Testfunktion die folgende Gestalt an, die wir dann weiter umformen:

$$\begin{aligned} (\star) &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} -\Delta^M \varrho_{\beta\delta}(t) (\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h)) \circ \Phi_t^{*h} \mathcal{J} \Phi_t^{*h} d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) \bullet (\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) - (D\Phi_t^{*h})^T (\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h)) \circ \Phi_t^{*h}) \mathcal{J} \Phi_t^{*h} d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) \bullet \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h} \nabla^M \mathcal{J} \Phi_t^{*h} d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) \bullet (\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) - \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h)) \circ \Phi_t^{*h} \mathcal{J} \Phi_t^{*h} d\mathcal{H}^d dt \quad (***) \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta} \bullet \left(\frac{Id - (D\Phi_t^{*h})^T}{h} \right) \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h} \mathcal{J} \Phi_t^{*h} d\mathcal{H}^d dt \quad (***) \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) \bullet \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h} \nabla^M \left(\frac{1 - \mathcal{J} \Phi_t^{*h}}{h} \right) d\mathcal{H}^d dt. \quad (***) \end{aligned}$$

Dabei haben wir im ersten Schritt partiell integriert und die Kettenregel verwendet und anschließend Terme eingefügt, die wieder abgezogen wurden. In $(\star\star\star)$ können wir mit der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 bereits zum Limes $h \rightarrow 0$ übergehen. Den Term $(\star\star)$ schätzen wir mit der elementaren Ungleichung $a^2 - ab \geq \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$ weiter nach unten hin ab:

$$\begin{aligned} (\star\star) &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) \bullet (\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) - \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h} \mathcal{J} \Phi_t^{*h}) d\mathcal{H}^d dt \\ &\geq \frac{1}{2h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt - \frac{1}{2h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h} \mathcal{J} \Phi_t^{*h}|^2 d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Die Transformationsdeterminante im zweiten Integral ist positiv und kann aus dem Betrag gezogen werden. Anwenden des Transformationsatzes 6.8 kürzt dann einen Faktor der Determinante. Schließlich fügen wir wieder Terme ein, die wir abziehen:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*h} \mathcal{J} \Phi_t^{*h}|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h)|^2 (\mathcal{J} \Phi_t^{*h}) \circ \Phi_{t-h}^{*-h} dd\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{2h} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h)|^2 \mathcal{H}^d dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t-h)|^2 \left(\frac{(\mathcal{J} \Phi_t^{*h}) \circ \Phi_{t-h}^{*-h} - 1}{h} \right) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir ein Teleskopintegral. Wenn wir dieses auswerten können wir darin zum Limes $h \rightarrow 0$ übergehen. Der Term vom Endzeitpunkt konvergiert dann für $h \rightarrow 0$ für fast alle $t_0 \geq 0$. Schließlich ergibt sich für den gesamten w_1^h -Term im Limes inferior $h \rightarrow 0$ nach der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 :

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} (\star) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 - \frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho_0\|_{L^2(M_0)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\nabla^M \varrho_{\beta\delta}|^2 \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta} \bullet (((Dv^*)^S - v_n K) \nabla^M \varrho_{\beta\delta} + \varrho_{\beta\delta} \nabla^M \operatorname{div}^M(v)) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Den ersten Term lassen wir wo er ist, die restlichen bringen wir auf die andere Seite und schätzen durch $\frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho_0\|_{L^2(M_0)}^2 + C \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0,t_0]; H^1(M))}$ mit der Hölder-Ungleichung und der Sobolev-Einbettung sowie Voraussetzung 3.1 an M ab wie in Satz 3.22.

2. Berechnen wir zunächst die Zeitableitung von w_2^h :

$$\frac{D^M}{Dt} w_2^h(t) = -\eta_h(t) \frac{D^M}{Dt} k(t) + \frac{1}{h} k(t) \chi_{(t_0-h, t_0]}(t).$$

Dann hat, wenn wir w_2^h einsetzen, der parabolische Term die folgende Gestalt:

$$(\dagger) = \int_0^{t_0} \eta_h(t) \int_{M_t} \frac{D^M}{Dt} k(t) \varrho_{\beta\delta}(t) d\mathcal{H}^d dt - \frac{1}{h} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{M_t} k(t) \varrho_{\beta\delta}(t) d\mathcal{H}^d dt + \int_{M_0} k(0) \varrho_0 d\mathcal{H}^d.$$

Für $h \rightarrow 0$ konvergiert das erste Integral in (\dagger) nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Das zweite Integral konvergiert für $h \rightarrow 0$ für fast alle $t_0 \geq 0$. Somit lautet der Term (\dagger) für fast alle $t_0 \geq 0$ im Limes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\dagger) = \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{D^M}{Dt} k(t) \varrho_{\beta\delta}(t) d\mathcal{H}^d dt - \int_{M_{t_0}} k(t_0) \varrho_{\beta\delta}(t_0) d\mathcal{H}^d + \int_{M_0} k(0) \varrho_0 d\mathcal{H}^d.$$

Die dabei entstehenden Terme zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_0$ führen später zu den Beiträgen in der physikalischen Energie zu den jeweiligen Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_0$. Den zweiten Term lassen wir auf der linken Seite, die anderen bringen wir auf die rechte Seite und schätzen mit der Hölder-Ungleichung und Voraussetzung 3.1 an M ab.

3. Schließlich berechnen wir noch die Zeitableitung von w_3^h mit Hilfe von Proposition 2.6:

$$\begin{aligned} \frac{D^M}{Dt} w_3^h(t) &= \frac{1}{h} (-\varrho_{\beta\delta}(t)|K(t)|^2 + (\varrho_{\beta\delta}(t-h)|K(t-h)|^2) \circ \Phi_t^{*-h}) \chi_{(-\infty, t_0]}(t) \\ &\quad + \frac{1}{h} \varrho_{\beta\delta}(t)|K(t)|^2 \chi_{(t_0-h, t_0]}(t). \end{aligned}$$

Einsetzen in den parabolischen Term liefert:

$$\begin{aligned} (\#) &:= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 |K(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} \varrho_{\beta\delta}(t) (\varrho_{\beta\delta}(t-h)|K(t-h)|^2) \circ \Phi_t^{*-h} d\mathcal{H}^d dt \quad (\#\#) \\ &\quad - \frac{1}{h} \int_{t_0-h}^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 |K(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_{M_0} |\varrho_0|^2 |K(0)|^2 d\mathcal{H}^d. \quad (\#\#\#) \end{aligned}$$

Es konvergiert $(\#\#\#)$ für $h \rightarrow 0$ für fast alle $t_0 \geq 0$. Als nächstes schätzen wir in $(\#\#)$ im zweiten Integral die ersten beiden Faktoren mit der elementaren Ungleichung $-ab \geq -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2$ nach unten hin ab. Anschließend wenden wir nochmal den Transformationsatz 6.8 an und fügen Terme ein, die wir wieder abziehen:

$$\begin{aligned} (\#\#) &\geq \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 |K(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \frac{1}{2h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} (|\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 + |\varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{*-h}|^2) |K(t-h)|^2 \circ \Phi_t^{*-h} d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 |K(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 \frac{|K(t)|^2 - |K(t-h)|^2 \circ \Phi_t^{*h}}{h} d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \frac{1}{h} \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} |\varrho_{\beta\delta}(t-h)|^2 |K(t-h)|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} \frac{1}{2} |\varrho_{\beta\delta}(t-h)|^2 |K(t-h)|^2 \frac{1 - \mathcal{J}\Phi_{t-h}^{*-h}}{h} d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Erster und dritter Term bilden ein Teleskopintegral. Nach einer Indexverschiebung und Auswertung können wir dann für $h \rightarrow 0$ zum Limes inferior übergehen. Die resultierenden Terme fassen wir mit den Limiten aus $(\#\#\#)$ zusammen:

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow 0} (\#\#) &\geq -\frac{1}{2} \int_{M_{t_0}} \varrho_{\beta\delta}(t_0)^2 |K(t_0)|^2 d\mathcal{H}^d + \frac{1}{2} \int_{M_0} \varrho_0^2 |K(0)|^2 d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{1}{2} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 \frac{D^M}{Dt} |K(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt - \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{1}{2} |\varrho_{\beta\delta}(t)|^2 |K(t)|^2 \operatorname{div}^M(v(t)) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Terme sind die Beiträge der physikalischen Energie zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = t_0$. Den ersten Term lassen wir auf der rechten Seite, die anderen bringen wir auf die linke Seite und schätzen mit der Hölder-Ungleichung und Voraussetzung 3.1 an M ab.

Der parabolische Term nimmt also genau die Form an, die man nach einer formalen Rechnung erwartet hätte. Zu den Energietermen in der Behauptung fehlt nur noch die Differenz der Gesamtfläche, die wir ergänzen und wieder abziehen und dann mit Voraussetzung 3.1 abschätzen. Für den elliptischen Teil konvergiert $w_1^h + w_2^h + w_3^h \rightarrow p(\varrho_{\beta\delta})$ in $L^2(H^1(M))$. Die zugehörige Konvergenz für w_1^h folgt mit Proposition 3.41 bzw. beim Rückwertsittelwert für w_3^h in analoger Weise. Die Konvergenz für w_2^h folgt sofort mit dem Konvergenzatz von Lebesgue. Daher hat der elliptische Term im Limes $h \rightarrow 0$ die folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} \langle \tilde{\mathcal{A}}_t^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)), p(\varrho_{\beta\delta}(t)) \rangle_{H^1(M_t)} dt &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} m(\varrho_{\beta\delta}(t)) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}(t))|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \int_0^{t_0} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}(t)) \bullet a(\varrho_{\beta\delta}(t)) \nabla^M k d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Den zweiten Term bringen wir auf die rechte Seite und schätzen folgendermaßen mit der Young-Ungleichung nach oben hin ab:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_{M_t} m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t)) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}(t)) \bullet a(\varrho_{\beta\delta}(t)) \nabla^M k d\mathcal{H}^d dt \\ & \leq \frac{1}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} m(\varrho_{\beta\delta}(t)) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}(t))|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{1}{2} \|\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k\|_{L^2([0,t_0];L^2(M))}^2. \end{aligned}$$

Den ersten Term auf der rechten Seite können wir in den positiven elliptischen Term absorbieren. Den zweiten Term schätzen wir weiter ab. Die approximierenden Mobilitäten können wir durch die ursprünglichen Mobilitäten nach oben abschätzen $m^{\beta\delta}(s) \leq C(1 + s^n)$. Gradienten der Krümmung sind gleichmäßig beschränkt nach Voraussetzung 3.1 an die Fläche und a wächst höchstens linear nach Voraussetzung 3.6. Wir erhalten also:

$$\|\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k\|_{L^2([0,t_0];L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^{n+2}([0,t_0];L^{n+2}(M))}^{n+2}).$$

□

Wenn man interessiert ist, wie die Lösung durch die Daten abgeschätzt ist, kann man im Beweis des letzten Satzes wie in Satz 3.22 bessere Abschätzungen mit dem Sobolevschen Einbettungssatz finden. Man stellt dann fest, dass die Lösung sich durch folgende Normen der Daten abschätzen lässt: $K \in L^\infty(W^{1,\infty}(M))$, $v \in L^1(W^{2,2+\epsilon}(M))$ und $\frac{D^M}{Dt} K \in L^1(L^{1+\epsilon}(M))$ für ein $\epsilon > 0$.

Um nach dem Limes $\delta \rightarrow 0$ die Terme auf der rechten Seite obiger Abschätzung für maximale Wachstumsexponenten n zu kontrollieren, folgen wir der Methodik, Interpolation zwischen höheren Normen und der gleichmäßig beschränkten $L^1(M_t)$ -Norm zu verwenden. Dabei können wir auf die bereits unabhängig von $\beta > 0$ gezeigte mathematische Entropieabschätzung aus Folgerung 3.56 zurückgreifen. Es macht also Sinn zwischen der L^1 -Norm und der H^2 -Norm zu interpolieren.

Lemma 3.60. (Interpolation) *Sei M eine d -dimensionale, zusammenhängende, kompakte Fläche der Klasse C^2 mit äußerer Konormalen ν^* . Sei $1 \leq r \leq 2$. Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $u \in H^2(M)$ mit $u = 0$ oder $\nu^* \bullet \nabla^M u = 0$ auf ∂M die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|u\|_{W^{1,q}(M)} \leq C \|u\|_{H^2(M)}^\alpha \|u\|_{L^r(M)}^{1-\alpha}.$$

Dabei ist $1 - \frac{d}{q} = \alpha(2 - \frac{d}{2}) + (1 - \alpha)(-\frac{d}{r})$ mit:

1. $2 \leq q \leq \infty$ falls $d = 1$,
2. $2 \leq q < \infty$ falls $d = 2$,
3. $q \leq \frac{2d}{d-2}$ falls $d \leq q$ und $d \geq 3$,
4. $4 \leq q \leq \frac{2d}{d-2}$ falls $d < q$ und $d \geq 3$.

Beweis. Nach Lemma 3.46 ist:

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C \|u\|_{H^1(M)}^\alpha \|u\|_{L^2(M)}^{1-\alpha}$$

für $-\frac{d}{q} = \alpha(1 - \frac{d}{2}) + (1 - \alpha)(-\frac{d}{2})$ und $2 \leq q \leq \infty$ für $d = 1$, $2 \leq q < \infty$ für $d = 2$ und $q \in [2, \frac{2d}{d-2}]$ für $d \geq 3$. Wenden wir diese Tatsache auf $\nabla^M u$ an, dann folgt:

$$\|\nabla^M u\|_{L^q(M)} \leq C \|u\|_{H^2(M)}^\alpha \|\nabla^M u\|_{L^2(M)}^{1-\alpha}$$

mit $1 - \frac{d}{q} = \alpha(2 - \frac{d}{2}) + (1 - \alpha)(1 - \frac{d}{2})$. Es ist nach partieller Integration (der Randterm verschwindet nach Voraussetzung) und der Hölder Ungleichung:

$$\|\nabla^M u\|_{L^2(M)} \leq \|u\|_{L^2(M)}^{\frac{1}{2}} \|\Delta^M u\|_{L^2(M)}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir können die triviale Relation $1 - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}(2 - \frac{d}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{d}{2})$ in obige Bedingung für die Exponenten einsetzen. Dann ist also gezeigt:

$$\|\nabla^M u\|_{L^q(M)} \leq C \|u\|_{H^2(M)}^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_{L^2(M)}^{\frac{1-\alpha}{2}}$$

mit $1 - \frac{d}{q} = \frac{1+\alpha}{2}(2 - \frac{d}{2}) + \frac{1-\alpha}{2}(-\frac{d}{2})$. Wegen $\|u\|_{L^2(M)} \leq \|u\|_{H^1(M)} \leq \|u\|_{H^2(M)}$ können wir außerdem trivialerweise abschätzen:

$$\|u\|_{L^q(M)} \leq C \|u\|_{H^1(M)}^\alpha \|u\|_{L^2(M)}^{1-\alpha} \leq C \|u\|_{H^2(M)}^\alpha \|u\|_{H^2(M)}^{\frac{1-\alpha}{2}} \|u\|_{L^2(M)}^{\frac{1-\alpha}{2}} = C \|u\|_{H^2(M)}^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_{L^2(M)}^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Es gilt also:

$$\|u\|_{W^{1,q}(M)} \leq C \|u\|_{H^2(M)}^{\frac{1+\alpha}{2}} \|u\|_{L^2(M)}^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Wir müssen schließlich noch $L^2(M)$ zwischen $W^{1,q}(M)$ und $L^r(M)$ interpolieren. Nach Lemma 3.46 ist:

$$\|u\|_{L^2(M)} \leq C \|u\|_{W^{1,q}(M)}^\beta \|u\|_{L^r(M)}^{1-\beta}$$

mit $-\frac{d}{2} = \beta(1 - \frac{d}{q}) + (1 - \beta)(-\frac{d}{r})$. Folglich ist:

$$\|u\|_{W^{1,q}} \leq C \|u\|_{H^2(M)}^\gamma \|u\|_{L^r(M)}^{1-\gamma}.$$

Dabei ist $\gamma = \frac{1+\alpha}{2-\beta+\alpha\beta}$ und es gilt: $1 - \frac{d}{q} = \gamma(2 - \frac{d}{2}) + (1 - \gamma)(-\frac{d}{r})$. \square

Damit können wir die rechte Seite in Satz 3.59 kontrollieren und erhalten folgende gleichmäßige Beschränktheit.

Satz 3.61. (Physikalische Energieabschätzung des β -Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen sind zu $\beta > 0$ die Lösungen ϱ_β aus Satz 3.54 gleichmäßig in $L^\infty(H^1(M))$ beschränkt.*

Beweis. Wir können in der Ungleichung von Satz 3.59 den positiven elliptischen Teil weglassen und anschließend für $\beta > 0$ zum Limes $\delta \rightarrow 0$ übergehen. Aufgrund der Konvergenz von $\varrho_{\beta\delta} \rightarrow \varrho_\beta$ in $L^p(W^{1,p}(M))$ für $1 \leq p < 4$ aus Proposition 3.51 und in $L^p(L^p(M))$ für $p < \infty$ aus Folgerung 3.50 können wir nach Auswahl einer Teilfolge zum Grenzwert übergehen und erhalten für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$E_{t_0}(\varrho_\beta(t_0)) \leq E_0(\varrho_0) + C(1 + \|\varrho_\beta\|_{L^2([0,t_0];H^1(M))}^2 + \|\varrho_\beta\|_{L^{n+2}([0,t_0];L^{n+2}(M))}^{n+2}).$$

Es ist ϱ_β wegen Satz 3.55 nichtnegativ fast überall, für fast alle $t_0 \in [0, T]$. Daher können wir Proposition 3.58 anwenden um die Energie nach unten durch die H^1 -Norm abzuschätzen. Der Term von den Anfangswerten ist beschränkt. Damit erhalten wir:

$$\|\varrho_\beta(t_0)\|_{H^1(M_{t_0})}^2 \leq C(1 + \|\varrho_\beta\|_{L^2([0,t_0];H^1(M))}^2 + \|\varrho_\beta\|_{L^{n+2}([0,t_0];L^{n+2}(M))}^{n+2}). \quad (\star)$$

Mit Lemma 3.46 können wir die L^{n+2} -Norm zwischen der H^1 -Norm und der L^1 -Norm interpolieren:

$$\|\varrho_\beta(t)\|_{L^{n+2}(M_t)}^{n+2} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{n+1} \|\varrho_\beta(t)\|_{L^1(M_t)} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{n+1}, \quad (\dagger)$$

wobei wir wieder verwendet haben, dass die ϱ_β nichtnegativ sind und feste Gesamtmasse haben. Mit Lemma 3.60 schätzen wir dann $n - 1$ Faktoren der H^1 -Norm ab, indem wir zwischen der H^2 -Norm und der L^1 -Norm interpolieren:

$$\|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{n-1} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{H^2(M_t)}^{\frac{(n-1)2}{3}} \|\varrho_\beta(t)\|_{L^1(M_t)}^{\frac{(n-1)1}{3}} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{H^2(M_t)}^{\frac{(n-1)2}{3}},$$

wobei wir wieder verwendet haben, dass die ϱ_β nichtnegativ sind und feste Gesamtmasse haben. Wenn wir (\dagger) über $[0, t_0]$ integrieren erhalten wir:

$$\|\varrho_\beta\|_{L^{n+2}([0,t_0];L^{n+2}(M))}^{n+2} \leq C \int_0^{t_0} \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{n+1} dt \leq C \int_0^{t_0} \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^2 \|\varrho_\beta(t)\|_{H^2(M_t)}^{\frac{(n-1)2}{3}} dt.$$

Damit wird (\star) zu:

$$\|\varrho_\beta(t_0)\|_{H^1(M_{t_0})}^2 \leq C(1 + \int_0^{t_0} \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^2 (1 + \|\varrho_\beta(t)\|_{H^2(M_t)}^{\frac{(n-1)\frac{2}{3}}{3}}) dt).$$

Falls $n \leq 4$, so ist $(n-1)\frac{2}{3} \leq 2$ und wir können abschätzen: $\|\varrho_\beta(t)\|_{H^2(M_t)}^{\frac{(n-1)\frac{2}{3}}{3}} \leq C(1 + \|\varrho_\beta(t)\|_{H^2(M_t)}^2)$, was mit Satz 3.56 gleichmäßig in $\beta > 0$ beschränkte $L^1[0, T]$ -Norm besitzt. Damit folgt die Behauptung mit dem Lemma von Gronwall. \square

Übergang zum Grenzwert

Nachdem wir die notwendigen Abschätzungen gleichmäßig in $\beta > 0$ bereitgestellt haben, können wir beim Übergang zum Grenzwert verfahren wie zuvor. Aus der parabolischen Beschränktheit aus Satz 3.61 sowie der elliptischen Beschränktheit aus Folgerung 3.56 folgt zunächst schwache bzw. schwach* Konvergenz. Unter Ausnutzung der Evolutionsgleichung folgt eine Abschätzung von Zeitdifferenzen und fürderhin starke Konvergenz. Schließlich folgt der Limesübergang ähnlich wie im Fall $\delta \rightarrow 0$.

Folgerung 3.62. (Schwache Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert ein $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^4(W^{1,4}(M)) \cap L^2(W_0)$, so dass die Lösungen ϱ_β zu $\beta > 0$ aus Satz 3.54 nach Auswahl einer Teilfolge in der $L^2(H^2(M))$ und $L^4(W^{1,4}(M))$ -Norm für $\beta \rightarrow 0$ schwach gegen ϱ konvergieren. Die Konvergenz ist weiterhin schwach* in $L^\infty(H^1(M))$.*

Beweis. Mit Satz 3.61 und Folgerung 3.56 wie im Beweis von Folgerung 3.48. \square

Satz 3.63. (Zeitkompaktheit) *Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen die Lösungen ϱ_β aus Satz 3.54 zu $\beta > 0$ die folgende Abschätzung von Zeitdifferenzen:*

$$\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \|f_\beta(t+h) - f_\beta(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \leq C$$

mit einer von $\beta > 0, h > 0$ unabhängigen Konstanten $C > 0$. Dabei ist $f_\beta(t) = \varrho_\beta(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_t^*$ mit dem Diffeomorphismus Φ_t^* aus Definition 3.2.

Beweis. Wir können in der Behauptung von Satz 3.59 für $\beta > 0$ zum Limes $\delta \rightarrow 0$ übergehen. Aufgrund der Konvergenz von $\varrho_{\beta\delta} \rightarrow \varrho_\beta$ in $L^p(W^{1,p}(M))$ für $1 \leq p < 4$ aus Proposition 3.51 und in $L^p(L^p(M))$ für $p < \infty$ aus Folgerung 3.50 können wir nach Auswahl einer Teilfolge zum Grenzwert übergehen und erhalten für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$E_{t_0}(\varrho_\beta(t_0)) + \|J'_\beta\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq E_0(\varrho_0) + C(1 + \|\varrho_\beta\|_{L^2([0,t_0];H^1(M))}^2 + \|\varrho_\beta\|_{L^{n+2}([0,t_0];L^{n+2}(M))}^{n+2}). \quad (\star)$$

Dabei bezeichnet $J'_\beta \in L^2(L^2(M))$ den schwachen Limes von $\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})$ im reflexiven Banachraum $L^2(L^2(M))$. Mit der starken Konvergenz aus Folgerung 3.50, den Wachstumsvoraussetzungen 3.6 an a sowie der Beschränktheit der approximierenden Mobilitäten konvergiert dann ebenfalls schwach in $L^2(L^2(M))$ für $\delta \rightarrow 0$:

$$\sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} \sqrt{m^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta})} (\nabla^M p - a(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) \rightharpoonup J_\beta = \sqrt{m^\beta(\varrho_\beta)} (J'_\beta - \sqrt{m^\beta(\varrho_\beta)} a(\varrho_\beta) \nabla^M k).$$

Mit Satz 3.61 und der Sobolev-Einbettung folgt, dass die rechte Seite von (\star) unabhängig von $\beta > 0$ beschränkt ist. Ferner ist der physikalische Energieterm auf der linken Seite von (\star) nach Proposition 3.58 und Satz 3.61 gleichmäßig nach unten beschränkt. Somit ist J'_β in $L^2(L^2(M))$ gleichmäßig in $\beta > 0$ beschränkt. Damit folgt wieder mit Satz 3.61 und der Sobolevschen Einbettung, dass J_β in $L^{2-\epsilon}(L^{2-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$ gleichmäßig in $\beta > 0$ beschränkt ist. Schreiben wir im Folgenden $f_\beta(t) = \varrho_\beta(t) \circ \Phi_t^* \mathcal{J} \Phi_t^*$. Wenn wir jetzt für $h > 0$ in Gleichung (3.2.3) im Beweis von Satz 3.49 zum Limes in einer Teilfolge $\delta \rightarrow 0$ übergehen folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \|f_\beta(t+h) - f_\beta(t)\|_{L^2(M_0)}^2 dt \\ &= \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \left(\int_t^{t+h} [f_\beta(s) - f_\beta(s-h)] \circ \Phi_t^{*-1} \chi_{[h,T]}(s) ds \right) \bullet J_\beta(t) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die schwache Konvergenz des Flusses verwendet sowie die Tatsache, dass $f_{\beta\delta} \rightarrow f_\beta$ stark in $L^p(W^{1,p}(M_0))$ für $p < 4$ konvergiert, was aus Proposition 3.51 folgt. Die Behauptung folgt schließlich mit der Faltungsabschätzung und der Hölder-Ungleichung, wenn wir verwenden, dass die f_β nach Folgerung 3.62 in $L^4(W^{1,4}(M_0))$ sowie der Fluss nach dem oben gezeigten in $L^{2-\epsilon}(L^{2-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$ gleichmäßig in $\beta > 0$ beschränkt sind. \square

Folgerung 3.64. (Starke Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt für ϱ aus Folgerung 3.62, dass die Lösungen ϱ_β aus Satz 3.54 nach Auswahl einer weiteren Teilfolge $\varrho_\beta \rightarrow \varrho$ für $\beta \rightarrow 0$ in $L^p(L^p(M))$ für $1 \leq p < \infty$ und $L^p(W^{1,p}(M))$ für $1 \leq p < 4$ stark konvergieren.*

Beweis. Folgt aus Satz 3.63, Satz 3.61 und Folgerung 3.56 wie in Folgerung 3.50 zusammen mit Proposition 3.51. \square

Folgerung 3.65. (Lösung des Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen ist die Funktion $\varrho \in L^2(W) \cap L^\infty(H^1(M))$ aus Folgerung 3.64 und Folgerung 3.62 eine Lösung der schwachen Formulierung (C^0) aus Definition 3.53.*

Beweis. Mit den gezeigten Konvergenzen aus Folgerung 3.62 und 3.64 können wir in der Behauptung von Satz 3.54 zu $\epsilon > 0$ mit einer Testfunktion $\eta \in L^{2+\epsilon}(W_\epsilon) \cap L^{4+\epsilon}(W^{1,4+\epsilon}(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $\eta(T) = 0$ zum Limes $\beta \rightarrow 0$ übergehen. Dabei verlieren wir Beschränktheit der Mobilitäten, welche in $L^p(L^p(M))$ für alle $p < \infty$ stark konvergieren. Daher ist es erforderlich eine Testfunktion in diesem Raum zu wählen. \square

4 Existenz für das Surfactant-System auf evolvierenden Flächen

In diesem Kapitel werden wir die Methoden aus Kapitel 3 auf das gekoppelte System von dünnem Film und Surfactant anwenden. Dazu werden wir ebenfalls ein dreistufiges Approximationsargument durchführen, das aus den Schritten Galerkin-Approximation, Regularisierung der degenerierten Mobilität und Trunkierung der unbeschränkten Mobilität besteht.

4.1 Galerkin-Approximation

Wie im planaren Fall [WG] gehen wir in diesem Kapitel von einem eindimensionalen Substrat aus. Um den Kontext zu Kapitel 3 zu bewahren und um zu verdeutlichen, dass die Mehrheit der Argumente in höheren Raumdimensionen zulässig ist, bleiben wir trotzdem bei der mehrdimensionalen Notation von ∇^M , div^M , Δ^M etc. Der Grund, warum wir uns auf eine Raumdimension zurückziehen, liegt in der Tatsache, dass keine mathematische Entropieabschätzung zur Verfügung steht, die eine gleichmäßige Abschätzung von $\Delta^M \rho$ liefert. Stattdessen übernehmen wir den Lösungsbegriff von [BF], wozu gleichmäßige Konvergenz der Lösungen gezeigt werden muss. Dazu verwenden wir Aussagen aus Einbettungssätzen, die nur in einer Raumdimension gelten.

Galerkin-Ansatz

Nachdem wir Voraussetzungen und die genaue Problemstellung festgelegt haben, werden wir mit der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen Galerkin-Lösungen konstruieren. Analog zum vorherigen Kapitel 3 wählen wir als Galerkin-Formulierung für die Gleichung des dünnen Filmes die modifizierte Formulierung, die wir dort mit (B) bezeichnet hatten. Für die Galerkin-Formulierung der Surfactantgleichung wählen wir die Formulierung des planaren Falls und verwenden genau die Ansatzfunktionen aus [DE1]. Dabei folgen wir der Idee aus [WG] den Galerkin-Ansatz im chemischen Potential durchzuführen.

Voraussetzung 4.1. (Voraussetzung an die Fläche) Es sei $T > 0$. Sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2$ eine eindimensionale, kompakte, orientierte, zusammenhängende evolvierende Kurve der Klasse $C^0(C^3) \cap C^1(C^2)$. Es kann M berandet sein. Die Normale an M bezeichnen wir mit n und die äußere Konormale des Randes mit ν^* . Die Normalgeschwindigkeit von M bezeichnen wir mit $v_n n$.

Wie in Abschnitt 3 Voraussetzung 3.2 fordern wir die Existenz eines Diffeomorphismus Φ , dessen Zeitableitung jene Normalgeschwindigkeit $v_n n$ liefert. Um eine mögliche tangentialen Komponente von Bewegungen von Materialpunkten zu berücksichtigen, verlangen wir ferner die Existenz eines Diffeomorphismus Φ^* , dessen Zeitableitung wir als die vollständige Geschwindigkeit v der Fläche M bezeichnen. Wenn wir den tangentialen Anteil von v mit v^* bezeichnen, so lässt sich die Geschwindigkeit folgendermaßen orthogonal zerlegen: $v = v_n n + v^*$.

Voraussetzung 4.2. (Voraussetzungen an Diffeomorphismen) Es existiere eine Abbildung $\Phi : [0, T] \times M_0 \rightarrow M$ der Klasse $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$, so dass Φ_t für alle $t \in [0, T]$ ein Diffeomorphismus von $M_0 \rightarrow M_t$ ist, welcher Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$\begin{aligned} \partial_t \Phi_t &= (v_n(t)n_t) \circ \Phi_t \text{ in } [0, T] \times M_0, \\ \Phi_0 &= \operatorname{Id}_{M_0} \quad \text{für } t = 0. \end{aligned}$$

Es gebe weiterhin eine Abbildung $\Phi^* : [0, T] \times M_0 \rightarrow M$ der Klasse $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$, so dass Φ_t^* für alle $t \in [0, T]$ ein Diffeomorphismus von $M_0 \rightarrow M_t$ ist, mit der Eigenschaft, dass $\Phi_0^* = \operatorname{Id}_{M_0}$ für $t = 0$. Die vollständige Geschwindigkeit v von M sei dann definiert durch:

$$\partial_t \Phi_t^* = v(t) \circ \Phi_t^* \text{ in } [0, T] \times M_0.$$

Wir setzen voraus, dass die inversen Abbildungen der Φ_t bzw. Φ_t^* ebenfalls in $C^1(C^2) \cap C^0(C^3)$ beschränkt sind.

Die Regularität von v^* ist insbesondere über die Relation $v = v_n n + v^*$ durch die Regularität der Diffeomorphismenfamilien aus Voraussetzung 4.2 gegeben.

Wie in Abschnitt 3 im Anschluss an Voraussetzung 3.2 folgern wir $v^* \bullet \nu^*$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$.

Wir werden schwache Lösungen zum folgenden starken Anfangsrandwertproblem konstruieren.

Definition 4.3. (Starke Formulierung) *Gesucht sind Funktionen $\varrho, \gamma : M \rightarrow \mathbb{R}$, die Lösungen der folgenden Anfangsrandwertprobleme sind:*

$$\begin{aligned} \partial_t^M \varrho - v_n k \varrho + \operatorname{div}^M (J_1(\varrho, \sigma(\gamma))) &= 0 \text{ auf } M, \\ \nu^* \bullet \nabla^M \varrho &= \nu^* \bullet J_1(\varrho, \sigma(\gamma)) = 0 \text{ auf } \partial M_t, t \in [0, T], \\ \varrho(0) &= \varrho_0 \text{ auf } M_0, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t^M \gamma - v_n k \gamma + \operatorname{div}^M (J_2(\varrho, \gamma, \sigma(\gamma))) &= 0 \text{ auf } M, \\ \nu^* \bullet J_2(\varrho, \gamma, \sigma(\gamma)) &= 0 \text{ auf } \partial M_t, t \in [0, T], \\ \gamma(0) &= \gamma_0 \text{ auf } M_0. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Die Flüsse J_1, J_2 und der Druck p sind in Abhängigkeit der Erhaltungsgrößen ϱ, γ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} J_1(\varrho, \sigma(\gamma)) &= m_1(\varrho)(-\nabla^M p(\varrho) + a_1(\varrho) \nabla^M k) + m_2(\varrho) \nabla^M \sigma + \varrho v^*, \\ J_2(\varrho, \gamma, \sigma(\gamma)) &= \gamma m_2(\varrho)(-\nabla^M p(\varrho) + a_2(\varrho) \nabla^M k) + \gamma m_3(\varrho) \nabla^M \sigma + \gamma v^* - \nabla^M \gamma, \\ p(\varrho) &= -\Delta^M \varrho - k - \varrho |K|^2. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen wir wie bisher mittlere Krümmung mit k und Weingarten-Abbildung mit K und haben die Konstanten der Einfachheit halber als 1 gesetzt. Mit $|K|$ bezeichnen wir die Euklidische Norm von K . Wir betrachten die konkreten Mobilitäten des No-Slip Falls aus Kapitel 2. Verallgemeinerungen wie in [WG] sind denkbar. Da physikalische Lösungen nichtnegativ sind, macht es Sinn die Mobilitäten bei 0 nach unten hin zu beschränken.

Voraussetzung 4.4. (Voraussetzung an die Mobilitäten) *Die Mobilitätskoeffizienten sind gegeben durch:*

$$\begin{aligned} m_1(s) &= \begin{cases} \frac{1}{3} s^3 & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s \leq 0, \end{cases} \\ m_2(s) &= \begin{cases} \frac{1}{2} s^2 & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s \leq 0, \end{cases} \\ m_3(s) &= \begin{cases} s & \text{falls } s > 0, \\ 0 & \text{falls } s \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Voraussetzung 4.5. (Voraussetzungen an die matrixwertigen Faktoren) *Für die zusätzlichen Vorfaktoren $a_1, a_2 : M \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ setzen wir voraus, dass es sich um in der s -Variablen lokal Lipschitzstetige Carathéodory-Funktionen handelt mit folgender zusätzlichen Beschränktheitsvoraussetzung. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$ und für fast alle $x \in M$:*

$$|a_i(x, s)| \leq C, \quad i = 1, 2.$$

Dies ist eine stärkere Voraussetzung als in Kapitel 3. Der Grund hierfür liegt in der Tatsache, dass für das gekoppelte Surfactant-System keine geeignete Abschätzung der mathematischen Entropie aus Definition 3.7 zur Verfügung steht. Im konkreten Fall ist $a_1(s) = \frac{1}{2} s(kId + K)$, $a_2(s) = \frac{2}{3} s(kId + K)$ für $s \geq 0$. Wir bemerken, dass wir im Fall eines eindimensionalen Substrats mittlere Krümmung k und Weingarten-Abbildung K identifizieren können. Wir sehen also, dass Voraussetzung 4.5 nicht automatisch aufgrund der Beschränktheit der Krümmung aus Voraussetzung 4.1 erfüllt ist. Andererseits wurden die Gleichungen aus Definition 4.3 in Kapitel 2 unter der Prämisse $1 - hk > 0$ hergeleitet, was

zu $1 - 2k\rho > 0$ und zu $0 < \frac{1}{1-2k\rho} = 1 + 2k\rho + \mathcal{O}(k^2\rho^2)$ äquivalent ist. Dabei skalierten Terme der Struktur $k^2\rho^2$ wie $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ und wurden unter der Annahme, dass diese Terme sehr klein sind, vernachlässigt. Falls also Voraussetzung 4.5 nicht erfüllt ist, befindet sich die Lösung bereits in einem Regime, in dem die Gültigkeit der Herleitung der Gleichungen aus Definition 4.3 nicht gewährleistet ist. Es macht also Sinn, die Koeffizienten etwa bei $|\rho k| \geq 2$ zu trunkieren um Voraussetzung 4.5 sicherzustellen. Wir können daher im konkreten Fall setzen:

$$a_1(s) = \begin{cases} sk, & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } |sk| \leq 2, \\ 2, & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } k > 0, \\ -2, & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } k < 0, \\ 0, & \text{falls } s \leq 0 \text{ oder } k = 0, \end{cases} \quad a_2(s) = \begin{cases} \frac{4}{3}sk, & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } |sk| \leq 2, \\ \frac{8}{3}, & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } k > 0, \\ -\frac{8}{3}, & \text{falls } s \geq 0 \text{ und } k < 0, \\ 0, & \text{falls } s \leq 0 \text{ oder } k = 0. \end{cases}$$

Wir werden sehen, dass der Beweis von Theorem 1.4 auch gültig ist, wenn die $a_i(s), i = 1, 2$ ein Wachstumsverhalten wie \sqrt{s} im Unendlichen haben.

