

Entwicklung eines Kalman-Filters zur Bestimmung
kurzzeitiger Variationen des Erdschwerefeldes
aus Daten der Satellitenmission GRACE

Inaugural-Dissertation zur
Erlangung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)
der Hohen Landwirtschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität
zu Bonn

vorgelegt am 06.05.2011 von

Dipl.-Ing. Enrico Kurtenbach
aus Bonn

Referent: Prof. Dr.-Ing. Jürgen Kusche

Korreferent: Prof. Dr. techn. Wolf-Dieter Schuh

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Nico Sneeuw

Tag der mündlichen Prüfung: 12.07.2011

Publikation: Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
<http://hss.ulb.uni-bonn.de/fakultaet/landw/2011.htm> elektronisch publiziert.

Erscheinungsjahr: 2011

Entwicklung eines Kalman-Filters zur Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Erdschwerefeldes aus Daten der Satellitenmission GRACE

Zusammenfassung

Eine wichtige Beobachtungsgröße bei der Erforschung des Erdsystems stellt das Gravitationsfeld der Erde dar, dessen zeitliche Variationen mit der Satellitenmission GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) erstmals mit globaler Überdeckung beobachtbar sind. Die vor Missionsbeginn anvisierte Genauigkeit konnte jedoch bisher nicht erreicht werden, was unter anderem an der unzureichenden Modellierung der Zeitvariationen durch monatliche Mittelwerte liegt. In der vorliegenden Arbeit wird ein Ansatz vorgestellt, der die Ableitung täglicher GRACE-Schwerefeldlösungen erlaubt, mit dem Ziel, die kurzzeitigen Variationen des Erdschwerefeldes zu erfassen. Diese Zeitreihe kann zum einen das Verständnis der zugrundeliegenden geophysikalischen Prozesse verbessern, zum anderen dient sie auch direkt zur Verbesserung der üblicherweise verwendeten monatlichen Schwerefeldlösungen.

Die Erhöhung der zeitlichen Auflösung führt, bedingt durch das GRACE-Messprinzip, zu einer Verringerung der räumlichen Auflösung, so dass zusätzliche Informationen eingeführt werden müssen. Dies geschieht in dieser Arbeit durch Einführung räumlicher und zeitlicher Korrelationen des zu erwartenden Schwerefeldsignals, welche aus vorhandenen geophysikalischen Modellen extrahiert werden. Die Zusammenführung der GRACE-Beobachtungen und der Korrelationsstruktur erfolgt dann im Rahmen eines Kalman-Filters.

In einer Simulationsstudie werden die Möglichkeiten des entwickelten Ansatzes untersucht und später auf die Auswertung von Echtdaten angewendet. Durch Vergleich mit Zeitreihen von GPS-Stationsbewegungen und Ozeanbodendruck-Rekorden wird gezeigt, dass die mit dem vorgestellten Kalman-Filter-Ansatz bestimmte GRACE-Schwerefeld-Zeitreihe ein geophysikalisch interpretierbares Signal enthält.

Diese Zeitreihe ist ferner geeignet, die zeitlichen Aliasing-Effekte, die eine über einen Monat gemittelte Schwerefeldlösung kontaminieren, zu verringern. Dadurch kann die Genauigkeit und räumliche Auflösung einer Monatslösung verbessert werden.

Development of a Kalman filter to derive short-term variations of the Earth's gravity field from GRACE data

Summary

The gravitational field and its temporal variations represent an important observable for the monitoring of the Earth's system. The satellite mission GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) is, for the first time, able to measure gravity field variations with homogeneous global coverage. Nevertheless, the predicted GRACE accuracy has not been reached yet, partly due to the insufficient representation of the temporal variations in terms of monthly mean fields. In this thesis, an approach is presented which allows the calculation of daily GRACE solutions with the goal of modeling short-term gravity field variations. This time series can on the one hand be used to improve the knowledge of the underlying geophysical processes. On the other hand the daily GRACE solutions can also be used to improve the monthly mean fields.

Increasing the temporal resolution is accompanied by a loss of accuracy due to insufficient data coverage. Therefore, additional information in terms of temporal and spatial correlations of the expected gravity signal is introduced into the analysis process. The combination of the GRACE observations and the correlation patterns is then performed within a Kalman filter framework.

In a simulation study, the performance of the approach at hand is investigated and, in a second step, applied to real GRACE L1B data. Comparisons to independent data sets, i.e. vertical displacements of GPS stations and ocean bottom pressure time series, reveal that the daily GRACE time series contains geophysically interpretable signal.

Furthermore, the daily GRACE time series can be used to significantly reduce the effects of temporal aliasing in the processing of monthly mean gravity field solutions.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	1
1.1	Einführung	1
1.2	Motivation und Problembeschreibung	2
1.2.1	Die Satellitenmission GRACE	2
1.2.2	Aliasing-Problem	3
1.2.3	Verbesserungsvorschläge	4
1.3	Ziel der Arbeit und Gliederung	5
2	Physikalische Grundlagen und Modellbildung	7
2.1	Grundlagen der Potentialtheorie	7
2.1.1	Darstellung des zeitvariablen Gravitationsfeldes	7
2.1.2	Funktionale des Gravitationsfeldes	9
2.2	Quellen für Zeitvariationen des Erdschwerefeldes	11
2.2.1	Atmosphäre	12
2.2.2	Ozean	22
2.2.3	Kontinentaler Wasserkreislauf	26
2.2.4	In dieser Arbeit verwendete Modelldaten	31
3	Analyse von GRACE L1B-Daten	33
3.1	Beobachtungsmodell	33
3.1.1	Kleinste-Quadrate-Ausgleichung im Gauss-Markoff-Modell	33
3.1.2	Nutzung der mit GPS bestimmten Satellitenbahnen	35
3.1.3	Nutzung der K-Band-Beobachtungen	37
3.2	Prozessmodell	40
3.2.1	Modellvereinfachungen	40
3.2.2	Stochastische Prozessmodellierung	42
3.2.3	Empirische Modellbestimmung	44
3.3	Zusammenführung von Prozess- und Beobachtungsmodell	45
3.3.1	Kalman-Filter	46
3.3.2	Anteil der GRACE-Beobachtungen am geschätzten Systemzustand	49
3.3.3	Glättungsalgorithmen	50
3.4	Vergleich mit dem Mascon-Ansatz	51
3.5	Zusammenfassung der GRACE-Datenprozessierung	54

4	Simulationsstudie	57
4.1	Konfiguration	58
4.1.1	Beobachtungsmodell	58
4.1.2	Prozessmodell	60
4.2	Untersuchung des Prozessmodells (Simulierter Zufallsprozess)	62
4.3	Untersuchung des GRACE-Kalman-Filters	64
4.3.1	Startwerte	64
4.3.2	Ergebnisse des Kalman-Filters	66
4.3.3	Verhalten bei fehlenden Beobachtungen	73
4.3.4	Verbesserung durch Glättung	74
4.3.5	Verbesserungspotential durch Anpassung des Prozessmodells	74
4.3.6	SST-Residuen	77
4.3.7	GRACE-Beitrag zum Korrekturschritt des Kalman-Filters	78
4.4	Interpretation der Ergebnisse	79
5	Auswertung der GRACE-Daten	81
5.1	Beobachtungsmodell	81
5.2	Prozessmodell	83
5.3	Validierung der täglichen Schwerefeldzeitreihe mit unabhängigen Datensätzen	84
5.3.1	GPS-Stationsbewegungen	84
5.3.2	Variationen des Ozeanbodendrucks	90
5.4	Verbesserung der monatlichen Schwerefeldlösungen	93
6	Zusammenfassung und Ausblick	97
A	Anhang	99
A.1	Eigenschaften der Prozessdynamikmatrix	99
	Abbildungsverzeichnis	104
	Tabellenverzeichnis	106
	Abkürzungsverzeichnis	107
	Literaturverzeichnis	108

1. Einleitung und Motivation

1.1 Einführung

Die Kenntnis der Dynamik des Systems Erde hat in den letzten Jahren an Bedeutung gewonnen. Nicht zuletzt der IPCC-Report aus dem Jahr 2007 betont dies und mahnt zusätzliche Anstrengungen bei der Erforschung des Systems Erde an. Nur auf Grundlage einer konsistenten und genauen Modellierung des Erdsystems lassen sich zuverlässige Prognosen über die weitere Entwicklung des Weltklimas treffen (IPCC-Report, 2007).

Eine Beobachtungsgröße des Erdsystems ist das Gravitationsfeld, aus dessen zeitlicher Variabilität Rückschlüsse auf Massenverteilungen auf und innerhalb der Erde möglich sind. Diese Massenverlagerungen sind in hohem Masse mit dem globalen Wasserkreislauf assoziiert, der wiederum Forschungsgegenstand einer Vielzahl unterschiedlicher Geowissenschaften ist, u. a. die Subsysteme Meteorologie, Ozeanographie, Hydrologie oder Glaziologie. Das Gravitationsfeld stellt dabei eine integrale Beobachtungsgröße der Massenverlagerungen aller Subsysteme dar. Die Beobachtung der zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes¹ ist mit der Satellitenmission GRACE (*Gravity Recovery And Climate Experiment*) erstmals mit globaler Überdeckung möglich und bildet eine wichtige Grundlage zur Verbesserung der Modellierung in einer Vielzahl geowissenschaftlicher Disziplinen.

