

Quantentransport ultrakalter Atome in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms Universität Bonn

vorgelegt von

Tobias Salger

aus

Krumbach

Bonn 2010

Angefertigt mit Genehmigung
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Martin Weitz
2. Gutachter: Prof. Dr. Dieter Meschede

Tag der Promotion: 03.08.2010

Erscheinungsjahr: 2010

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online/ elektronisch publiziert.

Zusammenfassung

Transporteffekte spielen eine zentrale Rolle für viele Phänomene der Physik, Biologie und Chemie. Ein Beispiel hierfür ist der Ratscheneffekt, bei dem in einem periodisch getriebenen System ein gerichteter Transport von Teilchen erreicht werden kann, ohne dass eine gerichtete Kraft verwendet wird. Ultrakalte atomare Gase eignen sich hervorragend zum Studium von Transporteffekten im Quantenbereich, wobei Lichtkräfte mit weitverstimmten Lichtfeldern als sehr dissipationsarmer Antrieb eingesetzt werden können.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Experimenten zum Quantentransport eines Ensembles ultrakalter Atome in optischen Gitterpotentialen variabler räumlicher Symmetrie. Für die Experimente wurde ein Bose-Einstein Kondensat aus Rubidiumatomen des Isotops ^{87}Rb eingesetzt und einem periodischen optischen Lichtpotential ausgesetzt, das mit einem Verfahren zur Fourier-Synthese von variablen Lichtpotentialen hergestellt wurde. Dazu wurden neben konventionellen optischen Gittern der Periode $\lambda/2$ auch Gitter höherer Ordnung mit einer Periode von $\lambda/(2n)$ hergestellt, wobei n eine natürliche Zahl ist. Diese sogenannten *Multiphotonen-Gitter* nutzen die dispersive Eigenschaft von Raman-Übergängen aus. Ausgehend von diesen Ergebnissen wurden zunächst Transportexperimente in einem beschleunigten optischen Multiphotonen-Gitter der Periode $\lambda/4$ durchgeführt. Die Beobachtung von Bloch-Oszillationen in einem Multiphotonen-Gitter zeigt dabei die kohärente Eigenschaft solcher Gitterpotentiale, die unterhalb der Rayleigh Auflösungsgrenze arbeiten. In einem nächsten Schritt wurde die Bandstruktur eines Gitters variabler räumlicher Symmetrie untersucht, das aus einer Überlagerung eines konventionellen Gitterpotentials der Periode $\lambda/2$ und eines Multiphotonen-Gitters der Periode $\lambda/4$ besteht. Im Experiment konnte mit Hilfe von Landau-Zener Übergängen in einem beschleunigten Gitter festgestellt werden, dass die Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Blochband von den Potentialtiefen der Gitterharmonischen sowie von der relativen Phase zwischen den Gitterharmonischen abhängt. Bei geeigneter Wahl der Parameter konnte die Energieaufspaltung zwischen den Bändern vollständig unterdrückt werden.

In weiteren Experimenten wurde mit einem zeitlich getriebenen Lichtpotential der gerichtete Ratschentransport ultrakalter Atome untersucht. Ziel war hierbei eine Realisierung einer Hamiltonschen Quantenratsche, d.h. die Beobachtung von Transport im Quantenbereich ohne die Anwesenheit von gerichteten Kräften oder Dissipation im System. Hierzu wird ein räumlich asymmetrisches Gitterpotential benötigt, das

im Experiment durch die phasenrichtige Überlagerung eines konventionellen Gitters der Periode $\lambda/2$ und eines Multiphotonen-Gitters der Periode $\lambda/4$ realisiert wurde. Die Amplitude des ratschenförmigen Potentials wird schließlich zeitlich asymmetrisch moduliert, wonach ein gerichteter Transport des Bose-Einstein Kondensats beobachtet werden konnte. Evidenzen für den vollständig quantenmechanischen Charakter des Ratschentransports waren eine beobachtete Oszillation des atomaren Impulses um einen von Null verschiedenen Wert, eine Abhängigkeit des nachgewiesenen Transports von dem Anfangszeitpunkt der Modulation sowie aufgetretene Resonanzfrequenzen der Amplitudenmodulation bei Positionen die von der atomaren Rückstoßfrequenz bestimmt sind. Die Ergebnisse können als die grundsätzliche Demonstration eines Quantenmotors interpretiert werden, bei dem ein gerichteter atomarer Transport ohne eine gerichtete Kraft erreicht wird. In zukünftigen Arbeiten wäre es interessant, den Bereich des atomaren Ratschentransports gegen eine äußere Kraft genauer zu untersuchen oder die Experimente auf den stark korrelierten Bereich, bei dem die interatomare Wechselwirkung eine wichtige Rolle spielt, zu erweitern.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat	7
2.1	Theorie der Bose-Einstein Kondensation	7
2.1.1	Einleitung	7
2.1.2	Bose-Einstein Kondensat in einer harmonischen Falle	8
2.1.3	Wechselwirkungseffekte im Bose-Einstein Kondensat	10
2.1.4	Thomas-Fermi Näherung	12
2.2	Magneto-optische Falle	13
2.2.1	Funktionsprinzip	13
2.2.2	Experimenteller Aufbau	15
2.2.3	Experimentelle Ergebnisse	17
2.3	Optische Dipolfalle	18
2.3.1	Wechselwirkung zwischen Licht und Materie	18
2.3.2	Fallenpotential und Streurate	19
2.3.3	Räumliche Modulation des CO ₂ -Dipolfallenstrahls	22
2.3.4	Experimenteller Aufbau	23
2.3.5	Experimentelle Ergebnisse	26
2.4	Verdampfungskühlen	27
2.4.1	Funktionsprinzip	27
2.4.2	Experimentelle Ergebnisse	28
3	Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome	31
3.1	Theoretische Grundlagen	31
3.1.1	Konventionelle optische Gitter	31
3.1.2	Multiphotonen-Gitter	34
3.1.3	Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung	37
3.1.4	Bloch-Oszillationen im Multiphotonen-Gitter	40
3.1.5	Phasenabhängiger Landau-Zener Übergang	42
3.2	Experimenteller Aufbau zur Fourier-Synthese von Gitterpotentialen	47
3.3	Beugung eines Bose-Einstein Kondensats an optischen Gitterpotentialen	50
3.4	Bloch-Oszillationen im Multiphotonen-Gitter	55
3.5	Phasenabhängiger Landau-Zener Übergang	58
4	Hamilton'sche Quantenratsche	61
4.1	Einführung zur Ratschenphysik	61

Inhaltsverzeichnis

4.2	Theoretische Grundlagen	64
4.2.1	Symmetrieeigenschaften	64
4.2.2	Klassisches Modell	65
4.2.3	Quantenmechanisches Modell	69
4.2.4	Energiespektrum	72
4.2.5	Transportmechanismus	74
4.2.6	Weitere Abhängigkeiten des Ratschentransports	77
4.2.7	Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung im Kondensat auf den Quantentransport	78
4.3	Experimenteller Aufbau und Vorexperimente	81
4.4	Experimentelle Umsetzung der Quantenratsche	86
4.4.1	Messung der mittleren atomaren Geschwindigkeit	86
4.4.2	Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit	88
4.4.3	Transport als Folge gebrochener Symmetrien	89
4.4.4	Weitere Merkmale einer Hamiltonschen Quantenratsche	91
5	Ausblick	95
A	Elektronischer Aufbau zur Ansteuerung der Gitter-Laserstrahlen	97
B	Datensatz zur Simulation der Hamiltonschen Quantenratsche	101
C	Integrationsverfahren	103
C.1	Zeitentwicklungsoperator	103
C.2	Integration durch Zerlegung	104

1 Einleitung

Das System aus ultrakalten Atomen und fernverstimmten Lichtfeldern stellt ein Modellsystem der Ein- und Mehrteilchen-Quantenphysik dar. Heute können verdünnte atomare Gase mit Methoden der Laser- und Verdampfungskühlung in den quantenentarteten Bereich herabgekühlt werden. Die erstmalige Realisierung eines Bose-Einstein Kondensats gelang 1995 mit bosonischen Rubidiumatomen in einer Magnetfalle [1]. Einige Jahre später konnte auch ein entartetes Fermigas mit Kaliumatomen experimentell verwirklicht werden [2]. Seitdem wurden eine Vielzahl von Experimenten zur Physik mit Quantengasen durchgeführt [3–7].

Ultrakalte Atome können in den Schwingungsbäuchen optischer Stehwellen gefangen werden. Das so realisierte System bezeichnet man als ein *optisches Gitter*. Das Fallenpotential konventioneller Stehwellengitter wird durch die dynamische Starkverschiebung gebildet und hat die Periodizität des optischen Interferenzmusters von $\lambda/2$, wobei λ die Wellenlänge des Lichts bezeichnet. Ein optisches Gitter für kalte Atome wurde 1987 zum ersten Mal von C. Salomon et al. realisiert [8]. Optische Gitter bilden ein attraktives System zur Simulation von Kristallstrukturen der Festkörperphysik. Mit ultrakalten Atomen in konventionellen optischen Gitterpotentialen wurden unter anderem Bloch-Oszillationen [9] und Landau-Zener Übergänge [10] untersucht sowie die Energiedispersion im Gitter durch Bragg-Beugung aufgelöst [11]. Inzwischen ist es auch möglich, einzelne Gitterplätze mit Hilfe einer abbildenden Optik oder eines Elektronenmikroskops aufzulösen und die Dynamik von Atomen darin zu untersuchen [12–14]. Ein eindrucksvolles Experiment zur Manipulation von Materiewellen wurde mit der Beobachtung eines Mott-Isolator Quantenphasenübergangs 2002 von I. Bloch et al. demonstriert [15]. Die repulsive Kontaktwechselwirkung auf der einen Seite und der Tunnelprozess durch die Potentialbarrieren des Gitters auf der anderen Seite ermöglichen über die Variation der Potentialtiefe einen Übergang einer superfluiden Phase zu einer Mott-Isolator-Phase.

Auch ermöglichen Fortschritte auf dem Gebiet der ultrakalten Atome, neuartige Untersuchungen zu zeitlich getriebenen Quantensystemen durchzuführen. In der Gruppe von M. Raizen wurde die Dynamik einer Atomwolke in einem mit kurzen Pulsen (“ δ -Pulsen”) modulierten optischen Stehwellen-Gitterpotential untersucht. Beobachtet wurde beispielsweise, dass sich die Atomwolke aufgrund von dynamischer Lokalisierung weniger stark ausdehnte als ohne diesen quantenmechanischen Effekt [16]. Seitdem wurden auf diesem Gebiet viele Experimente durchgeführt, die sich mit Dekohärenzeffekten und quantenmechanischen Eigenschaften in einem periodisch

1 Einleitung

gepulsten System befasst haben [17–21]. In diesen Arbeiten erfolgte der Transport von Atomen durch die Lichtwelle symmetrisch; es tritt also keine Vorzugsrichtung beim Transport der Atome auf. Ein wesentlicher Teil der vorliegenden Arbeit befasst sich mit dem gerichteten Transport von Atomen, bei dem durch Brechung räumlicher bzw. zeitlicher Symmetrien ein gerichteter Transport von Atomen erreicht wird. Ähnlich wie bei einer mechanischen Ratsche werden hier sägezahnförmige Potentiale eingesetzt. Im Allgemeinen bezeichnet man solche getriebenen Systeme gebrochener Symmetrie, bei denen ein gerichteter Transport erreicht wird, als *Ratschen*.

Eine Ratsche ist in der Lage, aus einer zufälligen Fluktuation von Teilchen einen gerichteten Teilchentransport zu erzeugen, ohne dabei eine äußere konstante Kraft zu verwenden [22–25]. Seit der ersten Beobachtung der chaotischen Bewegung von Blütenpollen unter dem Mikroskop im Jahr 1827 von Robert Brown, spielt die Brownsche Molekularbewegung eine wichtige Rolle in der Beschreibung von biologischen Prozessen. Das Modell des Brownschen Motors beschreibt dabei sehr eindrucksvoll, wie man thermische Fluktuationen ausnützen kann, um daraus einen gerichteten Transport zu erreichen [26]. Der Biologe Sir Andrew Huxley stellte 1954 einen Zusammenhang zwischen der Bewegung von Myosin und der Wirkungsweise eines biologischen Motors her, um eine mögliche Erklärung für die Muskelkontraktion beispielsweise im Arm zu geben [27, 28]. Es wurden daraufhin Untersuchungen zum Transport in biologischen Systemen durchgeführt, und mit der Wirkungsweise eines biologischen Motors verglichen [29–31].

Mitte der 1990er-Jahre wurde an festkörperphysikalischen Systemen verstärkt nach Möglichkeiten gesucht, den Ratscheneffekt dort nachzuweisen. Ein vielversprechendes System stellen sogenannte Quantenpunkt-Ratschen dar [32, 33]. Diese bestehen aus asymmetrisch geformten Halbleiter-Heterostrukturen und brechen so die Reflexionssymmetrie im System. Durch periodisches Anlegen einer Wechselfspannung konnte dort eine gerichtete Elektronenbewegung beobachtet werden, die auf den Ratscheneffekt zurückzuführen ist [34]. Kurze Zeit später konnten darin auch Quanteneffekte nachgewiesen werden, wobei sich die Richtung der Elektronenbewegung unterhalb einer kritischen Temperatur entgegen der klassischen Vorhersage verhält [35]. In der Zwischenzeit gibt es in der Festkörperphysik weitere Ratschentypen, mit deren Hilfe man eine gerichtete Bewegung erzeugen kann: SQUID-Ratschen, Josephson Vortex Ratschen und Abrikosov Vortex Ratschen [36–39].

Heutzutage lassen sich sogar kleinste Maschinen bauen, die nach dem Ratscheneffekt funktionieren. Die Autoren in Ref. [40, 41] zeigen beispielsweise wie sich ein asymmetrisch geformtes Sägezahnblatt von einigen Mikrometern Durchmesser in einem Wärmebad von *Escherichia coli* Bakterien dreht. Ein anderes Beispiel das in der angewandten Technik Verwendung findet, ist die Driftratsche, mit der man unter anderem Teilchen verschiedener Größen voneinander trennen kann [42]. Eine Driftratsche besteht aus einer Parallelschaltung vieler Kanäle mit einigen Mikrometern Durchmesser, wobei sich der Durchmesser entlang eines Kanals periodisch und asymmetrisch

ändert. Durch einen an die Kanäle angelegten Druckgradienten wird Wasser periodisch hin- und hermoduliert. In Wasser suspendierte Teilchen erfahren aufgrund der asymmetrischen Form des Kanals eine gerichtete Bewegung, wobei die Richtung von der Größe der Teilchen abhängt.

Auf dem Gebiet der kalten Atome, die sich mit dem gerichteten Transport von Atomen in periodisch getriebenen Systemen beschäftigt haben, wurden zunächst Experimente in zeitlich modulierten Kippratschen [43] durchgeführt. Dazu wurden Atome in ein eindimensionales Stehwellenpotential geladen, das einer zeitlich periodisch modulierten Kraft ausgesetzt war. In den verwendeten dissipativen Systemen hing der beobachtete gerichtete Transport vom Grad der Dissipation ab [44]. Ein bis dato ungeklärtes Problem ist die Frage, ob ein gerichteter Transport von Teilchen auch in einem vollkommen quantenmechanischen System ohne Dissipation möglich ist. Es gab zwar in der Vergangenheit Experimente, die quantenmechanische Eigenschaften in harmonisch modulierten Potentialen zeigten [45,46], ein Ratschentransport wurde damals allerdings nicht beobachtet. In den letzten Jahren wurde der Transport in einer Hamiltonschen Quantenratsche theoretisch vorhergesagt und konnte im Rahmen dieser Arbeit experimentell realisiert werden [47].

Die Beobachtung eines Ratschentransports in einer amplitudenmodulierten Quantenratsche erfordert ein räumlich asymmetrisches Potential, um die Reflexionssymmetrie zu brechen. In der Vergangenheit wurden asymmetrische Potentiale in dissipativen Systemen mit thermischen Atomen bereits realisiert, wobei die Gruppe um T. Pfau die Streuung von Heliumatomen an einem asymmetrischen magneto-optischen Potential untersucht hat [48]. Einen Transport von Atomen in einem asymmetrischen, grauen optischen Gitterpotential mit Dissipation wurde von C. Mennerat-Robilliard et al. beobachtet [49]. Vor einiger Zeit wurde ein Verfahren in unserer Arbeitsgruppe entwickelt, um dissipationsarme asymmetrische optische Gitterpotentiale zu erzeugen [50]. Dazu wurde in einem ersten Schritt ein neuartiges Gitter der Periode $\lambda/4$ für ein Rubidium Bose-Einstein Kondensat erzeugt, wobei dieses durch einen Vierphotonen Raman-Prozess entsteht. Durch die räumliche Überlagerung eines konventionellen Gitters der Periode $\lambda/2$ und eines Vierphotonen-Gitters der Periode $\lambda/4$ kann durch geeignete Wahl der relativen Phase ein asymmetrisches Gitterpotential entstehen.

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit Experimenten zum Quantentransport in variabel geformten Gitterpotentialen. Es wurde die Bandstruktur eines optischen Gitters variabler räumlicher Symmetrie untersucht. Mit Landau-Zener-Übergängen an einem beschleunigten Gitterpotential wurde beobachtet, dass die energetische Aufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Blochband sehr kritisch von der relativen Phase zwischen den Harmonischen des Fourier-synthetisierten Gitterpotentials abhängt. Auch gelang die Beobachtung von Bloch-Oszillationen an Gitterpotentialen unterschiedlicher räumlicher Periodizität. Ein Schwerpunkt der Arbeit stellt die Beobachtung eines atomaren Transports in zeitlich getriebenen Gitterpotentialen gebrochener räumlicher Symmetrie dar. Mit dem variabel geformten Gitterpotential gelang

1 Einleitung

die erstmalige Realisierung einer Hamiltonschen Quantenratche, in der ein gerichteter atomarer Ratschentransport innerhalb der Wechselwirkungszeit beobachtet wurde. Dies stellte die Demonstration eines Prototyps eines Quantenmotors dar, in dem ein wechselförmiger Antrieb eine gerichtete atomare Bewegung erzeugt.

Struktur der Arbeit:

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Kapitel 2 befasst sich mit der Erzeugung des für die Arbeiten benötigten atomaren Bose-Einstein Kondensats in einer optischen Dipolfalle. Kapitel 3 behandelt die Erzeugung von variabel geformten Lichtpotentialen sowie der Beobachtung von Landau-Zener-Übergängen zwischen den Blochbändern sowie von Bloch-Oszillationen in Multiphotonen-Gittern. Kapitel 4 befasst sich mit der Realisierung einer Hamiltonschen Quantenratche im zeitlich getriebenen Gitterpotential.

Publikationsliste:

Fourier synthesis of optical potentials for atomic quantum gases

G. Ritt, C. Geckeler, T. Salger, G. Cennini und M. Weitz

Phys. Rev. A **74**, 063622 (2006)

Atomic Landau-Zener Tunneling in Fourier-Synthesized Optical Lattices

T. Salger, C. Geckeler, S. Kling und M. Weitz

Phys. Rev. Lett. **99**, 190405 (2007)

Bloch oscillations of a Bose-Einstein condensate in a subwavelength optical lattice

T. Salger, G. Ritt, C. Geckeler, S. Kling und M. Weitz

Phys. Rev. A **79**, 011605 (2009)

Directed Transport of Atoms in a Hamiltonian Quantum Ratchet

T. Salger, S. Kling, T. Hecking, C. Geckeler, L. Morales-Molina und M. Weitz

Science **326**, 1241 (2009)

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der experimentellen Realisierung eines ^{87}Rb Bose-Einstein Kondensats in einer optischen Dipolfalle. Nach einer theoretischen Einführung, in der die wichtigsten Eigenschaften solcher Quantengase zusammengefaßt werden, konzentrieren sich die nachfolgenden Abschnitte mit der technischen Umsetzung. Der erste Schritt zur Erzeugung eines atomaren Bose-Einstein Kondensats ist die Vorkühlung von Atomen in einer Magneto-optischen Falle. Die Atome werden daraufhin in eine optische Dipolfalle umgeladen und die Temperatur des Gases durch Verdampfungskühlung unter einen kritischen Wert im Nanokelvinbereich gebracht, bei der die Phasenraumdichte hinreichend hoch ist, um einen Phasenübergang zu einem Bose-Einstein Kondensat durchzuführen.

2.1 Theorie der Bose-Einstein Kondensation

2.1.1 Einleitung

Das Konzept der Bose-Einstein Kondensation (BEC) wurde bereits 1924 von Satyendra Nath Bose und Albert Einstein vorgestellt [51,52]. Unterhalb einer kritischen Temperatur wandelt sich ein thermisches bosonisches Gas in ein Bose-Einstein Kondensat um, bei dem die Grundzustandsbesetzung makroskopisch anwächst.

In einem stark vereinfachten Bild können Atome in einem verdünnten Gas als Wellenpakete betrachtet werden. Die thermische Ausdehnung der Wellenpakete wird über die de Broglie Wellenlänge λ_{dB} angegeben:

$$\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (2.1)$$

Dabei ist m die Masse eines Atoms, T die Temperatur, sowie \hbar die Planck-Konstante geteilt durch 2π und k_B der Boltzmann-Faktor. Bei Raumtemperatur ist die de Broglie Wellenlänge der Atome in der Regel sehr viel kleiner als der mittlere Teilchenabstand. Je kälter ein atomares Ensemble wird, desto größer wird die thermische de Broglie Wellenlänge λ_{dB} . Ab einer bestimmten Temperatur ist die Ausdehnung der

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

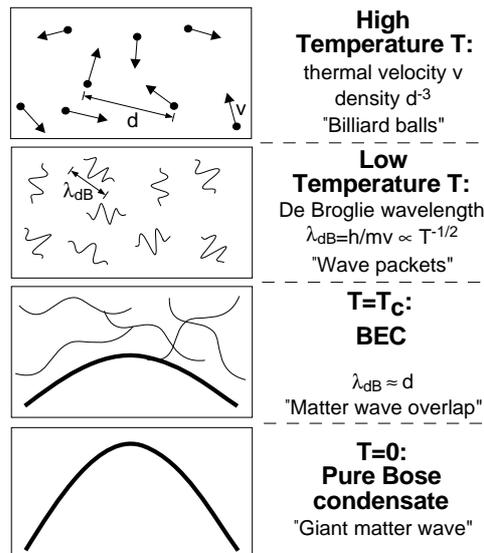


Abb. 2.1: Illustration der Bose-Einstein Kondensation: Bei hohen Temperaturen wird jedes Atom durch eine eigene Wellenfunktion beschrieben. Sobald die Temperatur weit genug sinkt, überlappen die Wellenpakete und das System kann durch eine einzelne makroskopische Wellenfunktion beschrieben werden - das Bose-Einstein Kondensat. Die Abbildung ist aus Ref. [53] entnommen.

Wellenpakete in der Größe des Teilchenabstands. Die Ununterscheidbarkeit bosonischer Materie wirkt sich nun auf den gesamten Überlappbereich aus, so dass sich eine einzelne Materiewelle bildet, das Bose-Einstein Kondensat (siehe Abb. 2.1). Das Kriterium für eine Bose-Einstein Kondensation wird erreicht, sobald die Phasenraumdichte $n\lambda_{dB}^3 > 2.612$ ist. Dies wird einerseits durch eine sehr hohe Dichte und andererseits durch ein starkes Absenken der Temperatur erreicht. Allerdings lassen sich Gase nicht beliebig stark komprimieren, da sie in der Regel zum Festkörper werden. Um den gasförmigen Aggregatzustand beizubehalten, muss das Gas stark verdünnt sein, was bei gegebenem Wert der zur Kondensation nötigen Phasenraumdichte eine gewaltige Temperaturabsenkung erfordert.

2.1.2 Bose-Einstein Kondensat in einer harmonischen Falle

Die Bose-Einstein Kondensation wird experimentell in einer magnetischen oder optischen Falle erreicht [54–57], bei der die Fallengeometrie der eines harmonischen Oszillators ähnelt.

$$V_{trap} = \frac{1}{2}m \left(\omega_x x^2 + \omega_y y^2 + \omega_z z^2 \right) \quad (2.2)$$

Dabei ist m die Masse eines Atoms und $\omega_{x,y,z}$ die Fallenfrequenzen im harmonischen Potential. Sofern man Wechselwirkungseffekte zwischen den Atomen vernachlässigt

gen kann, ergibt sich für das Energiespektrum ein sehr einfacher Ausdruck:

$$\epsilon = \sum_{x,y,z} \hbar\omega_i \left(n_i + \frac{1}{2} \right) \quad (2.3)$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Energiezustand zu besetzen, gibt dabei die Bose-Statistik wieder.

$$n_l = \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon_l - \mu)) - 1} = \left[\frac{1}{z} \exp(\beta\epsilon_l) - 1 \right]^{-1} \quad (2.4)$$

An dieser Stelle wurde die Fugazität $z = \exp(\beta\mu)$ eingeführt, wobei $\beta = 1/k_B T$ ein Ausdruck für die thermische Energie des Gases und μ das chemische Potential ist. Das chemische Potential gibt an, wieviel Energie aufgebracht werden muss, um ein weiteres Teilchen in die Falle einzubringen. Die Gesamtteilchenzahl im System ist die Summe über die Besetzungswahrscheinlichkeit $N = \sum_l n_l$. Da die Anzahl der Atome in der Falle immer positiv sein muss, ergeben sich physikalische Grenzen für die Fugazität $0 < z < 1$. In Abb. 2.2 (a) ist die Abhängigkeit der Teilchenzahl im Grundzustand $N_0(z)$ und in den angeregten Zuständen $N_a(z)$ als Funktion der Fugazität aufgetragen, wohingen in (b) eine schematische Verteilung der Atome in den Energieniveaus für ein thermisches Gas und ein Bose-Einstein-Kondensat zu sehen ist. Für $z \rightarrow 0$ ergibt sich die Boltzmann-Statistik wieder, was einem stark verdünnten thermischen Gas entspricht. Wenn $z \rightarrow 1$ tendiert, treten wir in den Bereich der Bose-Einstein Kondensation ein. Hier divergiert die Besetzungszahl im Grundzustand:

$$N_0 = \frac{z}{1-z} \quad (2.5)$$

Auf der anderen Seite existiert für die Anzahl der Atome in den angeregten Zuständen eine Obergrenze:

$$N_{max} = N - N_0 = \sum_{l \neq 0} [\exp(\beta\epsilon_l) - 1]^{-1} \quad (2.6)$$

Das bedeutet demnach, dass jedes weitere Teilchen, das dem System bei gegebener Temperatur zugeführt wird, direkt in den Grundzustand gehen muss - der Beginn der Bose-Einstein Kondensation.

Im nächsten Schritt wollen wir eine Grenztemperatur T_c angeben, bei der die Bose-Einstein Kondensation eintritt. Wir nehmen hierbei an, dass $k_B T \gg \hbar\omega$, so dass es möglich ist, die Summe in (2.6) durch ein Integral anzunähern,

$$N - N_0 = \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{\hbar\omega_{ho}} \right)^3 \quad (2.7)$$

wobei $\zeta(n)$ die Riemann-Funktion ist und $\omega_{ho} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$ dem geometrischen Mittel der Fallenfrequenzen entspricht. Die kritische Temperatur ergibt sich aus im

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

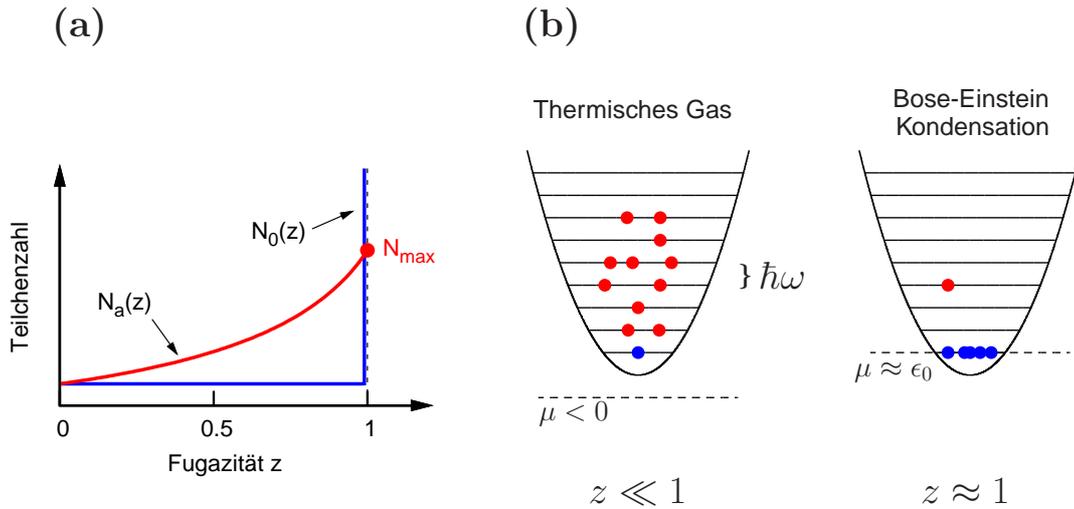


Abb. 2.2: (a) Abhängigkeit der Atomzahl als Funktion der Fugazität. Eine Entartung des Grundzustands tritt auf, wenn $z \rightarrow 1$. (b) Schematische Darstellung der Atomverteilung in einem harmonischen Fallenpotential: (links) thermisches Gas, (rechts) Bose-Einstein Kondensation

Grenzfall $N_0 \rightarrow 0$:

$$k_B T_c = \hbar\omega_{ho} \left(\frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3} \approx 0.94 \hbar\omega_{ho} N^{1/3} \quad (2.8)$$

Sie hängt von der Atomzahl in der Falle sowie von den Fallenfrequenzen ab. Es ergibt sich typischerweise eine Übergangstemperatur in der Größenordnungen von 100 nk. Unterhalb der Grenztemperatur $T < T_c$ folgt die Besetzung des Grundzustands der bekannten Gleichung [58]:

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^3 \quad (2.9)$$

2.1.3 Wechselwirkungseffekte im Bose-Einstein Kondensat

Bisher wurde ein ideales Gas von Atomen in einer harmonischen Falle betrachtet, das keinerlei Wechselwirkung untereinander ausübt. Die Ausdehnung der Wellenfunktion im Grundzustand ist dabei unabhängig von der Teilchenzahl und entspricht der Oszillatorlänge:

$$a_{ho} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_{ho}} \right)^{1/2} \quad (2.10)$$

Man hat allerdings in Experimenten festgestellt, dass die gemessene Breite des Bose-Einstein Kondensats immer größer als die Oszillatorlänge a_{ho} ist. Grund hierfür ist,

dass bei den in Bose-Einstein Kondensaten auftretenden Atomdichten, die Wechselwirkung zwischen den Atomen nicht mehr außer Acht gelassen werden kann.

Um die Wechselwirkungseffekte in die theoretische Beschreibung der Bose-Einstein Kondensation einzubringen, benötigen wir ein zusätzliches Wechselwirkungspotential zwischen zwei Atomen. In einem verdünnten Gas ist der Abstand zwischen den Atomen sehr viel größer als die Streulänge. Daher spielen nur niederenergetische Streuprozesse eine relevante Rolle, so dass wir die Wechselwirkung durch ein einfaches Kontaktpotential annähern können [59].

$$V_{int} = g\delta(r - r') \quad (2.11)$$

Die Kopplungsstärke g wird durch die s-Wellen-Streulänge a bestimmt [59, 60]:

$$g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (2.12)$$

In der zweiten Quantisierung lautet der Vielteilchen-Hamiltonoperator für N miteinander wechselwirkende Bosonen in einem externen Potential:

$$H = \int dr \hat{\Psi}^\dagger(r) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ext} \right] \hat{\Psi}(r) + \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{2} \int dr dr' \hat{\Psi}^\dagger(r) \hat{\Psi}^\dagger(r') V_{int}(r - r') \hat{\Psi}(r') \hat{\Psi}(r) \quad (2.14)$$

Die Feldoperatoren $\hat{\Psi}(r)$ und $\hat{\Psi}^\dagger(r)$ erzeugen bzw. vernichten dabei ein Teilchen am Ort r . Um die Bewegungsgleichung der Wellenfunktion zu berechnen, wird eine Näherung verwendet, die auf Bogoliubov zurückgeht [61]. Dabei werden die Feldoperatoren durch ihre Erwartungswerte ersetzt: $\langle \hat{\Psi}(r, t) \rangle \approx \Phi(r, t)$. Die Größe $\Phi(r, t)$ beschreibt die Wellenfunktion im Bose-Einstein Kondensat und wird oft als "Ordnungsparameter" [62, 63] bezeichnet. Aus ihr ergibt sich die Dichteverteilung im Kondensat:

$$n(r, t) = |\Phi(r, t)|^2 \quad (2.15)$$

Zusammen mit dem Wechselwirkungspotential lässt sich nun ein Ausdruck für die Bewegungsgleichung des Bose-Einstein Kondensats finden [64].

$$i\hbar \frac{\partial \Phi(r, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + g|\Phi(r, t)|^2 \right) \Phi(r, t) \quad (2.16)$$

Die Gross-Pitaevskii Gleichung hat die Form einer Schrödingergleichung, besitzt allerdings noch einen Wechselwirkungsterm $g|\Phi(r, t)|^2$. Für die Lösung der Wellenfunktion wird folgender Ansatz gewählt: $\Phi(r, t) = \phi(r) \exp(-i\mu t/\hbar)$, mit dessen Hilfe die Gross-Pitaevskii Gleichung zeitunabhängig wird. Dabei ist μ das chemische Potential und $\phi(r)$ eine komplexe Funktion, aus der sich die Teilchenzahl $N_0 = \int dr |\phi(r)|^2$ im entarteten Quantengas bestimmen lässt. Der Ansatz wird in Gleichung

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

(2.16) eingesetzt und es bleibt eine Eigenwertgleichung zurück, die numerisch gelöst werden kann:

$$\left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{ext} + g|\phi(r)|^2 \right) \phi(r) = \mu \phi(r) \quad (2.17)$$

2.1.4 Thomas-Fermi Näherung

Im Allgemeinen lässt sich die Gross-Pitaevskii Gleichung (2.17) nur numerisch lösen [65]. Allerdings können wir einen analytischen Ausdruck für die Dichteverteilung der Atome im Kondensat angeben, wenn die interatomare Wechselwirkung E_{int} sehr viel größer als die kinetische Energie E_{kin} ist. Es gilt:

$$\frac{E_{int}}{E_{kin}} \propto \frac{N|a|}{a_{ho}} \quad (2.18)$$

Der Quotient E_{int}/E_{kin} liegt bei gängigen Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation im Bereich von 100 [66], so dass der kinetische Beitrag in der Gross-Pitaevskii Gleichung in guter Näherung vernachlässigt werden kann. In der Thomas-Fermi Näherung entsteht so ein relativ einfacher Ausdruck für die Dichteverteilung im Kondensat:

$$n(r) = |\phi(r)|^2 = \begin{cases} [\mu - V_{ext}(r)]/g & : \mu - V_{ext} > 0 \\ 0 & : \mu - V_{ext} \leq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Daraus folgt, dass die Form des Quantengases in einer harmonischen Falle parabolisch ist, während man bei einem thermischen Gas ein gaußförmiges Profil erwartet. Einen Zusammenhang zwischen dem chemischen Potential und der Teilchenzahl stellt die Beziehung $N = \int n(r) dr$ her [64]:

$$\mu = \frac{\hbar \omega_{ho}}{2} \left(\frac{15Na}{a_{ho}} \right)^{2/5} \quad (2.20)$$

Aus der Gleichung folgert man, dass das chemische Potential für schwach wechselwirkende Systeme größer als die Grundzustandsenergie ϵ_0 im harmonischen Oszillator ist. Die Ausdehnung der Atomwolke entspricht dem Thomas-Fermi Radius und ergibt sich aus der Relation $\mu = V_{ext}$ [64].

$$R = a_{ho} \left(\frac{15Na}{a_{ho}} \right)^{1/5} \quad (2.21)$$

Der Radius des Bose-Einstein Kondensats wächst dabei mit steigender Atomzahl an und ist stets größer als die Oszillatorlänge a_{ho} . In Abb. 2.3 ist die räumliche Ausdehnung eines entarteten Quantengases in einer harmonischen Falle ohne (gepunktete Linie) und mit schwacher (durchgezogene Linie) Wechselwirkung zu sehen. Die Thomas-Fermi Näherung beschreibt das Dichteprofil am Rand allerdings nur sehr

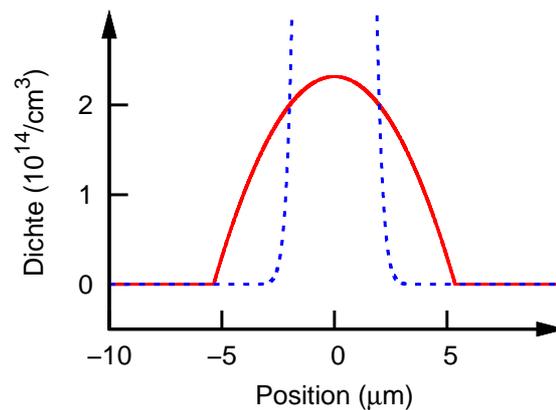


Abb. 2.3: Theoretisch erwartetes Dichteprofil eines Quantengases mit 10^5 Atomen und einer mittleren Fallenfrequenz $\omega_{ho} = 100\text{Hz}$ mit schwacher Wechselwirkung (rote Kurve) im Vergleich zur Grundzustandswellenfunktion des Harmonischen Oszillators (blaue Kurve).

ungenau, da dort die kinetische Energie nicht mehr vernachlässigt werden kann [67]. Eine charakteristische Größe, die diesen Effekt beschreibt, ist die Ausheillänge ζ und gibt die Entfernung an, auf der sich Variationen in der Dichteverteilung innerhalb des Kondensats vollziehen [64,68]. Sie ist gegeben, wenn die kinetische und die Wechselwirkungsenergie gleich sind.

$$\zeta = (8\pi n_{max} a)^{-1/2} \quad (2.22)$$

Die Ausheillänge ist in der Regel größer als die Streulänge und beträgt typischerweise für ein ^{87}Rb Bose-Einstein Kondensate $\zeta \approx 200\text{nm}$.

2.2 Magneto-optische Falle

In diesem Kapitel wird über die Funktionsweise und die experimentelle Realisierung einer Magneto-optischen Falle für ^{87}Rb -Atome berichtet. Atome können mit ihr lokal gefangen und auf Temperaturen von wenigen Mikrokkelvin abgekühlt werden [69]. Sie legt den Grundstein für die Bose-Einstein Kondensation.

2.2.1 Funktionsprinzip

Atome erfahren in einem Lichtfeld durch Absorption und stimulierte Emission eines Photons eine gerichtete Kraft (Strahlungsdruck) [70]. Der Kraftübertrag ist dabei umso größer, je näher die Frequenz des Lichtfelds an der Resonanz eines atomaren Übergangs liegt. Aufgrund der Dopplerverschiebung ist die Resonanzfrequenz

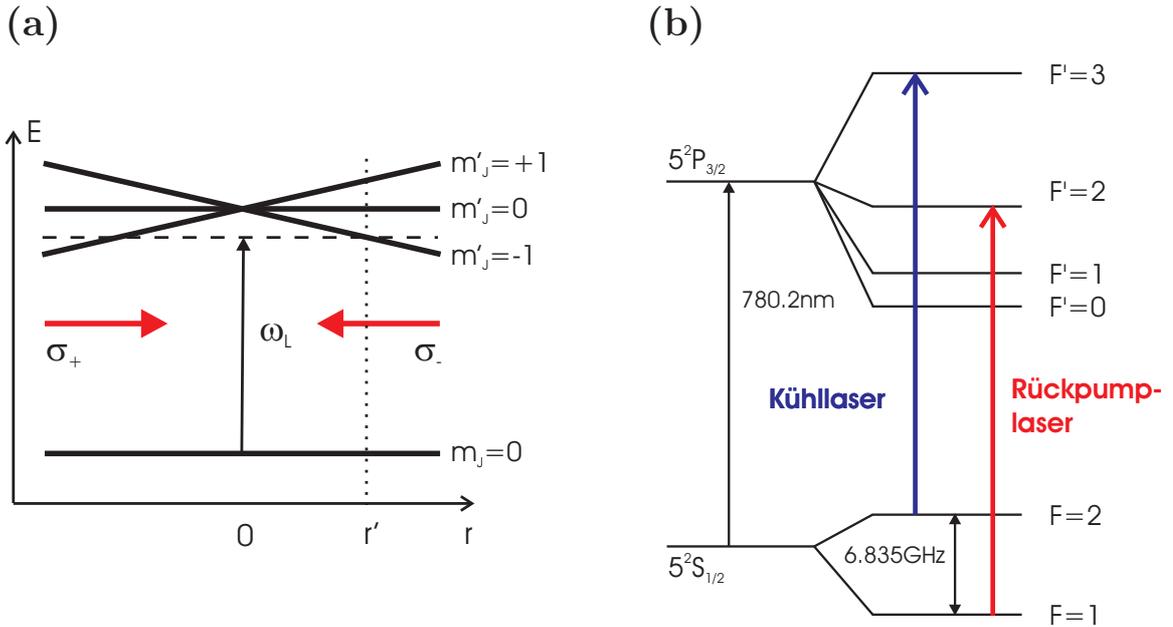


Abb. 2.4: (a) Funktionsprinzip der Magneto-optischen Falle in einer Dimension am Beispiel eines Übergangs $J = 0 \rightarrow J' = 1$. (b) Termschema der D2-Linie von ^{87}Rb . Die farbigen Pfeile kennzeichnen die zur Laserkühlung verwendeten atomare Übergänge.

geschwindigkeitsabhängig [71]. Zur Laserkühlung in einer optischen Melasse werden je Raumrichtung zwei Laserstrahlen in entgegengesetzter Richtung eingestrahlt. Die Atome lassen sich damit zwar kühlen aber noch nicht räumlich fangen. Aus diesem Grund überlagert man zum optischen Feld ein magnetisches Quadrupolfeld, das durch zwei Spulen in einer Anti-Helmholtz Anordnung erzeugt wird. Das Quadrupolfeld verläuft im Zentrum in guter Näherung linear und bewirkt somit eine positionsabhängige Zeemanaufspaltung der Energieniveaus. Abb. 2.4 (a) zeigt die räumliche Abhängigkeit der Energieniveaus im Atom für den Übergang $J = 0 \rightarrow J' = 1$. Die Polarisation des Lichts wird nun so gewählt, dass Atome, die aus dem Zentrum der Falle entweichen, resonanter zu dem entgegenlaufenden Laserstrahl sind und somit eine Kraft zum Fallenmittelpunkt erfahren. Die Magneto-optische Falle (MOT) ermöglicht so, Atome effizient zu kühlen und gleichzeitig in einer räumlichen Falle zu speichern. Wenn die Zeeman- und Dopplerverschiebung klein ist gegenüber der Verstimmung des Lasers, kann ein einfacher Ausdruck für den positions- und geschwindigkeitsabhängigen Kraftübertrag auf die Atome angegeben werden [72]:

$$F = -\beta v - \kappa r \quad (2.23)$$

wobei β und κ Konstanten für die geschwindigkeits- und positionsabhängige Kraft sind. Im vorliegenden Experiment sollen Rubidiumatome in einer MOT gekühlt werden. Die Kühlung findet auf dem atomaren Übergang $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ statt, der in Abb. 2.4 (b) als *Kühlaser* markiert ist. Durch die Auswahlregeln der Quan-

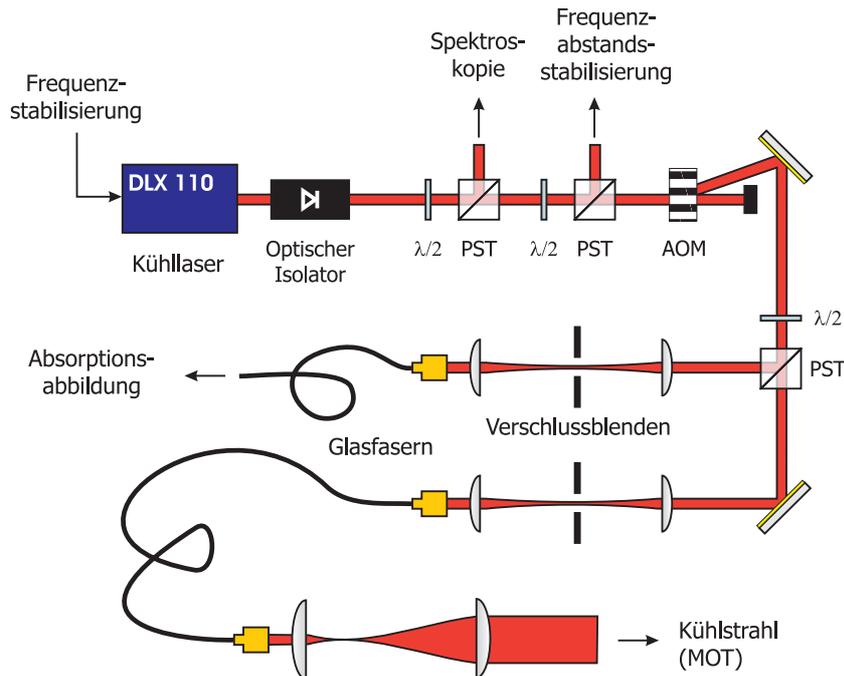


Abb. 2.5: Schematischer Aufbau der Optik des Kühllasers. Dabei gelten folgende Abkürzungen: Polarisierender Strahlteilerwürfel (PST), akusto-optischer Modulator (AOM)

tenmechanik gibt es allerdings noch weitere Übergänge, wodurch das Atom in den Grundzustand $F=1$ zerfallen kann. Atome, die sich in diesem Grundzustand befinden, können durch den Kühllaser nicht mehr angeregt werden und scheiden so aus dem Kühlkreislauf aus. Abhilfe schafft ein Rückpumpplaser, der auf dem Übergang $F = 1 \rightarrow F' = 2$ resonant betrieben wird, um die Atome wieder zurück in den Kühlkreislauf zu pumpen.