Voraussetzung 4.6. (Voraussetzung an die freie Energie der Surfactants) Es gebe eine Funktion $f \in C_{loc}^{2,1}(\mathbb{R})$. Dabei sei f nichtnegativ sowie gleichmäßig konvex, d.h. es gebe eine Konstante $c_0 > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$f''(s) \geq c_0.$$

Weiterhin erfüllen die zweiten Ableitungen von f die folgende Wachstumsbedingung. Es gebe eine Konstante $C > 0$ und ein $r \in (0, 2)$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$f''(s) \leq C(|s|^r + 1).$$

Voraussetzung 4.7. (Voraussetzung an die Anfangswerte) Die Anfangswerte $\varrho_0 \in H^1(M_0)$ seien nichtnegativ. Für die Anfangswerte $\gamma_0 \in L^2(M_0)$ gelte außerdem $f'(\gamma_0) \in L^2(M_0)$.

Wir bemerken, dass Voraussetzung 4.7 impliziert, dass die auftretenden Energien zum Anfangszeitpunkt im folgenden Sinne endlich sind: $f(\gamma_0) \in L^1(M_0)$ und $E(\varrho_0) < \infty$ mit der Energie aus Definition 3.57. Es bezeichne $R = \int_{M_0} \varrho_0 d\mathcal{H}^d$ die Gesamtmasse von ϱ_0 .

Voraussetzung 4.8. (Voraussetzung an die Oberflächenspannung und Gibbs-Relation) Die konstitutiven Funktionen für Oberflächenspannung σ und freie Energie f aus Voraussetzung 4.6 stehen durch folgende Relation in Zusammenhang:

$$\sigma(s) := f(s) - sf'(s) \text{ für alle } s \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin gelte folgende Abschätzung. Es gebe eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$|\sigma(s)| \leq C(1 + f(s)).$$

D.h. zu gegebener freier Energiefunktion f aus Voraussetzung 4.6 lässt sich die konstitutive Funktion für die Oberflächenspannung über die Gibbs-Relation aus Voraussetzung 4.8 definieren. Definiere zu $t \in [0, T]$ die elliptischen Lösungsräume:

$$\begin{aligned} V^t &= \{\varrho \in H^3(M_t) \mid \int_{M_t} \varrho d\mathcal{H}^d = R, \nu^* \bullet \nabla^M \varrho = 0 \text{ fast überall auf } \partial M_t\}, \\ V_0^t &= \{\zeta \in H^3(M_t) \mid \int_{M_t} \zeta d\mathcal{H}^d = 0, \nu^* \bullet \nabla^M \zeta = 0 \text{ fast überall auf } \partial M_t\}, \\ W^t &= \{c \in H^2(M_t) \mid \nu^* \bullet \nabla^M c = 0 \text{ fast überall auf } \partial M_t\}. \end{aligned}$$

Wir schreiben oft ∇^M anstelle von $\nabla^{M_t}, t \in [0, T]$ wenn klar ist um welchen Zeitpunkt es sich handelt. Definiere die Lösungsräume über dem Zeitintervall $[0, T]$:

$$\begin{aligned} L^2(V) &= \{\varrho \in L^2(H^3(M)) \mid \varrho(t) \in V^t \text{ für fast alle } t \in [0, T]\}, \\ L^2(V_0) &= \{\zeta \in L^2(H^3(M)) \mid \zeta(t) \in V_0^t \text{ für fast alle } t \in [0, T]\}, \\ L^2(W) &= \{c \in L^2(H^2(M)) \mid c(t) \in W^t \text{ für fast alle } t \in [0, T]\}. \end{aligned}$$

Für die Definition von Sobolev-Räumen auf evolvierenden Flächen siehe Definition 3.9. Wir bezeichnen weiterhin das Skalarprodukt der $H^1(M_t)$ -Seminorm durch:

$$(w_1, w_2)_{H^t} = \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet \nabla^M w_2 d\mathcal{H}^d.$$

Wie in Kapitel 3 lösen wir das Problem in drei Approximationsschritten. Zunächst Approximation mit der Galerkin-Methode zum Dimensionsparameter $N \in \mathbb{N}$. Anschließend δ -Regularisierung zum Parameter $\delta > 0$ und schließlich Beschränkung der Koeffizienten zum Parameter $\beta > 0$. Aus technischen Gründen regularisieren wir in der Filmgleichung neben der üblichen Regularisierung der degenerierten Koeffizienten von Termen höchster Ordnung zusätzlich mit einer künstlichen Diffusion zum Parameter $\beta > 0$ sowie die Surfactant-Gleichung mit einer 4-ten-Ordnung Diffusion des chemischen Potentials zum Parameter $\delta > 0$. Die zusätzliche δ -Regularisierung dient dem Beweis der Zeitkompaktheit der Surfactants in der Galerkin-Approximation aufgrund des eingeschränkten Raumes zulässiger Testfunktionen. Die zusätzliche β -Regularisierung wird dem Grenzübergang in der physikalischen Energieabschätzung dienen. Denn im Gegensatz zur δ -Regularisierung vierter Ordnung der Filmgleichung zerstört diese aufgrund des schwachen Maximumsprinzips für Gleichungen zweiter Ordnung nicht das Nichtnegativitätsresultat.

Definition 4.9. (Approximierende Mobilitäten) Zu $\beta > 0$ und $i = 1, 2, 3$ definieren wir ausgehend von den m_i aus Definition 4.4 die folgenden approximierenden Mobilitäten:

$$m_i^\beta(s) = m_i(\min(\frac{1}{\beta}, s)).$$

Hierbei haben wir die Beschränkung der Mobilitäten geringfügig anders gewählt als in Kapitel 3, um bei der Energieabschätzung bequemer die Young-Ungleichung anzuwenden. Lemma 3.45 wird in diesem Kapitel nicht verwendet, daher erfolgt die δ -Regularisierung wie im planaren Fall. Für die Approximationsprobleme definieren wir die elliptischen Operatoren:

Definition 4.10. (Elliptische Operatoren) Sei $\beta, \delta > 0$. Wir definieren den Operator des dünnen Films $\mathcal{A}_t^{1\beta\delta} : V^t \times H^1(M_t) \times W^t \rightarrow H^1(M_t)^*$ durch:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_t^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), w \rangle_{H^1(M_t)} \\ = \int_{M_t} \nabla^M w \bullet \left(m_1^\beta(\varrho)(\nabla^M p(\varrho) - a_1(\varrho)\nabla^M k) + m_2^\beta(\varrho)\gamma\nabla^M c - v^*\varrho + \beta\nabla^M \varrho - \delta\nabla^M \Delta^M \varrho \right) d\mathcal{H}^d \end{aligned}$$

für $w \in H^1(M_t)$. Der Operator für die Surfactant-Gleichung $\mathcal{A}_t^{2\beta\delta} : V^t \times H^1(M_t) \times W^t \rightarrow (W^t)^*$ sei definiert durch:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), w \rangle_{W^t} = \int_{M_t} \nabla^M w \bullet \left(\gamma m_2^\beta(\varrho)(\nabla^M p(\varrho) - a_2(\varrho)\nabla^M k) + \gamma^2 m_3^\beta(\varrho)\nabla^M c - v^*\gamma + \nabla^M \gamma \right) d\mathcal{H}^d \\ + \delta \int_{M_t} \Delta^M w \Delta^M c d\mathcal{H}^d \end{aligned}$$

für $w \in W^t$. Schließlich definieren wir die entsprechenden über dem Intervall $[0, T]$ zeitintegrierten Operatoren $\mathcal{A}^{1\beta\delta} : L^2(V) \times (L^2(H^1(M)) \cap L^\infty(L^2(M))) \times L^2(W) \rightarrow L^2(H^1(M))^*$ durch:

$$\langle \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = \int_0^T \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho(t), \gamma(t), c(t)), w(t) \rangle_{H^1(M_t)} dt$$

für $w \in L^2(H^1(M))$. Weiterhin definiere $\mathcal{A}^{2\beta\delta} : L^2(V) \times (L^2(H^1(M)) \cap L^\infty(L^2(M))) \times L^2(W) \rightarrow (L^2(W) \cap L^{\frac{16}{7}}(W^{1,8}(M)))^*$ durch:

$$\langle \langle \mathcal{A}^{2\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), w \rangle \rangle_{L^2(W)} = \int_0^T \langle \mathcal{A}^{2\beta\delta}(\varrho(t), \gamma(t), c(t)), w(t) \rangle_{W^t} dt$$

für $w \in L^2(W) \cap L^{\frac{16}{7}}(W^{1,8}(M))$.

Dabei haben wir Gradienten der Oberflächenspannung $\nabla^M \sigma$ mit der abgeleiteten Version der Gibbs-Relation aus Voraussetzung 4.8 ersetzt. Die definierten Operatoren sind aufgrund von Interpolationsabschätzungen, wie wir sie im Laufe des Kapitels entwickeln, wohldefiniert.

In Kapitel 3 hatten wir in Definition 3.14 weitere elliptische Operatoren eingeführt, um in der resultierenden Formulierung (B) eine Energieabschätzung zu ermöglichen. Dieser Idee folgen wir in diesem Kapitel ebenfalls. Dazu multiplizieren wir Gleichung (4.1.1) zu $\zeta \in V_0^t$ mit $-\Delta^M \zeta$ und integrieren partiell. Die entsprechende Formulierung drücken wir nun wie in Abschnitt 3 durch weitere elliptische Operatoren aus.

Definition 4.11. (Elliptische Operatoren) Seien $\beta, \delta > 0$. Wir definieren den weiteren Operator $\mathcal{B}_t^{1\beta\delta} : V^t \times H^1(M_t) \times W^t \longrightarrow (V_0^t)^*$ analog wie in Definition 3.14 durch:

$$\langle \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), \zeta \rangle_{V_0^t} = -\langle \mathcal{A}_t^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), \Delta^M \zeta \rangle_{H^1(M_t)} - \int_{M_t} \nabla^M \zeta \bullet (2\nu_n k \nabla^M \varrho + \varrho \nabla^M (\nu_n k)) d\mathcal{H}^d$$

für $\zeta \in V_0^t$. Entsprechend definieren wir den über dem Zeitintervall $[0, T]$ zeitintegrierten Operator $\overline{\mathcal{B}}^{1\beta\delta} : L^2(V) \times (L^2(H^1(M)) \cap L^\infty(L^2(M))) \times L^2(W) \longrightarrow L^2(V_0)^*$ durch:

$$\langle \overline{\mathcal{B}}^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), \zeta \rangle_{L^2(V_0)} = \int_0^T \langle \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}(\varrho(t), \gamma(t), c(t)), \zeta(t) \rangle_{V_0^t} dt \quad \text{für } \zeta \in L^2(V_0).$$

Wenn wir γ mit Hilfe von f^{-1} durch c ausdrücken, ergibt sich wie in Kapitel 3 nach Anwenden von Proposition 3.12 die folgende schwache Formulierung:

$$\frac{d}{dt} \langle \zeta(t), \varrho(t) \rangle_{H^t} - (\partial_t^M \zeta(t), \varrho(t))_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}(\varrho(t), (f')^{-1}(c(t)), c(t)), \zeta(t) \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Weiterhin testen wir Gleichung (4.1.2) mit $w \in W^t$. Wenn wir wieder γ mit c ausdrücken, ergibt sich als schwache Formulierung für die Surfactantgleichung:

$$\frac{d}{dt} \langle w(t), (f')^{-1}(c(t)) \rangle_{L^2(M_t)} - (\partial_t^M w(t), (f')^{-1}(c(t)))_{L^2(M_t)} + \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(\varrho(t), (f')^{-1}(c(t)), c(t)), w(t) \rangle_{W^t} = 0.$$

Zu $N \in \mathbb{N}$ machen wir den folgenden Galerkin-Ansatz für die approximierenden Lösungen. Zunächst für die Flüssigkeit:

$$\varrho_N(t) = \sum_{j=0}^N a_j^N(t) \varphi_j^t$$

mit den Galerkinfunktionen $(\varphi_j^t)_{j \in \mathbb{N}}$ aus Definition 3.15. Für die Surfactantgleichung definieren wir Galerkinfunktionen $(\psi_j^t)_{j \in \mathbb{N}}$ wie in [DE1]:

Definition 4.12. (Galerkin-Funktionen) Sei $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ ein L^2 -orthonormales System aus Eigenfunktionen von $-\Delta^{M_0}$ mit Neumann-Randwertbedingung und verschwindendem Mittelwert zu den Eigenwerten $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$. Sei $\Phi_t : M_0 \longrightarrow M_t$ die Familie von Diffeomorphismen aus Definition 4.2. Für $j \in \mathbb{N}$ setze $\psi_j^t = \varphi_j^0 \circ \Phi_t^{-1}$. Ergänze für $t \in [0, T]$ das System um die räumlich konstante Funktion $\psi_0^t = 1/\sqrt{\mathcal{H}^d(M_t)}$. Setze nun $X_N^t = \text{Span}((\varphi_j^t, \psi_j^t), j = 0 \dots N)$ und zu $t_0 \in [0, T]$:

$$\Xi_N^{t_0} = \left\{ (\varrho, c) : M \longrightarrow \mathbb{R}^2 \mid \begin{aligned} \varrho(t) &= \sum_{j=0}^N a_j(t) \varphi_j^t \text{ mit } a_j \in C^1[0, t_0], j = 0 \dots N, \\ c(t) &= \sum_{j=0}^N b_j(t) \psi_j^t \text{ mit } b_j \in C^1[0, t_0], j = 0 \dots N \end{aligned} \right\}.$$

Wie im Beweis von Proposition 3.18 sehen wir ein, dass für die Galerkin-Funktionen aus Definition 4.12 $\partial_t^M \psi_j^t = 0$ für $j \geq 1$ gilt. Die Bedingung $\nu^* \bullet \nabla^{M_t} \varphi_j^t = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$ für $j \geq 0$ ist im Falle eines eindimensionalen Substrats erfüllt, denn es ist $\nu^*(t) \bullet \nabla^{M_t} \varphi_j^t = \nu^*(t) \bullet (D\Phi_t^{-1})^T (\nabla^{M_0} \varphi_j^0) \circ \Phi_t^{-1}$

und $D\Phi_t^{-1}\nu^*(t)$ liegt im eindimensionalen Tangentialraum $T_x M_0$, der am Rand durch $\nu^*(0)$ gespannt wird. Für die Surfactantgleichung machen wir folgenden Ansatz für das chemische Potential:

$$c_N(t) = \sum_{j=0}^N b_j^N(t) \psi_j^t.$$

Mit den Ansätzen für ϱ_N und c_N erhalten wir ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen. Um Lösbarkeit und Fortsetzbarkeit der Lösungen für alle Zeiten zu gewährleisten, ist es erforderlich zu zeigen, dass die Koeffizientenmatrix des ODE-Systems für alle Zeiten regulär bleibt.

Lemma 4.13. (Die Steifigkeitsmatrix ist invertierbar) Sei $N \in \mathbb{N}$ und zu $t \in [0, T]$ seien ψ_j^t für $j \geq 0$ die Galerkin-Funktionen aus Definition 4.12. Bezeichnen wir mit $g = ((f')^{-1})'$ die Ableitung der Inversen von f' zu f aus Voraussetzung 4.6. Zu $c(t) \in \text{Span}(\psi_j^t)$ definiere die Matrix:

$$B_{lj}(t) = \int_{M_t} \psi_l^t g(c(t)) \psi_j^t d\mathcal{H}^d.$$

Dann ist diese Matrix für alle $t \in [0, T]$ symmetrisch und positiv definit, also invertierbar.

Beweis. Symmetrie ist klar. Für die positive Definitheit orientieren wir uns am Beweis aus [Wie] bzw. [WG], müssen dabei jedoch die Zeitabhängigkeit des Gebiets beachten. Sei $\xi \in \mathbb{R}^N$. Dann ist mit der Ableitungsregel der inversen Funktion und anschließend mit dem Transformationssatz 6.8:

$$\begin{aligned} \sum_{l,j=1}^N \xi_j B_{jl}(t) \xi_l &= \int_{M_t} g(c(t)) \left(\sum_{l=1}^N \xi_l \psi_l^t \right)^2 d\mathcal{H}^d = \int_{M_t} \frac{1}{f''((f')^{-1}(c(t)))} \left(\sum_{l=1}^N \xi_l \psi_l^t \right)^2 d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_0} \frac{1}{f''((f')^{-1}(c(t) \circ \Phi_t))} \left(\sum_{l=1}^N \xi_l \varphi_l^0 \right)^2 \mathcal{J}\Phi_t d\mathcal{H}^d \geq 0. \end{aligned}$$

Es ist nach Voraussetzung 4.6 $f'' \geq c_0 > 0$ und nach Voraussetzung 4.2 $\mathcal{J}\Phi_t \geq c_0 > 0$. Es gelte nun $0 = \sum_{l,j=1}^N \xi_j B_{jl}(t) \xi_l$. Dann folgt damit $\sum_{l=1}^N \xi_l \varphi_l^0 = 0$. Die Behauptung folgt dann aus der linearen Unabhängigkeit der Ansatzfunktionen wie in Lemma 3.20. \square

Satz 4.14. (Existenz von Galerkin-Lösungen) Seien $\beta, \delta > 0$. Seien $\mathcal{A}_t^{2\beta\delta}, \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}$ die elliptischen Operatoren aus Definition 4.10 und 4.11. Unter den getroffenen Voraussetzungen existiert für alle $N \in \mathbb{N}$ ein $0 < T_N^* \leq T$ und genau ein $(\varrho_N, c_N) \in \Xi_N^{T_N^*}$ im Ansatzraum aus Definition 4.12, so dass für alle $t \in [0, T_N^*]$ die folgenden Galerkin-Gleichungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\zeta(t), \varrho_N(t))_{H^t} - (\partial_t^M \zeta(t), \varrho_N(t))_{H^t} + \langle \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}(\varrho_N(t), \gamma_N(t), c_N(t)), \zeta(t) \rangle_{V_0^t} &= 0, \\ \frac{d}{dt} (w(t), \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} - (\partial_t^M w(t), \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} + \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(\varrho_N(t), \gamma_N(t), c_N(t)), w(t) \rangle_{W^t} &= 0, \end{aligned}$$

für alle $(\zeta, w) \in \Xi_N^{T_N^*}$, wobei wir mit $\gamma_N(t) = (f')^{-1}(c_N(t))$ bezeichnen.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$. Wenn wir in der ersten Behauptung $\zeta(t) = \varphi_l^t, l = 1 \dots N$ setzen, dann haben wir wie in Satz 3.21 zu lösen:

$$\frac{d}{dt} (\varphi_l^t, \varrho_N(t))_{H^1(M_t)} + \langle \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}(\varrho_N(t), (f')^{-1}(c_N(t)), c_N(t)), \varphi_l^t \rangle_{V_0^t} = 0.$$

Wenn wir in der zweiten Behauptung $w(t) = \psi_l^t, l = 0 \dots N$ setzen, dann haben wir zu lösen:

$$\frac{d}{dt} (\psi_l^t, (f')^{-1}(c_N(t)))_{L^2(M_t)} + \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(\varrho_N(t), (f')^{-1}(c_N(t)), c_N(t)), \psi_l^t \rangle_{W^t} = 0.$$

Dies ist ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen mit $2N + 1$ Gleichungen und Unbekannten. Den Koeffizienten a_0^N , der die Gesamtmasse der Flüssigkeit bestimmt, setzen wir wie in Satz 3.21 durch $a_0^N(t) = R/\sqrt{\mathcal{H}^d(M_t)}$ fest. Als Startwerte wählen wir:

$$\begin{aligned} a_j^N(0) &= (\varrho_0, \varphi_j^0)_{L^2(M_0)}, \quad 1 \leq j \leq N, \\ b_j^N(0) &= (f'(\gamma_0), \psi_j^0)_{L^2(M_0)}, \quad 0 \leq j \leq N. \end{aligned}$$

Der parabolische Term lautet:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_l^t, \varrho_N(t))_{H^1(M_t)} = \sum_{j=0}^N \frac{d}{dt} a_j^N(t) (\varphi_l^t, \varphi_j^t)_{H^1(M_t)} + \sum_{j=0}^N a_j^N(t) \frac{d}{dt} (\varphi_l^t, \varphi_j^t)_{H^1(M_t)}.$$

Die Koeffizientenmatrix vor den gesuchten Funktionen ist wegen Lemma 3.20 für alle Zeiten invertierbar. Die Zeitabhängigkeit in der Gleichung ist stetig und lokal Lipschitz. Nun zu den parabolischen Termen in der Surfactant-Gleichung:

$$\frac{d}{dt}(\psi_l^t, (f')^{-1}(c_N(t)))_{L^2(M_t)} = \sum_{j=0}^N \frac{d}{dt} b_j^N(t) (\psi_l^t, g(c_N(t)) \psi_j^t)_{L^2(M_t)} - (v_n k \psi_l^t, (f')^{-1}(c_N(t)))_{L^2(M_t)}.$$

Aufgrund von Lemma 4.13 ist die Koeffizientenmatrix für alle Zeiten invertierbar. Die Gleichung hängt ebenfalls stetig und lokal Lipschitz von der Zeit ab. Damit lässt sich der Existenzsatz von Picard anwenden und wir erhalten für alle $N \in \mathbb{N}$ eindeutige Lösungen auf einem Intervall $[0, T_N^*]$ mit $T_N^* > 0$. Für $(\zeta, w) \in \Xi_N^{T_N^*}$ mit:

$$\zeta(t) = \sum_{l=1}^N d_l^N(t) \varphi_l^t \text{ und } w(t) = \sum_{l=0}^N e_l^N(t) \psi_l^t$$

summieren wir die Gleichung des dünnen Films mit $\sum_{l=1}^N d_l^N(t)$ und die Surfactantgleichung mit $\sum_{l=0}^N e_l^N(t)$.

Damit folgt die Behauptung wie im Beweis von Satz 3.21. \square

Energieabschätzung

Ausgehend von dem in Satz 4.14 konstruierten chemischen Potential c_N bezeichnen wir nun die zugehörige Surfactantkonzentration $\gamma_N = f'^{-1}(c_N)$. Um Abschätzungen für γ_N und ϱ_N zu bekommen, wählen wir in der Filmgleichung ϱ_N als Testfunktion, was zulässig ist und einem Testen der klassischen Formulierung mit $-\Delta^M \varrho$ entspricht. In der Surfactant-Gleichung wählen wir als Testfunktion c_N , was ebenfalls zulässig ist, da wir den Ansatz im chemischen Potential gemacht haben.

Satz 4.15. (Mathematische Energieabschätzung) Seien $\beta, \delta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen zu $N \in \mathbb{N}$ die Lösungen $(\varrho_N, c_N) \in \Xi_N^{T_N^*}$ aus Satz 4.14 auf dem Lösungsintervall $[0, T_N^*]$ die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \text{esssup}_{t \in [0, T_N^*]} \left(\|f(\gamma_N(t))\|_{L^1(M_t)} + \frac{1}{2} \|\varrho_N(t)\|_{H^1(M_t)}^2 \right) &+ c_1 \int_0^{T_N^*} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_N(t)) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &+ c_2 \int_0^{T_N^*} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_N(t)) |\nabla^M \sigma(\gamma_N(t))|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{T_N^*} \int_{M_t} f''(\gamma_N(t)) |\nabla^M \gamma_N(t)|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &+ \delta \int_0^{T_N^*} (\|\nabla^M \Delta^M \varrho_N(t)\|_{H^3(M_t)}^2 + \|\Delta^M c_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2) dt + \beta \int_0^{T_N^*} \|\Delta^M \varrho_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2 dt \leq C_\beta. \end{aligned}$$

Dabei ist $C_\beta > 0$ von $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ unabhängig. Weiterhin sind $c_1, c_2 > 0$ von $N \in \mathbb{N}, \delta > 0$ und $\beta > 0$ unabhängig.

Beweis. Es ist zulässig mit $\zeta = \varrho_N$ und $w = c_N$ zu testen. Weiterhin bezeichnen wir der Übersicht wegen mit $\gamma_N = (f')^{-1}(c_N)$ und mit $\sigma_N = \sigma(\gamma_N)$ die zugehörige Surfactantdichte und Oberflächenspannung. Den parabolischen Teil in der Gleichung des dünnen Films behandeln wir wie in Satz 3.22 und erhalten als positiven Term $\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\nabla^M \varrho_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2$ sowie einen Gronwall-Term von den Kommutator-Ausdrücken. Der elliptische Term in der Filmgleichung hat die folgende Gestalt, wenn wir den Zeitparameter nicht mehr führen:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_t^{1\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, c_N), \varrho_N \rangle_{V_0^t} = & \int_{M_t} \nabla^M \Delta^M \varrho_N \bullet \left(\varrho_N v^* + m_1^\beta(\varrho_N) (-\nabla^M p(\varrho_N) + a_1(\varrho_N) \nabla^M k) + m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N \right) d\mathcal{H}^d \\ & + \delta \int_{M_t} |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d - \beta \int_{M_t} \nabla^M \Delta^M \varrho_N \bullet \nabla^M \varrho_N d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Wenn wir im letzten Term noch partiell integrieren entsteht kein Randterm und wir erhalten den positiven Term $\beta \|\Delta^M \varrho_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2$. Den Term mit v^* schätzen wir wie in Kapitel 3 ab und erhalten weitere Gronwall-Terme. Den Term mit der Oberflächenspannung lassen wir vorerst stehen. Für den verbleibenden Term bemerken wir, dass $p(\varrho_N) = -k - \varrho_N |K|^2 - \Delta^M \varrho_N$ und schätzen dann zu $\epsilon > 0$ mit der Young-Ungleichung wie folgt nach unten hin ab:

$$\begin{aligned} & \int_{M_t} \nabla^M \Delta^M \varrho_N \bullet m_1^\beta(\varrho_N) \left(\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2 + \Delta^M \varrho_N) + a_1(\varrho_N) \nabla^M k \right) d\mathcal{H}^d \\ & \geq \int_{M_t} (1 - \epsilon) m_1^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d - C_\epsilon \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_N) |\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2 + a_1(\varrho_N) \nabla^M k)|^2 d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Wir legen $\epsilon < 1$ später fest. Weil wir die Koeffizienten m_1^β trunziert haben, ist der negative Term wie im Beweis von Satz 3.22 zusammen mit Voraussetzung 4.5 an a_1 ein Gronwall-Term. Nun zur Surfactant-Gleichung. Der parabolische Term in der Surfactant-Gleichung lässt sich mit dem Transporttheorem 6.9 folgendermaßen behandeln:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (c_N, \gamma_N)_{L^2(M_t)} - (\partial_t^M c_N, \gamma_N)_{L^2(M_t)} &= (c_N, \partial_t^M \gamma_N - v_n k \gamma_N)_{L^2(M_t)} \\ &= (f'(\gamma_N), \partial_t^M \gamma_N)_{L^2(M_t)} - (f(\gamma_N) - \sigma_N, v_n k)_{L^2(M_t)} \\ &= \frac{d}{dt} \|f(\gamma_N)\|_{L^1(M_t)} + (\sigma_N, v_n k)_{L^2(M_t)}, \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt die Gibbs-Relation aus Voraussetzung 4.8 verwendet wurde und im letzten Schritt wieder das Transporttheorem 6.9 und die Nichtnegativität von f . Nach Voraussetzung 4.6 ist der Term mit der Oberflächenspannung $(\sigma_N, v_n k)_{L^2(M_t)}$ ein Gronwall-Term. Der elliptische Term in der Surfactant-Gleichung nimmt die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, c_N), c_N \rangle_{W^t} &= \int_{M_t} \nabla^M c_N \bullet \gamma_N \left(m_2^\beta(\varrho_N) (\nabla^M p(\varrho_N) - a_2(\varrho_N) \nabla^M k) - m_3^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N - v^* \right) d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_{M_t} \nabla^M c_N \bullet \nabla^M \gamma_N d\mathcal{H}^d + \delta \int_{M_t} |\Delta^M c_N|^2 d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Aus der Gibbs-Relation aus Voraussetzung 4.8 folgt $\gamma_N \nabla^M c_N = -\nabla^M \sigma_N$. Weiterhin ist $\nabla^M c_N = f''(\gamma_N) \nabla^M \gamma_N$. Damit ist die letzte Gleichung äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, c_N), c_N \rangle_{W^t} &= \int_{M_t} \nabla^M \sigma_N \bullet \left(m_2^\beta(\varrho_N) (-\nabla^M p(\varrho_N) + a_2(\varrho_N) \nabla^M k) + v^* \right) d\mathcal{H}^d \\ &\quad + \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \sigma_N|^2 d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} \left(f''(\gamma_N) |\nabla^M \gamma_N|^2 + \delta |\Delta^M c_N|^2 \right) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Die Terme in der zweiten Zeile der letzten Gleichung sind nichtnegativ. Die verbleibenden schätzen wir wie folgt ab. Zunächst den v^* -Term mit partieller Integration, wobei kein Randterm entsteht wegen $v^* \bullet \nu^* = 0$ nach Voraussetzung 4.2.

$$\int_{M_t} \nabla^M \sigma_N \bullet v^* d\mathcal{H}^d = - \int_{M_t} \operatorname{div}^M(v^*) \sigma_N d\mathcal{H}^d.$$

Dieser Term ist ein Gronwall-Term, wenn wir mit Voraussetzung 4.6 abschätzen. Wenn wir den Druck $p(\varrho_N) = -k - \varrho_N |K|^2 - \Delta^M \varrho_N$ ausschreiben, erhalten wir für den verbleibenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} & \int_{M_t} \nabla^M \sigma_N \bullet m_2^\beta(\varrho_N) \left(\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2 + \Delta^M \varrho_N) + a_2(\varrho_N) \nabla^M k \right) d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_t} m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N \bullet \left(\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2) + a_2(\varrho_N) \nabla^M k \right) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Den ersten Term stellen wir vorerst beiseite. Den verbleibenden schätzen wir mit demselben $\epsilon > 0$ von oben folgendermaßen mit der Young-Ungleichung nach unten hin ab:

$$\begin{aligned} & \int_{M_t} m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N \bullet \left(\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2) + a_2(\varrho_N) \nabla^M k \right) d\mathcal{H}^d \\ & \geq -\epsilon \int_{M_t} m_2^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \sigma_N|^2 d\mathcal{H}^d - C_\epsilon \int_{M_t} m_2^\beta(\varrho_N) |\nabla^M (k + \varrho_N |K|^2) + a_2(\varrho_N) \nabla^M k|^2 d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Für gewähltes $\epsilon > 0$ ist das letzte Integral ein Gronwall-Term wie oben, weil die Mobilitätskoeffizienten m_2^β trunziert wurden. Im nächsten Schritt zeigen wir, wie die zurückgestellten gemischten Terme der Form $m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N$ in die positiven Terme der Form $m_1^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2$ und $m_3^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \sigma_N|^2$ absorbiert werden können. Wenn wir abkürzenderweise $b_N = \min(\varrho_N, \frac{1}{\beta})$ schreiben, so ist nach Definition 4.9 $m_i^\beta(\varrho_N) = m_i(b_N)$. Die zurückgestellten Terme lauten dann:

$$\begin{aligned} & \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 + 2m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma_N \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N + m_3^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \sigma_N|^2 d\mathcal{H}^d \\ & - \epsilon \int_{M_t} \left(m_1^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 + m_3^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \sigma_N|^2 \right) d\mathcal{H}^d \\ & = \int_{M_t} \frac{1-\epsilon}{3} (b_N)^3 |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 + (b_N)^2 \nabla^M \sigma_N \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_N + (1-\epsilon) b_N |\nabla^M \sigma_N|^2 d\mathcal{H}^d \end{aligned}$$

Im letzten Schritt schätzen wir mit der folgenden elementaren Ungleichung, die eine Konsequenz der Young-Ungleichung ist, weiter nach unten hin ab:

$$xy = \frac{3}{4} x \frac{4}{3} y \geq -\frac{9}{32} x^2 - \frac{8}{9} y^2.$$

Wenn wir $x = (b_N)^{\frac{3}{2}} |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|$ und $y = (b_N)^{\frac{1}{2}} |\nabla^M \sigma_N|$ setzen, so können wir mit $c_1 = \frac{1}{3} - \frac{9}{32} - \frac{1}{3}\epsilon$ und $c_2 = 1 - \frac{8}{9} - \epsilon$ obiges $\epsilon > 0$ als z.B. $\epsilon < \frac{5}{96}$ wählen. Damit sind die Konstanten c_1, c_2 positiv und wir erhalten folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|f(\gamma_N(t))\|_{L^1(M_t)} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla^M \varrho_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2 + c_1 \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_N(t)) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N(t)|^2 d\mathcal{H}^d \\ & + c_2 \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_N(t)) |\nabla^M \sigma_N(t)|^2 d\mathcal{H}^d + \int_{M_t} f''(\gamma_N) |\nabla^M \gamma_N|^2 d\mathcal{H}^d \\ & + \delta (\|\nabla^M \Delta^M \varrho_N(t)\|_{H^3(M_t)}^2 + \|\Delta^M c_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2 + \beta \|\Delta^M \varrho_N(t)\|_{L^2(M_t)}^2) \\ & \leq C_\beta (1 + \|\varrho_N\|_{H^1(M_t)}^2 + \|f(\gamma_N)\|_{L^1(M_t)}). \end{aligned}$$

Integration über $[0, T_N^*]$ liefert die Behauptung mit dem Lemma von Gronwall und der Poincaré-Ungleichung aus Satz 6.13 wie in Satz 3.22, wenn wir zeigen, dass die Daten der approximierten Anfangswerte $\|\nabla^M \varrho_N(0)\|_{L^2(M_0)}^2$ und $\|f(\gamma_N(0))\|_{L^1(M_0)}$ unabhängig von $N \in \mathbb{N}$ beschränkt sind. Für $\varrho_N(0)$ folgt dies mit Voraussetzung 4.7 und Proposition 3.31. Für $f(\gamma_N(0))$ sehen wir mit der Nichtnegativität und Konvexität von f ein:

$$|f(\gamma_N(0))| \leq f(0) + f'(\gamma_N(0)) \gamma_N(0) \leq |f(0)| + |f'(\gamma_N(0))| |\gamma_N(0)|.$$

Nach dem Ansatz im Beweis von Satz 4.15 ist $f'(\gamma_N(0)) = c_N(0) = Q_N(f'(\gamma_0))$, wenn Q_N die L^2 -orthogonale Projektion auf $\text{Span}(\varphi_j^0, j \leq N)$ bezeichnet. Nach dem Spektralsatz ist $(\varphi_j^0)_{j \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges System in $L^2(M_0)$. Nach Voraussetzung an die Anfangswerte 4.7 ist $f'(\gamma_0) \in L^2(M_0)$. Somit konvergiert $f'(\gamma_N(0)) \rightarrow f'(\gamma_0)$ für $N \rightarrow \infty$ in $L^2(M_0)$, insbesondere ist daher $f'(\gamma_N(0))$ gleichmäßig in $L^2(M_0)$ beschränkt. Es verbleibt zu zeigen, dass $\gamma_N(0)$ gleichmäßig in $L^2(M_0)$ beschränkt ist. Dazu schließen wir mit dem Hauptsatz:

$$|\gamma_N(0) - \gamma_0| = |(f')^{-1}(c_N(0)) - (f')^{-1}(f'(\gamma_0))| = \left| \int_{f'(\gamma_0)}^{c_N(0)} ((f')^{-1})'(s) ds \right| \leq \frac{1}{c_0} |c_N(0) - f'(\gamma_0)|,$$

wobei wir die Ableitungsregel der Umkehrfunktion und die gleichmäßige Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6 verwendet haben. Da $c_N(0) \rightarrow f'(\gamma_0)$ in $L^2(M_0)$ für $N \rightarrow \infty$ folgt $\gamma_N(0) \rightarrow \gamma_0$ in $L^2(M_0)$, da $\gamma_0 \in L^2(M_0)$ nach Voraussetzung 4.7. Damit folgt die Behauptung. \square

Der folgende Beweis der Fortsetzbarkeit der Lösungen ist, wenn wir eine zusätzliche Überlegung für das bewegte Substrat wie in Proposition 3.23 einbeziehen, analog zu der entsprechenden Aussage in [Wie]. Einige dort weggelassene Schritte führen wir hier jedoch aus, so ist es z.B. erforderlich die lineare Unabhängigkeit der Ansatzfunktionen zu verwenden, wie auch die Tatsache, dass es sich um eine endliche Approximation handelt.