Hierzu gehören Anwendungen in der Hydrologie, beispielsweise in der Kalibrierung globaler hydrologischer Modelle wie sie bei Werth und Güntner (2010) oder Zaitchik et al. (2008) zu finden sind. Aber auch für konkrete hydrologische Aufgabenstellungen bei der Überwachung des Erdsystems sind GRACE-Schwerefelder nutzbar, wie Rodell et al. (2009) am Beispiel der Bestimmung von Grundwasserentnahmen in Indien eindrucksvoll beweisen. Mit den Zeitreihen der GRACE-Schwerefelder lassen sich Eismassenverluste in der Antarktis (z. B. Chen et al., 2009), in Grönland (u. a. Schrama und Wouters, 2011; Khan et al., 2010) oder den Gletschern Alaskas (u. a. Luthcke et al., 2008) bestimmen, und auch in der Ozeanographie wächst die Bedeutung der GRACE-Schwerefeldreihen (u. a. Peralta-Ferriz und Morison, 2010; Boening et al., 2011; Song und Colberg, 2011)

Die Bestimmung von Schwerefeldlösungen aus Daten der Satellitenmission GRACE ist Gegenstand der Bemühungen einer Vielzahl unterschiedlicher Gruppen. Allen gemeinsam ist, dass die vor Beginn der GRACE-Mission anvisierte Genauigkeit, die sogenannte *baseline-Genauigkeit* (Kim, 2000), bisher nicht erreicht wurde. Ein Grund hierfür ist die Tatsache, dass die Genauigkeit der vorliegenden geophysikalischen Modelle, um die die eigentlichen GRACE-Beobachtungsgrößen vorab reduziert werden müssen, derzeit nicht ausreicht, um zeitliche Aliasing-Effekte zu vermeiden.

Die Bemühungen um Verbesserungen der GRACE-Schwerefeld-Prozessierung ist daher auch im neunten Jahr der GRACE-Mission Gegenstand intensiver Forschung. Diese Arbeit soll ihren Teil hierzu beitragen, indem sie ein Verfahren vorstellt, um zeitlich hochaufgelöste Schwerefelder aus GRACE-Beobachtungen zu bestimmen.

Durch Erhöhen der zeitlichen Auflösung können die Effekte zeitlichen Aliasings verringert werden. Die so generierte GRACE-Zeitreihe mit einer zeitlichen Auflösung von einem Tag ist derzeit Gegenstand weitergehender Untersuchungen. Bonin und Chambers (2011) zeigen eine gute Übereinstimmung mit Ozeanbodendruckdaten in höheren Breiten, die den Schluss zulassen, dass ein Informationsgewinn gegenüber entsprechenden Ozeanmodellen vorhanden ist. Eine sehr gute Übereinstimmung der täglichen GRACE-Zeitreihe mit Ozeanbodendruckdaten im Antarktischen Zirkumpolarstrom zeigen Bergmann et al. (2011).

Daneben können die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren bestimmten täglichen Schwerefeldlösungen auch verwendet werden, um die derzeit als Dealiasing-Produkt verwendeten geophysikalischen

¹Die Begriffe Gravitation (reine Massenanziehung) und Schwere (Summe aus Massenanziehung und Beitrag des durch die Erdrotation verursachten Zentrifugalpotentials) werden in dieser Arbeit synonym verwendet. Die jeweilige Bedeutung ergibt sich aus dem Zusammenhang. Wenn es nötig ist, wird an entsprechender Stelle explizit auf eine Unterscheidung hingewiesen.

Modelle direkt zu verbessern. Das so verbesserte Dealiasing-Produkt kann bei der Bestimmung monatlicher Schwerefeldlösungen genutzt werden und führt hier zu Verbesserungen, was an späterer Stelle noch thematisiert wird.

In diesem Kapitel wird zunächst die Satellitenmission GRACE kurz beschrieben. Anschließend wird das Aliasing-Problem näher erläutert, das einen großen Einfluss auf die Qualität der aus den GRACE-Daten bestimmten Schwerefeldlösungen hat, bevor anschließend einige Verbesserungsvorschläge zur Verringerung der Aliasing-Effekte vorgestellt werden. Abschließend wird das Ziel dieser Arbeit formuliert und der Weg dorthin anhand der Gliederung dieser Arbeit beschrieben.

1.2 Motivation und Problembeschreibung

1.2.1 Die Satellitenmission GRACE

Seit 2002 beobachtet die Zwillings-Satellitenmission GRACE das Schwerefeld der Erde und dessen zeitliche Variationen (Tapley et al., 2004). GRACE ist ein Gemeinschaftsprojekt von DLR (*Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt*) und NASA (*National Aeronautics and Space Administration*). Die Missionsdauer war ursprünglich auf fünf Jahre ausgelegt, mittlerweile fliegt die Mission im neunten Jahr und optimistische Prognosen gehen von einer Lebensdauer bis 2013 aus (Bettadpur et al., 2011).

Bei der Mission GRACE fliegen zwei identische Satelliten im Abstand von ungefähr 220 Kilometern auf einer nahezu kreisförmigen Bahn hintereinander her. Durch die polnahe Bahn mit einer Inklination von $i = 89^\circ$ wird dabei eine gleichmäßige Datendichte auf der gesamten Erde gewährleistet.

Beide Satelliten tragen ein Mikrowellen-Distanzmesssystem (K-Band (24 GHz) und Ka-Band (32 GHz)) an Bord, mit dem die Abstandsänderungen beider Satelliten hochgenau bestimmt werden. Das Messprinzip ist als *low-low satellite to satellite tracking (low-low SST)* bekannt. Die Bahn der beiden Satelliten wird durch das Gravitationsfeld der Erde beeinflusst. Fliegt einer der beiden Satelliten über ein Gebiet einer Massenanomalie, so wird er stärker angezogen als der zweite Satellit und der Abstand der beiden ändert sich. So können auch räumlich hochfrequente Änderungen des Erdschwerefeldes bestimmt werden.

Die Bahn der Satelliten wird zusätzlich durch nicht-gravitative Kräfte an der Oberfläche der Satelliten gestört, die durch einen Beschleunigungssensor (Akzelerometer) an Bord der Satelliten erfasst werden. Zu diesen Störkräften gehören beispielsweise Atmosphärenreibung, die Erdalbedo oder der Strahlungsdruck der Sonne.

Neben der relativen Entfernungsmessung mit dem K-Band-Messsystem trägt jeder Satellit noch einen GPS-Empfänger an Bord, der eine präzise Bestimmung der Bahn des Satelliten ermöglicht. Dieses Messprinzip ist als *high-low satellite to satellite tracking (high-low SST)* bekannt und ermöglicht durch die Analyse der Bahnstörungen für jeden Satelliten die Bestimmung der langwelligen Strukturen des Erdschwerefeldes.

Neben der Beobachtung des statischen Schwerefeldes als längjährigem Mittel liefert GRACE erstmals auch globale Informationen über den zeitabhängigen Anteil des Schwerefeldes. Diese werden üblicherweise als Zeitreihe monatlicher Mittelwerte (*Monatslösungen*) zur Verfügung gestellt und sind Bestandteil der von den drei offiziellen Auswertezentren des *Science Data Systems* (SDS), das ein Verbund aus CSR (*Center for Space Research, University of Texas*), JPL (*Jet Propulsion Laboratory*) und GFZ (Geoforschungszentrum Potsdam) ist, zur Verfügung gestellten GRACE-Schwerefeldprodukte.

Die verschiedenen Produkte können nach dem Grad ihrer Vorverarbeitung in verschiedene Stufen (*level*) eingeteilt werden:

- L1A-Daten: Unverarbeitete Beobachtungen, wie sie direkt von den beiden GRACE-Satelliten heruntergeladen werden.

- L1B-Daten: Nach Transformation der L1A-Daten in ein einheitliches Satelliten-Bezugssystem, Kalibrierung und Konvertierung in entsprechende physikalische Einheiten entstehen L1B-Daten, die zusammen mit Zusatzprodukten wie vorläufigen Bahndaten als Grundlage für die Bestimmung einer Schwerefeldlösung aus den GRACE-Beobachtungen dienen. Sie sind die eigentlichen Beobachtungsgrößen in dieser Arbeit.
- L2-Produkte beinhalten aus L1B-Daten prozessierte Schwerefeldlösungen auf der Ebene von Kugelfunktionskoeffizienten oder anderen Basisfunktionen.

Daneben gibt es noch beispielsweise durch Filterung weiterverarbeitete L2-Lösungen oder Funktionswerte (zum Beispiel Geoidhöhen, äquivalente Wasserhöhen) der Schwerefeldreihe auf einem Gitter, die oft auch L3-Produkte genannt werden.

Neben den drei offiziellen Auswertezentren des SDS bestimmen auch viele andere Gruppen Schwerefeldlösungen aus Daten der GRACE-Mission (Mayer-Gürr et al., 2010b; Liu et al., 2010; Luthcke et al., 2006; Lemoine et al., 2007, u. a.). Diese beinhalten in der Regel ein statisches Schwerefeld und monatliche Lösungen, die die zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes widerspiegeln. Neben der weit verbreiteten Darstellung durch eine Reihe nach Kugelfunktionen haben sich auch andere, regional orientierte Ansätze etabliert. Hier seien beispielhaft die Verwendung radialer Basisfunktionen zur Bestimmung regionaler Verfeinerungen der statischen, auf Kugelfunktionskoeffizienten basierenden Schwerefeldlösung (Eicker, 2008) oder der sogenannte *Mascon-Ansatz* (zuletzt in Rowlands et al., 2010) erwähnt. Letzterer nutzt, genau wie der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz, zeitliche Korrelationen zwischen den zu bestimmenden Schwerefeldparametern als Lösungsansatz zur Reduktion von Einflüssen zeitlichen Aliasing, von der alle GRACE-Analyseverfahren betroffen sind. Daher soll dies im folgenden Abschnitt kurz erläutert werden.