2.2.2 Experimenteller Aufbau

Als Kühllaser wird ein Trapez-Diodenlasersystem der Firma TOPTICA (Typ: DLX 110) verwendet, das Licht der Wellenlänge $\lambda = 780\text{nm}$ emittiert und eine maximale Leistung von 450 mW bringt. Der Strahlengang des Kühllasers ist in Abb. 2.5 dargestellt. Ein Teil des Laserlichts wird für die Spektroskopie und die Frequenzstabilisierung verwendet. Die Stabilisierung des Kühllasers wird auf eine konstante Differenzfrequenz zum Rückpumpplaser realisiert, der auf einem atomaren Übergang geregelt ist und so als Referenzlaser dient. Eine detaillierte Beschreibung der Frequenzabstandsstabilisierung findet sich in der Doktorarbeit von G. Ritt [73]. Der Hauptstrahl wird im weiteren Verlauf zur Intensitätsregulierung durch einen akusto-optischen Modulator (AOM) geführt. Hinter dem AOM wird ein Teil des Lichts mit einer Kombination aus Verzögerungsplatte und Strahlteiler abgespalten, der für die

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

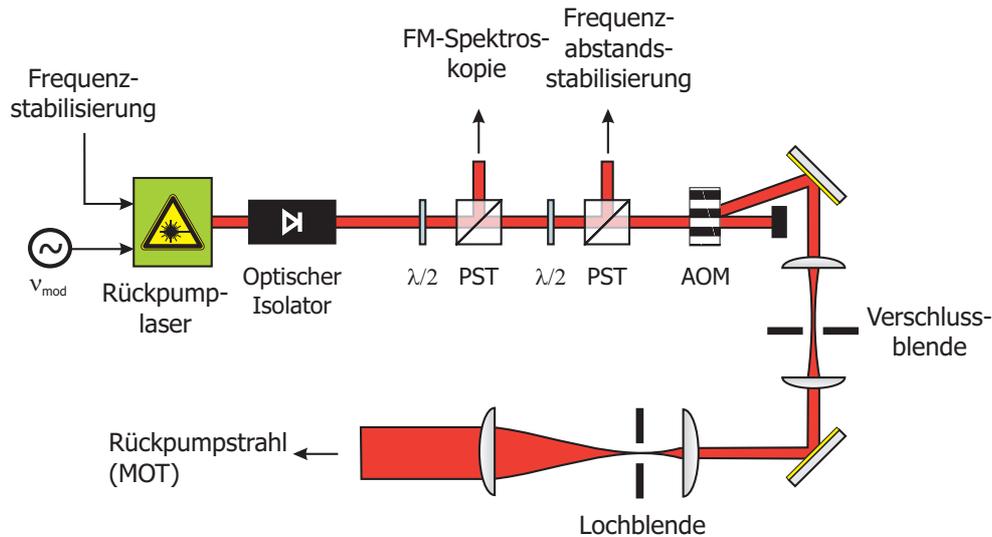


Abb. 2.6: Schematischer Aufbau der Optik des frequenzstabilisierten Rückpump-lasers. Dabei gelten folgende Abkürzungen: Polarisierender Strahlteilerwürfel (PST), akusto-optischer Modulator (AOM)

spätere Detektion der Atome auf einer CCD-Kamera dient. Eine Verschlussblende, die im Fokus eines Teleskops angebracht wird, gewährleistet, dass kein Streulicht auf die Atome trifft. Im weiteren Verlauf gelangt der Absorptionsstrahl über eine Glasfaser zur Vakuumkammer. Zur Unterdrückung von resonantem Streulicht wird auch im Hauptstrahl eine Verschlussblende eingebaut. Durch anschließendes Einkoppeln in eine Glasfaser erreicht man eine annähernd perfekte Gaußmode, die für eine effiziente Kühlung der Atome notwendig ist. Der Hauptstrahl besitzt nach der Faser eine Leistung von 100 mW und wird durch ein weiteres Teleskop auf einen Durchmesser von 2 cm aufgeweitet.

Der Rückpump-laser ist ein selbstgebautes gitterstabilisiertes Diodenlasersystem. Verwendet wird ein Laserdiodenchip mit einer maximalen Leistung von 120 mW. Der Aufbau des Lasers und das Funktionsprinzip der Wellenlängenselektion durch ein optische Reflexionsgitter ist in Referenz [74] beschrieben. Aus dem Hauptstrahl werden durch eine Kombination aus Verzögerungsplatte und Strahlteiler zwei Teilstrahlen abgezweigt. Der erste Strahl wird mit einem Teilstrahl des Kühllasers überlagert und dient der Frequenzabstandsstabilisierung des Kühlübergangs. Mit dem zweiten Teilstrahl wird eine dopplerfreie Frequenzmodulationsspektroskopie realisiert, wobei hier die Frequenz des Rückpump-lasers auf den atomaren Übergang $F = 1 \rightarrow F' = 2$ geregelt wird [75–77]. Im weiteren Verlauf gelangt das Licht des Hauptstrahls zur Intensitätsregelung in einen akusto-optischen Modulator. Das anschließende Teleskop weitet den Strahl auf einen Durchmesser von 2 cm auf, wobei sich im Fokus eine Lochblende mit einem Durchmesser von 50 μm befindet, um ein möglichst homogenes Strahlprofil zu erreichen.

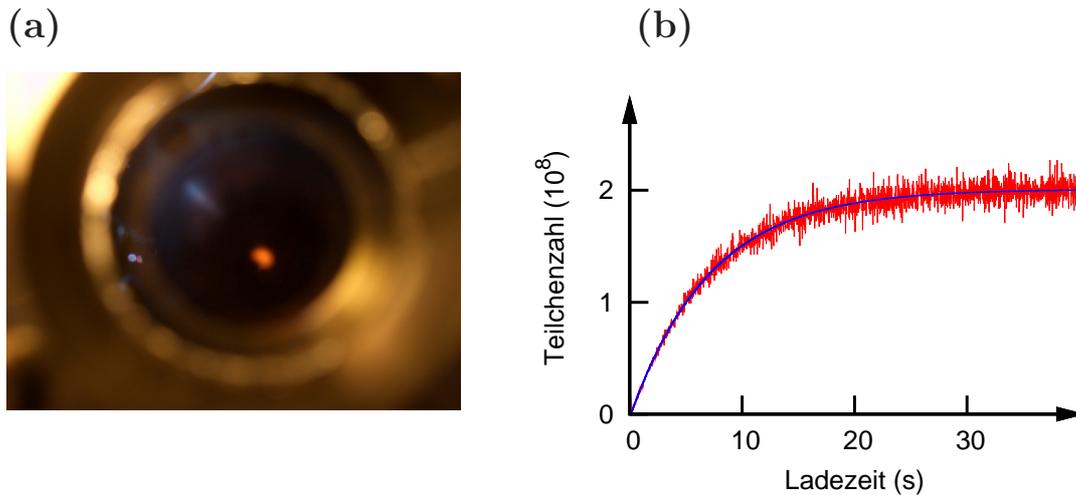


Abb. 2.7: (a) Aufnahme von Rubidiumatomen in einer Magneto-optischen Falle. (b) Ladekurve als Funktion der Zeit. Die MOT sättigt nach 20 Sekunden mit einer maximalen Teilchenzahl von $2 \cdot 10^8$.

Die beiden Strahlen von Rückpump- und Kühllaser werden durch einen polarisierenden Strahlteilerwürfel überlagert und anschließend mit Hilfe von weiteren Strahlteilern in drei Teilstrahlen ähnlicher Intensität aufgespalten. Alle Teilstrahlen durchlaufen zunächst eine $\lambda/4$ -Verzögerungsplatte um zirkular polarisiertes Licht zu erzeugen und werden anschließend senkrecht zueinander in die Vakuumkammer eingestrahlt. Nach dem Austritt aus der Kammer durchlaufen die Strahlen ein weiteres $\lambda/4$ -Plättchen und werden an einem Spiegel in sich zurückreflektiert. Dabei kehrt sich der Drehsinn des Lichts nach erneutem Passieren der $\lambda/4$ -Platte um, so dass die notwendigen Polarisationen für die Magneto-optische Falle vorhanden sind.

2.2.3 Experimentelle Ergebnisse

Für die Magneto-optische Falle wird der Rückpumlaser resonant auf den Übergang $F = 1 \rightarrow F' = 2$ stabilisiert, während der Kühllaser 21 MHz rotverstimmt zum Übergang $F = 2 \rightarrow F' = 3$ der D2-Linie ist. Die Rubidiumatome befinden sich zunächst in metallischer Form in einem Dispenser (Modell:RB/NF/3.4/12FT+10, Firma: SEAS Getters) und werden durch Anlegen eines konstanten Stroms (5.0 A) in der Vakuumkammer verdampft. Zeitgleich wird das MOT-Licht und das Quadrupolfeld für die Aufspaltung der Zeeman-Zustände angeschaltet. Der Strom durch die MOT-Spulen beträgt dabei 5.6 A und erzeugt so ein magnetisches Gradientenfeld im Zentrum von 12 G/cm. Zusätzlich werden pro Raumrichtung zwei Magnetfeld-Kompensationsspulen angebracht, mit deren Hilfe man die Position der MOT verschieben kann. Das Fluoreszenzlicht der Atome in der MOT wird mit einer Fotodiode aufgenommen und auf einem Oszilloskop graphisch dargestellt. Abb. 2.7 (b) zeigt eine typische Ladekurve der Magneto-optischen Falle.

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

Die Anzahl der gefangenen Atome wächst exponentiell an und erreicht nach ca. 20 Sekunden ein Maximum bei ungefähr $2 \cdot 10^8$ Atomen. Die maximale Teilchenzahl ist begrenzt, da durch Reabsorption von gestreuten Photonen und Stößen mit dem Hintergrundgas bereits gefangene Teilchen wieder aus der Falle entweichen [78,79]. Bei einer gemessenen Temperatur im Bereich der Dopplertemperatur von $150 \mu\text{K}$ wird in der Magneto-optischen Falle eine Phasenraumdichte von etwa $n\lambda_{dB}^3 = 4 \cdot 10^{-7}$ erreicht [66,80]. Es fehlen für den Phasenübergang zum Bose-Einstein Kondensat demnach noch sieben Größenordnungen.

Ein weiterer wichtiger Schritt auf dem Weg zum entarteten Quantengas ist die sogenannte *dunkle MOT* [66,81]. Während einer 120 ms langen dunklen MOT-Phase wird die Frequenz des Kühllaser schrittweise um bis zu 230 MHz rotverstimmt und zeitgleich die Leistung des Rückpumpasers um einen Faktor 100 reduziert. Die Atome werden dabei hauptsächlich in den unteren Hyperfeinzustand $F = 1$ gepumpt und können so nicht mehr vom Kühllaser angeregt werden, was zur Reduzierung von lichtinduzierten Verlusten und Stößen zwischen Atomen im Grund- und angeregten Zustand führt. Die Folge ist eine Erhöhung der Dichte bei gleichzeitiger Absenkung der Temperatur auf $40 \mu\text{K}$. Das Verdichten der Atomwolke ist ausschlaggebend für ein effizientes Umladen in eine optische Dipolfalle, in der im weiteren Verlauf das Bose-Einstein Kondensat realisiert werden soll [82].

2.3 Optische Dipolfalle

Dieser Abschnitt beschreibt das Funktionsprinzip und die experimentelle Realisierung einer optischen Dipolfalle.

2.3.1 Wechselwirkung zwischen Licht und Materie

Wenn ein Photon mit einem Atom wechselwirkt, dann wird Energie und Impuls ausgetauscht, wobei man zwischen einem kohärenten (stimulierten) und einem inkohärenten (spontanen) Austausch unterscheiden muss. Die spontane Lichtkraft ist wichtig für nahverstimnte Lichtfelder und wird in unserem Experiment zur Laserkühlung sowie zum Fangen von Atomen in einer Magneto-optischen-Falle benutzt. Da bei der spontanen Emission das Photon in sämtliche Raumrichtungen abgegeben werden kann, bekommt das Atom im Mittel keinen Impuls in eine definierte Richtung übertragen, so dass der mittlere Impulsübertrag auf das Atom allein vom Absorptionsprozess abhängt. Für fernverstimnte Lichtfelder dominiert hingegen der kohärente Austausch und Photonen werden stimuliert in die Mode des anliegenden Laserfelds abgegeben. Im Folgenden wird gezeigt, dass bei einem solchen Übergang die Energieniveaus des Atoms verschoben werden. Den Effekt bezeichnet man auch

als dynamische *Stark-Verschiebung*; er beruht auf der Wechselwirkung zwischen dem induzierten Dipolmoment im Atom und dem Lichtfeld.

2.3.2 Fallenpotential und Streurrate

Wenn ein Atom einem Lichtfeld ausgesetzt wird, dann induziert das elektrische Lichtfeld ein Dipolmoment im Atom, das mit derselben Frequenz oszilliert, wie das anliegende Lichtfeld. Zur Vereinfachung wird hier linear polarisiertes Licht angenommen, dessen Polarisations Ebene entlang des Einheitsvektors \hat{e} liegt. Es gilt für das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e} \tilde{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t} + \hat{e} \tilde{E}^*(\vec{r}) e^{i\omega t} \quad (2.24)$$

und für das induzierte Dipolmoment im Atom

$$\vec{d} = \alpha(\omega) \vec{E} \quad (2.25)$$

Die Proportionalitätskonstante $\alpha(\omega)$ beschreibt die Polarisierbarkeit des Atoms und hängt von der Lichtfrequenz ω ab. Im Allgemeinen kann die Polarisierbarkeit ein Tensor sein. Für ein isotropes Medium, wie es für Alkaliatome zutrifft, stellt α allerdings ein komplexes Skalar dar [83]. Die Wechselwirkungsenergie zwischen dem Atom und dem Lichtfeld bestimmt sich aus der zeitlichen Mittelung des induzierten Dipolmoments und des elektrischen Feldes.

$$V_{dip} = -\frac{1}{2} \langle \vec{d} \vec{E} \rangle = -\frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) I(\vec{r}) \quad (2.26)$$

Der Faktor 1/2 entsteht, da es sich hier um ein induziertes Dipolmoment handelt. Die zeitliche Mittelung der Gleichung über eine Schwingungsperiode wird über die spitzen Klammern ausgedrückt und $I(\vec{r}) = 1/2\epsilon_0 c |\tilde{E}(\vec{r})|^2$ bezeichnet die Intensität des Lichtfeldes.

Der Realteil von $\alpha(\omega)$ beschreibt die Komponente der Polarisierbarkeit, die sich in Phase mit dem elektrischen Feld befindet. Aus dem räumlichen Gradienten von Gleichung (2.26) ergibt sich die optische Dipolkraft auf das induzierte Dipolmoment im Atom.

$$F_{dip}(\vec{r}) = -\nabla V_{dip}(\vec{r}) = \frac{1}{2\epsilon_0 c} \text{Re}(\alpha) \nabla I(\vec{r}) \quad (2.27)$$

Die vom Oszillator absorbierte Leistung und als Dipolstrahlung wieder abgegebene Leistung ist gegeben durch

$$P_{abs} = \langle \dot{d} E \rangle = \frac{\omega}{\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\vec{r}) \quad (2.28)$$

Aus ihr ergibt sich die Photonenstreurrate Γ_{scat} , die proportional zum Imaginärteil der Polarisierbarkeit ist.

$$\Gamma_{scat}(\vec{r}) = \frac{P_{abs}}{\hbar\omega} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\vec{r}) \quad (2.29)$$

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

Sowohl die Potentialtiefe als auch die Streurrate hängen von der Polarisierbarkeit $\alpha(\omega)$ und der Intensität des Lichtfelds $I(\mathbf{r})$ ab. Eine Bestimmung der komplexen Polarisierbarkeit α ist in einem klassischen Modell mit dem Oszillator-Modell von Lorentz möglich [84, 85]. Hier ist das Elektron harmonisch an den Atomkern mit der Federkonstante D gebunden, wobei $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ die Eigenfrequenz des Oszillators ist. Das äußere elektrische Feld $\vec{E}(\vec{r}, t)$ mit der Winkelfrequenz ω führt zu einer erzwungenen Schwingung des Elektrons. Die Dämpfung dieser Oszillationsbewegung geschieht in diesem Modell durch die elektromagnetische Bremsstrahlung des beschleunigten Elektrons. Aus dem klassischen Oszillatormodell kann ein Ausdruck für die komplexe Polarisierbarkeit gewonnen werden:

$$\alpha(\omega) = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (2.30)$$

Die Dämpfungsrate entspricht in einer semiklassischen Beschreibung der spontanen Zerfallsrate des angeregten Zustands im Atom. Diese ergibt sich aus dem Zweiniveausystem als:

$$\Gamma = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3} |\langle a|\hat{\mu}|g\rangle|^2 \quad (2.31)$$

wobei der Dipoloperator $\hat{\mu} = -e\vec{r}$ ist.

Im Gegensatz zum klassischen Oszillatormodell kann es in der rein quantenmechanischen Beschreibung bei hohen Feldstärken zur Sättigung des angeregten Zustands kommen. In diesem Fall würde die Gleichung (2.30) nicht mehr stimmen. Bei stark verstimmtten Lichtfeldern ist der Effekt der Sättigung allerdings meist sehr gering, so dass der Ausdruck (2.30) bei üblichen Lichtintensitäten auch für den quantenmechanischen Oszillator verwendet werden kann.

Nachdem die Polarisierbarkeit α bekannt ist, lassen sich die Potentialtiefe und Streurrate nun schreiben als:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\vec{r}) \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{scat}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\vec{r}) \quad (2.33)$$

Bei nah-resonanten Fällen ist die Verstimmung $\Delta = \omega - \omega_0$ dem Betrag nach klein gegebenüber der Resonanzfrequenz ω_0 eines atomaren Übergangs. Durch die sogenannte *Drehwellennäherung* werden schnell rotierende Terme, wie $(\omega_0 + \omega)$ vernachlässigt und es gilt für den Quotient $\omega/\omega_0 \approx 1$. Bei diesem Fallentyp vereinfachen sich



Abb. 2.8: (a) Ein rotverstimmter Laser ($\Delta < 0$) erzeugt ein attraktives Potential. Die Atome sammeln sich im Zentrum des Gaußprofils (b) Ein blauverstimmter Strahl ($\Delta > 0$) erzeugt ein repulsives Potential. Die Atome werden aus dem Zentrum weggedrückt.

die beiden Gleichungen zu:

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\vec{r}) \quad (2.34)$$

$$\Gamma_{scat}(\vec{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\vec{r}) \quad (2.35)$$

Man kann bereits jetzt einige wichtige Eigenschaften für Dipolfallen ableiten. Zum Einen hängt die Potentialtiefe und Streurrate von der Laserintensität $I(\vec{r})$ ab und zum Anderen vom Quotienten Γ/Δ . Je nachdem, ob man rotverstimmte ($\Delta < 0$), oder blauverstimmte ($\Delta > 0$) Strahlen verwendet, kann das Potential attraktiv oder repulsiv sein. Wegen der gaußförmigen Geometrie der Laserstrahlen lassen sich so bereits Atome in einer laufenden Dipolfalle fangen [82]. Wie in Abb. 2.8 (a) dargestellt, werden Atome bei rotverstimmten Lichtfeldern in das Zentrum des Gaußstrahls gezogen während bei blauverstimmten Lichtfelder die Atome aus dem Zentrum des Gaußstrahls weggedrückt werden (siehe Abb. 2.8 (b))

Üblicherweise soll in einer optischen Dipolfalle ein möglichst tiefes Potential erreicht werden, wobei gleichzeitig eine geringe Streurrate gefordert wird. Wird der Quotient aus den Gleichungen (2.34) und (2.35) gebildet, so ergibt sich

$$\frac{\Gamma_{scat}}{V_{dip}} = \frac{\Gamma}{\hbar\Delta} \quad (2.36)$$

Konservative Fallenpotentiale können demnach mit weit fernverstimmten Laserstrahlen realisiert werden, wobei allerdings hohe Lichtintensitäten nötig sind.

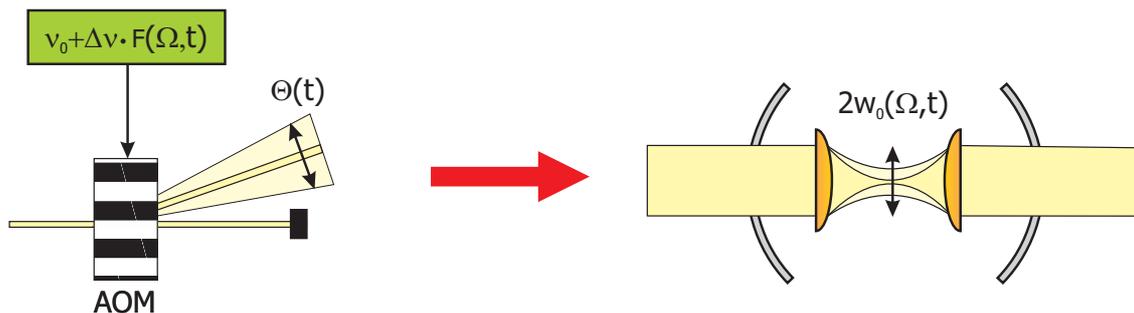


Abb. 2.9: Eine zeitliche Modulation der Radiofrequenz am akusto-optischen Modulator bewirkt eine periodische Änderung des Ablenkwinkels des Laserstrahls. Wenn die Frequenzmodulation schneller als die Vibrationsfrequenz der Atome in der Dipolfalle ist, dann erscheint die Strahltaile im Fokus einer Linse im zeitlichen Mittel aufgefächert.

2.3.3 Räumliche Modulation des CO₂-Dipolfallenstrahls

In vielen Experimenten zur Bose-Einstein Kondensation in optischen Dipolfallen stellt sich die Frage, wie man möglichst viele Atome von der Magneto-optischen Falle in die Dipolfalle umladen kann. Das eigentliche Problem ist dabei, dass der CO₂-Strahl sehr viel kleiner ist im Vergleich zur MOT. Aus rein geometrischen Gründen sollte die Umladerate im Bereich von 2-5% liegen. Man kann diesen Faktor erhöhen, indem der Laserstrahl räumlich vergrößert wird. Demgegenüber steht allerdings, dass während des evaporativen Kühlens in der Dipolfalle eine extrem schmale Taille benötigt wird. Eine Möglichkeit, dieses Problem zu umgehen, ist mit einem möglichst breiten Strahl zum Umladen in die optische Dipolfalle anzufangen und diesen während des Verdampfungskühlens schrittweise zu verkleinern. In der Vergangenheit wurde diese Technik in der Gruppe von D. Weiss erfolgreich umgesetzt [86]. Hierbei wurde der Strahldurchmesser durch Verschieben einer Teleskoplinse von anfänglich 300 μm auf 50 μm reduziert, was eine Erhöhung der Atomzahl im Bose-Einstein Kondensat um einen Faktor acht nach sich zog.

Eine ähnliche Methode wurde nun auch in der vorliegenden Arbeit verfolgt. Allerdings wird hier keine Linse verschoben, sondern der Strahl durch eine schnelle räumliche Modulation aufgeweitet. Die Frequenz der Modulation ist dabei sehr viel höher als die Vibrationsfrequenz der Atome in der Falle, damit ein zeitlich gemitteltes Potential entsteht. Während des evaporativen Kühlens der Atome wird dann die räumliche Modulation des Strahls elektronisch reduziert.

Betrachten wir zunächst die Intensitätsverteilung in der Brennebene eines gaußförmigen Laserstrahls. Sie wird beschrieben durch eine Gaußfunktion:

$$I(r) = I_0 \cdot e^{-2\left(\frac{r}{w_0}\right)^2} \quad (2.37)$$

wobei die Strahltaile w_0 den Radius angibt, an der die Intensität auf $1/e^2$ abfällt. Die Aufweitung des mittleren Strahlradius wird hier über einen akusto-optischen Modulator erzeugt, der durch Anlegen einer Radiofrequenz Licht in eine höhere Beugungsordnung ablenkt. Neben der Trägerfrequenz ν_0 wird zusätzlich eine zeitabhängige Frequenzmodulation $\nu_{mod} = \Delta\nu \cdot F(\Omega, t)$ erzeugt, womit die effektive Radiofrequenz zur Ansteuerung des AOMs aus einem DC- und einem AC-Anteil besteht:

$$\nu(t) = \nu_0 + \Delta\nu \cdot F(\Omega, t) \quad (2.38)$$

wobei $F(\Omega, t)$ eine beliebige periodische Funktion ist, die den zeitlichen Verlauf der Radiofrequenz beschreibt. Der Ablenkwinkel $\Theta(t)$ für die erste Beugungsordnung in einem akusto-optischen Modulator wird über die Bragg-Bedingung definiert.

$$2\Lambda(t) \cdot \sin[\Theta(t)] = \lambda \quad (2.39)$$

wobei λ die Wellenlänge des Dipolfallenstrahls ist und die Wellenlänge der Schallwelle $\Lambda(t) = v_s/\nu(t)$ von der Schallgeschwindigkeit v_s und der angelegten Radiofrequenz $\nu(t)$ abhängt. Aus dieser Beziehung lässt sich ein Zusammenhang zwischen dem Ablenkwinkel und der Radiofrequenz ableiten. Bei kleinen Winkeländerungen gilt die Näherung $\sin[\Theta(t)] \approx \Theta(t)$, womit sich nun folgende Relation ergibt:

$$\Theta(t) = \lambda \cdot \frac{\nu(t)}{2v_s} = \frac{\lambda\nu_0}{2v_s} + \frac{\lambda\Delta\nu}{2v_s}F(\Omega, t) \quad (2.40)$$

Aus der Gleichung entnimmt man, dass zur gewöhnlichen Strahlablenkung eine zusätzliche zeitabhängige Winkeländerung aufgrund der Frequenzmodulation hinzukommt. Der Fokus des Dipolfallenstrahls erfährt dabei in der Vakuumkammer einen transversalen Versatz, der bei sehr schneller zeitlicher Modulation das effektive Dipolfallenpotential ausschmiert und die Falle räumlich vergrößert. Eine detaillierte Beschreibung des Verfahrens ist in der Diplomarbeit von J. Plumhof nachzuschlagen [87].

2.3.4 Experimenteller Aufbau

Nach der Vorkühlung durch die Magneto-optische Falle werden die Atome in eine optische Dipolfalle umgeladen, die durch einen CO₂-Laser erzeugt wird. Es handelt sich dabei um einen Industrielaser, der für wissenschaftliche Zwecke umgebaut wurde (Coherent, GEM-50s). Im Laser befindet sich ein Resonator an dessen Ende ein bewegliches Gitter befestigt ist, mit dem eine Wellenlänge im Bereich von 9.2 μm bis 10.9 μm ausgewählt werden kann. Die maximale Ausgangsleistung von 55 W wird mit dem Rotationszustand 10P(20) bei einer Wellenlänge von 10.6 μm erreicht.

Der optische Aufbau zur Erzeugung der Dipolfalle ist in Abb. 2.10 zu sehen. Der Laserstrahl durchläuft zunächst einen wassergekühlten akusto-optischen Modulator

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

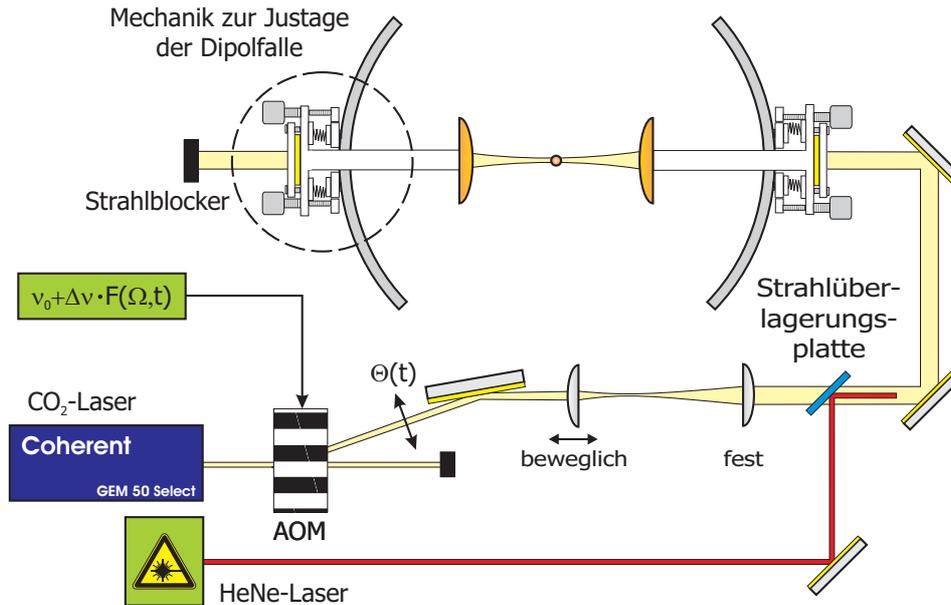
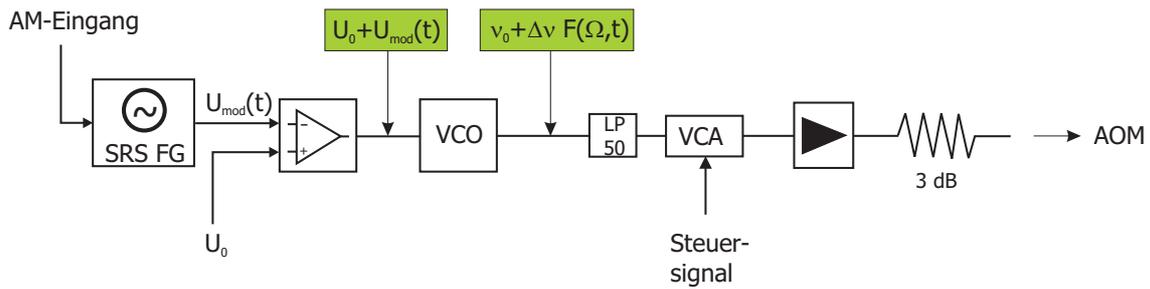


Abb. 2.10: Schematischer Aufbau zur experimentellen Realisierung einer optischen Dipolfalle mit Hilfe eines CO₂-Lasers.

der neben dem Schalten und der Intensitätsregulierung zusätzlich den Dipolfallenstrahl räumlich moduliert. Dazu wird neben der Trägerfrequenz von 40 MHz eine periodisch modulierte Frequenz hinzugefügt. Die Erzeugung der Radiofrequenz für den akusto-optischen Modulator wird im nächsten Absatz beschrieben. Anschließend passiert der CO₂-Laserstrahl ein Teleskop mit Brennweiten von 63.5 mm und 127 mm. Die erste Linse ist dabei auf einer Justierschiene frei beweglich, um die Strahltaile in der Dipolfalle über einen weiten Bereich zu verändern. Dem CO₂-Laserstrahl wird anschließend mit einer Strahlüberlagerungsplatte ein Helium-Neon Laser überlagert. Die Strahlüberlagerungsplatte ist transparent für Infrarotlicht und reflektierend für das sichtbare Licht des Helium-Neon-Lasers bei einer Wellenlänge von 632.8 nm. Das rote Helium-Neon Licht hilft dabei, den unsichtbaren CO₂-Strahl im weiteren Verlauf bequem zu justieren. In der Vakuumkammer befinden sich zwei Zinkselenid-Linsen mit einer Brennweite von 38.1 mm, die den Laserstrahl in das Zentrum der Vakuumkammer fokussieren. Durch Variation des Linsenabstands im Teleskop kann der Strahlradius im Bereich von 25 μm bis 50 μm eingestellt werden. Der Strahl wird durch eine zweite Zinkselenid-Linse beim Austreten aus der Vakuumkammer kollimiert und trifft danach auf einen Strahlblocker.

Die Elektronik für das zeitliche Modulieren des Dipolfallenstrahls ist in Abb. 2.11 schematisch dargestellt. An den Eingängen eines Addierers befindet sich eine konstante Spannung U_0 und das Ausgangssignal eines Funktionsgenerators der eine Wechselspannung $U_{mod}(t)$ liefert. Die Summe der Eingangsspannungen wird am Ausgang des Addierers auf einen spannungsgesteuerten Oszillator gegeben, der die Spannung in eine zeitabhängige Radiofrequenz $\nu_0 + \Delta\nu \cdot F(\Omega, t)$ umwandelt. Dabei ist



Legende:

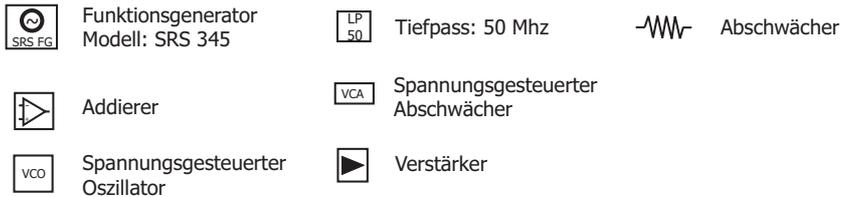


Abb. 2.11: Aufbau der Elektronik zur Modulation des CO_2 -Dipolfallenstrahls. Das Radiofrequenzsignal wird auf einen akusto-optischen Modulator gegeben, der die Intensität des Lasers reguliert und ein vergrößertes Fallenpotential erzeugt. In der Legende befindet sich eine Erläuterung der elektronischen Bauteile.

$\nu_0 = 40\text{MHz}$ die Trägerfrequenz für den akusto-optischen Modulator, $\Delta\nu$ die Amplitude und $F(\Omega, t)$ der zeitliche Verlauf der Frequenzmodulation. Durch einen Tiefpass bei einer Grenzfrequenz von 50 MHz werden störende Oberwellen aus der Schaltung herausgefiltert. Während der Evaporation muß die Potentialtiefe der Dipolfalle und somit die RF-Leistung schrittweise reduziert werden. Dies gelingt mit einem spannungsgesteuerten Abschwächer (VCA), der abhängig vom Steuersignal ein entsprechend reduziertes RF-Signal ausgibt. Am Ausgang des VCA wird das Signal bei einer maximalen Amplitude von 0 dBm durch einen Verstärker auf eine Leistung von 100 W verstärkt. Es hat sich in der Vergangenheit gezeigt, dass ein Teil des verstärkten Radiofrequenzsignals am Eingang des akusto-optischen Modulators reflektiert wird. Die Reflexion gelangt dabei in den Ausgangskanal des Verstärkers und kann dort die Elektronik zerstören. Abhilfe schafft ein 3dB Abschwächer, der zwischen Endstufe und AOM geschaltet ist. Die Ausgangsleistung des Verstärkers wird durch den Abschwächer zwar um die Hälfte reduziert, die Leistung reicht allerdings für eine optimale Beugungseffizienz des AOMs aus. Eventuelle Reflexionen am AOM werden erneut um 3dB abgeschwächt, so dass reflektierende Störsignale nach zweimaligen Durchlaufen des Abschwächers um 6dB reduziert werden. Dies erwies sich als hinreichend, um einen zuverlässigen Betrieb des Aufbaus zu erreichen.

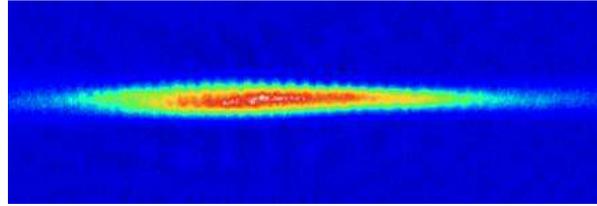


Abb. 2.12: In Falschfarben kodierte Aufnahme von Rubidiumatomen in einer optischen Dipolfalle. Die Strahlachse des Lasers liegt dabei in horizontaler Richtung.

2.3.5 Experimentelle Ergebnisse

Nach dem Vorkühlen der Atome in einer Magneto-optischen Falle und der anschließenden dunklen MOT-Phase sollte die Geschwindigkeit der Rubidiumatome klein genug sein, um sie im Fokus des CO_2 -Dipolfallenlasers zu fangen. Nach einer Transferzeit von 200 ms werden die MOT-Strahlen und das Quadrupolfeld ausgeschaltet, während die Dipolfalle noch für eine weitere Sekunde angeschaltet bleibt. In dieser Zeit fallen die nicht im Dipolfallenpotential eingeschlossenen Atome aufgrund der Gravitation ballistisch nach unten und es bleiben nur noch die Atome in der optischen Dipolfalle zurück. Anschließend wird der resonante Absorptionsstrahl eingeschaltet und auf eine CCD-Kamera abgebildet. Dort, wo der Strahl auf Atome trifft, werden Photonen gestreut und es bleibt ein Schattenwurf von Atomen in der Dipolfalle zurück, der von der Kamera aufgenommen wird. Abb. 2.12 zeigt eine in Falschfarben kodierte Aufnahme von Atomen in der Dipolfalle. Die zigarrenförmige Form entsteht durch den starken Einschluß entlang der Transversalen und dem relativ schwachen Einschluß entlang der Longitudinalen des CO_2 -Strahls. Die Parameter wurden zunächst so gewählt, dass im unmodulierten Fall eine maximale Transferrate von der MOT in die Dipolfalle besteht.

Es soll nun untersucht werden, wie die Umladerate von der Modulation des CO_2 -Strahls abhängt. Die verwendete Modulationsfrequenz $\Omega = 50\text{kHz}$ ist sehr viel größer als die Vibrationsfrequenzen der Falle, um sicherzustellen, dass die Atome ein zeitlich gemitteltes Potential spüren. Abb. 2.13 (a) zeigt experimentelle Daten, welche die Abhängigkeit der Atomzahl in der Dipolfalle - normiert auf den unmodulierten Fall - als Funktion der Modulationsamplitude $\Delta\nu$ darstellt. Je größer die Amplitude ist, desto breiter wird die Strahltaile der Falle und es zeigt sich, dass man dadurch die in die Dipolfalle umgeladene Atomzahl um etwa 30 % gegenüber dem unmodulierten Fall steigern kann. Dabei macht es offenbar keinen Unterschied, ob die Modulation der AOM-Frequenz sinus- oder dreiecksförmig ist. Ab einer Modulationsamplitude von 3 MHz wird die Umladeeffizienz allerdings wieder kleiner. Dies liegt daran, dass zum Einen der CO_2 -Strahl immer breiter wird und der Rand am Vakuumfenster abgeschnitten wird und zum Anderen an der kleiner werdenden Potentialtiefe, so dass nur noch sehr kalte Atome gefangen werden können. In einem weiteren Experi-

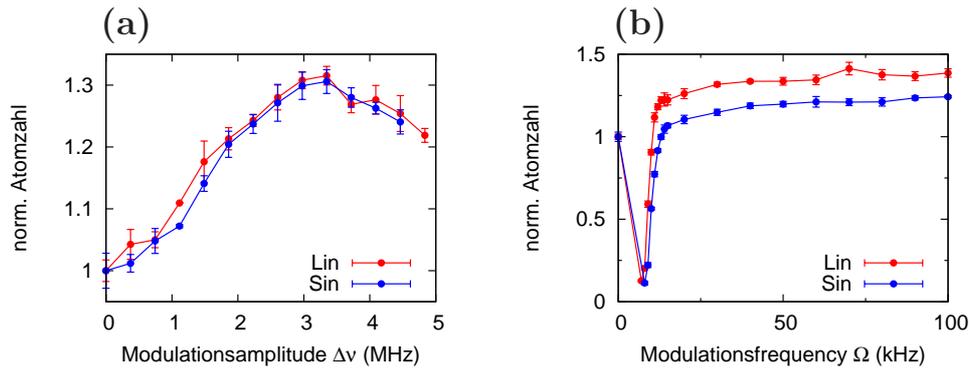


Abb. 2.13: Abhängigkeit der Atomzahl in der Dipolfalle von der (a) Modulationsamplitude und der (b) Modulationsfrequenz. Die Modulationsamplitude ist ein Maß für die räumliche Verbreiterung der Dipolfalle während die Modulationsfrequenz die Geschwindigkeit der Frequenzänderung am akustooptischen Modulator angibt.

ment wird der Einfluß der Modulationsfrequenz Ω bei einer festen Modulationsamplitude von $\Delta\nu = 3\text{MHz}$ auf die Umladerate untersucht, wobei die experimentellen Daten in der Abb. 2.13 (b) gezeigt sind. Bei einer Modulationsfrequenz unterhalb von 15 kHz nimmt die Anzahl der Atome in der Dipolfalle dramatisch ab. Hier liegen wir im Bereich der Vibrationsfrequenz, so dass Atome aus der Falle entweichen. Oberhalb von etwa 20 kHz nehmen die Atome aufgrund ihrer Trägheit nur noch ein zeitlich gemittelt Potential war. Die Transferrate in die Dipolfalle wird mit höherer Modulationsfrequenz nur noch minimal verbessert und im optimierten Fall kann man eine Erhöhung von etwa 30% erwarten.

Die Phasenraumdicke beträgt in der Dipolfalle typischerweise $n\lambda_{dB} \approx 10^{-4}$ und ist damit ein guter Ausgangspunkt für das Verdampfungskühlen, der schließlich zum entarteten Quantengas führt [88].

2.4 Verdampfungskühlen

2.4.1 Funktionsprinzip

Das Verdampfungskühlen von Atomen beruht auf dem Prinzip, heiße Atome selektiv aus der Dipolfalle zu entfernen. Anschließend rethermalisiert das übrige Ensemble durch Zweikörperstöße zu einer Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung kleinerer Temperatur [89]. In optischen Dipolfallen wird üblicherweise für die evaporative Kühlung die Leistung des Fallenlaserstrahls verringert. Die Methode wurde zum ersten Mal in der Gruppe von Steven Chu erfolgreich getestet [90].

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

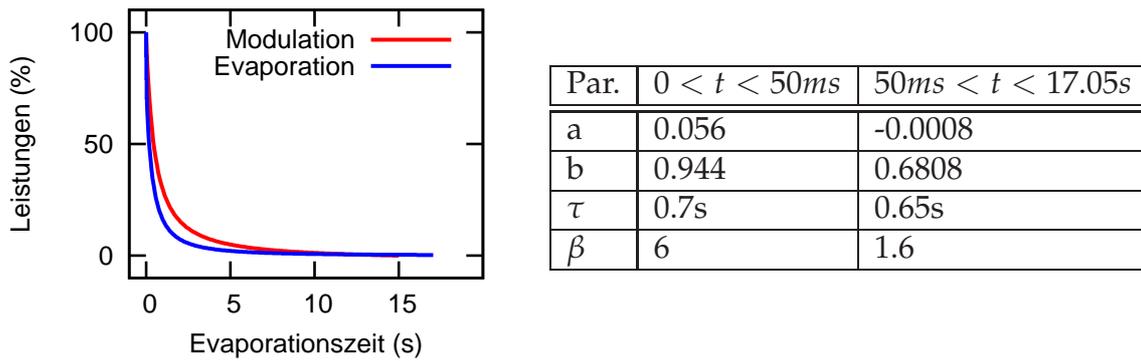


Abb. 2.14: (links) Schematische Darstellung der Laserintensität (blau) und der Modulationsamplitude (rot) im zeitlichen Verlauf während des Verdampfungskühlens. (rechts) Die Tabelle enthält die Parameter für die im Experiment verwendete Evaporationsrampe nach Gleichung (2.42).

Eine optimale Kühlung von Rubidiumatomen in einer optischen Dipolfalle wird erreicht wenn das Verhältnis $\eta = U/k_B T$ von Potentialtiefe U zu thermischer Energie $k_B T$ während des evaporativen Kühlens zeitlich konstant im Bereich von 10 liegt. [91]. Eine anfänglich hohe Stoßrate durch eine hohe Atomzahl in der Dipolfalle führt außerdem zu einer besseren Kühlung der Atome [92]. Um das Verhältnis η im zeitlichen Verlauf konstant zu halten, folgt das Absenken der Potentialtiefe einer bestimmten Form [93]:

$$U(t) = \frac{U_0}{(1 + t/\tau)^\beta} \quad (2.41)$$

wobei $\beta = 2(\eta - 3)/\eta$ und $1/\tau = 2/3\eta(\eta - 4) \exp(-\eta)\gamma_0$ ist. Dabei steht γ_0 für die elastische Stoßrate eines Bose Gases in einer harmonischen Falle. Es lassen sich so Temperaturen von einigen nK bei einer Dichte von 10^{14} Atomen pro cm^3 erreichen. Die resultierende Phasenraumdichte kann Größen von $n\lambda_{dB} \approx 10^2 - 10^3$ erreichen, so dass die Entartung des Bose-Gases möglich ist [88].

2.4.2 Experimentelle Ergebnisse

Nach dem Umladen der Atome in die optische Dipolfalle wird die Leistung des CO_2 -Lichts in der ersten Beugungsordnung des wassergekühlten akusto-optischen Modulators nach Gleichung (2.41) kontinuierlich verringert. Dazu wird über ein Steuersignal am spannungsgesteuerten Abschwächer die Leistung der Radiofrequenz zeitlich verändert (siehe Abb. 2.11).

Die Form der im Experiment verwendeten Evaporationsrampe ist in Abb. 2.14 (blaue Kurve) dargestellt und unterteilt sich in zwei Bereiche, wobei die entsprechenden

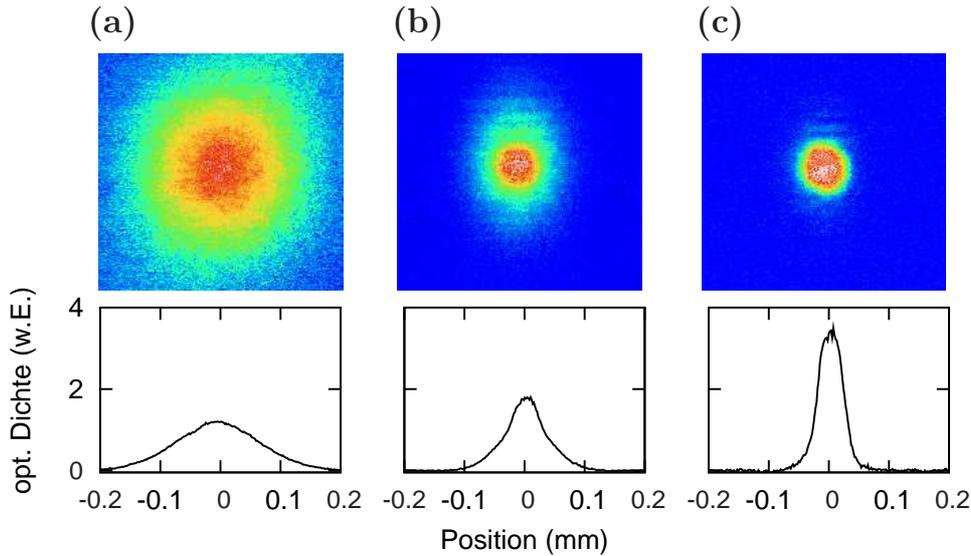


Abb. 2.15: In Falschfarben kodierte Absorptionaufnahme von Rubidiumatomen während des Phasenübergangs zum Bose-Einstein Kondensat. Darunter ist die Dichteverteilung des Ensembles dargestellt: (a) Thermische Verteilung, (b) Mischung aus thermischen und kondensierten Atomen, (c) Bose-Einstein Kondensat.