Proposition 4.16. (Fortsetzen von Lösungen) Sei $\beta, \delta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen lassen sich die Lösungen (ϱ_N, c_N) aus Satz 4.14 für alle $N \in \mathbb{N}$ auf ganz $[0, T]$ fortsetzen. Es gilt dann Satz 4.15 mit $T_N^* = T$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$. Die Fortsetzbarkeit von ϱ_N folgt wie in Proposition 3.23 aus der Beschränktheit der ϱ_N in $L^\infty(H^1(M))$. Wir müssen also noch die Fortsetzbarkeit der c_N zeigen. Aus der Energieabschätzung aus Satz 4.15 folgt nach einer Transformation die Beschränktheit von:

$$\int_{M_0} f(f'^{-1}(c_N(t) \circ \Phi_t)) \mathcal{J}\Phi_t d\mathcal{H}^d \leq C_\beta,$$

mit einer von $N \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $C_\beta > 0$ für alle Zeiten $t \in [0, T_N^*]$ im Lösungsintervall.

Nach dem Galerkin-Ansatz hat c_N die folgende Struktur $c_N(t) \circ \Phi_t = \sum_{j=0}^N b_j(t) \varphi_j^0$. Wir werden die Beschränktheit der Energie verwenden um zu zeigen, dass die b_j beschränkt bleiben und damit fortsetzbar sind. Es ist $\mathcal{J}\Phi_t \geq c_0 > 0$ auf M_0 und wegen $f'' \geq c_0$ gilt $f(s) \rightarrow +\infty$ streng monoton wachsend für $s \rightarrow \pm\infty$. Ebenfalls konvergiert streng monoton wachsend $f'(s) \rightarrow \pm\infty$ für $s \rightarrow \pm\infty$ und wegen der strikten Monotonie gilt dies auch für f'^{-1} . Es folgt somit, dass der Integrand $f(f'^{-1}(s)) \mathcal{J}\Phi_t \rightarrow +\infty$ auf $M_0, t \in [0, T]$ streng monoton wachsend ist für $s \rightarrow \infty$. Wir definieren eine Abbildung $h_N : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ durch:

$$h_N(b) = \int_{M_0} f(f'^{-1}(\sum_{j=0}^N b_j \varphi_j^0)) \mathcal{J}\Phi_t d\mathcal{H}^d$$

für $b = (b_j)_{j \leq N}$. Weil f stetig differenzierbar ist, ist diese Abbildung stetig. Wir bezeichnen mit \mathbb{S}^{N+1} die Einheitskugel der Dimension $N+1$. Zu $b \in \mathbb{S}^{N+1}$ ist $\sum_{j=0}^N b_j \varphi_j^0$ nicht identisch 0. Dies folgt aus

der linearen Unabhängigkeit der φ_j^0 . Die Ansatzfunktionen sind stetig, somit folgt dass $\sum_{j=0}^N b_j \varphi_j^0$ auf

einer Menge positiven Maßes ungleich 0 ist. Somit folgt zu $b \in \mathbb{S}^{N+1}$ aufgrund der obigen Überlegung die Konvergenz von $h_N(sb) \rightarrow +\infty$ streng monoton wachsend für $s \rightarrow \infty$. Mit anderen Worten, h_N wächst auf Strahlen monoton gegen $+\infty$. Zu $C > 0$ gibt es also zu jedem $b \in \mathbb{S}^{N+1}$ genau ein $s_b^N \in \mathbb{R}$ mit $h_N(s_b^N b) = C$. Dies definiert eine stetige Abbildung $\tau^N : \mathbb{S}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}$ vermöge $b \mapsto s_b^N$. Es ist $N < \infty$, daher nimmt τ^N ein Maximum τ_{max}^N auf \mathbb{S}^{N+1} an. Daraus folgt, dass das Urbild $h_N^{-1}([0, C])$ im Ball $B_{2\tau_{max}^N} \subset \mathbb{R}^{N+1}$ enthalten ist, d.h. beschränkt ist. In der Tat, denn angenommen dies wäre falsch, dann gebe es ein $a \in \mathbb{R}^{N+1}$ mit $h_N(a) \leq C$ mit $|a| \geq 2\tau_{max}^N$. Es ist aber $a = |a|b$ für einen Einheitsvektor $b \in \mathbb{S}^{N+1}$. Dann folgt $C \geq h_N(a) = h_N(|a|b) \geq h_N(2\tau_{max}^N b) > C$ aufgrund der strengen Monotonie und weil $2\tau_{max}^N > \tau_{max}^N \geq \tau^N(b)$. Dies ist ein Widerspruch. Zu $N \in \mathbb{N}$ ist der Lösungsvektor $b(t) = (b_j(t))_{j=0 \dots N}$ nach der Energieabschätzung im Urbild $h_N^{-1}([0, C_\beta])$. Somit ist er im Lösungsintervall beschränkt also fortsetzbar. \square

Folgerung 4.17. (Schwache Konvergenz) Unter den getroffenen Voraussetzungen existieren zu $\beta, \delta > 0$ ein $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(V) \cap L^\infty(H^1(M))$, ein $\gamma_{\beta\delta} \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ sowie ein $c_{\beta\delta} \in L^2(W)$, so dass es für die Lösungen $(\varrho_N, c_N) \in \Xi_N^T$ und $\gamma_N = (f')^{-1}(c_N)$ aus Satz 4.14 eine Teilfolge derart gibt, dass folgende Konvergenzen gelten: $\varrho_N \rightharpoonup \varrho_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(H^3(M))$ und $\varrho_N \overset{*}{\rightharpoonup} \varrho_{\beta\delta}$ schwach* in $L^\infty(H^1(M))$, $\gamma_N \rightharpoonup \gamma_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(H^1(M))$ und $\gamma_N \overset{*}{\rightharpoonup} \gamma_{\beta\delta}$ schwach* in $L^\infty(L^2(M))$, $c_N \rightharpoonup c_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(H^2(M))$ für $N \rightarrow \infty$.

Beweis. Die Konvergenz von ϱ_N folgt wie in Folgerung 3.25. Die restlichen Aussagen sind wie in [Wie] zu zeigen. Die schwache Konvergenz der γ_N in $L^2(H^1(M))$ folgt aus der Energieabschätzung aus Satz 4.15 zusammen mit der gleichmäßigen Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6 und der Reflexivität dieses Raumes. Die schwach*-Konvergenz folgt aus der Separabilität von $L^1(L^2(M)^*)$ und der Beschränktheit der γ_N in $L^\infty(L^2(M))$. Diese ist wie folgt einzusehen. Es folgt nach zweimaliger Integration $f(s) = \int_0^s \int_0^r f''(\tau) d\tau dr + f(0) + f'(0)s$ und dann aus der gleichmäßigen Konvexität von f und mit Hilfe der Young-Ungleichung $f(s) \geq \frac{c_0}{2}s^2 + f(0) + f'(0)s \geq \frac{c_0}{4}s^2 - C$. Somit impliziert die Beschränktheit von $f(\gamma_N)$ in $L^\infty(L^1(M))$ die Beschränktheit von γ_N in $L^\infty(L^2(M))$. In Folgerung 4.18 werden wir sehen, wie die gleichmäßige Beschränktheit der γ_N in $L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ die Beschränktheit in $L^6(L^6(M))$ impliziert. Zusammen mit der Wachstumsbedingung an f' aus Voraussetzung 4.6 ist $c_N = f'(\gamma_N)$ dann gleichmäßig in $L^2(L^2(M))$ beschränkt. Es sind nach Wahl der Ansatzfunktionen $c_N(t) \in W^t$. Daher folgt analog zu Proposition 3.24 $\|c_N - \bar{c}_N\|_{L^2(H^2(M))} \leq C \|\Delta^M c_N\|_{L^2(L^2(M))} \leq C_{\beta\delta}$ aus der Energieabschätzung aus Satz 4.15. Dabei bezeichnet $\bar{c}_N(t)$ den Mittelwert von $c_N(t)$ über M_t . Da $\|\bar{c}_N\|_{L^2(L^2(M))} \leq \|c_N\|_{L^2(L^2(M))}$ folgt die gleichmäßige Beschränktheit von $c_N \in L^2(H^2(M))$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung. Die Behauptung folgt dann aus der Reflexivität von $L^2(H^2(M))$ sowie dem Lemma von Mazur angewendet auf den abgeschlossenen, konvexen Unterraum $L^2(W)$. \square

Wir reichen noch nach, wie die Beschränktheit der $\gamma_N \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ die Beschränktheit in $L^6(L^6(M))$ impliziert sowie weitere Interpolationsresultate die später noch von Nutzen sein werden.

Folgerung 4.18. (Interpolation) *Seien $\beta, \delta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die Lösungen γ_N zu $N \in \mathbb{N}$ aus Satz 4.14 unabhängig von $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ in den Räumen $L^4(L^\infty(M))$, $L^6(L^6(M))$, $L^{12}(L^3(M))$ und $L^{16}(L^{\frac{8}{3}}(M))$ durch eine Konstante $C_\beta > 0$ beschränkt.*

Beweis. Folgt aus der Energieabschätzung aus Satz 4.15 mit Lemma 3.47 für $d = 1$ mit den Parametern:

1. $r = 4$ und $q = \infty$,
2. $r = 6$ und $q = 6$,
3. $r = 12$ und $q = 3$,
4. $r = 16$ und $q = \frac{8}{3}$.

\square

Die folgende Aussage über Interpolation von Gradienten des chemischen Potentials wird beim Beweis der starken Konvergenz der Surfactants verwendet.

Folgerung 4.19. (Interpolation von Gradienten des chemischen Potentials) *Seien $\beta, \delta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die Lösungen c_N aus Satz 4.14 gleichmäßig in $N \in \mathbb{N}$ durch eine Konstante $C_{\beta\delta} > 0$ in der $L^{\frac{16}{7}}(W^{1,8}(M))$ -Norm beschränkt.*

Beweis. Mit Lemma 3.60 folgt mit $q = 8$ und $r = 1$ in einer Raumdimension für fast alle $t \in [0, T]$:

$$\|c_N(t)\|_{W^{1,8}(M_t)} \leq C \|c_N(t)\|_{H^2(M)}^{\frac{3}{4}} \|c_N(t)\|_{L^1(M_t)}^{\frac{1}{4}}.$$

Mit dem Exponenten $\frac{16}{7}$ und über die Zeit integriert ergibt sich:

$$\int_0^T \|c_N(t)\|_{W^{1,8}(M_t)}^{\frac{16}{7}} dt \leq C \int_0^T \|c_N(t)\|_{H^2(M)}^{\frac{12}{7}} \|c_N(t)\|_{L^1(M_t)}^{\frac{4}{7}} dt.$$

Dann impliziert die Hölder-Ungleichung:

$$\|c_N\|_{L^{\frac{16}{7}}(W^{1,8}(M))} \leq \|c_N\|_{L^2(H^2(M))}^{\frac{3}{4}} \|c_N\|_{L^4(L^1(M))}^{\frac{1}{4}}.$$

Die rechte Seite ist dann aufgrund der Energieabschätzung Satz 4.15 und aufgrund der Wachstumsbedingung an f' aus Voraussetzung 4.6 zusammen mit der Beschränktheit von $\gamma_N \in L^{12}(L^3(M))$ aus Folgerung 4.18 gleichmäßig in $N \in \mathbb{N}$ beschränkt. \square

Die soeben verwendete Interpolationsabschätzung lässt sich später auch auf beliebige Testfunktionen $w \in L^2(W) \cap L^4(L^1(M))$ anwenden, daher macht die folgende Aussage Sinn.

Folgerung 4.20. (Beschränktheit des elliptischen Operators) *Seien $0 < \beta, \delta \leq 1$. Unter den getroffenen Voraussetzungen gibt es eine Konstante $C_\beta > 0$, die von $N \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$ unabhängig ist, so dass die elliptischen Operatoren aus Definition 4.10 und 4.11 angewendet auf die Lösungen ϱ_N, γ_N, c_N aus Satz 4.14 folgende Abschätzungen erfüllen:*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}^{1\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, c_N), \zeta \rangle_{L^2(V_0)} &\leq C_\beta \|\zeta\|_{L^2(H^3(M))}, \\ \langle \mathcal{A}^{2\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, c_N), w \rangle_{L^2(W)} &\leq C_\beta (\|w\|_{L^2(H^2(M))} + \|w\|_{L^{\frac{16}{7}}(W^{1,8}(M))}), \end{aligned}$$

für Testfunktionen $\zeta \in L^2(V_0)$ und $w \in L^2(W) \cap L^{\frac{16}{7}}(W^{1,8}(M))$.

Beweis. Die Behauptung für $\mathcal{B}^{1\beta\delta}$ ist einzusehen, indem wir den Fluss

$$J_1^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N) = m_1^\beta(\varrho_N)(-\nabla^M p(\varrho_N) + a_1(\varrho_N)\nabla^M k) + m_2^\beta(\varrho_N)\nabla^M \sigma(\gamma_N) + v^* \varrho_N + \delta \nabla^M \Delta^M \varrho_N + \beta \nabla^M \varrho_N$$

in der $L^2(L^2(M))$ -Norm kontrollieren wie in Folgerung 3.26. Dabei ist eine zuzügliche Überlegung für den Oberflächenspannungsterm und für die β -Regularisierung erforderlich. Der β -Term ist unkritisch wegen der Energieabschätzung aus Satz 4.15 und wegen $\sqrt{\beta} \leq 1$. Ferner ist ebenfalls nach der Energieabschätzung $\sqrt{m_3^\beta(\varrho_N)}\nabla^M \sigma(\gamma_N) \in L^2(L^2(M))$, damit folgt die gewünschte Behauptung aus der β -Trunkierung des Koeffizienten m_2^β . Nun zum Surfactant-Operator. Nach der Hölder-Ungleichung haben wir den folgenden Fluss in $L^{\frac{16}{9}}(L^{\frac{8}{3}}(M))$ abzuschätzen:

$$J_2^\beta(\varrho_N, \gamma_N) = \gamma_N m_2^\beta(\varrho_N)(-\nabla^M p(\varrho_N) + a_2(\varrho_N)\nabla^M k) + \gamma_N m_3^\beta(\varrho_N)\nabla^M \sigma(\gamma_N) + v^* \gamma_N - \nabla^M \gamma_N,$$

sowie in $L^2(L^2(M))$ den δ -Regularisierungsterm $\delta \Delta^M c_N$. Der zusätzliche δ -Term ist wegen der Energieabschätzung aus Satz 4.15 und wegen $\sqrt{\delta} \leq 1$ kontrolliert. Schätzen wir nun den Surfactant-Fluss J_2 ab. Der Term $v^* \gamma_N$ ist unkritisch, da $\gamma_N \in L^\infty(L^2(M))$ abgeschätzt ist und v^* Voraussetzung 4.2 genügt. Der Diffusionsterm $\nabla^M \gamma_N$ ist ebenfalls unkritisch, da $\nabla^M \gamma_N \in L^2(L^2(M))$ nach der Energieabschätzung gleichmäßig beschränkt ist und wir Kontrolle in einem schlechteren Raum benötigen. Die verbleibenden Terme $J_2^{\beta'} = m_2^\beta(\varrho_N)(-\nabla^M p(\varrho_N) + a_2(\varrho_N)\nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_N)\nabla^M \sigma(\gamma_N)$ multipliziert mit γ_N schätzen wir getrennt in $L^2(L^2(M))$ bzw. $L^{16}(L^{\frac{8}{3}}(M))$ ab und verwenden dann die Hölder-Ungleichung. Die Beschränktheit von $J_2^{\beta'}$ in $L^2(L^2(M))$ folgt aus der Energieabschätzung wie bei der Abschätzung von $J_1^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N)$ im ersten Teil der Behauptung. Die Beschränktheit von γ_N in $L^{16}(L^{\frac{8}{3}}(M))$ liefert Folgerung 4.18. \square

Kompaktheit

Wie im vorherigen Kapitel 3 müssen wir starke Konvergenz zeigen, um in den Nichtlinearitäten zum Limes übergehen zu können. Die starke Konvergenz in der ϱ -Variable erfolgt vollkommen analog zu Kapitel 3.

Folgerung 4.21. (Starke Konvergenz der Flüssigkeit) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta, \delta > 0$ für $\varrho_{\beta\delta}$ aus Folgerung 4.17, dass die Lösungen ϱ_N aus Satz 4.14 nach Auswahl einer weiteren Teilfolge $\varrho_N \rightarrow \varrho_{\beta\delta}$ in $L^2(H^1(M))$ für $N \rightarrow \infty$ stark konvergieren.*

Beweis. Zusammen mit der Beschränktheit des elliptischen Operators aus Folgerung 4.20 folgt die Behauptung mit dem selben Beweis wie in Folgerung 3.28. \square

Die Methode aus [WG] bzw. [Wie] starke Konvergenz der Surfactants zu zeigen, versagt hier aus ähnlichen Gründen, warum die Methode aus [Gr1] bei der ungekoppelten Dünnfilmgleichung in Kapitel 3 nicht funktioniert hat. Um den Satz von Hahn-Banach anzuwenden, um eine gleichmäßige Abschätzung für Zeitdifferenzen in einem Dualraum zu erhalten, reicht die Menge von zugelassenen Testfunktionen (d.h. die Galerkin-Funktionen) nicht aus. Der Trick aus [Gr1], den L^2 -orthogonalen Anteil einer beliebigen Testfunktion zu ergänzen, ist hier nicht möglich, da die Galerkin-Funktionen zu

einem späteren Zeitpunkt kein orthogonales System bilden. Stattdessen verwenden wir wie in Kapitel 3 die Methode aus [AL] bzw. [Al2] und testen mit Zeitdifferenzen. Dabei müssen wir beachten, dass der Zusammenhang zwischen Erhaltungsgröße γ und chemischem Potential c nichtlinear ist. Daher ist es erforderlich wie in [AL] bzw. [Al2] auf die Werkzeuge aus der konvexen Analysis (siehe z.B. [Dei] und [Zei]) zurückzugreifen.

Definition 4.22. (Konvex konjugierte Funktion) Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und unterhalbstetig mit $G \not\equiv \infty$. Dann ist die konvex konjugierte Funktion $G^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ definiert durch:

$$G^*(\gamma) = \sup_{c \in \mathbb{R}} (c\gamma - G(c)).$$

Proposition 4.23. (Konvexe Analysis) Sei $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex und unterhalbstetig mit $G \not\equiv \infty$. Dann gilt für die konvex konjugierte Funktion G^* :

1. G^* ist konvex und unterhalbstetig.
2. $G^* \not\equiv \infty$.
3. $G^{**} = G$.
4. Es gilt die Young-Ungleichung:
Für alle $c, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt: $c\gamma \leq G(c) + G^*(\gamma)$.
5. Es gilt Gleichheit $c\gamma = G(c) + G^*(\gamma)$ genau dann, wenn $\gamma \in \partial G(c)$, d.h. γ liegt im Subdifferential von G an der Stelle $c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Siehe z.B. [Zei] (Paragraph 51). □

Zur folgenden Definition siehe z.B. auch [Al1].

Definition 4.24. (Weierstraßsche E-Funktion) Sei G wie in Proposition 4.23 und stetig differenzierbar mit Ableitung $G' = b$. Wir definieren die Weierstraßsche E-Funktion $\mathbf{E} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von G durch:

$$\mathbf{E}(c, d) = G(d) - G(c) - (d - c)b(c).$$

Weil nach Voraussetzung 4.6 f' strikt monoton und stetig differenzierbar ist, ist die konvex konjugierte Funktion $G = f^*$ von f stetig differenzierbar mit Ableitung $b = (f')^{-1}$. Die konvex Konjugierte von G ist dann wiederum $G^* = f^{**} = f$. (vgl. Proposition 4.23). Beim Abschätzen von Zeitdifferenzen wird folgender Ausdruck (vgl. [Al2], [Be]) vorkommen:

$$\mathbf{E}^*(c, d) = G^*(b(d)) - G^*(b(c)) - c(b(d) - b(c)).$$

Weil in unserer Situation G^* stetig differenzierbar ist, ist dies die Weierstraßsche E-Funktion von G^* ausgedrückt in anderen Variablen.

Satz 4.25. (Abschätzen von Zeitdifferenzen) Sei M wie bisher mit der Familie von Diffeomorphismen $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ aus Definition 4.2. Sei $\mathbf{E}^* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben. Dann gilt unter den getroffenen Voraussetzungen für die Lösungen c_N aus Satz 4.14 die folgende Abschätzung von Zeitdifferenzen:

$$\int_0^{T-h} \int_{M_0} \mathbf{E}^*(c_N(t) \circ \Phi_t, c_N(t+h) \circ \Phi_{t+h}) d\mathcal{H}^d dt \leq C_{\beta\delta} h.$$

Dabei ist die Konstante $C_{\beta\delta} > 0$ unabhängig von $N \in \mathbb{N}$ und $h > 0$.

Beweis. Sei $N \in \mathbb{N}$. Zu $h > 0$ integrieren wir für $t \in [0, T-h]$ über $[t, t+h]$ die folgende Surfactantgleichung aus Satz 4.14 in der wir $\psi_j, j \leq N$ als Testfunktion gesetzt haben:

$$\frac{d}{dt} (\psi_j^t, \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} + \langle \mathcal{B}_t^{2\beta\delta} (\varrho_N(t), \gamma_N(t), c_N(t)), \psi_j^t \rangle_{W^t} = 0.$$

Anschließend multiplizieren wir mit den Lösungskoeffizienten $b_j^N(t+h) - b_j^N(t)$ aus Satz 4.14 und summieren über $j = 0 \dots N$. Zu $h \in \mathbb{R}$ schreiben wir $\Phi_t^h = \Phi_{t+h} \circ \Phi_t^{-1}$. Damit ergibt sich aufgrund der Definition der Ansatzfunktionen aus Definition 4.12:

$$(c_N(t+h) - c_N(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h}, \gamma_N(t+h))_{L^2(M_{t+h})} - (c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t), \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} \\ + \int_t^{t+h} \langle \mathcal{B}_s^{2\beta\delta}(\varrho_N(s), \gamma_N(s), c_N(s)), c_N(t+h) \circ \Phi_s^{t+h-s} - c_N(t) \circ \Phi_s^{s-t} \rangle_{W^s} ds = 0.$$

Es folgt für den parabolischen Teil mit dem Transformationssatz 6.8, wenn wir Terme einfügen und wieder abziehen:

$$(c_N(t+h) - c_N(t) \circ \Phi_{t+h}^{-h}, \gamma_N(t+h))_{L^2(M_{t+h})} - (c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t), \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} \\ = (c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t), \gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h - \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} \\ + (c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t), \gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h (\mathcal{J}\Phi_t^h - 1))_{L^2(M_t)}.$$

Den Term in der letzten Zeile bringen wir auf die rechte Seite und schätzen ihn mit der Hölder-Ungleichung nach oben hin ab:

$$(c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t), \gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h (\mathcal{J}\Phi_t^h - 1))_{L^2(M_t)} \\ \leq h \|c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t)\|_{L^{\frac{6}{5}}(M_t)} \|\gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h\|_{L^6(M_t)} \left\| \frac{\mathcal{J}\Phi_t^h - 1}{h} \right\|_{C^0(M_t)} \\ \leq Ch (\|c_N(t+h)\|_{L^{\frac{6}{5}}(M_{t+h})} + \|c_N(t)\|_{L^{\frac{6}{5}}(M_t)}) \|\gamma_N(t+h)\|_{L^6(M_{t+h})},$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass der Differenzenquotient von $\mathcal{J}\Phi_t^h$ gleichmäßig beschränkt bleibt aufgrund von Voraussetzung 4.2. Außerdem wurden weitere Transformationsterme abgeschätzt. Wenn wir über $[0, T-h]$ integrieren kann erneut mit der Hölder-Ungleichung abgeschätzt werden:

$$Ch \int_0^{T-h} (\|c_N(t+h)\|_{L^{\frac{6}{5}}(M_{t+h})} + \|c_N(t)\|_{L^{\frac{6}{5}}(M_t)}) \|\gamma_N(t+h)\|_{L^6(M_{t+h})} dt \\ \leq Ch \|c_N\|_{L^{\frac{6}{5}}(L^{\frac{6}{5}}(M))} \|\gamma_N\|_{L^6(L^6(M))} \\ \leq Ch (1 + \|\gamma_N\|_{L^{\frac{6}{5}(r+1)}(L^{\frac{6}{5}(r+1)}(M))}^{r+1}) \|\gamma_N\|_{L^6(L^6(M))} \leq C_\beta h.$$

Dabei wurde die Wachstumsbedingung aus Voraussetzung 4.6 an f' verwendet. Es ist $r < 2$ daher ist $\frac{6}{5}(r+1) \leq 6$. Die Abschätzung folgt also mit Folgerung 4.18. Machen wir nun mit dem verbleibenden parabolischen Term weiter. Wir können nach Proposition 4.23 nach oben hin abschätzen:

$$(c_N(t+h) \circ \Phi_t^h - c_N(t), \gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h - \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} \\ \geq \int_{M_t} G(c_N(t+h) \circ \Phi_t^h) + G^*(\gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h) - G(c_N(t+h) \circ \Phi_t^h) - G^*(\gamma_N(t)) d\mathcal{H}^d \\ - (c_N(t), \gamma_N(t+h) \circ \Phi_t^h - \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} \\ = \int_{M_t} \mathbf{E}^*(c_N(t), c_N(t+h) \circ \Phi_t^h) d\mathcal{H}^d.$$

Als nächstes integrieren wir über $[0, T-h]$ und transformieren die Integrale auf M_0 . Die Jacobischen sind gleichmäßig nach unten hin durch eine Konstante $c_0 > 0$ abgeschätzt, da nach Voraussetzung 4.2 die inversen Diffeomorphismen gleichmäßig nach oben hin beschränkt sind. Daher können wir den positiven Term weiter nach unten hin abschätzen:

$$\int_0^{T-h} \int_{M_t} \mathbf{E}^*(c_N(t), c_N(t+h) \circ \Phi_t^h) d\mathcal{H}^d dt \geq c_0 \int_0^{T-h} \int_{M_0} \mathbf{E}^*(c_N(t) \circ \Phi_t, c_N(t+h) \circ \Phi_{t+h}) d\mathcal{H}^d dt.$$

Es bleibt übrig den elliptischen Term auf die linke Seite zu bringen, über $[0, T-h]$ zu integrieren und nach oben hin abzuschätzen. Wenn wir die Integralgrenzen verschieben, den Satz von Fubini verwenden und erneut die Integralgrenzen verschieben, können wir Folgerung 4.20 verwenden:

$$\begin{aligned} & \int_0^{T-h} \int_t^{t+h} \langle \mathcal{A}_s^{2\beta\delta}(c_N(s), \gamma_N(s), \varrho_N(s)), c_N(t+h) \circ \Phi_s^{t+h-s} - c_N(t) \circ \Phi_s^{t-s} \rangle_{W^s} ds dt \\ &= \int_0^h \int_s^{T-h+s} \langle \mathcal{A}_t^{2\beta\delta}(c_N(t), \gamma_N(t), \varrho_N(t)), c_N(t+h-s) \circ \Phi_t^{h-s} - c_N(t-s) \circ \Phi_t^{-s} \rangle_{W^t} dt ds \\ &\leq C_\beta \int_0^h \|c_N\|_{L^2(H^2(M))} + \|c_N\|_{L^{\frac{16}{7}}(W^{1,s}(M))} ds \leq C_{\beta\delta} h. \end{aligned}$$

Dabei haben wir am Ende Transformationsterme aufgrund von Voraussetzung 4.2 gleichmäßig abgeschätzt und Folgerung 4.19 und 4.20 sowie die Energieabschätzung verwendet. Insgesamt erhalten wir folgende Abschätzung von Zeitdifferenzen:

$$\int_0^{T-h} \int_{M_0} \mathbf{E}^*(c_N(t) \circ \Phi_t, c_N(t+h) \circ \Phi_{t+h}) d\mathcal{H}^d dt \leq C_{\beta\delta} h.$$

□

Folgerung 4.26. (Starke Konvergenz der Surfactants) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta, \delta > 0$ für $\gamma_{\beta\delta}$ aus Folgerung 4.17, dass die Lösungen $\gamma_N = f'(c_N)$ mit den c_N aus Satz 4.14 nach Auswahl einer weiteren Teilfolge für alle $\epsilon > 0$ stark in $L^{6-\epsilon}(L^{6-\epsilon}(M))$ gegen $\gamma_{\beta\delta}$ konvergieren.*

Beweis. Es bezeichne $\mathbf{B}(c) = G^*(b(c)) + G(0) = f((f')^{-1}(c)) + f^*(0)$ die parabolische Energie (siehe [Al2], [Be]) mit $G^* = f$ der konvex-konjugierten Funktion von $G = f^*$ und $b = G' = (f')^{-1}$. Dann ist:

$$\mathbf{B}(c_N(t) \circ \Phi_t) = \int_{M_0} G^*((f')^{-1}(c_N(t) \circ \Phi_t)) d\mathcal{H}^d + C = \int_{M_0} f(\gamma_N(t) \circ \Phi_t) d\mathcal{H}^d + C.$$

in $L^\infty([0, T])$ unabhängig von $N \in \mathbb{N}$ beschränkt. Dies folgt aus der Energieabschätzung aus Satz 4.15 zusammen mit der Tatsache, dass die Transformationsdeterminante $\mathcal{J}\Phi_t$ gleichmäßig durch eine Konstante $c_0 > 0$ in $t \in [0, T]$ nach unten beschränkt ist. Ferner ist nach Folgerung 4.17 die elliptische Norm $\|c_N \circ \Phi_t\|_{L^2(H^2(M_0))} \leq C_{\beta\delta}$ beschränkt mit einer von $N \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten. Es ist $H^2(M_0)$ separabler und reflexiver Banachraum. Ferner ist $b = (f')^{-1}$ wegen der gleichmäßigen Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6 als Operator von $L^2(M_0)$ nach $L^2(M_0)$ vermöge $u \mapsto b \circ u$ beschränkt auf beschränkten Teilmengen. Schließlich mit der kompakten Einbettung $H^2(M_0) \rightarrow L^2(M_0)$ folgt aus dem abstrakten Kompaktheitssatz aus [Al2] (Siehe auch [Be]) die Präkompaktheit der $\gamma_N \circ \Phi$ in $L^1(L^2(M_0))$. Nach einer Transformation und mit Folgerung 4.17 können wir den Limes einer Teilfolge als $\gamma_{\beta\delta}$ aus Folgerung 4.17 identifizieren. Aufgrund der Beschränktheit der γ_N in $L^6(L^6(M))$ aus Folgerung 4.18 können wir für alle $\epsilon > 0$ die starke Konvergenz auf $L^{6-\epsilon}(L^{6-\epsilon}(M))$ hochziehen. □

Folgerung 4.27. (Identifikation des Grenzwertes) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt für die Grenzwerte $\gamma_{\beta\delta}$ und $c_{\beta\delta}$ zu $\beta, \delta > 0$ aus Folgerung 4.17 der Zusammenhang $f'(\gamma_{\beta\delta}) = c_{\beta\delta}$ mit f aus Voraussetzung 4.6.*

Beweis. Es ist per Definition $c_N = f'(\gamma_N)$. Aus der starken Konvergenz der γ_N aus Folgerung 4.26 folgt nach Auswahl einer Teilfolge die punktweise Konvergenz fast überall. Daher konvergiert fast überall c_N gegen $f'(\gamma_{\beta\delta})$ weil f' stetig ist. Somit stimmt der schwache Limes $c_{\beta\delta}$ von c_N aus Folgerung 4.17 mit $f'(\gamma_{\beta\delta})$ überein. □

Obige Aussage war leicht zu zeigen, da f'^{-1} eine stetige Inverse besitzt. Die schwachen Limiten der Gradienten der Oberflächenspannung identifizieren wir in der folgenden Aussage.

Folgerung 4.28. (Schwache Konvergenz von Gradienten der Oberflächenspannung) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt zu $\beta, \delta > 0$ für die Lösungen γ_N für $N \in \mathbb{N}$ aus Satz 4.14 und den Limes $\gamma_{\beta\delta}$ aus Folgerung 4.17, dass die zugehörigen Gradienten der Oberflächenspannungen im folgenden Sinne schwach konvergieren: $\nabla^M \sigma(\gamma_N) \rightharpoonup \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})$ in $L^s(L^s(M))$ für $1 \leq s < \frac{6}{5}$.*

Beweis. Wenn wir die Gibbs-Relation aus Voraussetzung 4.8 ableiten erhalten wir:

$$\nabla^M \sigma(\gamma_N) = -\gamma_N f''(\gamma_N) \nabla^M \gamma_N.$$

Es gilt wegen der Wachstumsbedingung an f'' aus Voraussetzung 4.6 und der starken Konvergenz der γ_N in $L^p(L^p(M))$, $p < 6$ aus Folgerung 4.26 mit dem allgemeinen Konvergenzsatz von Lebesgue die Konvergenz $:\sqrt{f''(\gamma_N)} \rightarrow \sqrt{f''(\gamma_{\beta\delta})}$ in $L^6(L^6(M))$. Aufgrund der Energieabschätzung aus Satz 4.15 besitzt $\sqrt{f''(\gamma_N)} \nabla^M \gamma_N$ einen schwachen Limes in $L^2(L^2(M))$, den wir aufgrund der schwachen Konvergenz der $\nabla^M \gamma_N$ in $L^2(L^2(M))$ aus Folgerung 4.17 und der starken Konvergenz der $\sqrt{f''(\gamma_N)}$ als $\sqrt{f''(\gamma_{\beta\delta})} \nabla^M \gamma_{\beta\delta}$ identifizieren können. Es konvergiert also ein Faktor schwach in $L^2(L^2(M))$ die anderen stark in $L^6(L^6(M))$ bzw. $L^p(L^p(M))$, $p < 6$. Damit folgt die Behauptung mit der Hölder-Ungleichung. \square

Übergang zum Grenzwert

Mit den gezeigten starken und schwachen Konvergenzen der Lösungen können wir in den Galerkin-Gleichungen zum Limes übergehen, wenn wir für die Testfunktionen ebenfalls Konvergenz in geeigneter Weise zeigen. Dies erfolgt vollkommen analog zu Kapitel 3.

Proposition 4.29. (Konstruktion von Testfunktionen) *Sei M wie in Voraussetzung 4.1 und 4.2. Seien zu $N \in \mathbb{N}$ die Galerkin-Räume Ξ_N^T aus Definition 4.12. Dann existiert zu Funktionen $\zeta \in L^2(V^0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ und $w \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ eine Folge $(\zeta_N, w_N) \in \Xi_N^T$, so dass für $N \rightarrow \infty$ die folgenden Konvergenzen gelten:*

1. $\zeta_N \rightarrow \zeta$ in $L^2(H^3(M))$ und $w_N \rightarrow w$ in $L^2(H^2(M))$.
2. $\zeta_N(0) \rightarrow \zeta(0)$ in $H^1(M_0)$ und $w_N(0) \rightarrow w(0)$ in $L^2(M_0)$.
3. $\partial_t^M \zeta_N \rightarrow \partial_t^M \zeta$ in $L^1(H^1(M))$ und $\partial_t^M w_N \rightarrow \partial_t^M w$ in $L^1(L^2(M))$.