1.2.2 Aliasing-Problem

Die zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes werden üblicherweise repräsentiert durch monatliche GRACE-Schwerefeldlösungen (im Folgenden auch als *Monatslösung* bezeichnet). Implizit werden dabei zeitliche Variationen innerhalb dieses Monats als zeitlich konstant modelliert, so dass die Monatslösung den zeitlichen Mittelwert darstellt. In der Realität ist diese Annahme natürlich nicht erfüllt, da auch zeitlich deutlich hochfrequenter Phänomene zu Massenverlagerungen und damit zu Schwereänderungen führen. Einige von ihnen werden in Abschnitt 2.2 erläutert.

Zur Bestimmung einer Schwerefeldlösung aus den GRACE-Beobachtungen muss eine genügend hohe Dichte der Daten beider Satelliten erreicht werden. Erst mit einer gleichmäßigen Überdeckung der Erdoberfläche ist eine stabile Bestimmung einer Schwerefeldlösung möglich. Dies ist üblicherweise mit einem Monat GRACE-Beobachtungen möglich. Alle innerhalb dieses Monats stattfindenden Änderungen des Schwerefeldes werden dabei unzureichend abgetastet und führen damit zu zeitlichen Aliasing-Effekten. Zur Vermeidung dieser Aliasing-Fehler werden alle bekannten hochfrequenten Variationen innerhalb eines Monats vorab durch Nutzung vorhandener geophysikalischer Hintergrundmodelle von den Beobachtungen reduziert. Hierzu gehören beispielsweise die Effekte der Erd- und Ozeangezeiten, aber auch hochfrequente Massenvariationen der Atmosphäre und des Ozeans, die im AOD1B-Produkt (Atmosphären- und Ozean-Dealiasing für GRACE L1B Daten) zusammengefasst sind. Nähere Ausführungen zu den verwendeten Hintergrundmodellen finden sich in Abschnitt 5.1.

Sind diese Modelle nun nicht fehlerfrei oder berücksichtigen nicht alle kurzzeitigen Variationen, so ist die implizite Modellannahme eines konstanten Mittelwerts innerhalb eines Monats verletzt. Dies führt zu den in einer GRACE-Lösung üblicherweise sichtbaren Streifenstrukturen, die nicht physikalisch motiviert sind, sondern sich als Aliasing-Fehler interpretieren lassen.

Welchen Effekt eine solch inadäquate Modellierung des Zeitverhaltens auf die Bestimmung einer GRACE-Monatslösung hat, zeigen Mayer-Gürr et al. (2010a) anhand eines Simulationsbeispiels. Hier wurde ein Monat GRACE-Beobachtungen simuliert, wobei zunächst keine zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes vorliegen. Abbildung 1.1(a) zeigt die Differenz der entsprechenden Schwerefeldlösung bezogen auf das simulierte Referenzsignal. Es zeigt sich, dass sich die Abweichungen im Bereich der vor Beginn der GRACE-Mission anvisierten Genauigkeit liegen (Kim, 2000).

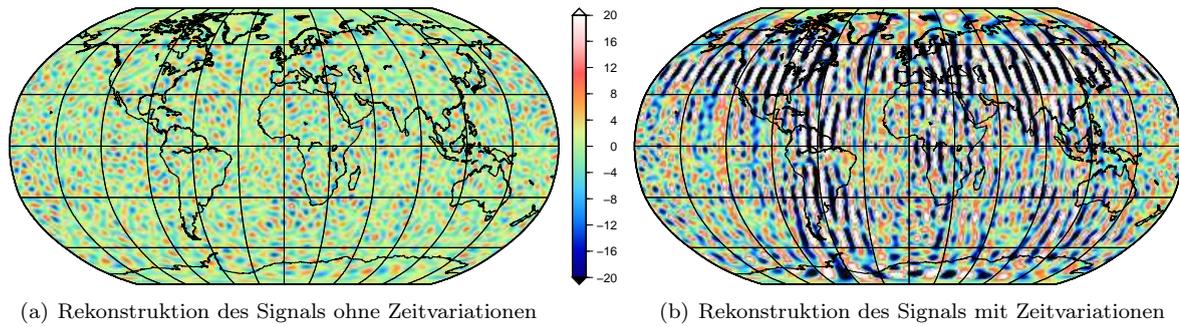


Abbildung 1.1: Fehler einer simulierten GRACE-Monatslösung bis Grad und Ordnung 60 ohne (links) und mit (rechts) zeitlichen Variationen des Referenzsignals (aus Mayer-Gürr et al., 2010a) in Zentimetern äquivalenter Wasserhöhe.

Ein ganz anderes Bild zeigt sich in Abbildung 1.1(b). Für diesen zweiten Fall wurden zeitliche Variationen innerhalb eines Monats in Form eines langperiodischen Signals simuliert, namentlich der räumlich gefilterte Jahresgang einer älteren GRACE-Lösung, und mit GRACE beobachtet. Es zeigt sich, dass selbst ein sich zeitlich relativ langsam änderndes Signal bei unzureichender Modellierung dieses Zeitverhaltens einen gravierenden Effekt auf die zu bestimmende Monatslösung hat. Es zeigen sich deutlich die für GRACE-Lösungen allgemein bekannten Streifenstrukturen.

Mayer-Gürr et al. (2010a) kommen zu dem Schluss, dass die übliche Parametrisierung durch monatliche Mittelwerte keine geeignete Repräsentation der zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes ist.

1.2.3 Verbesserungsvorschläge

Um das Aliasing-Problem bei der Bestimmung zeitvariabler Schwerefelder aus Daten der GRACE-Satellitenmission zu verringern, bieten sich im Wesentlichen zwei Verfahren an: zum einen die Einführung kontinuierlicher Funktionen im Zeitbereich, zum anderen durch Erhöhen der Abtastrate.

Kontinuierliche Funktionen im Zeitbereich. Ein Beispiel für ein GRACE-Schwerefeldmodell mit Repräsentation des zeitvariablen Anteils über kontinuierliche Funktionen im Zeitbereich ist das Modell ITG-Grace03 (Mayer-Gürr et al., 2010b), wo die Zeitvariationen durch quadratische Splines parametrisiert werden. Ein Manko dieses Ansatzes ist sicherlich, dass sich nur geophysikalische Prozesse, die ein kontinuierliches Verhalten in der Zeit aufweisen, adäquat repräsentieren lassen (Mayer-Gürr et al., 2010a). Phänomene, die plötzliche Veränderungen hervorrufen, lassen sich auf diese Weise nicht geeignet darstellen. In diese Gruppe von Prozessen gehören beispielsweise Massenverlagerungen durch große Erdbeben, die mit GRACE beobachtbar sind. Zu erwähnen ist an dieser Stelle noch, dass die als Standardprodukt verfügbaren Monatsmittelwerte formal auch in dieser Gruppe gehören, wobei als zeitliche Basisfunktion stückweise konstante Funktionen mit der Basisfunktion $\Psi(t) = 1$ innerhalb des betrachteten Intervalls und $\Psi(t) = 0$ außerhalb des Intervalls verwendet werden.

Erhöhen der zeitlichen Auflösung. Eine weitere Möglichkeit, die Einflüsse zeitlichen Aliasings zu verringern ist die Erhöhung der Abtastrate. Dies bedeutet im Fall der GRACE-Datenprozessierung, dass zur Bestimmung einer Schwerefeldlösung nicht mehr ein Monat GRACE-Beobachtungen verwendet wird, sondern beispielsweise wie bei Lemoine et al. (2007) lediglich zehn Tage oder eine Woche Beobachtungen wie bei Flechtner et al. (2010).

Kurtenbach et al. (2009) erhöhen die zeitliche Auflösung weiter, indem sie tägliche Schwerefeldlösungen aus zwei Jahren GRACE-Beobachtungen bestimmen. Dies geht allerdings nicht mehr ohne die Einführung von Vorinformationen über das zeitliche Verhalten des Erdschwerefeldes. Diese wird hier durch das globale hydrologische Modell WGHM (Döll et al., 2003; Hunger und Döll, 2008) gegeben.

Einführen zeitlicher Korrelationen. Die Bestimmung einer Schwerefeldzeitreihe mit einer zeitlichen Auflösung von einem Tag gelingt nur durch die Einführung von Vorinformationen. Bei [Kurtenbach et al. \(2009\)](#) erfolgt dies durch die Annahme, dass sich die Schwerefelder zweier aufeinanderfolgender Tage wohl nur in geringem Maße unterscheiden werden. Hier wurde angenommen, dass beide Tage, bis auf eine Unsicherheit, sogar identische Schwerefelder haben werden. Die Unsicherheit wurde dabei mit Hilfe des hydrologischen Modells WGHM in Form einer exponentiell abfallenden Autokovarianzfunktion empirisch bestimmt. Angenommen wurde in diesem Fall ein isotroper und homogener stochastischer Prozess in Raum und Zeit. Eine ähnliche Idee findet sich beim sogenannten *Mascon-Ansatz* (zuletzt in [Rowlands et al., 2010](#)), wo räumliche und zeitliche Korrelationen in Form einer Exponentialfunktion eingeführt werden. Ein guter Überblick über die Zusammenhänge beider Ansätze findet sich bei [Sabaka et al. \(2010\)](#), aber auch in dieser Arbeit wird er an späterer Stelle erläutert und Unterschiede zum hier vorgestellten Ansatz aufgezeigt.