Parameter in der Tabelle aufgelistet sind:

$$\frac{P(t)}{P_{max}} = \left[a + \frac{b}{(1 + t/\tau)^\beta} \right] \cdot 100\% \quad (2.42)$$

Innerhalb der ersten 1-2 Sekunden wird die Laserleistung um mehr als 70% abgesenkt, wobei ein Großteil der Atome aus der Dipolfalle entweicht und dabei Energie aus dem System abführt. Das übrige Ensemble rethermalisiert daraufhin hauptsächlich durch Zweikörperstöße zu tieferen Temperaturen, wodurch die Phasenraum-dichte kontinuierlich ansteigt. Im weiteren zeitlichen Verlauf wird die Laserleistung kontinuierlich abgesenkt, wobei ein Phasenübergang zum Bose-Einstein Kondensat nach etwa 17 Sekunden und einer Lichtleistung von 40 mW eintritt.

Während des Verdampfungskühlens wird zusätzlich zur Verringerung der Laserleistung auch die Aufweitung der Dipolfalle reduziert. Dazu wird eine zeitlich veränderliche Spannung an den Amplitudenmodulationseingang des Funktionsgenerators angelegt, der den Wechselspannungsanteil für den Addierer liefert. Eine Veränderung der Steuerspannung, die im Bereich von 0 bis 5 Volt liegt, wirkt sich dämpfend auf die maximale Ausgangsspannung des Funktionsgenerators aus, so dass dadurch die Amplitude der CO₂-Dipolfallenmodulation auf ein Minimum abgesenkt werden kann. Die zeitliche Form der kalibrierten Steuerspannung wird mit Hilfe eines Rechners ausgegeben. Der Verlauf der RF-Modulation ist in Abb. 2.14 (rote Linie) zu sehen, wobei 100% der Leistung einer maximalen Spannung von 5 Volt am Amplitudenmodulationseingang entsprechen und 0% eine Spannung von 0 Volt bezeichnen.

2 Schwach wechselwirkendes Bose-Einstein Kondensat

Ein optimales Ergebnis wird erreicht, wenn die Form der Rampe durch Gleichung (2.41) beschrieben wird, wobei hier $\tau = 0.6\text{s}$ und $\beta = 1.2$ ist. Man beachte außerdem, dass die Modulation der Dipolfalle bereits nach 15 Sekunden beendet ist, während die gesamte Evaporationsphase 17 Sekunden dauert. In den Experimenten hat sich herausgestellt, dass eine besonders hohe Atomzahl für das Bose-Einstein Kondensat erreicht werden kann, wenn der Laserstrahl bereits vor dem eigentlichen Phasenübergang eine besonders schmale Taille aufweist.

Da in einer optischen Dipolfalle Atome in allen Zeeman-Zuständen eingeschlossen werden, setzt sich das Bose-Einstein Kondensat im Zustand $F=1$ aus den Zeeman-Zuständen $m_F = 0, \pm 1$ zusammen. Durch Anlegen eines magnetischen Gradientenfeldes während der Evaporation ist es jedoch möglich, eine spinabhängige Kraft zu erzeugen. Um einen bestimmten m_F -Zustand zu selektieren wird das Quadrupolfeld mit Hilfe von Kompensationsspulen derart manipuliert, dass am Ende nur noch der gewünschte Zustand übrigbleibt. Für die hier vorgestellten Experimente wurden die Atome üblicherweise im Zustand $m_F = -1$ präpariert.

Am Ende der Evaporation wird die Dipolfalle ausgeschaltet, so dass sich die Atomwolke im Gravitationsfeld der Erde nach unten bewegt. Nach einer Flugdauer von 15 ms wird der Absorptionsstrahl eingeschaltet und der Schattenwurf der Atomverteilung auf einer CCD-Kamera aufgenommen. In Abb. 2.15 sind in Falschfarben kodierte Bilder von Atomen mit ihren dazugehörigen Dichteprofilen zu bestimmten Zeitpunkten der Evaporation dargestellt. In (a) ist ein thermisches Gas zu sehen, dessen Dichteprofil einer Maxwell-Boltzmann Verteilung entspricht. Senkt man die Leistung im CO_2 -Strahl weiter ab, so bildet sich eine Überhöhung der Dichte im Zentrum der Atomverteilung (b). Durch weiteres Absenken der Laserleistung erreicht man schließlich ein Bose-Einstein Kondensat mit $1.6 \cdot 10^5$ Rubidiumatomen im Spinzustand $m_F = -1$. Die Temperatur des Quantengases beträgt hier etwa 200 nK, wobei das Dichteprofil einen annähernd parabelförmigen Verlauf hat. Es zeigt sich, dass die Erhöhung der Atomzahl in der Dipolfalle von 30% durch das räumliche Modulieren des Dipolfallenstrahls eine Verdopplung der Atome am Ende der Evaporation im Bose-Einstein Kondensat verursacht.

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

In diesem Kapitel wird die Realisierung von Fourier-synthetisierten optischen Lichtpotentialen für ein atomares Bose-Einstein Kondensat vorgestellt, sowie Transportexperimente beschrieben, die eine Charakterisierung der Bandstruktur in solchen Gittern erlauben. Im ersten Schritt werden Multiphotonen-Gitter unterschiedlicher räumlicher Periodizität durch die Beugung eines Bose-Einstein Kondensats nachgewiesen, sowie räumlich asymmetrische Gitter durch die Fourier-Synthese eines Gitters der Periode $\lambda/2$ und eines Gitters der Periode $\lambda/4$ erzeugt. Anschließend wird die Dynamik eines atomaren Bose-Einstein Kondensats durch Bloch-Oszillationen in einem Multiphotonen-Gitter untersucht und mit den Eigenschaften eines konventionellen Gitters verglichen. Zuletzt wird die Bandstruktur eines Fourier-synthetisierten Gitters durch Landau-Zener Übergänge charakterisiert.

3.1 Theoretische Grundlagen

3.1.1 Konventionelle optische Gitter

Konventionelle optische Stehwellengitter entstehen aus einer Überlagerung von zwei gegenläufigen Laserstrahlen gleicher Frequenz [94]. Dabei gibt es periodische Bereiche starker und schwacher Intensitäten. Befindet sich ein Atom in einem solchen Lichtfeld, verschieben sich die Energieniveaus aufgrund der AC-Stark Verschiebung ebenfalls periodisch [95]. Bei Rotverstimmung bezüglich eines atomaren Übergangs stellen die Intensitätsmaxima kleine Mikrofallen dar, in denen sich die Atome räumlich periodisch anordnen [12–14].

Betrachten wir zwei Lichtwellen E_1 und E_2 die sich in z -Richtung gegenläufig ausbreiten. Beide Lichtwellen sind linear polarisiert und besitzen die gleiche Frequenz ω , sowie Wellenzahl $k = 2\pi/\lambda$, wobei λ die Wellenlänge des verwendeten Laserlichts ist. Es gilt:

$$E_1(z, t) = \hat{e}_1 \left[e^{i(\omega t - kz)} + e^{-i(\omega t - kz)} \right] \quad (3.1)$$

$$E_2(z, t) = \hat{e}_2 \left[e^{i(\omega t + kz)} + e^{-i(\omega t + kz)} \right] \quad (3.2)$$

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

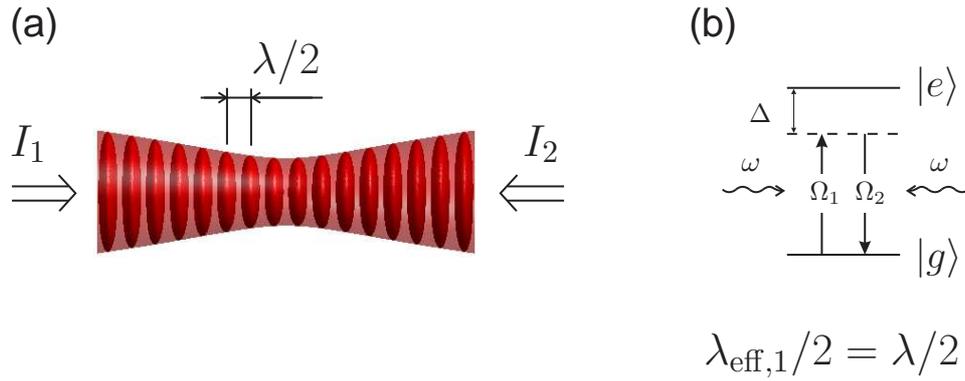


Abb. 3.1: (a) Schematische Darstellung einer optischen Stehwelle, die aus einer Überlagerung von zwei gegenläufigen Laserstrahlen gleicher Frequenz erzeugt wird. Es bilden sich reguläre Intensitätsmaxima mit einem Abstand von $\lambda/2$, in den sich die Atome sammeln. (b) Interpretation einer optischen Stehwelle durch Absorption und Stimulierter Emission eines Photons in einem Zwei-Niveua Schema.

Ein Maß für die Stärke der optischen Gitter ist die Intensität $I = c\epsilon_0 \langle E(z, t)^2 \rangle$, wobei das quadrierte elektrische Feld zeitlich gemittelt wird. Daraus ergibt sich für die Gesamtintensität:

$$I(z) = c\epsilon_0 \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} &= c\epsilon_0 \left(\langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle + 2 \langle E_1 E_2 \rangle \right) \\ &= I_1 + I_2 + I_{12}(z) \\ I_{12}(z) &= 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2kz) \propto \cos^2(kz) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die Einzelintensitäten I_1 und I_2 sind von der Position unabhängig, während der Interferenzterm $I_{12}(z)$ eine räumliche Periode von $\lambda/2$ hat.

Man kann die Vorgänge in einem optischen Gitter allerdings auch anders interpretieren. Durch Absorption eines Photons aus einem der beiden Lichtstrahlen und anschließender stimulierter Emission eines Photons in den gegenläufigen Strahl ändert sich der Impuls des Atoms um $\Delta p = \pm 2\hbar k$. Die Richtung des Kraftübertrags hängt dabei von der Richtung des Laserstrahls ab, von der das Photon absorbiert wird. Aus einer quantenmechanischen Beschreibung des Zweiphotonen-Prozesses lässt sich ein ähnlicher Ausdruck für die Potentialtiefe in der optischen Stehwelle gewinnen, wie durch die zuvor beschriebene semiklassische Interpretation.

Es soll nun exemplarisch das Wechselwirkungspotential eines Atoms in einer eindimensionalen optischen Stehwelle hergeleitet werden. Wir betrachten ein Atom mit einem Grund- $|g\rangle$ und einem angeregten Zustand $|e\rangle$. Der Hamiltonoperator besitzt dann folgende Form:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| - \vec{d}\vec{E} \quad (3.5)$$

Der erste Term beschreibt die kinetische Energie eines freien Teilchens, wobei \hat{p} der Impulsoperator ist. Der angeregte Zustand besitzt im Vergleich zum Grundzustand die Energie $\hbar\omega_e$, was im zweiten Term zum Ausdruck kommt. Schließlich drückt der letzte Term die Wechselwirkungsenergie zwischen dem induzierten Dipolmoment \vec{d} im Atom und dem elektrischen Feld \vec{E} aus. In dem hier betrachteten Fall ist die Wellenlänge des Lichts wesentlich größer als die Ausdehnung eines einzelnen Atoms. Die räumliche Veränderung des elektrischen Feldes über das Atom hinweg, kann daher in erster Ordnung vernachlässigt werden, so dass das elektrische Feld nur an der Schwerpunktsposition \vec{R} des Atoms betrachtet wird. Diese Näherung bezeichnet man als *elektrische Dipolnäherung*.

$$E(\vec{r}, t) = E(\vec{R}, t) \equiv E(t) \quad (3.6)$$

Eine Überlagerung von zwei gegenläufigen Lichtfeldern gleicher Polarisation ergibt folgendes elektrische Feld:

$$\vec{E} = \hat{e} \left[\frac{E_1}{2} e^{i(\omega t - kz)} + \frac{E_2}{2} e^{i(\omega t + kz)} + h.c. \right] \quad (3.7)$$

Die quantenmechanische Beschreibung des Systems erfolgt mit der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial_t |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle$, wobei für die Wellenfunktion folgender Ansatz gewählt wird:

$$|\Psi(t)\rangle = c_g |g\rangle + c_e e^{-i\omega t} |e\rangle \quad (3.8)$$

Zunächst werden die Gleichungen (3.5), (3.7) und (3.8) in die Schrödinger-Gleichung eingesetzt.

$$\begin{aligned} i\hbar\dot{c}_g |g\rangle + i\hbar \left(\dot{c}_e + c_e(-i\omega) \right) e^{-i\omega t} |e\rangle = \\ + \frac{p^2}{2m} c_g |g\rangle - \frac{p^2}{2m} c_e |e\rangle + \hbar c_e \omega_e e^{-i\omega t} |e\rangle - \vec{d}\vec{E} |\Psi\rangle \end{aligned}$$

Durch anschließende Multiplikation mit $\langle g|$ ergibt sich eine Koeffizientengleichung für \dot{c}_g ,

$$i\hbar\dot{c}_g = \frac{p^2}{2m} c_g - \hbar c_e \left(\frac{\Omega_1}{2} e^{-ikz} + \frac{\Omega_2}{2} e^{ikz} \right) \quad (3.9)$$

sowie durch Multiplikation mit $\langle e| e^{i\omega t}$ eine Koeffizientengleichung für \dot{c}_e .

$$i\hbar\dot{c}_e = \frac{p^2}{2m} c_e + \hbar\Delta c_e - \hbar \left(\frac{\Omega_1}{2} e^{ikz} + \frac{\Omega_2}{2} e^{-ikz} \right) c_g \quad (3.10)$$

Dabei wurden schnell rotierende Terme mit $(\omega_e + \omega)$ vernachlässigt und für die Kopplungsstärke zwischen dem Grund- und angeregten Zustand die *Rabi-Frequenz* eingeführt.

$$\Omega_m = \langle g | \vec{d}\hat{e} | e \rangle E_m / \hbar = \langle e | \vec{d}\hat{e} | g \rangle E_m / \hbar \quad (3.11)$$

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

Weiterhin bezeichnet die Größe $\Delta = \omega_e - \omega$ die Verstimmung des Lasers relativ zum atomaren Übergang. Bei genügend fernverstimmten Systemen kann der angeregte Zustand adiabatisch eliminiert werden, so dass $\dot{c}_e = 0$ wird. Bei Vernachlässigung der kinetischen Energie ergibt sich

$$c_e = \left(\frac{\Omega_1}{2\Delta} e^{ikz} + \frac{\Omega_2}{2\Delta} e^{-ikz} \right) c_g \quad (3.12)$$

Das Ergebnis wird schließlich in Gleichung (3.10) eingesetzt und man erhält:

$$i\hbar\dot{c}_g = \frac{p^2}{2m} c_g - \hbar \left(\frac{\Omega_{AC}^{(1)} + \Omega_{AC}^{(2)}}{2} + \Omega_{\text{eff}} \cos(2kz) \right) c_g \quad (3.13)$$

mit den Abkürzungen

$$\Omega_{AC}^{(m)} = \frac{|\Omega_m|^2}{2\Delta} \quad m = 1, 2 \quad (3.14)$$

$$\Omega_{\text{eff}} = \frac{\Omega_1 \Omega_2}{2\Delta} \quad (3.15)$$

Die Differentialgleichung (3.13) hat die Form einer Schrödinger-Gleichung für ein Teilchen in einem periodischen Gitterpotential. Der erste Term in der Klammer verursacht eine konstante Verschiebung der Energieniveaus und kann vernachlässigt werden. Es bleibt ein effektiver Hamiltonoperator zurück, der aus einem kinetischen Anteil und einem periodischen Wechselwirkungspotential besteht:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_1 \cos^2(kz) \quad (3.16)$$

Die Potentialtiefe V_1 beträgt in diesem Fall:

$$V_1 = -\hbar\Omega_{\text{eff}}/2 \propto \sqrt{I_1 I_2} \quad (3.17)$$

Damit sich ein atomares Bose-Einstein Kondensat in einer regelmäßigen Struktur ansammeln kann, muss das chemische Potential μ kleiner als die Potentialtiefe V_1 sein. Auch muß mindestens ein gebundener Zustand in den Potentialtöpfen enthalten sein.

3.1.2 Multiphotonen-Gitter

Vierphotonen-Gitter

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass die Absorption und stimulierte Emission eines Photons (Zweiphotonen-Prozess) zu einem optischen Gitterpotential der Periode $\lambda/2$ führt. Im Prinzip lassen sich Gitter mit kleinerer räumlicher Periodizität herstellen, wenn mehrere Photonen an einem Wechselwirkungsprozess teilnehmen [96].

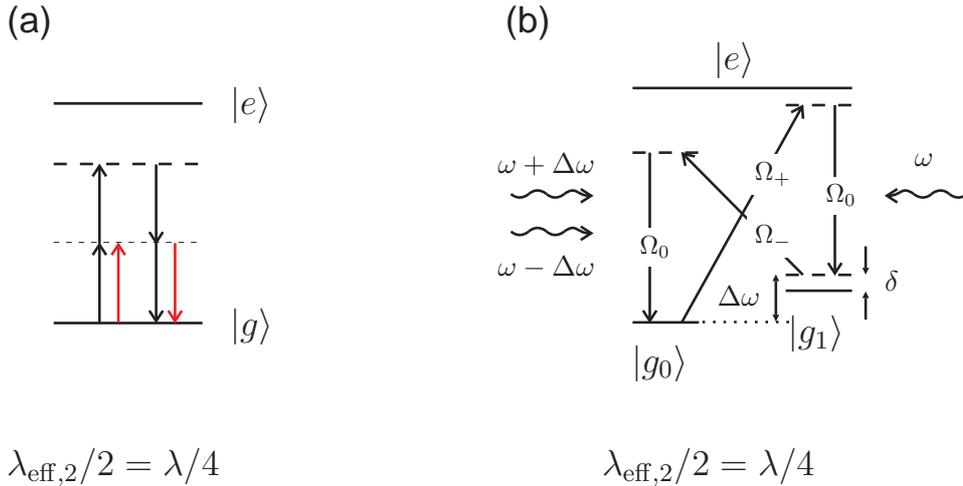


Abb. 3.2: (a) Vierphotonenprozess bei der jeweils zwei Photonen absorbiert und stimuliert emittiert werden. Allerdings treten hierbei auch Prozesse erster Ordnung auf (rote Pfeile). (b) Verbessertes Schema für ein optisches Vierphotonen-Gitter.

Hier soll am Beispiel eines Vierphotonen-Übergangs gezeigt werden, wie die Wechselwirkung zwischen einem Atom und vier Photonen zu einem optischen Gitter führen kann, das eine Periode von $\lambda/4$ besitzt [50].

Ein Vierphotonen-Gitter lässt sich im Prinzip realisieren, wenn der in Abb. 3.1 (b) dargestellte Absorptions- bzw. Emissionsprozess von einem Photon jeweils durch die Absorption und Emission von zwei Photonen ersetzt wird, wie es in Abb. 3.2 (a) dargestellt ist. Der Impulsübertrag auf das Atom ist in diesem Fall $\Delta p = \pm 4\hbar k$, wobei die effektive Wellenlänge des Gitters $\lambda_{\text{eff}}/2 = \lambda/4$ beträgt. Allerdings treten in dieser Konfiguration auch Stehwelleneffekte auf, die zu einem Gitterpotential der Periode $\lambda/2$ führen. Diese Übergänge sind in der Abbildung rot gekennzeichnet.

Eine verbesserte Version des Schemas zur Erzeugung optischer Gitterpotentiale höherer Ordnung zeigt Abb. 3.2 (b). Darin gibt es neben dem angeregten Zustand $|e\rangle$ zwei Grundzustände $|g_0\rangle$ und $|g_1\rangle$ die beispielsweise durch Anlegen eines Magnetfeldes energetisch aufgespalten werden können. Es werden zwei Laserstrahlen der Frequenz $\omega + \Delta\omega$ und $\omega - \Delta\omega$ von links und ein Laserstrahl der Frequenz ω von rechts eingestrahlt. Da alle drei Frequenzen unterschiedlich groß sind, treten in dieser Konfiguration keine Stehwelleneffekte auf. Ein Atom, das sich im Grundzustand $|g_0\rangle$ befindet, absorbiert ein Photon der Frequenz $\omega + \Delta\omega$ und emittiert anschließend das Photon in die gegenläufige Lasermode der Frequenz ω . Aufgrund der großen Zweiphotonenverstimmung δ wird der benachbarte Grundzustand $|g_1\rangle$ nicht besetzt. Stattdessen findet erneut ein Zweiphotonenprozess durch Absorption eines Photons der Frequenz $\omega - \Delta\omega$ und stimulierter Emission in die Lasermode der Frequenz ω statt. Der Impuls des Atoms ändert sich dadurch um $\Delta p = \pm 4\hbar k$. Theoretische Arbeiten haben gezeigt, dass diese Methode ein optisches Gitterpotential der Periode $\lambda/4$

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

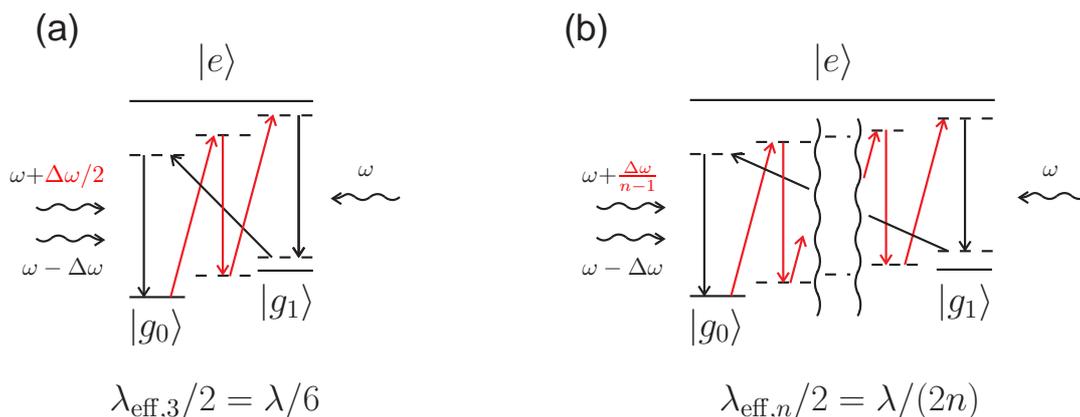


Abb. 3.3: (a) Schema für ein optisches Sechspotonen-Gitter mit dem ein räumliches Gitter der Periode $\lambda/6$ erreicht werden kann. (b) Allgemeine Erweiterung auf ein Multiphotonen-Gitter n -ter Ordnung, bei der die räumliche Periode des Gitterpotentials $\lambda/(2n)$ beträgt.

erzeugt [96–98]. Die genaue Rechnung hierzu ist auch in einer früheren Doktorarbeit der Arbeitsgruppe im Detail dargestellt [73]. Ein Atom, das sich in einem Vierphotonenpotential befindet, wird durch folgenden Hamiltonoperator beschrieben:

$$\hat{H}(x, p) = \frac{p^2}{2m} + V_2 \cos^2(2kz) \quad (3.18)$$

wobei die Potentialtiefe V_2 von mehreren Parametern abhängt.

$$V_2 = \hbar \frac{\Omega_+ \Omega_- \cdot |\Omega_0|^2}{8\delta\Delta^2} \propto \frac{I_0 \sqrt{I_+ I_-}}{\delta} \quad (3.19)$$

Die Rabi-Frequenzen ($\Omega_+, \Omega_-, \Omega_0$) für die atomaren Übergänge sind in der Abb. 3.2 (b) dargestellt und haben die gleiche Form, wie im Kapitel über konventionelle optische Stehwellenpotentiale durch die Gleichung (3.11) beschrieben. Charakteristisch für ein Vierphotonen-Gitter ist die inverse Proportionalität der Potentialtiefe von der Zweiphotonenverstimmung δ .

Gitter höherer Ordnung

Die im letzten Abschnitt beschriebene Methode zur Erzeugung eines Vierphotonen-Gitters der Periode $\lambda/4$ kann auf höhere Ordnungen übertragen werden, indem der Vierphotonenprozess durch einen Doppler-sensitiven $2n$ -Photonenprozess ersetzt wird, wobei n eine natürliche Zahl ist. Dazu muss lediglich das Lichtfeld mit der Frequenz $\omega + \Delta\omega$ durch ein Lichtfeld der Frequenz $\omega + \Delta\omega/(n-1)$ ersetzt werden [73, 96].

Abb. 3.3 (a) zeigt das Schema für ein Sechspotonen-Gitter, bei dem die räumliche Gitterperiode $\lambda/6$ beträgt, sowie (b) die allgemeine Erweiterung auf ein $2n$ -Photonen-Gitter mit einer räumlichen Periode von $\lambda/(2n)$. Eine Änderung der Verstimmung zu

$\Delta\omega/(n-1)$ bewirkt mehrere Zyklen von Absorption und stimulierter Emission eines Photons im Atom, wobei die zusätzlichen atomaren Übergänge in der Abbildung rot markiert sind.

3.1.3 Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung

Für die nachfolgenden Ergebnisse ist es nötig, das System quantenmechanisch zu beschreiben. Der Hamiltonoperator besteht aus einem kinetischen Anteil, einem Wechselwirkungspotential $V(z)$ und in einigen Experimenten sogar aus einer konstanten Kraft $F = m \cdot a$ [99].

$$\hat{H}(p, z) = \frac{p^2}{2m} + V(z) + F \cdot z \quad (3.20)$$

Das optische Gitter setzt sich im Allgemeinen aus einem konventionellen Gitter der Periode $\lambda/2$ und einem Vierphotonen-Gitter der Periode $\lambda/4$ zusammen, wobei φ die relative Phase zwischen den Harmonischen bezeichnet:

$$V(z) = \frac{V_1}{2} \cos(2kz) + \frac{V_2}{2} \cos(4kz + \varphi) \quad (3.21)$$

Zunächst ist es für die weitere numerische Berechnung sinnvoll, den Hamiltonoperator dimensionslos zu gestalten. Die einzelnen Terme werden dabei durch folgende Größen ersetzt.

$$H' = \frac{H}{\bar{E}} \quad (3.22)$$

$$V'_i = \frac{V_i}{\bar{E}} \quad (3.23)$$

$$z' = \frac{z}{\bar{z}} \quad (3.24)$$

$$p' = \frac{p}{\bar{p}} \quad (3.25)$$

$$t' = \frac{t}{\bar{t}} \quad (3.26)$$

$$a' = \frac{a}{\bar{a}} \quad (3.27)$$

$$(3.28)$$

Im Experiment wird Licht der Wellenlänge 781.3 nm verwendet. Daraus berechnet man eine Rückstoßenergie $E_r = (\hbar k)^2/2m = h \cdot 3.71\text{kHz}$, wodurch sich für die Sub-

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

stitutionsgrößen folgende Einheiten ergeben:

$$\tilde{E} = 8E_r = h \cdot 29.7\text{kHz} \quad (3.29)$$

$$\tilde{z} = (2k)^{-1} = 62\text{nm} \quad (3.30)$$

$$\tilde{p} = 2\hbar k = m \cdot 11.06\text{mm/s} \quad (3.31)$$

$$\tilde{t} = (8\omega_r)^{-1} = 5.36\mu\text{s} \quad (3.32)$$

$$\tilde{a} = \frac{\tilde{p}/m}{\tilde{t}} = 2.06\text{mm/ms}^2 \quad (3.33)$$

$$(3.34)$$

Nach der Substitution ergibt sich eine dimensionslose Schrödingergleichung mit einem dimensionslosen Hamiltonoperator, die numerisch gelöst werden kann:

$$i\frac{\partial}{\partial t'}\Psi(z', t') = \hat{H}'\Psi(z', t') \quad (3.35)$$

$$\hat{H}'(p', z') = \frac{p'^2}{2} + V'(z') + a' \cdot z' \quad (3.36)$$

$$V'(z') = \frac{V'_1}{2} \cos(z') + \frac{V'_2}{2} \cos(2z' + \varphi) \quad (3.37)$$

Der Einfachheit halber werden die Gleichungen im weiteren Verlauf ohne Striche geschrieben. Als nächstes wird die Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung (3.35) für ein Teilchen in einem periodischen Gitterpotential, das aus zwei sinusförmigen Anteilen unterschiedlicher Periode aufgebaut ist, hergeleitet.

Gitterpotentiale sind im Allgemeinen räumlich periodisch $V(z) = V(z + a)$, wobei die räumliche Periode durch die Gitterkonstante a gegeben ist. Nach dem Theorem von Felix Bloch besitzt die Wellenfunktion $\Psi(z) = \Psi(z + a)$ ebenfalls periodische Eigenschaften [100]. Zur Lösung der Schrödingergleichung wird folgender Ansatz für die Wellenfunktion gewählt:

$$\Psi(z, t) = e^{iqz} u_{n,q}(t)(z, t) \quad (3.38)$$

Dieser Bloch-Wellenansatz stellt das Produkt einer ebenen Welle und einer komplexen Funktion $u_{n,q}(z, t)$ dar, welche die gleiche räumliche Periode wie das Potential aufweist. Der Quasi-Impuls q ist eine Größe, die den Impuls eines Teilchens relativ zum Gitter angibt und ist auf die Ränder der Brioullin-Zone $q = [-\hbar k, \hbar k]$ reduziert. Der Index des Blochbandes n in Kombination mit dem Quasi-Impuls q legt die Position des Wellenpakets im Bloch-Spektrum fest. Zunächst wird die Funktion $u_{n,q}(z, t)$ in eine Fourierreihe entwickelt, wodurch sich Gleichung (3.38) in eine Summe schreiben lässt:

$$\Psi(z, t) = e^{iqz} \sum_m c_m(t) e^{i(2\pi m/a)z} \quad (3.39)$$

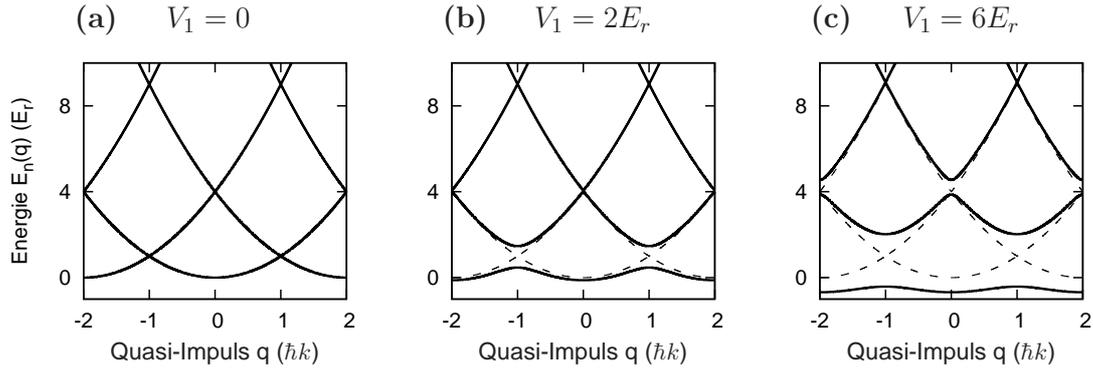


Abb. 3.4: Darstellung der Bandstruktur optischer Gitterpotentiale unterschiedlicher Potentialtiefe, wobei hier $V_2 = 0$ ist. Je tiefer das Potential ist, desto größer ist die Energieaufspaltung in den Kreuzungsbereichen.

Aufgrund der dimensionslosen Form des Potentials beträgt die Periode $a = 2\pi$. Der Bloch-Wellenansatz wird zusammen mit Gleichung (3.36) in die Schrödingergleichung (3.35) eingesetzt und ergibt so eine Differentialgleichung für die Koeffizienten $c_m(t)$.

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} \sum_m c_m e^{i(m+q)z} &= \left[\frac{p^2}{2} + V(z) \right] \sum_m c_m e^{i(m+q)z} \\ &= E_n(q) \sum_m c_m e^{i(m+q)z} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Anschließend wird die gesamte Gleichung in den Impulsraum transformiert, um eine bestimmte Fourierkomponente zu selektieren. Mit Hilfe der Identität:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)z} dz = \delta_{mn} \quad (3.41)$$

entsteht dabei folgende Differentialgleichung für den Koeffizienten $c_m(t)$:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} c_m &= \frac{[m + q(t)]^2}{2} c_m(t) + \frac{V_1}{4} [c_{m+1} + c_{m-1}] + \frac{V_2}{4} [c_{m+2} e^{i\varphi} + c_{m-2} e^{-i\varphi}] \\ &= E_n(q) c_m \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die Berechnung des Bloch-Spektrums erfolgt durch Lösen der stationären Schrödingergleichung. Dazu wird die Matrixgleichung (3.42) diagonalisiert und die entsprechenden Eigenwerte als Funktion des Quasi-Impulses dargestellt. Die Matrix A , die diagonalisiert werden soll, enthält dabei folgende Matrixelemente:

$$\begin{aligned} A_{mm} &= \frac{[m + q(t)]^2}{2} \\ A_{m,m+1} &= A_{m+1,m} = \frac{V_1}{4} \\ A_{m,m+2} &= A_{m+2,m}^* = \frac{V_2}{4} e^{i\varphi} \end{aligned} \quad (3.43)$$

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

Auf der Hauptdiagonale befindet sich die kinetische Energie der Atome, auf der ersten Nebendiagonale der Beitrag des konventionellen Gitters der Periode $\lambda/2$ und auf der zweiten Nebendiagonale der Beitrag des Vierphotonen-Gitters der Periode $\lambda/4$. Höhere Fourierkomponenten des optischen Gitterpotentials würden sich auf höheren Nebendiagonalen befinden. Die Eigenwerte $E_n(q)$ lassen sich durch Lösen der Eigenwertgleichung $|A - E_n(q)\mathbb{1}| = 0$ berechnen, wobei $\mathbb{1}$ für die Einheitsmatrix steht. Abb. 3.4 zeigt die sich ergebende Bandstruktur für ein eindimensionales Gitter bei verschiedenen Potentialtiefen V_1 , wobei $V_2 = 0$ ist. Es bilden sich Energiebänder und Energielücken, ähnlich zu den Leitungs- und Valenzbändern von Elektronen in einem Kristall. Je tiefer das Gitter ist, desto größer ist die Energieaufspaltung zwischen den Bloch-Bändern.

3.1.4 Bloch-Oszillationen im Multiphotonen-Gitter

Die Bewegung von Elektronen in einer periodischen Kristallstruktur unter dem Einfluß eines elektrischen Feldes wurde bereits 1928 in einer Arbeit von Felix Bloch untersucht und später durch Zener und Jones verifiziert [101]. Eine Konsequenz ist, dass sich die Teilchen nicht gleichmäßig beschleunigt bewegen, sondern um ihre Potentialmulden oszillieren. In der Arbeit von Bloch wurde gezeigt, dass sich die Gruppengeschwindigkeit (mittlere Geschwindigkeit) der Teilchen aus der Ableitung des Energiespektrums nach dem Quasi-Impuls ergibt.

$$\langle v_n(q) \rangle = \frac{dE_n(q)}{dq} \quad (3.44)$$

Da sich der Quasi-Impuls q unter dem Einfluß einer konstanten äußeren Kraft F linear entwickelt $q(t) = q_0 + F \cdot t$, wiederholt sich die Bewegung der Atome nach jeder Reflexion am Rand der Brioullin Zone, sofern Übergänge in höhere Bänder vernachlässigt werden können. Die Geschwindigkeit ändert sich dadurch zyklisch mit einer zeitlichen Periode $T_B = h/(F \cdot d)$, wobei h die Planck-Konstante und d die Gitterperiode ist. Die Bewegung der Elektronen unterliegt der Newtonschen Bewegungsgleichung $F = m_{\text{eff}}^{(n)} \cdot a$, wobei nun die effektive Masse der Elektronen $m_{\text{eff}}^{(n)}(q)$ von der Position im Spektrum abhängt. Es gilt der Zusammenhang, dass die effektive Masse invers proportional zur Krümmung eines Bloch-Bandes im Spektrum ist [102]:

$$m_{\text{eff}}^{(n)}(q) = \left[\frac{d^2 E_n(q)}{dq^2} \right]^{-1} \quad (3.45)$$

In Abb. 3.5 (a) ist das Energiespektrum eines Gitterpotentials dargestellt, in dem sich ein Wellenpaket (hier dargestellt durch Kugeln) unter dem Einfluß einer externen Kraft entlang eines Bloch-Bandes bewegt. Da die Dispersionsrelation im Gitter vom Quasi-Impuls abhängt, oszilliert die Gruppengeschwindigkeit im zeitlichen Verlauf.

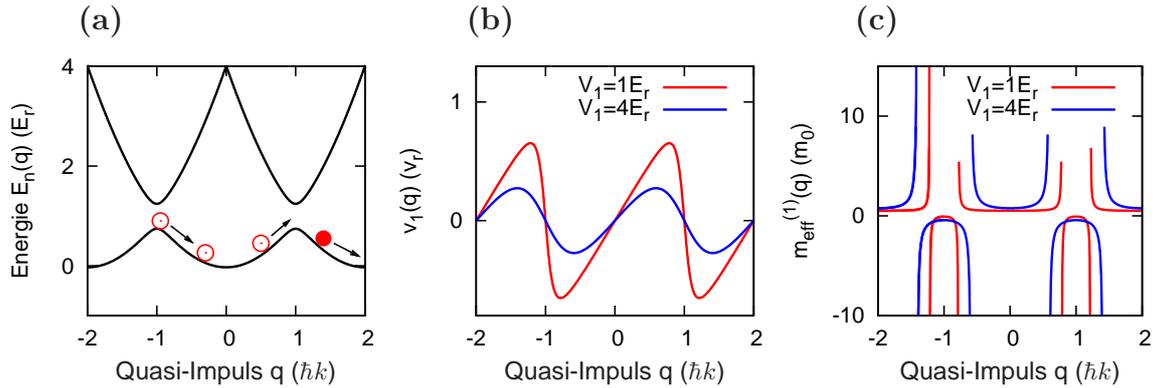


Abb. 3.5: Schematische Darstellung der Dynamik im Bandspektrum, wenn eine konstante äußere Kraft wirkt. (a) Der Quasi-Impuls entwickelt sich linear in der Zeit $q = F \cdot t$, so dass das Wellenpaket in einem Energieband oszilliert. (b) Gruppengeschwindigkeit und (c) effektive Masse der Atome als Funktion des Quasi-Impulses q für zwei verschiedene Potentialtiefen $V_1 = \{1.0, 4.0\}E_r$.

In Abb. 3.5 (b) ist jeweils die Gruppengeschwindigkeit eines Wellenpakets im Grundzustand für zwei unterschiedliche Potentialtiefen dargestellt, sowie in Abb. 3.5 (c) die effektive Masse des Teilchens für zwei verschiedene Potentialtiefen zu sehen. Sie kann auch negative Werte annehmen, so dass die Bewegung der Atome entgegen der Krafrichtung folgt.

Der Nachweis von Bloch-Oszillationen im Festkörper ist sehr schwierig, da die Bloch-Periode in natürlichen Festkörpern in der Größe von Pikosekunden liegt, was experimentell schwer aufzulösen ist [103]. Der experimentelle Nachweis von Bloch-Oszillationen konnte erst in den 1990er-Jahren in Halbleiter-Übergittern erbracht werden [104–107]. In diesen Strukturen wird aufgrund einer größeren räumlichen Periode eine leichter auflösbare, zeitlich längere Bloch-Periode erreicht. Ein weiteres experimentelles Problem im Festkörper stellen die vergleichbar kurzen Streuzeiten dar. Atomoptische Experimente mit optischen Gittern eignen sich dagegen hervorragend, um die Dynamik von Elektronen in einem Kristall zu simulieren. Im Jahr 1996 wurde in der Gruppe von C. Salomon erstmals der Nachweis von Bloch-Oszillationen von kalten Atomen in einem beschleunigten Stehwellenpotential erbracht [9]. In der Zwischenzeit können weit über 20.000 Perioden von Bloch-Oszillationen in optischen Gittern beobachtet werden und eignen sich daher auch als Instrument zur genauen Bestimmung der Gravitationskonstante und dessen Auswirkung auf die Feinstrukturkonstante [108–111]. In diesem Kapitel wird die Bewegung von Atomen in einem Multiphotonen-Gitter untersucht und mit den Ergebnissen in einem konventionellen Gitter verglichen. Die Beobachtung von Bloch-Oszillationen in einem Vierphotonen-Gitter stellt einen Nachweis für den kohärenten Atomtransport in einem Gitterpotential dar, dessen räumliche Periode unterhalb der Rayleigh-Auflösungsgrenze von $\lambda/2$ liegt [112].

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

Zur theoretischen Beschreibung der Bandstruktur des Vielphotonen-Gitters wird zunächst der Hamiltonoperator für ein Atom in einem räumlichen Gitter der Periode $\lambda/(2n)$, wobei n eine natürlich Zahl ist, in eine dimensionslose Form transformiert. Damit erreicht man, dass die Information über die Ordnung des Gitterpotentials vollständig in den Substitutionsvariablen steckt. Die Berechnung der Impulszustände und des Energiespektrums erfolgt dann analog wie in Abschnitt 3.1.3:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{V_n}{2} \cos(2nkz) + F \cdot z \longrightarrow \frac{p^2}{2} + \frac{V_n}{2} \cos(z) + a \cdot z \quad (3.46)$$

Die Einheiten der Substitutionsvariablen hängen folgendermaßen von der Ordnung n und damit von der räumlichen Periode des Gitters ab.

$$\tilde{E}_n = 8n^2 E_r = n^2 \tilde{E}_1 \quad (3.47)$$

$$\tilde{z}_n = (2nk)^{-1} = \tilde{z}_1/n \quad (3.48)$$

$$\tilde{p}_n = 2n\hbar k = n\tilde{p}_1 \quad (3.49)$$

$$\tilde{t}_n = (8n^2\omega_r)^{-1} = \tilde{t}_1/n^2 \quad (3.50)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{(2\hbar k/m)}{(8\omega_r)^{-1}} n^3 = n^3 \tilde{a}_1 \quad (3.51)$$

$$(3.52)$$

Eine Eigenschaft der Multiphotonen-Gitter zeichnet sich dadurch aus, dass die Energieskala des Blochspektrums quadratisch von der räumlichen Ordnung n abhängt. Das wiederum führt dazu, dass beispielsweise die Bloch-Oszillationen in Gittern vergleichbarer Potentialtiefen aber unterschiedlicher räumlicher Dimension verschieden sind. Weitere Besonderheiten in Multiphotonen-Gittern finden sich in Abschnitt 3.4.

3.1.5 Phasenabhängiger Landau-Zener Übergang

Im letzten Abschnitt wurde die Dynamik eines Wellenpakets unter dem Einfluß einer konstanten äußeren Kraft untersucht. Dabei bewegen sich die Atome in den Potentialminima nicht linear beschleunigt, sondern führen Oszillationen um ihre Ruhelage aus. Die Bloch-Oszillationen treten immer dann auf, wenn sich das Wellenpaket innerhalb eines Energiebandes bewegt. Im Bereich einer Kreuzung, wo sich benachbarte Energiebänder treffen, kann das Wellenpaket entweder reflektiert werden oder es tunnelt in ein benachbartes Bloch-Band und folgt so der Dispersion eines freien Teilchens. Clarence Zener untersuchte 1932 das Verhalten eines quantenmechanischen Wellenpakets im Kreuzungsbereich von zwei Energieniveaus und konnte einen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit eines Interband-Übergangs herleiten [113]:

$$\Gamma = \exp(-a_c/a) \quad (3.53)$$

wobei die kritische Beschleunigung a_c

$$a_c = \pi\Delta E^2/(4\hbar^2k) \quad (3.54)$$

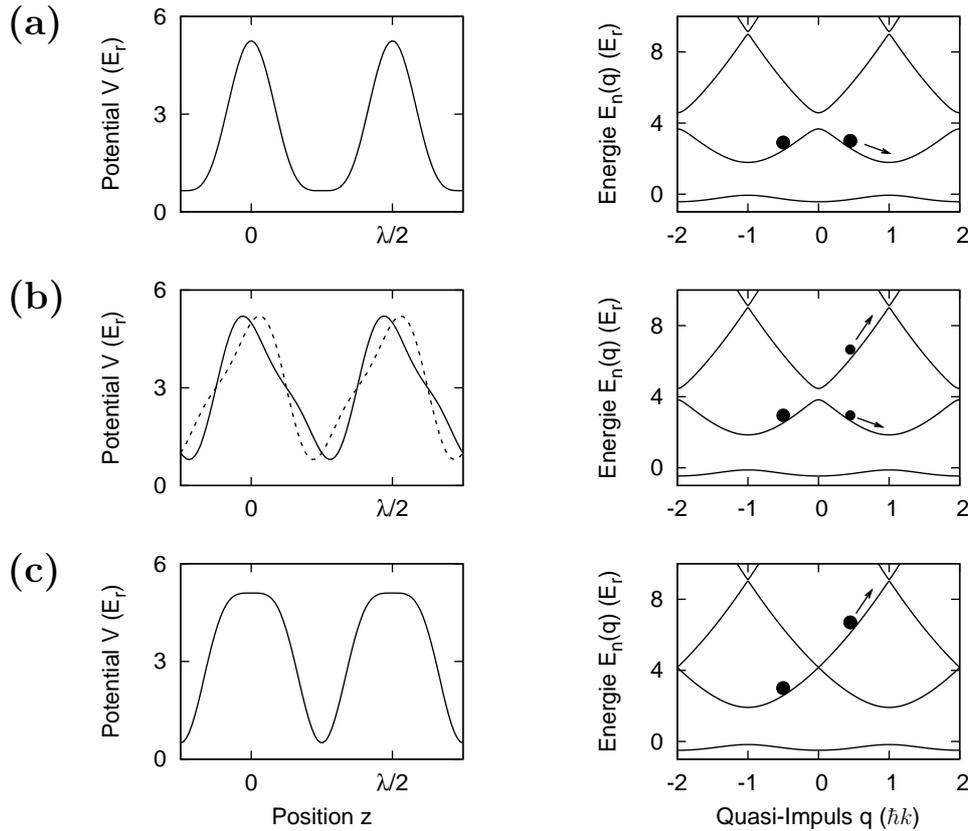


Abb. 3.6: Darstellung des (links) räumlichen Gitterpotentials der Form $V(z) = V_1 \cos(z) + V_2 \cos(2z + \varphi)$ mit dem entsprechenden Energiespektrum (rechts) für unterschiedliche Werte der Phasenverschiebung φ : (a) $\varphi = 0$, (b) $\varphi = \pm\pi/2$ und (c) $\varphi = \pi$. Die Potentialtiefen betragen hier $V_1 = 4E_r$ und $V_2 = 1E_r$, um das Verschwinden der Bandlücke zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band bei $\varphi = \pi$ zu visualisieren. Die Größe der Bandaufspaltung lässt sich über Landau-Zener Übergänge untersuchen, wie schematisch in der Abbildung dargestellt.

quadratisch von der Energieaufspaltung ΔE zweier Energiebänder abhängt. Eine möglichst hohe Tunnelrate erreicht man demnach, wenn die Atome sehr schnell über das Gitter beschleunigt werden, oder die Energieaufspaltung sehr klein wird.