Beweis. Die ζ_N sind wie in Proposition 3.32 zu konstruieren. Auf analoge Weise konstruieren wir die w_N . Sei $\tilde{w} = w \circ \Phi_t$. Sei Q_N wieder die $L^2(M_0)$ -orthogonale Projektion aus Proposition 3.31. Definiere $\tilde{w}_N = Q_N(\tilde{w})$ und dann $w_N = \tilde{w}_N \circ \Phi_t^{-1}$. Mit dem Transformationsatz 6.8 reicht es zu zeigen, dass

$$\|w_N - w\|_{L^2(H^2(M))} \leq C \|\tilde{w}_N - \tilde{w}\|_{L^2(H^2(M_0))} \rightarrow 0.$$

Ferner respektiert Q_N die Mittelwerte, d.h. $\tilde{w}_N - \tilde{w} = \tilde{w}_N - \bar{w}_N - \tilde{w} + \bar{w}$. Daher ist wie in Proposition 3.24 zu zeigen, dass: $\|\Delta^M(\tilde{w}_N - \tilde{w})\|_{L^2(L^2(M_0))} \rightarrow 0$. Doch dies folgt analog wie in Proposition 3.32. \square

Wir werden sehen, dass beim Grenzübergang in der Surfactantgleichung der Limes des Flusses nur für eine Konvergenz in $L^{\frac{3}{2}-\epsilon}(L^{\frac{3}{2}-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$ identifiziert werden kann. Es ist daher erforderlich zu zeigen, dass die Testfunktionen in einem geringfügig besseren Raum als $L^3(W^{1,3}(M))$ konvergieren. Wir zeigen dazu folgende Aussage mit Exponent $\frac{16}{5} > 3$, der nicht optimal ist.

Lemma 4.30. (Interpolation von Testfunktionen) *Sei M wie in Voraussetzung 4.1 und eine Funktion $w \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$. Die in Proposition 4.29 konstruierte Funktion w_N konvergiert gegen w in $L^{\frac{16}{5}}(W^{1, \frac{16}{5}}(M))$.*

Beweis. Nach Lemma 3.60 gilt für $w \in L^2(H^2(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w(t) \in W^t$ zu fast jedem Zeitpunkt:

$$\|w(t)\|_{W^{1, \frac{16}{5}}(M_t)} \leq C \|w(t)\|_{H^2(M_t)}^\alpha \|w(t)\|_{L^2(M_t)}^{1-\alpha}$$

mit $1 - \frac{5}{16} = \alpha(2 - \frac{1}{2}) + (1 - \alpha)(-\frac{1}{2})$, d.h. $\alpha = \frac{19}{32}$. Potenzieren wir diese Gleichung zum Exponenten $\frac{16}{5}$ und integrieren anschließend über die Zeit:

$$\int_0^T \|w(t)\|_{W^{1, \frac{16}{5}}(M_t)}^{\frac{16}{5}} dt \leq C \int_0^T \|w(t)\|_{H^2(M_t)}^{\frac{19}{10}} \|w(t)\|_{L^2(M_t)}^{\frac{13}{10}} dt.$$

Es ist $\frac{19}{10} < 2$. Die Hölder Ungleichung liefert dann:

$$\|w\|_{L^{\frac{16}{5}}(W^{1, \frac{16}{5}}(M))}^{\frac{16}{5}} \leq C \|w\|_{L^2(H^2(M))}^{\frac{19}{10}} \|w\|_{L^{26}(L^2(M))}^{\frac{13}{10}}.$$

Es ist $W^{1,1}(L^2(M)) \hookrightarrow L^{26}(L^2(M))$ stetig eingebettet. Angewendet auf $w - w_N$ folgt die Behauptung aus Proposition 4.29. \square

Damit können wir nun in den Galerkin-Gleichungen zum Limes übergehen. Im darauf folgenden Schritt müssen wir dann wie in Kapitel 3 das Poisson-Problem für die Testfunktionen lösen, um zur klassischen schwachen Formulierung (A) zurückzukehren.

Satz 4.31. (Lösung des nichtdegenerierten Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen sind zu $\beta, \delta > 0$ die Limiten $\varrho_{\beta\delta} \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(V)$ und $\gamma_{\beta\delta} \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ mit $f'(\gamma_{\beta\delta}) \in L^2(W)$ aus Folgerung 4.17 eine Lösung des folgenden Systems:*

$$\begin{aligned} - (w_1(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_1(t), \varrho_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), w_1 \rangle_{L^2(H^1(M))} &= 0, \\ - (w_2(0), \gamma_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_2(t), \gamma_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \mathcal{A}^{2\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), w_2 \rangle_{L^2(W)} &= 0, \end{aligned}$$

für Testfunktionen $w_1 \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ und $w_2 \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit der Eigenschaft $w_1(T) = w_2(T) = 0$.

Beweis. Zu einer Testfunktion $\zeta \in L^2(V_0) \cap W^{1,1}(H^1(M))$ und $w_2 \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $\zeta(T) = w_2(T) = 0$ konstruieren wir mit Proposition 4.29 die approximativen Testfunktionen ζ_N und w_N . Nach Konstruktion ist dann $\zeta_N(T) = w_N(T) = 0$. Wenn wir die Filmgleichung in Satz 4.14 über $[0, T]$ integrieren erhalten wir dann mit diesen Testfunktionen:

$$-(\zeta_N(0), \varrho_N(0))_{H^0} - \int_0^T (\partial_t^M \zeta_N(t), \varrho_N(t))_{H^t} dt + \langle \mathcal{B}^{1\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, f'(\gamma_N)), \zeta_N \rangle_{L^2(V_0)} = 0.$$

Wir können in den parabolischen Termen aufgrund von Proposition 4.29 und Folgerung 4.21 zum Limes übergehen. Die Testfunktion im elliptischen Teil konvergiert ebenfalls stark aufgrund von Proposition 4.29. Es bleibt zu zeigen, dass der Fluss $J^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N)$ gegeben durch:

$$J^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N) = m_1^\beta(\varrho_N) \left(-\nabla^M p(\varrho_N) + a_1(\varrho_N) \nabla^M k \right) + m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma(\gamma_N) + v^* \varrho_N - \beta \nabla^M \varrho_N + \delta \nabla^M \Delta^M \varrho_N.$$

schwach in $L^2(L^2(M))$ gegen das Richtige konvergiert. Die Terme $m_1^\beta(\varrho_N) (-\nabla^M p(\varrho_N) + a_1(\varrho_N) \nabla^M k)$, $v^* \varrho_N$ und $\delta \nabla^M \Delta^M \varrho_N$ konvergieren wie in Satz 3.34. Der Term $\beta \nabla^M \varrho_N$ konvergiert stark wegen Folgerung 4.21. Der Term $m_2^\beta(\varrho_N) \gamma_N \nabla^M c_N = -m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \sigma(\gamma_N)$ ist wegen der Energieabschätzung aus Satz 4.15 und der Trunkierung der Mobilitätskoeffizienten m_2^β beschränkt in $L^2(L^2(M))$, konvergiert daher schwach. Den schwachen Grenzwert identifizieren wir schließlich mit Folgerung 4.28 zusammen mit Folgerung 4.21. Damit erhalten wir also im Limes $N \rightarrow \infty$:

$$-(\zeta(0), \varrho_0)_{H^0} - \int_0^T (\partial_t^M \zeta(t), \varrho_{\beta\delta}(t))_{H^t} dt + \langle \mathcal{B}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), \zeta \rangle_{L^2(V_0)} = 0.$$

Die behauptete Formulierung der Filmgleichung folgt dann aus Lemma 3.39.

Wenn wir die Surfactant-Gleichung in Satz 4.14 über $[0, T]$ integrieren erhalten wir dann mit den Testfunktionen von oben:

$$-(w_N(0), \gamma_N(0))_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_N(t), \gamma_N(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \mathcal{A}^{2\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, f'(\gamma_N)), w_N \rangle_{L^2(W)} = 0.$$

Wir können in den parabolischen Termen aufgrund von Proposition 4.29 und Folgerung 4.26 zum Limes übergehen. Der elliptische Term lautet:

$$\begin{aligned} \langle \langle \mathcal{A}^{2\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N, c_N), w_N \rangle \rangle_{L^2(W)} &= \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_N \bullet \gamma_N J_2^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N) d\mathcal{H}^d dt \\ &+ \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_N \bullet \nabla^M \gamma_N d\mathcal{H}^d dt + \int_0^T \int_{M_t} \delta \Delta^M w_N \Delta^M c_N d\mathcal{H}^d dt \end{aligned}$$

wobei $J_2^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N)$ folgende Struktur hat:

$$J_2^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N) = m_2^\beta(\varrho_N)(-\nabla^M p(\varrho_N) + a_2(\varrho_N)\nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_N)\nabla^M \sigma(\gamma_N) + v^* \gamma_N.$$

Wir behandeln die drei Terme separat. Die Testfunktion w_N konvergiert stark in $L^2(H^2(M))$ aufgrund von Proposition 4.29 und c_N konvergiert schwach ebenfalls in $L^2(H^2(M))$ aufgrund von Folgerung 4.17. Daher können wir im dritten Term zum Limes übergehen. Mit der gleichen Argumentation können wir im zweiten Term zum Limes übergehen. Für den ersten Term sehen wir ein dass $J_2^{\beta\delta}(\varrho_N, \gamma_N)$ schwach in $L^2(L^2(M))$ gegen:

$$J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}) = m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta})(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_2(\varrho_{\beta\delta})\nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta})\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + v^* \gamma_{\beta\delta}$$

konvergiert. Dies folgt analog wie für den Fluss in der Filmgleichung. Es konvergiert weiterhin stark $\gamma_N \rightarrow \gamma_{\beta\delta}$ in $L^{6-\epsilon}(L^{6-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$ aufgrund von der starken Konvergenz aus Folgerung 4.26. Die Testfunktion muss also in $L^{3+\epsilon}(L^{3+\epsilon}(M))$ für ein $\epsilon > 0$ konvergieren. Dies ist der Fall nach Lemma 4.30. \square

4.2 Grenzübergang zu degenerierten Koeffizienten

Dieser Paragraph befasst sich mit dem zweiten Grenzübergang, nämlich dem Limes $\delta \rightarrow 0$ in der Regularisierung der Koeffizienten. Beschränktheit und schwache Konvergenz erhalten wir direkt aus den entsprechenden Abschätzungen der Galerkin-Approximation. Wesentlicher Bestandteil ist es dann gleichmäßige Konvergenz für die Flüssigkeit zu zeigen, sowie Zeitkompaktheit der Surfactants unabhängig von der δ -Regularisierung.

Beschränktheit und schwache Konvergenz

Die mathematische Energieabschätzung des δ -Problems folgt aus der entsprechenden Abschätzung für die Galerkin-Approximation unter Verwendung der jeweiligen Konvergenzen zusammen mit Stetigkeit und Unterhalbstetigkeit.

Folgerung 4.32. (Energieabschätzung des δ -Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen zu $\beta, \delta > 0$ die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}$ aus Satz 4.31 die folgende Energieabschätzung:*

$$\begin{aligned} \|\gamma_{\beta\delta}\|_{L^\infty(L^2(M))}^2 &+ \frac{1}{2}\|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^\infty(H^1(M))}^2 + c_1 \int_0^T \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})|\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &+ c_2 \int_0^T \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta})|\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^T \int_{M_t} f''(\gamma_{\beta\delta})|\nabla^M \gamma_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &+ \delta(\|\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 + \|\Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta})\|_{L^2(M)}^2) + \beta\|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C_\beta \end{aligned}$$

mit einer von $\delta > 0$ unabhängigen Konstanten $C_\beta > 0$ und von $\delta, \beta > 0$ unabhängigen Konstanten $c_1, c_2 > 0$.

Beweis. Aufgrund von Proposition 3.23 gilt Satz 4.15 für ganz $[0, T]$. Mit der gleichmäßigen strikten Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6 können wir wie im Beweis von Folgerung 4.17 den parabolischen

schen Energieterm der Surfactants nach unten hin abschätzen und erhalten:

$$\begin{aligned} & \|\gamma_N\|_{L^\infty(L^1(M))}^2 + \frac{1}{2}\|\varrho_N\|_{L^\infty(H^1(M))}^2 + c_1 \int_0^T \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \Delta^M \varrho_N|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + c_2 \int_0^T \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_N) |\nabla^M \sigma(\gamma_N)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^T \int_{M_t} f''(\gamma_N) |\nabla^M \gamma_N|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + \delta(\|\nabla^M \Delta^M \varrho_N\|_{L^2(L^2(M))}^2 + \|\Delta^M f'(\gamma_N)\|_{L^2(L^2(M))}^2) + \beta \|\Delta^M \varrho_N\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C_\beta. \end{aligned}$$

Aus Reflexivität von $L^2(L^2(M))$ folgt schwache Konvergenz für eine Teilfolge. Wenn wir noch mit den Konvergenzen aus Folgerung 4.17 zum Limes übergehen, können wir Unterhalbstetigkeit der linken Seite verwenden und erhalten:

$$\begin{aligned} & \|\gamma_{\beta\delta}\|_{L^\infty(L^1(M))}^2 + \frac{1}{2}\|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^\infty(H^1(M))}^2 + c_1 \|d_1\|_{L^2(L^2(M))}^2 + c_2 \|d_2\|_{L^2(L^2(M))}^2 + \|d_3\|_{L^2(L^2(M))}^2 \\ & + \delta(\|\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 + \|d_4\|_{L^2(L^2(M))}^2) + \beta \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C_\beta. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist es noch erforderlich die schwachen Limiten $d_i, i = 1..4$ zu identifizieren. Für $d_1 = \sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ folgt dies aus der schwachen $L^2(H^3(M))$ -Konvergenz der ϱ_N aus Folgerung 4.17 zusammen mit der starken Konvergenz der ϱ_N aus Folgerung 4.26. Weiterhin für $d_2 = \sqrt{m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})$ folgt dies aus der schwachen Konvergenz der $\nabla \sigma(\gamma_N)$ in $L^{\frac{6}{5}-\epsilon}(L^{\frac{6}{5}-\epsilon}(M))$ für alle $\epsilon > 0$ aus Folgerung 4.28 zusammen mit der starken Konvergenz der ϱ_N aus Folgerung 4.26. Für $d_3 = \sqrt{f''(\gamma_{\beta\delta})} \nabla^M \gamma_{\beta\delta}$ folgt dies aus der schwachen $L^2(L^2(M))$ -Konvergenz der γ_N aus Folgerung 4.17 zusammen mit der starken Konvergenz der γ_N aus Folgerung 4.26. Schließlich identifizieren wir $d_4 = \Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta})$ mit der starken Konvergenz der γ_N aus Folgerung 4.26 und der Stetigkeit von f' nach Voraussetzung 4.6. \square

Folgerung 4.33. (Schwache Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen konvergieren zu $\beta > 0$ nach Auswahl einer Teilfolge die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}$ des nichtdegenerierten Problems aus Satz 4.31 für $\delta \rightarrow 0$ im folgenden Sinne: Es konvergiert $\varrho_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(H^2(M))$ und schwach* in $L^\infty(H^1(M))$ gegen ein $\varrho_\beta \in L^2(H^2(M)) \cap L^\infty(H^1(M))$ und es konvergiert ebenfalls $\gamma_{\beta\delta}$ schwach in $L^2(H^1(M))$ und schwach* in $L^\infty(L^2(M))$ gegen ein $\gamma_\beta \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$.*

Beweis. Aufgrund von Satz 4.32 ist $\Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ gleichmäßig in $\delta > 0$ in $L^2(L^2(M))$ beschränkt. Es hat $\varrho_{\beta\delta}$ konstante Gesamtmasse und erfüllt die Neumann-Randbedingung $\nu^* \bullet \nabla^M \varrho_{\beta\delta}(t) = 0$ auf ∂M_t für fast alle $t \in [0, T]$. Dann folgt analog zum Beweis aus Proposition 3.24 die Beschränktheit in $L^2(H^2(M))$ gleichmäßig in $\delta > 0$ und aus der Reflexivität dann die schwache Konvergenz nach Auswahl einer Teilfolge. Die Aussage für $\gamma_{\beta\delta}$ folgt ebenfalls aus Satz 4.32 aus der Reflexivität von $L^2(H^1(M))$ zusammen mit der gleichmäßigen Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6. Die Schwach*-Konvergenz folgt wie in Folgerung 4.17. \square

Kompaktheit

Ziel dieses Abschnitts ist es, starke Konvergenz der Lösungen zu zeigen. Wie in [BF] bzw. [WG] zeigen wir gleichmäßige Konvergenz der $\varrho_{\beta\delta}$, was wesentlich zur Einschränkung auf eine Raumdimension führt. Im nächsten Schritt können wir dann wie in Kapitel 3 die punktweise Konvergenz auf starke Konvergenz der Gradienten hochziehen. Schließlich zeigen wir starke Konvergenz der Surfactants mit Hilfe des Kompaktheitssatzes von Simon.

Satz 4.34. (Gleichmäßige Konvergenz der Flüssigkeit) *Unter den getroffenen Voraussetzungen besitzen zu $\beta, \delta > 0$ die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}$ des nichtdegenerierten Problems aus Satz 4.31 einen Repräsentanten der gleichmäßig in der $C^{\frac{1}{8}}(C^{\frac{1}{2}}(M))$ -Norm durch eine von $\delta > 0$ unabhängige Konstante $C_\beta > 0$ beschränkt ist. Weiterhin besitzt ϱ_β aus Folgerung 4.33 einen Repräsentanten in $C^{\frac{1}{8}}(C^{\frac{1}{2}}(M))$, so dass $\varrho_{\beta\delta}$ nach Auswahl einer weiteren Teilfolge für $\delta \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen ϱ_β konvergiert.*

Beweis. Es sind nach Folgerung 4.32 die $\varrho_{\beta\delta}$ gleichmäßig in $L^\infty(H^1(M))$ beschränkt. Dann sind für fast alle $t \in [0, T]$ aufgrund der Einbettung $H^1(M_t) \hookrightarrow C^{\frac{1}{2}}(M_t)$ in einer Raumdimension die $\varrho_{\beta\delta}(t)$ gleichgradig stetig im Raum gleichmäßig in der Zeit. Für die Hölder-Stetigkeit in der Zeit wählen wir in der schwachen Formulierung aus Satz 4.31:

$$-(w(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w(t), \varrho_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt + \langle \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), w \rangle \rangle_{L^2(W)} = 0,$$

zu $w \in L^2(H^1(M))$ und $h > 0$ eine zeitgeglättete Testfunktion w_h wie in Lemma 3.41 mit $t_0 = T$. Dann können wir den parabolische Teil aufgrund von Proposition 3.42 umschreiben zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^T \int_{M_t} w(t) (\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h} \mathcal{J} \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^T \int_{M_t} w(t) (\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt + \int_0^T \int_{M_t} w(t) \varrho(t-h) \circ \Phi_t^{-h} \left(\frac{1 - \mathcal{J} \Phi_t^{-h}}{h} \right) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Diese zwei Integralterme bezeichnen wir nun mit (1) und (2). Term (2) schieben wir vorerst auf. Wir werden später sehen, dass (2) im Limes $h \rightarrow 0$ gegen einen anderen Term wegfällt. Im folgenden bezeichnen wir:

$$\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t) = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \varrho_{\beta\delta}(s) \circ \Phi_t^{s-t} ds,$$

wobei wir $\varrho_{\beta\delta}(t)$ für $t \leq 0$ durch ϱ_0 konstant auf M_0 fortsetzen. Aus Proposition 2.6 folgt dann: $\partial_t^M(\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t)) = \frac{1}{h}(\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h})$, was genau ein Faktor des Integranden von (1) ist. Aufgrund der Regularität von $\varrho_{\beta\delta}$ ist es nun zulässig zu $t_1, t_2 \in [0, T]$ obiges $w \in L^2(H^1(M))$ folgendermaßen zu definieren:

$$w(t) = \chi_{[t_1, t_2]}(t) (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_t^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_t^{t_2-t}).$$

Mit dieser Testfunktion wird der Integralausdruck (1) zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^T \int_{M_t} \chi_{[t_1, t_2]}(t) (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_t^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_t^{t_2-t}) (\varrho_{\beta\delta}(t) - \varrho_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^h) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_t^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_t^{t_2-t}) \partial_t^M \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \partial_t^M \left((\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_t^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_t^{t_2-t}) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t) \right) d\mathcal{H}^d dt, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt Proposition 2.6 verwendet wurde. Das Transporttheorem 6.9 liefert dann:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \partial_t^M \left((\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_t^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_t^{t_2-t}) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t) \right) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_{M_{t_2}} (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_{t_2}^{t_1-t_2} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2)) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) d\mathcal{H}^d - \int_{M_{t_1}} (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) d\mathcal{H}^d \\ & \quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} \nu_n k \left((\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_t^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_t^{t_2-t}) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t) \right) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Den letzten Term bezeichnen wir mit (3). Die verbleibenden Terme fassen wir mit dem Transformationssatz auf Flächen 6.8 zusammen:

$$\begin{aligned} & \int_{M_{t_2}} (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) \circ \Phi_{t_2}^{t_1-t_2} - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2)) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) d\mathcal{H}^d - \int_{M_{t_1}} (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) d\mathcal{H}^d \\ &= \int_{M_{t_1}} |\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}|^2 d\mathcal{H}^d \\ & \quad + \int_{M_{t_1}} (\varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}) \varrho_{\beta\delta}^{-h}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1} (\mathcal{J} \Phi_{t_1}^{t_2-t_1} - 1) d\mathcal{H}^d. \end{aligned}$$

Den letzten Term bezeichnen wir mit (4) und bringen ihn auf die rechte Seite. Wenn wir jetzt zum Limes $h \rightarrow 0$ übergehen, konvergiert $\varrho_{\beta\delta}^{-h} \rightarrow \varrho_{\beta\delta}$ in $L^2(H^1(M))$ und damit nach Auswahl einer Teilfolge auch für fast alle $t \in [0, T]$ in $L^2(M_t)$. Ferner konvergiert nach der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 $\frac{1-\mathcal{J}\Phi_t^{-h}}{h} \rightarrow -v_n k$ gleichmäßig. Daher heben sich im Limes die Terme (2) und (3) auf, was nach einer formalen Rechnung zu erwarten war. Der elliptische Term konvergiert wie in Proposition 3.41. Somit lautet die gesamte Gleichung im Limes für fast alle $t_1, t_2 \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} & \int_{M_{t_1}} |\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}|^2 d\mathcal{H}^d \\ & \leq \langle \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), \chi_{[t_1, t_2]}(\varrho_{\beta\delta}(t_1) \circ \Phi_{t_1}^{t_1-\cdot} - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-\cdot}) \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} \\ & \quad + \int_{M_{t_1}} (\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}) \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1} (1 - \mathcal{J}\Phi_{t_1}^{t_2-t_1}) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Den letzten Term schätzen wir durch die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung und dem Transformationsatz 6.8 ab, wobei wir die entstehenden Jacobischen mit Voraussetzung 4.2 an die Fläche gleichmäßig abschätzen:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{M_{t_1}} (\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_1-t_2}) \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_1-t_2} (1 - \mathcal{J}\Phi_{t_1}^{t_1-t_2}) d\mathcal{H}^d dt \right| \\ & \leq C(\|\varrho_{\beta\delta}(t_1)\|_{L^2(M_{t_1})} \|\varrho_{\beta\delta}(t_2)\|_{L^2(M_{t_2})} + \|\varrho_{\beta\delta}(t_2)\|_{L^2(M_{t_2})}^2) |t_1 - t_2| \leq C_\beta |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

falls $t_1 - t_2 \leq 1$. Dabei haben wir verwendet, dass $\mathcal{J}\Phi_t$ gleichmäßig Lipschitz-stetig ist nach Voraussetzung 4.2, sowie die Beschränktheit der $\varrho_{\beta\delta}$ in $L^\infty(L^2(M))$ was aus der Energieabschätzung 4.32 folgt. Den elliptischen Teil schätzen wir mit dem Transformationsatz 6.8 und der Hölder-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} & \langle \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), \chi_{[t_1, t_2]}(\varrho_{\beta\delta}(t_1) \circ \Phi_{t_1}^{t_1-\cdot} - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-\cdot}) \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \int_{M_t} J_1^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t), \gamma_{\beta\delta}(t)) \bullet \nabla^M (\varrho_{\beta\delta}(t_1) \circ \Phi_{t_1}^{t_1-t} - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t}) d\mathcal{H}^d dt \\ & \leq C \|J_1^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t), \gamma_{\beta\delta}(t))\|_{L^2(L^2(M))} \|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^\infty(L^2(M))} |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} \leq C_\beta |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei der Fluss $J_1^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta})$ auf analoge Weise wie in Folgerung 4.20 abgeschätzt werden kann und die $\nabla^M \varrho_{\beta\delta}$ mit der Energieabschätzung 4.32. Wir haben also für f.a. $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $|t_1 - t_2| \leq 1$ gezeigt:

$$\int_{M_{t_1}} |\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}|^2 d\mathcal{H}^d \leq C_\beta |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}.$$

Die Interpolationsabschätzung aus Lemma 3.46 mit $d = 1, q = \infty, r = 2$ und $p = 2$ liefert dann

$$\begin{aligned} & \|\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}\|_{L^\infty(M_{t_1})}^4 \\ & \leq \|\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}\|_{H^1(M_{t_1})}^2 \|\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}\|_{L^2(M_{t_1})}^2 \\ & \leq C_\beta |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}} (\|\varrho_{\beta\delta}(t_1)\|_{H^1(M_{t_1})}^2 + \|\varrho_{\beta\delta}(t_2)\|_{H^1(M_{t_2})}^2) \\ & \leq C_\beta |t_1 - t_2|^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt wieder der Transformationsatz 6.8 und die Energieabschätzung 4.32 verwendet wurde. Daraus folgt für fast alle $t_1, t_2 \in [0, T]$ mit $|t_2 - t_1| \leq 1$:

$$\|\varrho_{\beta\delta}(t_1) - \varrho_{\beta\delta}(t_2) \circ \Phi_{t_1}^{t_2-t_1}\|_{L^\infty(M_{t_1})} \leq C_\beta |t_2 - t_1|^{\frac{1}{8}}.$$

Es lässt sich $\varrho_{\beta\delta}$ für alle $t \in [0, T]$ durch einen entsprechend Hölder-stetigen Repräsentanten ersetzen. Falls die Hölder-Stetigkeit etwa in $t_0 \in [0, T]$ nicht erfüllt ist, existieren Zeitpunkte $t_n \rightarrow t_0$ für die die Bedingung erfüllt ist, und das bisher gezeigte liefert eine Cauchy-Folge. Durch ihren Grenzwert lässt sich $\varrho_{\beta\delta}$ dann in t_0 ersetzen. Damit ist $\varrho_{\beta\delta}$ gleichmäßig in $C^{\frac{1}{8}}(C^{\frac{1}{2}}(M))$ beschränkt. Die zweite Behauptung folgt mit dem Satz von Arzela-Ascoli. \square

Die künstliche Diffusivität zum Parameter $\beta > 0$ in der Filmgleichung lieferte in Folgerung 4.32 zusätzliche Beschränktheit zweiter Ableitungen von $\varrho_{\beta\delta}$. Dies können wir an dieser Stelle ausnutzen, um wie in Kapitel 3 mit der Idee aus [dPGG] punktweise Konvergenz auf punktweise Konvergenz der Gradienten von $\varrho_{\beta\delta}$ hochzuziehen.

Folgerung 4.35. (Starke Konvergenz der Gradienten der Flüssigkeit) *Unter den getroffenen Voraussetzungen konvergieren zu $\beta > 0$ nach Auswahl einer weiteren Teilfolge die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}$ des nichtdegenerierten Problems aus Satz 4.31 für $\delta \rightarrow 0$ in $L^p(W^{1,p}(M))$ für $p < 4$ gegen ϱ_β aus Satz 4.34.*

Beweis. Aus Folgerung 4.32 folgt die in $\delta > 0$ gleichmäßige Beschränktheit von $\varrho_{\beta\delta}$ in $L^\infty(H^1(M))$ und von $\Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ in $L^2(L^2(M))$. Es sind die $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(V)$, dann folgt wie im Beweis von Proposition 3.24, dass $\varrho_{\beta\delta}$ gleichmäßig in $L^2(H^2(M))$ beschränkt ist. Aus Satz 4.34 folgt die starke Konvergenz $\varrho_{\beta\delta} \rightarrow \varrho_\beta$ in $L^2(L^2(M))$. Dann folgt die Behauptung mit Proposition 3.51. \square

Satz 4.36. (Zeitkompaktheit der Surfactants) *Zu $\beta > 0$ konvergieren unter den getroffenen Voraussetzungen nach Auswahl einer weiteren Teilfolge für $\delta \rightarrow 0$ die Lösungen $\gamma_{\beta\delta}$ des nichtdegenerierten Problems aus Satz 4.31 stark in $L^p(L^p(M))$ für $p < 6$ gegen γ_β aus Folgerung 4.33.*

Beweis. Definiere den Raum $L^3([0, T]; W_0) \subset L^3([0, T]; H^2(M_0))$ durch:

$$L^3([0, T]; W_0) = \{w_0 \in L^3([0, T]; H^2(M_0)) \mid \nu_0^* \bullet \nabla^{M_0} w_0(t) = 0 \text{ f. ü. auf } \partial M_0 \text{ f. f. a. } t \in [0, T]\}.$$

Mit einer Schrittweite $h > 0$ definieren wir zu $w_0 \in L^3(W_0)$ als Testfunktion:

$$w_h(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} w_0(s-h) \circ \Phi_t^{-1} \chi_{[h, T]}(s) ds.$$

Es ist $w_h \in L^3(H^2(M))$ nach dem Transformationsatz 6.8 und der Kettenregel. Ferner haben wir $w_h(t) \in W^t$ für fast alle $t \in [0, T]$, da $\nu_t^* \bullet \nabla^{M_t} w_h(t) = 0$ auf ∂M_t fast überall, für fast alle $t \in [0, T]$. In der Tat, denn $D\Phi_t^{-1} \nu^*(t)$ liegt im eindimensionalen Tangentialraum TM_0 , der am Rand durch $\nu^*(0)$ gespannt wird. Es ist also w_h als Testfunktion in der Surfactantgleichung in Satz 4.31 zugelassen. Mit Proposition 3.42 wird die Gleichung zu:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_h^T \int_{M_t} w_0(t-h) \circ \Phi_t^{-1} (\gamma_{\beta\delta}(t) - \gamma_{\beta\delta}(t-h)) \circ \Phi_t^{-h} \mathcal{J} \Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt \\ & + \int_0^T \int_{M_t} J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}(t), \gamma_{\beta\delta}(t)) \bullet \frac{1}{h} \nabla^M \int_t^{t+h} w_0(s-h) \circ \Phi_t^{-1} \chi_{[h, T]}(s) ds d\mathcal{H}^d dt \\ & + \int_0^T \int_{M_t} \delta \Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta}(t)) \frac{1}{h} \Delta^M \int_t^{t+h} w_0(s-h) \circ \Phi_t^{-1} \chi_{[h, T]}(s) ds d\mathcal{H}^d dt = 0. \quad (\star) \end{aligned}$$

Dabei ist der Fluss: $J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}) = \gamma_{\beta\delta} J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}) - \nabla^M \gamma_{\beta\delta}$ mit:

$$J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}) = m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \left(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k \right) + m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + v^* \gamma_{\beta\delta}.$$

Den parabolischen Teil in (\star) transformieren wir auf M_0 . Dann ist nach einer Zeitverschiebung:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_h^T \int_{M_t} w_0(t-h) \circ \Phi_t^{-1} (\gamma_{\beta\delta}(t) - \gamma_{\beta\delta}(t-h)) \circ \Phi_t^{-h} \mathcal{J} \Phi_t^{-h} d\mathcal{H}^d dt \\ & = \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_{M_0} w_0(t) (\gamma_{\beta\delta}(t+h) \circ \Phi_{t+h} \mathcal{J} \Phi_{t+h} - \gamma_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t \mathcal{J} \Phi_t) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Für die elliptischen Terme überlegen wir uns zunächst, dass nur Werte von w_0 auf $[0, T-h]$ vorkommen:

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} w_0(s-h) \circ \Phi_t^{-1} \chi_{[h, T]}(s) ds = \frac{1}{h} \int_{t-h}^t w_0(s) \circ \Phi_t^{-1} \chi_{[0, T-h]}(s) ds.$$

Die elliptischen Terme in (\star) bringen wir auf die rechte Seite und schätzen mit der Hölder-Ungleichung ab. Anschließend transformieren wir die Integrale, die w_0 enthalten auf M_0 . Mit der Kettenregel und der Faltungsabschätzung und wenn wir alle Transformationsterme aufgrund von Voraussetzung 4.2 gleichmäßig abschätzen, ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_{M_0} w_0(t) \left(\gamma_{\beta\delta}(t+h) \circ \Phi_{t+h} \mathcal{J} \Phi_{t+h} - \gamma_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t \mathcal{J} \Phi_t \right) d\mathcal{H}^d dt \\ & \leq C \|J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta})\|_{L^{\frac{3}{2}}(L^{\frac{3}{2}}(M))} \|w_0 \chi_{[0, T-h]}\|_{L^3(W^{1,3}(M_0))} \\ & \quad + C \|\delta \Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta})\|_{L^2(L^2(M))} \|w_0 \chi_{[0, T-h]}\|_{L^2(H^2(M_0))}. \end{aligned}$$

Mit Folgerung 4.32 sieht man ein wie im Beweis von Satz 4.31, dass $J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta})$ gleichmäßig in $L^2(L^2(M))$ beschränkt ist. Weiterhin folgt aus der Beschränktheit der $\gamma_{\beta\delta}$ in $L^\infty(L^2(M))$ und $L^2(H^1(M))$ wie in Folgerung 4.18 die Beschränktheit von $\gamma_{\beta\delta}$ in $L^6(L^6(M))$. Damit folgt die Beschränktheit von $J_2^{\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta})$ in $L^{\frac{3}{2}}(L^{\frac{3}{2}}(M))$ mit der Hölder-Ungleichung. Weiterhin ist $\delta \Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta})$ in $L^2(L^2(M))$ beschränkt aufgrund der Energieabschätzung 4.32 falls etwa $\sqrt{\delta} \leq 1$. Mit der stetigen Einbettung $H^2(M_t) \hookrightarrow W^{1,3}(M_t)$ im Raum für $t \in [0, T]$ und der Hölder-Ungleichung in der Zeit folgt dann:

$$\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_{M_0} w_0(t) (\gamma_{\beta\delta}(t+h) \circ \Phi_{t+h} \mathcal{J} \Phi_{t+h} - \gamma_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t \mathcal{J} \Phi_t) d\mathcal{H}^d dt \leq C_\beta \|w_0 \chi_{[0, T-h]}\|_{L^3(H^2(M_0))}.$$

Mit der Schreibweise $f^{\beta\delta}(t) = \gamma_{\beta\delta}(t) \circ \Phi_t \mathcal{J} \Phi_t$ folgt dann also für alle $w_0 \in L^3([0, T]; W_0)$:

$$\int_0^{T-h} \int_{M_0} w_0(t) (f^{\beta\delta}(t+h) - f^{\beta\delta}(t)) d\mathcal{H}^d dt \leq h C_\beta \|w_0 \chi_{[0, T-h]}\|_{L^3(H^2(M_0))}.$$

Es liefert also auf diese Weise $f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}$ ein stetiges, lineares Funktional auf $L^3([0, T-h]; W_0)$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $F \in L^3([0, T-h]; W_0)^{**}$ mit $\|F\|_{L^3([0, T-h]; W_0)^{**}} = 1$ und $\langle f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}, F \rangle_{L^3([0, T-h]; W)^*} = \|f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}\|_{L^3([0, T-h]; W)^*}$. Als abgeschlossener Unterraum $L^3([0, T-h]; W_0)$ eines reflexiven Banachraums $L^3([0, T-h]; H^2(M_0))$ ist dieser selbst wieder reflexiv, daher lässt sich vermöge des kanonischen Isomorphismus $F \in L^3([0, T-h]; W_0)$ auffassen mit $\|F\|_{L^3([0, T-h]; H^2(M_0))} = 1$ und $\langle F, f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta} \rangle_{L^3([0, T-h]; W)} = \|f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}\|_{L^3([0, T-h]; W)^*}$. Es gilt aber nach obiger Rechnung:

$$\|f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}\|_{L^3([0, T-h]; W)^*} = \langle F, f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta} \rangle_{L^3([0, T-h]; W)} \leq C_\beta h \|F\|_{L^3([0, T-h]; H^2(M_0))} \leq C_\beta h.$$

Es konvergiert also $\|f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}\|_{L^3([0, T-h]; W)^*} \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig in $\delta > 0$. Wir schließen aufgrund des Isomorphismus $L^3([0, T-h]; W)^* \cong L^{\frac{3}{2}}([0, T-h]; W^*)$ (siehe [GGZ], Kapitel 1) die Konvergenz $\|f^{\beta\delta}(\cdot+h) - f^{\beta\delta}\|_{L^{\frac{3}{2}}([0, T-h]; W^*)} \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$ gleichmäßig in $\delta > 0$. Ferner ist $f^{\beta\delta}(t) = \gamma_{\beta\delta}(t) \circ \Psi_t \mathcal{J} \Psi_t$ beschränkt in $L^2([0, T]; H^1(M_0))$ und nach der Hölder-Ungleichung in der Zeit beschränkt in $L^{\frac{3}{2}}([0, T]; H^1(M_0))$. Schließlich folgern wir mit der kompakten Einbettung $H^1(M_0) \rightarrow L^2(M_0)$ und der stetigen Einbettung $H^2(M_0) \hookrightarrow L^2(M_0)$ mit dem Kompaktheitssatz von Simon [Sim] die Konvergenz für eine Teilfolge $f^{\beta\delta} \rightarrow f^\beta$ in $L^{\frac{3}{2}}([0, T]; L^2(M_0))$. Diese Konvergenz gilt dann aufgrund der Beschränktheit in $L^\infty([0, T]; L^2(M_0))$ auch in $L^2([0, T]; L^2(M_0))$. Setze dann $\gamma_\beta = (\frac{f^\beta}{\mathcal{J}\Phi_t}) \circ \Phi_t^{-1}$. Dann gilt nach dem Transformationssatz 6.8: $\gamma_{\beta\delta} \rightarrow \gamma_\beta$ in $L^2(L^2(M))$. Aus der Beschränktheit der $\gamma_{\beta\delta}$ in $L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ aus der Energieabschätzung 4.32 folgt wie in Folgerung 4.18 die Beschränktheit von $\gamma_{\beta\delta}$ in $L^6(L^6(M))$. Daher lässt sich die starke Konvergenz in $L^2(L^2(M))$ auf $L^p(L^p(M))$ für $p < 6$ hochziehen. \square

Übergang zum Grenzwert

Damit haben wir die notwendigen Konvergenzen gezeigt, um in der schwachen Formulierung aus Satz 4.31 zum Limes $\delta \rightarrow 0$ überzugehen. Wir verlieren dabei gleichmäßige Kontrolle über dritte Ableitungen von $\varrho_{\beta\delta}$. Um dennoch im Term höchster Ableitungsordnung zum Grenzwert übergehen zu können,

folgen wir dem Lösungsbegriff aus [BF]. Die Limiten der Gradienten der Oberflächenspannung identifizieren wir wie im Limesübergang in der Galerkin-Formulierung mit Hilfe der starken Konvergenz der Surfactantkonzentration.