1.3 Ziel der Arbeit und Gliederung

In dieser Arbeit soll ein Ansatz zur Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Erdschwerefeldes aus Daten der Satellitenmission GRACE entwickelt und evaluiert werden. Dabei wird das Gravitationsfeld der Erde als dynamisches System aufgefasst, das mit GRACE beobachtet wird. Eine vollständige physikalische Modellierung der Dynamik des Erdsystems ist zu komplex, weshalb hier eine stochastische Modellierung eingeführt wird. Durch Berücksichtigung der vollständigen Korrelationsstruktur zweier aufeinanderfolgender Tage wird es möglich sein, mit dem hier vorgestellten Kalman-Filter-Ansatz eine Zeitreihe täglicher GRACE-Schwerefeldlösungen zu bestimmen. Zeitliche Aliasing-Effekte werden so verringert. Gleichzeitig steht mit der Zeitreihe auch ein verbessertes Dealiasing-Produkt für die Bestimmung einer GRACE-Monatslösung zur Verfügung, welche signifikante Verbesserungen gegenüber dem Ergebnis derzeitiger Prozessierungsstandards liefert.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich dabei wie folgt: Im folgenden Kapitel 2 werden die physikalischen Grundlagen des Erdschwerefeldes und seiner mathematischen Darstellung angegeben. Ein Großteil des Kapitels widmet sich dann den Grundlagen der physikalischen Modellierung der Quellen für kurzzeitige Massenverteilungen auf der Erde, deren Schwerevariationen mit GRACE beobachtet werden. Betrachtet werden dabei die drei Subsysteme Atmosphäre, Ozean und kontinentale Hydrologie.

Kapitel 3 widmet sich der Auswertung der GRACE-Beobachtungsdaten. Hierbei wird zunächst die Verwendung der GRACE-Beobachtungen im *Beobachtungsmodell* erläutert. Anschließend wird dann ein *stochastisches Prozessmodell* entwickelt, das die zeitliche Dynamik der betrachteten Subsysteme abbildet und zur Prädiktion der zeitlichen Evolution dient. Die Informationen des *Beobachtungsmodells* und des *Prozessmodells* werden schließlich im Kalman-Filter zusammengeführt. Ein Vergleich mit dem *Mascon-Ansatz* und eine Zusammenfassung der Prozessierungsschritte beschließt das Kapitel.

Die Möglichkeiten des in Kapitel 3 entwickelten Kalman-Filter-Ansatzes zur Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Erdschwerefeldes werden in einer Simulationsstudie in Kapitel 4 aufgezeigt. Hierbei werden zunächst GRACE-Beobachtungen simuliert und anschließend mit dem beschriebenen Kalman-Filter-Ansatz ausgewertet. Ein Vergleich der ermittelten Schwerefeldzeitreihe mit dem in den Beobachtungen simulierten Referenzsignal liefert Rückschlüsse über das Leistungsvermögen des entwickelten Kalman-Filter-Ansatzes.

Im darauffolgenden Kapitel 5 werden unter den Voraussetzungen von Kapitel 4 Echtzeiten der GRACE-Mission prozessiert. Der Nachweis, dass auch in dieser täglichen GRACE-Schwerefeldzeitreihe Informationen über kurzzeitige Variationen des Erdschwerefeldes vorhanden sind, wird durch einen Vergleich mit von den GRACE-Beobachtungen unabhängigen Zeitreihen von GPS-Stationsbewegungen und Ozeanbodendruck-Rekordern geführt. Zum Abschluss des Kapitels wird beschrieben, welches Verbesserungspotential bei der Bestimmung monatlicher Schwerefeldlösungen durch Anwendung der im Kalman-Filter-Ansatz bestimmten kurzzeitigen Schwerevariationen als verbessertes Dealiasing-Produkt besteht.

Kapitel 6 fasst schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf weitere Forschungsarbeiten.

2. Physikalische Grundlagen und Modellbildung

2.1 Grundlagen der Potentialtheorie

2.1.1 Darstellung des zeitvariablen Gravitationsfeldes

Gravitationspotential. Die Modellierung des Gravitationsfeldes der Erde hat ihren Ursprung in Newtons Gravitationsgesetz

$$V(\mathbf{r}) = G \iiint_{\Omega} \frac{\rho_Q(\mathbf{r}_Q)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q\|} d\Omega, \quad (2.1)$$

das einen Zusammenhang herstellt zwischen der Massenverteilung eines Körpers Ω , hier ausgedrückt durch die Dichteverteilung ρ_Q der Quellpunkte \mathbf{r}_Q , und seinem dadurch induzierten Gravitationsfeld V am Aufpunkt \mathbf{r} . Hierin ist $G = 6,67428 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ die allgemeine Gravitationskonstante.

Im Allgemeinen, so auch in dieser Arbeit, wird für das Gravitationsfeld der Erde synonym der Begriff *Erdschwerefeld* verwendet. Gravitation bezeichnet in der Geodäsie die reine Massenanziehung gemäß Gleichung (2.1), während Schwere die Summe aus Gravitation und Zentrifugalbeschleunigung der rotierenden Erde darstellt. Da die Zentrifugalbeschleunigung nur circa 1/300 der Gravitationsbeschleunigung beträgt und zeitlich praktisch konstant ist, erscheint diese Verallgemeinerung der Begriffe zulässig. Wo eine Unterscheidung nötig ist, wird in dieser Arbeit an entsprechender Stelle explizit darauf hingewiesen werden.

Kugelfunktionsreihe. Für die Darstellung des Gravitationspotentials wird klassischerweise die Reihenentwicklung nach Kugelflächenfunktionen gewählt (Heiskanen und Moritz, 1967):

$$V(r, \lambda, \vartheta) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^n c_{nm} C_{nm}(\lambda, \vartheta) + s_{nm} S_{nm}(\lambda, \vartheta). \quad (2.2)$$

Hierbei sind die Basisfunktionen gegeben durch

$$\left. \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda, \vartheta) \\ S_{nm}(\lambda, \vartheta) \end{array} \right\} = P_{nm}(\cos \vartheta) \left\{ \begin{array}{l} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{array} \right. \quad (2.3)$$

mit den vollständig normierten Legendre-Polynomen $P_{nm}(\cos \vartheta)$ vom Grad n und Ordnung m , und dem Referenzradius R und der Referenzmasse M als Skalierungsfaktoren. Für die Erde wird üblicherweise $R = 6378136,6 \text{ m}$ und $GM = 3,986004415 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$ verwendet. Der Ortsvektor \mathbf{r} ist hier in den sphärischen Polarkoordinaten Länge λ , Poldistanz ϑ und radialem Abstand r angegeben. Dabei ist zu beachten, dass entgegen der sonst üblichen Notation in der Literatur hier die Querstriche bei der vollständigen Normierung (\bar{c}_{nm} , \bar{s}_{nm} bzw. \bar{P}_{nm}) weggelassen werden, da allein diese in dieser Arbeit verwendet wird.

Die vollständig normierten Potentialkoeffizienten c_{nm} und s_{nm} sind bestimmt durch die Dichteverteilung $\rho_Q(\mathbf{r}_Q)$ in allen Quellpunkten $\mathbf{r}_Q = (r, \lambda, \vartheta)_Q$ des anziehenden Körpers Ω :

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm} \\ s_{nm} \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho_Q(r_Q, \lambda_Q, \vartheta_Q) \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \\ S_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \end{array} \right\} d\Omega. \quad (2.4)$$

Zeitvariable Potentialkoeffizienten. Die Dichteverteilung der Erde ist zeitlich nicht konstant, vielmehr ändert sie sich beständig aufgrund geophysikalischer Prozesse auf und innerhalb der Erde, die im folgenden Abschnitt 2.2 näher beschrieben werden. Mit dieser zeitabhängigen Dichteverteilung $\rho_Q(t, \mathbf{r}_Q)$ ändern sich auch die Potentialkoeffizienten in Gleichung (2.4) mit der Zeit:

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{M} \iiint_{\Omega} \left(\frac{r_Q}{R}\right)^n \rho_Q(t, r_Q, \lambda_Q, \vartheta_Q) \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \\ S_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \end{array} \right\} d\Omega. \quad (2.5)$$

Damit ergibt sich für Gleichung (2.2) ein zeitabhängiges Gravitationspotential $V(t, r, \lambda, \vartheta)$.

2.1.1.1 Bestimmung der Massenverteilung aus dem Gravitationspotential

Während die Zuordnung der Massenverteilung zum Gravitationspotential in Gleichung (2.5) eindeutig ist, gilt dies für das inverse Problem der Bestimmung der Massenverteilung aus dem Gravitationspotential im Außenraum der Erde nicht mehr. Dasselbe Gravitationspotential im Außenraum eines Körpers kann durch beliebig viele unterschiedliche Massenverteilungen im Inneren des Körpers erzeugt sein.