Bisher wurde die Landau-Zener Physik für ultrakalte Atome in einfachen optischen Stehwellenpotentialen untersucht [10,114,115]. Wenn man allerdings zu dem konventionellen Gitter der Periode $\lambda/2$ noch ein Gitter höherer Ordnung der Periode $\lambda/4$ addiert, so erwartet man Interferenzeffekte zwischen den einzelnen Bragg-Reflexionen des Wellenpakets an der Bandkante [116]. In einem ersten Schritt wird hierfür die Abhängigkeit der Bandstruktur von der Phasenverschiebung zwischen den Gitterharmonischen untersucht. Dazu wird das Bloch-Spektrum eines Fourier-synthetisierten Gitters numerisch berechnet, wobei der dimensionslose Hamiltonoperator folgende

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

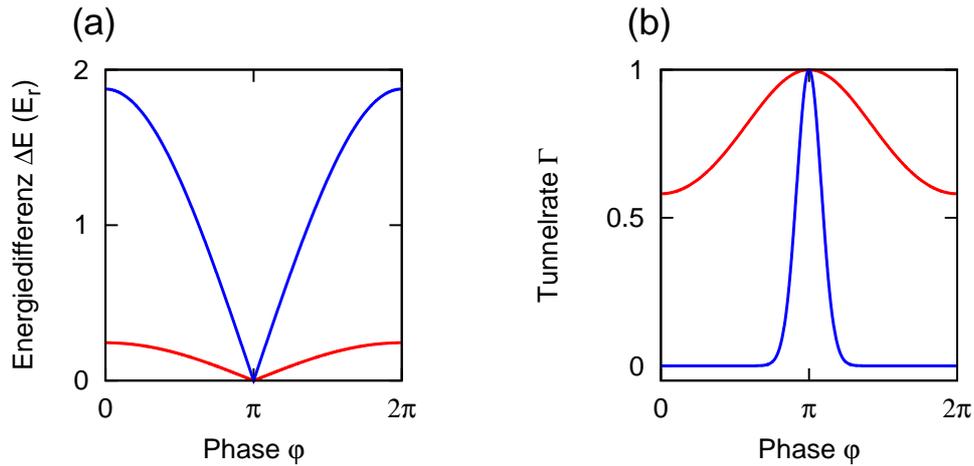


Abb. 3.7: (a) Energieaufspaltung und (b) Tunnelwahrscheinlichkeit zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band an der Bandkante als Funktion der relativen Phase φ , wobei die Potentialtiefen $V_1 = 2E_r$ und $V_2 = 0.25E_r$ (rot) bzw. $V_1 = 6E_r$ und $V_2 = 2E_r$ (blau) betragen.

Form hat:

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{V_1}{2} \cos(z) + \frac{V_2}{2} \cos(2z + \varphi) \quad (3.55)$$

In Abb. 3.6 ist ein berechnetes Energiespektrum mit den dazugehörigen räumlichen Potentialformen für verschiedene Werte von φ dargestellt. Aus der Grafik entnimmt man, dass die Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band besonders groß ist, wenn die Phasenverschiebung $\varphi = 0$ (a) ist, wobei das Gitter dann aus breiten Potentialmulden besteht und komplett verschwindet, wenn die Phasenverschiebung $\varphi = \pi$ beträgt (c), wobei hier das Gitter aus breiten Potentialhügeln besteht. Offensichtlich hängt die Energieaufspaltung ΔE hier von der relativen Phase der Gitterharmonischen ab. Dies zeigt sich auch in Abb. 3.7 (a), in der die Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band bei einem Quasi-Impuls $q = 2\hbar k$ als Funktion der Phase φ für zwei verschiedene Gittertiefen dargestellt ist. Hier interferiert die Bragg-Streuung zweiter Ordnung des konventionellen Gitters und die Bragg-Streuung erster Ordnung des Vierphotonen-Gitters an der Bandkante bei $q = 2\hbar k$ destruktiv miteinander. Eine Möglichkeit, die Energiedifferenz von benachbarten Bändern experimentell zu untersuchen, ergibt sich über die Tunnelwahrscheinlichkeit Γ (siehe Gleichung (3.53)). Bei einer festen Beschleunigung a hängt die Tunnelrate nur noch von der energetischen Aufspaltung der Bänder $\Delta E(\varphi)$ ab, die in unserem Fall phasenabhängig ist. In Abb. 3.7 (b) ist für den gleichen Parametersatz jeweils die Tunnelrate als Funktion des Phasenwinkels φ aufgetragen. Die rote Kurve (schwaches Potential) zeigt eine schwache Phasenabhängigkeit, wobei bereits ein hoher Gleichgewichtsanteil der Landau-Zener Tunnelrate von 0.6 vorhanden ist. Je stärker das Gitter wird, desto größer wird der phasenabhängige Anteil und desto kleiner wird auch die Resonanzbreite um den Winkel $\varphi = \pi$.

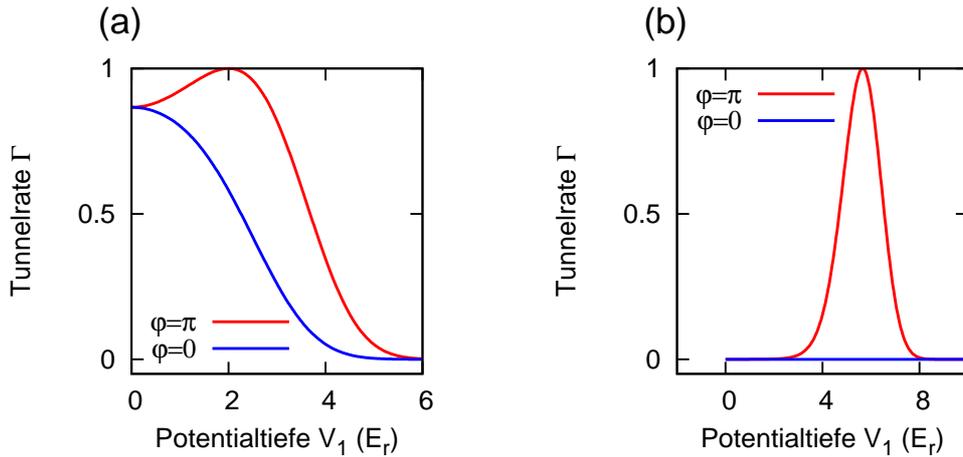


Abb. 3.8: Abhängigkeit der erwarteten Tunnelrate von der Potentialtiefe V_1 , wobei (a) $V_2 = 0.25E_r$ und (b) $V_2 = 2E_r$ beträgt und die Phasenverschiebung $\varphi = 0$ (blau) und $\varphi = \pi$ (rot) ist.

Im nächsten Schritt wird die Abhängigkeit der Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Blochband vom Verhältnis der Potentialtiefen V_1 und V_2 untersucht. Dazu wird die Landau-Zener Tunnelrate bei den Phasenwinkeln $\varphi = 0, \pi$ als Funktion der Potentialtiefe V_1 berechnet, wobei V_2 konstant ist. Die Abb. 3.8 zeigt eine numerische Simulation für den Fall, dass (a) $V_2 = 0.25E_r$ und (b) $V_2 = 2E_r$ ist. Im ersten Fall bei $\varphi = 0$ fällt die Tunnelrate exponentiell mit steigender Potentialtiefe V_1 ab, so wie man es auch in Experimenten zur Landau-Zener Physik in einfachen Gitterpotentialen erwartet. Anders sieht es allerdings aus, wenn die Phase $\varphi = \pi$ beträgt. Die Tunnelrate steigt dann zunächst an und erreicht ein Maximum bei einer Potentialtiefe $V_1 = 2E_r$, bevor sie im weiteren Verlauf ebenfalls exponentiell abfällt. Der Effekt zeigt sich in der Abbildung (b) noch deutlicher, wenn das Gitterpotential tiefer ist. Hier beträgt die Potentialtiefe des Vierphotonen-Gitters $V_2 = 2E_r$ und ist damit um einen Faktor acht größer als im ersten Fall. Auffällig ist, dass bei einer Phasenverschiebung $\varphi = 0$ auf der dargestellten Skala überhaupt keine Interband-Übergänge zu sehen sind, selbst wenn der Anteil des konventionellen Gitters sehr klein ist. Das liegt daran, dass ein starkes Vierphotonen-Gitter bereits eine große Energieaufspaltung der Bandlücke bei einem Quasi-Impuls $q = 2\hbar k$ verursacht. Die Situation ändert sich erst, wenn die Phasenverschiebung im Gitter $\varphi = \pi$ beträgt und die Stärke des konventionellen Gitters erhöht wird. Obwohl nun das optische Gitterpotential sehr tief ist, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit für einen Landau-Zener Übergang und erreicht ein Maximum bei $V_1 = 6E_r$. Hier wirkt sich die Bragg-Reflexion erster Ordnung des Vierphotonen-Gitters und zweiter Ordnung des konventionellen Gitters an der Bandkante destruktiv aus, so dass die Aufspaltung klein wird und das Wellenpaket in das benachbarte Bloch-Band tunneln kann.

Das Kriterium, bei dem die Aufspaltung der Bloch-Bänder verschwindet, kann durch Lösen der Eigenwertgleichung mit einer modifizierten 3×3 Matrix aus Gleichung (3.43)

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

bestimmt werden:

$$\begin{vmatrix} 4E_r - \lambda & V_1/4 & V_2/4e^{i\varphi} \\ V_1/4 & -\lambda & V_1/4 \\ V_2/4e^{-i\varphi} & V_1/4 & 4E_r - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3.56)$$

Wir interessieren uns speziell für die Eigenwerte im zweiten und dritten Bloch-Band bei einem Quasi-Impuls $q = 2\hbar k$. Diese sollten im Bereich von $4E_r$ liegen, so dass es hilfreich ist, eine neue Variable einzuführen $x := \lambda - 4E_r$. Die Determinante (3.56) ergibt folgende Koeffizientengleichung:

$$x^3 + 4E_r x^2 - x \left(\frac{V_2^2}{16} - \frac{V_1^2}{8} \right) + \frac{V_1^2 V_2}{32} \cos(\varphi) + E_r V_2^2 = 0 \quad (3.57)$$

Da die Bloch-Bänder in der Nähe von $\lambda = 4E_r$ liegen, kann der Term x^3 vernachlässigt werden, so dass die resultierende quadratische Gleichung nach dem Koeffizienten x aufgelöst werden kann. Es gilt:

$$x_{1,2} \propto \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{V_2^2}{64E_r} - \frac{V_1^2}{32E_r} \right) + \frac{V_1^2 V_2}{32E_r} \cos(\varphi) + \frac{V_2^2}{4}} \quad (3.58)$$

Im nächsten Schritt wird nun die Differenz der beiden Eigenwerte berechnet, um eine Information über die Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band zu erhalten.

$$\Delta x = x_1 - x_2 = \sqrt{\left(\frac{V_2^2}{64E_r} - \frac{V_1^2}{32E_r} \right) + \frac{V_1^2 V_2}{32E_r} \cos(\varphi) + \frac{V_2^2}{4}} \quad (3.59)$$

Für den Fall, dass $V_1 \ll E_r$ und $V_2 \ll V_1$ ist, können Terme hoher Potenz in den Potentialtiefen vernachlässigt werden und es bleibt ein analytischer Ausdruck für die Energiedifferenz zurück:

$$\Delta x = \left| V_2 + \frac{V_1^2}{16E_r} \exp(i\varphi) \right| \quad (3.60)$$

Folglich verschwindet die Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band bei einem Quasi-Impuls $q = 2\hbar k$ bei einer relativen Phase $\varphi = \pi$, wobei das Verhältnis der Potentialtiefen zwischen den Gitterharmonischen

$$V_2 = \frac{V_1^2}{16E_r} \quad (3.61)$$

beträgt. Für den allgemeinen Fall findet die Berechnung der Potentialtiefen, bei denen die Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band verschwindet, numerisch statt.

3.2 Experimenteller Aufbau zur Fourier-Synthese von Gitterpotentialen

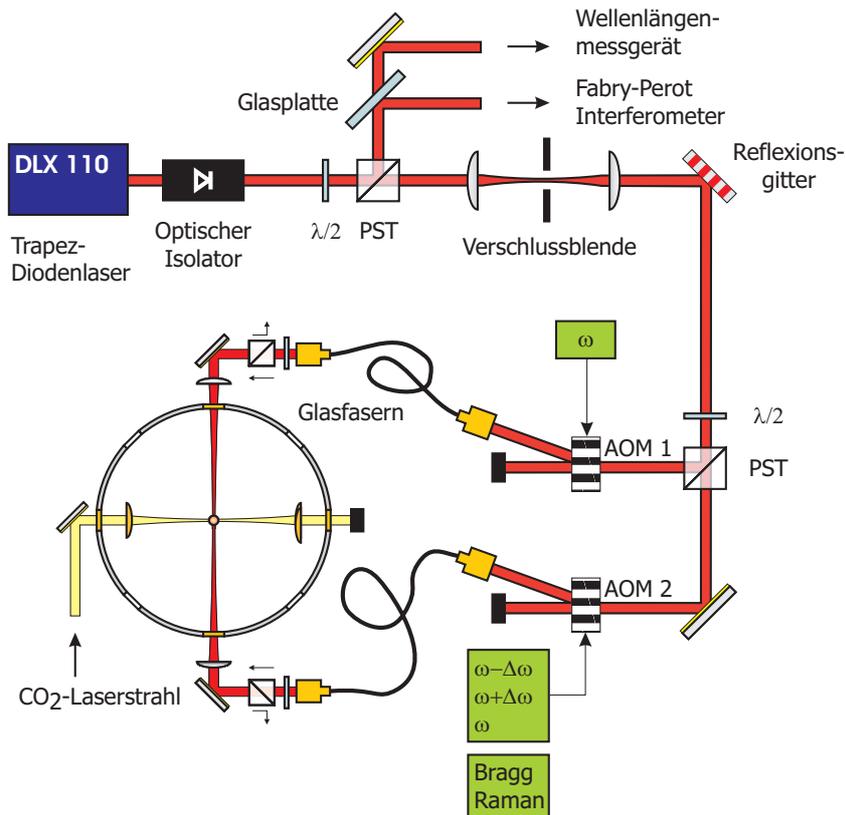


Abb. 3.9: Schematischer Aufbau der Optik zur Erzeugung der optischen Gitterpotentiale. Dabei gelten die Abkürzungen PST: polarisierender Strahlteilerwürfel und AOM: akusto-optischer Modulator.

3.2 Experimenteller Aufbau zur Fourier-Synthese von Gitterpotentialen

Der optische Aufbau für die Erzeugung der Gitterpotentiale ist in Abb. 3.9 schematisch dargestellt. Als Grundlage dient ein gitterstabilisierter Trapez-Diodenlaser (Firma: TOPTICA, Typ: DLX 110) mit einer Ausgangsleistung von 500 mW. Ein Teil des Hauptstrahls wird für die Messung der Wellenlänge und die Untersuchung der Frequenzstabilität mittels eines Fabry-Perot Interferometers abgezweigt [75]. Im weiteren Verlauf durchläuft der Hauptstrahl ein Teleskop mit einer Verschlussblende in dessen Fokus zur vollständigen Abschaltung des Lichts. Um möglichst lange Kohärenzzeiten zu erreichen, wurde zusätzlich ein holographisches Reflexionsgitter (Modell: PLR808-92.5-13-17.5-1.5, Firma: Ondax Inc) eingebaut. Es dient dazu, eine durch Spontanemission verursachte spektral breite Emission des Diodenlasers zu unterdrücken. Laut Hersteller wird der Untergrund um 25 dB abgeschwächt wobei die Bandbreite 0.4 nm beträgt. Der optische Aufbau wurde so modifiziert, dass der Hauptstrahl zweimal durch das Reflexionsgitter läuft, um eine besonders starke Abschwä-

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

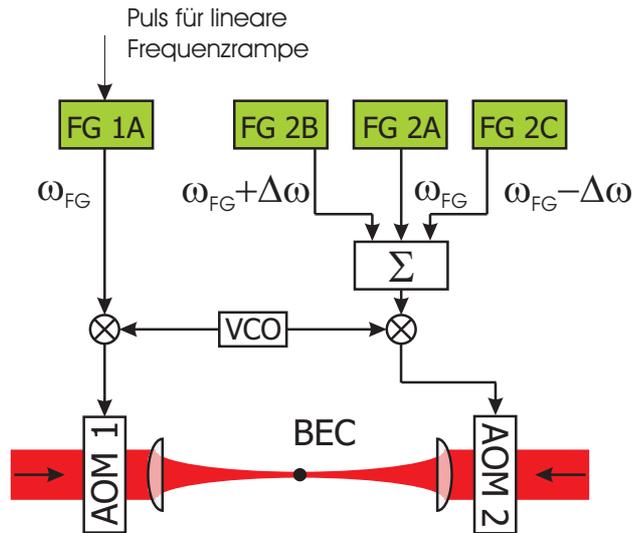


Abb. 3.10: Schematische Darstellung des elektronischen Aufbaus zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren AOM 1 und AOM 2. Die Ausgangsfrequenzen der phasenstabilisierten Funktionsgeneratoren (FG) werden mit Hilfe eines Oszillators (VCO) auf eine Trägerfrequenz von 200 MHz hochgemischt.

chung des Untergrunds zu bekommen. Im nächsten Schritt wird das Licht durch eine Kombination aus $\lambda/2$ -Platte und Strahlteilerwürfel in zwei Teilstrahlen aufgespalten. Beide Teilstrahlen gelangen durch jeweils einen akusto-optischen Modulator, um das Licht in seiner Intensität zu steuern und die notwendigen Frequenzen zur Erzeugung der Gitterpotentiale auf das Licht aufzumodulieren. Das Licht der ersten Beugungsordnung wird in eine polarisationserhaltende Einmodenfaser eingekoppelt, die den Aufbau der Gitterlaser mit der Vakuumkammer verbindet. Die zwei Laserstrahlen werden gegenläufig in vertikaler Richtung in die Vakuumkammer eingestrahlt, wobei sich der gemeinsame Brennpunkt mit dem CO_2 -Laserstrahl überlagert.

Während des Aufbaus wurde darauf geachtet, dass Reflexionen an optischen Oberflächen keine ungewollten Stehwellengitter verursachen. Es hat sich gezeigt, dass die Laserstrahlen unter einem kleinen Winkel von ungefähr 4° in Bezug auf die Gravitationsachse eingestrahlt werden sollten, da sonst störende Reflexionen an der Innenseite der Vakuumfenster entstehen. Weiterhin wird das Licht an der Optik der Faserauskopplung zurückreflektiert, obwohl die Faser selbst einen Schrägschliff von 8° enthält. In diesem Fall wurden in beiden Strahlengängen polarisierende Strahlteilerwürfel eingesetzt und so eingestellt, dass der einlaufende Laserstrahl kaum abgeschwächt wird, der aus der Vakuumkammer austretende Strahl allerdings um 90° abgelenkt wird. Allerdings sind nun die beiden Gitterstrahlen senkrecht zueinander polarisiert, so dass die Potentialtiefe der optischen Gitter stark abgeschwächt ist. Wie sich in den nachfolgenden Kapiteln zeigen wird, reicht dieser Kompromiss aus, um die Experimente erfolgreich durchzuführen.

3.2 Experimenteller Aufbau zur Fourier-Synthese von Gitterpotentialen

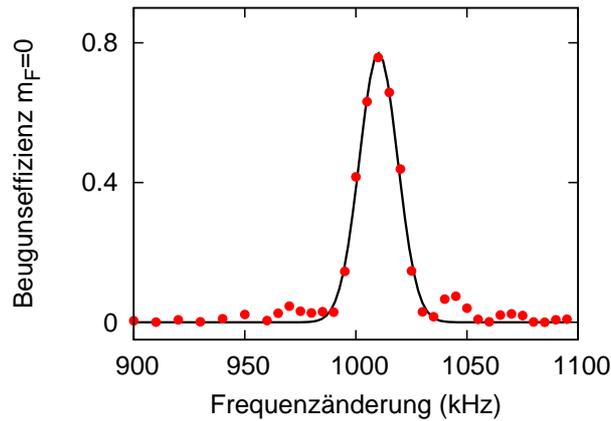


Abb. 3.11: Messung der Zeeman-Aufspaltung des $F=1$ Hyperfeinstrukturzustandes im Bose-Einstein Kondensat durch resonante Raman-Übergänge. Das verwendete homogene Magnetfeld beträgt hier etwa 2 Gauss, wodurch sich eine Resonanzfrequenz von 1010 kHz ergibt.

Das Verfahren zur Erzeugung optischer Multiphotonen-Gitter erfordert mehrere Frequenzen auf den Lichtpfaden um die atomaren Übergänge im Rubidiumatom zu betreiben. Hierfür werden die akusto-optischen Modulatoren (AOM 1, AOM 2) aus Abb. 3.9 mit mehreren Radiofrequenzen angesteuert. Eine schematische Darstellung des elektronischen Aufbaus zur Ansteuerung der AOMs ist in Abb. 3.10 zu sehen. Um die Radiofrequenzsignale zu erzeugen, werden vier phasenstabilisierte Funktionsgeneratoren verwendet. Während AOM 1 mit der Frequenz ω_{FG} betrieben wird, besteht die Ansteuerung von AOM 2 aus den drei Frequenzen ω_{FG} , $\omega_{FG} + \Delta\omega$ und $\omega_{FG} - \Delta\omega$, die mit Hilfe eines RF-Addierers überlagert werden. Alle vier Funktionsgeneratoren arbeiten im Bereich von 57 MHz, so dass das Signal mit Hilfe eines weiteren Funktionsgenerators (VCO) bei einer Frequenz von 143 MHz auf die notwendige Frequenz von 200 MHz zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren hochgemischt wird. Eine detaillierte Beschreibung des elektronischen Aufbaus zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren (AOM 1 und AOM 2) ist im Anhang A beschrieben. Für die in Kapitel 4 beschriebenen Experimente werden zur Vorselektion der atomaren Geschwindigkeiten weitere Frequenzen benötigt, die hier mit "Bragg" und "Raman" bezeichnet wurden (siehe Abb. 3.9).

Bei der Erzeugung der Multiphotonen-Gitter benötigt man zwei Grundzustände im Atom, die auf verschiedenen Energieniveaus liegen (siehe Abschnitt 3.1.2). Im Experiment werden hierzu als Grundzustände die Zeeman-Niveaus $m_F = -1$ und $m_F = 0$ der $F=1$ Komponente des elektronischen Grundzustands verwendet. Die Entartung des Grundzustands wird mit Hilfe eines homogenen Magnetfelds aufgehoben [117]. Das hierfür benötigte Magnetfeld wird durch zwei Spulen in einer Helmholtz-Konfiguration realisiert, die sich im Abstand von 30 cm zueinander befinden und in deren Zentrum das Bose-Einstein Kondensat in einer optischen Dipolfalle

erzeugt wird. Jede Spule hat einen Durchmesser von 15 cm und 60 Windungen. Die Ansteuerung erfolgt mit einer extern geregelten Stromquelle, deren Ausgangsstrom im Bereich von -3 A bis 3 A variiert werden kann. Die energetische Aufspaltung des Hyperfeinstrukturzustandes kann mit Hilfe von Raman-Übergängen zwischen den Zeeman-Zuständen $m_F = -1$ und $m_F = 0$ bestimmt werden. Dazu wird das Bose-Einstein Kondensat für die Dauer von 100 μs mit zwei gegenläufigen Lichtfeldern bestrahlt, wobei einer der Laserstrahlen in der Frequenz verstimmt ist. Die Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren für die Gitterlaserstrahlen erfolgt mit den Funktionsgeneratoren FG 1A und FG 2A, wobei die Frequenzänderung des Lichtfelds durch eine Änderung der Radiofrequenz am Funktionsgenerator FG 2A vorgenommen werden kann. Der Raman-Übergang von $m_F = -1 \rightarrow m_F = 0$ ist optimal, wenn die Frequenzänderung zwischen den beiden Laserstrahlen genau der Energiedifferenz der beiden Zeeman-Zustände entspricht. Abb. 3.11 zeigt die Besetzung der Spinkomponente $m_F = 0$ als Funktion der Frequenzänderung am Funktionsgenerator FG 2A. Die experimentell beobachteten Daten zeigen eine Resonanzkurve bei einer Frequenzänderung von $\nu_z = 1010\text{kHz}$, die gerade der Zeeman-Aufspaltung des Hyperfeinstrukturzustandes im Rubidiumatom entspricht. In einer älteren Konfiguration des Experiments betrug die Zeeman-Aufspaltung $\nu_z = 850\text{kHz}$.

3.3 Beugung eines Bose-Einstein Kondensats an optischen Gitterpotentialen

Zur Charakterisierung der experimentell realisierten Gitterpotentiale wird die Beugung von Atomen an einem transienten optischen Gitterpotential untersucht [50,112]. Die Beugungsbilder erlauben dabei eine Bestimmung der verwendeten Potentialform. Da die Messung im Impulsraum stattfindet, kann die relative atomare Besetzung der einzelnen diskreten Impulskomponenten mit der Lösung aus der numerischen Integration der Koeffizientengleichung (3.42) verglichen werden. Hieraus lassen sich bei gegebener Einstrahldauer die Potentialtiefen des optischen Gitters bestimmen.

Im Experiment wird die Dipolfalle, in der sich das Bose-Einstein Kondensat im Zustand $m_F = -1$ befindet, ausgeschaltet und die Gitterlaser für eine Dauer von 6-10 μs eingeschaltet. Nach dem Abschalten der Gitterstrahlen können die Atome für 15 ms frei expandieren, wodurch sich aufgrund der Wellennatur des Bose-Einstein Kondensats mehrere Atomwolken in diskreten Impulszuständen bilden. Der Abstand benachbarter Atomwolken entspricht dabei dem reziproken Gitterabstand des zu untersuchenden optischen Gitterpotentials. Die Abb. 3.12 zeigt Absorptionsoptionen von (links) Beugungsbildern für unterschiedliche optische Gitter und (rechts) deren räumlicher Verlauf.

3.3 Beugung eines Bose-Einstein Kondensats an optischen Gitterpotentialen

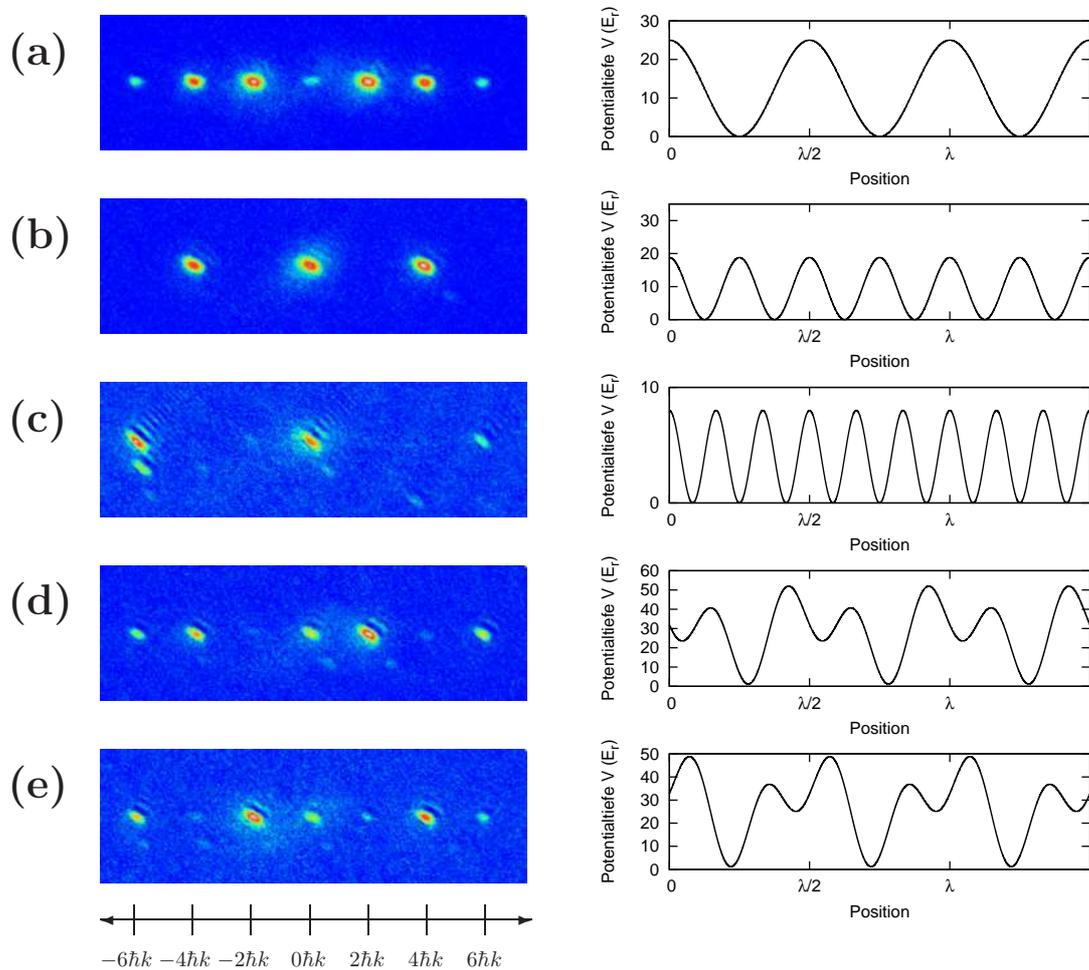


Abb. 3.12: Links: In falschfarben kodierte Aufnahmen des Beugungsbilds eines Bose-Einstein Kondensats an einem transienten optischen Gitter unterschiedlicher Periode und Form. Rechts daneben ist das entsprechende Gitterpotential gezeigt, rekonstruiert aus den Beugungsbildern. Dabei wurden folgende Gitter realisiert: (a) optische Stehwelle, (b) Vierphotonen-Gitter, (c) Sechspotonen-Gitter und (d-e) asymmetrische Gitter unterschiedlicher räumlicher Phase.

(a) Konventionelles optisches Gitter

Abb. 3.12 (a) zeigt ein typisches Beugungsbild für eine konventionelle optische Stehwelle. Dazu werden zwei gegenläufige Laserstrahlen gleicher Frequenz benötigt. Die notwendigen Frequenzen zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren liefern die Radiofrequenzgeneratoren FG 1A und FG 2A. Die einzelnen Beugungsordnungen sind symmetrisch um den Impuls $p = 0\hbar k$ verteilt und haben einen Abstand von $2\hbar k$ zueinander. Das entspricht im Ortsraum einem Gitterpotential mit räumlicher Periode $\lambda/2$. Die Potentialtiefe des Gitters wird durch Anpassen der Koeffizientengleichung (3.42) an die Daten ermittelt und beträgt hier $V_1 = 25E_r$, wobei E_r die Rückstoßenergie ist.

(b) Vierphotonen-Gitter

Im nächsten Schritt soll ein Vierphotonen-Gitter gemäß dem Schema aus Abschnitt 3.1.2 realisiert werden. Hierfür werden drei Lichtstrahlen mit den Frequenzen ω , $\omega + \Delta\omega$ und $\omega - \Delta\omega$ benötigt, die mit Hilfe der Funktionsgeneratoren FG 1A, FG 2B und FG 2C erzeugt werden. Für die beiden Grundzustände wird der Grundzustand $F = 1$ durch Anlegen eines Magnetfeldes in seine Spinzustände $m_F = 0, \pm 1$ aufgespalten, wobei die Energieaufspaltung zwischen benachbarten Zeeman-Niveaus 800 kHz beträgt. Als Frequenzverstimmung $\Delta\omega$ für die Gitterstrahlen wurde eine Frequenz von 1250 kHz gewählt, womit sich eine Zweiphotonen-Verstimmung δ von ungefähr 450 kHz ergibt. Abb. 3.12 (b) zeigt die Absorptionaufnahme der Beugung eines Bose-Einstein Kondensats an einem Vierphotonen-Gitter. Verglichen mit der Beugung an einer optischen Stehwelle, ist der Abstand der einzelnen Impulszustände doppelt so groß. Für die Impulszustände $\pm 2\hbar k$ wird keine meßbare Population beobachtet, so dass ungewollte Stehwelleneffekte in guter Näherung unterdrückt sind. Ein Impulsabstand von $4\hbar k$ entspricht dabei einem Gitter mit einer räumlichen Periode von $\lambda/4$, wobei hier die Potentialtiefe $V_2 = 18E_r$ beträgt.

(c) Sechspotonen-Gitter

Es wurde außerdem getestet, ob mit dem verwendeten Verfahren ein Sechspotonen-Gitter realisiert werden kann. Dazu ändert man die Frequenz des Laserstrahls mit der Frequenz $\omega + \Delta\omega$ in $\omega + \Delta\omega/2$. Abb. 3.12 (c) zeigt die Absorptionaufnahme eines Sechspotonen-Gitters im Fernfeld, bei dem der Abstand zwischen den einzelnen Beugungsordnungen $6\hbar k$ beträgt, was einem reziproken Gitterabstand von $\lambda/6$ entspricht. Die Stern-Gerlach Analyse zeigt allerdings eine teilweise Ansammlung von Atomen im Grundzustand $m_F = 0$, was offenbar daran liegt, dass die Zweiphotonen-Verstimmung δ nicht groß genug war, um resonante Raman-Übergänge zu unterdrücken. Diese Atome befinden sich im unteren Teil der Aufnahme. Die erreichte Potentialtiefe liegt hier im Bereich von $V_3 = 8E_r$.

(d-e) Räumlich asymmetrische Gitter

Eine gleichzeitige Überlagerung von optischer Stehwelle und Vierphotonen-Gitter ermöglicht die Realisierung von asymmetrischen optischen Gitterpotentialen. Dazu werden nun die vier Funktionsgeneratoren FG 1A, FG 2A, FG 2B und FG 2C verwendet. Eine Variation der Potentialtiefe der optischen Stehwelle kann durch Ver-

3.3 Beugung eines Bose-Einstein Kondensats an optischen Gitterpotentialen

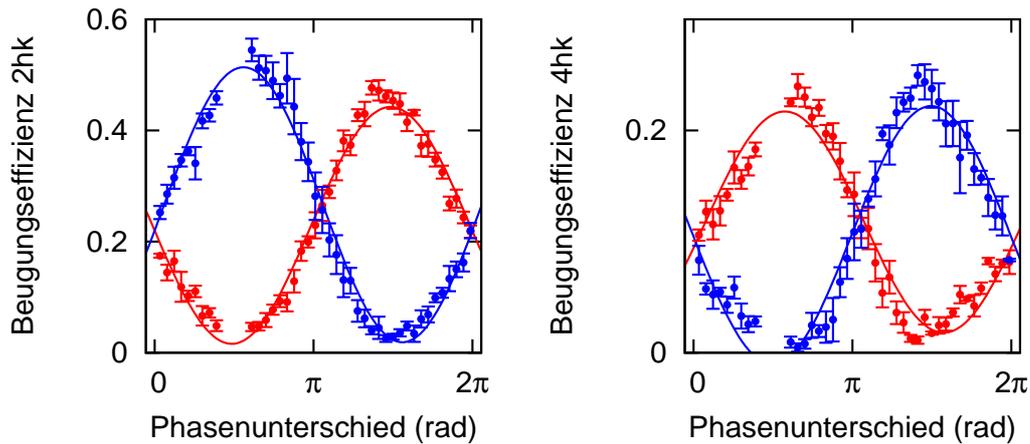


Abb. 3.13: Links: Abhängigkeit der Besetzungseffizienz der +1. Ordnung (rot) und -1. Ordnung (blau) in einem asymmetrischen Gitterpotential als Funktion der räumlichen Phase φ . Rechts: Entsprechende Daten für die +2. Ordnung (blau) und der -2. Ordnung (rot) als Funktion der Phase.

ändern der Radiofrequenzleistung am FG 2A vorgenommen werden und die Potentialtiefe des Vierphotonen-Gitters kann mittels FG 2B und FG 2C gesteuert werden. Abb. 3.12 (d) und (e) zeigen Absorptionaufnahmen von Beugungsbildern eines räumlich asymmetrischen Gitters bei einer relativen Phase von $\varphi = \pi/2$ und $-\pi/2$. Beobachtet wird, dass die Beugungsbilder asymmetrisch um die 0. Ordnung bei $p = 0$ verteilt sind. In der Abbildung (e) ist beispielsweise die +1. Beugungsordnung stärker besetzt als die -1. Ordnung, während sich die 2. Beugungsordnungen gerade invers dazu verhalten. Aus den rekonstruierten Gitterpotentialen wird eine Potentialtiefe $V_1 = 28E_r$ und $V_2 = 21E_r$ ermittelt.

Es soll nun die Besetzung der einzelnen Beugungsordnungen als Funktion der relativen Phase zwischen den Gitterharmonischen untersucht werden. Dazu wird die Phase am Funktionsgenerator FG 2A schrittweise durchgeführt. Abb. 3.13 zeigt die beobachtete Besetzung der Beugungsordnung $\pm 2\hbar k$ (links) und $\pm 4\hbar k$ (rechts) als Funktion der Phasenverschiebung φ . Die Beugungseffizienz zeigt eine sinusförmige Abhängigkeit, wobei gleiche Beugungsordnungen unterschiedliches Vorzeichen aufweisen. Aus dem theoretischen Modell wird erwartet, dass das optische Gitter an den Kreuzungspunkten räumlich symmetrisch ist. Das kann beispielsweise dazu verwendet werden, um die Phase am Funktionsgenerator zu kalibrieren. Aufgrund von Laufzeitunterschieden in den optischen Pfaden entspricht die eingestellte Phase am Funktionsgenerator im Allgemeinen nicht der Phase des asymmetrischen Gitters, so dass eine Kalibration nötig ist.

Die Potentialtiefe des Vierphotonen-Gitters ist laut Abschnitt 3.1.2 invers proportional zur Zweiphotonen-Verstimmung δ . Ohne Änderung der Laserleistung kann die Stärke des Gitterpotentials daher durch die Verstimmung δ variiert werden. In

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

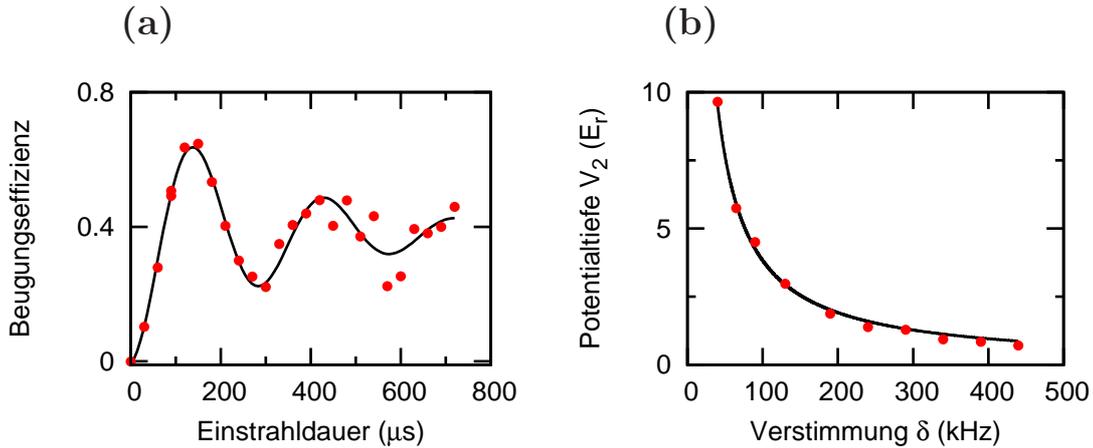


Abb. 3.14: (a) Experimentell beobachtete Rabi-Oszillation an der Bandkante in einem Vierphotonen-Gitter bei einer Zweiphotonen-Verstimmung $\delta = 180\text{kHz}$. (b) Abhängigkeit der Potentialtiefe in einem Vierphotonen-Gitter von der Verstimmung δ . Die durchgezogene Linie ist eine Anpassung mit dem theoretisch erwarteten Verlauf, der umgekehrt proportional zur Verstimmung δ ist.

diesem Zusammenhang wurde in einem weiteren Experiment die Abhängigkeit der Potentialtiefe von der Zweiphotonen-Verstimmung δ untersucht. Die Potentialtiefe kann mittels Rabi-Oszillationen am Rand der Brioullin-Zone zwischen dem ersten und zweiten Bloch-Band untersucht werden [118–120]. Aus der Rabi-Periode τ_R folgt für die Potentialtiefe in Einheiten von der Rückstoßenergie $V_2/E_r = 2/(\tau_R \nu_r)$, wobei ν_r die Rückstoßfrequenz $E_r = h\nu_r$ ist, welche bei einer Wellenlänge von 781.3 nm einen Wert von $\nu_r = 3.71\text{kHz}$ hat. Im Experiment wird das Vierphotonen-Gitter mit Hilfe der Funktionsgeneratoren FG 1A, FG 2A und FG 2C erzeugt. Das Bose-Einstein Kondensat wird direkt nach Ausschalten der Dipolfalle an den Rand der Brioullin-Zone bei einem Quasi-Impuls $q = 2\hbar k$ durch eine konstante Frequenzverstimmung des Funktionsgenerators FG 1A präpariert. Da die Experimente im freien Fall stattfinden und die Atomwolke im Gravitationsfeld der Erde beschleunigt fällt, wird die Frequenz des Funktionsgenerators FG 1A zusätzlich linear in der Zeit verändert, um den Einfluß der Gravitation zu kompensieren. Das Bose-Einstein Kondensat oszilliert nun für unterschiedlich lange Einstrahldauern der Gitterlaser zwischen den Impulszuständen $0\hbar k$ und $4\hbar k$ mit einer von der Potentialtiefe abhängigen Rabi-Periode. In Abb. 3.14 (a) ist exemplarisch eine Rabi-Oszillation in einem Vierphotonen-Gitter mit einer Zweiphotonen-Verstimmung $\delta = 180\text{kHz}$ zu sehen, aus der sich eine Rabi-Periode $\tau_R = 270\mu\text{s}$ ergibt und die Potentialtiefe des Gitters somit $V_2 = 2E_r$ war. Im weiteren Verlauf wird die Potentialtiefe des Vierphotonen-Gitters als Funktion der Zweiphotonen-Verstimmung δ gemessen, wobei Abb. 3.14 (b) wie erwartet eine inverse Abhängigkeit davon zeigt.

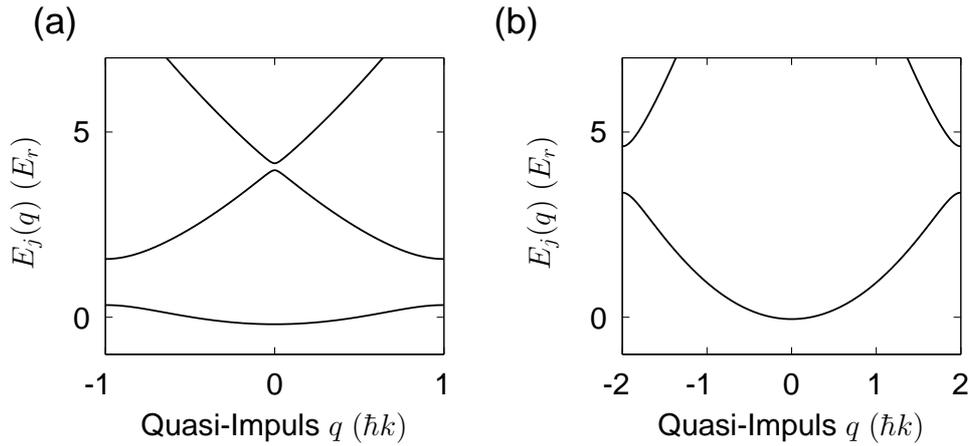


Abb. 3.15: Bandstruktur eines optischen Gitterpotentials der räumlichen Periode (a) $\lambda/2$ und (b) $\lambda/4$. Die Potentialtiefe beträgt in beiden Fällen $2.7E_r$.

3.4 Bloch-Oszillationen im Multiphotonen-Gitter

In diesem Abschnitt wird die Dynamik von Atomen unter dem Einfluß einer äußeren konstanten Kraft in einem optischen Vierphotonen-Gitter der Periode $\lambda/4$ experimentell untersucht und mit den Ergebnissen von konventionellen Stehwellenpotentialen der Periode $\lambda/2$ verglichen [112].