Folgerung 4.37. (Schwache Konvergenz von Gradienten der Oberflächenspannung) Sei $\beta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt für die Lösungen $\gamma_{\beta\delta}$ zu $\delta > 0$ aus Satz 4.31 und den Limes γ_β aus Folgerung 4.33, dass die zugehörigen Gradienten der Oberflächenspannung im folgenden Sinne schwach konvergieren: $\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \rightharpoonup \nabla^M \sigma(\gamma_\beta)$ in $L^s(L^s(M))$ für $1 \leq s < \frac{6}{5}$ für eine Teilfolge $\delta \rightarrow 0$.

Beweis. Wie in Folgerung 4.28 aus Folgerung 4.32 und Satz 4.36. \square

Der folgende Satz vollzieht nun den Grenzübergang $\delta \rightarrow 0$. Die Konvergenz in den kritischen Termen höchster Ordnung ist dabei vollkommen analog zum planaren Fall in [Wie] bzw. [WG].

Satz 4.38. (Lösung des trunkierten Problems) Unter den getroffenen Voraussetzungen sind zu $\beta > 0$ die Limiten $\varrho_\beta \in L^\infty(H^1(M))$ und $\gamma_\beta \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ aus Folgerung 4.33 eine Lösung des trunkierten Problems im Sinne von [BF]. In diesem Sinne definieren wir Mengen $M_t^{0\beta} = \{x \in M_t \mid \varrho_\beta(x, t) = 0\}$ zu $t \in [0, T]$. Es lösen dann $\varrho_\beta, \gamma_\beta$ das folgende System:

$$\begin{aligned} 0 &= -(w_1(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_1(t), \varrho_\beta(t))_{L^2(M_t)} dt - \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^{0\beta}} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet \left(m_1^\beta(\varrho_\beta) (\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + a_1(\varrho_\beta) \nabla^M k) + m_2^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \sigma(\gamma_\beta) + v^* \varrho_\beta - \beta \nabla^M \varrho_\beta \right) d\mathcal{H}^d dt, \\ 0 &= -(w_2(0), \gamma_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_2(t), \gamma_\beta(t))_{L^2(M_t)} dt - \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^{0\beta}} \nabla^M w_2 \bullet m_2^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_2 \bullet \left(\gamma_\beta (m_2^\beta(\varrho_\beta) (\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + a_2(\varrho_\beta) \nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \sigma(\gamma_\beta) + v^*) - \nabla^M \gamma_\beta \right) d\mathcal{H}^d dt, \end{aligned}$$

für Testfunktionen $w_1 \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ und $w_2 \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w_1(T) = 0$ und $w_2(T) = 0$.

Beweis. Sei $\beta > 0$. Wir möchten in der Behauptung von Satz 4.31 zum Limes $\delta \rightarrow 0$ übergehen:

$$\begin{aligned} 0 &= -(w_1(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_1(t), \varrho_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \left(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_1(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k \right) d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet \left(m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + v^* \varrho_{\beta\delta} - \beta \nabla^M \varrho_{\beta\delta} + \delta \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} \right) d\mathcal{H}^d dt, \\ 0 &= -(w_2(0), \gamma_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_2(t), \gamma_{\beta\delta}(t))_{L^2(M_t)} dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_2 \bullet \gamma_{\beta\delta} m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \left(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k \right) d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{M_t} \left(\nabla^M w_2 \bullet \left(\gamma_{\beta\delta} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + \gamma_{\beta\delta} v^* - \nabla^M \gamma_{\beta\delta} \right) + \delta \Delta^M w_2 \Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta}) \right) d\mathcal{H}^d dt, \end{aligned}$$

für Testfunktionen $w_1 \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ und $w_2 \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit $w_1(T) = 0$ und $w_2(T) = 0$. In den parabolischen Termen können wir mit der starken Konvergenz der $\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}$ aus Satz 4.34 und Satz 4.36 zum Grenzwert übergehen. In den elliptischen Termen, die keine dritten Ableitungen von $\varrho_{\beta\delta}$ enthalten, gehen wir analog vor wie im Beweis von Satz 4.31, benutzen jedoch bei der Konvergenz von $\varrho_{\beta\delta}$ Satz 4.34 und von $\nabla^M \varrho_{\beta\delta}$ Folgerung 4.35. Dabei bemerken wir, dass die Testfunktion in der Surfactantgleichung in $L^{3+\epsilon}(W^{1,3+\epsilon}(M))$ beschränkt ist aufgrund der Argumentation in Lemma 4.30 mit $\frac{16}{5} = 3 + \epsilon$. Die δ -Regularisationsterme konvergieren gegen 0 für $\sqrt{\delta} \rightarrow 0$

aufgrund der Energieabschätzung aus Folgerung 4.32. Nun zu den Termen dritter Ableitung von $\varrho_{\beta\delta}$. Aufgrund der Energieabschätzung aus Folgerung 4.32 konvergiert nach Auswahl einer weiteren Teilfolge $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})}\nabla^M\Delta^M\varrho_{\beta\delta}$ schwach gegen ein d_β in $L^2(L^2(M))$. Den Grenzwert identifizieren wir wie folgt. Wir definieren wie in [BF] zu $\eta > 0$ die Mengen $M_t^{\eta\beta} = \{x \in M_t \mid \varrho_\beta(x, t) \leq \eta\}$ und $M^{\eta\beta} \subset M$ durch $M^{\eta\beta} = \bigcup_{t \in [0, T]} M_t^{\eta\beta}$. Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der $\varrho_{\beta\delta}$ aus Satz 4.34 ist $\varrho_{\beta\delta} > \frac{\eta}{2}$

auf $M \setminus M^{\eta\beta}$ für $\delta \leq \delta_0(\eta)$. Aufgrund der Energieabschätzung 4.32 ist damit $\nabla^M\Delta^M\varrho_{\beta\delta}$ durch eine Konstante $C_\eta > 0$ in $L^2(L^2(M \setminus M^{\eta\beta}))$ beschränkt, konvergiert daher nach Auswahl einer Teilfolge schwach und kann, da es sich um einen linearen Term handelt, im Limes identifiziert werden. Dies ist für alle $\eta > 0$ erfüllt. Es folgt damit und mit der gleichmäßigen Konvergenz der $\varrho_{\beta\delta}$ aus Satz 4.34, dass der schwache Limes d_β von $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})}\nabla^M\Delta^M\varrho_{\beta\delta}$ auf $M \setminus M^{0\beta}$ mit $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_\beta)}\nabla^M\Delta^M\varrho_\beta$ identifiziert werden kann. Zeigen wir nun, wie wir mit dem entsprechenden Term in der Gleichung zum Limes übergehen. Wir zerlegen:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt &= \int_0^T \int_{M_t^{\eta\beta}} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \quad (\star) \\ &+ \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^{\eta\beta}} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt. \quad (\dagger) \end{aligned}$$

Term (\star) schätzen wir dem Betrage nach ab und benutzen dabei die genaue Struktur der Mobilitäten:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{M_t^{\eta\beta}} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \right| \\ \leq \|\nabla^M w_1\|_{L^2(L^2(M))} \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^\infty(L^\infty(M^{\eta\beta}))}^{\frac{3}{2}} \|\sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})}\nabla^M\Delta^M\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))} \leq C_\beta \eta^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Energieabschätzung 4.32 verwendet. Term (\dagger) konvergiert zu $\eta > 0$ für $\delta \rightarrow 0$ wegen der gleichmäßigen Konvergenz der $\varrho_{\beta\delta}$ und der vorherigen Argumentation:

$$\int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^{\eta\beta}} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \longrightarrow \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^{\eta\beta}} \nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta d\mathcal{H}^d dt.$$

Für diesen Term folgt mit $\eta \rightarrow 0$ die gewünschte Konvergenz mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue. Der abgeschätzte Term (\star) konvergiert für $\eta \rightarrow 0$ gegen 0. Die Argumentation für den Term dritter Ableitungen von $\varrho_{\beta\delta}$ in der Surfactantgleichung folgt analog mit einer geringfügig anderen Abschätzung des entsprechenden Terms aufgrund des anderen Wachstumsexponenten in der zugehörigen Mobilität:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{M_t^{\eta\beta}} \nabla^M w_2 \bullet \gamma_{\beta\delta} m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \right| \\ \leq \|\nabla^M w_2\|_{L^3(L^3(M))} \|\gamma_{\beta\delta}\|_{L^6(L^6(M))} \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^\infty(L^\infty(M^{\eta\beta}))}^{\frac{1}{2}} \|\sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})}\nabla^M\Delta^M\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))} \leq C_\beta \eta^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder die Energieabschätzung aus Folgerung 4.32 verwendet haben sowie deren Konsequenz, die Beschränktheit der $\gamma_{\beta\delta}$ in $L^6(L^6(M))$ analog zu Folgerung 4.18. \square

4.3 Grenzübergang zu unbeschränkten Koeffizienten

Im letzten Teil dieses Kapitels gehen wir zum Limes $\beta \rightarrow 0$ über. Dabei verlieren wir die Beschränktheit der Mobilitätskoeffizienten, die wir in der mathematischen Energieabschätzung verwendet haben. Um eine geeignete Abschätzung unabhängig von $\beta > 0$ zu bekommen, berufen wir uns auf die physikalische Energieabschätzung. Wie in Kapitel 3 kann diese erst nach dem Limes $\delta \rightarrow 0$ sinnvoll verwendet werden, wenn Nichtnegativität der Limiten ϱ_β gezeigt worden ist.

Physikalische Energieabschätzung

Wie in Kapitel 3 möchten wir den Trick aus [BP2] verwenden und $L^p(M_t)$ -Normen zwischen $L^1(M_t)$ -Norm und $H^1(M_t)$ -Norm interpolieren. Denn dann können wir ausnutzen, dass aufgrund von Nichtnegativität und Massenerhaltung die $L^1(M_t)$ -Norm gleichmäßig beschränkt ist. Zunächst zeigen wir dazu Nichtnegativität der ϱ_β . Anschließend leiten wir die physikalische Energiegleichung des δ -Problems her und gehen mit den gezeigten Konvergenzen in dieser Ungleichung zum Limes $\delta \rightarrow 0$ über. Dabei verwenden wir starke Konvergenz der $\nabla^M \varrho_{\beta\delta}$, die aus der zusätzlichen β -Regularisierung zweiter Ordnung folgt. Diese zerstört aufgrund des schwachen Maximumsprinzips für Gleichungen zweiter Ordnung nicht das Nichtnegativitätsresultat.

Satz 4.39. (Nichtnegativität) *Sei $\varrho_0 \geq 0$ fast überall auf M_0 . Dann gilt unter den getroffenen Voraussetzungen für die Lösungen ϱ_β aus Satz 4.38 zu $\beta > 0$, dass $\varrho_\beta(t) \geq 0$ fast überall, für fast alle $t \in [0, T]$.*

Beweis. Der Beweis geht analog zum Beweis von Satz 3.55 mit einem zusätzlichen positiven Term von der β -Regularisierung. Wir setzen also in der ersten Gleichung von Satz 4.31 zur Schrittweite $h > 0$ und $t_0 \in [0, T]$ als Testfunktion eine wie in Proposition 3.41 regularisierte Approximation von $\varrho_h^- = \min(0, \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \varrho_{\beta\delta}(s) \circ \Phi_t^{s-t} ds)$. Mit den gleichen Umformungen wie im Beweis von Satz 3.55 ergibt sich dann aus der Nichtnegativität der Anfangsdaten im Limes $h \rightarrow 0$ für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|\varrho_{\beta\delta}^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 + \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}^-(t)|^2 \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt + \langle \langle \tilde{\mathcal{A}}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), \varrho_{\beta\delta}^- \chi_{[0, t_0]} \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = 0.$$

Dabei ist $\varrho_{\beta\delta}^- = \min(0, \varrho_{\beta\delta})$ und der elliptische Operator $\tilde{\mathcal{A}}^{1\beta\delta}$ entsteht aus $\mathcal{A}^{1\beta\delta}$ wie in Gleichung (3.2.1):

$$\langle \langle \tilde{\mathcal{A}}^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} = \langle \langle \mathcal{A}^{1\beta\delta}(\varrho, \gamma, c), w \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} + \int_0^T \int_{M_t} \varrho(t) v^* \bullet \nabla^M w(t) d\mathcal{H}^d dt.$$

Aufgrund der Definition der Mobilitätskoeffizienten 4.4 bleiben im elliptischen Term nur die Regularisierungsterme stehen:

$$\begin{aligned} & \langle \langle \tilde{\mathcal{A}}^{1\beta\delta}(\varrho_{\beta\delta}, \gamma_{\beta\delta}, f'(\gamma_{\beta\delta})), \varrho_{\beta\delta}^- \chi_{[0, t_0]} \rangle \rangle_{L^2(H^1(M))} \\ &= \beta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}^- \bullet \nabla^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt - \delta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}^- \bullet \nabla^M \Delta \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Es ist $\nabla^M \varrho_{\beta\delta}^- = \nabla^M \varrho_{\beta\delta}$ auf der Menge wo $\varrho_{\beta\delta} \leq 0$ ist und 0 sonst. Daher hat der erste Term ein Vorzeichen und wir können ihn weglassen. Den zweiten schätzen wir mit der Energieabschätzung 4.32 ab:

$$\delta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta}^- \bullet \nabla^M \Delta \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \leq \delta \|\nabla^M \varrho_{\beta\delta}^-\|_{L^2(L^2(M))} \|\nabla^M \Delta \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))} \leq \sqrt{\delta} C_\beta.$$

Damit ergibt sich für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$\frac{1}{2} \|\varrho_{\beta\delta}^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 + \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\varrho_{\beta\delta}^-(t)|^2 \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt \leq \sqrt{\delta} C_\beta.$$

Das Gronwall-Lemma liefert dann mit einer anderen Konstanten $C_\beta > 0$:

$$\frac{1}{2} \|\varrho_{\beta\delta}^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 \leq \sqrt{\delta} C_\beta.$$

Für alle $\beta > 0$ konvergiert im Limes $\delta \rightarrow 0$ für eine Teilfolge die linke Seite für fast alle $t_0 \in [0, T]$. Damit ergibt sich: $\frac{1}{2} \|\varrho_\beta^-(t_0)\|_{L^2(M_{t_0})}^2 = 0$ für fast alle $t_0 \in [0, T]$. \square

Satz 4.40. (Physikalische Energiegleichung des δ -Problems) Zu $t_0 \in [0, T]$ betrachten wir $E_{t_0} : H^1(M_{t_0}) \rightarrow \mathbb{R}$ die Energie aus Definition 3.57. Dann erfüllen unter den getroffenen Voraussetzungen zu $\beta, \delta > 0$ die Lösungen $\varrho_{\beta\delta}$ und $\gamma_{\beta\delta}$ aus Satz 4.31 für fast alle $t_0 \in [0, T]$ die folgende Energiegleichung:

$$\begin{aligned} & \|f(\gamma_{\beta\delta}(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} + E_{t_0}(\varrho_{\beta\delta}(t_0)) + c_1 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + c_2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} f''(\gamma_{\beta\delta}) |\nabla^M \gamma_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(M_t)}^2 dt \\ & \leq E_0(\varrho_0) + \|f(\gamma_0)\|_{L^1(M_0)} + C(1 + \|f(\gamma_{\beta\delta})\|_{L^1([0, t_0]; L^1(M))} + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^3([0, t_0]; L^3(M))}^3 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; H^1(M))}^2) \end{aligned}$$

mit von $\delta, \beta > 0$ unabhängigen Konstanten $C > 0$ und $c_1, c_2 > 0$.

Beweis. Für die Filmgleichung wählen wir zu $h > 0$ dieselbe Testfunktion wie in Satz 3.59. Wie in Kapitel 3 ist zu $\beta, \delta > 0$ auch $\varrho_{\beta\delta} \in L^2(H^3(M))$ und daher nach der Regularisierung aus Proposition 3.41 als Testfunktion zulässig. Bezeichnen wir parabolischen bzw. elliptischen Term in der Filmgleichung mit (H_1) bzw. (H_2) . Wir bemerken, dass wir wie in Kapitel 3 den Term mit v^* in den parabolischen Term ziehen. Im Limes $h \rightarrow 0$ nimmt dann der parabolische Term der Filmgleichung wie in Satz 3.59 die folgende Form an:

$$\begin{aligned} (H_1) &= E(\varrho_{\beta\delta}(t_0)) - E(\varrho_0) + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{1}{2} \varrho_{\beta\delta}^2 \frac{D^M}{Dt} |K|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} (E(\varrho_{\beta\delta}) + \varrho k) \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt \\ &+ \int_0^{t_0} \int_{M_t} \frac{D^M}{Dt} k \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \varrho_{\beta\delta} \bullet ((D(v^*))^S - v_n K) \nabla^M \varrho_{\beta\delta} + \varrho_{\beta\delta} \nabla^M \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Der elliptische Term nimmt im Limes $h \rightarrow 0$ die folgende Form an:

$$\begin{aligned} (H_2) &= \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt - \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) d\mathcal{H}^d dt \\ &- \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet a_1(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k d\mathcal{H}^d dt + \beta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \\ &- \delta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt = (1) + (2) + (3) + (4) + (5). \end{aligned}$$

Ausdruck (1) hat das richtige Vorzeichen. (2) müssen wir mit der Surfactantgleichung und (1) absorbieren. (3) bringen wir auf die andere Seite und schätzen mit einem $\epsilon > 0$, das wir später noch festlegen, mit der Young-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet a_1(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k d\mathcal{H}^d dt \right| \\ & \leq \epsilon \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt + C_\epsilon \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |a_1(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & \leq \epsilon \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt + C_\epsilon \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^3([0, t_0]; L^3(M))}^3. \end{aligned}$$

An dieser Stelle haben wir die Struktur der Mobilitäten aus Definition 4.9 und die Beschränktheit von a_1 aus Voraussetzung 4.5 ausgenutzt. In (4) setzen wir die Definition von p ein, integrieren partiell und schätzen dann nach unten mit der Young-Ungleichung ab. Es treten dabei keine Randterme auf, da $\nu^* \bullet \nabla^M \varrho_{\beta\delta} = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$.

$$\begin{aligned} \beta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt &= \beta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \left(|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}|^2 + (k + \varrho_{\beta\delta} |K|^2) \Delta^M \varrho_{\beta\delta} \right) d\mathcal{H}^d dt \\ &\geq \frac{\beta}{2} \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2 - \frac{\beta}{2} \|k + \varrho_{\beta\delta} |K|^2\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2 \\ &\geq \frac{\beta}{2} \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2 - C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; L^2(M))}^2). \end{aligned}$$

Wobei wir verwendet haben, dass etwa $\beta \leq 1$. Schließlich betrachten wir (5). Wir setzen die Definition von p ein und schätzen dann nach unten mit der Young-Ungleichung ab:

$$\begin{aligned} -\delta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt &= \delta \int_0^{t_0} \int_{M_t} \left(|\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}|^2 + \nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta} |K|^2) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} \right) d\mathcal{H}^d dt \\ &\geq \frac{\delta}{2} \int_0^{t_0} \int_{M_t} |\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt - C \int_0^{t_0} (1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{H^1(M_t)}^2) dt. \end{aligned}$$

Den positiven Restterm lassen wir weg, den anderen bringen wir auf die rechte Seite. Wir haben verwendet, dass etwa $\delta \leq 1$ und weiterhin Voraussetzung 4.1 um die Krümmung abzuschätzen. Für die Surfactantgleichung möchten wir als Testfunktion $f'(\gamma_{\beta\delta})$ setzen. Wir bemerken, dass wir in diesem Fall nicht den Term mit v^* in den parabolischen Teil ziehen, sondern im elliptischen lassen. Wir wählen zu t_0 und $h > 0$ eine wie in Lemma 3.41 zeitgeglättete Testfunktion, d.h.:

$$w_2(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f'(\gamma_{\beta\delta}(s)) \circ \Phi_t^{s-t} \chi_{(-\infty, t_0]}(s) ds.$$

Es ist $f'(\gamma_{\beta\delta}) \in L^2(W)$ aufgrund von Folgerung 4.17 und Folgerung 4.27. Mit der Faltungsabschätzung und der Kettenregel zusammen mit der Regularität der Diffeomorphismen aus Voraussetzung 4.2 ist dann $w \in L^2(H^2(M))$. Die Randbedingung ist wie im Beweis von Satz 4.36 erfüllt, da der Tangentialraum eindimensional ist. Somit ist die konstruierte Testfunktion zulässig. Bezeichnen wir parabolischen bzw. elliptischen Term der Surfactant-Gleichung mit (S_1) bzw. (S_2) . Dann ist:

$$\begin{aligned} (S_1) &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} f'(\gamma_{\beta\delta})(\gamma_{\beta\delta}(t) - \gamma_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h} \mathcal{J} \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} f'(\gamma_{\beta\delta})(\gamma_{\beta\delta}(t) - \gamma_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \\ &\quad + \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} f'(\gamma_{\beta\delta}) \gamma_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^h (1 - \mathcal{J} \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \end{aligned}$$

Den letzten Term können wir wegen $sf'(s) \leq C(1 + f(s))$ aus Voraussetzung 4.8 zusammen mit der Tatsache, dass $\frac{1 - \mathcal{J} \Phi_t^{-h}}{h}$ mit der Eulerschen Entwicklungsformel aus Satz 6.11 gleichmäßig beschränkt ist, auf die andere Seite bringen und abschätzen durch:

$$\frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} f'(\gamma_{\beta\delta}) \gamma_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h} (1 - \mathcal{J} \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \leq C(1 + \|f(\gamma_{\beta\delta})\|_{L^1([0, t_0]; L^1(M))}).$$

Den ersten Term schätzen wir mit Proposition 4.23 weiter nach unten hin ab und verwenden anschließend den Transformationsatz 6.8 und eine Indexverschiebung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} f'(\gamma_{\beta\delta})(\gamma_{\beta\delta}(t) - \gamma_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \\ &\geq \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} G(f'(\gamma_{\beta\delta})) + G^*(\gamma_{\beta\delta}(t)) - G(f'(\gamma_{\beta\delta})) - G^*(\gamma_{\beta\delta}(t-h) \circ \Phi_t^{-h}) d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} G^*(\gamma_{\beta\delta}(t)) - \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_{t-h}} G^*(\gamma_{\beta\delta}(t-h)) \mathcal{J} \Phi_{t-h}^h d\mathcal{H}^d dt \\ &= \frac{1}{h} \int_0^{t_0} \int_{M_t} G^*(\gamma_{\beta\delta}(t)) - \frac{1}{h} \int_{-h}^{t_0-h} \int_{M_t} G^*(\gamma_{\beta\delta}(t)) d\mathcal{H}^d dt + \int_{-h}^{t_0-h} \int_{M_t} G^*(\gamma_{\beta\delta}(t)) \frac{1 - \mathcal{J} \Phi_t^h}{h} d\mathcal{H}^d dt = (\star). \end{aligned}$$

Dabei ist $G^* = f$ wie im Beweis von Satz 4.25. Dann konvergiert also, wenn wir das Teleskopintegral auswerten und zum Grenzwert $h \rightarrow 0$ gehen, für fast alle $t_0 \in [0, T]$:

$$(\star) \longrightarrow \int_{M_{t_0}} f(\gamma_{\beta\delta}) d\mathcal{H}^d - \int_{M_0} f(\gamma_0) d\mathcal{H}^d - \int_0^{t_0} \int_{M_t} f(\gamma_{\beta\delta}) \operatorname{div}^M(v) d\mathcal{H}^d dt.$$

Die ersten beiden Terme sind unsere gewünschten Ausdrücke. Den dritten Term bringen wir auf die andere Seite und schätzen ihn ab. Schließlich verbleibt noch der elliptische Term der Surfactant-Gleichung, der im Limes $h \rightarrow 0$ folgendermaßen aussieht:

$$(S_2) \longrightarrow \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M f'(\gamma_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \gamma d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \delta |\Delta^M f'(\gamma_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ + \int_0^{t_0} \int_{M_t} -\nabla^M f'(\gamma_{\beta\delta}) \gamma_{\beta\delta} \bullet (m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta})(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + v^*) d\mathcal{H}^d dt.$$

Der zweite Term besitzt ein Vorzeichen kann daher weggelassen werden. Der erste Term besitzt wegen der Konvexität von f ebenfalls ein Vorzeichen:

$$\int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M f'(\gamma_{\beta\delta}) \bullet \nabla^M \gamma_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt = \int_0^T \int_{M_t} f''(\gamma_{\beta\delta}) |\nabla^M \gamma_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt.$$

Der verbleibende Term wird dann mit der abgeleiteten Gibbs-Relation zu:

$$\int_0^{t_0} \int_{M_t} -\nabla^M f'(\gamma_{\beta\delta}) \gamma_{\beta\delta} \bullet (m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta})(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + v^*) d\mathcal{H}^d dt \\ = \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \bullet (m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta})(-\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) + a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k) + m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) + v^*) d\mathcal{H}^d dt \\ = \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \bullet m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta}) d\mathcal{H}^d dt \\ + \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \bullet m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k d\mathcal{H}^d dt - \int_0^{t_0} \int_{M_t} \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \operatorname{div}^M(v^*) d\mathcal{H}^d dt$$

Wobei wir im v^* -Term noch partiell integriert und die Tatsache $v^* \bullet \nu^* = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$ verwendet haben, die aus Voraussetzung 4.2 folgt. Der erste Term besitzt ein Vorzeichen. Den zweiten Term behandeln wir später. Den letzten Term bringen wir auf die rechte Seite und schätzen mit $|\sigma(s)| \leq C(1 + f(s))$ aus Voraussetzung 4.8 sowie weiterhin mit Voraussetzung 4.1 ab. Den dritten Term schätzen wir für $\epsilon > 0$, welches wir später festlegen, nach unten hin mit der Young-Ungleichung ab, wobei wir verwenden, dass $m_1^\beta(s)m_3^\beta(s) = \frac{4}{3}m_2^\beta(s)^2$ ist.

$$- \int_0^{t_0} \int_{M_t} \nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \bullet m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k d\mathcal{H}^d dt \\ \geq -\epsilon \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt - C_\epsilon \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k|^2 d\mathcal{H}^d dt.$$

Den ersten Term absorbieren wir in den positiven elliptischen Term. Dazu wählen wir $\epsilon > 0$ wie in Satz 4.15. Den verbleibenden Term schätzen wir ab durch:

$$\left| C_\epsilon \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |a_2(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M k|^2 d\mathcal{H}^d dt \right| \leq C(1 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^3([0, t_0]; L^3(M))}^3).$$

Die gemischten Terme der Form $\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta}) \bullet m_2^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})$ absorbieren wir schließlich vollkommen analog wie die Terme der Form $\nabla^M \sigma(\gamma_N) \bullet m_2^\beta(\varrho_N) \nabla^M \Delta^M \varrho_N$ im Beweis von Satz 4.15. Weiterhin kann $\epsilon > 0$ ebenfalls wie im Beweis von Satz 4.15 gewählt werden. \square

Folgerung 4.41. (Physikalische Energieabschätzung des β -Problems) Sei $\beta > 0$. Unter den getroffenen Voraussetzungen erfüllen die Lösungen $\varrho_\beta, \gamma_\beta$ aus Satz 4.38 die folgende Energieabschätzung:

$$\|\gamma_\beta\|_{L^\infty(L^2(M))}^2 + \|\varrho_\beta\|_{L^\infty(H^1(M))}^2 + c_1 \int_0^T \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ + c_2 \int_0^T \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M \sigma(\gamma_\beta)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} f''(\gamma_\beta) |\nabla^M \gamma_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(M_t)}^2 dt \leq C$$

mit von $\delta, \beta > 0$ unabhängigen Konstanten $C > 0$ und $c_1, c_2 > 0$. Dazu definiere die folgende Menge $M^{0\beta} = \{(t, x) \in M \mid \varrho_\beta(t, x) = 0\}$.

Beweis. Für $\beta > 0$ möchten wir für fast alle $t_0 \in [0, T]$ in der Behauptung von Satz 4.40 zum Limes $\delta \rightarrow 0$ übergehen:

$$\begin{aligned} & \|f(\gamma_{\beta\delta}(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} + E_{t_0}(\varrho_{\beta\delta}(t_0)) + c_1 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + c_2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M \sigma(\gamma_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} f''(\gamma_{\beta\delta}) |\nabla^M \gamma_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(M_t)}^2 dt \\ & \leq E(\varrho_0) + \|f(\gamma_0)\|_{L^1(M_0)} + C(1 + \|f(\gamma_{\beta\delta})\|_{L^1([0, t_0]; L^1(M))} + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^3([0, t_0]; L^3(M))}^3 + \|\varrho_{\beta\delta}\|_{L^2([0, t_0]; H^1(M))}^2). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Terme auf der linken Seite mit (1) – (6) und die Terme auf der rechten Seite mit (7) – (11). Für (1) beachten wir, dass aufgrund von Satz 4.36 $\gamma_{\beta\delta}$ in $L^p(L^p(M))$ für $p < 6$ konvergiert und nach Auswahl einer Teilfolge für fast alle t_0 in $L^p(M_{t_0})$. Aufgrund der Wachstumsvoraussetzung und der Stetigkeit von f aus Voraussetzung 4.6 können wir daher im ersten Term zum Limes übergehen. Aufgrund der starken Konvergenz in der $L^p(W^{1,p}(M))$ -Norm für $p < 4$ aus Folgerung 4.35 können wir in (2) nach Auswahl einer weiteren Teilfolge für fast alle $t_0 \in [0, T]$ in diesem Term zum Limes übergehen. Um in Term (3) zum Limes überzugehen nutzen wir die Definition von $p(\varrho_{\beta\delta}) = -k - \varrho_{\beta\delta}|K|^2 - \Delta^M \varrho_{\beta\delta}$ und multiplizieren zunächst aus:

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M p(\varrho_{\beta\delta})|^2 d\mathcal{H}^d dt = \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2)|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) |\nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}|^2 d\mathcal{H}^d dt + 2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Dann können wir im ersten Term auf der rechten Seite aufgrund von Folgerung 4.35 zum Limes übergehen. Der zweite Term hat ein Vorzeichen und wir können ihn kleiner machen indem wir den Definitionsbereich für $t \in [0, T]$ auf $M_t \setminus M_t^{0\beta}$ verkleinern. Im Beweis von Satz 4.38 hatten wir gezeigt, dass $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} \rightharpoonup \sqrt{m_1^\beta(\varrho_\beta)} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta$ schwach in $L^2(L^2(M \setminus M^{0\beta}))$ konvergiert. Wir können in diesem Term also Unterhalbstetigkeit verwenden. Schließlich zerlegen wir zu $\eta > 0$ den gemischten Term wie im Beweis von Satz 4.38 mit Hilfe der Mengen $M_t^{\eta\beta} = \{x \in M_t \mid \varrho_\beta(t, x) \leq \eta\}$:

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \\ & = 2 \int_0^{t_0} \int_{M_t^{\eta\beta}} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \\ & \quad + 2 \int_0^{t_0} \int_{M_t \setminus M_t^{\eta\beta}} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Den ersten Term bringen wir auf die andere Seite und schätzen wie im Beweis von Satz 4.38 ab:

$$\begin{aligned} & 2 \left| \int_0^{t_0} \int_{M_t^{\eta\beta}} m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta}) \nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2) \bullet \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta} d\mathcal{H}^d dt \right| \\ & \leq 2\eta^{\frac{3}{2}} \|\nabla^M (k + \varrho_{\beta\delta}|K|^2)\|_{L^2(L^2(M))} \|\sqrt{m_1^\beta(\varrho_{\beta\delta})} \nabla^M \Delta^M \varrho_{\beta\delta}\|_{L^2(L^2(M))} \leq \eta^{\frac{3}{2}} C_\beta. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir Folgerung 4.32 verwendet und Voraussetzung 4.1 um die Krümmung abzuschätzen. Im zweiten Term konvergiert für alle $\eta > 0$ und $\beta > 0$ aufgrund von Satz 4.34 und Folgerung 4.35 für $\delta \rightarrow 0$ ein Term stark, der andere wie oben schwach. Im Limes $\eta \rightarrow 0$ verschwindet anschließend der erste Term, der zweite konvergiert mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue wie im Beweis von Satz 4.38. Für die Terme (4), (5) und (6) folgt schwache Konvergenz und Unterhalbstetigkeit in $L^2(L^2(M))$ aufgrund von Folgerung 4.32 und wir identifizieren die Limiten wie im Beweis von Satz 4.38. Terme (7) und (8) können wir mit der Voraussetzung 4.7 an die Anfangswerte durch eine Konstante abschätzen.