Um Eindeutigkeit der Lösung des inversen Problems herbeizuführen, beschränkt man den Lösungsraum üblicherweise auf Dichteänderungen einer unendlich dünnen sphärischen Schicht (Wahr et al., 1998). Diese Annahme ist bei Betrachtung kurzzeitiger Variationen des Erdschwerefeldes erfüllt, da diese in einem im Verhältnis zum Erdradius von rund 6400 km kleinen Bereich zwischen Ozeanboden und niedrigen Atmosphärenschichten von vielleicht 25 km Dicke stattfinden.

Aus der Flächendichte $\sigma(t, \mathbf{r}_\Phi)$ auf der Oberfläche Φ ergeben sich die entsprechenden Koeffizienten des Potentials im Außenraum mit

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{M}{4\pi R^2} \iint_{\Phi} \sigma(t, \mathbf{r}_\Phi) \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\mathbf{r}_\Phi) \\ S_{nm}(\mathbf{r}_\Phi) \end{array} \right\} d\Phi. \quad (2.6)$$

Entwickelt man die Flächendichte $\sigma(t, \mathbf{r}_\Phi)$ ebenfalls in eine Reihe nach Kugelflächenfunktionen

$$\sigma(t, \mathbf{r}_\Phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a_{nm}(t) C_{nm}(\lambda, \vartheta) + b_{nm}(t) S_{nm}(\lambda, \vartheta), \quad (2.7)$$

so ergibt sich für die Bestimmung der Massenverteilung aus den beispielsweise durch GRACE beobachteten Potentialkoeffizienten durch Koeffizientenvergleich

$$\left. \begin{array}{l} a_{nm}(t) \\ b_{nm}(t) \end{array} \right\} = (2n+1) \frac{M}{4\pi R^2} \left\{ \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\}. \quad (2.8)$$

Zu beachten ist noch, dass lediglich *Änderungen* des Potentials beziehungsweise der Massenverteilung bezogen auf einen Referenzstatus bestimmt werden können, was sich unmittelbar durch Subtraktion eines langzeitlichen Mittels \bar{V} beziehungsweise $\bar{\sigma}$ realisieren lässt. Die in dieser Arbeit betrachteten Potentialkoeffizienten und -funktionale sind daher immer Differenzen zu einem Referenzfeld und müssten streng genommen alle mit einem Δ als Δc_{nm} , Δs_{nm} , $\Delta V(t)$ oder $\Delta \sigma(t)$ geschrieben werden. Hierauf wird der Übersichtlichkeit wegen verzichtet. Sollte es sich bei angegebenen Größen *nicht* um Differenzen oder Anomalien zu einem statischen Schwerefeld handeln, so wird dies explizit erwähnt werden.

2.1.1.2 Deformation durch Auflast

Bisher wurde nur die direkte Wirkung von Massenumverlagerungen auf das Gravitationsfeld modelliert. Die Massenverschiebungen bewirken durch die sich ändernde Auflast eine Deformation der festen Erde, die sich durch eine laterale und vertikale Deformation des Erdkörpers und eine Änderung des Gravitationspotentials, die als indirekter Effekt bezeichnet wird, charakterisieren lässt (Farrell, 1972).

Indirekter Effekt. Die Änderung der Gravitationswirkung wird beschrieben durch

$$\delta V(\lambda, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n k'_n (c_{nm} C_{nm}(\lambda, \vartheta) + s_{nm} S_{nm}(\lambda, \vartheta)). \quad (2.9)$$

Dabei sind die k'_n die sogenannten *Love-Zahlen* des indirekten Effekts. Diese werden, wie alle Arten von Love-Zahlen, mit Hilfe von Modellen über den Erdaufbau und dessen Eigenschaften berechnet und finden sich tabelliert beispielsweise bei Farrell (1972).

Für die Koeffizienten der Massenverteilung ergibt sich dann mit Berücksichtigung der Potentialänderung durch Auflastdeformation

$$\left. \begin{array}{l} a_{nm}(t) \\ b_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{2n+1}{1+k'_n} \cdot \frac{M}{4\pi R^2} \left\{ \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\}, \quad (2.10)$$

beziehungsweise die Umkehrung in Quelldarstellung

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1+k'_n}{2n+1} \cdot \frac{M}{4\pi R^2} \iint_{\Phi} \sigma(t, \lambda_Q, \vartheta_Q) \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \\ S_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \end{array} \right\} d\Phi. \quad (2.11)$$

Vertikaldeformation. Die vertikale Deformation des Erdkörpers durch Änderung der Massenverteilung ergibt sich nach Farrell (1972) zu

$$\Delta h = R \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{h'_n}{1+k'_n} (c_{nm} C_{nm}(\lambda, \vartheta) + s_{nm} S_{nm}(\lambda, \vartheta)), \quad (2.12)$$

wobei die h'_n die jeweiligen Love-Zahlen der Vertikaldeformation bedeuten, die sich ebenfalls beispielsweise bei Farrell (1972) finden lassen. Gleichung (2.12) stellt hierbei einen direkten Zusammenhang her zwischen der mit GPS messbaren Größe Δh und den mit GRACE bestimmbaren Schwereänderungen $c_{nm}(t), s_{nm}(t)$. Dies wird in Kapitel 5 zur Validierung der GRACE-Schwerefelder genutzt.

2.1.1.3 Äquivalente Wasserhöhen

Die Ergebnisse hydrologischer Modellierung werden häufig in äquivalenten Wasserhöhen angegeben. Aber auch für die Darstellung von mit GRACE beobachteten Massenvariationen hat sich diese Darstellung etabliert, daher wird sie auch in dieser Arbeit durchgängig verwendet. Die äquivalente Wasserhöhe (im Folgenden auch abgekürzt mit *ewh* (*equivalent water height*)), ist eine Druckeinheit und definiert den Druck p , den eine Wassersäule der Höhe h mit der Dichte ρ_w über einer Fläche aufgrund der Schwerkraft g ausübt (Peters, 2007). Bei $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ und $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ entspricht 1 m Wassersäule dann 98 hPa. Eine grobe empirische Faustformel gibt den Zusammenhang zu den in der Geodäsie gebräuchlichen Geoidhöhen ΔN an mit $1 \text{ mm } \Delta N \cong 2 \text{ cm ewh}$ (Peters, 2007).

Die Bestimmung der äquivalenten Wasserhöhen ergibt sich unmittelbar aus Gleichung (2.10) mit

$$\text{ewh}(t, \lambda, \vartheta) = \frac{M}{4\pi R^2} \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{1+k'_n} \sum_{m=0}^n c_{nm}(t) C_{nm}(\lambda, \vartheta) + s_{nm}(t) S_{nm}(\lambda, \vartheta). \quad (2.13)$$

2.1.2 Funktionale des Gravitationsfeldes

Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes aus Satellitendaten wird das Potential V und die Feldstärke $\mathbf{g} = \nabla V$ an den Positionen entlang eines Bahn Bogens in Abhängigkeit von den zu bestimmenden Potentialkoeffizienten c_{nm} und s_{nm} benötigt (vgl. Abschnitt 3.1). Die in dieser Arbeit verwendeten Funktionale finden sich bei Mayer-Gürr (2006) und sollen an dieser Stelle kurz wiedergegeben werden.

Das Gravitationspotential und die Feldstärke sind lineare Funktionale der Potentialkoeffizienten und lassen sich als Matrix-Vektor-Produkt darstellen. Hierfür werden die Potentialkoeffizienten in einem Vektor

$$\mathbf{x} = (c_{nm}, s_{nm})^T \quad (2.14)$$

zusammengefasst. Im Rahmen der Betrachtungen zum Kalman-Filter in Kapitel 3 wird dieser Vektor Zustandsvektor genannt werden.

Das Potential an den N Positionen $\mathbf{r}_i(\lambda_i, \vartheta_i, r_i)$ entlang des Bahnbogens, gegeben in einem erdfesten Koordinatensystem, berechnet sich dann aus

$$\begin{pmatrix} V(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ V(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{x} \quad (2.15)$$

mit der Matrix

$$\mathbf{V} = \frac{GM}{R} \begin{pmatrix} \left(\frac{R}{r_1}\right)^3 C_{21}(\lambda_1, \vartheta_1) & \left(\frac{R}{r_1}\right)^3 S_{21}(\lambda_1, \vartheta_1) & \dots & \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} S_{nm}(\lambda_1, \vartheta_1) \\ \left(\frac{R}{r_2}\right)^3 C_{21}(\lambda_2, \vartheta_2) & \left(\frac{R}{r_2}\right)^3 S_{21}(\lambda_2, \vartheta_2) & \dots & \left(\frac{R}{r_2}\right)^{n+1} S_{nm}(\lambda_2, \vartheta_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{R}{r_N}\right)^3 C_{21}(\lambda_N, \vartheta_N) & \left(\frac{R}{r_N}\right)^3 S_{21}(\lambda_N, \vartheta_N) & \dots & \left(\frac{R}{r_N}\right)^{n+1} S_{nm}(\lambda_N, \vartheta_N) \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Die Feldstärke bestimmt sich üblicherweise durch Differentiation der Basisfunktionen C_{nm} und S_{nm} nach den Polarkoordinaten. Da die Satellitenpositionen in einem kartesischen Koordinatensystem gegeben sind, verwendet Mayer-Gürr (2006) hier stattdessen die aus Ilk (1984) entnommene Darstellung der Basisfunktionen in einem kartesischen Koordinatensystem. Für die Feldstärke gilt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\lambda, \vartheta, r) &= \nabla V(\lambda, \vartheta, r) = \begin{pmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{pmatrix} \\ &= \frac{GM}{2R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+2} \sqrt{\frac{2n+1}{2n+3}} \sum_{m=0}^n c_{nm} \begin{pmatrix} C_{nm}^- - C_{nm}^+ \\ -S_{nm}^- - S_{nm}^+ \\ -2C_{nm}^0 \end{pmatrix} + s_{nm} \begin{pmatrix} S_{nm}^- - S_{nm}^+ \\ C_{nm}^- + C_{nm}^+ \\ -2S_{nm}^0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