Abb. 3.15 zeigt jeweils die berechnete Bandstruktur für eine optische Stehwelle (links) und einem Vierphotonen-Gitter (rechts) bei einer Potentialtiefe $V = 2.7E_r$. Im Experiment wird ein Rubidium Bose-Einstein Kondensat in den Grundzustand des Bloch-Spektrums geladen, wobei die Atome einen Quasi-Impuls $q(0) = 0$ besitzen. Anschließend wird das Gitter durch eine lineare Frequenzänderung des elektrischen Funktionsgenerators FG 1A konstant beschleunigt, um so eine Kraft auf die Atome zu simulieren. Dabei entwickelt sich der Quasi-Impuls linear in der Zeit, wobei folgende Relation zwischen der Frequenzänderung am Funktionsgenerator und der Impulsänderung der Atome gilt:

$$q(t) = \frac{1}{2}v_{span}m\lambda \cdot t \quad (3.62)$$

Dabei ist v_{span} die Änderung der Frequenz pro Zeiteinheit, m die Masse des Atoms und λ die Wellenlänge des Laserlichts. Im Fall von Rubidiumatomen und einer Wellenlänge von 781.3 nm, ergibt sich der Quasi-Impuls in Einheiten des Photonenimpulses $\hbar k$

$$\frac{q(t)}{\hbar k} = 67.201 \cdot 10^{-3}v_{span}[kHz/ms] \cdot t[ms] \quad (3.63)$$

Es gilt weiterhin die folgende Umrechnung zwischen der Frequenzrate, die man am Funktionsgenerator einstellt und der Beschleunigung in SI-Einheiten.

$$v_{span}[kHz/ms] = \frac{2a}{\lambda} = 2.56 \cdot a[m/s^2] \quad (3.64)$$

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

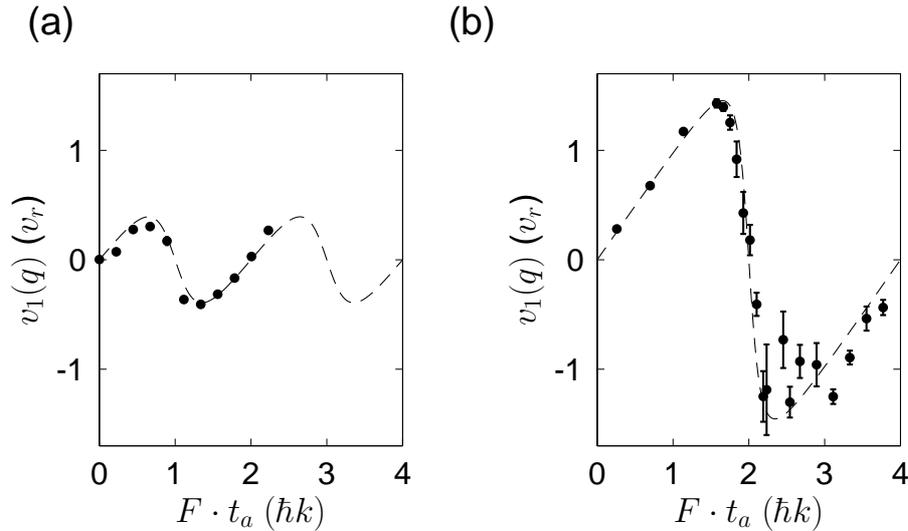


Abb. 3.16: Atomare Geschwindigkeit der Atome in einem (a) konventionellen Stehwellenpotential und einem (b) Vierphotonen-Gitter der doppelten räumlichen Periode als Funktion der Beschleunigungszeit t_a . Die durchgezogene Linie ist der theoretisch erwartete Verlauf bei einer Potentialtiefe von jeweils $2.7E_r$, wobei eine Landau-Zener Tunnelrate ins höhere Band von 10% angenommen wird.

Die Potentialtiefe beträgt in beiden Fällen $2.7 E_r$, die mit Hilfe von Rabi-Oszillationen an der Bandkante experimentell bestimmt wurde. Abb. 3.16 zeigt die beobachtete Geschwindigkeit der Atome nach Ausschalten des Gitters als Funktion der Beschleunigungszeit t_a in einer optischen Stehwelle (links) und in einem Vierphotonen-Gitter (rechts). Es wurde jeweils eine Beschleunigung von 6.4 m/s^2 verwendet, was einer Frequenzrate von 16.4 kHz/ms am Funktionsgenerator FG 1A entspricht. Für sehr kurze Beschleunigungszeiten wächst die Geschwindigkeit in beiden Fällen linear an, so wie es das Gesetz von Newton $v = F/m \cdot t$ vorhersagt. Am Rand der Brioullin-Zone wird das Wellenpaket Bragg-reflektiert, so dass sich das Vorzeichen der Geschwindigkeit umkehrt. Dies geschieht im Fall der optischen Stehwelle bei $q = \hbar k$ und wird schneller erreicht als beim Vierphotonen-Gitter, dessen Bandkante bei $q = 2\hbar k$ liegt.

Die Bewegung von Atomen in einem beschleunigten optischen Gitterpotential lässt sich auch über die Bewegungsgleichung $F = m_{\text{eff}} d\langle v \rangle / dt$ beschreiben, wobei m_{eff} die effektive Masse der Atome ist. Es wurde bereits im Abschnitt 3.1.4 gezeigt, dass die effektive Masse von der Ruhemasse der Atome abweicht und von der Position im Bandspektrum abhängt. Aus den experimentellen Daten über die Gruppengeschwindigkeit wurde die effektive Masse in beiden Gitterpotentialen jeweils bei $q = 0$ und an der Bandkante bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abb. 3.17 in Einheiten der Ruhemasse eingetragen, in der auch der theoretische Verlauf zu sehen ist. Dabei beträgt die effektive Masse bei $q = 0$ für den Fall einer optischen Stehwelle

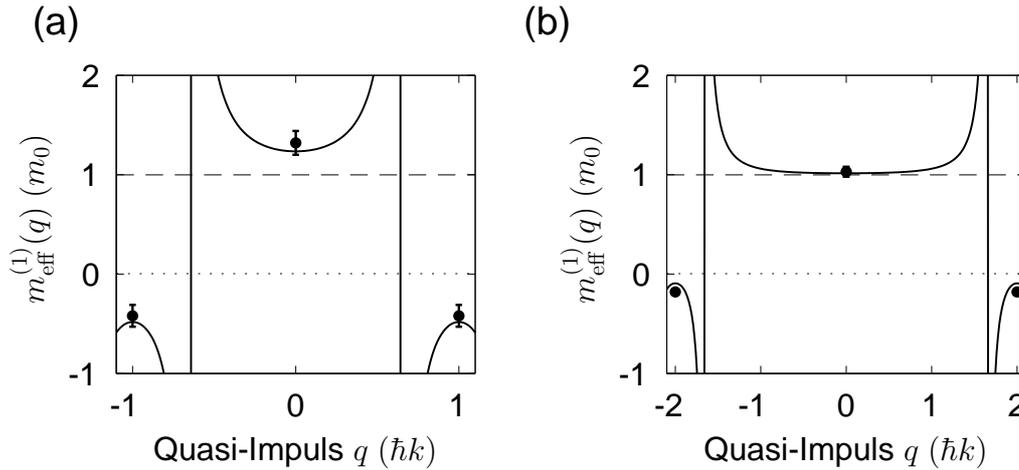


Abb. 3.17: Effektive Masse eines Atoms im Grundzustand eines Gitter der Periode (a) $\lambda/2$ und (b) $\lambda/4$. Die Datenpunkte wurden aus Abb. 3.16 durch die inverse Steigung der Bloch-Oszillationen bei einem Quasi-Impuls $q = 0$ und an den Rändern des Spektrums interpoliert. Die durchgezogenen Linien entsprechen einem theoretischen Modell bei einer Potentialtiefe von $2.7E_r$

$m_{\text{eff}} = (1.29 \pm 0.12)m_0$ und für das Vierphotonen-Gitter $m_{\text{eff}} = (1.03 \pm 0.05)m_0$. Das bedeutet, dass die effektive Masse im Vierphotonen-Gitter näher an der Ruhemasse der Atome ist, als in der optischen Stehwelle. Das liegt hauptsächlich an dem doppelt so großen Abstand zur Bandkante. Auf der anderen Seite beträgt die effektive Masse an der Bandkante bei $q = \hbar k$ für das Stehwellenpotential $m_{\text{eff}} = (-0.42 \pm 0.11)m_0$ und $m_{\text{eff}} = (-0.18 \pm 0.02)m_0$ für das Vierphotonen-Gitter bei $q = 2\hbar k$.

Die Ergebnisse zeigen, dass ein kohärenter Atomtransport in einem optischen Gitter möglich ist, dessen räumliche Periode unterhalb der Rayleigh-Auflösungsgrenze von $\lambda/2$ liegt. Die Methode zur Erzeugung solcher Gitterstrukturen ermöglicht vielfältige physikalische Anwendungen, wie wir in den nachfolgenden Kapiteln sehen werden.

Interessant ist auch zu untersuchen, wie sich die Ordnung des Gitterpotentials auf das Bose-Hubbard Model [121] auswirkt. Vergleicht man die Tunnelrate $J(n)$ in einem Multiphotonen-Gitter der Ordnung n mit der Tunnelrate $J(1)$ in einer optischen Stehwelle, so ergibt sich folgendes Verhältnis:

$$\frac{J(n)}{J(1)} = \sqrt{(n)} \exp(-a/n) \quad (3.65)$$

wobei a eine beliebige Konstante ist. Man beachte, dass die Relation nur für sehr starke Potentialtiefen $V_0 \gg n^2 E_r$ gilt. Aus der Gleichung folgt, dass sich die Tunnelrate für die räumlich kurzperiodischen Gitterpotentiale im Vergleich zu konventionellen Gittern erhöht, so dass der Mott-Isolator-Übergang früher erreicht werden kann [15].

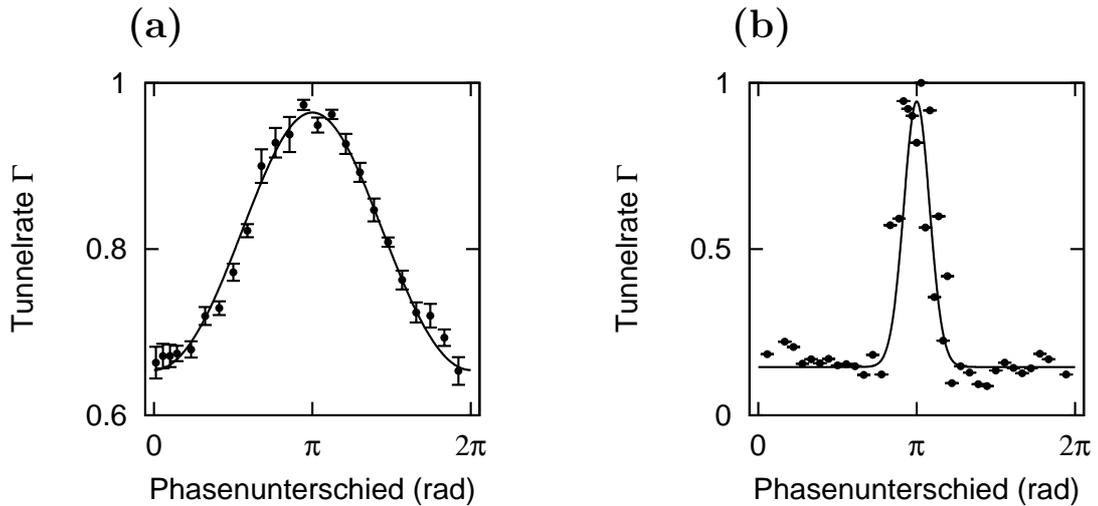


Abb. 3.18: Tunnelwahrscheinlichkeit zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band als Funktion der relativen Phase φ zwischen den Gitterharmonischen für zwei unterschiedliche Parametersätze: (a) $V_1 = 2.3E_r$ und $V_2 = 0.2E_r$; (b) $V_1 = 6E_r$ und $V_2 = 2E_r$. Die durchgezogene Linie ist der theoretische Verlauf, wobei keine freien Fitparameter angenommen wurden.

3.5 Phasenabhängiger Landau-Zener Übergang

In diesem Abschnitt wird die Phasenabhängigkeit der Energieaufspaltung zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band in einem optischen Gitter experimentell untersucht, das aus zwei Gitterharmonischen unterschiedlicher räumlicher Periode zusammensetzt ist: $V(z) = [V_1 \cos(2kz) + V_2 \cos(4kz + \varphi)]/2$. Es werden experimentelle Ergebnisse präsentiert, die mit dem theoretischen Modell aus Kapitel 3.1.5 verglichen werden.

Im Experiment wird ein Bose-Einstein Kondensat in das zweite Bloch-Band mit einem Quasi-Impuls $q = 1.5\hbar k$ präpariert. Dazu wird das Gitterpotential relativ zu den Atomen durch Laserverstimmung eines Lichtfeldes konstant bewegt und die Stärke des Potentials innerhalb von $20\mu s$ adiabatisch vergrößert [122]. Anschließend werden die Atome durch eine lineare Frequenzänderung am Funktionsgenerator FG 1A über die Bandkante beschleunigt, wobei ein Teil der Atome Bragg-reflektiert wird und dadurch einen Impuls von $4\hbar k$ aufnehmen, wohingegen die Atome, die in das höhere Energieband tunneln, keinen zusätzlichen Impuls erhalten. Die Gitterlaser bleiben so lange angeschaltet, bis die Atome zu einem Quasi-Impuls $q = 2.5\hbar k$ beschleunigt wurden. Anschließend fallen die Atome noch für eine weitere Zeit von 15 ms frei im Schwerfeld der Erde, wonach sich diskrete Atomwolken mit verschiedenen Impulszuständen bilden. Atome, die an der Bandkante reflektiert wurden und einen Impuls von $4\hbar k$ erhalten haben, befinden sich dabei in der 2. Beugungsordnung, während die Atome, die in das höhere Blochband getunnelt sind, in der 0. Beugungsordnung

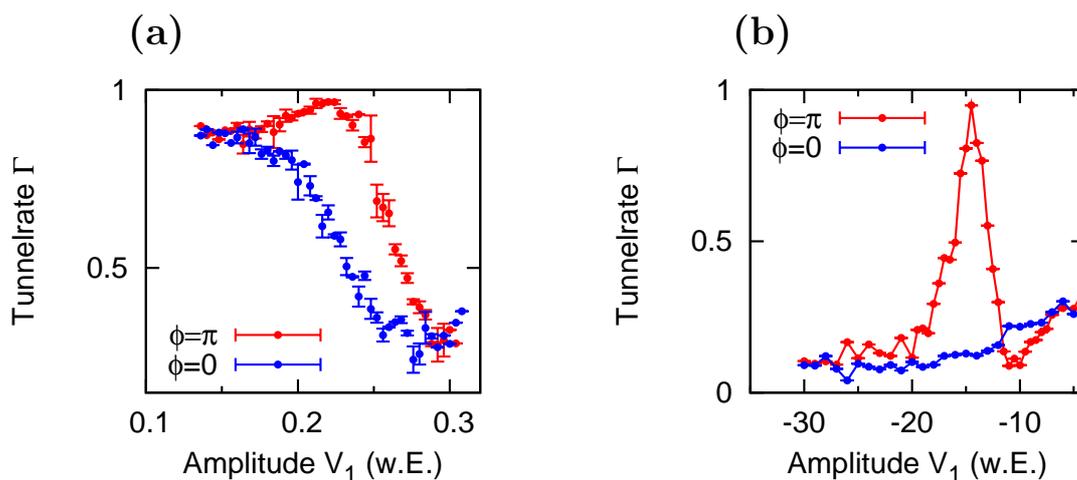


Abb. 3.19: Darstellung der Tunnelwahrscheinlichkeit der Atome zwischen dem zweiten und dritten Bloch-Band als Funktion der Potentialtiefe V_1 , wobei der Phasenunterschied $\varphi = 0$ (blau) und $\varphi = \pi$ (rot) beträgt. Die Potentialtiefe V_2 beträgt in diesem Fall (a) $0.2 E_r$ und (b) $2.0 E_r$. Die Einheit der Potentialtiefe ist in (b) logarithmisch aufgetragen.

sind. Die relative Anzahl der Atome in der 0. Beugungsordnung gibt schließlich die Tunnelwahrscheinlichkeit Γ aus Gleichung (3.53) wieder. In Abb. 3.18 ist die Tunnelrate als Funktion der Phase für zwei unterschiedliche Parametersätze aufgetragen. Die durchgezogene Linie zeigt dabei den theoretisch erwarteten Verlauf, der durch die Lösung der Eigenwertgleichung mit den gegebenen Parametern aus dem Experiment ermittelt wird. Die Potentialtiefen der Gitterharmonischen werden mit Hilfe von Rabi-Oszillationen an der Bandkante bestimmt und betragen im linken Bild $V_1 = 2.3E_r$ und $V_2 = 0.2E_r$ und im rechten Bild $V_1 = 6E_r$ und $V_2 = 2E_r$. Wie sich zeigt und dadurch die theoretische Vorhersage bestätigt, verschwindet die Energielücke bei einem Phasenunterschied $\varphi = \pi$, wobei das Gitter hier aus einer Ansammlung von Potentialmulden besteht. Eine weitere Besonderheit ist, dass die Resonanz um $\varphi = \pi$ umso schmaler wird, je stärker des Gitterpotential ist.

In einem weiteren Experiment wird die Tunnelrate als Funktion der Potentialtiefe V_1 untersucht. Nach der theoretischen Vorhersage verschwindet die Bandlücke nur bei einem bestimmten Verhältnis der Potentialtiefen der Gitterharmonischen. Um diesen Sachverhalt zu überprüfen, wird die Tunnelrate zwischen dem zweiten und dritten Blochband in Abhängigkeit von der Stärke des Stehwellenpotentials gemessen. Das Experiment wird analog zur vorigen Messung durchgeführt, wobei nun die relative Phase konstant ist und die Potentialtiefe V_1 über die Stärke der Radiofrequenz am Funktionsgenerator FG 2A kontrolliert wird. Abb. 3.19 zeigt die beobachtete Tunnelwahrscheinlichkeit als Funktion der Potentialtiefe V_1 bei einem Phasenunterschied $\varphi = 0$ (blau) und $\varphi = \pi$ (rot). Für eine Phase $\varphi = 0$ fällt die Tunnelwahrscheinlichkeit exponentiell ab, so wie es bereits in früheren Experimenten zum Landau-Zener-

3 Variabel geformte Lichtpotentiale für ultrakalte Atome

Übergang bestätigt wurde [114]. Für eine Phase zwischen den Gitterharmonischen von $\varphi = \pi$ hingegen steigt die Tunnelwahrscheinlichkeit zunächst bis auf nahezu eins an, bis sie dann für höhere Werte von V_1 wieder abfällt. Es bildet sich eine Resonanz, die um so schärfer wird, je tiefer die Gitterpotentiale sind. Eine entsprechende Messung für solch stärkere Gitterpotentiale, dargestellt im rechten Bild, bestätigt das vorhergesagte Verhalten wobei hier das Vierphotonen-Potential $V_2 = 2E_r$ um einen Faktor 10 stärker ist, als im linken Beispiel. Das Maximum der Tunnelrate wird darauf zurückgeführt, dass für die entsprechenden Parameterwerte der Potentialtiefen der Bandabstand zwischen dem zweiten und dritten Blochband einen minimalen Wert annimmt. Grund ist die für $\varphi = \pi$ destruktive Interferenz zwischen den Bragg-Streuamplituden zweiter Ordnung des konventionellen Gitters mit der Bragg-Streuamplitude erster Ordnung des Vierphotonen-Gitters, das für einen bestimmten Wert der Potentialtiefen zu einem Minimum des Bandabstands führt. Für eine Phase $\varphi = 0$ tritt hingegen eine konstruktive Interferenz der genannten Streuamplituden an diesem Kreuzungspunkt auf. Aufgrund von Nichtlinearitäten in den Radiofrequenzzweigen verändert sich die Potentialtiefe der optischen Stehwelle nicht linear mit der Änderung der Radiofrequenz-Leistung am Funktionsgenerator FG 2A. Dadurch war es nicht möglich, den theoretisch erwarteten Verlauf an die Daten anzupassen. Qualitativ stimmen die Messungen allerdings gut mit den theoretischen Vorhersagen aus Abschnitt 3.1.5 überein.

4 Hamilton'sche Quantenrutsche

In diesem Kapitel wird über die erstmalige experimentelle Realisierung einer Hamiltonschen Quantenrutsche mit ultrakalten Atomen berichtet [47]. Zunächst wird im Abschnitt 4.1 eine allgemeine Einführung in das Gebiet der Rutschen gegeben und Funktionsweise gängiger Rutschen erklärt. Im Abschnitt 4.2 folgt eine erste theoretische Beschreibung der Dynamik in einem amplitudenmodulierten Rutschenpotential für ein klassisches System [123, 124]. Die Ergebnisse und Schlußfolgerungen werden anschließend auf den quantenmechanischen Bereich übertragen. Es wird das Modell eines amplitudenmodulierten Rutschenpotentials vorgestellt und dessen Eigenschaften in Bezug auf den gerichteten Transport erläutert. Im Abschnitt 4.3 wird der experimentelle Aufbau erklärt und vorbereitende Experimente beschrieben. Schließlich wird im Abschnitt 4.4 die eigentliche Umsetzung der Quantenrutsche demonstriert und deren Merkmale anhand von experimentellen Ergebnissen unterlegt.

4.1 Einführung zur Rutschenphysik

Transportphänomene spielen in vielen Bereichen der Physik, Chemie oder Biologie eine wichtige Rolle [28, 40, 125, 126]. Ein Beispiel hierfür ist der Ratscheneffekt, d.h. die Gleichrichtung einer ungeordneten Bewegung von Teilchen in einen gerichteten Transport ohne die Anwesenheit von Temperaturgradienten oder gerichteten makroskopischen Kräften [127]. Ein biochemischer Ratscheneffekt, in dem die Umwandlung von chemischer Energie zu einer gerichteten Bewegung von Molekülen in biologischen Systemen ohne gerichtete äußere Kraft führt, hat in den letzten Jahren erhebliches Interesse an den "Biologischen Motoren" geweckt. Der Ratscheneffekt wird hierbei unter anderem als Grundlage für die Muskelkontraktion, oder für den Zelltransport herangezogen [28]. Damit in diesem Zusammenhang eine Rutsche funktioniert, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: Das periodische Potential muss räumlich asymmetrisch sein und die Fluktuationen müssen das System aus dem thermischen Gleichgewicht auslenken, um den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht zu verletzen.

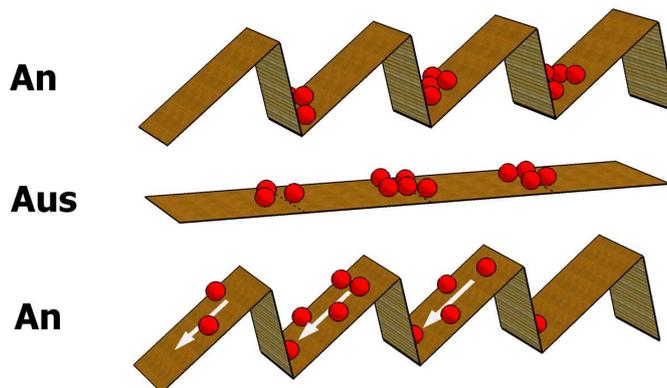


Abb. 4.1: Darstellung einer amplitudenmodulierten Ratsche. Durch das periodische An- und Ausschalten eines sägezahnförmigen Potentials entsteht aus einer ungeordneten Brownschen Bewegung ein gerichteter Teilchentransport

Es gibt viele Möglichkeiten, eine Ratsche zu realisieren. Im Folgenden sollen nur die zwei bekanntesten Arten erklärt werden:

Amplitudenmodulierte Ratsche (Flashing Ratchet)

Beim ersten Ratschentyp, der amplitudenmodulierten Ratsche, wird ein sägezahnförmiges Potential periodisch ein- und ausgeschaltet. Die Bewegung von Teilchen in einem solchen Potential $V(x)$ wird über die Langevin-Gleichung bestimmt:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -V'(x)f(t) + \zeta(t) \quad (4.1)$$

wobei m die Masse des Teilchens, γ die Dämpfungskonstante und die Funktion $f(t)$ hier entweder 0 (Potential aus) oder 1 (Potential ein) ist. Die Größe $\zeta(t)$ beschreibt weisses Rauschen im System und es gilt: $\langle \zeta(t) \rangle = 0$, $\langle \zeta(t)\zeta(s) \rangle = 2\gamma k_B T \delta(t-s)$. Das Funktionsprinzip einer solchen Ratsche ist in Abb. 4.1 dargestellt. Hier befinden sich Teilchen in den Potentialminima eines sägezahnförmigen Potentials. Sobald das Potential ausgeschaltet wird, beginnen die Teilchen aufgrund ihrer thermischen Energie frei zu diffundieren. Wird das Potential nach hinreichend langer Zeit wieder eingeschaltet, führt die Asymmetrie des Potentials dazu, dass hier mehr Teilchen nach links als nach rechts transportiert werden. Die Vorzugsrichtung eines Ratschentransports ist dabei entlang der starken Flanke des sägezahnförmigen Potentials.

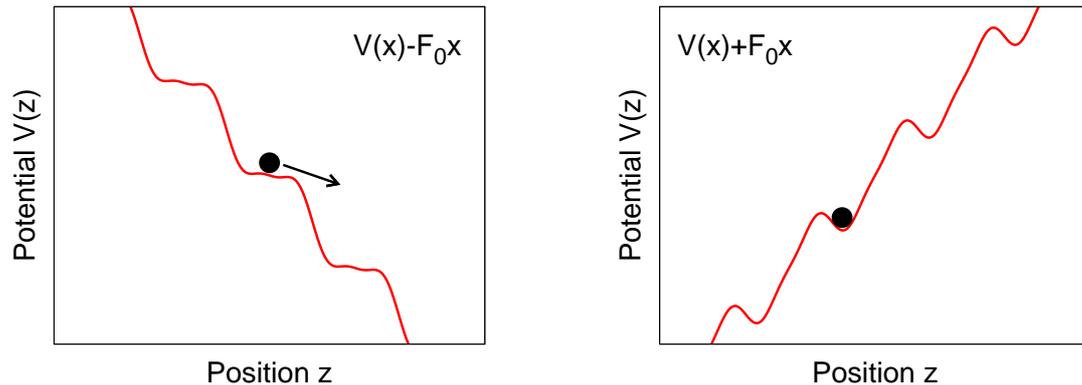


Abb. 4.2: Darstellung des Funktionsprinzips einer Kippratsche. Ein sägezahnförmiges Potential wird durch eine periodisch modulierte Kraft zeitlich verkippt. Aufgrund der asymmetrischen Form des Potentials wird eine Bewegung der Teilchen nach links blockiert, nach rechts allerdings ermöglicht.

Kippratsche (Rocking Ratchet)

Im Fall der Kippratsche ist das Potential zeitunabhängig und die antreibende Kraft $F(t) = F_0 \sin(\omega t)$ zeitlich periodisch. Die Langevin-Gleichung hat in diesem Fall folgende Form:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} = -V'(x) + F(t) + \zeta(t) \quad (4.2)$$

Die Kraft $F(t)$ bewirkt hier ein periodisches Verkippen des Potentials, was in Abb. 4.2 für zwei entgegengesetzte Kippamplituden $\pm F_0$ dargestellt ist. Bei geeigneter Wahl der Parameter wird die Bewegung der Teilchen aufgrund des asymmetrischen Potentials nach links blockiert und nach rechts durchgelassen. Es findet hier also im Gegensatz zur amplitudenmodulierten Ratsche eine gerichtete Teilchenbewegung in Richtung der flachen Flanke statt.

Diese beiden Grundformen einer Ratsche wurden hier für den klassischen Fall erläutert. Schließlich werden seit einigen Jahren auch Quanten-Ratschen diskutiert. In solchen Ratschen kann der Tunnelbeitrag bei sehr tiefen Temperaturen eine wesentliche Rolle in der Bewegung von Teilchen spielen. Eine zentrale Vorhersage ist eine Stromumkehr beim Übergang von einem thermisch dominierten Regime zu einem Quantenregime. Dieser Effekt wurde bereits in dreieckigen Quantenpunkt-Ratschen experimentell beobachtet [35].

In den bisher behandelten Ratschen wurde die Zeitumkehr auf natürliche Weise durch Reibung gebrochen. Was passiert allerdings in dissipationsarmen Systemen, in denen dieser Mechanismus nicht mehr vorhanden ist? Hier kommt das Konzept der Hamiltonschen Quantenratchen ins Spiel, das sich mit den grundlegenden Eigenschaften eines Ratschensystems auseinandersetzt. Dissipation kann hier beispielsweise durch eine zeitlich asymmetrische Modulation ersetzt werden.

4.2 Theoretische Grundlagen

Im folgenden Abschnitt wird anhand eines amplitudenmodulierten Ratschenpotentials gezeigt, dass ein gerichteter Transport von Atomen im klassischen, wie auch im quantenmechanischen Fall möglich ist [47, 128]. Das Gitterpotential, das im Experiment verwendet wird, besteht aus einer Überlagerung von zwei sinusförmigen Gittern unterschiedlicher räumlicher Periodizität, deren Potentialtiefen durch die Größen V_1 und V_2 gegeben sind. Durch Verändern der relativen Phase φ kann dabei die räumliche Symmetrie gebrochen werden.

$$V(z) = \frac{V_1}{2} \cos(2kz) + \frac{V_2}{2} \cos(4kz + \varphi) \quad (4.3)$$

Die Amplitude des ratschenförmigen Potentials wird periodisch moduliert, wobei die zeitliche Modulationsfunktion aus zwei sinusförmigen Anteilen unterschiedlicher zeitlicher Periode besteht. Die zeitliche Modulation hat die gleiche mathematische Form wie die räumliche Modulation des Ratschenpotentials, wobei A_1 und A_2 die Amplituden sind, ω die Modulationsfrequenz, θ die zeitliche Phasenverschiebung zwischen den Harmonischen ist und t_0 eine zeitliche Verschiebung der Funktion verursacht:

$$A(t) = A_1 \sin^2(\omega(t - t_0)/2) + A_2 \sin^2(\omega(t - t_0) + \theta/2) \quad (4.4)$$

Die Dynamik der Atome in einer amplitudenmodulierten Rutsche lässt sich mit Hilfe des Hamiltonoperators beschreiben, der aus einem kinetischen Anteil und einem zeitabhängigen Wechselwirkungspotential besteht:

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + V(z) \cdot A(t) \quad (4.5)$$

In Abb. 4.3 ist die zeitliche Sequenz der Amplitudenmodulation des Ratschenpotentials für unterschiedliche Zeitpunkte innerhalb einer Periode $T = 2\pi/\omega$ dargestellt. In diesem Beispiel erfolgt der Anstieg des Gitters langsamer als der Abfall.

4.2.1 Symmetrieeigenschaften

Für die Gleichrichtung einer ungeordneten Bewegung spielen die Symmetrien im System eine fundamentale Rolle [129, 130]. Das liegt daran, dass es Transformationen gibt, die den Hamiltonoperator von Gleichung (4.5) unverändert lassen, den Impuls der Teilchen aber zu einem späteren Zeitpunkt umdrehen. Im zeitlichen Mittel heben sich diese beiden Beiträge auf, so dass keine Nettobewegung von Teilchen erfolgt. Im Folgenden werden die Symmetrieeigenschaften eines periodischen Systems untersucht und Rahmenbedingungen für die Entstehung eines gerichteten Teilchentransports definiert.

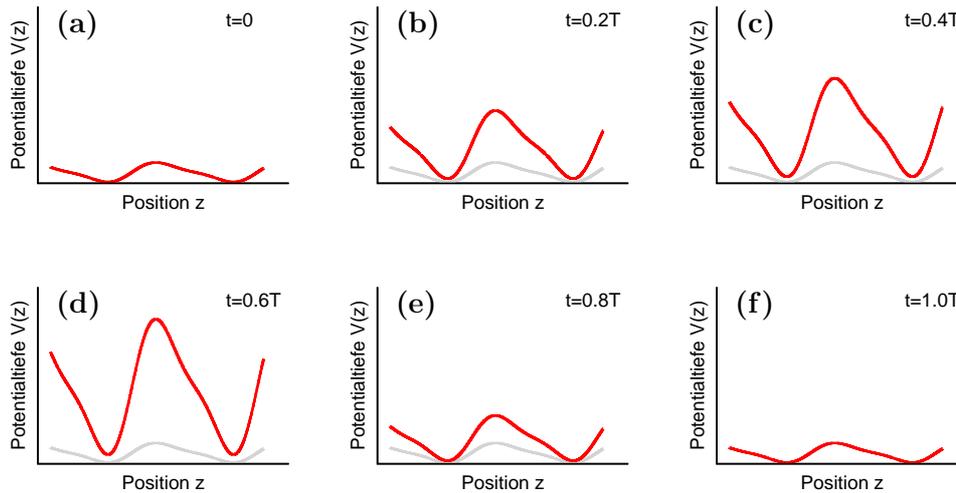


Abb. 4.3: Zeitliche Sequenz eines amplitudenmodulierten Ratschenpotentials während einer Periode T . Der Anstieg des Gitterpotentials erfolgt dabei langsamer als der Abstieg. Jedes Bild enthält grau hinterlegt das Potential zum Anfangszeitpunkt, um die Änderung innerhalb einer Periode anschaulicher zu visualisieren.

Im vorliegenden Fall einer amplitudenmodulierten Ratsche gibt es vier Transformationen, die den Hamiltonoperator unverändert lassen, den Impuls p der Teilchen allerdings invertieren. Es werden hier nur die zwei zeitlichen Symmetrien im Detail besprochen, da sich der räumliche Fall analog zum Zeitlichen verhält. Wenn die zeitliche Modulation $A(t)$ die Gleichung $A(t) = -A(t + T/2)$ erfüllt, wobei T die Periode ist, dann verursacht die Transformation $S_1 : (x, p, t) \rightarrow (-x + 2x_s, -p, t)$ eine Invertierung des Impulses ohne dabei den Hamiltonoperator zu verändern. Weiterhin gilt, wenn $A(t + t_s) = A(-t + t_s)$ spiegelsymmetrisch zum Zeitpunkt t_s ist, dann existiert die Transformation $S_2 : (x, p, t) \rightarrow (x, -p, -t + 2t_s)$. Beide Möglichkeiten der Transformation drehen den Impuls eines Teilchens im zeitlichen Verlauf um, so dass sich beide Beiträge im zeitlichen Mittel aufheben. Eine gerichtete Bewegung kann daher nur dann stattfinden, wenn die oben genannten Relationen für $A(t)$ nicht mehr gelten. Das ist der Fall, wenn die Amplituden $A_1, A_2 \neq 0$ und die zeitliche Phase $\theta \neq 0, \pi$ ist. Dieselben Symmetrieeigenschaften ergeben sich ebenfalls für den räumlichen Fall.

4.2.2 Klassisches Modell

Zunächst soll der Transport von Teilchen in einem zeitlich modulierten Ratschenpotential klassisch betrachtet werden. Zum Anfangszeitpunkt t_0 befindet sich das Teilchen am Ort x_0 mit dem Anfangsimpuls p_0 . Die zeitliche Entwicklung von Ort $x(t)$ und Impuls $p(t)$ des Teilchens wird über die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

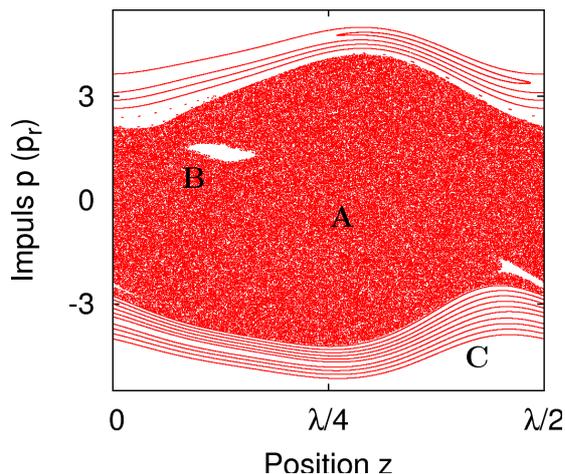


Abb. 4.4: Darstellung des Phasenraums nach jeweils einer ganzen Periode T (a-f). Er besteht aus einem chaotischen Bereich (A) der durch zwei KAM-Tori hoher kinetischer Energie (C) begrenzt wird. Im chaotischen See befinden sich außerdem reguläre Orbits (B), in denen sich Teilchen mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegen. Die Parameter sind $A_1 = 1.0$, $A_2 = 0.45$, $V_1 = 2.5$, $V_2 = 0.5$ und $\omega/8\omega_r = 1.01$, sowie für die Phasen $\phi, \theta = \pi/2$.

berechnet [131]:

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, p, t)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p, t)}{\partial x} \quad (4.6)$$

Ein Maß für den Transport von Teilchen in einer zeitlich modulierten Ratsche lässt sich über den Strom J definieren:

$$J(t) = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \quad (4.7)$$

Er gibt an, wie weit sich ein Teilchen von seinem Ursprung in einer bestimmten Zeit entfernt hat und charakterisiert so die Fähigkeit einer Ratsche aus einer ungeordneten Bewegung einen gerichteten Transport zu erzeugen.

Ein gutes Werkzeug bei der Beschreibung von zeitlich periodischen Systemen ist die Poincaré-Darstellung. Hier wird der Ort und der Impuls eines Teilchens nach jeder Oszillationsperiode T in ein Phasenraumdiagramm eingetragen [123] (siehe Abb. 4.4). Da das Gitter räumlich periodisch ist, beschränkt sich der Aufenthaltsort des Teilchens auf eine Gitterperiode $\lambda/2$. Es können nun verschiedene Bereiche im Phasenraum klassifiziert werden. Der Großteil aller Trajektorien befindet sich im chaotischen Bereich (A). Er stellt sich als homogene Fläche ohne Struktur im Phasenraum dar. Hier genügen schon kleinste Änderungen in den Anfangsbedingungen, um einen anderen Bahnverlauf des Teilchens zu verursachen. Im Spezialfall eines eindimensionalen Problems, durchquert eine einzelne Trajektorie, die im chaotischen Bereich

startet, den kompletten chaotischen Phasenraum. Begrenzt wird der chaotische Bereich durch sogenannte Kolmogorov-Arnold-Moser Tori (KAM-Tori), welche sich für Teilchen mit extrem hohen Anfangsimpuls ergeben [132] (C). Diese Trajektorien hängen kaum von der Position im Potential ab, was soviel bedeutet, dass ein Teilchen mit sehr hoher Geschwindigkeit, das Potential nur als minimale Störung wahrnimmt. Desweiteren bilden sich innerhalb des chaotischen Bereichs zusätzliche Tori, die wie kleine Inseln erscheinen. Sie bilden eine Klasse von invarianten Mengen, so dass ein Teilchen, das innerhalb einer Insel startet, den Bewegungszustand im weiteren zeitlichen Verlauf beibehält (B).

Jedem dieser Inseln (KAM-Tori) lässt sich eine konstante Geschwindigkeit zuordnen, genau wie dem chaotischen Phasenraumbereich. Nach der Summenregel in klassischen, zeitlich getriebenen Systemen ist die Summe aller Geschwindigkeiten im Phasenraum null [123].

$$v = \sum_i v_i = 0 \longrightarrow v_{chaos} = - \sum_{\text{Inseln}} v_i \quad (4.8)$$

Das bedeutet, wenn die Gesamtgeschwindigkeit aller regulärer Orbits ungleich null ist, dann ist der chaotische Bereich transportierend. Interessant für ein Ratschensystem sind daher nur Startbedingungen, die innerhalb des chaotischen Sees liegen, da sonst kaum Wechselwirkung mit dem Potential vorhanden ist. Die Form des Phasenraums gibt demnach wichtige Informationen über einen möglichen gerichteten Transport von Teilchen wieder.

In Abb. 4.5 wird die Bewegung von Teilchen in einer amplitudenmodulierten Ratsche untersucht, deren Startpunkt innerhalb des chaotischen Bereichs im Phasenraum liegt. Dazu wird der Strom nach Gleichung (4.7) von 2500 verschiedenen Trajektorien nach einer Integrationszeit von 10.000 Perioden berechnet und in ein Histogramm eingetragen. In der Abbildung (rechts) ist zum einen die Poincaré-Darstellung des chaotischen Phasenraums für verschiedene zeitliche Phasen θ dargestellt (wobei $\varphi = \pi/2$ ist) und (links) das dazugehörige Histogramm. Im Fall gebrochener Raum-Zeit-Symmetrie (a und c) zeigt sich eine Desymmetrisierung des Phasenraums, wobei die mittlere Transportgeschwindigkeit im Histogramm $\pm 0.7 p_r / m$ beträgt. Im Gegensatz dazu erscheint der Phasenraum spiegelsymmetrisch um den Impuls $p = 0$, wenn das System zeitinvariant ist (b). Die mittlere Transportgeschwindigkeit der Trajektorie innerhalb des chaotischen Bereichs ergibt in diesem Fall Null und es findet keine Nettobewegung der Teilchen statt.

Ein ähnliches Ergebnis liefert auch Abb. 4.6. Es zeigt die Position (a) und den Strom (b) eines Teilchens im zeitlichen Verlauf für unterschiedliche Werte von θ , wobei die räumliche Phase $\varphi = \pi/2$ beträgt. Bei gebrochener Raum-Zeit-Symmetrie, d.h. für $\theta = \pm\pi/2$ vergrößert sich der Abstand des Teilchens zum Startort linear in der Zeit. Nach einer gewissen Einschwingphase erreicht der Strom einen konstanten Wert, der genauso groß ist, wie der ermittelte Strom aus dem Histogramm in Abb. 4.5. Sobald das System zeitlich reversibel ist, d.h. für $\theta = \pi$, ist der Strom Null und es findet kein Transport statt. Zusammenfassend funktioniert der Transportmechanismus von

4 Hamilton'sche Quantenratsche

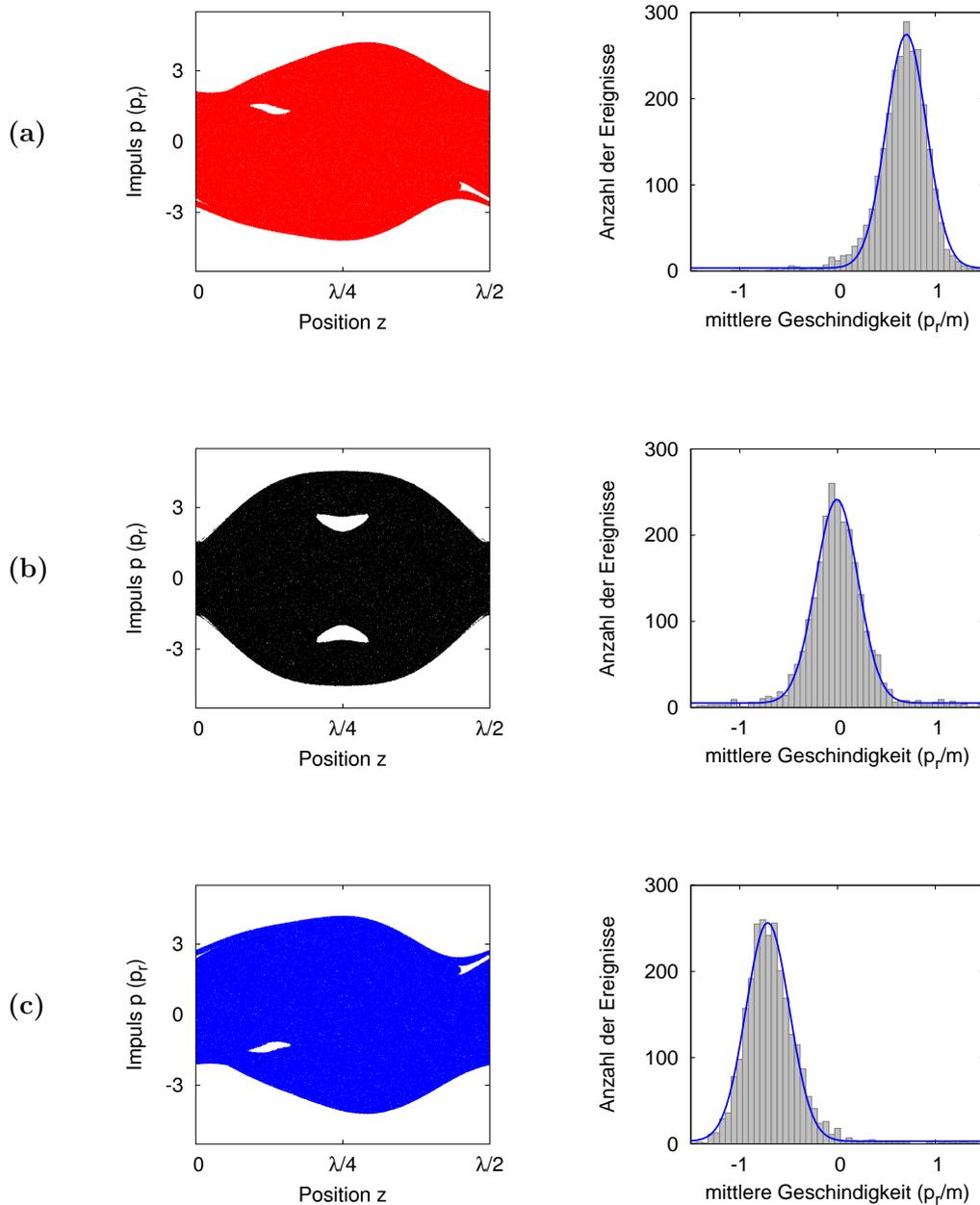


Abb. 4.5: (links) Poincaré-Darstellung des chaotischen Bereichs im Phasenraum für verschiedene zeitliche Phasen (a) $\theta = \pi/2$, (b) $\theta = 0$ und (c) $\theta = -\pi/2$, wobei die räumliche Phase $\varphi = \pi/2$ beträgt. (rechts) Das Histogramm gibt die mittlere Transportgeschwindigkeit der Trajektorie im chaotischen Bereich des Phasenraums an.

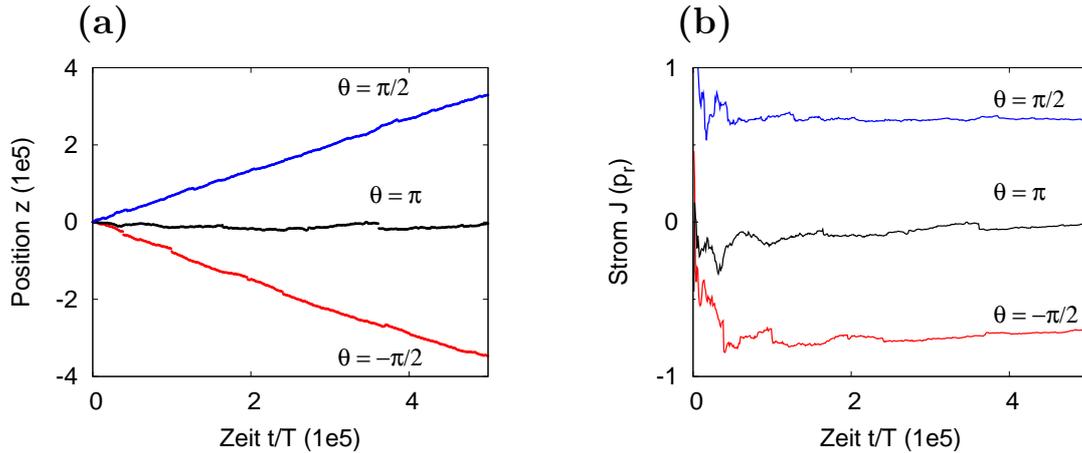


Abb. 4.6: Dargestellt ist der zeitliche Verlauf von (a) Ort und (b) Strom eines Teilchen, das im chaotischen Bereich einer amplitudenmodulierten Ratsche startet. Ein gerichteter Transport tritt dann auf, wenn die Raum-Zeit-Symmetrie gebrochen ist.