In (9) gehen wir zum Limes über mit der starken Konvergenz der Surfactants aus Satz 4.36 und der Wachstumsvoraussetzung 4.6 an f . In (10) und (11) können wir mit Folgerung 4.35 zum Limes übergehen. Damit folgt insgesamt:

$$\begin{aligned} & \|f(\gamma_\beta(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} + E_{t_0}(\varrho_\beta(t_0)) + c_1 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + c_2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M \sigma(\gamma_\beta)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} f''(\gamma_\beta) |\nabla^M \gamma_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(M_t)}^2 dt \\ & \leq C(1 + \|f(\gamma_\beta)\|_{L^1([0,t_0];L^1(M))} + \|\varrho_\beta\|_{L^3([0,t_0];L^3(M))}^3 + \|\varrho_\beta\|_{L^2([0,t_0];H^1(M))}^2). \end{aligned}$$

Es sind nun die Lösungen ϱ_β aufgrund von Satz 4.39 nichtnegativ und haben zu fast jedem Zeitpunkt t_0 konstante Gesamtmasse. Daher ist $\|\varrho_\beta(t_0)\|_{L^1(M_{t_0})}$ für fast alle t_0 gleichmäßig durch eine Konstante abgeschätzt. Es macht daher Sinn zwischen $H^1(M_{t_0})$ und $L^1(M_{t_0})$ zu interpolieren. Mit Lemma 3.46 angewendet auf $d = 1, q = 3, r = 1, p = 2$ ist:

$$\|\varrho_\beta(t)\|_{L^3(M_t)} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{\frac{4}{9}} \|\varrho_\beta(t)\|_{L^1(M_t)}^{\frac{5}{9}} \leq C \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{\frac{4}{9}}.$$

für fast alle $t \in [0, T]$. Zum Exponenten 3 und über $[0, t_0]$ integriert folgt:

$$\|\varrho_\beta\|_{L^3([0,t_0];L^3(M))}^3 \leq C \int_0^{t_0} \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^{\frac{4}{3}} dt \leq C \int_0^{t_0} \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^2 dt.$$

Wir sehen hier ist noch Luft. Man könnte daher auch $a_i, i = 1, 2$ mit dem Wachstum von \sqrt{s} zulassen. Schließlich lässt sich Proposition 3.58 anwenden und wir erhalten:

$$\begin{aligned} & \|f(\gamma_\beta(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} + \|\varrho_\beta(t_0)\|_{H^1(M_{t_0})}^2 + c_1 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + c_2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M \sigma(\gamma_\beta)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} f''(\gamma_\beta) |\nabla^M \gamma_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(M_t)}^2 dt \\ & \leq C(1 + \int_0^{t_0} (\|f(\gamma_\beta(t))\|_{L^1(M_t)} + \|\varrho_\beta(t)\|_{H^1(M_t)}^2) dt). \end{aligned}$$

Mit dem Lemma von Gronwall folgt dann:

$$\begin{aligned} & \|f(\gamma_\beta(t_0))\|_{L^1(M_{t_0})} + \|\varrho_\beta(t_0)\|_{H^1(M_{t_0})}^2 + c_1 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_1^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ & + c_2 \int_0^{t_0} \int_{M_t} m_3^\beta(\varrho_\beta) |\nabla^M \sigma(\gamma_\beta)|^2 d\mathcal{H}^d dt + \int_0^{t_0} \int_{M_t} f''(\gamma_\beta) |\nabla^M \gamma_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt + \frac{\beta}{2} \int_0^{t_0} \|\Delta^M \varrho_\beta\|_{L^2(M_t)}^2 dt \leq C. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt schließlich aus der gleichmäßigen Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6. \square

Übergang zum Grenzwert

Nachdem die physikalische Energieabschätzung die gewünschte Beschränktheit der Lösungen unabhängig von $\beta > 0$ garantiert, können wir die Beweisführung des Grenzübergangs $\delta \rightarrow 0$ imitieren und erhalten schließlich so die gewünschte Existenzaussage.

Folgerung 4.42. (Schwache Konvergenz) *Unter den getroffenen Voraussetzungen konvergieren nach Auswahl einer Teilfolge die Lösungen $\varrho_\beta, \gamma_\beta$ zu $\beta > 0$ des trunkierten Problems aus Satz 4.38 für $\beta \rightarrow 0$ im folgenden Sinne: Es konvergiert ϱ_β schwach* in $L^\infty(H^1(M))$ gegen eine Funktion $\varrho \in L^\infty(H^1(M))$ und es konvergiert ebenfalls γ_β schwach in $L^2(H^1(M))$ und schwach* in $L^\infty(L^2(M))$ gegen eine Funktion $\gamma \in L^2(H^1(M)) \cap L^\infty(H^1(M))$.*

Beweis. Folgt aus Folgerung 4.41 wie in Folgerung 4.17. \square

Folgerung 4.43. (Gleichmäßige Konvergenz der Flüssigkeit) *Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die Lösungen ϱ_β zu $\beta > 0$ des trunkierten Problems aus Satz 4.38 gleichmäßig in der $C^{\frac{1}{3}}(C^{\frac{1}{2}}(M))$ -Norm durch eine von $\beta > 0$ unabhängige Konstante $C > 0$ beschränkt. Weiterhin besitzt ϱ aus Folgerung 4.42 einen Repräsentanten in $C^{\frac{1}{3}}(C^{\frac{1}{2}}(M))$, so dass ϱ_β nach Auswahl einer weiteren Teilfolge für $\beta \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen ϱ konvergiert.*

Beweis. Im Beweis von Satz 4.34 hatten wir verwendet, dass $\varrho_{\beta\delta}$ zu $\beta, \delta > 0$ Lösungen einer parabolischen Differentialgleichung mit unabhängig von $\delta > 0$ in $L^2(L^2(M))$ beschränktem Fluss $J_1^{\beta\delta}$ sind und weiterhin gleichmäßige Beschränktheit der $\varrho_{\beta\delta}$ in $L^\infty(H^1(M))$. Aufgrund von Folgerung 4.41 sind ebenfalls ϱ_β gleichmäßig in $L^\infty(H^1(M))$ beschränkt. Weiterhin ist der Fluss J_1^β gegeben durch:

$$J_1^\beta(\varrho_\beta, \gamma_\beta) = m_1^\beta(\varrho_\beta)(\nabla^M k + \nabla^M(\varrho_\beta |K|^2)) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta + a_1(\varrho_\beta) \nabla^M k \\ + m_2^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \sigma(\gamma_\beta) + v^* \varrho_\beta + \beta \nabla^M \varrho_\beta$$

ebenfalls in $L^2(L^2(M))$ beschränkt. Dies folgt aus der Einbettung $H^1(M_t) \hookrightarrow L^\infty(M_t)$, $t \in [0, T]$ in einer Raumdimension sowie aus Folgerung 4.41 und für den β -Regularisierungsterm mit dem zusätzlichen Argument, dass sich die vollständige $L^2(H^2(M))$ -Norm durch die $L^2(L^2(M))$ -Norm von $\Delta^M \varrho_\beta$ abschätzen lässt, was in der Tat der Fall ist aufgrund der Randwertbedingung und der konstanten Gesamtmasse von ϱ_β . Somit folgt die Behauptung mit der Argumentation wie in Satz 4.34. \square

Folgerung 4.44. (Starke Konvergenz der Surfactants) *Unter den getroffenen Voraussetzungen konvergieren, nach Auswahl einer weiteren Teilfolge, die Lösungen γ_β zu $\beta > 0$ des trunkierten Problems aus Satz 4.38 für $\beta \rightarrow 0$ stark in $L^p(L^p(M))$ für $p < 6$ gegen γ aus Folgerung 4.42.*

Beweis. Im Beweis von Satz 4.36 hatten wir verwendet, dass die $\gamma_{\beta\delta}$ gleichmäßig in $L^\infty(L^2(M))$ und $L^2(H^1(M))$ beschränkt sind sowie Lösung einer parabolischen Differentialgleichung mit in $L^{\frac{3}{2}}(L^{\frac{3}{2}}(M))$ beschränktem Fluss $J_2^{\beta\delta}$. Aufgrund von Folgerung 4.41 zusammen mit der gleichmäßigen Konvexität von f aus Voraussetzung 4.6 sind die γ_β ebenfalls in $L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ gleichmäßig beschränkt. Es ist nun $J_2^\beta(\varrho_\beta, \gamma_\beta) = \gamma_\beta J_2^\beta(\varrho_\beta, \gamma_\beta) - \nabla^M \gamma_\beta$ mit

$$J_2^\beta(\varrho_\beta, \gamma_\beta) = m_2^\beta(\varrho_\beta)(\nabla^M(k + \varrho_\beta |K|^2)) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta + a_2(\varrho_\beta) \nabla^M k + m_3^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M \sigma(\gamma_\beta) + v^*.$$

Wie im Beweis von Folgerung 4.43 sieht man ein, dass $J_2^\beta(\varrho_\beta, \gamma_\beta)$ gleichmäßig in $L^2(L^2(M))$ beschränkt ist. Wie in Proposition 4.18 folgt mit Interpolation, dass γ_β gleichmäßig in $L^6(L^6(M))$ beschränkt ist. Wir können also einsehen, dass der Fluss J_2^β gleichmäßig in $L^{\frac{3}{2}}(L^{\frac{3}{2}}(M))$ beschränkt ist. Somit folgt die Behauptung mit derselben Argumentation wie im Beweis von Satz 4.36. \square

Folgerung 4.45. (Schwache Konvergenz von Gradienten der Oberflächenspannung) *Unter den getroffenen Voraussetzungen gilt für die Lösungen γ_β zu $\beta > 0$ aus Satz 4.38 und den Limes γ aus Folgerung 4.42, dass die zugehörigen Gradienten der Oberflächenspannungen im folgenden Sinne für $\beta \rightarrow 0$ schwach konvergieren: $\nabla^M \sigma(\gamma_\beta) \rightharpoonup \nabla^M \sigma(\gamma)$ in $L^s(L^s(M))$ für $1 \leq s < \frac{6}{5}$.*

Beweis. Folgt wie in Folgerung 4.28. \square

Satz 4.46. (Lösung des gekoppelten Problems) *Unter den getroffenen Voraussetzungen sind die Limiten $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap C^{\frac{1}{3}}(C^{\frac{1}{2}}(M))$ und $\gamma \in L^\infty(L^2(M)) \cap L^2(H^1(M))$ aus Folgerung 4.42 eine Lösung des gekoppelten Systems im Sinne von [BF]. Dazu definiere $M_t^0 = \{x \in M_t \mid \varrho(x, t) = 0\}$. Es lösen ϱ, γ das folgende System:*

$$0 = -(w_1(0), \varrho_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_1(t), \varrho(t))_{L^2(M_t)} dt - \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^0} \nabla^M w_1 \bullet m_1(\varrho) \nabla^M \Delta^M \varrho d\mathcal{H}^d dt \\ - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_1 \bullet \left(m_1(\varrho) (\nabla^M(k + \varrho |K|^2)) + a_1(\varrho) \nabla^M k + m_2(\varrho) \nabla^M \sigma(\gamma) + v^* \varrho \right) d\mathcal{H}^d dt, \\ 0 = -(w_2(0), \gamma_0)_{L^2(M_0)} - \int_0^T (\partial_t^M w_2(t), \gamma(t))_{L^2(M_t)} dt - \int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^0} \nabla^M w_2 \bullet m_2(\varrho) \nabla^M \Delta^M \varrho d\mathcal{H}^d dt \\ - \int_0^T \int_{M_t} \nabla^M w_2 \bullet \left(\gamma (m_2(\varrho) (\nabla^M(k + \varrho |K|^2)) + a_2(\varrho) \nabla^M k) + m_3(\varrho) \nabla^M \sigma(\gamma) + v^* \right) - \nabla^M \gamma \right) d\mathcal{H}^d dt,$$

für Testfunktionen $w_1 \in L^2(H^1(M)) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ und $w_2 \in L^2(W) \cap W^{1,1}(L^2(M))$ mit der Eigenschaft $w_1(T) = w_2(T) = 0$.

Beweis. In den meisten Termen können wir im Beweis von Satz 4.38 zum Limes übergehen. Wir argumentieren kurz warum der Term der β -Regularisierung verschwindet. Da ϱ_β konstante Gesamtmasse und Neumann-Randwerte hat ist die $L^2(L^2(M))$ -Norm von $\Delta^M \varrho_\beta$ äquivalent zur vollständigen $L^2(H^2(M))$ -Norm. Damit ist nach der Energieabschätzung 4.41 $\sqrt{\beta} \nabla^M \varrho_\beta$ in $L^2(L^2(M))$ beschränkt. Mit einem weiteren Faktor $\sqrt{\beta}$ multipliziert, wie in der Gleichung, konvergiert dieser Term also gegen 0. Weiterhin verlieren wir im letzten Schritt die starke Konvergenz von $\nabla^M \varrho_\beta$. Dennoch liefert Folgerung 4.41 schwach*-Konvergenz von $\nabla^M \varrho_\beta$ in $L^\infty(H^1(M))$. Zusammen mit der gleichmäßigen Konvergenz der ϱ_β aus Folgerung 4.43 können wir im Term $\nabla^M w_1 \bullet m_1^\beta(\varrho_\beta) \nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2)$ zum Limes übergehen. Es bleibt zu zeigen, wie wir in den Termen dritter Ordnung von ϱ_β zum Grenzwert übergehen und wie wir die Limiten identifizieren. Aufgrund von Folgerung 4.41 ist der Anteil des Flusses $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_\beta)} (\nabla^M (k + \varrho_\beta |K|^2) + \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta)$ gleichmäßig in $L^2(L^2(M))$ beschränkt. Damit folgt aus der gleichmäßigen Beschränktheit der $\varrho_\beta \in L^\infty(H^1(M))$ die Beschränktheit von $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_\beta)} \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta$ in $L^2(L^2(M))$ und mit der Reflexivität dieses Raumes die schwache Konvergenz gegen einen Limes $d \in L^2(L^2(M))$ nach Auswahl einer Teilfolge. Wenn wir zu $\eta > 0$ die Menge $M_t^\eta \subset M_t$ für $t \in [0, T]$ durch $M_t^\eta = \{x \in M_t \mid \varrho(x, t) \leq \eta\}$ definieren, dann gilt wenn wir das Integrationsgebiet verkleinern:

$$\int_0^T \int_{M_t \setminus M_t^\eta} m_1^\beta(\varrho_\beta) |\chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta|^2 d\mathcal{H}^d dt \leq C.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der ϱ_β aus Folgerung 4.43 ist $\varrho_\beta \geq \frac{\eta}{2}$ auf $M \setminus M^\eta$ falls $\beta \leq \beta_0(\eta)$. Für solche β ist dann $\chi_{M \setminus M^{0\beta}} = 1$ auf $M \setminus M^\eta$ und weiterhin ist $m_1^\beta(\varrho_\beta) \geq c_\eta > 0$. Somit ist $\nabla^M \Delta^M \varrho_\beta$ in der $L^2(L^2(M \setminus M^\eta))$ -Norm durch eine Konstante $C_\eta > 0$ beschränkt. Aufgrund der Reflexivität existiert ein schwacher Limes und weil es sich um schwache Konvergenz eines linearen Ausdrucks handelt können wir den Limes als $\nabla^M \Delta^M \varrho$ auf $M \setminus M^\eta$ identifizieren. Da dies für alle $\eta > 0$ der Fall ist können wir $\sqrt{m_1^\beta(\varrho_\beta)} \chi_{M \setminus M^{0\beta}} \nabla^M \Delta^M \varrho_\beta \rightharpoonup \sqrt{m_1(\varrho)} \chi_{M \setminus M^0} \nabla^M \Delta^M \varrho$ in $L^2(L^2(M \setminus M^0))$ identifizieren. Die Restterme auf der Menge M^0 , verschwinden wie im Beweis von Satz 4.38. \square

5 Erweiterungen und Grenzen der Methoden und des Modells

In diesem Kapitel möchten wir einige mögliche Erweiterungen der mathematischen Methoden und des Modells vorstellen. Dabei beschränken wir uns zumeist auf mögliche Beweisideen oder Beweisskizzen. Die Herleitung in Kapitel 2 beruhte entscheidend auf Voraussetzung 2.2, dass die Abbildung $Id - hK$ positiv definit und damit invertierbar ist. Wenn beliebige Bewegungen des Substrats zugelassen sind, kann man leicht (unphysikalische) Lösungen der Gleichung konstruieren, in der diese Voraussetzung verletzt ist. Der Existenzsatz 1.3 garantiert Lösungen für alle Zeiten. Freilich sind Lösungen, die die Bedingung $Id - hK > 0$ nicht mehr erfüllen, nicht physikalisch. Im Falle einer Raumdimension lässt sich zeigen, dass diese Bedingung wenigstens lokal in der Zeit erfüllt ist, da Hölder-Stetigkeit der Lösungen zur Verfügung steht. In höheren Raumdimensionen bleibt die Frage nach Stetigkeit von Lösungen nach aktuellem Kenntnisstand ein offenes Problem.

Proposition 5.1. *(Lösungen bleiben physikalisch sinnvoll lokal in der Zeit) Sei $d = 1$. Falls $1 - h_0k > 0$ zum Zeitpunkt $t = 0$, dann existiert ein $t^* > 0$, so dass für die Lösungen aus Theorem 1.3 die Bedingung $1 - hk > 0$ für $t \in [0, t^*]$ erfüllt ist.*

Beweis. In einer Raumdimension ist ϱ gegeben durch $\varrho = h - \frac{1}{2}kh^2$, d.h. der Term der Gaußschen Krümmung taucht nicht auf. Daher folgt:

$$(1 - hk)^2 = 1 - 2hk + (hk)^2 = 1 - 2kh(1 - \frac{1}{2}kh) = 1 - 2k\varrho.$$

Nach Voraussetzung folgt für den Startzeitpunkt $1 - 2k_0\varrho_0 > 0$. Aus der Beschränktheit von approximierenden Lösungen in $L^\infty(H^1(M))$ folgt aufgrund der Sobolevschen Einbettung in einer Raumdimension die Beschränktheit in $L^\infty(L^\infty(M))$ und damit die Beschränktheit des Flusses in $L^2(L^2(M))$. Somit folgt gleichmäßige Konvergenz wie in Satz 4.34 und damit gleichmäßige Stetigkeit der Lösung. Da die Krümmung k ebenfalls gleichmäßig stetig ist, existiert ein $t^* > 0$, so dass $1 - 2k\varrho > 0$ für $t \in [0, t^*]$ erfüllt ist und damit nach obiger Rechnung $|1 - hk| > 0$. Weiterhin lässt sich h aus stetig ϱ berechnen:

$$h = \begin{cases} \frac{1}{k}(1 - \sqrt{1 - 2k\varrho}), & \text{falls } k \neq 0, \\ \varrho, & \text{falls } k = 0. \end{cases}$$

Damit folgt $1 - hk > 0$ für $t \in [0, t^*]$. □

Bisher hatten wir Mobilitäten betrachtet, die nur von ϱ abhängen. Im Prinzip sind auch Mobilitäten denkbar, die von (t, x) abhängen. Dies tritt z.B. auf, wenn die Slipkoeffizienten C^{-1} von (t, x) abhängen oder wenn die Mobilität von der Krümmung abhängt. Dies ist der Fall, wenn wir Gleichung (2.4.4), in der der Term $a(\varrho)$ in die Mobilität geschrieben ist, an Stelle von Gleichung (2.4.1) betrachten. Wir geben hier eine formale Beweisskizze und betrachten der Einfachheit halber eine Mobilität der Form $m(t, x, s) = s^n f(t, x)$ mit einer strikt positiven Funktion $f \in C^1(C^1(M))$. Tatsächlich möchte man vielleicht Mobilitäten der Struktur $m(t, x, s) = s^{n_1} + f(t, x)s^{n_2}$ mit nicht notwendig positivem f untersuchen. In der folgenden Aussage benötigt man dann jedoch Zusatzbedingungen, etwa wie die Positivität der Gesamtmobilität.

Proposition 5.2. *(Die mathematische Entropie kann von (t, x) abhängen) $\varrho \in C^1(C^4(M))$ sei eine positive, klassische Lösung der starken Formulierung aus Definition 3.4 mit Fluss $J(\varrho)$ und Mobilität $m(t, x, s) = s^n f(t, x)$. Sei $n \geq 1$ und $f \in C^1(C^1(M))$ strikt positiv. Die mathematische Entropie $G(t, x, s)$ sei mit dieser Mobilität definiert wie in Definition 3.7. Dann erfüllt ϱ die folgende mathematische Entropieabschätzung:*

$$\|G(\varrho)\|_{L^\infty(L^1(M))} + \|\Delta^M \varrho\|_{L^2(L^2(M))}^2 \leq C(1 + \|\varrho\|_{L^2(L^2(M))}^2 + \|\varrho\|_{L^n(L^n(M))}^n + \|\frac{1}{\sqrt{m(\varrho)}} J(\varrho)\|_{L^2(L^2(M))}^2).$$

Beweis. Beim Testen der starken Formulierung aus Definition 3.4 mit $g(t, \cdot, \varrho(t))$ tauchen, wenn wir die Abschätzung analog durchführen, zwei zusätzliche Terme auf, von denen wir zeigen möchten, wie

diese abzuschätzen sind. Der erste entsteht wenn die Zeitableitung auf G fällt:

$$G_{/t} \circ \varrho(t) = \int_A^{\varrho(t)} \int_A^r \frac{-f_{/t}(t)}{s^n f(t)^2} dr ds = \frac{-f_{/t}(t)}{f(t)} G(t, \varrho(t)).$$

Dieser Term lässt sich durch einen zusätzlichen Gronwall-Term abschätzen. Weiterhin erhält man einen Zusatzterm wenn der Gradient auf g fällt:

$$J(\varrho) \bullet (\nabla g) \circ \varrho = J(\varrho) \bullet \int_A^\varrho \frac{-\nabla f}{s^n f^2} ds = J(\varrho) \bullet \frac{-\nabla f}{f} g(\varrho).$$

Schätzen wir mit der Young-Ungleichung ab, so bleibt der Term $\|\sqrt{m(\varrho)} \frac{\nabla f}{f} g(\varrho)\|_{L^2(L^2(M))}^2$ zu kontrollieren, für den wir für $n > 1$ rechnen:

$$\begin{aligned} \left\| \sqrt{m(\varrho)} \frac{\nabla^M f}{f} g(\varrho) \right\|_{L^2(L^2(M))}^2 &= \int_0^T \int_{M_t} m(\varrho) \frac{|\nabla^M f|^2}{f^2} |g(\varrho)|^2 d\mathcal{H}^d dt = \int_0^T \int_{M_t} \varrho^n \frac{|\nabla^M f|^2}{f^4} \left| \int_A^\varrho \frac{1}{s^n} ds \right|^2 d\mathcal{H}^d dt \\ &= \int_0^T \int_{M_t} \varrho^n \frac{|\nabla^M f|^2}{f^4} \left| \frac{\varrho^{1-n}}{1-n} - \frac{A^{1-n}}{1-n} \right|^2 d\mathcal{H}^d dt \leq C \int_0^T \int_{M_t} \frac{|\nabla^M f|^2}{f^4} (\varrho^{2-n} + C\varrho^n) d\mathcal{H}^d dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{M_t} G(\varrho) + C\varrho^n d\mathcal{H}^d dt. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir im Falle $n \neq 2$ verwendet, dass $G(\varrho) = c_1 \frac{1}{f} \varrho^{2-n} + c_2 \varrho + c_3$ für geeignete Konstanten c_1, c_2, c_3 . Falls $n = 2$ so ist der letzte Schritt trivial. Falls $n = 1$ kommt ein Logarithmus ins Spiel und die Abschätzung geht auf ähnliche Weise. Wir erhalten also einen weiteren Gronwall-Term. Der Rest der Abschätzung erfolgt wie bisher und liefert die positiven Terme auf der linken Seite und den quadratischen Term auf der rechten Seite. \square

In der rechten Seite kann dann der Flussterm etwa mit der entsprechenden Energieabschätzung und die übrigen Terme für nichtnegative Lösungen mit Interpolation wie im Beweis von 3.61 für $n \leq 4$ abgeschätzt werden. In diesem Fall würde also die mathematische Entropieabschätzung aus der Energieabschätzung folgen und nicht umgekehrt wie in Kapitel 3. Um dann Lösungstheorie zu betreiben, benötigt man Zusatzvoraussetzungen an das Wachstum von $a(\varrho)$ oder stärkere Einschränkungen an das Wachstum von $m(\varrho)$.

Nicht zulässig sind matrixwertige Mobilitäten, z.B. $m(\varrho) = \frac{1}{3} \varrho^3 (Id + \frac{1}{2} \varrho (kId + K))$. Wenn wir naiv die mathematische Entropie bilden, indem wir die Mobilität als Matrix invertieren und anschließend aufintegrieren, erhalten wir eine matrixwertige Testfunktion. Ebenfalls ist es nicht klar, wie die mathematische Entropie zu definieren ist, damit sich wie gewünscht die Mobilitäten herauskürzen. Schließlich führt der Ansatz für eine Abschätzung der bisherigen skalaren mathematischen Entropie ebenfalls nicht ans Ziel, da höhere Potenzen von ϱ und Ableitungen von ϱ stehen bleiben, von denen nicht klar ist, wie sie zu kontrollieren sind.

Wenn wir eine Folge von Lösungen des Navier-Slip Problems betrachten, bei der die Reibungskraft auf dem Substrat gegen unendlich konvergiert, kann man erwarten, dass man Konvergenz gegen eine Lösung für das No-Slip Problem erhält. Dieses Resultat können wir für ein festes Substrat M zeigen, da in diesem Fall der Beweis ohne die Benutzung von Lemma 3.45 auskommt, dessen Aussage nicht gleichmäßig im Slipkoeffizienten ist.

Proposition 5.3. (No-Slip Limes für festes Substrat) *Sei M eine kompakte, orientierte, zusammenhängende Fläche der Klasse C^3 der Dimension $d = 1, 2$. Weiterhin seien die Voraussetzungen von Theorem 1.3 erfüllt. Zu $c > 0$ seien $\varrho_c \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(H^2(M))$ die Lösungen aus Theorem 1.3 zum Navier-Slip Problem, d.h. zur Mobilität $m(s) = \frac{1}{3} s^3 + cs^2$. Dann konvergiert für $c \rightarrow 0$ nach Auswahl einer Teilfolge ϱ_c stark in $L^p(W^{1,p}(M))$ für $1 \leq p < 4$ gegen ein $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(H^2(M))$ und ϱ ist Lösung des No-Slip Problems aus Gleichung (2.4.2), d.h. zur Mobilität $m(s) = \frac{1}{3} s^3$, im Sinne von Theorem 1.3.*

Beweis. Wir sehen, dass die Lösungen ϱ_c aus Theorem 1.3 die physikalische Energieabschätzung und die mathematische Entropieabschätzung mit einer von $c > 0$ unabhängigen Konstanten erfüllen.

Hierbei kommt die Einschränkung auf den Fall eines festen Substrats daher, dass Lemma 3.45 bei einem bewegten Substrat erforderlich ist, und diese Abschätzung nicht unabhängig von $c > 0$ zur Verfügung steht. Insbesondere gilt die Abschätzung in Satz 3.63 gleichmäßig in $c > 0$. Damit folgt die Behauptung wie in Satz 3.65. \square

Betrachten wir eine Fläche mit nahezu konstanter Krümmung insofern, dass sich die Krümmung sinnvoll als $k = k_0 + \epsilon k_1$ für eine räumliche Konstante k_0 schreiben lässt. Dann macht es Sinn, die Ausgangsgleichung zu Gleichung (2.4.3) zu reduzieren. Hierbei taucht dann nicht mehr der Zusatzterm $a(\varrho)$ auf. Dieser hat Probleme insbesondere bei der Energieabschätzung bereitet und zur Restriktion des Wachstumsexponenten von $m(\varrho)$ geführt. Betrachten wir also nun Gleichung (2.4.3), dann lässt sich Existenz für beliebig großes Wachstum der Mobilität zeigen.

Proposition 5.4. (Existenz von Lösungen auf Substrat nahezu konstanter Krümmung) *Es gelten die gleichen Voraussetzungen von Theorem 1.3, jedoch sei eine Mobilität mit beliebigem Wachstumsexponenten $n \geq 1$ zugelassen. Dann existiert eine schwache Lösung $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap L^2(H^2(M))$ im Sinne von Theorem 1.3 von Gleichung (2.4.3).*

Möchten wir die Filmgleichung in ihrer Gradientenflussform betrachten, d.h. mit dem matrixwertigen Vorfaktor $a(\varrho)$ vor dem Gradienten des Druckes erhalten wir Probleme. In dieser Arbeit sind matrixwertige Mobilitäten nicht zugelassen, daher geben wir noch eine Bemerkung zum eindimensionalen Fall. In diesem Fall steht der Lösungsbegriff von [BF] zur Verfügung. Um die Theorie anwenden zu können müssen wir sicherstellen, dass die Mobilität nichtnegativ bleibt. Dies kann im nichtphysikalischen Regime verletzt sein. Aus diesem Grund muss die Mobilität in geeigneter Weise trunziert werden.

Proposition 5.5. (Existenz von Lösungen in Gradientenflussform) *Es gelten die Voraussetzungen von Theorem 1.4, d.h. M sei insbesondere eindimensional. Betrachte Gleichung (2.4.4) mit der Mobilität:*

$$A(\varrho) = \begin{cases} \max(0, \frac{1}{3}\varrho^3 + \varrho^2 C^{-1} + \epsilon \frac{1}{3}\varrho^4 k), & \text{falls } \varrho \geq 0, \\ 0, & \text{falls } \varrho \leq 0. \end{cases}$$

Dann existiert eine Lösung $\varrho \in L^\infty(H^1(M)) \cap C^{\frac{1}{8}}(C^{\frac{1}{2}}(M)) \cap L^2(H^3([A(\varrho) > \delta]))$ für alle $\delta > 0$ im Sinne von [BF], d.h. im Sinne von Theorem 1.4.

Beweis. Wie für Theorem 1.4 ohne Surfactants. \square

Wir hatten in Kapitel 3 Nichtnegativität gezeigt. Wie im planaren Fall ist die mathematische Entropie ein Maß für die Lösung nahe an 0 zu sein. Daher impliziert eine Abschätzung der mathematischen Entropie ebenfalls ein Positivitätsresultat.

Proposition 5.6. (Positivität) *Seien die Voraussetzungen von Theorem 1.3 erfüllt. Es gelte für den Wachstumsexponenten n der Mobilität $n \in [2, 4]$. Dann gilt für die Lösungen ϱ aus Theorem 1.3, dass $\varrho(t) > 0$ fast überall, für fast alle $t \in [0, T]$.*

Beweis. Wie im planaren Fall (vgl. [EG]). \square

Im Surfactant-Fall stand eine mathematische Entropieabschätzung, die $L^2(H^2(M))$ -Beschränktheit von ϱ liefert, nicht zur Verfügung. Dies ist der Grund, warum wir in Kapitel 4 auf eine Raumdimension beschränkt waren. Die Hinzunahme von abstoßenden Van-der-Waals Kräften ermöglicht in [BN] eine geeignete (mathematische) Entropieabschätzung für das gekoppelte System im zweidimensionalen, planaren Fall. Wir gehen davon aus, dass mit dieser Modifikation zusammen mit den Methoden aus Kapitel 3 auch im Fall einer evolvierenden Fläche ein vergleichbares Resultat für das gekoppelte System gezeigt werden kann. Weiterhin gehen wir davon aus, dass der Beweis in Kapitel 3 ebenfalls Lösungen für das Cahn-Hilliard Modell auf evolvierenden Flächen produzieren kann.

Bei der Modellierung eines dünnen Films in einer Lungenalveole befindet sich der Film auf einer elastischen Membran, die selbst einer Dynamik unterliegt und in Wechselwirkung mit der Flüssigkeit steht. Diese Wechselwirkung zwischen Flüssigkeit und Membran wurde in der Literatur behandelt,

etwa in der Arbeit von C. Surulescu (vgl. [Su1], [Su2]), in der es das Ziel war, vor allem die Strömung in Blutgefäßen zu modellieren. Es wurden lineare instationäre Modelle für die Elastizitätstheorie verwendet und Stokes und Navier-Stokes Modelle für die Flüssigkeit. Existenz und Eindeutigkeit wurden für die gekoppelten Systeme gezeigt.

Ebenfalls Flüssigkeits-Membran Wechselwirkungen wurden von M. Heil et al. numerisch untersucht. Hier wurden unter anderem Modelle der Fluid-Membran Wechselwirkung während der Atmung, vor allem in den Bronchien untersucht. Für die Flüssigkeit wurden meist Stokes-Modelle, aber auch Lubrikationsapproximation (vgl. [HW1], [HW2]) eingesetzt. Die Form der Membranen wurde durch ein quasistationäres Modell beschrieben.

In dieser Arbeit hatten wir vorausgesetzt, dass die Dynamik der Membran von externen Parametern bestimmt ist und die Kopplung mit der Flüssigkeit vernachlässigbar ist. Wir möchten in diesem Abschnitt einige Ansätze zeigen, wie die Wechselwirkung von Flüssigkeit und elastischer Membran zu modellieren ist und welche Probleme beim Übergang zur Lubrikationsapproximation auftreten. Um die Dynamik der Membran mit ins Spiel zu bringen, macht es Sinn ein Energiefunktional für die Membran zu definieren. Eine verbreitete Möglichkeit ist die Helfrich-Energie (siehe z.B. [ZH]), für die es wegen des Satzes von Gauß-Bonnet äquivalent ist, das Willmoresche Energiefunktional zu betrachten: $W(M_t) = \frac{1}{2}\lambda\|k\|_{L^2(M_t)}^2$, mit einer konstanten Biegesteifigkeit λ . Damit die Gesamtenergie während der Evolution abnimmt, muss eine geeignete Spannungsbedingung für das Flüssigkeits-Membran-Interface angegeben werden. Ein möglicher Vorschlag ist:

$$T\nu = \lambda\left(\frac{1}{2}k^3 - \Delta^M k - k|K|^2\right)n \text{ auf } M. \quad (5.0.1)$$

Wir bemerken, dass die rechte Seite in Gleichung (5.0.1) mit der rechten Seite der Gleichung des Willmore-Flusses übereinstimmt. Wenn wir die Impulserhaltung des Ausgangsmodells mit der Geschwindigkeit u multiplizieren, über M_t und $t \in [0, t_0]$ integrieren und dabei Proposition 6.12 für die Berechnung der Zeitableitung der mittleren Krümmung verwenden, erhalten wir folgende Energieidentität:

$$\frac{\rho}{2}\|u(t_0)\|_{L^2(\Omega_{t_0})}^2 + W(M_{t_0}) + \eta \int_0^{t_0} \|(Du(t))^S\|_{L^2(\Omega_t)}^2 dt = \frac{\rho}{2}\|u_0\|_{L^2(\Omega_0)}^2 + W(M_0).$$

Diese Energieidentität ist für ein vollständiges Modell noch durch Terme auf dem Gas-Interface Σ zu ergänzen. Beim Übergang zur Lubrikationsapproximation liefert jedoch Satz 2.20 konstanten Druck in Normalenrichtung zum Substrat. Somit ist es im Allgemeinen nicht zulässig, eine Spannungsbedingung für Oberflächenspannung am Flüssigkeits-Gas-Interface und eine weitere Spannungsbedingung wie Gleichung (5.0.1) am Flüssigkeits-Membran-Interface anzusetzen, da diese mitunter nicht kompatible Randwerte liefern. Ein Ad-hoc Ansatz mit einem affin-linearen Druck liefert eine Gleichung, die keine geeignete Energieabschätzung erfüllt. Mögliche Auswege wären ein drei-dimensionales Membranmodell mit eigenem Druck. Ein ähnliches Problem tritt auf bei der Modellierung von freien dünnen Filmen, d.h. mit freiem Interface zu beiden Seiten, weswegen man in [ODB] und [My] den symmetrischen Fall betrachtet, in dem dieses Problem nicht auftaucht.

6 Appendix

6.1 Explizite Berechnung des Drucks und der Geschwindigkeit

Wir liefern nun die Beweise für die Berechnung des Drucks und der Geschwindigkeit nach. Um die Notation zu vereinfachen, bezeichnen wir zu Funktionen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ die transformierte Version mit $\tilde{f} = f \circ \varphi_y$ und die skalierte und transformierte Version mit \hat{f} .