mit

$$\begin{aligned} C_{nm}^- &= f_{nm}^- C_{n+1, m-1}, & C_{nm}^0 &= f_{nm}^0 C_{n+1, m}, & C_{nm}^+ &= f_{nm}^+ C_{n+1, m+1}, \\ S_{nm}^- &= f_{nm}^- S_{n+1, m-1}, & S_{nm}^0 &= f_{nm}^0 S_{n+1, m}, & S_{nm}^+ &= f_{nm}^+ S_{n+1, m+1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

und den Faktoren

$$\begin{aligned} f_{nm}^- &= [(n-m+1)(n-m+2)(1+\delta_{1m})]^{1/2}, \\ f_{nm}^0 &= [(n-m+1)(n+m+1)]^{1/2}, \\ f_{nm}^+ &= [(n+m+1)(n+m+2)(1+\delta_{0m})]^{1/2}, \end{aligned}$$

wobei $C_{nm} = 0$ für $m < 0$ und $S_{nm} = 0$ für $m < 1$ gesetzt wurde. Hiermit lässt sich die Feldstärke wiederum als Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{r}_1) \\ \vdots \\ \mathbf{g}(\mathbf{r}_N) \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{G}}\mathbf{x}, \quad (2.19)$$

schreiben, wobei sich die Elemente der Matrix $\bar{\mathbf{G}}$ aus Gleichung (2.17) ergeben.

Die Feldstärke \mathbf{g} in Gleichung (2.19) ist in einem kartesischen erdfesten Koordinatensystem gegeben, die Beobachtungsgleichungen in Abschnitt 3.1 werden jedoch in einem raumfesten Koordinatensystem angegeben. Die entsprechende Transformation kann durch

$$\mathbf{G} := \mathbf{R}\bar{\mathbf{G}} \quad (2.20)$$

mit der blockdiagonalen Matrix \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(t_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}(t_N) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Tabelle 2.1: Größenordnung verschiedener Quellen zeitlicher Schwerevariationen (nach Ilk et al., 2004).

Prozess	Räumliche Ausdehnung [km]	dominante Zeitskala	Größenordnung Geoidhöhen
Erd- und Ozeangezeiten	10 bis 10000	tägl., halbtägl., monatl.	dm
Atmosphäre	50 bis 5000	jährl., saisonal, tägl., u. a.	cm
Ozeanströmungen	30 bis 5000	(sub-)saisonal bis jährlich, säkular	cm
Kontinentale Hydrologie	100 bis 5000	tägl., wöchentl. bis jährlich	cm
Kryosphäre	100 bis 4000	saisonal bis mehrjährig	mm
Postglaziale Landhebung	500 bis 10000	säkular	mm/Jahr
Erdmantel und -kruste	100 bis 2000	säkular	mm/Jahr

beschrieben werden. Hierin ist \mathbf{G} die auf das raumfeste System bezogene Matrix und $\mathbf{R}_e(t_i)$ die entsprechenden Drehmatrizen vom erdfesten in das raumfeste System zu den Zeitpunkten t_i .

Als erdfestes System wird der ITRF (*International Terrestrial Reference Frame*) verwendet, als Realisierung des raumfesten Systems das Quasi-Inertialsystem des ICRF (*International Celestial Reference Frame*). Die Transformationsmatrizen $\mathbf{R}(t_i)$ zwischen ITRF und ICRF findet sich bei McCarthy und Petit (2004).

2.2 Quellen für Zeitvariationen des Erdschwerefeldes

Nach den Grundlagen der Potentialtheorie werden in diesem Abschnitt die für die zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes verantwortlichen Prozesse näher beleuchtet. Es sind dies Massenverlagerungen an der Oberfläche und im Innern der Erde, deren zugrundeliegenden Prozesse von verschiedenen geowissenschaftlichen Disziplinen bearbeitet werden.

In Tabelle 2.1 sind die relevanten Prozesse mit ihren charakteristischen räumlichen und zeitlichen Skalen dargestellt. Diese sollen nun kurz erläutert werden, bevor für die Subsysteme Atmosphäre, Ozeanströmungen und kontinentale Hydrologie die Grundzüge ihrer Modellierung, d. h. wesentliche Parameter, Eigenschaften und Zusammenhänge skizziert werden. Tiefergehende Modellierungsaspekte wie vertikale, horizontale und zeitliche Diskretisierung werden in dieser Arbeit allerdings nicht näher behandelt.

Erd- und Ozeangezeiten. Den größten Einfluss auf zeitliche Veränderungen des Erdschwerefeldes haben die Erd- und Ozeangezeiten, hervorgerufen durch die gravitative Wirkung von Sonne, Mond und Planeten. Diese bewegen sich im Bereich einiger Dezimeter in Geoidhöhen. Die gravitativen Wirkungen der Erd- und Ozeangezeiten sind gut bestimmbar und werden bei der GRACE-Prozessierung vorab reduziert.

Wasserkreislauf. Zeitliche Änderungen des Geoids im Bereich einiger Zentimeter sind im Wesentlichen hervorgerufen durch Verlagerung von Wasser, d. h. durch Prozesse in der Atmosphäre, im Ozean (nicht gezeiteninduzierte Strömungen) und auf den Kontinenten. In der GRACE-Prozessierung werden zeitlich hochfrequente Variationen von Atmosphäre und Ozean in Form des AOD1B-Produkts (Flechtner, 2007) vorab reduziert, da diese zu zeitlichem Aliasing in den monatlichen Schwerefeldlösungen führen,

wie in Kapitel 1 ausgeführt wurde. Als Restsignal bleibt daher, neben weiterhin unmodellierten Anteilen von Atmosphäre und Ozean, Massenverlagerungen durch den Wasserkreislauf über den Kontinenten. Diese kontinentalen Wasserspeicheränderungen sind eine Zielgröße der hydrologischen Modellierung, deren Bestimmung mit globaler Überdeckung erstmals mit der GRACE-Mission möglich ist.

Eismassenverlagerungen. Eismassenverlagerungen führen zu Geoidänderungen im Bereich weniger Millimeter pro Jahr. Hiermit sind sowohl saisonale Schwankungen durch Schneeakkumulation und -schmelze als auch lineare Trends durch längerfristige Eismassenverluste gemeint.

Säkulare Prozesse im Erdinnern. Zu den im Erdinnern stattfindenden Prozessen, die sich teilweise gut mit GRACE beobachten lassen, gehören die postglaziale Landhebung oder Massenverlagerungen durch seismische Aktivitäten. In der Regel handelt es sich um hierbei um längerfristige Prozesse oder, wie im Falle eines Erdbebens, um instantane Massenverlagerungen. Änderungen im Schweresignal, wie es GRACE beobachtete, die im Zusammenhang mit dem Sumatra-Andaman-Erdbeben im Dezember 2004 stehen, werden beispielsweise bei [Einarsson et al. \(2010\)](#) oder [Han et al. \(2006\)](#) näher untersucht.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz widmet sich der Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Erdschwerfeldes. Daher sollen in den folgenden Abschnitten zunächst die physikalischen Grundlagen derjenigen Prozesse skizziert werden, die mit Daten der GRACE-Mission detektierbar sind. Dies sind die Prozesse in den Subsystemen Atmosphäre, Ozean und kontinentale Hydrologie. Nicht betrachtet werden längerfristige Variationen im Erdinnern, aber auch Variationen des Kryosphäre. Hierbei sind aus geowissenschaftlicher Sicht die Bestimmung längerfristiger Trends interessant, die auf Eismassenverluste in Grönland, der Antarktis oder in Gletschergebieten Alaskas und Patagoniens schließen lassen.

2.2.1 Atmosphäre

Die den Massenvariationen der Atmosphäre zugrundeliegenden physikalischen Prozesse sind in einer Vielzahl von Modellen detailliert modelliert, die vor allem zur Wettervorhersage benutzt werden. Da die Ausgaben dieser Modelle (Wind- und Druckfelder oder Temperaturverteilungen) oftmals als Eingabedaten für Ozeanströmungsmodelle oder Modelle der Prozesse der kontinentalen Hydrologie verwendet werden, sollen sie hier auch zuerst erläutert werden.