Teilchen in einer klassischen chaotischen Ratsche folgendermaßen: Ein gerichteter Transport von Atomen in einer klassischen Ratsche entsteht, wenn eine Desymmetrisierung des Phasenraums erreicht wird, wodurch der chaotische Bereich transportierend wird. Dies ist der Fall, wenn die Raum-Zeit-Symmetrie im Hamiltonoperator gebrochen ist.

4.2.3 Quantenmechanisches Modell

Im letzten Abschnitt wurde die Dynamik eines klassischen Teilchens in einer amplitudenmodulierten Ratsche diskutiert. Ein gerichteter Transport kommt durch die Desymmetrisierung der Hamiltonschen Funktion zustande. Diese fundamentale Eigenschaft spielt auch bei der Beschreibung eines Wellenpakets in einem quantenmechanischen Ratschensystem eine wesentliche Rolle. Es soll nun ein Ansatz zur Lösung der Schrödingergleichung gefunden und numerische Ergebnisse präsentiert werden.

In der Quantenmechanik wird der Transport J über die zeitliche Mittelung des Impulsoperators \hat{p} definiert [128].

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \langle \langle \hat{p}(mT) \rangle \rangle_T = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \langle \Psi(mT) | \hat{p} | \Psi(mT) \rangle_T \quad (4.9)$$

Wichtig für die Entstehung eines gerichteten Transports ist die zeitliche Mittelung, da etwaige Oszillationen des Impulsoperators einen kurzzeitigen Transport erzeugen können, der im zeitlichen Verlauf allerdings verschwindet [133, 134]. Eine eindeutige Aussage über die Transporteigenschaft von Atomen in einer quantenmechanischen Ratsche lässt sich über die Größe des Stroms für $t \rightarrow \infty$ machen.

4 Hamilton'sche Quantenratsche

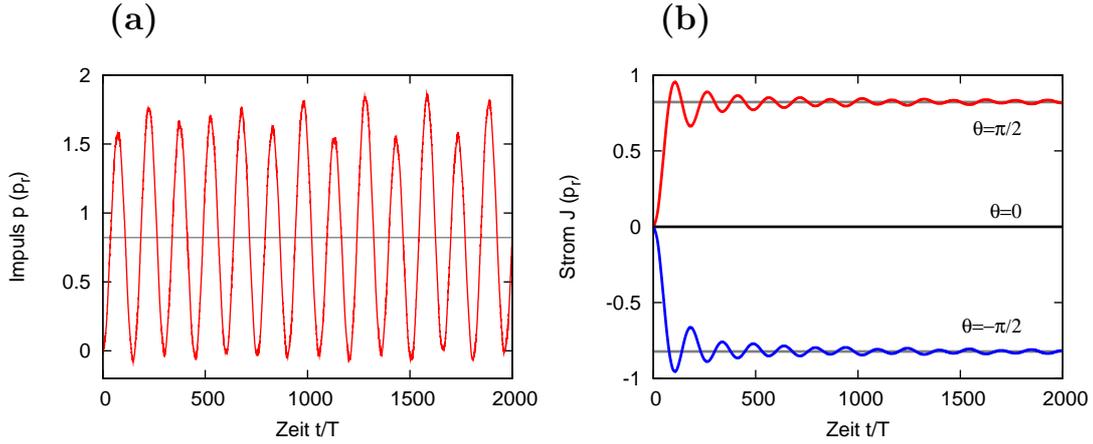


Abb. 4.7: Zeitlicher Verlauf des (a) momentanen und des (b) zeitlich gemittelten Impulses (=Strom) bei gebrochener Raum-Zeit-Symmetrie. Der Impuls der Atome oszilliert dabei um einen konstanten Wert (graue Linie), wobei sich die Geschwindigkeit allerdings umkehren kann. Ein besseres Bild über den Transport liefert der Strom, der sich im zeitlichen Verlauf einem konstanten Wert nähert. Ein gerichteter Transport findet nur dann statt, denn die Raum-Zeit-Symmetrie gebrochen ist.

Bei Vernachlässigung von Wechselwirkungseffekten zwischen den einzelnen Teilchen dient die lineare Schrödingergleichung als Grundlage zur Berechnung der zeitlichen Dynamik des Wellenpakets.

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \left[\frac{p^2}{2m} + V(z) \cdot A(t) \right] |\Psi(t)\rangle \quad (4.10)$$

Die zeitliche Entwicklung der Wellenfunktion $|\Psi(t + t_0)\rangle = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle$ erfolgt allgemein mit Hilfe des Translationsoperators $U(t, t_0)$. Neben der räumlichen Periode besitzt der Hamiltonoperator zusätzlich eine zeitliche Periode $T = 2\pi/\omega$, wobei ω die Kreisfrequenz der Amplitudenmodulation ist. Aufgrund der zeitlichen Periode findet hier das Floquet-Theorem Anwendung [135, 136], das analog zum Bloch-Theorem für räumlich periodische Systeme verstanden werden kann. Als Ansatz für den Floquet-Eigenzustand wird ein Produkt aus einer komplexen Phase sowie einer zeitlich periodischen Funktion $\phi(t + T) = \phi(t)$ gewählt. Die Größe E_α bezeichnet dabei die Quasi-Energie, die analog zum Quasi-Impuls in räumlich periodischen Systemen betrachtet werden kann.

$$|F_\alpha(t)\rangle = e^{-iE_\alpha t/T} |\phi(t)\rangle \quad (4.11)$$

Der Translationsoperator wird als Floquet-Matrix bezeichnet, wenn die zeitliche Entwicklung der Lösung in Einheiten von der Periode T ist. Die Berechnung der Quasi-Energien und Eigenzustände erfolgt durch Lösen der Eigenwertgleichung:

$$\begin{aligned} U(T, t_0) |F_\alpha\rangle &= e^{-iE_\alpha} |\phi(t_0)\rangle \\ &= e^{-iE_\alpha} |F_\alpha\rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

Ein mehrmaliges Anwenden der Floquet-Matrix auf den Eigenzustand bewirkt lediglich eine Phasenverschiebung des Floquet-Zustands

$$U(mT, (m-1)T) \cdot U((m-1)T, (m-2)T) \dots U(T, t_0) |F_\alpha\rangle = e^{-imE_\alpha} |F_\alpha\rangle \quad (4.13)$$

Die Floquet-Zustände bilden eine vollständige orthonormale Basis, in der die Wellenfunktion stroboskopisch dargestellt werden kann. Zusätzlich können die Floquet-Zustände wiederum in einer Impulsbasis definiert werden.

$$|\Psi(mT, t_0)\rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} e^{-imE_{\alpha}} |F_{\alpha}(t_0)\rangle \quad (4.14)$$

$$|F_{\alpha}(t_0)\rangle = \sum_n b_{\alpha,n} |n\rangle \quad (4.15)$$

Der Ansatz für die Wellenfunktion bildet die Grundlage für die Berechnung des Erwartungswertes des Impulsoperators. Unter der Annahme, dass der Anfangszustand eine ebene Welle ist $|0\rangle$, entwickelt sich der momentane Impuls wie folgt:

$$\langle p(mT) \rangle = \sum_{\alpha, \beta} b_{\alpha,0} b_{\beta,0}^* e^{-im(E_{\alpha} - E_{\beta})} \langle F_{\beta} | \hat{p} | F_{\alpha} \rangle \quad (4.16)$$

In der Gleichung befindet sich ein Interferenzterm, der eine zeitliche Oszillation des momentanen Impulses verursacht. Er entsteht, wenn verschiedene Floquet-Zustände miteinander koppeln. Die Frequenz der sich ausbildenden Schwebung hängt dabei von der Differenzenergie der jeweiligen Quasi-Energien ab $\Omega = (E_{\alpha} - E_{\beta})/\hbar$. Mittelt man den momentanen Impuls über sehr viele Perioden, so verringert sich der Einfluß der Nebendiagonalelemente aufgrund des Exponentialterms zunehmend. Es bleiben im Limes $t \rightarrow \infty$ nur noch die Hauptdiagonalelemente zurück, die eine Aussage über den langfristigen Transport von Atomen in einer Hamiltonschen Quantenrutsche ermöglicht. Die Größe des Stroms ergibt im asymptotischen Grenzfall:

$$J = \left\langle \sum_{\alpha} |b_{\alpha,0}|^2 \langle F_{\alpha} | \hat{p} | F_{\alpha} \rangle \right\rangle_T \quad (4.17)$$

Die numerische Routine zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung des Stroms bzw. des asymptotischen Grenzwertes befindet sich im Anhang C, wobei die verwendeten Parameter, wenn nicht anders angegeben, im weiteren Verlauf der Arbeit unverändert bleiben. Der Parametersatz befindet sich unter anderem im Anhang B und lautet hier: $\omega/(8\omega_r) = 1.009$, $A_1 = 1.209$, $A_2 = 0.314$, $V_1 = 2.88E_r$, $V_2 = 0.67E_r$, $\varphi = 0.474\pi$, $\theta = 0.401\pi$ und $t_0 = 0$. Abb. 4.7 (a) zeigt die zeitliche Entwicklung des momentanen Impulses im Fall gebrochener Raum-Zeit Symmetrie. Der Impuls oszilliert dabei um einen Mittelwert mit einer Schwebungsfrequenz, die hier aus drei verschiedenen Frequenzkomponenten zusammengesetzt ist. Obwohl die Bewegung der Atome in beide Richtungen stattfindet, wird hier die positive Richtung bevorzugt. Eine bessere Illustration der Transporteigenschaft in periodisch getriebenen Systemen liefert die zeitliche Mittelung des momentanen Impulses, womit sich der quantenmechanische

4 Hamilton'sche Quantenratsche

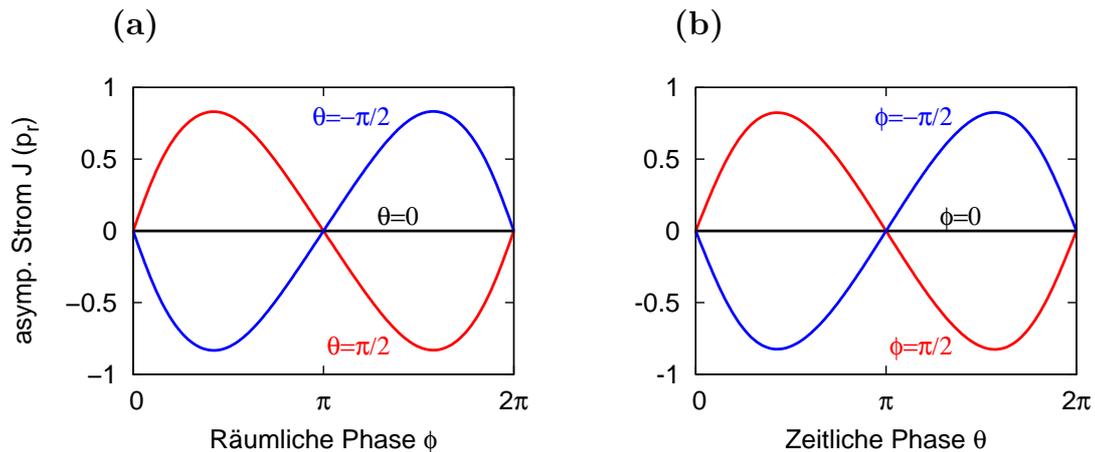


Abb. 4.8: Abgebildet ist der asymptotische Strom als Funktion der (a) räumlichen und (b) zeitlichen Phase für unterschiedliche Phasenkombinationen. Demzufolge müssen beide Symmetrien gleichzeitig gebrochen sein, um einen stationären Transport zu erreichen.

Strom ergibt (b). Wenn die räumliche und zeitliche Symmetrie im Hamiltonoperator gebrochen ist, dann steigt der Strom an und erreicht im weiteren zeitlichen Verlauf eine konstante Geschwindigkeit, die in Gleichung (4.17) definiert wurde und in der Abbildung durch eine graue Linie gekennzeichnet ist. Die Transportrichtung hängt dabei von der zeitlichen und räumlichen Phasenverschiebung ab. Wie im klassischen Fall, wird auch hier im quantenmechanischen Bereich eindrucksvoll bestätigt, dass kein Transport stattfindet, sobald das System zeitlich oder räumlich symmetrisch ist (siehe schwarze Linie).

Es soll nun der Zusammenhang einer gerichteten Bewegung von Teilchen in einer amplitudenmodulierten Ratsche und den Symmetrien im System für sehr lange Zeiten ($t \rightarrow \infty$) untersucht werden. Dazu wird der asymptotische Strom für unterschiedliche Kombinationen der Phasenwinkel (φ und θ) berechnet, wobei numerische Simulationen in Abb. 4.8 dargestellt sind. Auch hier zeigt sich, dass ein gerichteter Transport nur dann stattfindet, wenn beide Symmetrien gleichzeitig gebrochen sind, was der Fall ist, wenn die zeitliche und räumliche Phasenverschiebung nicht 0 oder $\pm\pi$ beträgt. Sobald eine der beiden Komponenten symmetrisch wird, ist der asymptotische Strom Null und es findet keine Nettobewegung der Teilchen statt.

4.2.4 Energiespektrum

Der Ratschentransport kann von sehr vielen äußeren Parametern abhängen. Wird zum die Amplitude des Ratschenpotentials zu langsam moduliert so erscheint das Potential zeitlich konstant und die zeitliche Symmetrie bleibt erhalten. Auf der anderen Seite kann die Modulationsfrequenz aber auch zu schnell sein, wodurch die Ato-

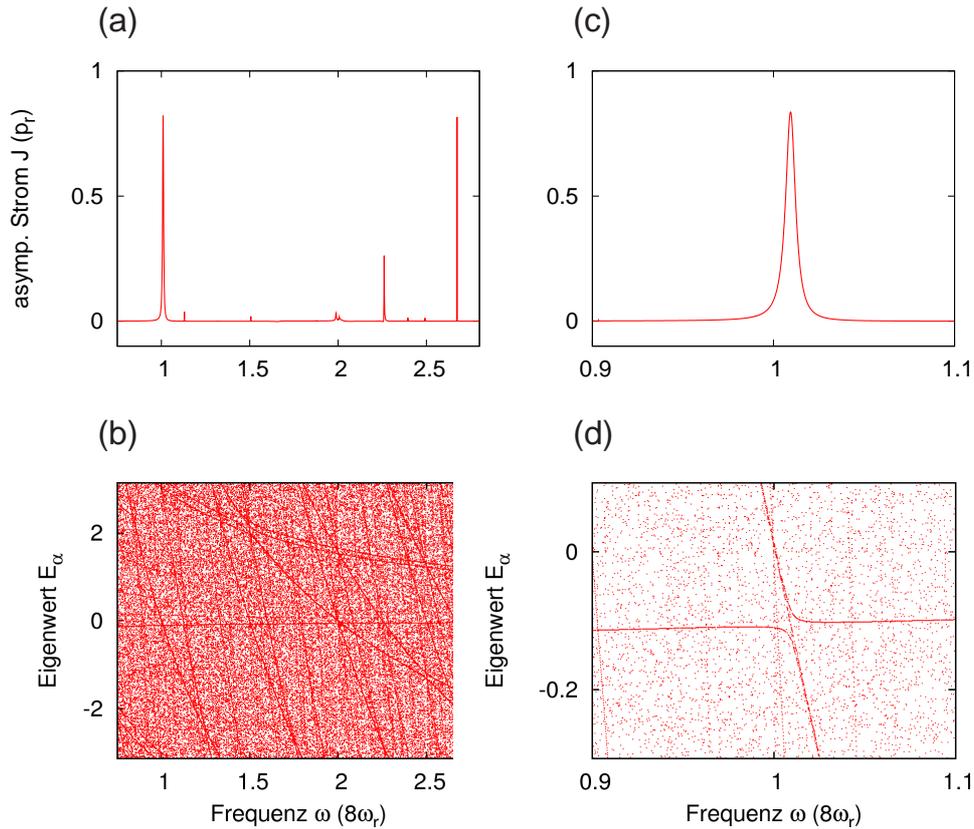


Abb. 4.9: Darstellung des asymptotischen Stroms J und der Quasi-Energie E_α als Funktion der Modulationsfrequenz ω . Rechts ist dabei ein vergrößerter Ausschnitt des Spektrums um eine Resonanz bei $\omega \approx 8\omega_r$ zu sehen. Ein maximaler Transport tritt in der Gegend von Kreuzungsbereichen auf, in denen mehrere Floquet-Eigenzustände miteinander wechselwirken.

me ein räumlich symmetrisches Potential wahrnehmen. In beiden Fällen bricht der Transport ein, so dass man sich auf ein bestimmtes Frequenzintervall beschränken sollte. In Abb. 4.9 (a) ist der asymptotische Strom als Funktion der Modulationsfrequenz ω dargestellt. Auf den ersten Blick stellt man fest, dass der Übergang zwischen den beiden Extremsituationen nicht harmonisch verläuft, sondern durch viele Resonanzfrequenzen geprägt ist, wobei sich eine sehr dominante Resonanz im Bereich von $\omega \approx 1$ befindet. In einem atom-optischen Bild kann die amplitudenmodulierte Ratsche als eine Sequenz von optischen Strahlteilern betrachtet werden, an denen die atomare Materiewelle gebeugt wird. Die daraus resultierenden Wellenpakete besitzen unterschiedliche Phasen und bilden so eine Art Atominterferometer [137]. Um konstruktive Interferenz zu erhalten, muß der Weglängenunterschied zwischen den atomaren Wellenpaketen 2π sein. Dies entspricht gerade der Talbot-Frequenz von $\omega = 8\omega_r$ [138, 139].

Eine mögliche Erklärung für die diskreten Resonanzfrequenzen liefert Abb. 4.9 (b),

welches das Quasi-Energiespektrum E_α als Funktion der Modulationsfrequenz zeigt. Jeder Punkt im Spektrum ergibt sich aus der Lösung der Eigenwertgleichung (4.12) für verschiedene Frequenzen. In diesem Fall wurden hierfür 91 Floquet-Zustände verwendet. Das Spektrum besteht aus mehreren sich kreuzenden Linien und einem homogenen Hintergrund. Bei genauerer Betrachtung stellt man fest, dass die Kreuzungspunkte im Bereich der Resonanzfrequenzen liegen. In (c) und (d) befindet sich ein vergrößerter Ausschnitt des asymptotischen Stroms um die Frequenz $\omega/8\omega_r = 1$ mit dem dazugehörigen Spektrum. Wie sich herausstellt, kreuzen sich die Trajektorien nicht, sondern bilden sogenannte vermiedene Kreuzungen, wie sie auch schon im Bloch-Spektrum für ein statisches Gitterpotential (siehe Abschnitt 3.1.4) aufgetreten sind. Offensichtlich spielen die drei Floquet-Zustände, welche sich im Bereich der Resonanzfrequenz kreuzen eine entscheidende Rolle beim Zustandekommen eines gerichteten Transports.

4.2.5 Transportmechanismus

In diesem Abschnitt soll die Frage nach dem Transportmechanismus im quantenmechanischen Fall geklärt werden. Wie wir bereits im klassischen Modell gesehen haben, verursacht eine Symmetriebrechung eine Desymmetrisierung des Phasenraums, wodurch der chaotische Bereich transportierend wird. In der Quantenmechanik ist das Wellenpaket aufgrund der Heisenbergschen Unschärferelation nicht mehr im Phasenraum lokalisiert, so dass ein anderer Mechanismus für den Ratschentransport verantwortlich ist. Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass die Quasi-Energien bestimmter Floquet-Zustände in der Nähe einer Resonanz eine vermiedene Kreuzung bilden. Mit Hilfe der Husimi-Darstellung ist eine Visualisierung der Eigenzustände im Phasenraum möglich [140, 141]. Dazu wird ein Floquet-Eigenzustand auf ein Gaußsches Wellenpaket projiziert, das durch das Koordinatenpaar (x,p) lokalisiert ist,

$$\Phi_{\langle x \rangle, \langle p \rangle}(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp \left[-\frac{(\langle x \rangle - x)^2}{4\sigma^2} + i \langle p \rangle \frac{x}{\hbar} \right] \quad (4.18)$$

$$\rho(\langle x \rangle, \langle p \rangle) = \frac{1}{2\pi} |\langle F_\alpha | \Phi_{\langle x \rangle, \langle p \rangle} \rangle|^2 \quad (4.19)$$

wobei $\sigma^2 = \hbar/2$ die Breite des Wellenpakets ist. Die Husimi-Funktion versteht sich als Wahrscheinlichkeitsverteilung des Floquet-Zustands im klassischen Phasenraum und gibt so Informationen über dessen Dynamik wieder.

Der genaue Transportmechanismus einer Hamiltonschen Quantenrutsche soll nun an einem Beispiel erläutert werden. Die zeitliche Symmetrie lässt sich neben der Phasenverschiebung θ auch durch Verändern der Modulationsamplituden A_1 und A_2 einstellen. Für die weitere Berechnung werden zunächst neue Größen $(A_0, \Delta A)$ ein-

geführt, um durch den Parameter ΔA eine Verknüpfung der beiden zeitlichen Amplituden A_1 und A_2 zu schaffen:

$$A_1 = A_0 \cdot (1 - \Delta A) \quad (4.20)$$

$$A_2 = A_0 \cdot \Delta A \quad (4.21)$$

Der asymptotische Strom ist in Abb. 4.10 (a) als Funktion von ΔA dargestellt. Für $\Delta A = 0$ ist die zeitliche Modulation symmetrisch, wobei die Amplitude des Ratschenpotentials mit der Frequenz ω moduliert wird, wohingegen bei $\Delta A = 1$ das Potential mit der doppelten Frequenz 2ω moduliert wird. In beiden Fällen ist der asymptotische Strom Null, da die zeitliche Symmetrie erhalten ist. Zwischen den beiden Extremwerten setzt sich die Amplitudenmodulation aus zwei Funktionen unterschiedlicher Frequenz zusammen, wobei ein Maximum des Stroms für diesen Parametersatz bei einem Wert $\Delta A = 0.2$ auftritt. Das Verhältnis zwischen A_1 und A_2 beträgt in diesem Fall 4:1. In Abb. 4.10 (b) ist ein Ausschnitt des Energiespektrums zu sehen, wobei sich drei Floquet-Zustände in der Nähe der Resonanz treffen.

Es wird nun die Husimi-Verteilung der drei Floquet-Zustände (F_1 , F_2 und F_3) an drei verschiedenen Positionen im Spektrum (A,B und C) für den Fall gebrochener Raum-Zeit Symmetrie untersucht (siehe Abb. 4.10 (c)). Im Punkt A ist die zeitliche Modulation symmetrisch, wodurch die Wahrscheinlichkeitsverteilung der drei Floquet-Zustände spiegelsymmetrisch um den Ruheimpuls $p = 0$ sind. Das bedeutet, dass der entsprechende Floquet-Zustand symmetrisch in beide Richtungen transportiert. Nähert man sich einer Resonanz, so beginnt eine teilweise Desymmetrisierung der Husimi-Verteilung, die im Punkt B ein Maximum erreicht. Die Zustände F_1 und F_3 sind dabei positiv, wohingegen der Zustand F_2 negativ transportierend ist. Da sämtliche Eigenzustände zur Gesamtdynamik des Wellenpakets beitragen, entscheidet der jeweilige Einfluß des Floquet-Zustands über die Richtung und Stärke des Ratschentransports. In diesem Beispiel überwiegen die positiv transportierenden Eigenzustände, so dass eine Nettobewegung der Teilchen in positive Richtung erfolgt. Entfernt man sich wieder von der Resonanz wird die Husimi-Verteilung wieder symmetrisch, wodurch der asymptotische Strom erneut auf Null abfällt. Eine Änderung des Phasenwinkels $\theta = \pi/2 \rightarrow \pi$ hat zwar keinen Einfluß auf die Form des Energiespektrums, der asymptotische Strom ist allerdings wegen der zeitlichen Invarianz Null. Eine genauere Analyse zeigt, dass die Husimi-Verteilungen der Eigenzustände in diesem Fall in Abb. 4.10 (d) im gesamten Definitionsbereich von ΔA symmetrisch bleiben. Man kann daraus schließen, dass ein gerichteter Transport von Atomen in einer Hamiltonschen Quantenratsche erreicht wird, wenn eine Desymmetrisierung der Floquet-Matrix stattfindet. Dies ist der Fall, wenn die Raum-Zeit Symmetrie im Hamiltonoperator gebrochen ist.

Eine anschauliche Darstellung des Transportprinzips in einer Hamiltonschen Quantenratsche ist in Abb. 4.11 gezeigt. Man kann die transportierenden Eigenzustände anschaulich als eine Reihe von Förderbändern darstellen, wie man sie häufig an Flughäfen vorfindet. Die Förderbänder laufen dabei in verschiedene Richtungen mit un-

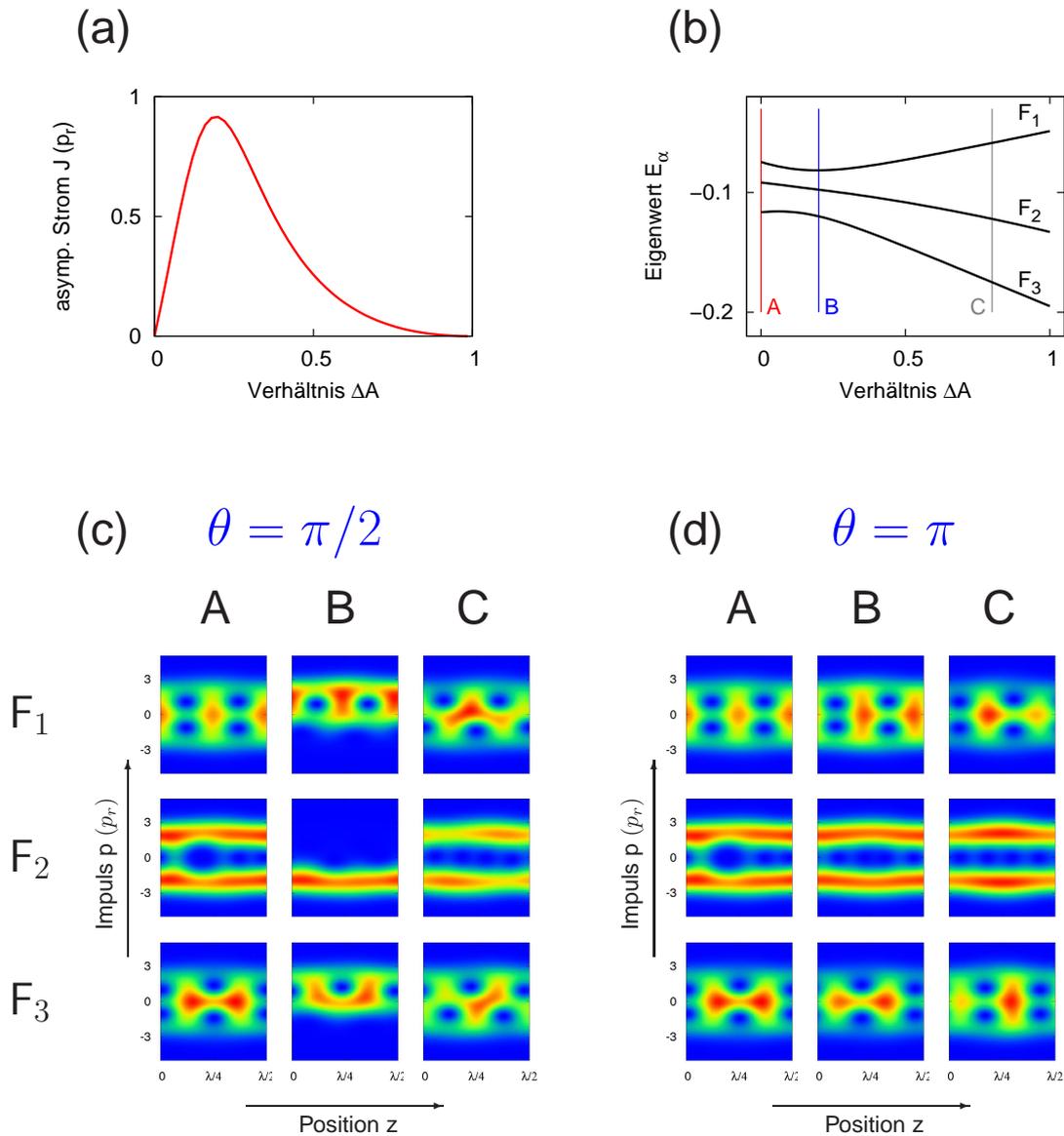


Abb. 4.10: (a) Darstellung des asymptotischen Stroms und (b) Ausschnitt des Energiespektrums als Funktion von ΔA , der das Verhältnis zwischen den Amplituden A_1 und A_2 regelt. (c-d) Die Husimiverteilung von drei Floquet-Zuständen (F_1 , F_2 und F_3) wird an den Positionen (A,B und C) im Energiespektrum untersucht. (c) Bei gebrochener Raum-Zeit-Symmetrie (hier $\theta = \pi/2$) desymmetrisieren die Floquet-Zustände am Punkt B, während im symmetrischen Fall (d), die Eigenzustände symmetrisch um den Ruheimpuls $p = 0$ bleiben.

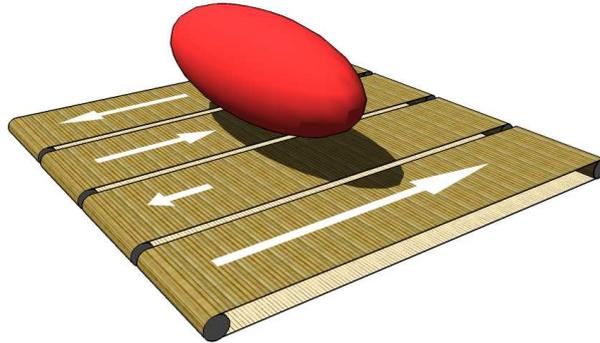


Abb. 4.11: Bildhafte Darstellung des Transportprozesses in einer Hamiltonschen Quantenrutsche. Die Förderbänder transportieren in verschiedene Richtungen mit unterschiedlicher Stärke. Eine Nettobewegung der Atomwolke von rechts nach links findet in diesem Beispiel statt.

terschiedlichen Geschwindigkeiten. So lange die Förderbänder symmetrisch sind, erfolgt kein Nettotransport der Atomwolke. Dieser setzt erst ein, wenn man neben der räumlichen auch die zeitliche Symmetrie bricht.

4.2.6 Weitere Abhängigkeiten des Ratschentransports

Eine weitere Besonderheit der Hamiltonschen Quantenrutsche ist die Abhängigkeit des asymptotischen Stroms vom Startzeitpunkt t_0 der zeitlichen Amplitudenmodulation [128]. Der Grund hierfür ist, dass die Floquet-Eigenzustände von t_0 abhängen, wodurch der Überlapp mit dem Anfangszustand des Wellenpakets beeinflusst wird. Im weiteren zeitlich Verlauf ändern sich die Eigenzustände nicht mehr. Wir erwarten daher, dass der asymptotische Strom vom Anfangszeitpunkt t_0 abhängt. Im Gegensatz dazu verschwindet die Information über den Startzeitpunkt im klassischen Phasenraum nach kurzer Zeit. Das liegt daran, dass eine Trajektorie, die im chaotischen Bereich startet, den Phasenraum komplett erwandert, wobei sich nach kurzer Zeit eine asymptotische Geschwindigkeit einstellt. Diese Geschwindigkeit hängt aufgrund der Ergodizität im System [142, 143] nicht von t_0 ab. In Abb. 4.12 (a) ist jeweils der asymptotische Strom einer Hamiltonschen Quantenrutsche (rot) und einer klassischen chaotischen Rutsche als Funktion der Startzeit t_0 innerhalb einer Periode T dargestellt.

Der Vollständigkeit halber wird in Abb. 4.12 (b) der zeitlich gemittelte Impuls der Atome in Abhängigkeit von der Potentialtiefe V_1 angegeben, wobei alle anderen Parameter (insbesondere V_2) konstant bleiben. Innerhalb der Abbildung ist ein Ausschnitt des Energiespektrums zu sehen, bei dem 3 Eigenzustände am Transport beteiligt sind.

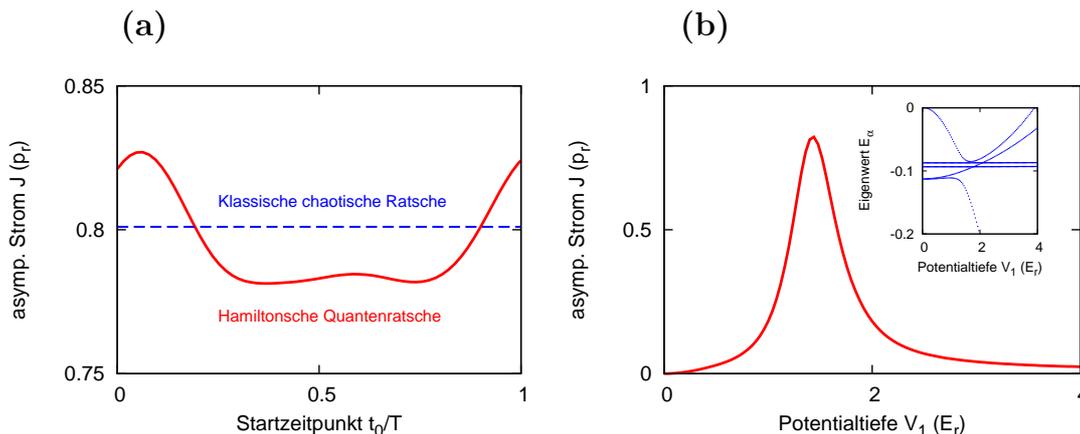


Abb. 4.12: (a) Ein wichtiges Merkmal einer Hamiltonschen Quantenratsche ist die Abhängigkeit des Stroms von der Startzeit t_0 . Im Gegensatz dazu ist in einem klassischen System aus Gründen der Ergodizität keine Abhängigkeit von t_0 zu beobachten. (b) Asymptotischer Strom als Funktion der Potentialtiefe V_1 . Über das Verhältnis der Potentialtiefen der Gitterharmonischen kann der Grad der räumlichen Asymmetrie maximiert werden, was zu einem hohen Quantentransport führt.

Wie auch schon in den Fällen davor, desymmetrisieren die Floquet-Zustände und tragen so zu einem gerichteten Transport bei. Das Potential ist bei $V_1 = 0$ räumlich symmetrisch und tendiert für sehr große Potentialtiefen von V_1 wieder zu einem symmetrischen System. Maximaler Transport findet in diesem Fall bei $V_1 = 1.44E_r$ statt, wobei $V_2 = 0.34E_r$ ist. Das Verhältnis zwischen den Potentialtiefen der beiden Gitterharmonischen beträgt 4.3:1, ein ähnlicher Wert wie er für die gezeigten Daten in Abb. 4.10 verwendet wurde.

4.2.7 Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung im Kondensat auf den Quantentransport

In den numerischen Simulationen galt bisher die Annahme, dass die Atome in der amplitudenmodulierten Ratsche zum Anfangszeitpunkt einen Impuls $p = 0$ haben. Im Experiment wird die Dipolfalle, in der sich das Bose-Einstein Kondensat befindet, ausgeschaltet und die Atome expandieren frei im Gravitationsfeld der Erde. Die Dichte des Quantengases sinkt daraufhin, wonach Wechselwirkungseffekte sehr klein werden. Die im Kondensat gespeicherte Wechselwirkungsenergie wandelt sich bei der Expansion in kinetische Energie um. Das führt dazu, dass die Atome um den Impuls $p = 0$ geschwindigkeitsverteilt sind. In diesem Abschnitt soll geklärt werden, wie sich die Geschwindigkeitsverteilung der Atomwolke auf den Ratschentransport auswirkt.

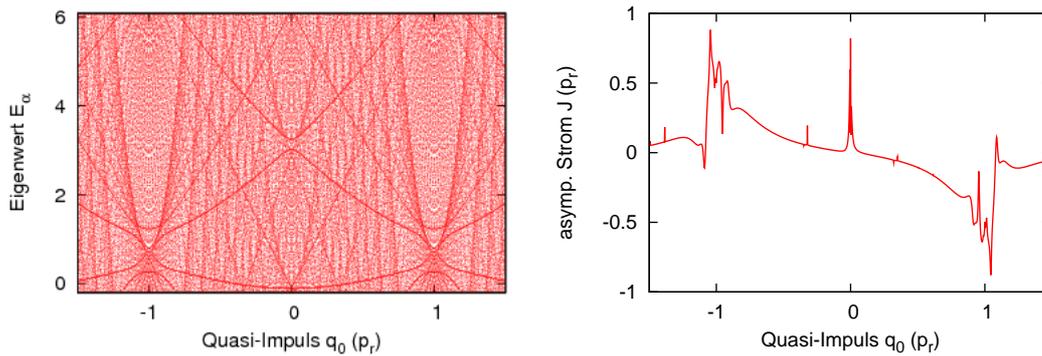


Abb. 4.13: Darstellung des Energiespektrums und des asymptotischen Stroms des periodisch getriebenen Systems als Funktion des Quasi-Impulses q_0 . Ein Transport entsteht in der Nähe von $q_0 = 0$ und an den Bandkanten bei $q_0 = \pm \hbar k$.

Dazu wird in einem ersten Schritt der asymptotische Strom in Abhängigkeit von der Anfangsgeschwindigkeit eines Atoms relativ zum Gitterpotential berechnet. Mathematisch lässt sich dies durch den Quasi-Impuls q_0 ausdrücken, der bereits im Abschnitt 3.1.4 eingeführt wurde. Der Quasi-Impuls ist periodisch und beschränkt sich im optischen Gitter auf eine Brioullin-Zone $q_0 = [-\hbar k, \hbar k]$. Durch Variation des Parameters kann das Energiespektrum und der asymptotische Strom berechnet werden, die jeweils in Abb. 4.13 dargestellt sind.

Das Spektrum besteht aus einem homogen verteilten Hintergrund und Signaturen von Trajektorien, die bei $q_0 = 0$ und an den Rändern der Brioullin-Zone Kreuzungsbereiche bilden. Auffallend ist auch, dass das Spektrum eine gewisse Ähnlichkeit zum Bloch-Spektrum eines statischen Gitterpotentials (siehe hierzu Abb. 3.4) hat. Man erkennt deutlich die ersten drei Bloch-Bänder. Höhere Bänder zeigen sich durch gerade Trajektorien, die auf den Bereich zwischen $0 \dots 2\pi$ zusammengefasst sind. Es findet hierbei nicht nur bei $q_0 = 0$ eine Nettobewegung der Atome statt, sondern auch an Rändern der Brioullin-Zone bei $q_0 = \pm p_r$. Hier mischen sehr viele transportierende Floquet-Zustände, was zu einer breiten Resonanz führt, in der sich feine Strukturen bilden.

Um eine Vorstellung über den Ratschentransport eines geschwindigkeitsverteilten atomaren Ensembles zu bekommen, wird die Bewegung jedes einzelnen Atoms mit Hilfe der Schrödingergleichung berechnet und anschließend statistisch gemittelt. In Abb. 4.14 sind numerische Ergebnisse für den Fall einer Atomwolke dargestellt, bestehend aus Atomen mit 80 verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten, die um den Quasi-Impuls $q_0 = 0$ normalverteilt sind. Dabei ist in (a) der momentane Impuls und in (b) der zeitlich gemittelte Impuls (=Strom) für drei verschiedene Breiten der Geschwindigkeitsverteilung dargestellt, wobei die Breite der Verteilung in Einheiten des Rückstoßimpulses $p_r = \hbar k$ in der Legende angegeben ist. Vergleicht man den zeit-

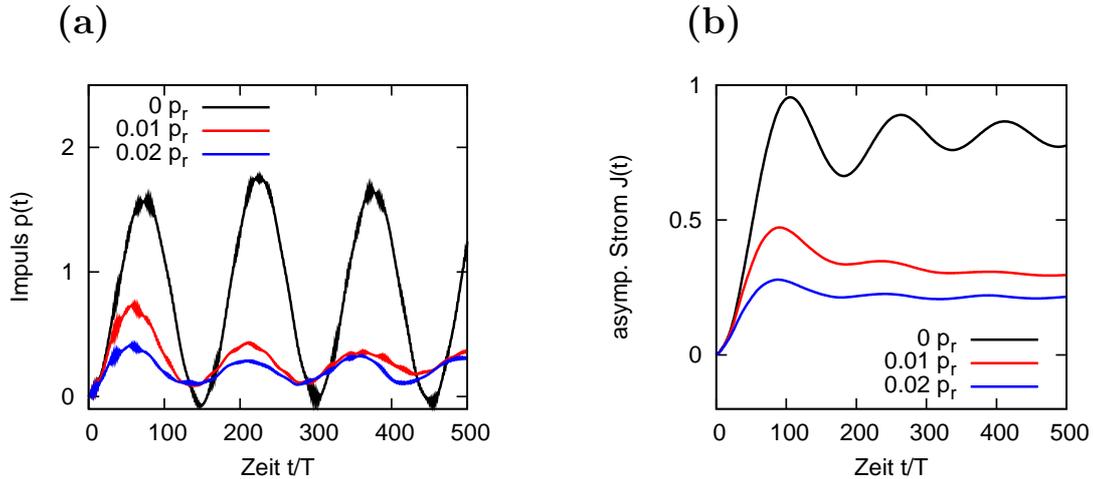


Abb. 4.14: Zeitlicher Verlauf des (a) momentanen und (b) zeitlich gemittelten Impulses für unterschiedliche Geschwindigkeitsverteilungen einer Atomwolke. Es wurden drei Fälle numerisch simuliert, in der die Impulsbreite $\Delta q = 0$ (schwarz), $0.01\hbar k$ (rot) und $0.02\hbar k$ beträgt. Je größer die Geschwindigkeitsverteilung der Atome ist, desto kleiner wird der gerichtete Transport und desto stärker werden Oszillationen herausgemittelt.

lichen Verlauf der Kurven mit dem Fall einer δ -Verteilung (schwarze Kurve), so zeigt sich, dass die Amplitude des atomaren Transports in der Ratsche mit zunehmender Breite der Geschwindigkeitsverteilung deutlich abnimmt. Außerdem waschen sich die Oszillationen im Impuls- bzw. Stromverlauf zunehmend aus, wodurch der asymptotische Bereich, d.h. ein stationärer Teilchenstrom, bereits für kleinere Zeiten erreicht wird.

Interessant ist auch zu untersuchen, wie sich die Bewegung eines atomaren Ensembles auf einer langen Zeitskala ($t \rightarrow \infty$) verhält. Dazu wird der asymptotische Strom als Funktion der Modulationsfrequenz ω für verschiedene Impulsbreiten berechnet. Jeder Datenpunkt in Abb. 4.15 (a) ist eine Mittelung aus 100 verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten von Atomen, deren statistische Verteilung einer Gaußfunktion um den Impuls $q_0 = 0$ folgt. Wie sich zeigt, findet ein gerichteter Transport auch für sehr lange Zeiten statt, die Amplitude hängt allerdings sehr stark von der Breite der Geschwindigkeitsverteilung in der Atomwolke ab. Interessant ist auch, dass sich die Linienbreite der Resonanzfrequenz mit zunehmender Impulsbreite, vergrößert. Eine quantitative Abhängigkeit der Transportamplitude und der Resonanzbreite ist in Abb. 4.15 (b) zu sehen. Hierfür wurde eine Gaußfunktion an die Datenpunkte aus Abb. 4.15 (a) angepasst und dessen Parameter mit den entsprechenden Fehlern in ein Diagramm eingetragen. Der Kurvenverlauf ist jeweils auf den Fall einer δ -Verteilung normiert, wobei die Transportamplitude $J(\Delta q)$ gut durch eine Funktion, bestehend aus zwei Exponentialtermen, wiedergegeben werden kann, wohingegen die Linienbreite der Resonanzfrequenz $\Gamma(\Delta q)$ linear von der Impulsbreite abhängt. Der Ver-

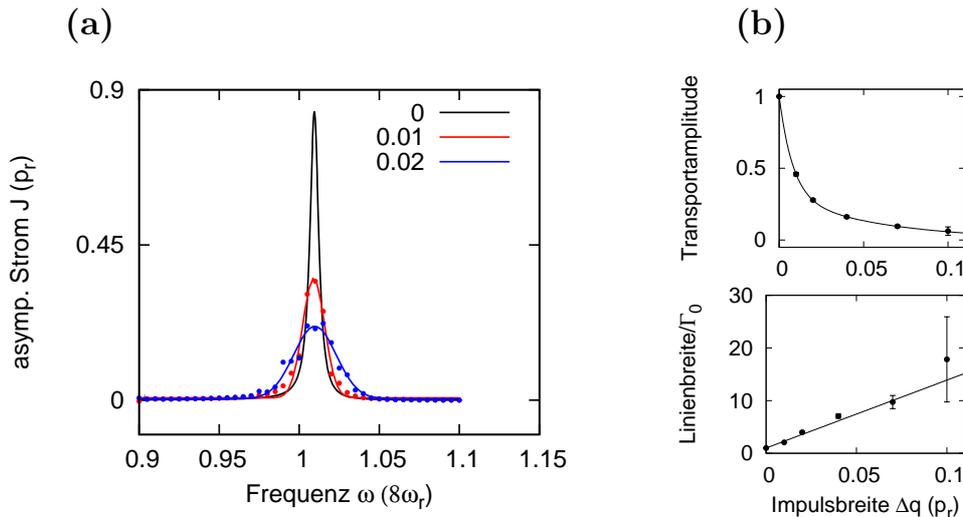


Abb. 4.15: (a) Asymptotischer Strom als Funktion der Modulationsfrequenz ω für verschiedene Geschwindigkeitsverteilungen einer Atomwolke. (b) Die Impulsbreite beeinflusst stark die Amplitude des Ratschentransports und verbreitert eventuelle Resonanzfrequenzen.

lauf der Transportamplitude sowie der Linienbreite als Funktion der Impulsbreite kann bei den verwendeten Parametern gut mit folgenden empirischen Funktionen beschrieben werden:

$$\frac{J(\Delta q)}{J_0} = 0.31 \cdot \exp(-16.7\Delta q/p_r) + 0.69 \cdot \exp(-124.3\Delta q/p_r) \quad (4.22)$$

$$\frac{\Gamma(\Delta q)}{\Gamma_0} = 1 + 129\Delta q/p_r \quad (4.23)$$

Während eines Experiments können außerdem Schwankungen der einzelnen Parameter auftreten, beispielsweise als Folge von Leistungsschwanken im Laserlicht. Desse Einfluß auf den Ratschentransport wurde bereits im Rahmen einer Diplomarbeit von T. Hecking untersucht und kann detailliert in Ref. [144] nachgelesen werden.