Satz 6.1. (Expliziter Druck) *Betrachte die Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) aus Abschnitt 2.1. Voraussetzung 2.2 sei für alle Zeiten erfüllt. Dann ist die Distributionslösung für den skalierten Druck $\hat{p} \in \mathcal{D}(\hat{D})$ der Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ konstant in Normalenrichtung zu \hat{M} und gegeben durch:*

$$\int_{\hat{M}} \hat{p} \zeta d\mu_{\hat{M}} = \mathcal{S}a \int_{\hat{M}} (-\zeta \hat{k} - \epsilon \hat{h} \zeta |\hat{K}|^2 + \epsilon \nabla^{\hat{M}} \zeta \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h}) d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

für Testfunktionen $\zeta \in C_0^1(\hat{M})$.

Wenn alles glatt ist, ist dies äquivalent zu $\hat{p} = -\mathcal{S}a(\hat{k} + \hat{h}|\hat{K}|^2 + \epsilon \Delta^{\hat{M}} \hat{h})$.

Beweis. Es ist Formulierung (2.1.5) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\rho \int_Q u \bullet \partial_t \zeta d\mu_Q + \rho \int_Q D\zeta : u \otimes u d\mu_Q}_{(1)} \\ &= - \underbrace{\int_Q p D\zeta : I dd\mu_Q}_{(2)} + 2\eta \underbrace{\int_Q D\zeta : (Du)^S d\mu_Q}_{(3)} - \underbrace{\int_Q \zeta \bullet f_Q d\mu_Q}_{(4)} - \underbrace{\int_{\Sigma} D\zeta : \Pi d\mu_{\Sigma}}_{(5)} + \underbrace{\int_M \zeta \bullet Cw^* d\mu_M}_{(6)} \end{aligned}$$

für alle $\zeta : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\zeta \bullet n = 0$ auf M und $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$. Um den Druck zu berechnen, setzen wir zu $\xi : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\xi = 0$ auf M und $\xi(0) = \xi(T) = 0$ als Testfunktion $\zeta = \xi n$ mit dem konstant auf Q fortgesetzten Normalenfeld $n = n \circ \varphi_y^{-1}$. Effekte am Rand des dünnen Filmes (z.B. eine Kontaktwinkelbedingung) möchten wir an dieser Stelle nicht berücksichtigen. Daher habe $\xi \circ \varphi_y$ kompakten Träger in M (d.h. es ist $\xi \circ \varphi_y = 0$ auf $\partial M_t, t \in [0, T]$). Berechnen wir zunächst das Differential dieser Testfunktion. Nach der Produktregel ist $D(\xi n) = n \otimes \nabla \xi + \xi Dn$ und mit Proposition 2.8 und 2.9 folgt dann:

$$D(\xi n) \circ \varphi_y = \partial_y(\xi \circ \varphi_y) n \otimes n + n \otimes R_y \nabla^M(\xi \circ \varphi_y) - \xi \circ \varphi_y K R_y. \quad (\star)$$

Wir behandeln die Terme separat und bezeichnen sie dazu mit (1) – (6). Nach Skalierung aller Terme werden wir in der Gesamtgleichung einen gemeinsamen Skalierungsfaktor $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon^2}$ kürzen. Die resultierenden Terme bezeichnen wir mit ($\hat{1}$) bis ($\hat{6}$).

1. Der Trägheitsterm lautet wegen $u = v + w$ zusammen mit Proposition 2.10:

$$\rho \int_Q u \bullet \partial_t(\xi n) + D(\xi n) : u \otimes u d\mu_Q = \rho \int_M \int_0^h \left[u \bullet \frac{D^M}{Dt}(\xi n) + u \bullet (D(\xi n)w) \right] \circ \varphi_y \chi_y dy d\mu_M.$$

Nach Proposition 2.7 ist: $\frac{D^M}{Dt}(\xi n) \circ \varphi_y = (\frac{D^M}{Dt} \xi) \circ \varphi_y n - (\nabla^M v_n + K v^*) \xi \circ \varphi_y$. Ferner nach Proposition 2.8: $(\frac{D^M}{Dt} \xi) \circ \varphi_y = \partial_t^M(\xi \circ \varphi_y) + (v^* + y \nabla^M v_n) \bullet R_y \nabla^M(\xi \circ \varphi_y)$. Somit folgt:

$$\begin{aligned} \left[u \bullet \frac{D^M}{Dt}(\xi n) + u \bullet (D(\xi n)w) \right] \circ \varphi_y &= \tilde{u} \bullet n \partial_t^M \tilde{\xi} + (v^* + y \nabla^M v_n) \bullet R_y \nabla^M \tilde{\xi} - \tilde{u} \bullet (\nabla^M v_n + K v^*) \tilde{\xi} \\ &\quad + \tilde{u} \bullet (\partial_y \tilde{\xi} \tilde{w}_n + n(R_y \nabla^M \tilde{\xi}) \bullet \tilde{w}^* - \tilde{\xi} K R_y \tilde{w}^*). \end{aligned}$$

Wenn wir gemäß Abschnitt 2.15 skalieren, ergibt sich für (1) ein Vorfaktor $\rho L^{N-1} W H$. Nachdem wir den gemeinsamen Vorfaktor $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon^2}$ kürzen verbleibt der Faktor $\mathcal{R}e \epsilon^3$. Wir sehen also bereits, dass keine weiteren Terme höherer Ordnung entstehen. Der skalierte Trägheitsterm ($\hat{1}$) ist also in der Lubrikationsapproximation zu vernachlässigen.

2. Für den Druckterm verwenden wir ebenfalls Proposition 2.10:

$$- \int_Q D(\xi n) : p I d d \mu_Q = - \int_M \int_0^h [Tr(D(\xi n))p] \circ \varphi_y \chi_y d y d \mu_M.$$

Dann ergibt sich mit (\star) für den Integranden:

$$[Tr(D(\xi n))p] \circ \varphi_y \chi_y = (\partial_y \tilde{\xi} - \tilde{\xi} Tr(K R_y)) \tilde{p} \chi_y.$$

Jetzt können wir gemäß Abschnitt 2.15 skalieren. Es ergibt sich für (2) zu höchster Ordnung ein Faktor $L^{N-1} \frac{L^2 \eta}{H^2}$. Wenn wir den gemeinsamen Vorfaktor $\frac{L^{N-1} \eta}{\epsilon^2}$ kürzen verbleibt als Faktor

1. Wegen $Tr(\hat{K} R_{\hat{y}}) = \hat{k} + \mathcal{O}(\epsilon)$ folgt für den skalierten Druckterm $(\hat{2})$:

$$(\hat{2}) = - \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} (\partial_{\hat{y}} \tilde{\xi} - \epsilon \tilde{\xi} Tr(\hat{K} R_{\hat{y}})) \hat{p} \chi_{\hat{y}} d \hat{y} d \mu_{\hat{M}} = - \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \partial_{\hat{y}} (\tilde{\xi} (1 - \epsilon \hat{y} \hat{k})) \hat{p} d \hat{y} d \mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

3. Für den viskosen Spannungsterm benutzen wir Proposition 2.9 um den symmetrischen Anteil von Du zu berechnen. Dabei bezeichnet $\tilde{u}^* = P^M(u \circ \varphi_y)$ den tangentialen Anteil der transformierten Geschwindigkeit und $\tilde{u}_n = n \bullet (u \circ \varphi_y)$ die Normalkomponente.

$$\begin{aligned} 2 [(Du)^S] \circ \varphi_y &= [Du + (Du)^T] \circ \varphi_y \\ &= P^M D^M \tilde{u}^* R_y + \partial_y \tilde{u}^* \otimes n + n \otimes (K R_y \tilde{u}^*) + n \otimes R_y \nabla^M \tilde{u}_n + 2 \partial_y \tilde{u}_n n \otimes n \\ &\quad - 2 \tilde{u}_n K R_y + (P^M D^M \tilde{u}^* R_y)^T + n \otimes \partial_y \tilde{u}^* + (K R_y \tilde{u}^*) \otimes n + R_y \nabla^M \tilde{u}_n \otimes n. \end{aligned}$$

Mit (\star) folgt dann:

$$\begin{aligned} [D(\xi n) : (Du)^S] \circ \varphi_y &= \left(\partial_y \tilde{\xi} n \otimes n + n \otimes R_y \nabla^M \tilde{\xi} - \tilde{\xi} K R_y \right) : \\ &\quad \left(P^M D^M \tilde{u}^* R_y + \partial_y \tilde{u}^* \otimes n + n \otimes (K R_y \tilde{u}^*) + n \otimes R_y \nabla^M \tilde{u}_n + \partial_y \tilde{u}_n n \otimes n \right. \\ &\quad \left. - 2 \tilde{u}_n K R_y + (P^M D^M \tilde{u}^* R_y)^T + n \otimes \partial_y \tilde{u}^* + (K R_y \tilde{u}^*) \otimes n + R_y \nabla^M \tilde{u}_n \otimes n \right). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren der Skalarprodukte und Verwenden der jeweiligen Orthogonalitäten ergibt dann:

$$\begin{aligned} [D(\xi n) : (Du)^S] \circ \varphi_y &= \partial_y \tilde{\xi} \partial_y \tilde{u}_n + R_y \nabla^M \tilde{\xi} \bullet (K R_y \tilde{u}^* + R_y \nabla^M \tilde{u}_n + \partial_y \tilde{u}^*) \\ &\quad - \tilde{\xi} K R_y : (P^M D^M \tilde{u}^* R_y - 2 \tilde{u}_n K R_y + (P^M D^M \tilde{u}^* R_y)^T). \end{aligned}$$

Jetzt können wir gemäß Abschnitt 2.15 skalieren. Wegen $\partial_y \tilde{u}_n = \partial_y \tilde{u}_n$ ergibt sich für (3) als Skalierungsfaktor höchster Ordnung $L^{N-1} \eta$. Wenn wir den gemeinsamen Vorfaktor $\frac{L^{N-1} \eta}{\epsilon^2}$ kürzen verbleibt als Faktor ϵ^2 . Der viskose Spannungsterm ist also für die Berechnung des Druckes zu vernachlässigen.

4. Der Kraftterm im Bulk besitzt das selbe Skalierungsverhalten wie die Trägheitsterme und skaliert somit zur Ordnung $\epsilon^3 \mathcal{R}e$. Daher ist dieser Term zu vernachlässigen.
5. Für den Oberflächenspannungsterm schreiben wir wieder ausführlich $n \circ \varphi_h^{-1}$ für das verschobene Normalenfeld definiert auf Σ . Wir überlegen uns zunächst:

$$\begin{aligned} - \int_{\Sigma} D(\xi n \circ \varphi_h^{-1}) : \Pi d \mu_{\Sigma} &= \int_{\Sigma} \sigma \operatorname{div}^{\Sigma} (\xi n \circ \varphi_h^{-1}) d \mu_{\Sigma} \\ &= \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma} (\sigma \xi n \circ \varphi_h^{-1}) d \mu_{\Sigma} - \int_{\Sigma} \nabla^{\Sigma} \sigma \bullet \xi n \circ \varphi_h^{-1} d \mu_{\Sigma} \\ &= -(\vec{\kappa} \circ \varphi_h) [\tilde{\sigma} \tilde{\xi} n \chi_h] - \int_{\Sigma} \nabla^{\Sigma} \sigma \bullet \xi n \circ \varphi_h^{-1} d \mu_{\Sigma} = (4a) + (4b), \end{aligned}$$

wobei wir Definition 2.18 verwendet haben. Nach Skalierung aus Abschnitt 2.15 erhalten wir an dieser Stelle für den Term höchster Ordnung einen Faktor $L^{N-1} \frac{S \mathcal{S} a}{W \epsilon^2}$. Dann erhält dieser Ausdruck nach Kürzen des gemeinsamen Vorfaktors $\frac{L^{N-1} \eta}{\epsilon^2}$ wegen $S = \eta W$ einen Faktor $\mathcal{S} a$. Anwenden der skalierten Version von Satz 2.19 liefert dann für das skalierte (4a):

$$\begin{aligned} (4a) &= -\mathcal{S} a \int_{\hat{M}} (\hat{k} + \epsilon \hat{h} |\hat{K}|^2 - \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \bullet \nabla^{\hat{M}}) (\tilde{\xi} \chi_{\hat{h}} (\frac{\epsilon^2}{\mathcal{S} a} \hat{\sigma} + 1)) d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= -\mathcal{S} a \int_{\hat{M}} (\hat{k} + \epsilon \hat{h} |\hat{K}|^2 - \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \bullet \nabla^{\hat{M}}) (\tilde{\xi} \chi_{\hat{h}}) d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2). \end{aligned}$$

Dabei ist der Operator $\nabla^{\hat{M}}$ so zu verstehen, dass er auf den Term in der Klammer angewendet wird. Mit Proposition 2.11 und 2.14 wird Term (4b) nach Skalierung gemäß Abschnitt 2.15 zu:

$$(\hat{4}b) = -\mathcal{S} a \int_{\hat{M}} \nabla^{\hat{M}} (\hat{\sigma} \frac{\epsilon^2}{\mathcal{S} a} + 1) \bullet \epsilon \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \tilde{\xi} d\mu_{\hat{M}} = \mathcal{O}(\epsilon^3).$$

Damit ist also der Oberflächenspannungsterm (4) nach Reskalierung:

$$(\hat{4}) = \mathcal{S} a \int_{\hat{M}} \epsilon \nabla^{\hat{M}} (\tilde{\xi} \chi_{\hat{h}}) \nabla^{\hat{M}} \hat{h} - \hat{k} \tilde{\xi} \chi_{\hat{h}} - \epsilon \hat{h} |\hat{K}|^2 \tilde{\xi} \chi_{\hat{h}} \mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

6. Der Reibungsterm besitzt nur tangentielle Komponenten, verschwindet also:

$$\int_M \xi n \bullet C w^* d\mu_M = 0.$$

Im folgenden schreiben wir wieder $p \circ \varphi_{\hat{y}}$, $\xi \circ \varphi_{\hat{y}}$ und $\xi \circ \varphi_{\hat{h}}$ aus, um unterscheiden zu können ob die Ausdrücke ursprünglich im Bulk oder auf dem Interface definiert waren. Wenn wir Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ weglassen, folgt dann:

$$\begin{aligned} & - \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{p} \circ \varphi_{\hat{y}} \partial_{\hat{y}} (\xi \circ \varphi_{\hat{y}} (1 - \epsilon \hat{y} \hat{k})) d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} - \\ & \mathcal{S} a \int_{\hat{M}} \xi \circ \varphi_{\hat{h}} (1 - \epsilon \hat{h} \hat{k}) \hat{k} + \xi \circ \varphi_{\hat{h}} (1 - \epsilon \hat{h} \hat{k}) \epsilon \hat{h}^2 |\hat{K}|^2 - \epsilon \nabla^{\hat{M}} (\xi \circ \varphi_{\hat{h}} (1 - \epsilon \hat{h} \hat{k})) \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h} d\mu_{\hat{M}} = 0. \end{aligned}$$

Nun definieren wir zu einer beliebigen Testfunktion $\zeta : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben die bisherige Testfunktion ξ durch $\zeta \circ \varphi_{\hat{y}} = \xi \circ \varphi_{\hat{y}} (1 - \epsilon \hat{y} \hat{k})$. Damit ergibt sich dann:

$$\int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{p} \circ \varphi_{\hat{y}} \partial_{\hat{y}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{y}}) d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{S} a \int_{\hat{M}} \zeta \circ \varphi_{\hat{h}} \hat{k} + \zeta \circ \varphi_{\hat{h}} \epsilon \hat{h}^2 |\hat{K}|^2 - \epsilon \nabla^{\hat{M}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{h}}) \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h} d\mu_{\hat{M}} = 0.$$

Wenn wir dann eine Testfunktion mit $\zeta = 0$ auf Σ wählen:

$$\int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} -\hat{p} \circ \varphi_{\hat{y}} \partial_{\hat{y}} (\zeta \circ \varphi_{\hat{y}}) d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} = 0.$$

Nach der Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der Variationsrechnung ist $\hat{p} \circ \varphi_{\hat{y}}$ konstant fast überall in \hat{y} . Wieder mit einer allgemeinen Testfunktion $\zeta \neq 0$ auf Σ können wir dann partiell integrieren. Der Bulk-Term verschwindet dann:

$$\int_{\hat{M}} -\hat{p} \circ \varphi_{\hat{h}} \zeta - \mathcal{S} a \left[\zeta \hat{k} + \zeta \epsilon \hat{h} |\hat{K}|^2 - \epsilon \nabla^{\hat{M}} \zeta \bullet \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \right] d\mu_{\hat{M}} = 0.$$

□

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, müssen wir eine schwache gewöhnliche Differentialgleichung integrieren. Dazu verwenden wir das folgende Resultat, das eine einfache Konsequenz aus einer partiellen Integration ist.

Lemma 6.2. (Adjungierte Integration) Sei $h \in \mathbb{R}$ und $\xi \in L^1([0, h])$. Dann gilt:

$$\int_0^h \int_0^y \xi(s) ds dy = \int_0^h (h-y)\xi(y) dy.$$

Beweis. Nach partieller Integration ist:

$$\int_0^h \int_0^y \xi(s) ds dy = - \int_0^h y\xi(y) ds dy + \left[y \int_0^y \xi(s) ds \right]_0^h = \int_0^h (h-y)\xi(y) dy.$$

□

Satz 6.3. (Explizite Geschwindigkeit) Betrachte die Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) aus Abschnitt 2.1. Die Voraussetzung 2.2 sei für alle Zeiten erfüllt. Weiterhin sei die Slipmatrix C positiv definit. Dann besitzt die Distributionslösung für die tangentielle Geschwindigkeit der Flüssigkeit $\hat{u}^* \in \mathcal{D}(\hat{D})$ der Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{H}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$ ein quadratisches Profil und ist gegeben durch $\hat{u}^* \circ \varphi_y = \hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_y$ mit:

$$\int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} \bullet \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} = \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \left(\hat{h}\hat{y} - \frac{1}{2}\hat{y}^2 + \hat{h}(\hat{C}^{-1})^T \right) \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon)$$

für Testfunktionen $\xi \in C^2(Q; \mathbb{R}^N)$ mit $n \bullet \xi \circ \varphi_{\hat{y}} = 0$ und kompaktem Träger von $\xi \circ \varphi_{\hat{y}}$ in \hat{M} . Dabei ist \mathcal{P} der Druck als Distribution aus Satz 2.20.

Wenn alles glatt ist, ist diese Behauptung äquivalent zu $\hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} = (\frac{1}{2}\hat{y}^2 - \hat{h}\hat{y} - \hat{h}\hat{C}^{-1})\nabla^M p + \mathcal{O}(\epsilon)$.

Beweis. Es ist Formulierung (2.1.5) äquivalent zu:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\rho \int_Q u \bullet \partial_t \zeta d\mu_Q + \rho \int_Q D\zeta : u \otimes u d\mu_Q}_{(1)} \\ &= \underbrace{- \int_Q p D\zeta : \operatorname{Id} d\mu_Q}_{(2)} + \underbrace{2\eta \int_Q D\zeta : (Du)^S d\mu_Q}_{(3)} - \underbrace{\int_Q \zeta \bullet f_Q d\mu_Q}_{(4)} - \underbrace{\int_{\Sigma} D\zeta : \Pi d\mu_{\Sigma}}_{(5)} + \underbrace{\int_M \zeta \bullet Cw^* d\mu_M}_{(6)} \end{aligned}$$

für alle $\zeta : \bar{Q} \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\zeta \bullet n = 0$ auf M und $\zeta(0) = \zeta(T) = 0$. Um die Geschwindigkeit zu berechnen wählen wir als Testfunktion $\zeta^* : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\zeta^* \circ \varphi_y \bullet n = 0$ und $\zeta^*(0) = \zeta^*(T) = 0$. Effekte am Rand des dünnen Filmes (z.B. eine Kontaktwinkelbedingung) möchten wir an dieser Stelle nicht berücksichtigen. Daher habe $\zeta^* \circ \varphi_y$ kompakten Träger in M (d.h. es ist $\xi \circ \varphi_y = 0$ auf $\partial M_t, [0, T]$). Wir behandeln die Terme separat und bezeichnen sie dazu mit (1)–(6). Nach Skalierung aller Terme werden wir in der Gesamtgleichung einen gemeinsamen Skalierungsfaktor $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon}$ kürzen. Die resultierenden Terme bezeichnen wir mit (1̂) bis (5̂). Für beliebige Funktionen $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir wieder der Einfachheit halber die transformierte Funktion mit einer Tilde $\tilde{f} = f \circ \varphi_y$ und mit einem Hütchen \hat{f} die skalierten und transformierten Größen.

1. Wir beginnen mit dem Trägheitsterm. Es ist mit Proposition 2.10, 2.8 und 2.9:

$$\begin{aligned} & \rho \int_Q u \bullet \partial_t \zeta^* d\mu_Q + \rho \int_Q D\zeta^* : u \otimes u d\mu_Q \\ &= \rho \int_M \int_0^h u \bullet [\partial_t^M \zeta^* + D^M \zeta^* u^* + w_n \partial_n \zeta^*] \circ \varphi_y \chi_y dy d\mu_M \\ &= \rho \int_M \int_0^h \left[\tilde{u} \bullet (\partial_t^M \tilde{\zeta}^* + y(P^M D^M \tilde{\zeta}^*) \nabla^M v_n) + P^M D^M \zeta^* R_y : \tilde{u}^* \otimes \tilde{u}^* + \tilde{w}_n \partial_y \tilde{\zeta}^* \right] \chi_y dy d\mu_M. \end{aligned}$$

Die Terme höchster Ordnung skalieren dann mit $\rho L^{N-1} HW$. Nach kürzen des gemeinsamen Vorfaktors $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon}$ ist Term (1) von der Ordnung $\mathcal{R}e\epsilon^2$ und daher in der Lubrikationsapproximation zu vernachlässigen.

2. Für den Druckterm verwenden wir ebenfalls Propositionen 2.10 und 2.9:

$$\begin{aligned} - \int_Q p D\zeta^* : Idd\mu &= - \int_M \int_0^h \tilde{p} \left[P^M D^M \tilde{\zeta}^* R_y + \partial_y \tilde{\zeta}^* \otimes n \right] : Id\chi_y dy d\hat{\mu}_M \\ &= - \int_M \int_0^h \tilde{p} Tr(P^M D^M \tilde{\zeta}^* R_y) \chi_y dy d\mu_M. \end{aligned}$$

Die Terme höchster Ordnung skalieren dann mit $L^{N-1} \frac{L\eta}{H}$. Nach kürzen des gemeinsamen Vorfaktors $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon}$ verbleibt ein Vorfaktor von 1. Damit ist (2) skaliert:

$$(\hat{2}) = - \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{p} Tr(\hat{P}^M D^M \tilde{\zeta}^* R_{\hat{y}}) \chi_{\hat{y}} d\hat{y} d\hat{\mu}_{\hat{M}}.$$

3. Für den viskosen Spannungsterm verwenden wir Proposition 2.10:

$$2\eta \int_Q D\zeta : (Du)^S d\mu_Q = 2\eta \int_M \int_0^h [D\zeta^* : (Du)^S] \circ \varphi_y \chi_y dy d\mu_M.$$

Um den Integranden zu berechnen benutzen wir Proposition 2.9 für den symmetrischen Anteil von Du . Dabei bezeichnet $\tilde{u}^* = P^M(u \circ \varphi_y)$ den tangentialen Anteil der transformierten Geschwindigkeit und $\tilde{u}_n = n \bullet (u \circ \varphi_y)$ die Normalkomponente.

$$\begin{aligned} 2 [(Du)^S] \circ \varphi_y &= [Du + (Du)^T] \circ \varphi_y \\ &= P^M D^M \tilde{u}^* R_y + \partial_y \tilde{u}^* \otimes n + n \otimes (KR_y \tilde{u}^*) + n \otimes R_y \nabla^M \tilde{u}_n + 2\partial_y \tilde{u}_n n \otimes n \\ &\quad - 2\tilde{u}_n KR_y + R_y (P^M D^M \tilde{u}^*)^T + n \otimes \partial_y \tilde{u}^* + (KR_y \tilde{u}^*) \otimes n + R_y \nabla^M \tilde{u}_n \otimes n. \end{aligned}$$

Damit folgt wieder mit Proposition 2.9 angewendet auf die Testfunktion:

$$\begin{aligned} 2(D\zeta^* : (Du)^S) \circ \varphi_y &= \left(P^M D^M \tilde{\zeta}^* R_y + n \otimes (KR_y \tilde{\zeta}^*) + \partial_y \tilde{\zeta}^* \otimes n \right) \\ &\quad : \left(P^M D^M \tilde{u}^* R_y + \partial_y \tilde{u}^* \otimes n + n \otimes (KR_y \tilde{u}^*) + n \otimes R_y \nabla^M \tilde{u}_n + 2\partial_y \tilde{u}_n n \otimes n \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{u}_n KR_y + R_y (P^M D^M \tilde{u}^*)^T + n \otimes \partial_y \tilde{u}^* + (KR_y \tilde{u}^*) \otimes n + R_y \nabla^M \tilde{u}_n \otimes n \right). \end{aligned}$$

Ausmultiplizieren ergibt zusammen mit der Tatsache, dass $\partial_y \tilde{u} = \partial_y \tilde{w}$:

$$\begin{aligned} 2[D\zeta^* : (Du)^S] \circ \varphi_y &= (P^M D^M \tilde{\zeta}^* R_y) : (P^M D^M \tilde{u}^* R_y - 2\tilde{u}_n KR_y + R_y (P^M D^M \tilde{u}^*)^T) \\ &\quad + (KR_y \tilde{\zeta}^* + \partial_y \tilde{\zeta}^*) \bullet (KR_y \tilde{u}^* + R_y \nabla^M \tilde{u}_n + \partial_y \tilde{w}^*). \end{aligned}$$

Die Terme höchster Ordnung skalieren mit einem Faktor von $\frac{\eta L^N}{H}$. Nach kürzen des gemeinsamen Vorfaktors $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon}$ verbleibt ein Vorfaktor von 1. Damit ist (3) skaliert:

$$(\hat{3}) = \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \partial_{\hat{y}} \tilde{\zeta}^* \bullet (\partial_{\hat{y}} \hat{w} \chi_{\hat{y}} + \epsilon \nabla^{\hat{M}} \hat{v}_n + \epsilon \hat{K} \hat{u}^*) + \epsilon \hat{K} \tilde{\zeta}^* \bullet \partial_{\hat{y}} \hat{w} d\hat{y} d\hat{\mu}_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

4. Der Kraftterm im Bulk besitzt das selbe Skalierungsverhalten wie die Trägheitsterme und skaliert somit zur Ordnung $\epsilon^2 \mathcal{R}e$. Daher ist dieser Term zu vernachlässigen.

5. Nun zum Oberflächenspannungsterm. Es ist:

$$- \int_{\Sigma} D\zeta^* : \Pi d\mu_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \sigma \operatorname{div}^{\Sigma}(\zeta^*) d\mu_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma}(\sigma \zeta^*) d\mu_{\Sigma} - \int_{\Sigma} \nabla^{\Sigma} \sigma \bullet \zeta^* d\mu_{\Sigma} = (\star) + (\dagger).$$

Behandle beide Terme getrennt. Für (\star) verwenden wir die Formulierung aus Definition 2.18:

$$(\star) = \int_{\Sigma} \operatorname{div}^{\Sigma}(\sigma \zeta^*) d\mu_{\Sigma} = - \vec{\kappa} \circ \varphi_h \left(\tilde{\sigma} \tilde{\zeta}^* \chi_h \right).$$

Nach Skalierung aus Abschnitt 2.15 erhalten wir an dieser Stelle für den Term höchster Ordnung einen Faktor $L^{N-1} \frac{SSa}{W\epsilon^2}$. Dann erhält dieser Ausdruck nach Kürzen des gemeinsamen Vorfaktors $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon}$ aufgrund von $S = \eta W$ einen Faktor von $\frac{Sa}{\epsilon}$. Anwenden der skalierten Version von Satz 2.19 liefert dann:

$$(\hat{\star}) = -\frac{Sa}{\epsilon} \int_{\hat{M}} (\hat{k} + \epsilon \hat{h} |\hat{K}|^2 + \mathcal{O}(\epsilon^2) - \epsilon \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \bullet \nabla^{\hat{M}}) \left(\left(\frac{\epsilon^2}{Sa} \hat{\sigma} + 1 \right) \tilde{\zeta}^* \bullet (n - \epsilon R_{\hat{h}} \nabla^{\hat{M}} \hat{h}) \chi_{\hat{h}} \right) d\mu_{\hat{M}}.$$

Dabei ist der Operator $\nabla^{\hat{M}}$ so zu verstehen, dass er auf den Term in der Klammer angewendet wird. Es ist $\tilde{\zeta}^* \bullet n = 0$, daher fällt der Normalenanteil weg und wir können ein ϵ kürzen:

$$(\hat{\star}) = Sa \int_M (\hat{k} + \epsilon \hat{h} |\hat{K}|^2 - \epsilon \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \bullet \nabla^{\hat{M}}) (\tilde{\zeta}^* \bullet R_{\hat{h}} \nabla^{\hat{M}} \hat{h} \chi_{\hat{h}}) d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Für (\dagger) folgt mit Proposition 2.11:

$$(\dagger) = - \int_{\Sigma} \nabla^{\Sigma} \sigma \bullet \zeta^* d\mu_{\Sigma} = - \int_M (\nabla^{\Sigma} \sigma) \circ \varphi_h \bullet \zeta^* \circ \varphi_h \chi_h d\mu_M.$$

Da σ nur unter dem Gradienten vorkommt, liefert die Skalierung aus Abschnitt 2.15 als Vorfaktor für den Term höchster Ordnung $L^{N-1} \frac{S}{W}$. Dann erhält dieser Ausdruck nach Kürzen des gemeinsamen Vorfaktors $\frac{L^{N-1}\eta}{\epsilon}$ wegen $S = \eta W$ einen Faktor von ϵ . Proposition 2.14 ergibt dann:

$$(\hat{\dagger}) = -\epsilon \int_{\hat{M}} \nabla^{\hat{M}} (\hat{\sigma} \circ \varphi_{\hat{h}}) \bullet \zeta^* \circ \varphi_{\hat{h}} d\mu_{\hat{M}} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

6. Der Slip-Term ist schon auf M definiert. Wir brauchen also nicht zu transformieren. Skalieren wie Abschnitt 2.15 liefert dann einen Vorfaktor von $L^{N-1} \frac{\eta}{\epsilon}$, der beim Kürzen des gemeinsamen Faktors verschwindet.

Damit sind alle Terme entdimensionalisiert und wir können für den Rest des Beweises auf die Kennzeichnung mit einem Hütchen verzichten. Unter Vernachlässigung aller Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ergibt sich dann insgesamt, wenn wir mit dem distributionellen Druck \mathcal{P} aus Satz 2.20 formulieren:

$$\begin{aligned} & \int_M \int_0^h \partial_y \zeta^* \bullet [\partial_y w^* (1 - \epsilon y k) + \epsilon \nabla^M v_n + \epsilon K (w^* + v^*)] dy d\mu_M \\ & + \int_M \int_0^h \epsilon K \zeta^* \bullet \partial_y w^* dy d\mu_M - \mathcal{P} \left(\int_0^h \text{Tr}(P^M D^M \zeta^* R_y) (1 - \epsilon y k) dy \right) - \mathcal{P} \left(\zeta^*|_h \bullet R_h \nabla^M h (1 - \epsilon h k) \right) \\ & - \int_M \epsilon \zeta^*|_h \bullet \nabla^M \sigma d\mu_M + \int_M \zeta^*|_0 \bullet C w^*|_0 d\mu_M = 0. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Dabei schreiben wir abkürzenderweise ζ statt $\zeta \circ \varphi_y$ bzw. $\zeta|_h$ statt $\zeta \circ \varphi_h$ und w für $w \circ \varphi_y$. Es bezeichnet $w^*|_0$ die tangentielle Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit zum Substrat. Wir setzen in Gleichung (6.1.1) zunächst $\epsilon = 0$ und berechnen dann im nächsten Schritt die Terme höherer Ordnung.

$$\int_M \int_0^h \partial_y \zeta^* \bullet \partial_y w^* dy d\mu_M - \mathcal{P} \left(\int_0^h \text{div}^M (\zeta^*) dy \right) - \mathcal{P} (\zeta^* \bullet \nabla^M h) + \int_M \zeta^*|_0 \bullet C w^*|_0 d\mu_M = 0.$$

Wir integrieren nun derart partiell, dass alle Ableitungsoperationen auf die Testfunktion fallen:

$$\int_M \int_0^h -\partial_{yy} \zeta^* \bullet w^* dy d\mu_M - \mathcal{P} \left(\text{div}^M \left(\int_0^h \zeta^* dy \right) \right) + \int_M \left[\partial_y \zeta \bullet w^*|_0^h + \zeta^*|_0 \bullet C w^*|_0 \right] d\mu_M = 0. \quad (\star)$$

Integriere diese gewöhnliche Differentialgleichung schwach, dazu setze zu $\xi : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ wie oben als Testfunktion:

$$\zeta^* = \int_0^y \int_z^h \xi \circ \varphi_s ds dz.$$

Dann folgt, wenn wir φ nicht mehr ausschreiben:

$$\int_M \int_0^h \xi \bullet w^* dy d\mu_M - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h \int_0^y \int_z^h \xi ds dz dy \right) - \int_M \int_0^h \xi \bullet w^*|_0 ds d\mu_M = 0.$$

Mit Lemma 6.2 ergibt sich dann:

$$\int_M \int_0^h \xi \bullet (w^* - w^*|_0) dy d\mu_M - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h (hy - \frac{1}{2}y^2) \xi \right) = 0.$$

Um w_0^* zu berechnen setzen wir in (\star) als Testfunktion $\zeta \circ \varphi_y = (C^{-1})^T \xi$, wobei ξ nicht von y abhängt. Wir bemerken, das aus dem Entropieprinzip folgt, dass die Reibungsmatrix C positiv definit ist, und daher invertierbar (siehe [Al3]). Damit folgt sofort:

$$\int_M w^*|_0 \xi d\mu_M = \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M ((C^{-1})^T h \xi) \right).$$

□

Um die Geschwindigkeit zu höherer Ordnung zu berechnen, verwenden wir folgende Formel, die auf der Vertauschbarkeit von Ableitungen der Parametrisierung und der parametrisierten Normale beruht. Die Aussage ist zeitunabhängig formuliert und wird später zu jedem Zeitpunkt verwendet. Es ist daher nicht notwendig für alle Zeiten eine Parametrisierung zu haben, in der die Fundamentalformen diagonalisieren.