Hierbei werden in Abschnitt 2.2.1.1 zunächst einige Grundbegriffe erläutert und diagnostische Gleichungen, die Eigenschaften der Atmosphäre modellieren, eingeführt. Abschnitt 2.2.1.2 beschreibt die Modellierung des dynamischen Verhaltens der Atmosphäre, das mit den Gesetzen der Hydrodynamik und Thermodynamik gut wiedergegeben werden kann. In Abschnitt 2.2.1.3 werden die Modellgleichungen des *Integrated Forecast Systems (IFS)* des ECMWF kurz erläutert. Diese bauen auf den Ausführungen in den vorhergegangenen Abschnitten auf, werden dort jedoch in einem sphärischen und bei der Höhenkomponente druckabhängigen Koordinatensystem ausgedrückt. Abschließend wird in Abschnitt 2.2.1.4 beschrieben, wie aus den Ausgabedaten der ECMWF-Modellierung das GRACE-Dealiasing-Produkt (AOD1B-Produkt) in Form von zeitabhängigen Potentialkoeffizienten berechnet wird.

2.2.1.1 Grundbegriffe und diagnostische Gleichungen

Der Zustand der Atmosphäre wird in der Regel durch sechs Größen charakterisiert:

- Temperatur T ,
- Luftdruck p und
- spezifische Feuchte q

als thermodynamische Größen, und

- dem Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ des Strömungsfeldes mit seinen drei Komponenten als hydrodynamischer Größe.

Luftdruck. Der Druck ist definiert als Druckkraft F pro Fläche A , auf der die Druckkraft senkrecht steht:

$$p = \frac{F}{A}. \quad (2.22)$$

Er wird üblicherweise in der Einheit Hektopascal (hPa) angegeben, für die gilt

$$1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa} = 100 \text{ N/m}^2 = 100 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}. \quad (2.23)$$

Der Luftdruck ist die Reaktion der Luft auf die Wirkung der Schwerebeschleunigung g . Das Gewicht der Luftsäule entspricht dabei dem statischen Druck der Luftsäule, der in alle Richtungen wirkt.

Für die Druckkraft gilt mit der Massendichte $\rho = M/V$ und der Höhe h der Luftsäule

$$F = Mg = \rho Vg = \rho Ahg. \quad (2.24)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.22) ergibt sich dann für den hydrostatischen Druck

$$p = \frac{\rho Ahg}{A} = \rho gh \quad (2.25)$$

oder in differenzieller Form

$$dp = -\rho g dh. \quad (2.26)$$

Das negative Vorzeichen berücksichtigt die Wirkungsrichtung der Schwerebeschleunigung g , die der Höhe dh entgegengesetzt nach unten wirkt.

Spezifische Feuchte. Feuchte Luft setzt sich zusammen aus trockener Luft, deren Bestandteile räumlich weitgehend konstant sind, und Wasserdampf, der regional und mit der Höhe stark variiert. Diese starke Variation des Wasserdampfs lässt sich anschaulich an der Wolkenbildung beobachten. Feuchte Luft kann daher in guter Näherung als das Gemisch zweier Gase dargestellt werden, deren Partialdrücke p_d (trockene Luft) und e (Partialdruck des Wasserdampfes, kurz Dampfdruck) sich (nach Dalton) zum Gesamtdruck p addieren:

$$p = p_d + e. \quad (2.27)$$

Die allgemeine Gasgleichung stellt mit der allgemeinen Gaskonstanten R (in $[\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}]$) einen Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und Temperatur eines Gases her:

$$p = \rho RT. \quad (2.28)$$

Damit gilt für die trockene Luft

$$p_d = \rho_d R_d T \quad (2.29)$$

mit der individuellen Gaskonstanten R_d (in $[\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}]$) und der Dichte der trockenen Luft ρ_d (der Index d steht hier für *dry*). Für den Wasserdampf (Index w für *wet*) gilt entsprechend

$$e = \rho_w R_w T \quad (2.30)$$

mit der Dichte ρ_w (absolute Feuchte) und der Gaskonstanten R_w . Einsetzen von Gleichung (2.29) und Gleichung (2.30) in Gleichung (2.27) liefert die Zustandsgleichung für feuchte Luft:

$$p = \rho_d R_d T + \rho_w R_w T. \quad (2.31)$$

Das Verhältnis der Masse des Wasserdampfes zur Masse der feuchten Luft, und damit auch das Verhältnis der Dichte des Wasserdampfes zur Dichte der feuchten Luft, wird spezifische Feuchte q genannt:

$$q = \frac{M_w}{M_w + M_d} = \frac{\rho_w}{\rho_w + \rho_d}. \quad (2.32)$$

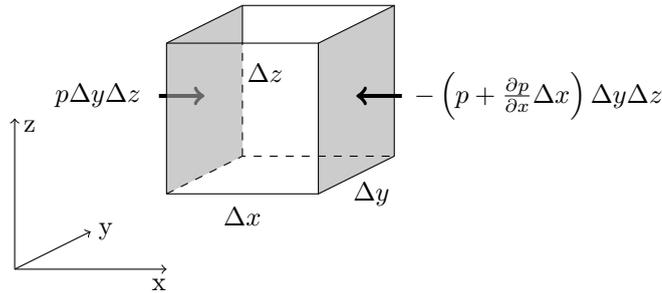


Abbildung 2.1: Zur Herleitung der Druckgradientkraft.

Einführen von Gleichung (2.32) in Gleichung (2.31) liefert nach Umstellen die Zustandsgleichung für feuchte Luft in der Form der allgemeinen Gasgleichung (2.28)

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.33)$$

mit der virtuellen Temperatur

$$T_v = T \left(1 - q + q \frac{R_w}{R_d} \right). \quad (2.34)$$

Dies ist die Temperatur, die trockene Luft haben muss, um bei gleichem Druck dieselbe Dichte wie feuchte Luft zu haben.

Druckgradientkraft. Die Druckgradientkraft \mathbf{F}_p entsteht durch räumliche Druckunterschiede. Betrachtet man das Raumvolumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ mit der Masse $m = \rho \Delta V$ in Abbildung 2.1, so gilt wegen $p = F/A$ für die Druckkraft auf der linken Seite

$$F_{pl} = +p \Delta y \Delta z. \quad (2.35)$$

Für die rechte Seite gilt entsprechend

$$F_{pr} = -p \Delta y \Delta z + \frac{\partial p}{\partial x} \Delta y \Delta z \quad (2.36)$$

mit der Änderungsrate des Drucks $\frac{\partial p}{\partial x}$ in x -Richtung und für die resultierende Kraft

$$F_{px} = F_{pl} + F_{pr} = -p \frac{\partial p}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z = -\frac{m}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.37)$$

Die analoge Betrachtung der anderen Raumrichtungen führt schließlich auf

$$\mathbf{F}_p = -\frac{m}{\rho} \nabla p. \quad (2.38)$$

Höhenabhängigkeit des Luftdrucks (Barometrische Höhenformel). Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe ab, wie sich leicht aus der hydrostatische Gleichung (2.26) herleiten lässt. Setzt man die Zustandsgleichung für feuchte Luft (2.33) in die hydrostatische Grundgleichung (2.26) ein, so ergibt sich

$$\frac{dp}{dz} = -g \frac{p}{R_d T_v} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_d T_v} dz \Rightarrow dz = -\frac{R_d T_v}{g} \frac{dp}{p}. \quad (2.39)$$

Anschließende beidseitige Integration mit den Grenzen z_0 (Oberfläche) und z (Höhe) bzw. p_s (Oberflächendruck) und p (Druck in der Höhe z) unter Vernachlässigung der Höhenabhängigkeit von Temperatur und Schwere führt auf die bekannte *barometrische Höhenformel*

$$\Delta z = z - z_0 = -\frac{R_d T_v}{g} \ln \frac{p}{p_s}, \quad (2.40)$$

wobei die Temperatur T_v und die Schwere g sowohl höhen-, als auch ortsabhängig sind.

Die Annahme einer mittleren konstanten Temperatur $\bar{T}_v = \int_{z_0}^z T_v dz$ und die Einführung einer mittleren Schwere

$$g_0 = 9,80665 \text{ m/s}^2 \quad (2.41)$$

führt nach Umformen von Gleichung (2.40) zu einem einfachen isothermen Atmosphärenmodell

$$p = p_s \exp\left(-\frac{g_0}{R_d \bar{T}_v} \Delta z\right), \quad (2.42)$$

aus dem gut der exponentielle Abfall des Luftdrucks mit der Höhe erkennbar ist.

Geopotentielle Höhe. In der Meteorologie wird üblicherweise die geopotentielle Höhe H^g verwendet, die sich auf das Geopotential Φ bezieht. Dieses ist als potentielle Energie im Schwerefeld definiert:

$$\Phi = \int_{z_0}^z g dz. \quad (2.43)$$

Als Bezugsfläche dient zumeist das Geoid, dort gilt $\Phi = 0$ und $H^g = 0$. Damit entspricht das Geopotential den geopotentiellen Knoten der Geodäsie. Die geopotentielle Höhe ist analog zur dynamischen Höhe in der Geodäsie ein skaliertes Potentialwert

$$H^g = \frac{\Phi}{g_0} \quad (2.44)$$

mit g_0 aus Gleichung (2.41).

Mit dem Geopotential als neuer vertikaler Variablen ($d\Phi = g dz$) folgt für die hydrostatische Grundgleichung aus (2.26) mit Gleichung (2.33):

$$dp = -\rho d\Phi = -\frac{p}{R_d T_v} d\Phi. \quad (2.45)$$

Hier wird die vertikale Druckänderung nur von der vertikalen Struktur der Dichte bzw. der virtuellen Temperatur bestimmt.