4.3 Experimenteller Aufbau und Vorexperimente

Die experimentelle Realisierung einer Hamiltonschen Quantenratsche erfordert einige Modifikationen am experimentellen Aufbau zur Ansteuerung der Gitterlaserstrahlen. Der optische Aufbau hierzu bleibt dabei unverändert wie in Abschnitt 3.2 beschrieben. Die zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren verwendete Treiberelektronik muss jedoch modifiziert werden. Der elektronische Aufbau zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren ist in der Abb. 4.17 (a) zu sehen, wobei

4 Hamilton'sche Quantenratsche

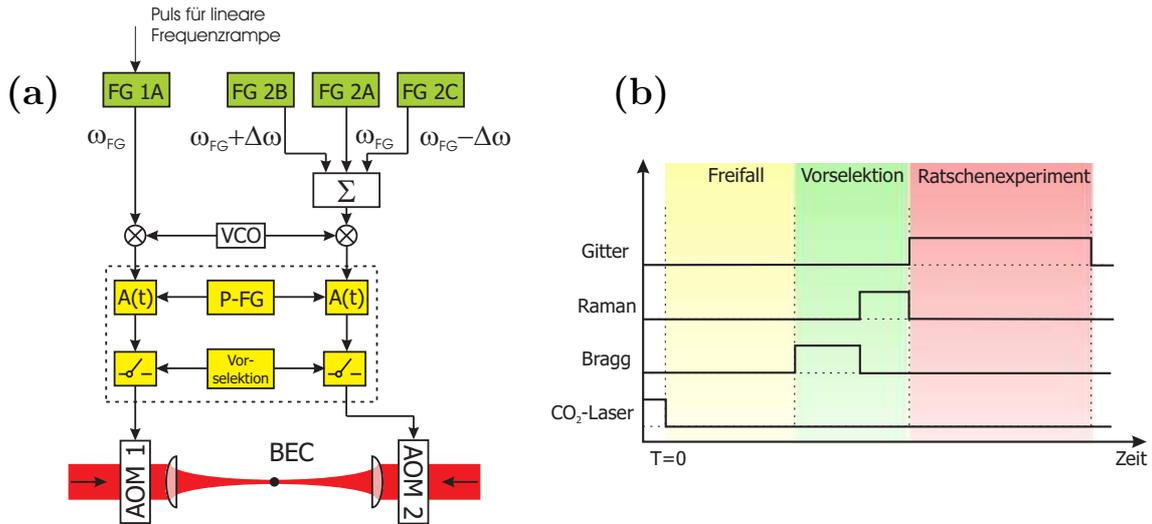


Abb. 4.16: (a) Schematische Darstellung des Aufbaus zur Erzeugung der Gitterlaserstrahlen für eine Quantenratsche. Abkürzungen: programmierbarer Funktionsgenerator (P-FG), Mischer zur Intensitätsregulierung der RF-Leistung ($A(t)$). (b) Zeitliche Abfolge eines experimentellen Ablaufs. Die einzelnen Phasen (Freifall, Vor-selektion, Ratschenexperiment) werden im Text erläutert.

sich die Modifikationen innerhalb des eingerahmten Bereichs befinden. Die Änderungen am Aufbau erlauben es, beliebig geformte optische Pulse zu generieren und außerdem wahlweise über einen elektronischen Schalter ein atomares Ensemble mit einer reduzierten Geschwindigkeitsverteilung zu präparieren. Abb. 4.16 (b) zeigt den zeitlichen Ablauf eines Experimentierzyklus, der aus bis zu 3 verschiedenen Phasen bestehen kann.

Freifall-Phase:

Nach der Realisierung des Bose-Einstein Kondensats in einer optischen Dipolfalle, wird das Licht des CO₂-Lasers ausgeschaltet, so dass die Atome aufgrund der Gravitation beschleunigt fallen. Dabei nimmt die Dichte des Quantengases ab, wodurch Wechselwirkungseffekte im System auf ein Minimum reduziert werden. Während des freien Falls wandelt sich die im Kondensat gespeicherte innere Energie in Bewegungsenergie um, wodurch die Atome im Quantengas um den Impuls $p = 0$ geschwindigkeitsverteilt sind [145, 146].

Vorselektions-Phase:

In einigen Experimenten wird der Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung im Bose-Einstein Kondensat auf den Quantentransport untersucht. Hierzu wird durch eine Kombination aus Bragg- und Raman-Puls eine schmale Geschwindigkeitsklasse aus dem BEC herausgenommen [147, 148]. Die Frequenzbreite der selektierten Atomverteilung ist invers proportional zur Pulslänge: $\Delta\nu \propto 1/t$.

Ratschen-Phase:

In dieser Phase wird ein räumlich asymmetrisches Gitterpotential eingestrahlt, dessen Amplitude zeitlich periodisch moduliert wird. Hier finden die Experimente zur Hamiltonschen Quantenrutsche statt.

Im Folgenden sollen Vorexperimente zur Charakterisierung der einzelnen experimentellen Teilschritte beschrieben werden, wobei auch einige Einzelheiten des zur Steuerung der Pulse verwendeten Aufbaus (siehe Abb. 4.17) genauer erläutert werden.

Modulation der Gitterlaserstrahlen

Im Experiment wird die Amplitude des Ratschenpotentials zeitlich periodisch moduliert. Die Modulationsfunktion $A(t)$ besteht dabei aus zwei sinusförmigen Anteilen unterschiedlicher zeitlicher Periodizität, wobei A_1 und A_2 die Modulationsamplituden der Harmonischen sind, θ die relative Phase und ω die treibende Frequenz ist:

$$A(t) = A_1 \sin^2 [\omega(t - t_0)/2] + A_2 \sin^2 [\omega(t - t_0) + \theta/2] \quad (4.24)$$

Es wird nun eine Periode dieser Funktion in einen programmierbaren Funktionsgenerator geschrieben (P-FG), dessen Ausgang eine Spannung zwischen 0 und 1 V liefert. Der Funktionsgenerator arbeitet im sogenannten "burst"-Modus, d.h. durch Anlegen eines Trigger-Pulses kann die gespeicherte Funktion beliebig oft wiederholt ausgegeben werden. Der Ausgang des programmierbaren Funktionsgenerators wird mit dem Eingang eines Radiofrequenzmischers verbunden, der in dieser Konfiguration die Radiofrequenzleistung in den beiden RF-Zweigen in Abhängigkeit von der zeitlich veränderlichen Spannung des Funktionsgenerators ausgibt. Die zeitlich modulierte Radiofrequenzleistung steuert schließlich einen akusto-optischen Modulator, der die Intensität des Laserstrahls in der ersten Beugungsordnung ebenfalls periodisch ändert und so eine Sequenz von optischen Pulsen erzeugt. Abb. 4.17 zeigt den mit einer Fotodiode aufgenommenen zeitlichen Verlauf der Intensität eines Laserstrahls in der ersten Beugungsordnung eines akusto-optischen Modulators für zwei Perioden der Modulationsfunktion $A(t)$ (rote Linie). Zum Vergleich ist der im Funktionsgenerator programmierte Puls (blau-gepunktet) zu sehen, wobei es eine gute Übereinstimmung zwischen dem gewünschten und dem im Experiment beobachteten Puls gibt.

Geschwindigkeitsselektion der Atome

Um eine für einen effizienten Transport in der Quantenrutsche hinreichend kleine atomare Geschwindigkeitsbreite zu erreichen, kann vor den Ratschen-Lichtpulsen eine Selektion einer schmalen Geschwindigkeitsklasse erfolgen. Dies kann im Experiment mit einem Bragg- und einem Raman-Puls variabler Länge erfolgen. Die Breite der

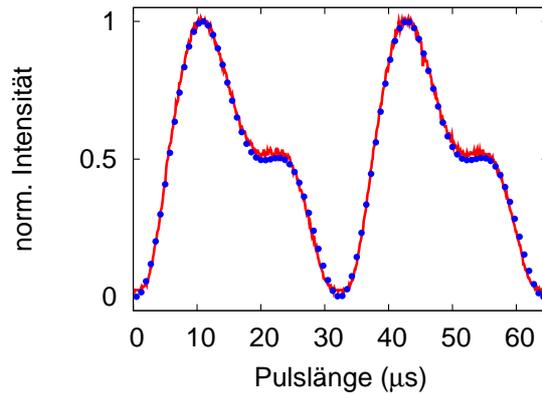


Abb. 4.17: Aufnahme eines zeitlich modulierten optischen Pulses mittels einer Photodiode, dessen maximale Amplitude auf eins normiert ist. Die gepunktete Linie zeigt zum Vergleich den theoretisch erwarteten Verlauf.

selektierten Geschwindigkeitsklasse lässt sich mit der Heisenbergschen Unschärfere-lation abschätzen, die einen Zusammenhang zwischen der Energie- und der Zeitun-schärfe angibt ($\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$). Mit Hilfe von $E = p^2/2m$ lässt sich die kinetische Ener-gie in einen Impuls umrechnen, so dass wir nun einen Zusammenhang zwischen der Impuls- und der Zeitunschärfe bekommen.

$$\Delta p = \sqrt{2m\hbar/\Delta t} \propto 1/\sqrt{\Delta t} \quad (4.25)$$

Das bedeutet, je länger ein Lichtstrahl mit einer Atomwolke wechselwirkt, desto klei-ner ist der Bereich im geschwindigkeitsverteilten Kondensat, in dem die Atome reso-nant mit dem Lichtstrahl sind. Diesen Umstand kann man ausnützen, um aus einer breiten Geschwindigkeitsverteilung eine schmale herauszufiltern. Die neue Atom-wolke besitzt nach einer Wechselwirkungszeit Δt eine Impulsbreite, die in Einheiten vom Rückstoßimpuls $p_r = \hbar k$ angegeben wird.

$$\frac{\Delta p}{p_r} = \frac{1}{\sqrt{\omega_r \cdot \Delta t}} \quad (4.26)$$

wobei $\omega_r = E_r/\hbar$ die Rückstoßfrequenz ist. Bei einer typischen Einstrahldauer $\Delta t = 350\mu s$ erwartet man demnach eine Impulsunschärfe von $\Delta p = 0.35p_r$.

In einigen Experimenten wird für die Geschwindigkeitsselektion ein langer Raman-Puls eingestrahlt, der die betreffende Atomklasse in einen anderen Zeeman-Zustand bringt [148]. Das hat den Vorteil, dass bei einer anschließenden Stern-Gerlach Ana-lyse, d.h. durch Anlegen eines magnetischen Gradientenfeldes während des freien Falls, die unterschiedlichen Spinzustände eindeutig voneinander getrennt werden können. Allerdings ist der Raman-Transfer anfällig gegen Magnetfeldfluktuationen und kann dazu führen, dass eine unerwünschte Geschwindigkeitsklasse aus der Ver-teilung herausgeschnitten wird. Aus diesem Grund wird in unserem Aufbau zuerst

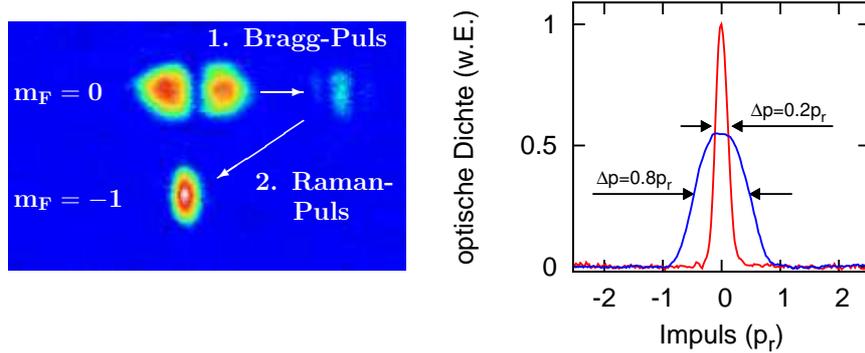


Abb. 4.18: Links: In Falschfarben kodierte Aufnahme von Atomen nach der Wechselwirkung mit einem Bragg- und einem Raman-Puls. Atome in unterschiedlichen Spinzuständen befinden sich nach einer Stern-Gerlach Analyse räumlich getrennt voneinander. Rechts: Das Dichteprofil zeigt die Impulsverteilung im ursprünglichen Kondensat (blau) im Vergleich zu den geschwindigkeitsselektierten Atomen (rot). Die Impulsbreite lässt sich mit diesem Verfahren um einen Faktor vier reduzieren.

ein langer magnetfeldunabhängiger Bragg-Puls eingestrahlt, der die selektierten Atome von $|m_F = 0, p = 0\rangle$ nach $|m_F = 0, p = 2\hbar k\rangle$ bringt. Anschließend folgt ein kurzer Raman-Puls von $|m_F = 0, p = 2\hbar k\rangle$ nach $|m_F = -1, p = 0\rangle$.

Im Experiment wird zunächst das Bose-Einstein Kondensat im Zeeman-Zustand $m_F = 0$ in der optischen Dipolfalle präpariert. Nach Ausschalten des CO_2 -Lasers expandiert die Atomwolke für die Dauer von 2.5 ms frei im Gravitationsfeld der Erde, wobei sich die innere Energie komplett in Bewegungsenergie umwandelt. Anschließend wird ein Bragg-Puls von $350 \mu\text{s}$ gefolgt von einem Raman-Puls von $150 \mu\text{s}$ eingestrahlt. Eine detaillierte Beschreibung der zeitlichen Steuerung der einzelnen Pulse im Experiment findet sich im Anhang A. Während einer weiteren Fallzeit von 15 ms wird ein magnetisches Gradientenfeld eingeschaltet, wodurch sich die einzelnen Zustände entsprechend ihres magnetischen Moments voneinander trennen. In Abb. 4.18 (a) ist eine in Falschfarben kodierte Absorptionsoaufnahme zu sehen, in der drei Atomwolken abgebildet sind. Oben links befindet sich das ursprüngliche Bose-Einstein Kondensat im Zustand $m_F = 0$. Die Aufnahme zeigt, dass in der Mitte der Verteilung, Atome fehlen. Der Bragg-Puls hat den atomaren Impuls dieser Atome um $2 p_r$ verändert, die sich nun oben rechts in der Aufnahme befinden. Es folgt ein kurzer Raman-Puls, der die selektierte Atomklasse in den Zeeman-Zustand $m_F = -1$ bringt und dabei den Impulszustand um $-2 p_r$, also wieder zurück auf $p = 0$, ändert. Die Atome befinden sich hier im unteren Teil des Bildes. Aus dem Dichteprofil der Atomwolke lässt sich die Breite der neuen Geschwindigkeitsverteilung ableiten und mit dem ursprünglichen Wert vergleichen. In Abb. 4.18 (b) ist die Impulsverteilung im Bose-Einstein Kondensat ohne (blau) und mit (rot) dopplersensitiver Geschwindigkeitselektion zu sehen. Wie sich zeigt, kann mit Hilfe dieses Verfahrens die Impulsbreite von $0.8 p_r$ auf $0.2 p_r$ verringert werden.

4.4 Experimentelle Umsetzung der Quantenratsche

Hier werden experimentelle Ergebnisse vorgestellt, welche die gerichtete Bewegung eines Bose-Einstein Kondensats in einer amplitudenmodulierten Ratsche zeigen.

4.4.1 Messung der mittleren atomaren Geschwindigkeit

Nach der Wechselwirkung der Atome mit dem Ratschenpotential, bewegen sich diese für eine Zeit von einigen Millisekunden frei im Schwerfeld der Erde. Aufgrund der Welleneigenschaft des Bose-Einstein Kondensats interferieren die Atome in den einzelnen Gitterplätzen und bilden so im Fernfeld diskrete Beugungsordnungen deren Impuls sich jeweils um $2\hbar k$ unterscheidet. Das Fernfeld wird nach einer typischen Flugzeit von 15 ms erreicht. Die Abb. 4.19 (a) zeigt drei Absorptionsoptionen von Atomen nach der Wechselwirkung mit dem Ratschenpotential für drei verschiedene zeitliche Phasen θ , wobei die räumliche Phase $\varphi = \pi/2$ beträgt. Die zeitliche Periode der Amplitudenmodulation beträgt $T = 32.1\mu s$, was einer Modulationsfrequenz von $\omega = 8\omega_r$ entspricht. Die Potentialtiefen der Gitterharmonischen wurden mit Hilfe von Rabi-Oszillationen an der Bandkante der Brioullin-Zone bestimmt und sind $V_1 = 6E_r$ und $V_2 = 1.6E_r$. Weiterhin betragen die Modulationsamplituden $A_1 = 0.75$ und $A_2 = 0.4$, sowie die Anfangszeit $t_0 = 0.75T$. Man erkennt in einer Aufnahme bis zu fünf verschiedene Atomwolken, die sich in verschiedenen Impulszuständen befinden. Die relative Anzahl der Atome in den einzelnen Wolken gibt den Besetzungskoeffizienten $|c_n|^2$ an, so dass die mittlere Gesamtgeschwindigkeit des Bose-Einstein Kondensats aus der Mittelung der besetzten Impulszustände berechnet werden kann:

$$\langle p \rangle = \sum_n |c_n|^2 \cdot 2n\hbar k \quad (4.27)$$

Die klare Trennung der Beugungsordnungen spiegelt außerdem das dissipationsfreie Verhalten der Ratsche wieder, was darauf hinweist, dass keine Reibungskräfte im System vorhanden sind. Eine inkohärente Streuung von Photonen würde einen breiten homogenen Untergrund in der Aufnahme verursachen. Da nur die Atome in den einzelnen diskreten Beugungsordnungen zur Bestimmung des mittleren atomaren Impulses verwendet werden, tragen in guter Näherung nur diejenigen Atome zum beobachteten Signal bei, die keine Photonen gestreut haben. Im Experiment wird beobachtet, dass sich die Atome nur in den Impulszuständen $0, \pm 2\hbar k, \pm 4\hbar k$ befinden. Dieses Verhalten wird auch von der theoretischen Vorhersage unterstützt, wodurch sich die Dynamik ausschließlich auf die fünf Beugungszustände beschränkt. Eine entsprechende Simulation der Quantenratsche liefert dabei ein qualitativ ähnliches Ergebnis (siehe (b)) wie im Experiment. Erwähnt sei, dass für diese Experimente noch keine Geschwindigkeitsselektion der Atome nach der Expansion aus der Falle verwendet wurde. Die im Vergleich zu den theoretischen Erwartungen verkleinerte Zahl

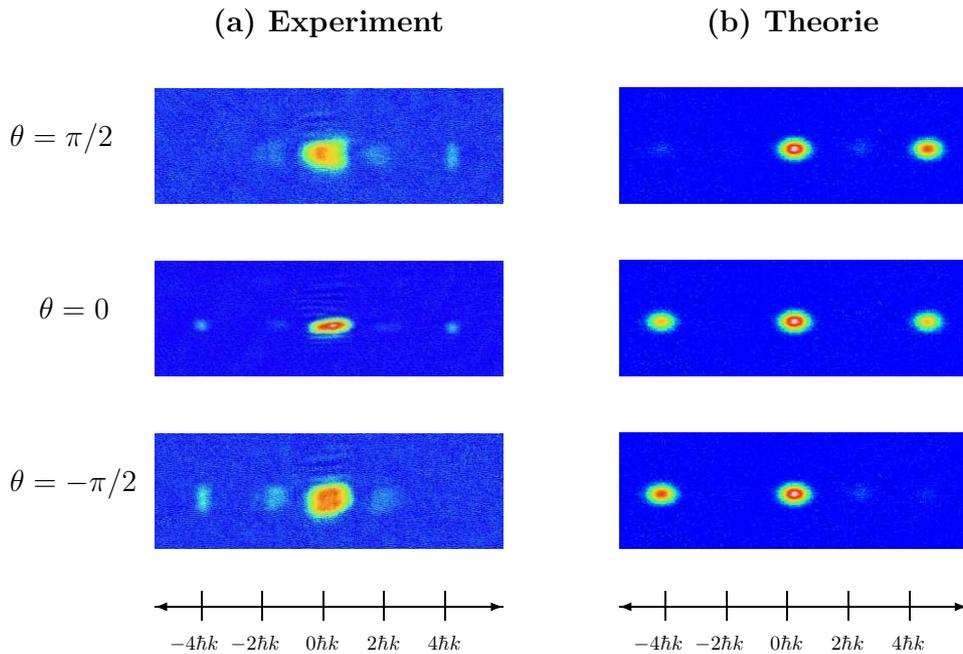


Abb. 4.19: (a) Experimentell aufgenommene Beugungsbilder nach der Wechselwirkung zwischen Atomen und einem Ratschenpotential für verschiedene zeitliche Phasen, wobei die räumliche Phase $\varphi = \pi/2$ beträgt. Die Dynamik spielt sich vorwiegend in der ± 2 . Beugungsordnung statt, was durch eine numerische Simulation (b) bestätigt werden kann.

von Atomen in den 2. Beugungsordnungen wird auf die hier noch vergleichsweise hohe anfängliche atomare Geschwindigkeitsbreite zurückgeführt.

Aus den Absorptionenaufnahmen kann man entnehmen, dass die Verteilung der Besetzungsordnungen von der zeitlichen Phase θ abhängt. Im ersten Fall bei $\theta = \pi/2$ ist die Raum-Zeit-Symmetrie gebrochen, so dass der Impulszustand $+4\hbar k$ stärker besetzt ist als sein inverser Partner. Die Konsequenz ist, dass die mittlere Geschwindigkeit positiv ist und sich das Bose-Einstein Kondensat somit im Gitter vorwärtsbewegt hat. Wenn die zeitliche Symmetrie erhalten ist ($\theta = 0$), wird kein gerichteter Transport beobachtet. Die hier detektierte atomare Impulsverteilung erscheint symmetrisch um die 0. Beugungsordnung. Die Richtung des Transports in der Ratsche lässt sich sogar umkehren, wenn $\theta = -\pi/2$ gewählt wird, so dass jetzt der Impulszustand $-4\hbar k$ stärker besetzt ist. Aus den Beugungsbildern wird im weiteren experimentellen Verlauf jeweils die Nettogeschwindigkeit der Atome berechnet und dessen Abhängigkeit von den einzelnen Parametern untersucht.

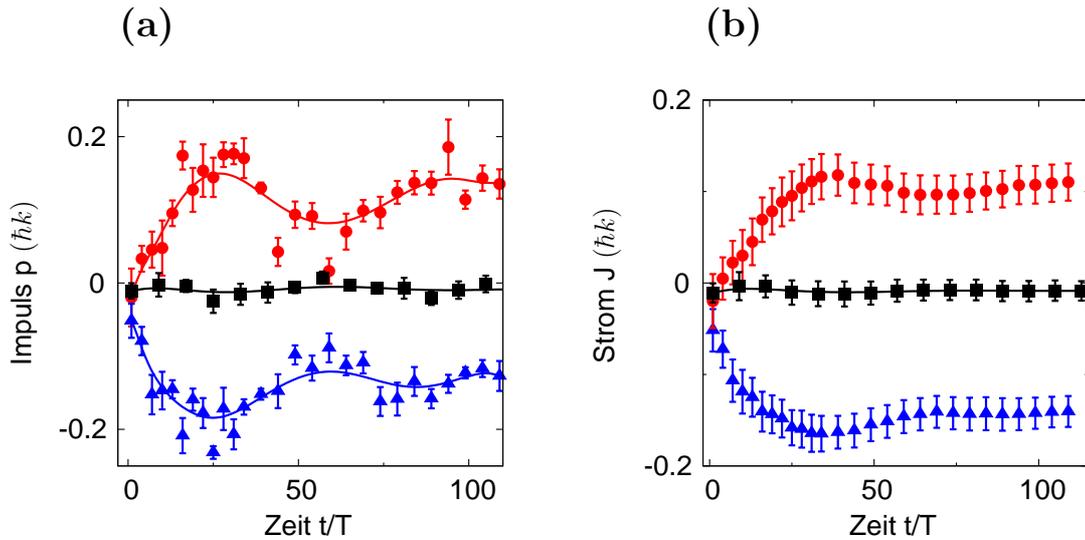


Abb. 4.20: Zeitlicher Verlauf des (a) momentanen und (b) zeitlich gemittelten Impulses für unterschiedliche zeitliche Phasen θ (rot: $\pi/2$, schwarz π , blau $-\pi/2$), wobei die räumliche Phase $\varphi = \pi/2$ ist. Jeder Datenpunkt ist ein statistischer Mittelwert aus fünf Einzelmessungen. Die durchgezogene Linie ist eine Interpolation an die Datenpunkte.

4.4.2 Zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit

Zunächst wird die zeitliche Entwicklung der Geschwindigkeit der Atome für unterschiedliche Symmetrien des getriebenen Ratschenpotentials untersucht. Nach der Erzeugung eines Bose-Einstein Kondensats wird die optische Dipolfalle ausgeschaltet und die Atome fallen frei im Gravitationsfeld der Erde. Während des ungestörten Falls wandelt sich die innere Energie des Kondensats in Bewegungsenergie um [145]. Um den Einfluß von Wechselwirkungseffekten zwischen den Atomen auf den Ratschentransport klein zu halten, wird das optische Ratschenpotential erst nach einer freien Expansionszeit von 3 ms für eine variable Wechselwirkungsdauer eingeschaltet. Dabei wird einer der Laserstrahlen in der Frequenz so angepaßt, dass der Einfluß der Gravitation kompensiert werden kann. Nach dem Ausschalten der Laserstrahlen und einer weiteren Fallzeit von 15ms wird anschließend ein Schattenbild der Impulsverteilung aufgenommen und die Geschwindigkeit der Atome nach Gleichung (4.27) ermittelt. Abb. 4.20 zeigt die zeitliche Entwicklung des Impulses für unterschiedliche Phasenwinkel $\theta = \pm\pi/2, \pi$. Dabei beträgt die Periode der Amplitudenmodulation $T = 32.1\mu\text{s}$, was genau $\omega = 8\omega_r$ entspricht, die Potentialtiefen sind $V_1 = 6E_r$ und $V_2 = 1.6E_r$ sowie die Modulationsamplituden $A_1 = 0.75$ und $A_2 = 0.4$. Die Phasenverschiebung zwischen den Gitterharmonischen beträgt $\varphi = \pi/2$, so dass der gerichtete Transport allein von der zeitlichen Phase abhängen sollte.

Ausgangspunkt der Messung ist ein im Ruhesystem des Gitterpotentials stillstehendes Kondensat ohne mittleren Anfangsimpuls. Bei gebrochener Raum-Zeit Symme-

trie steigt die Geschwindigkeit der Atome an und erreicht ein Maximum nach ungefähr 26 Modulationsperioden. Im weiteren zeitlichen Verlauf oszilliert der Impuls um $p = 0.15\hbar k$. Die beobachtete Oszillation wird auf die Interferenz verschiedener Floquet-Zustände zurückgeführt und ist ein Hinweis für ein quantenmechanisches Verhalten der Ratsche. Im Fall von zeitlicher Invarianz bei $\theta = \pi$ bleibt der Impulszustand der Atome im zeitlichen Verlauf unverändert null (schwarze Linie). Dies ist ein Hinweis darauf, dass hier offenbar keine signifikanten Drifts oder externe Kräfte im System existieren und dass der beobachtete gerichtete Transport damit allein vom Ratscheneffekt herrührt. Aus den experimentellen Daten kann außerdem der zeitliche Verlauf des Stroms abgeleitet werden. Die Integration aus Gleichung 4.17 kann durch eine Summe angenähert werden

$$J(mT) = \frac{1}{mT} \sum_{n=0}^m p(nT) \quad (4.28)$$

und Abb. 4.20 zeigt die entsprechenden Resultate. Hier zeigt sich eine Sättigung der Geschwindigkeit bereits nach 40 Perioden, wobei die starke Dämpfung der Oszillationen im beobachteten Stromverlauf auf experimentelle Schwankungen und der Geschwindigkeitsverteilung im Bose-Einstein Kondensat zurückgeführt wird.

4.4.3 Transport als Folge gebrochener Symmetrien

Symmetrien spielen eine wichtige Rolle für den Ratschentransport von Teilchen in einer fluktuierenden Umgebung. Aus Unordnung kann nur dann ein gerichteter Teilchenstrom entstehen, wenn die Raum-Zeit-Symmetrie vollständig gebrochen ist. Dieser Sachverhalt soll nun experimentell auf seine Gültigkeit untersucht werden.

Die Symmetrien in unserem Modell einer amplitudenmodulierten Ratsche lassen sich auf verschiedene Arten kontrollieren. Neben den Phasenwinkeln φ und θ kann die Raum-Zeit-Symmetrie auch durch Verändern der Amplituden A_1 und A_2 bzw. der Potentialtiefen V_1 und V_2 wahlweise gebrochen oder erhalten werden. In Abb. 4.21 (a) und (b) ist der mittlere Impuls der Atome nach einer Zeit von 26 Perioden für unterschiedliche Kombinationen der räumlichen und zeitlichen Phase aufgetragen. Für die Phasen $\pm\pi/2$ nimmt der Impuls ein Maximum an, wohingegen bei einer Phase von $0, \pi$ der Transport verschwindet. Dieses Ergebnis ist im Einklang mit den theoretischen Vorhersagen und spiegelt das Verhalten einer Ratsche wieder. Auffallend ist auch, dass ein Transport nur dann stattfindet, wenn beide Symmetrien gleichzeitig gebrochen sind, was die Annahme einer dissipationsfreien Ratsche unterstützt. Im symmetrischen Fall ist der beobachtete Impuls der Atome konsistent mit Null und wie man schon in Abb. 4.20 erkennen konnte, ändert sich dieser Bewegungszustand selbst auf einer langen Zeitskala (hier bis zu 120 Zyklen) nicht mehr. Allerdings ist in der Abbildung (a) noch eine schwache Abhängigkeit des atomaren Impulses von der zeitlichen Phase zu sehen, obwohl die räumliche Phase π beträgt. Das kann daran

4 Hamilton'sche Quantenratsche

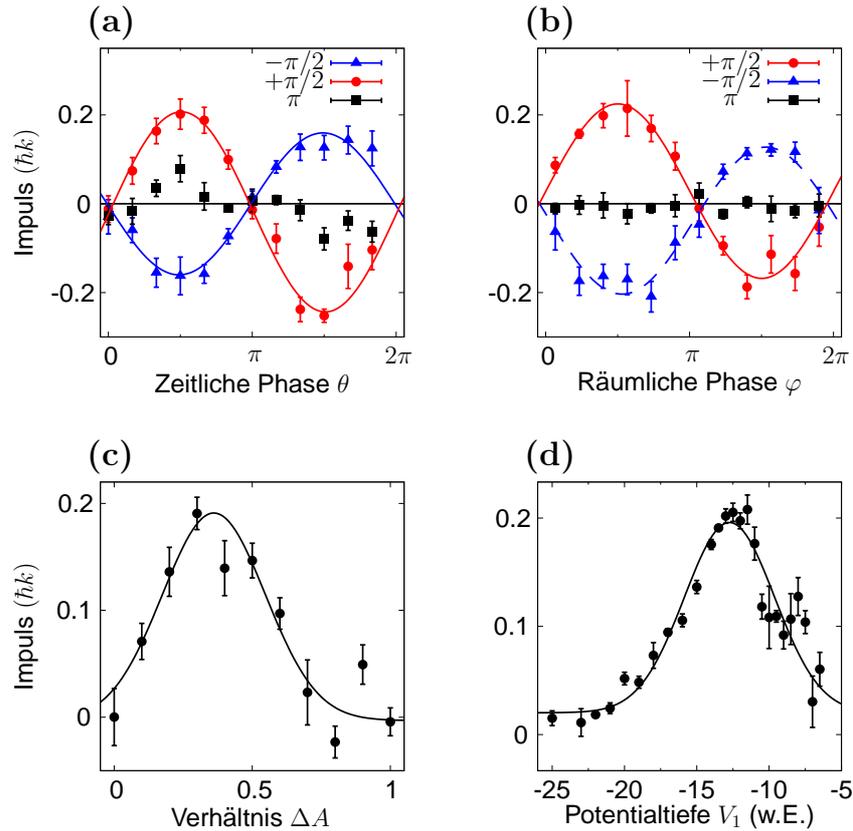


Abb. 4.21: (a-b) Gemessener Impuls nach 26 Modulationsperioden für unterschiedliche Kombinationen aus räumlicher und zeitlicher Phase. (c) Abhängigkeit des Impulses vom Parameter ΔA , welches das Verhältnis zwischen A_1 und A_2 angibt, sowie (d) Abhängigkeit von der Potentialtiefe V_1 . Ein Ratschentransport entsteht nur dann, wenn die Raum-Zeit-Symmetrie komplett gebrochen ist. Die Einheit der Potentialtiefe in (d) ist logarithmisch dargestellt.

liegen, dass die Phase, die am Funktionsgenerator eingestellt wurde, aufgrund von Laufzeitunterschieden in den optischen Pfaden nicht mit der Phasenverschiebung im optischen Gitter übereinstimmt und sich die exakte räumliche Phase nicht so einfach bestimmen lässt. Wie bereits vorher erwähnt, kann die Raum-Zeit-Symmetrie ebenfalls durch Variation der Modulationsamplituden und Potentialtiefen der Gitterharmonischen kontrolliert werden, wobei die beiden Phasen auf einen Wert $\pi/2$ eingestellt wurden. In der Abbildung (c) ist der Impuls der Atome als Funktion des Parameters ΔA , der die Modulationsamplituden A_1 und A_2 miteinander koppelt und bereits im Abschnitt 4.2.5 eingeführt wurde, nach 26 Modulationsperioden dargestellt. Für $\Delta A = 0$ ist die Amplitude $A_2 = 0$ und das Potential wird mit einer sinusförmigen Funktion der Frequenz ω moduliert. Im Fall $\Delta A = 1$ ist hingegen die Amplitude $A_1 = 0$ und die sinusförmige Modulation wird mit der doppelten Frequenz 2ω durchgeführt. In beiden Fällen ist die zeitliche Symmetrie erhalten und

die Geschwindigkeit der Atome ist null. Dazwischen wird das Gitterpotential mit einer zeitlich asymmetrischen Modulation betrieben, wobei der Grad der Asymmetrie durch den Parameter ΔA eingestellt werden kann. Im Experiment ist der Ratschentransport maximal, wenn $\Delta A = 0.25$ ist, was mit der theoretischen Vorhersage von 0.2 gut übereinstimmt. Neben der Modulationsamplitude kann aber auch die Potentialtiefe des konventionellen Gitters V_1 verändert werden um den Grad der Asymmetrie im System zu verändern. Dazu wird die Amplitude des Funktionsgenerators FG 2A schrittweise durchgeföhren und der Impuls der Atome nach 26 Perioden gemessen. Man beobachtet in der Abbildung (d) ein ähnliches Verhalten, wie bereits bei der Amplitudenmodulation. Wenn die Amplitude des konventionellen Gitters zu schwach oder zu stark ist, dann ist das System räumlich symmetrisch und der Ratscheneffekt verschwindet. Ein maximaler Transport wird hier bei einer Potentialtiefe $V_1 = 6E_r$ erreicht. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die experimentellen Daten sehr gut mit den numerischen Ergebnissen einer Hamiltonschen Quantenratsche aus Abschnitt 4.2.5 und 4.2.6 übereinstimmen.

4.4.4 Weitere Merkmale einer Hamiltonschen Quantenratsche

Theoretische Arbeiten haben gezeigt, dass der erwartete Strom in einer Hamiltonschen Quantenratsche von der Startzeit t_0 abhängt [128]. Das liegt daran, dass die Wellenfunktion auf die Floquet-Zustände projiziert wird, deren Transportverhalten von der Zeit t_0 abhängt und sich im weiteren zeitlichen Verlauf nicht mehr ändert. Im Gegensatz dazu verschwindet die Information über die Startbedingungen in einer klassischen chaotischen Ratsche bereits nach wenigen Oszillationsperioden, so dass für diesen Fall keine Abhängigkeit des Transports von t_0 erwartet wird.

Im Experiment wurde daraufhin der Impuls der Atome als Funktion der Anfangszeit t_0 untersucht, was lediglich einer Phasenverschiebung der zeitlichen Modulation entspricht. Entsprechende experimentelle Daten sind in Abb. 4.22 (a) gezeigt, für die in der Tat eine Abhängigkeit des mittleren atomaren Impulses von der Anfangszeit t_0 beobachtet wurde. Bei geeigneter Wahl der Startzeit t_0 kann eine Verbesserung des Transports um 30% Prozent erreicht werden. In der Abbildung ist außerdem die Form des Potentials zum Anfangszeitpunkt an den beiden Extremstellen zu sehen. In unserem Fall bedeutet dies, dass die Amplitudenmodulation bei einem mittelstarken Potential beginnt und dieses dann innerhalb einer Periode abnimmt. Jeder Datenpunkt wurde fünf mal gemessen und der statistische Mittelwert berechnet. Eine Abhängigkeit der Radiofrequenzleistung, die sich eventuell auf die Potentialtiefe auswirkt, kann durch Messung des optischen Pulses über die komplette Messdauer ausgeschlossen werden. Die beobachtete Variation des Transports als Funktion der Anfangszeit t_0 der Modulation stellt einen klaren Hinweis auf den vollständig quantenmechanischen Charakter des Ratschentransports dar.

Neben der Startzeit t_0 kann auch der Startimpuls q_0 variiert werden. Dazu wird das

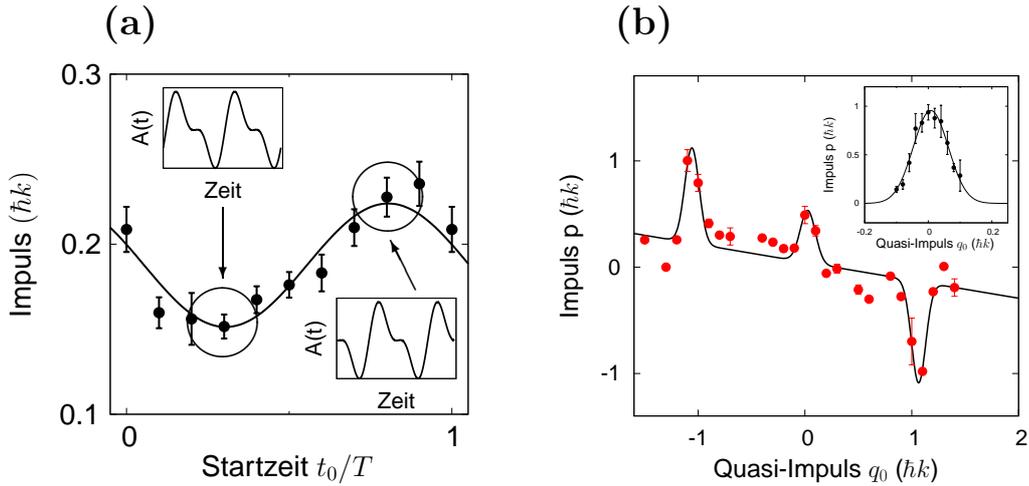


Abb. 4.22: Beobachteter atomarer Impuls nach 26 Perioden des treibenden Ratschenpotentials als Funktion der (a) Startzeit t_0 und des (b) Quasi-Impulses q_0 . Die Abhängigkeit von t_0 gilt als wichtiger Nachweis einer Hamiltonschen Quantenratsche. Ein Ratschentransport entsteht auch in der Nähe der Bandkanten bei $q_0 = \pm\hbar k$. Die kleine Abbildung zeigt einen besser aufgelösten Verlauf des atomaren Impulses um den Quasi-Impuls $q_0 = 0$.

Gitterpotential zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer konstanten Geschwindigkeit relativ zum Bose-Einstein Kondensat bewegt. Diese Methode wird in vielen physikalischen Experimenten in optischen Gittern verwendet, um die Wellenfunktion z.B. in einen definierten Bloch-Zustand zu präparieren [122] (siehe auch Abschnitt 3.5). Die Messung in Abb. 4.22 zeigt den Impuls des Bose-Einstein Kondensats für unterschiedliche Quasi-Impulse nach einer Zeit von 26 Perioden des treibenden Lichtfelds. Es sei hier erwähnt, dass die Geschwindigkeitsverteilung der Atome im Bose-Einstein Kondensat für diese Messung um einen Faktor 3 gegenüber der anfänglichen Verteilung des expandierenden Kondensats reduziert wurde. Die Technik zur Geschwindigkeitsselektion von Atomen ist in Abschnitt 4.3 detailliert beschrieben. Wie sich zeigt, bricht der Impuls und damit der Quantentransport abseits von einem Gitterimpuls $q_0 = 0$ ein, bevor er an den Rändern der Brioullin-Zone bei einem Quasi-Impuls von $q_0 = \pm\hbar k$ wieder auf einen Wert von $|p| = \hbar k$ ansteigt. Ein analoges Verhalten wird in der Theorie vorhergesagt, da sich im Energiespektrum an den kritischen Stellen bei $q_0 = 0, \pm\hbar k$ sehr dominante Kreuzungsbereiche befinden, an denen eine starke Desymmetrisierung der transportierenden Floquet-Zustände stattfindet. In der Abbildung ist weiterhin eine Messung höherer Auflösung des atomaren Impulses im Bereich von $q_0 = 0$ dargestellt. Hier ist die zentrale Resonanz um den Quasi-Impuls $q_0 = 0$ sehr deutlich sichtbar.

Zum Abschluß der Messreihe über Hamiltonsche Quantenratschen wird noch der Einfluß der Modulationsfrequenz ω auf den Quantentransport untersucht. Dazu wird die Abtastfrequenz des Funktionsgenerators, der die Form des optischen Pulses aus-

4.4 Experimentelle Umsetzung der Quantenratsche

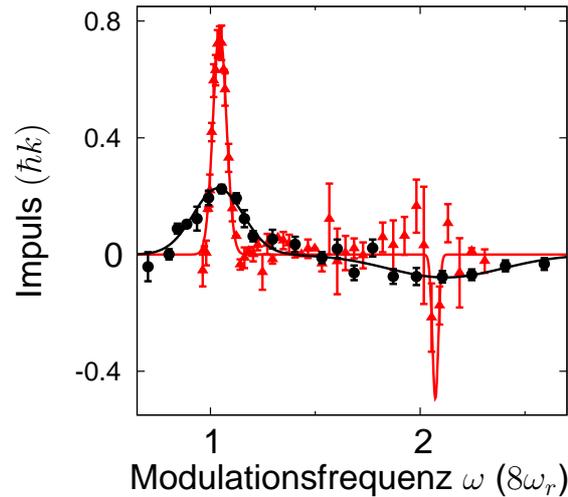


Abb. 4.23: Abhängigkeit des Impulses von der Modulationsfrequenz ω nach einer Zeit von 26 Perioden. Ein Transport tritt in der Nähe der Rückstoßfrequenzen bei $\omega/8\omega_r = 1, 2$ auf. Die Größe und breite der Resonanz hängt von der Impulsverteilung im Bose-Einstein Kondensat ab. Der schwarze Kurvenverlauf entspricht einer Impulsbreite $\Delta q = 0.8\hbar k$ und der rote $\Delta q = 0.2\hbar k$.

gibt, minimal verändert, was eine Änderung der Periodendauer T nach sich zieht, ohne dabei die Form des Pulses zu verändern. Ergebnisse einer solchen Messung sind in Abb. 4.23 dargestellt, wobei die Modulationsfrequenz in Einheiten von $8\omega_r$ mit $\omega_r = (\hbar k)^2/(2m)$ als Rückstoßfrequenz bei Absorption eines Photons aufgetragen ist. Man erkennt eine starke Resonanz im Bereich von $\omega/8\omega_r = 1$ und eine zweite schwächere Resonanz mit negativem Vorzeichen bei der doppelten Modulationsfrequenz $\omega/8\omega_r = 2$. Das Auftreten eines gerichteten Transports bei Vielfachen der Rückstoßfrequenz ist eine Folge quantenmechanischer Eigenschaften von zeitlich getriebenen Systemen. Um den Einfluß der Geschwindigkeitsverteilung im Kondensat auf den Ratschentransport zu untersuchen, wurde eine schmale atomare Geschwindigkeitsklasse aus der ursprünglichen Verteilung des expandierten Bose-Einstein Kondensats durch einen langen Bragg- gefolgt von einem kurzen Raman-Puls herausgeschnitten. Die Impulsbreite der neuen Verteilung sinkt dadurch von $\Delta q = 0.8\hbar k \rightarrow \Delta q = 0.2\hbar k$, worauf dasselbe Experiment wiederholt wird, wobei experimentelle Daten in der Abbildung rot markiert sind. Es zeigt sich, dass die Amplitude des Transports im Vergleich zur ersten Messung um etwa einen Faktor drei größer ist und sich die Linienbreite der Resonanzkurve um $\omega/8\omega_r = 1$ um einen Faktor vier verkleinert. Das bedeutet, dass ein möglicher Quantentransport einer Atomwolke in einer Ratsche sehr stark von deren Geschwindigkeitsverteilung abhängt. Auf der anderen Seite bewirkt eine große Impulsbreite eine Vergrößerung der Linienbreite einer Resonanzfrequenz. Man beachte, dass die extrem scharfen Resonanzen die sich aus den numerischen Simulationen ergeben (vgl. Abschnitt 4.2), normalerweise im Experiment nicht

4 Hamilton'sche Quantenratsche

aufgelöst werden können, da die experimentellen Schwankungen zu groß sind. Eine endliche Geschwindigkeitsverteilung führt allerdings dazu, dass diese Resonanzen verbreitert werden und dadurch im Experiment aufgelöst werden können.

Somit gibt es mehrere experimentelle Evidenzen, die auf eine erfolgreiche Realisierung einer Hamiltonschen Quantenratsche hinweisen. Zum einen (i) beobachtet man Oszillationen im zeitlichen Verlauf der mittleren Geschwindigkeit, ein Effekt, der durch die Interferenz verschiedener Floquet-Zustände herrührt. Zum anderen (ii) hängt der beobachtete Transport von den Startbedingungen ab. Die Startzeit t_0 wirkt sich genauso auf den Transport aus, wie der Quasi-Impuls q_0 , wobei beide Effekte quantenmechanischer Natur sind. Desweiteren beobachtet man diskrete Resonanzen (iii) bei Vielfachen der Rückstoßfrequenzen $\omega = n \cdot 8\omega_r$ ($n = 1, 2$).