Lemma 6.4. *Sei M eine 2-dimensionale, orientierte C^3 -Fläche mit mittlerer Krümmung k und Weingarten-Abbildung K . Sei P^M die orthogonale Projektion auf den Tangentialraum $T_x M$. Für tangentielle Vektorfelder $F \in C^1(M; TM)$ gilt dann:*

$$\operatorname{div}^M ((kId - K)F) = (kId - K) : P^M D^M F.$$

Beweis. Wähle eine Kartenabbildung $\Psi : D \rightarrow M$ derart, dass erste und zweite Fundamentalform diagonalisieren (siehe [Kr]), d.h. $I = \operatorname{diag}(a_1, a_2)$ und $II = \operatorname{diag}(b_1, b_2)$. Die Formel ist eine lokale Aussage, daher reicht es, sie kartenweise zu zeigen. Dann lassen sich orthogonale Basisvektoren des Tangentialraums darstellen durch $e_i = \frac{1}{a_i} \partial_{x_i} \Psi$ und $\partial_{x_i} n = -k_i a_i e_i$, wobei k_i die Hauptkrümmungen sind. Wir können die Normale n zweimal ableiten und erhalten:

$$-\partial_{x_1} (k_2 a_2 e_2) = \partial_{x_2} \partial_{x_1} n = -\partial_{x_2} (k_1 a_1 e_1).$$

Multiplizieren dieser Gleichung mit e_1 ergibt wegen $(\partial_{x_2} e_1) \bullet e_1 = 0$ dann $\partial_{x_1} (k_2 a_2 e_2) \bullet e_1 = \partial_{x_2} (k_1 a_1)$. Weiterhin wenn wir Ψ zweimal ableiten: $\partial_{x_1} (a_2 e_2) = \partial_{x_2} \partial_{x_1} \Psi = \partial_{x_2} (a_1 e_1)$. Also folgt wie oben und mit $0 = \partial_{x_1} (e_1 \bullet e_2) = \partial_{x_1} (e_1) \bullet e_2 + \partial_{x_1} (e_2) \bullet e_1$ das Folgende:

$$\partial_{x_2} (k_1 a_1) = \partial_{x_1} (k_2 a_2 e_2) \bullet e_1 = \partial_{x_1} (k_2 a_2) e_2 \bullet e_1 + k_2 a_2 \partial_{x_1} (e_2) \bullet e_1 = -k_2 a_2 \partial_{x_1} (e_1) \bullet e_2.$$

Analog gilt $\partial_{x_1} (k_2 a_2) = -k_1 a_1 \partial_{x_2} (e_2) \bullet e_1$. Die Divergenz hat in diesen Koordinaten die Darstellung:

$$\operatorname{div}^M (F) = \frac{1}{a_1 a_2} [\partial_{x_1} (a_2 e_1 \bullet F) + \partial_{x_2} (a_1 e_2 \bullet F)].$$

Also können wir rechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M ((kId - K)F) &= \frac{1}{a_1 a_2} [\partial_{x_1} (a_2 k_2 e_1 \bullet F) + \partial_{x_2} (a_1 k_1 e_2 \bullet F)] \\ &= \frac{1}{a_1 a_2} [\partial_{x_1} (a_2 k_2) e_1 \bullet F + \partial_{x_2} (a_1 k_1) e_2 \bullet F] + \frac{1}{a_1 a_2} [a_2 k_2 \partial_{x_1} (e_1) \bullet F + a_1 k_1 \partial_{x_2} (e_2) \bullet F] \\ &\quad + \frac{1}{a_1 a_2} [a_2 k_2 e_1 \bullet \partial_{x_1} F + a_1 k_1 e_2 \bullet \partial_{x_2} F] \\ &= \frac{1}{a_1 a_2} [-k_1 a_1 \partial_{x_2} (e_2) \bullet e_1 e_1 \bullet F - k_2 a_2 \partial_{x_1} (e_1) \bullet e_2 e_2 \bullet F] \\ &\quad + \frac{1}{a_1 a_2} [a_2 k_2 \partial_{x_1} (e_1) \bullet e_2 e_2 \bullet F + a_1 k_1 \partial_{x_2} (e_2) \bullet e_1 e_1 \bullet F] \\ &\quad + \frac{1}{a_1 a_2} [a_2 k_2 e_1 \bullet \partial_{x_1} F + a_1 k_1 e_2 \bullet \partial_{x_2} F] \\ &= (kId - K) : P^M D^M F. \end{aligned}$$

□

Für die Geschwindigkeit zu höherer Ordnung benötigen wir eine Verallgemeinerung von Lemma 6.2.

Lemma 6.5. (Adjungierte Integration) Sei $h \in \mathbb{R}$ und $\xi, q \in L^1[0, h]$. Dann gilt:

$$\int_0^h q(y) \int_0^y \xi(s) ds dy = \int_0^h \xi(y) \int_y^h q(s) ds dy.$$

Beweis. Wie für Lemma 6.2. □

Satz 6.6. (Explizite Geschwindigkeit zu höherer Ordnung) Betrachte die Formulierung der Impulserhaltung (2.1.5) aus Abschnitt 2.1. Voraussetzung 2.2 sei für alle Zeiten erfüllt. Weiterhin sei die Slipmatrix C positiv definit. Dann besitzt die Distributionslösung für die tangentielle Geschwindigkeit der Flüssigkeit $\hat{u}^* \in \mathcal{D}(\hat{D})$ der Lubrikationsapproximation zum Skalenparameter $\epsilon = \frac{h}{L}$ wie in Abschnitt 2.15 beschrieben, bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ ein kubisches Profil und ist gegeben durch $\hat{u}^* \circ \varphi_y = \hat{v}^* + \hat{w}^* \circ \varphi_y$ mit:

$$\begin{aligned} \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \hat{w}^* \circ \varphi_{\hat{y}} \bullet \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} d\mu_{\hat{M}} &= \epsilon \int_{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} \xi \circ \varphi_{\hat{y}} \bullet ((y \text{Id} + C^{-1}) \nabla^{\hat{M}} \hat{\sigma} - y K v^* - y \nabla^M \hat{v}_n) d\hat{y} d\mu_M \\ &\quad - \mathcal{P} \left(\text{div}^{\hat{M}} \int_0^{\hat{h}} W(\hat{y})^T \xi \circ \varphi_{\hat{y}} d\hat{y} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

für Testfunktionen $\xi \in C^2(Q; \mathbb{R}^N)$ mit $n \bullet \xi \circ \varphi_y = 0$ und kompaktem Träger von $\xi \circ \varphi_{\hat{y}}$ in \hat{M} . Dabei ist \mathcal{P} der Druck als Distribution aus Satz 2.20 und $W(\hat{y})$ ist gegeben durch:

$$W(\hat{y}) = \left(\frac{1}{2} \hat{y}^2 - \hat{h} \hat{y} + \epsilon \frac{1}{6} \hat{y}^3 k + \epsilon \frac{1}{2} \hat{h}^2 \hat{y} \hat{k} - \epsilon \frac{1}{2} \hat{h} \hat{y}^2 k \right) \text{Id} - \hat{h} \hat{C}^{-1} + \epsilon \frac{1}{6} \hat{y}^3 K + \epsilon \hat{y} \hat{h} \hat{K} \hat{C}^{-1} + \epsilon \frac{1}{2} \hat{h}^2 \hat{k} C^{-1}.$$

Wenn alles glatt ist, ist diese Behauptung äquivalent zu:

$$\hat{w}^* = W(\hat{y}) \nabla^{\hat{M}} \hat{p} + \epsilon (\hat{y} \text{Id} + \hat{C}^{-1}) \nabla^{\hat{M}} \hat{\sigma} - \epsilon \hat{K} \hat{y} \hat{v}^* - \epsilon \hat{y} \nabla^{\hat{M}} \hat{v}_n + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Beweis. Um im Folgenden bis auf Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ genau zu berechnen, entwickeln wir die Geschwindigkeit in ϵ : $\hat{w}^* = \hat{w}^{*0} + \epsilon \hat{w}^{*1} + \mathcal{O}(\epsilon^2)$. Dann setzen wir die Geschwindigkeit niedriger Ordnung w^{*0} aus Satz 2.21 in Gleichung (6.1.1) aus dem Beweis von Satz 6.3 ein und formulieren alles mit dem distributionellen Druck aus Satz 2.20. Für den Rest des Beweises verzichten wir darauf die Hütchen zu führen.

$$\begin{aligned} &\int_M \int_0^h \partial_y \zeta^* \bullet [\partial_y w^{*1} + K v^* + \nabla^M v_n] dy d\mu_M \\ &\quad - \mathcal{P} \left(\text{div}^M \int_0^h K \partial_y \zeta^* \left(\frac{1}{2} y^2 - h y - h C^{-1} \right) \right) + \mathcal{P} \left(\text{div}^M \int_0^h (y^2 - h y) k \partial_y \zeta^* dy \right) \\ &\quad - \mathcal{P} \left(\text{div}^M \int_0^h K \zeta^* (y - h) dy \right) + \mathcal{P} \left(\int_0^h y \text{Tr}((k \text{Id} - K) P^M D^M \zeta^*) dy \right) + \mathcal{P} \left(\zeta^*|_h \bullet h (k \text{Id} - K) \nabla^M h \right) \\ &\quad - \int_M \zeta^*|_h \bullet \nabla^M \sigma d\mu_M + \int_M \zeta^*|_0 \bullet C w^{*1}|_0 d\mu_M = 0. \end{aligned}$$

Es ist wegen der Symmetrie von K und nach Proposition 6.4:

$$\text{Tr}((k \text{Id} - K) P^M D^M \zeta^*) = (k \text{Id} - K) : P^M D^M \zeta^* = \text{div}^M((k \text{Id} - K) \zeta^*).$$

Diesen Term hätte man auch erwartet, wenn man in der starken Formulierung des Ausgangsmodells mit dem Gradienten des Druckes gerechnet hätte. Damit folgt:

$$\mathcal{P} \left(\int_0^h y \text{Tr}((k \text{Id} - K) P^M D^M \zeta^*) dy \right) + \mathcal{P} \left(\zeta^*|_h \bullet h (k \text{Id} - K) \nabla^M h \right) = \mathcal{P} \left(\text{div}^M \int_0^h y (k \text{Id} - K) \zeta^* dy \right).$$

Wenn wir dies verwenden und wie vorher derart partiell integrieren, so dass alle Ableitungen auf die Testfunktion fallen, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
& - \int_M \int_0^h \partial_{yy} \zeta^* \bullet w^{*1} dy d\mu_M + \int_M [\partial_y \zeta^* \bullet w^{*1}]_0^h d\mu_M + \int_M \int_0^h \partial_y \zeta^* \bullet (Kv^* + \nabla^M v_n) dy d\mu_M \\
& - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((yh - y^2)kId + (\frac{1}{2}y^2 - hy)K - hKC^{-1}) \partial_y \zeta^* dy \right) - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((2y - h)K - ykId) \zeta^* dy \right) \\
& - \int_M \zeta^*|_h \bullet \nabla^M \sigma d\mu_M + \int_M \zeta^*|_0 \bullet Cw^{*1}|_0 d\mu_M = 0. \quad (\star)
\end{aligned}$$

Auch um die Terme höherer Ordnung zu berechnen, müssen wir diese schwache gewöhnliche Differentialgleichung für w^{*1} lösen und wählen daher wie zuvor zu $\xi : Q \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\xi \bullet n = 0$ als Testfunktion:

$$\zeta^* = \int_0^y \int_z^h \xi \circ \varphi_s ds dz.$$

Damit ergibt sich, wenn wir nur noch ξ statt $\xi \circ \varphi_y$ schreiben:

$$\begin{aligned}
& \int_M \int_0^h \xi \bullet w^{*1} dy d\mu_M - \int_M \int_0^h \xi \bullet w^{*1}|_0 dy d\mu_M + \int_M \int_0^h \int_y^h \xi \bullet (Kv^* + \nabla^M v_n) dz dy d\mu_M \\
& - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((yh - y^2)kId + (\frac{1}{2}y^2 - hy)K - hKC^{-1}) \int_y^h \xi dz dy \right) \\
& - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((2y - h)K - ykId) \int_0^y \int_z^h \xi ds dz dy \right) - \int_M \nabla^M \sigma \bullet \int_0^h \int_z^h \xi ds dz d\mu_M = 0.
\end{aligned}$$

Dann folgt mit Lemma 6.5:

$$\begin{aligned}
& \int_M \int_0^h \xi \bullet w^{*1} dy d\mu_M - \int_M \int_0^h \xi \bullet w^{*1}|_0 dy d\mu_M + \int_M \int_0^h y \xi \bullet (Kv^* + \nabla^M v_n) dy d\mu_M \\
& - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((\frac{1}{2}y^2 h - \frac{1}{3}y^3)kId + (\frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}hy^2)K - hyKC^{-1}) \xi dy \right) \\
& - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}hy^2)K + (-\frac{1}{2}h^2y + \frac{1}{6}y^3)kId) dy \right) - \int_M \nabla^M \sigma \bullet \int_0^h y \xi dy d\mu_M = 0.
\end{aligned}$$

Und wenn wir gleiche Terme zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
& \int_M \int_0^h \xi \bullet (w^{*1} - w^{*1}|_0) dy d\mu_M + \int_M \int_0^h y \xi \bullet (Kv^* + \nabla^M v_n - \nabla^M \sigma) dy d\mu_M \\
& - \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M \int_0^h ((\frac{1}{2}y^2 h - \frac{1}{2}yh^2 - \frac{1}{6}y^3)kId - \frac{1}{6}y^3 K - hyKC^{-1}) \xi dy \right) = 0.
\end{aligned}$$

Um schließlich noch $w^{*1}|_0$ zu berechnen setzen wir in (\star) als Testfunktion $\zeta^* \circ \varphi_y = (C^{-1})^T \xi$, wobei ξ nicht von y abhängt, ein:

$$- \mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M ((C^{-1})^T \xi \int_0^h ((2yK - hK - ykId) dy) \right) - \int_M (C^{-1})^T \xi \bullet \nabla^M \sigma d\mu_M + \int_M \xi \bullet w^{*1}|_0 d\mu_M = 0.$$

Damit folgt:

$$\mathcal{P} \left(\operatorname{div}^M ((C^{-1})^T \xi \frac{1}{2} h^2 k) \right) - \int_M \xi \bullet C^{-1} \nabla^M \sigma d\mu_M + \int_M \xi \bullet w^{*1}|_0 d\mu_M = 0.$$

□

6.2 Verwendete Sätze für Analysis auf Flächen

Wir liefern noch einige häufig verwendete Sätze für Analysis auf evolvierenden Flächen nach.

Satz 6.7. (Federers Coarea-Formel) Sei $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$, $M \leq N$ lokal Lipschitz, $D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^M)$ eine Borelmenge sowie $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Definiere:

$$\mathcal{J}^* f(x) = \sqrt{\det Df(x) Df(x)^T}.$$

Dann gilt:

$$\int_{f^{-1}(D) \cap \{\mathcal{J}^* f > 0\}} u(x) d\mathcal{L}^N(x) = \int_D \int_{f^{-1}(y)} \frac{u(x)}{\mathcal{J}^* f(x)} d\mathcal{H}^{N-M}(x) d\mathcal{L}^M(y),$$

und die rechte Seite ist integrierbar.

Beweis. [Fed] □

Satz 6.8. (Transformationssatz für Flächen) Sei $m \leq n, \tilde{n} \in \mathbb{N}$. Seien $M \subset \mathbb{R}^n$, $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ m -dimensionale, orientierte C^1 -Flächen. Sei $\tau : \tilde{M} \rightarrow M$ ein orientierungserhaltender C^1 -Diffeomorphismus. Sei $f \in L^1(M)$. Dann ist $(f \circ \tau) \mathcal{J}\tau \in L^1(\tilde{M})$ mit:

$$\mathcal{J}\tau(\tilde{x}) = \sqrt{\det [\partial_{e_i} \tau(\tilde{x}) \bullet \partial_{e_j} \tau(\tilde{x})]_{i,j}},$$

wobei $(e_i)_{i=1..n-1}$ eine Orthonormalbasis von $T_{\tilde{x}} \tilde{M}$ ist. Dann gilt:

$$\int_M f(x) d\mathcal{H}^m(x) = \int_{\tilde{M}} f \circ \tau(\tilde{x}) \mathcal{J}\tau(\tilde{x}) d\mathcal{H}^m(\tilde{x}),$$

und die rechte Seite ist integrierbar.

Beweis. [Jä] □

Satz 6.9. (Transporttheorem für evolvierende Flächen) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte, d -dimensionale, evolvierende C^2 -Fläche, $1 \leq d \leq n$. Bezeichnen wir mit κ den Krümmungsvektor und mit v^M den Geschwindigkeitsvektor von M . Weiterhin seien ν^* die äußere Konormale des Randes und $v^{\partial M}$ der Geschwindigkeitsvektor des Randes. Dann gilt für $u \in C^1(\bar{M})$:

$$\frac{d}{dt} \int_{M_t} u d\mathcal{H}^d = \int_{M_t} \partial_t^M u - u \kappa \bullet v^M d\mathcal{H}^d + \int_{\partial M_t} u v^{\partial M} \bullet \nu^* d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Beweis. [A13] oder [DE1]. □

Satz 6.10. (Partielle Integration auf Flächen) Sei $1 \leq d \leq N$ und $M \subset \mathbb{R}^N$ eine d -dimensionale C^2 -Fläche. Es sei $\Omega \subset M$ relativ offen, $\bar{\Omega} \subset M$ und $\partial\Omega$ sei \mathcal{H}^{d-1} -fast überall von der Klasse C^1 . Sei $f \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^d)$ und $\operatorname{div}^M(f) \in L^1(\Omega)$. Es bezeichne κ den Krümmungsvektor von M und ν^* die äußere Konormale an $\partial\Omega$. Dann gilt:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}^M(f) + f \bullet \kappa d\mathcal{H}^d = \int_{\partial\Omega} f \bullet \nu^* d\mathcal{H}^{d-1}.$$

Beweis. In [GT] ohne Randterm, in [Tay] mit Randterm für Tangentialfelder. □

Satz 6.11. (Eulersche Entwicklungsformel) Sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^N$ evolvierende Fläche der Klasse C^2 mit Geschwindigkeit v . Sei $\Phi_t : M_0 \rightarrow M_t$ ein Diffeomorphismus mit $\partial_t \Phi_t = v \circ \Phi_t$ und $\Phi_0 = \operatorname{Id}$. Zu $h > 0$ setze $\Phi_t^h = \Phi_{t+h} \circ \Phi_t^{-1}$. Dann konvergieren für $h \rightarrow 0$:

$$\frac{D^{M_t} \Phi_t^h - \operatorname{Id}_{M_t}}{h} \rightarrow D^{M_t} v \quad \text{und} \quad \frac{\mathcal{J}\Phi_t^h - 1}{h} \rightarrow \operatorname{div}^{M_t}(v).$$

Beweis. Nach der Kettenregel ist: $D^{M_t} \Phi_t^h - Id = D^{M_0} (\Phi_{t+h} - \Phi_t) \circ \Phi_t^{-1} D^{M_t} \Phi_t^{-1}$. Teilen durch $h > 0$ und Grenzübergang liefern die erste Behauptung mit der Kettenregel. Die zweite Behauptung folgt analog zusammen mit der Ableitungsregel für die Determinante (siehe z.B. [EGK]). \square

Proposition 6.12. (Zeitableitung der Krümmung) Sei M eine orientierte, evolvierende $(N - 1)$ -dimensionale C^3 -Fläche mit Normalen n und Normalgeschwindigkeit $v_n n$. Es bezeichne K die Weingarten-Abbildung und k die mittlere Krümmung. Dann gelten die folgende Formeln:

$$\begin{aligned} \partial_t^M k &= v_n |K|^2 + \Delta^M v_n, \\ \frac{1}{2} \partial_t^M |K|^2 &= K : (v_n K^2 + D^2 v_n). \end{aligned}$$

Beweis. Folgt aus Anwendung von Divergenz und Differential auf Proposition 2.7 zusammen mit den entsprechenden Vertauschungsrelationen von Raum- und Zeitableitung, die wie in Proposition 3.12 zu zeigen sind. Die erste Aussage findet man auch in [Wil], Abschnitt 7. \square

Proposition 6.13. (Poincaré-Ungleichung auf evolvierenden Flächen) Sei $1 < p < \infty$. Sei $M \subset [0, T] \times \mathbb{R}^N$ eine d -dimensionale, kompakte, zusammenhängende, evolvierende Fläche der Klasse C^1 . Dann existiert eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t \in [0, T]$ und für alle $u \in W^{1,p}(M_t)$ mit $\int_{M_t} u d\mathcal{H}^d = 0$ gilt:

$$\|u\|_{L^p(M_t)} \leq C \|\nabla^M u\|_{L^p(M_t)}.$$

Beweis. Mit Widerspruchsbeweis wie im klassischen Fall (siehe [A11]) unter Verwendung des Transformationssatzes für Flächen 6.8 und Kompaktheit im Zeitparameter. \square

6.3 Symbolverzeichnis

Id	Die Identitätsabbildung
Tr	Die Spurabbildung
$Im(F)$	Der Bildraum einer Abbildung F
$Span(a_i)$	Die lineare Hülle der Vektoren a_i
$f \circ g$	Die Konkatenation zweier Abbildungen f, g
$[f > 0]$	Die Menge aller Punkte x für die $f(x) > 0$ gilt
χ_Ω	Die charakteristische Funktion einer Menge Ω
$\mathcal{O}(\epsilon)$	Terme der Größenordnung ϵ in der Landauschen \mathcal{O} -Notation
V^*	Der topologische Dualraum eines normierten Banachraumes V
\mathcal{L}^n	Das n -dimensionale Lebesgue-Maß
\mathcal{H}^d	Das d -dimensionale Hausdorff-Maß
$\mathcal{D}'(D)$	Raum der Distributionen
$T_{t,x}M$	Der Tangentialraum in Raum und Zeit der evolvierenden Fläche M
T_xM	Der Tangentialraum zur Fläche M
I, II	Erste und zweite Fundamentalform
$diag(a_i)$	Diagonalmatrix mit den Einträgen a_i
$A : B$	Skalarprodukt für Matrizen $Tr(A^T B)$
A^S	Der symmetrische Anteil einer Matrix A
f	Das Mittelwertintegral
$[F]_a^b$	Eine Stammfunktion F ausgewertet an den Intervallgrenzen $a, b \in \mathbb{R}$
$\mathcal{J}\Phi$	Die Jacobische einer Abbildung Φ
C^k	stetig differenzierbar bis zur Ordnung k
C^α	Hölder-stetig zum Parameter $\alpha \in (0, 1)$
C_0^∞	beliebig oft stetig differenzierbar mit kompaktem Träger
$C^{k,\alpha}$	k -mal stetig differenzierbar mit α -Hölder-Stetigkeit der k -ten Ableitung
$C_{loc}^{k,\alpha}$	lokal k -mal stetig differenzierbar mit α -Hölder-Stetigkeit der k -ten Ableitung
$C^m(C^k)$	Stetig differenzierbar in der Zeit zur Ordnung m und im Raum zur Ordnung k
$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$	Das L^2 -Skalarprodukt des Hilbertraumes $L^2(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	Sobolev-Raum $W^{m,2}(\Omega)$

Literatur

- [A11] *H.W. Alt*, Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung - Springer (2002)
- [A12] *H.W. Alt*, An abstract Existence Theorem for Parabolic Systems - preprint (2009)
- [A13] *H.W. Alt*, The Entropy Principle for Interfaces. Fluids and Solids - AMSA Bd. 19 (2009)
- [AL] *H.W. Alt, S. Luckhaus*, Quasilinear Elliptic-Parabolic Diff. Equations - Math. Z. 183 (1983)
- [Aub] *T. Aubin*, Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge-Ampère Equations - Springer (1982)
- [BBdP] *E. Beretta, M. Bertsch, R. dal Passo*, Nonnegative solutions of a fourth-order nonlinear degenerate parabolic equation - Arch. Rational Mech. Anal 129 (1995)
- [BGN] *J. Barrett, H. Garcke, R. Nürnberg*, Finite Element Approximation of Surfactant Spreading on a Thin Film - SIAM J. Num. Anal. 41 (2003)
- [Be] *A.K. Becher*, Ein abstrakter Existenzsatz für elliptisch-parabolische Systeme - Diplomarbeit, Universität Bonn (2005)
- [BGLR] *J. Becker, G. Grün, M. Lenz, M. Rumpf*, Numerical methods for fourth order nonlinear degenerate diffusion problems - Applications of Mathematics, Vol. 47 (2002)
- [BF] *F. Bernis, A. Friedman*, Higher order nonlinear degenerate parabolic equations - J. Differential Equations 83 (1990)
- [BG] *M.S. Borgas, J.B. Grotberg*, Monolayer flow on a thin film - J. Fluid Mech. 193 (1988)
- [BN] *J. Barrett, R. Nürnberg*, Convergence of Finite Element Approximation of Surfactant Spreading on a Thin Film in the Presence of van der Waals Forces - IMA J. Num. Analysis, Vol 24 (2004)
- [BP1] *A.L. Bertozzi, M.C. Pugh*, The Lubrication Approximation for thin viscous films: Regularity and Long-Time behavior of weak solutions - Comm. Pure and Appl. Math. Vol 49 (1996)
- [BP2] *A.L. Bertozzi, M.C. Pugh*, Long-Wave Instabilities and Saturation in Thin Film Equations - Comm. Pure and Appl. Math. Vol 51 (1998)
- [doC] *M.P. do Carmo*, Differential geometry of curves and surfaces - Vieweg (1993)
- [Dei] *K. Deimling*, Nonlinear Functional Analysis - Springer (1980).
- [DE1] *G. Dziuk, C.M. Elliott*, Finite elements on evolving surfaces - IMA Journal of Numerical Analysis (2006)
- [DE2] *G. Dziuk, C.M. Elliott*, An Eulerian level set method for partial differential equations on evolving surfaces - to appear in Comp. Viz. Sc., Preprint Fakultät für Mathematik und Physik, Universität Freiburg, Nr. 09-07 (2007)
- [DKS] *G. Dziuk, E. Kuwert, R. Schätzle*, Evolution of elastic curves in \mathbb{R}^n : Existence and computation - SIAM J. Math. Anal. Vol. 33 (2002)
- [DMS] *J. La Due, M.R. Muller, M. Swangler*, Cratering Phenomena on Aircraft Anti-Icing Films - Journal of Aircraft Vol. 33. No. 1 (1996)
- [EAKDS] *J. Erlebacher, M.J. Aziz, A. Karma, N. Dimitrov, K. Sieradzki*, Evolution of nanoporosity in dealloying - Nature 410 (2001)
- [EE] *C. Eilks, C.M. Elliott*, Numerical simulation of dealloying by surface dissolution via the evolving surface finite element method - J. of Computational Physics 227 (2008)
- [EGK] *C. Eck, H. Garcke, P. Knabner*, Mathematische Modellierung - Springer (2008)

- [EG] *C.M. Elliott, H. Garcke*, On the Cahn-Hilliard equation with degenerate mobility - SIAM J. Math. Anal. Vol. 27 (1996),
- [Fed] *H. Federer*, Geometric measure theory - Springer (1969)
- [FHO] *B.W. van de Fliert, P.D. Howell, J.R. Ockenden*, Pressure-driven flow of a thin viscous sheet - J. Fluid Mech. Vol. 292 (1995).
- [GGZ] *H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias*, Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen - Akademie (1974).
- [GG] *D. P. Gaver, J. B. Grotberg*, The Dynamics of a Localized Surfactant on a Thin Film - Journal of Fluid Mechanics 213, (1990)
- [Gr1] *G. Grün*, Degenerate Parabolic Differential Equations of Fourth Order and a Plasticity Model with Non-Local Hardening - Zeitschrift f. Analysis u. i. Anw., Vol 14, No. 3 (1995)
- [Gr2] *G. Grün*, On Free Boundary Problems Arising in Thin Film Flow - Habilitationsschrift - Universität Bonn (2001)
- [GLR] *G. Grün, M. Lenz, M. Rumpf*, A Finite Volume Scheme for Surfactant Driven Thin Film Flow - Finite Volumes for complex Applications III, Herbin, Kröner (Eds.), Hermes Penton Sci. (2002)
- [GT] *D. Gilbarg, N.S. Trudinger*, Elliptic Partial Diff. Equations of Second Order - Springer (2001)
- [How] *P.D. Howell*, Surface-tension-driven flow on a moving curved surface - J. of Engineering Mathematics 45 (2003).
- [HW1] *M. Heil, J.P. White*, Airway Closure: Surface-tension-driven non-axisymmetric instabilities of liquid-lined elastic rings - Journal of Fluid Mechanics 462 (2002)
- [HW2] *M. Heil, J.P. White*, Three-dimensional instabilities of liquid-lined elastic tubes – a thin-film fluid structure interaction model - Physics of Fluids 17 (2005)
- [Jä] *K. Jänich*, Vektoranalysis - Springer (1992)
- [JG] *O.E. Jensen, J.B. Grotberg*, Insoluble surfactant spreading on a thin viscous film: shock evolution and film rupture, J. Fluid Mech., Vol. 240 (1992)
- [Kr] *E. Kreyszig*, Differentialgeometrie - Akad. Verl.-Ges. Geest & Portig (1968)
- [Lio] *J.L. Lions*, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires - Dunod Gauthier-Villars (1969)
- [LNR] *M. Lenz, S.F. Nmadjieu, M. Rumpf*, Finite volume method on moving surfaces - Finite volumes for complex applications V, (2008)
- [LSU] *O.A. Ladyženskaya, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva*, Linear and quasilinear equations of parabolic type - Translations of mathematical monographs, Vol 23 AMS (1968)
- [My] *T.G. Myers*, Thin films with high surface tension - SIAM Rev. Vol. 40, No 3 (1998)
- [MCC] *T.G. Myers, J.P.F. Charpin, S.J. Chapman*, The flow and solidification of a thin fluid film on an arbitrary three-dimensional surface - Physics Of Fluids, vol. 14, no. 8 (2002)
- [ODB] *A. Oron, S.H. Davis, S.G. Bankoff*, Long-scale evolution of thin liquid films - Reviews of Modern Physics 69(3) (1997)
- [Opr] *J. Oprea*, Differential Geometry and its Applications - Prentice Hall (1997)
- [dPG] *R. dal Passo, H. Garcke*, Solutions of a fourth order degenerate parabolic equation with weak initial trace - Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa 28 (1999)

- [dPGG] *R. dal Passo, H. Garcke, G. Grün*, On a fourth order degenerate parabolic equation: global entropy estimates, existence and qualitative behaviour of solutions - *SIAM J. Math. Anal.* Vol 29 (1998)
- [Rai] *A. Raisch*, Existenzbeweis für eine Dünnschichtgleichung mit Marangoni-Effekt - Diplomarbeit, Universität Bonn (2008)
- [Re1] *M. Renardy*, On an equation describing the spreading of surfactants on thin films - *Nonlinear Analysis*, Volume 26, Issue 7 (1996)
- [Re2] *M. Renardy*, A singularly perturbed problem related to surfactant spreading on thin films - *Nonlinear Analysis* Volume 27, Issue 3, (1996)
- [RRS] *R. Valery Roy, A.J. Roberts, M.E. Simpson*, A lubrication model of coating flows over a curved substrate in space - *J. Fluid Mech.* vol. 454 (2002).
- [RSw] *R. Valery Roy, L.W. Schwartz*, Coating flows over curved substrates - *Fluid Mech. of Coating Processes*, Proceedings of the Second European Coating Symposium, (Ed. P. Bourgin), (1997).
- [RSi] *A.J. Roberts, M. E. Simpson*, An accurate lubrication model of contaminated coating flows - *Computer Physics Communications*, Volume 142 (2001)
- [RL] *A.J. Roberts, Z. Li*, The accurate and comprehensive model of thin fluid flows with inertia on curved substrates - *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 553, (2006)
- [Růz] *M. Růžička*, Nichtlineare Funktionalanalysis - Springer (2004).
- [Sim] *J. Simon*. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$ - *Annali die Mat. Pura ed Appl.* 146 (1987)
- [Sto] *H. A. Stone*, A simple derivation of the time-dependent convective-diffusion equation for surfactant transport along a deforming surface - *Phys. Fluids A*, 2 (1990)
- [Su1] *C. Surulescu*, Modeling Aspects and Mathematical Analysis of Some Fluid-Elastic Structure Interaction Problem - Dissertation, Universität Heidelberg (2004)
- [Su2] *C. Surulescu*, The Instationary Motion of a Navier-Stokes Fluid Through a Vessel With an Elastic Cover, IWR Preprint, Universität Heidelberg (2005)
- [SW] *L.W. Schwartz, D.E. Weidner*, Modeling of coating flows on curved surfaces - *J. of Engineering Mathematics* 29 (1995)
- [Tay] *M.E. Taylor*, Partial Differential Equations I, Basic Theory - Springer (1996)
- [Wie] *S. Wieland*, Modellierung und mathematische Analyse kontaminierter dünner Flüssigkeitsfilme - Dissertation, Universität Bonn (2003).
- [Wil] *T.J. Willmore*, Riemannian Geometry - Clarendon (1993)
- [WJ] *H.A.R. Williams, O.E. Jensen*, Two-dimensional nonlinear advection-diffusion in a model of surfactant spreading on a thin liquid film - *IMA J. of Applied Math.* 66 (2001)
- [WG] *S. Wieland, H. Garcke*, Surfactant spreading on thin viscous films: nonnegative solutions of a coupled degenerate system - *SIAM J. Math. Analysis* 37 (6) (2006).
- [Zei] *E. Zeidler*, Nonlinear Functional Analysis and its Applications III, Variational Methods and Optimization - Springer (1985).
- [ZH] *O.Y. Zhong-Can, W. Helfrich*, Bending energy of vesicle membranes: General expressions for the first, second, and third variation of the shape energy and applications to spheres and cylinders - *Physical Review A (General Physics)*, Volume 39, Issue 10 (1989)

Zusammenfassung der Arbeit

Modellierung und Existenztheorie dünner Filme auf evolvierenden Flächen

von Uwe Wolfram Fermum
Bonn, November 2009

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Modellierung und Existenztheorie von dünnen Filmen inkompressibler, viskoser Flüssigkeiten auf evolvierenden, d.h. sich bewegenden, gekrümmten Flächen. Dünne Filme treten in einer Vielzahl von technischen, physikalischen und biophysikalischen Anwendungen auf. Dabei steht die Benetzung der Alveolen (Lungenbläschen) mit einem dünnen Flüssigkeitsfilm während dem respiratorischen Zyklus in unserem besonderen Interesse. Weiterhin weiß man, dass oberflächenaktive Substanzen, sogenannte Surfactants (surface active agents) eine lebensnotwendige Rolle bei der Atmung spielen. Aufgrund der Geometrie eines Alveolus und der Dynamik der ständigen Kontraktion und Expansion während der Atmung ist es sinnvoll, dünne Filme und auch das gekoppelte System von dünnem Film und Surfactants auf evolvierenden Flächen zu betrachten.

In dieser Arbeit zeigen wir, wie eine Erhaltungsgleichung für einen dünnen Film durch Lubrikationsapproximation im schwachen Sinne hergeleitet werden kann und wie wir auf diese Weise eine nichtlineare, degeneriert parabolische Gleichung vierter Ordnung auf einer bewegten Fläche erhalten. Ebenso erhalten wir eine gekoppelte nichtlineare Gleichung für die Dynamik eines unlöslichen Surfactants. Die Hauptaufgabe dieser Arbeit besteht darin, die Existenz von Lösungen dieser Gleichungen zu zeigen. Wir werden einen Existenzsatz für einen dünnen Film auf einem höchstens zweidimensionalen bewegten Substrat sowie einen Existenzsatz für das gekoppelte System von dünnem Film und Surfactant auf einem eindimensionalen bewegten Substrat beweisen. In beiden Fällen sei die Bewegung des Substrats a priori vorgegeben.

Die Konstruktion der Lösungen erfolgt in beiden Fällen durch ein dreistufiges Approximationsargument. Durch Beschränken und Regularisieren der Mobilitäten erhält man approximative Probleme, die mit Hilfe der Galerkin-Methode auf evolvierenden Flächen gelöst werden können. Dabei wählen wir eine schwache Formulierung der dünnen Filmgleichung, in der wir den Laplace-Beltrami Operator auf die Testfunktion anwenden. Dies ermöglicht im Anschluss geeignete Abschätzungen der approximativen Lösungen in der H^1 -Seminorm. Um in den Nichtlinearitäten zum Limes überzugehen, zeigen wir weiterhin eine geeignete Abschätzung von Zeitdifferenzen. Nach dem Limes in der Galerkin-Approximation sind weitere Grenzübergänge in der regularisierten und beschränkten Mobilität zu zeigen. Dabei treten wie im planaren Fall Abschätzungen der zweifachen Stammfunktion der inversen Mobilität auf. Schließlich verwenden wir eine Abschätzung der physikalischen Energie, die mit der linearisierten Oberflächenenergie übereinstimmt, die im gekrümmten Fall von der Krümmung des Substrats abhängt. Um von dieser Abschätzung zu profitieren, verwenden wir weiterhin die Massenerhaltung der Gleichung und die Nichtnegativität von Lösungen des degenerierten Problems zusammen mit geeigneten multiplikativen Interpolationsabschätzungen.

Für das gekoppelte System von dünnem Film und Surfactants gehen wir ähnlich vor. Es wird dann eine gemeinsame Abschätzung von Oberflächenenergie des dünnen Films und freier Energie der Surfactants eine entsprechende Rolle spielen. Die Restriktion auf eine Raumdimension begründet sich auf die nicht zur Verfügung stehende Abschätzung der zweifachen Stammfunktion der inversen Mobilität. In einer Raumdimension stehen bessere Einbettungssätze zur Verfügung, mit deren Hilfe wir gleichmäßige Konvergenz der Lösungen zeigen können.