5 Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit gelang die erstmalige Realisierung einer Hamiltonschen Quantenrutsche (nicht-dissipativ). Ein Rubidium Bose-Einstein Kondensat wurde einem sägezahnförmigen Lichtpotential ausgesetzt, das zeitlich periodisch moduliert wurde. Wenn das treibende Gitterpotential zeitliche und räumliche Symmetrien verletzt, konnte ein gerichteter Transport von Atomen beobachtet werden, was auf eine Desymmetrisierung der transportierenden Floquet-Eigenzustände des getriebenen Systems zurückgeführt wird. Die erzielten Resultate stellen die Demonstration eines Prototyps für einen Quantenmotor dar, der einen wechselstromförmigen Antrieb in eine gerichtete atomare Bewegung umwandelt. Zukünftig wäre es interessant zunächst genauer zu untersuchen in wieweit dieser Motor Kraft auf die Atome übertragen kann. Die Quantenrutsche sollte beispielsweise in der Lage sein, bis zu einem gewissen Grad Atome gegen die Gravitation zu transportieren [149].

Mit Hilfe von Hamiltonschen Quantenrutschen könnte ein weiteres Phänomen untersucht werden, das unter dem Begriff "absolute negative mobility" in der Fachliteratur zu finden ist [150–152]. Dabei bewegen sich Teilchen in einem periodisch modulierten Potential immer **entgegen** einer äußeren Kraft, was in gewisser Weise dem 2. Newton'schen Gesetz widerspricht. Ein entsprechendes Experiment könnte folgendermaßen aussehen. Wenn die Quantenrutsche in einer symmetrischen Konfiguration betrieben wird, dann bricht der Teilchentransport bekanntermaßen im kräftefreien Fall ein. Im nächsten Schritt wird eine äußere Kraft hinzugefügt, so dass die Atome zunächst in Krafrichtung beschleunigt werden. Erhöht man allerdings die Kraft, so dreht sich interessanterweise die Bewegungsrichtung der Atome ab einem bestimmten Wert um. Ein solches System kann beispielsweise benutzt werden, um zwei verschiedene Sorten von Teilchen voneinander zu trennen [153].

Ein weiterer Aspekt, der in Zusammenhang mit getriebenen Systemen untersucht werden kann, ist ein Ratschentransport im stark korrelierten Bereich, beispielsweise in der Nähe des Mott-Isolator Übergangs. Hierfür kann neben einer amplitudenmodulierten Ratsche auch eine Kippratsche mit einem Stehwellen-Gitterpotential verwendet werden [128]. In der Vergangenheit wurde bereits in einem zeitlich symmetrisch modulierten Gitterpotential der Übergang vom superfluiden zum Mott-Isolator Zustand untersucht, wobei man festgestellt hat, dass die Tunnelwahrscheinlichkeit zwischen den Gitterplätzen eine Abhängigkeit in Form einer Besselfunktion 0. Ordnung hat, in dessen Argument die Amplitude der Modulation enthalten ist [154, 155]. Interessant wäre es, zukünftig zu untersuchen, wie sich eine zeitlich

5 *Ausblick*

asymmetrisch modulierte Kippratsche in einem stark korrelierten System verhält. Mit entsprechenden Experimenten könnte der Beginn eines neuen Kapitels der Physik in stark korrelierten Quantengasen erschlossen werden.

A Elektronischer Aufbau zur Ansteuerung der Gitter-Laserstrahlen

Erzeugung der Radiofrequenzsignale

Abb. A.1 zeigt den elektronischen Aufbau zur Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren. Im linken Radiofrequenzweig befinden sich verschiedene RF-Signale (ω_{FG} , $\omega_{FG} \pm \Delta\omega$, Raman, Bragg), die je nach Situation dazugeschaltet werden können und im weiteren Verlauf AOM 2 ansteuern. Auf dem rechten Zweig befindet sich hingegen nur eine Frequenz ω_{FG} , die AOM 1 ansteuert. Sämtliche Signale werden über Funktionsgeneratoren erzeugt, die bei einer Mittenfrequenz von 57 MHz arbeiten. Alle Funktionsgeneratoren sind miteinander an die 10 MHz Referenzfrequenz angeschlossen, um die Phasenstabilität der Fourier-synthetisierten Gitter zu garantieren. Die Signale auf den beiden Frequenzzweigen werden mit einem weiteren Funktionsgenerator der Frequenz 143 MHz überlagert, um über einen Mischer die notwendige Frequenz von 200 MHz für die Ansteuerung der akusto-optischen Modulatoren zu generieren. Die Mischfrequenzen sollten so gewählt werden, dass die kleinere Frequenz kein Vielfaches der größeren Frequenz ist, da sonst die Amplitude des RF-Signals zeitlich wackelt und die Amplitude der optischen Pulse von Aufnahme zu Aufnahme schwankt. Aus der Grafik entnimmt man weiterhin, dass der Leistungsteiler zum Hochmischen der Signale eine Verbindung zwischen beiden Radiofrequenzzweigen ermöglicht, was dazu führt, dass sich die Radiofrequenzen ebenfalls auf den gegenüberliegenden Zweigen befinden. Die Kombination aus Verstärker und Abschwächer wirkt zusätzlich isolierend, so dass eine eindeutige Trennung beider Radiofrequenzzweige sichergestellt werden kann. Das Ausgangssignal am Mischer enthält neben der 200 MHz Trägerfrequenz verschiedene weitere Frequenzkomponenten, die aus einer Kombination von Tief- und Hochpass weitestgehend herausgefiltert werden. Anschließend wird das Signal verstärkt und auf einen weiteren Mischer gegeben, der eine periodische Leistungsänderung der Radiofrequenz für die experimentelle Umsetzung der Hamiltonschen Quantenrutsche ermöglicht. In dieser Konfiguration wird als Eingangssignal der LO-Eingang des Mixers und als Ausgangssignal der RF-Eingang verwendet. Eine zeitliche Änderung der Spannung am IF-Eingang wirkt sich dämpfend auf das RF-Signal am Ausgang aus, so dass dadurch beliebige Pulsformen generiert werden können. Ein programmierbarer Funktionsgenerator liefert dabei die elektronische Form des Pulses. Das stark

A Elektronischer Aufbau zur Ansteuerung der Gitter-Laserstrahlen

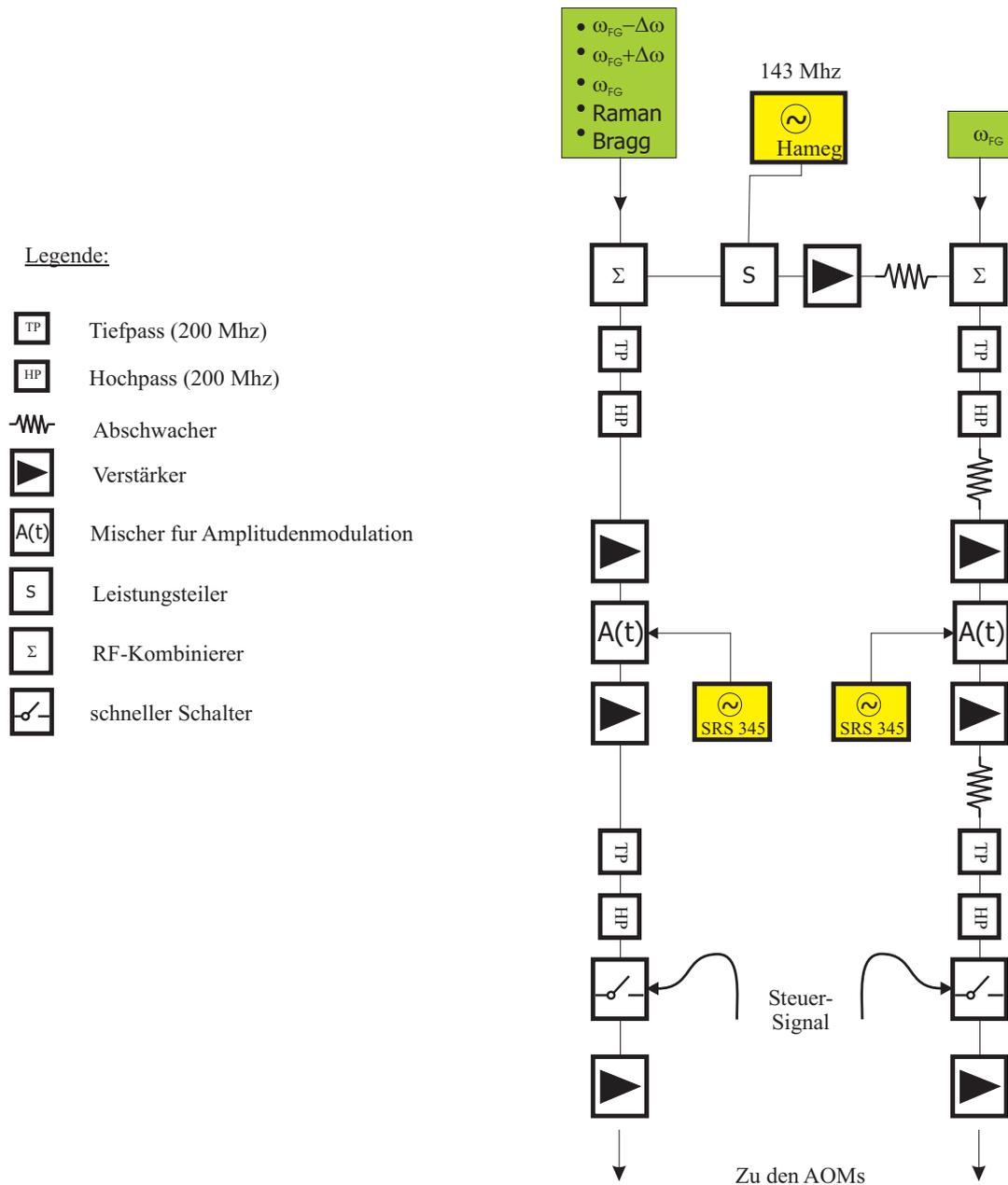


Abb. A.1: Schematischer Aufbau der Radiofrequenzelektronik zur Ansteuerung der beiden akusto-optischen Modulatoren. In den Radiofrequenzzweigen können sich mehrere Frequenzen befinden (siehe grüne Box). Eine Legende erklärt die Funktion der Bauteile.

abgeschwächte Ausgangssignal wird erneut verstärkt und mit einer Kombination aus Tief- und Hochpass gefiltert. Im weiteren Verlauf dient ein elektronischer Schalter zur genauen zeitlichen Steuerung des Experiments. Zuletzt wird das Signal mit Hilfe eines Hochleistungsverstärkers auf maximal 1 W verstärkt und gelangt schließlich auf die akusto-optischen Modulatoren.

Zeitliche Steuerung

Wie bereits in Abschnitt 4.3 beschrieben, kann eine experimentelle Sequenz aus bis zu drei Phasen bestehen (Freifall, Vorselektion, Gitterexperiment). Das bedeutet, dass man die entsprechenden Radiofrequenzsignale zeitlich steuern muss. Das geschieht in unserem Aufbau durch elektronische Schalter, die in der Regel über Pulsgeneratoren kontrolliert werden. In Abb. A.2 (a) ist die zeitliche Reihenfolge der einzelnen Schaltsituationen dargestellt. Nach einer Freifall-Phase, in der das Bose-Einstein Kondensat nach Ausschalten der CO₂-Laser-Dipolfalle ballistisch fällt, werden die Schalter S7 und S8 während der gesamten Gittersequenz geöffnet. Zur Geschwindigkeitsselektion der Atome werden nacheinander Bragg- und Raman-Puls eingestrahlt, wobei Schalter S1 dabei zwischen der Bragg- ω_B und der Raman-Frequenz ω_R schaltet. Währenddessen werden alle anderen Frequenzen, die sich im gleichen Zweig befinden, ausgeschaltet. Wichtig ist auch, dass die zeitliche Modulation der Pulse deaktiviert ist. Aus diesem Grund kann Schalter S5/S6 wahlweise zwischen einer konstanten und einer zeitlich modulierten Spannung variieren. In der eigentlichen Experimentierphase wird ein Fourier-synthetisiertes Gitterpotential benötigt. Die Funktionsgeneratoren FG 2A, 2B und 2C werden über die Schalter S2 bis S4 durchgeschaltet, womit automatisch die Frequenzen für den Bragg- und Raman-Puls blockiert werden. Am Ende werden alle notwendigen Frequenzen über einen RF-Kombinierer zusammengeführt und zur weiteren Bearbeitung auf den entsprechenden Radiofrequenzweig geschickt.

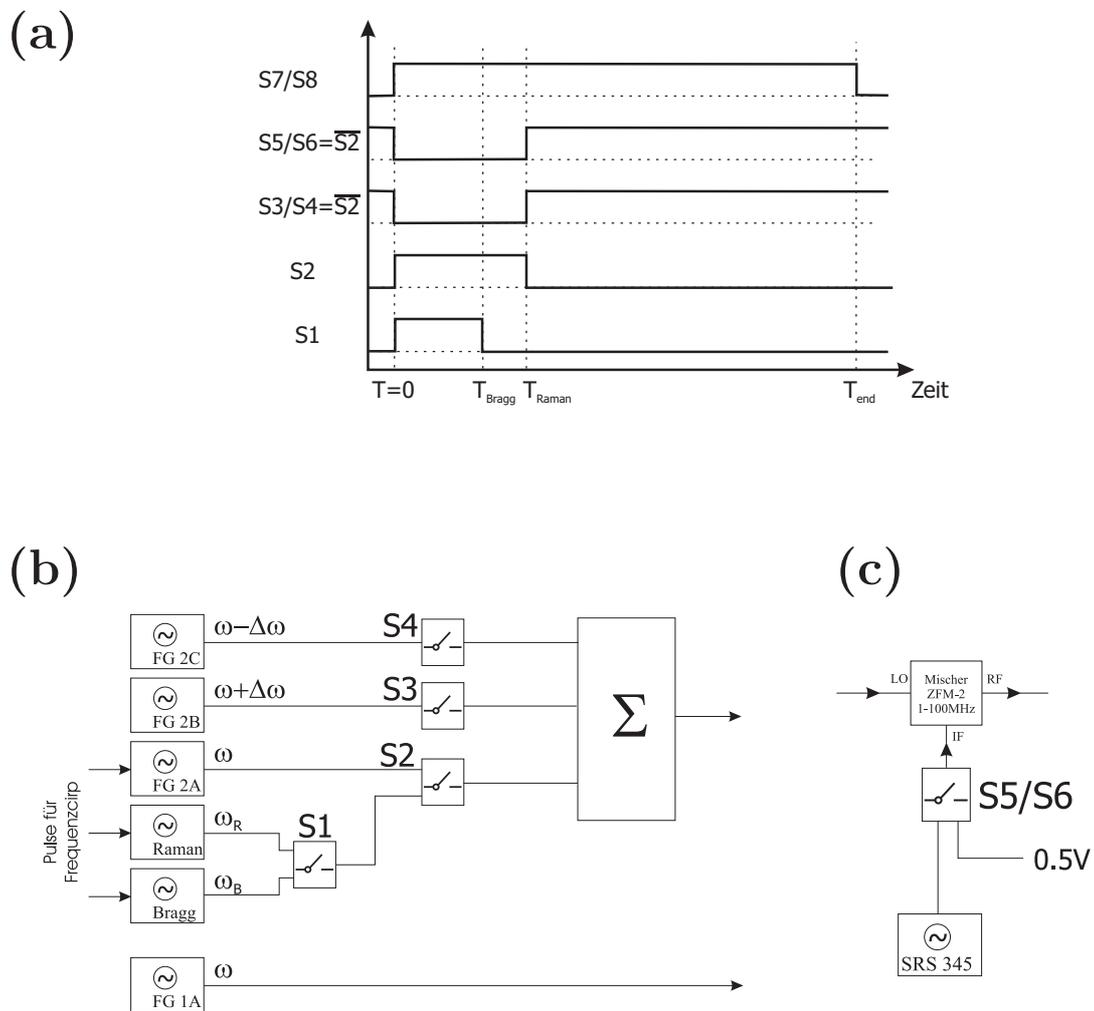


Abb. A.2: (a) Schematische Darstellung der zeitlichen Sequenz zum Ansteuern der elektronischen Schalter (S1...S8). (b) Jeder Schalter gibt wahlweise eine oder mehrere bestimmte Frequenzen auf den Radiofrequenzzweig, die im weiteren Verlauf verarbeitet werden. (c) Die zeitliche Modulation der Amplitude des optischen Pulses kann wahlweise über die Schalter S5 und S6 eingeschaltet werden.

B Datensatz zur Simulation der Hamiltonschen Quantenratsche

Parameter	Wert
$\omega(8\omega_r)$	1.009
A_1	1.209
A_2	0.314
$V_1(E_r)$	2.88
$V_2(E_r)$	0.67
$\phi(\pi)$	0.474
$\theta(\pi)$	0.401
t_0	0

Tabelle B.1: Parametersatz für die numerische Simulation der Hamiltonschen Quantenratsche

B Datensatz zur Simulation der Hamiltonschen Quantenratsche

C Integrationsverfahren

C.1 Zeitentwicklungsoperator

Hier wird als Ansatz für die Zeitentwicklung eines Anfangszustandes die Dyson-Reihe verwendet [156]

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{T} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau \right] |\Psi(t_0)\rangle \quad (\text{C.1})$$

wobei \hat{T} der Zeitordnungsoperator ist. Zerlegt man $\Psi(t)$ in Impulszustände, so folgt für einen kleinen Schritt Δt

$$|\Psi(t + \Delta t)\rangle = \underbrace{\exp \left[-\frac{i\hbar}{2} \Delta t j^2 \right]}_U \underbrace{\exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\Delta t} A(\tau) V(x) d\tau \right]}_W \sum_j p_j(t) |j\rangle. \quad (\text{C.2})$$

Der Term W wird noch weiter vereinfacht, indem ein Basiswechsel Q vorgenommen wird, der $V(x)$ diagonalisiert

$$\begin{aligned} W &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} V(x) \underbrace{\int_t^{t+\Delta t} A(\tau) d\tau}_{\approx \Delta t A(t)} \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \Delta t A(t) Q V_{\text{diag}} Q^{-1} \right] \\ &= Q \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \Delta t V_{\text{diag}} A(t) \right] Q^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Dabei wurde angenommen, dass $A(t)$ sich langsam gegenüber der typischen Zeitskala verändert bzw., dass Δt klein genug gewählt ist. Die zeitliche Entwicklung der Impulsbasisoeffizienten ergibt sich nach multiplizieren mit $\langle j' |$ von links zu

$$p_j(t + \Delta t) = U Q \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \Delta t A(t) V_{\text{diag},jj} \right] Q^{-1} p_j(t). \quad (\text{C.4})$$

C.2 Integration durch Zerlegung

Eine effizientere Methode zur zeitlichen Integration wurde in [157] beschrieben. Diese vermeidet das numerisch aufwändige rekursive multiplizieren von Matrizen. Die Wellenfunktion wird in einen Phasenanteil $\Phi(t)$ und einen Amplitudenanteil $a(t)$ zerlegt

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{j=-N}^N a_j(t) \Phi_j(t) |j\rangle. \quad (\text{C.5})$$

Wird $\Phi(t)$ so gewählt, dass es

$$i\hbar \frac{\partial |\Phi(t)\rangle}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2} j^2 |\Phi(t)\rangle \quad (\text{C.6})$$

erfüllt, also

$$|\Phi(t)\rangle = \exp \left[-i \frac{\hbar}{2} j^2 t \right] \quad (\text{C.7})$$

gilt. Setzt man C.5 in die Schrödingergleichung ein, folgt für die Amplitudenfunktion $a(t)$

$$\frac{\partial a_j(t)}{\partial t} = -i \frac{1}{2\hbar} \left[\frac{\Phi_{j+1}(t)}{\Phi_j(t)} a_{j+1}(t) + \frac{\Phi_{j-1}(t)}{\Phi_j(t)} a_{j-1}(t) \right]. \quad (\text{C.8})$$

C.7 und C.8 sind numerisch einfacher zu handhaben.

Literaturverzeichnis

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science*, **269**, 198 (1995).
- [2] B. DeMarco and D. S. Jin, "Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas", *Science*, **285**, 1703 (1999).
- [3] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, "Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms", *Nature*, **440**, 315 (2006).
- [4] E. W. Hagley, L. Deng, M. Kozuma, J. Wen, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, "A Well-Collimated Quasi-Continuous Atom Laser", *Science*, **283**, 1706 (1999).
- [5] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, "Observation of Interference Between Two Bose Condensates", *Science*, **275**, 637 (1997).
- [6] J. R. Abo-Shaeer, C. Raman, J. M. Vogels, and W. Ketterle, "Observation of Vortex Lattices in Bose-Einstein Condensates", *Science*, **292**, 476 (2001).
- [7] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hansch, and I. Bloch, "Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice", *Nature*, **429**, 277 (2004).
- [8] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf, and C. Cohen-Tannoudji, "Channeling atoms in a laser standing wave", *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1659 (1987).
- [9] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, "Bloch Oscillations of Atoms in an Optical Potential", *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4508 (1996).
- [10] Q. Niu, X.-G. Zhao, G. A. Georgakis, and M. G. Raizen, "Atomic Landau-Zener Tunneling and Wannier-Stark Ladders in Optical Potentials", *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4504 (1996).
- [11] P. T. Ernst, S. Gotze, J. S. Krauser, K. Pyka, D.-S. Luhmann, D. Pfannkuche, and K. Sengstock, "Probing superfluids in optical lattices by momentum-resolved Bragg spectroscopy", *Nature Physics*, **6**, 56 (2010).
- [12] R. Scheunemann, F. S. Cataliotti, T. W. Hänsch, and M. Weitz, "Resolving and addressing atoms in individual sites of a CO₂-laser optical lattice", *Phys. Rev. A*, **62**, 051801 (2000).

- [13] T. Gericke, P. Wurtz, D. Reitz, T. Langen, and H. Ott, "High-resolution scanning electron microscopy of an ultracold quantum gas", *Nature Physics*, **4**, 949 (2008).
- [14] W. S. Bakr, J. I. Gillen, A. Peng, S. Folling, and M. Greiner, "A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice", *Nature*, **462**, 74 (2009).
- [15] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms", *Nature*, **415**, 39 (2002).
- [16] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen, "Atom Optics Realization of the Quantum δ -Kicked Rotor", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4598 (1995).
- [17] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, "Quantum Delta-Kicked Rotor: Experimental Observation of Decoherence", *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 4111 (1998).
- [18] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, "Quantum Delta-Kicked Rotor: Experimental Observation of Decoherence", *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 4111 (1998).
- [19] M. B. d'Arcy, R. M. Godun, M. K. Oberthaler, D. Cassettari, and G. S. Summy, "Quantum Enhancement of Momentum Diffusion in the Delta-Kicked Rotor", *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 074102 (2001).
- [20] P. H. Jones, M. Goonasekera, D. R. Meacher, T. Jonckheere, and T. S. Monteiro, "Directed Motion for Delta-Kicked Atoms with Broken Symmetries: Comparison between Theory and Experiment", *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 073002 (2007).
- [21] P. Ahmadi, G. Behinaein, V. Ramareddy, and G. S. Summy, "Creation mechanism of quantum accelerator modes", *Phys. Rev. A*, **80**, 053418 (2009).
- [22] M. O. Magnasco, "Forced thermal ratchets", *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 1477 (1993).
- [23] C. R. Doering, W. Horsthemke, and J. Riordan, "Nonequilibrium fluctuation-induced transport", *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 2984 (1994).
- [24] R. D. Astumian and M. Bier, "Fluctuation driven ratchets: Molecular motors", *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1766 (1994).
- [25] P. Reimann, "Brownian motors: noisy transport far from equilibrium", *Physics Reports*, **361**, 57 (2002).
- [26] R. D. Astumian and P. Hänggi, "Brownian Motors", *Physics Today*, **55**, 33 (2002).
- [27] A. F. Huxley and R. Niedergerke, "Structural Changes in Muscle During Contraction: Interference Microscopy of Living Muscle Fibres", *Nature*, **173**, 971 (1954).
- [28] A. F. Huxley, "Biological motors: Energy storage in myosin molecules", *Current Biology*, **8**, R485 (1998).

- [29] K. Kitamura, M. Tokunaga, A. H. Iwane, and T. Yanagida, "A single myosin head moves along an actin filament with regular steps of 5.3 nanometres", *Nature*, **397**, 129 (1999).
- [30] J. T. Finer, R. M. Simmons, and J. A. Spudich, "Single myosin molecule mechanics: piconewton forces and nanometre steps", *Nature*, **368**, 113 (1994).
- [31] K. Svoboda, C. F. Schmidt, B. J. Schnapp, and S. M. Block, "Direct observation of kinesin stepping by optical trapping interferometry", *Nature*, **365**, 721 (1993).
- [32] E. M. Hohberger, A. Lorke, W. Wegscheider, and M. Bichler, "Adiabatic pumping of two-dimensional electrons in a ratchet-type lateral superlattice", *Applied Physics Letters*, **78**, 2905 (2001).
- [33] "Editorial Ratchets and Brownian motors: Basics, experiments and applications", *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, **75**, 167 (2002).
- [34] H. Linke, W. Sheng, A. Löfgren, H. Xu, P. Omling, and P. E. Lindelof, "A quantum dot ratchet: Experiment and theory", *EPL (Europhysics Letters)*, **44**, 341 (1998).
- [35] H. Linke, T. E. Humphrey, A. Löfgren, A. O. Sushkov, R. Newbury, R. P. Taylor, and P. Omling, "Experimental Tunneling Ratchets", *Science*, **286**, 2314 (1999).
- [36] J. E. Villegas, S. Savel'ev, F. Nori, E. M. Gonzalez, J. V. Anguita, R. Garcia, and J. L. Vicent, "A Superconducting Reversible Rectifier That Controls the Motion of Magnetic Flux Quanta", *Science*, **302**, 1188 (2003).
- [37] H. Hilgenkamp, V. V. Moshchalkov, and P. Kes, "PHYSICS: Enhanced: Flux Quanta on the Move", *Science*, **302**, 1159 (2003).
- [38] S. Weiss, D. Koelle, J. Müller, R. Gross, and K. Barthel, "Ratchet effect in dc SQUIDS", *EPL (Europhysics Letters)*, **51**, 499 (2000).
- [39] M. Beck, E. Goldobin, M. Neuhaus, M. Siegel, R. Kleiner, and D. Koelle, "High-Efficiency Deterministic Josephson Vortex Ratchet", *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 090603 (2005).
- [40] R. Di Leonardo, L. Angelani, G. Ruocco, V. Iebba, M. P. Conte, S. Schippa, F. De Angelis, F. Mecarini, and E. di Fabrizio, "A bacterial ratchet motor", *arXiv:0910.2899v1* (2009).
- [41] L. Angelani, R. Di Leonardo, and G. Ruocco, "Self-Starting Micromotors in a Bacterial Bath", *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 048104 (2009).
- [42] S. Matthias and F. Muller, "Asymmetric pores in a silicon membrane acting as massively parallel brownian ratchets", *Nature*, **424**, 53 (2003).
- [43] M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni, and G. Grynberg, "Phase Control of Directed Diffusion in a Symmetric Optical Lattice", *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 094101 (2003).
- [44] R. Gommers, S. Bergamini, and F. Renzoni, "Dissipation-Induced Symmetry Breaking in a Driven Optical Lattice", *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 073003 (2005).

- [45] W. K. Hensinger, H. Haffner, A. Browaeys, N. R. Heckenberg, K. Helmerson, C. McKenzie, G. J. Milburn, W. D. Phillips, S. L. Rolston, H. Rubinsztein-Dunlop, and B. Upcroft, "Dynamical tunnelling of ultracold atoms", *Nature*, **412**, 52 (2001).
- [46] A. D. Steck, H. W. Oskay, and M. G. Raizen, "Observation of Chaos-Assisted Tunneling Between Islands of Stability", *Science*, **293**, 274 (2001).
- [47] T. Salger, S. Kling, T. Hecking, C. Geckeler, L. Morales-Molina, and M. Weitz, "Directed Transport of Atoms in a Hamiltonian Quantum Ratchet", *Science*, **326**, 1241 (2009).
- [48] T. Pfau, C. Kurtsiefer, C. S. Adams, M. Sigel, and J. Mlynek, "Magneto-optical beam splitter for atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **71**, 3427 (1993).
- [49] C. Mennerat-Robilliard, D. Lucas, S. Guibal, J. Tabosa, C. Jurczak, J.-Y. Courtois, and G. Grynberg, "Ratchet for Cold Rubidium Atoms: The Asymmetric Optical Lattice", *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 851 (1999).
- [50] G. Ritt, C. Geckeler, T. Salger, G. Cennini, and M. Weitz, "Fourier synthesis of optical potentials for atomic quantum gases", *Phys. Rev. A*, **74**, 063622 (2006).
- [51] S. Bose, "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Zeitschrift für Physik*, **26**, 178 (1925).
- [52] A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss.*, **3**, 18 (1925).
- [53] W. Ketterle, D. Durfee, and D. Stamper-Kurn, "Making, probing and understanding Bose-Einstein condensates", in M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, "Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases", Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL, IOS Press (1999).
- [54] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, "Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science*, **269**, 198 (1995).
- [55] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, "Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969 (1995).
- [56] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, "Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 1687 (1995).
- [57] D. G. Fried, T. C. Killian, L. Willmann, D. Landhuis, S. C. Moss, D. Kleppner, and T. J. Greytak, "Bose-Einstein Condensation of Atomic Hydrogen", *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3811 (1998).
- [58] J. R. Ensher, D. S. Jin, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, "Bose-Einstein Condensation in a Dilute Gas: Measurement of Energy and Ground-State Occupation", *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 4984 (1996).

- [59] J. Dalibard, "Collisional dynamics of ultra-cold atomic gases", in M. Inguscio, S. Stringari, and C. Wieman, editors, "Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases", Proceedings of the International School of Physics Enrico Fermi, Course CXL, IOS Press (1998).
- [60] K. Huang, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, 2nd edition (1988).
- [61] N. Bogoliubov, "On the theory of superfluidity", *Journal of Physics U.S.S.R.*, **11**, 23 (1947).
- [62] O. Penrose and L. Onsager, "Bose-Einstein Condensation and Liquid Helium", *Phys. Rev.*, **104**, 576 (1956).
- [63] C. N. Yang, "Concept of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors", *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 694 (1962).
- [64] F. Dalfovo, S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, "Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases", *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463 (1999).
- [65] W. Bao, D. Jaksch, and P. A. Markowich, "Numerical solution of the Gross-Pitaevskii equation for Bose-Einstein condensation", *Journal of Computational Physics*, **187**, 318 (2003).
- [66] G. Cennini, *Field-Insensitive Bose-Einstein Condensates and an All-Optical Atom Laser*, Ph.D. thesis, Eberhard Karls Universität Tübingen (2004).
- [67] F. Dalfovo, L. Pitaevskii, and S. Stringari, "Order parameter at the boundary of a trapped Bose gas", *Phys. Rev. A*, **54**, 4213 (1996).
- [68] A. J. Leggett, "Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts", *Rev. Mod. Phys.*, **73**, 307 (2001).
- [69] E. L. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu, and D. E. Pritchard, "Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure", *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 2631 (1987).
- [70] A. Ashkin, "Trapping of Atoms by Resonance Radiation Pressure", *Phys. Rev. Lett.*, **40**, 729 (1978).
- [71] T. Hänsch and A. Schawlow, "Cooling of gases by laser radiation", *Optics Communications*, **13**, 68 (1975).
- [72] H. J. Metcalf and P. van der Straten, *Laser Cooling and Trapping*, Springer, 1st edition (1999).
- [73] G. Ritt, *Fourier-Synthese von asymmetrischen optischen Potentialen für Atome*, Ph.D. thesis, Eberhard Karls Universität Tübingen (2006).
- [74] L. Ricci, M. Weidemüller, T. Esslinger, A. Hemmerich, C. Zimmermann, V. Vuletic, W. König, and T. W. Hänsch, "A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics", *Optics Communications*, **117**, 541 (1995).
- [75] W. Demtröder, *Laser Spectroscopy*, Springer, 3rd edition (2003).
- [76] A. Schenzle, R. G. DeVoe, and R. G. Brewer, "Phase-modulation laser spectroscopy", *Phys. Rev. A*, **25**, 2606 (1982).

- [77] J. M. Supplee, E. A. Whittaker, and W. Lenth, "Theoretical description of frequency modulation and wavelength modulation spectroscopy", *Appl. Opt.*, **33**, 6294 (1994).
- [78] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, and C. Wieman, "Very cold trapped atoms in a vapor cell", *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 1571 (1990).
- [79] D. W. Sesko, T. G. Walker, and C. E. Wieman, "Behavior of neutral atoms in a spontaneous force trap", *J. Opt. Soc. Am. B*, **8**, 946 (1991).
- [80] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin, and J. Dalibard, "Phase-space density in the magneto-optical trap", *Phys. Rev. A*, **52**, 1423 (1995).
- [81] W. Ketterle, K. B. Davis, M. A. Joffe, A. Martin, and D. E. Pritchard, "High densities of cold atoms in a dark spontaneous-force optical trap", *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 2253 (1993).
- [82] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler, and M. Weitz, "All-Optical Realization of an Atom Laser", *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 240408 (2003).
- [83] A. Khadjavi, A. Lurio, and W. Happer, "Stark Effect in the Excited States of Rb, Cs, Cd, and Hg", *Phys. Rev.*, **167**, 128 (1968).
- [84] R. Grimm, M. Weidemüller, and Y. B. Ovchinnikov, "Optical dipole traps for neutral atoms", *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **42**, 95 (2000).
- [85] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons, 3rd edition (1999).
- [86] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, "All-optical Bose-Einstein condensation using a compressible crossed dipole trap", *Phys. Rev. A*, **71**, 011602 (2005).
- [87] J. Plumhof, *Bose-Einstein-Kondensation von Rubidiumatomen in variablen optischen Gittern*, Master's thesis, Rheinische Friedrich-Willhelms-Universität Bonn (2008).
- [88] G. Cennini, G. Ritt, C. Geckeler, and M. Weitz, "Bose-Einstein condensation in a CO₂-laser optical dipole trap", *Appl. Phys. B*, **77**, 773 (2003).
- [89] H. F. Hess, "Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen", *Phys. Rev. B*, **34**, 3476 (1986).
- [90] C. S. Adams, H. J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, and S. Chu, "Evaporative Cooling in a Crossed Dipole Trap", *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 3577 (1995).
- [91] K. M. O'Hara, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, "Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps", *Phys. Rev. A*, **64**, 051403 (2001).
- [92] W. Ketterle and N. J. van Druten, "Evaporative Cooling of Trapped Atoms", *Adv. At. Mol. Opt. Phys.*, **37**, 181 (1996).
- [93] K. B. Davis, M.-O. Mewes, and W. Ketterle, "An analytical model for evaporative cooling of atoms", *Appl. Phys. B*, **60**, 155 (1995).

- [94] C. Salomon, J. Dalibard, A. Aspect, H. Metcalf, and C. Cohen-Tannoudji, "Channeling atoms in a laser standing wave", *Phys. Rev. Lett.*, **59**, 1659 (1987).
- [95] P. S. Jessen and I. H. Deutsch, "Optical Lattices", *Adv. At., Mol., Opt. Phys.*, **37** (1996).
- [96] M. Weitz, G. Cennini, G. Ritt, and C. Geckeler, "Optical multiphoton lattices", *Phys. Rev. A*, **70**, 043414 (2004).
- [97] P. R. Berman, B. Dubetsky, and J. L. Cohen, "High-resolution amplitude and phase gratings in atom optics", *Phys. Rev. A*, **58**, 4801 (1998).
- [98] B. Dubetsky and P. R. Berman, " $\lambda/4, \lambda/8$, and Higher Order Atom Gratings Via Raman Transitions", *Laser Physics*, **12**, 1161 (2002).
- [99] G. H. Wannier, "Wave Functions and Effective Hamiltonian for Bloch Electrons in an Electric Field", *Phys. Rev.*, **117**, 432 (1960).
- [100] F. Bloch, "Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern", *Z. Physik*, **52**, 555 (1928).
- [101] H. Jones and C. Zener, "A general proof of certain fundamental equations in the theory of metallic conduction", *Proc. R. Soc. London A*, **144**, 101 (1934).
- [102] N. D. M. Neil W. Ashcroft, *Solid State Physics*, Thomson Learning (1976).
- [103] H. G. Roskos, C. Waschke, K. Victor, K. Kö, and H. Kurz, "Bloch Oscillations in Semiconductor Superlattices", *Japanese Journal of Applied Physics*, **34**, 1370 (1995).
- [104] J. Feldmann, K. Leo, J. Shah, D. A. B. Miller, J. E. Cunningham, T. Meier, G. von Plessen, A. Schulze, P. Thomas, and S. Schmitt-Rink, "Optical investigation of Bloch oscillations in a semiconductor superlattice", *Phys. Rev. B*, **46**, 7252 (1992).
- [105] K. Leo, P. H. Bolivar, F. Brüggemann, R. Schwedler, and K. Köhler, "Observation of Bloch oscillations in a semiconductor superlattice", *Solid State Communications*, **84**, 943 (1992).
- [106] C. Waschke, H. G. Roskos, R. Schwedler, K. Leo, H. Kurz, and K. Köhler, "Coherent submillimeter-wave emission from Bloch oscillations in a semiconductor superlattice", *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 3319 (1993).
- [107] T. Dekorsy, R. Ott, H. Kurz, and K. Köhler, "Bloch oscillations at room temperature", *Phys. Rev. B*, **51**, 17275 (1995).
- [108] G. Ferrari, N. Poli, F. Sorrentino, and G. M. Tino, "Long-Lived Bloch Oscillations with Bosonic Sr Atoms and Application to Gravity Measurement at the Micrometer Scale", *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 060402 (2006).
- [109] P. Cladé, E. de Mirandes, M. Cadoret, S. Guellati-Khélifa, C. Schwob, F. m. c. Nez, L. Julien, and F. m. c. Biraben, "Determination of the Fine Structure Constant Based on Bloch Oscillations of Ultracold Atoms in a Vertical Optical Lattice", *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 033001 (2006).

- [110] G. Roati, E. de Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio, "Atom Interferometry with Trapped Fermi Gases", *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 230402 (2004).
- [111] B. P. Anderson and M. A. Kasevich, "Macroscopic Quantum Interference from Atomic Tunnel Arrays", *Science*, **282**, 1686 (1998).
- [112] T. Salger, G. Ritt, C. Geckeler, S. Kling, and M. Weitz, "Bloch oscillations of a Bose-Einstein condensate in a subwavelength optical lattice", *Phys. Rev. A*, **79**, 011605 (2009).
- [113] C. Zener, "Non-adiabatic crossing of energy levels", *Proc. R. Soc. London A*, **137**, 696 (1932).
- [114] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, M. C. Fischer, K. W. Madison, P. R. Morrow, Q. Niu, B. Sundaram, and M. G. Raizen, "Experimental evidence for non-exponential decay in quantum tunnelling", *Nature*, **387**, 575 (1997).
- [115] S. R. Wilkinson, C. F. Bharucha, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen, "Observation of Atomic Wannier-Stark Ladders in an Accelerating Optical Potential", *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 4512 (1996).
- [116] T. Salger, C. Geckeler, S. Kling, and M. Weitz, "Atomic Landau-Zener Tunneling in Fourier-Synthesized Optical Lattices", *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 190405 (2007).
- [117] T. Fließbach, *Quantenmechanik. Lehrbuch zur Theoretischen Physik 3*, Spektrum Akademischer Verlag, 4th edition (2005).
- [118] M. C. Fischer, K. W. Madison, Q. Niu, and M. G. Raizen, "Observation of Rabi oscillations between Bloch bands in an optical potential", *Phys. Rev. A*, **58**, R2648 (1998).
- [119] M. Kozuma, L. Deng, E. W. Hagley, J. Wen, R. Lutwak, K. Helmerson, S. L. Rolston, and W. D. Phillips, "Coherent Splitting of Bose-Einstein Condensed Atoms with Optically Induced Bragg Diffraction", *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 871 (1999).
- [120] O. Morsch, J. H. Müller, M. Cristiani, D. Ciampini, and E. Arimondo, "Bloch Oscillations and Mean-Field Effects of Bose-Einstein Condensates in 1D Optical Lattices", *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 140402 (2001).
- [121] W. Zwerger, "Mott-Hubbard transition of cold atoms in optical lattices", *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, **5**, S9 (2003).
- [122] J. H. Denschlag, J. Simsarian, H. Häffner, C. McKenzie, A. Browaeys, C. D., C. Helmerson, S. Rolston, and W. Phillips, "A Bose-Einstein condensate in an optical lattice", *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, **35**, 3095 (2002).
- [123] H. Schanz, T. Dittrich, and R. Ketzmerick, "Directed chaotic transport in Hamiltonian ratchets", *Phys. Rev. E*, **71**, 026228 (2005).

- [124] S. Flach, O. Yevtushenko, and Y. Zolotaryuk, "Directed Current due to Broken Time-Space Symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2358 (2000).
- [125] F. Jülicher, A. Ajdari, and J. Prost, "Modeling molecular motors", *Rev. Mod. Phys.*, **69**, 1269 (1997).
- [126] L. R. Huang, E. C. Cox, R. H. Austin, and J. C. Sturm, "Tilted Brownian Ratchet for DNA Analysis", *Analytical Chemistry*, **75**, 6963 (2003).
- [127] P. Hänggi and F. Marchesoni, "Artificial Brownian motors: Controlling transport on the nanoscale", *Rev. Mod. Phys.*, **81**, 387 (2009).
- [128] S. Denisov, L. Morales-Molina, S. Flach, and P. Hänggi, "Periodically driven quantum ratchets: Symmetries and resonances", *Phys. Rev. A*, **75**, 063424 (2007).
- [129] S. Denisov, S. Flach, A. A. Ovchinnikov, O. Yevtushenko, and Y. Zolotaryuk, "Broken space-time symmetries and mechanisms of rectification of ac fields by nonlinear (non)adiabatic response", *Phys. Rev. E*, **66**, 041104 (2002).
- [130] S. Flach, O. Yevtushenko, and Y. Zolotaryuk, "Directed Current due to Broken Time-Space Symmetry", *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2358 (2000).
- [131] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (2001).
- [132] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press (2002).
- [133] C. E. Creffield and F. Sols, "Coherent Ratchets in Driven Bose-Einstein Condensates", *Phys. Rev. Lett.*, **103**, 200601 (2009).
- [134] G. Benenti, G. Casati, S. Denisov, S. Flach, P. Hänggi, B. Li, and D. Poletti, "Comment on "Coherent Ratchets in Driven Bose-Einstein Condensates"", *arXiv:0912.3667* (2009).
- [135] G. Floquet, "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques", *Ann. École Norm. Sup.*, **12**, 47 (1883).
- [136] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer-Verlag (1999).
- [137] P. R. Berman, *Atom Interferometry*, Academic Press (1996).
- [138] M. K. Oberthaler, R. M. Godun, M. B. d'Arcy, G. S. Summy, and K. Burnett, "Observation of Quantum Accelerator Modes", *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4447 (1999).
- [139] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaram, and M. G. Raizen, "Atom Optics Realization of the Quantum δ -Kicked Rotor", *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4598 (1995).
- [140] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.*, **22**, 264 (1940).
- [141] K. Takahashi and N. Saitô, "Chaos and Husimi Distribution Function in Quantum Mechanics", *Phys. Rev. Lett.*, **55**, 645 (1985).
- [142] G. D. Birkhoff, "Proof of the Ergodic Theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **17**, 656 (1931).

- [143] G. D. Birkhoff, "What is the Ergodic Theorem?", *The American Mathematical Monthly*, **49**, 222 (1942).
- [144] T. Hecking, *Gerichteter Transport ultrakalter Atome in Hamiltonschen Quantenrattchen*, Master's thesis, Rheinische Friedrich-Willhelms-Universität Bonn (2009).
- [145] M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. M. Kurn, D. S. Durfee, and W. Ketterle, "Bose-Einstein Condensation in a Tightly Confining dc Magnetic Trap", *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 416 (1996).
- [146] U. Ernst, J. Schuster, F. Schreck, A. Marte, A. Kuhn, and G. Rempe, "Free expansion of a Bose-Einstein condensate from an Ioffe-Pritchard magnetic trap", *Appl. Phys. B*, **67**, 719 (1998).
- [147] K. Moler, D. S. Weiss, M. Kasevich, and S. Chu, "Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions", *Phys. Rev. A*, **45**, 342 (1992).
- [148] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, "Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions", *Phys. Rev. Lett.*, **66**, 2297 (1991).
- [149] S. Denisov, S. Flach, and P. Hänggi, "Stationary Hamiltonian transport with dc bias", *Europhys. Lett.*, **74**, 588 (2006).
- [150] A. Ros, R. Eichhorn, J. Regtmeier, T. T. Duong, P. Reimann, and D. Anselmetti, "Brownian motion: Absolute negative particle mobility", *Nature*, **436**, 928 (2005).
- [151] L. Machura, M. Kostur, P. Talkner, J. Łuczka, and P. Hänggi, "Absolute Negative Mobility Induced by Thermal Equilibrium Fluctuations", *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 040601 (2007).
- [152] B. Cleuren and C. Van den Broeck, "Random walks with absolute negative mobility", *Phys. Rev. E*, **65**, 030101 (2002).
- [153] J. Han and H. G. Craighead, "Separation of Long DNA Molecules in a Microfabricated Entropic Trap Array", *Science*, **288**, 1026 (2000).
- [154] A. Zenesini, H. Lignier, D. Ciampini, O. Morsch, and E. Arimondo, "Coherent Control of Dressed Matter Waves", *Phys. Rev. Lett.*, **102**, 100403 (2009).
- [155] A. Eckardt, C. Weiss, and M. Holthaus, "Superfluid-Insulator Transition in a Periodically Driven Optical Lattice", *Phys. Rev. Lett.*, **95**, 260404 (2005).
- [156] M. Latka, P. Grigolini, and B. J. West, "Chaos-induced avoided level crossing and tunneling", *Phys. Rev. A*, **50**, 1071 (1994).
- [157] R. Graham and J. Keymer, "Level repulsion in power spectra of chaotic Josephson junctions", *Phys. Rev. A*, **44**, 6281 (1991).