2.2.1.2 Dynamisches Verhalten der Atmosphäre

Das dynamische Verhalten der Atmosphäre lässt sich physikalisch durch die Gesetze der Hydro- und Thermodynamik beschreiben. Dies sind im Wesentlichen die Erhaltungssätze für Masse, Impuls und Energie, die in diesem Abschnitt näher erläutert werden sollen. Weiterführende Informationen finden sich in der reichhaltigen Literatur zur Atmosphärenphysik (z. B. Kraus, 2004; Klose, 2008).

Erhaltung der Masse. Die *Kontinuitätsgleichung* beschreibt die Erhaltung der Masse für ein Gas oder eine Flüssigkeit. Zu ihrer Herleitung wird eine Strömung $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ durch einen Würfel mit dem Volumen $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ und der Dichte ρ betrachtet (Abbildung 2.2).

Der einströmende Massenfluss durch die linke Seite des Würfels ist gegeben durch

$$\phi_l = \left(\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y \Delta z. \quad (2.46)$$

Auf der rechten Seite des Würfels strömt wieder heraus:

$$\phi_r = \left(\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2}\right) \Delta y \Delta z. \quad (2.47)$$

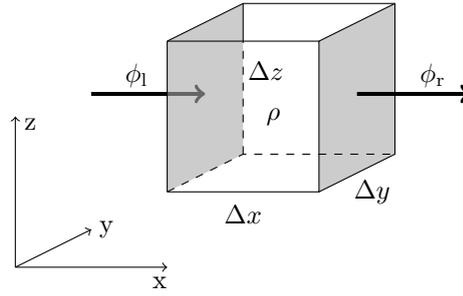


Abbildung 2.2: Zur Kontinuitätsgleichung in Flussform.

Die Differenz ergibt den Nettomassenfluss in x -Richtung:

$$\phi_l - \phi_r = \left(\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \Delta x \Delta y \Delta z \quad (2.48)$$

Für die y - und z -Richtung lassen sich entsprechende Bilanzen aufstellen, so dass sich für den Nettomassenfluss in beliebiger Strömungsrichtung

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right) \Delta x \Delta y \Delta z = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \Delta V \quad (2.49)$$

ergibt. Zur Massenerhaltung des Systems muss sich eine Volumenänderung in einer Druckänderung niederschlagen, so dass schließlich für die *Kontinuitätsgleichung in Massendivergenz- oder Flussform* folgt:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.50)$$

Erhaltung des Impulses. Nach Newtons zweitem Gesetz ist eine Kraft \mathbf{F} gleichzusetzen der zeitlichen Änderung eines Impulses \mathbf{p} und damit der zeitlichen Änderung des Geschwindigkeitsvektors durch die wirkende Kraft pro Masse \mathbf{F} :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F}. \quad (2.51)$$

Berücksichtigt man also alle auf ein Teilvolumen wirkenden Kräfte pro Masse, so ergibt sich durch Integration des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ die Bewegung dieses Teilvolumens im Kraftfeld \mathbf{F} . Für die Bewegung eines Teilchens auf der rotierenden Erde sind dies im Einzelnen:

- die Druckgradientkraft $-\frac{1}{\rho}\nabla p$,
- die Corioliskraft $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ (mit dem Drehvektor der Erde $\boldsymbol{\Omega}$),
- die Schwerkraft \mathbf{g} und
- weitere Reibungskräfte $\mathbf{F}_R = (F_x, F_y, F_z)^T$.

Die durch Sonne und Mond auftretenden Gezeitenkräfte sind hier nicht berücksichtigt. Durch Summation dieser Kräfte ergibt sich die *Impulserhaltungsgleichung* oder *Bewegungsgleichung* in einem rotierenden Koordinatensystem:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{g} + \mathbf{F}_R. \quad (2.52)$$

Aufgespalten nach den Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} ergibt sich mit der Vereinfachung $\mathbf{g} = (0, 0, -g)^T$ ein Satz dreier Differentialgleichungen, die häufig auch als *Navier-Stokes-Gleichungen* bezeichnet werden:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\Omega v \sin \varphi + 2\Omega w \cos \varphi + F_x \quad (2.53)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2\Omega u \sin \varphi + F_y \quad (2.54)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2\Omega u \cos \varphi - g + F_z \quad (2.55)$$

Zu beachten ist hierbei, dass es sich bei den Termen auf der linken Seite um totale Differentiale handelt, die ausgeschrieben, z. B. für die u -Komponente, lauten

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (2.56)$$

Diese Differentialgleichungen sind in dieser Form nicht geschlossen lösbar und auch für numerische Berechnungen zu komplex, weshalb in der Meteorologie und der Ozeanographie für verschiedene Strömungsarten Vereinfachungen eingeführt werden. Beispielsweise lässt sich unter der Annahme, dass es sich bei den betrachteten Strömungen hauptsächlich um horizontale Strömungen handelt, der Term $2\Omega w \cos \varphi$ wegen $v \gg w$ vernachlässigen. Einige weitere Vereinfachungen werden im Abschnitt 2.2.2 (Ozeanmodellierung) skizziert, weshalb an dieser Stelle nicht weiter darauf eingegangen wird.

Erhaltung der Energie. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik postuliert die Erhaltung der Energie in einem abgeschlossenen System. Demnach besitzt jedes System eine innere Energie I , die sich entweder nur durch Austausch von Wärme Q mit der Umgebung (Erwärmen oder Abkühlen) oder durch an die Umgebung geleistete Arbeit W (Kompression oder Ausdehnung eines Gases) ändert:

$$\frac{dI}{dt} = Q - W. \quad (2.57)$$

Für ein ideales Gas gilt die Gasgleichung aus (2.33)

$$p = \rho R_d T_v \quad (2.58)$$

oder ausgedrückt mit dem spezifischen Volumen $v = 1/\rho$

$$p = \frac{R_d T_v}{v}. \quad (2.59)$$

Für die innere Energie eines Gases gilt bei konstantem Druck

$$I = c_p T \quad (2.60)$$

mit der spezifischen Wärmekapazität c_p bei konstantem Druck in $\frac{\text{J}}{\text{kg K}}$, beziehungsweise die alternative Formulierung mit der spezifischen Wärmekapazität bei konstantem Volumen c_v :

$$I = c_v T. \quad (2.61)$$

c_p und c_v sind dabei vom jeweiligen Gas abhängige Konstanten. Einsetzen in Gleichung (2.57) liefert, mit der durch das Gas aufgrund spezifischer Volumenänderung (bei konstanter Masse) geleisteten Arbeit

$$W = p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = p \frac{dv}{dt}, \quad (2.62)$$

die *thermodynamische Gleichung*

$$c_v \frac{dT}{dt} = Q - p \frac{dv}{dt}. \quad (2.63)$$

Eine alternative Formulierung ergibt sich durch Umformen und Einsetzen von Gleichung (2.33):

$$c_p \frac{dT}{dt} = Q + \frac{R_d T_v}{p} \frac{dp}{dt}. \quad (2.64)$$

In der Meteorologie sind insbesondere adiabatische Prozesse von Interesse, d. h. das betrachtete Gasvolumen bildet ein abgeschlossenes System, von dem weder Wärme abgegeben noch zugeführt wird. Es gilt also $Q = 0$ und die *thermodynamische Gleichung* lautet dann

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{bzw.} \quad c_p \frac{dT}{dt} - \frac{R_d T_v}{p} \frac{dp}{dt} = 0. \quad (2.65)$$

2.2.1.3 ECMWF Integrated Forecast System (IFS)

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die Grundlagen der Atmosphärenmodellierung dargestellt wurden, sollen in diesem Abschnitt die Modellgleichungen, wie sie vom ECMWF im Wettervorhersagemodell IFS (*Integrated Forecast System*) genutzt werden, vorgestellt werden. Das IFS besteht dabei aus den fünf Komponenten

- allgemeines Zirkulationsmodell,
- Ozeanwellenmodell,
- Datenassimilierungssystem,
- saisonales Vorhersagesystem und
- monatliches Vorhersagesystem.

Die eigentliche Atmosphärenmodellierung, wie sie hier von Interesse ist, wird dabei im *allgemeinen Zirkulationsmodell* implementiert. Weitergehende Informationen zu den anderen Komponenten des Systems finden sich bei [Persson und Grazzini \(2005\)](#) oder bei [ECMWF \(2008\)](#). Dort sind auch weitere Aspekte wie die numerische Implementierung (z. B. räumliche und zeitliche Diskretisierung) oder Details zur Modellierung einzelner physikalischer Prozesse (z. B. die Wolkenphysik) ausführlich dokumentiert. An dieser Stelle sollen allerdings lediglich die physikalischen Grundgleichungen, wie bei [ECMWF \(2008\)](#) dokumentiert, angegeben und kurz erläutert werden.

Das Atmosphärenmodell wird charakterisiert durch die sechs Zustandsgrößen aus Abschnitt 2.2.1.1 und kann zusammengefasst werden durch zwei diagnostische Gleichungen, die etwas über die zeitlich unabhängigen Zusammenhänge zwischen den einzelnen Modellparametern aussagen und vier dynamischen Gleichungen, die Aussagen über das zeitliche Verhalten der Modellgrößen liefern. Die Zustandsgrößen sind, wie im vorherigen Abschnitt bereits erläutert,

- die Temperatur T ,
- der Luftdruck p ,
- die spezifische Feuchte q und
- der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ des Windfeldes.

Die Modellgleichungen werden hierbei formuliert in einem sphärischen $(\lambda, \vartheta, \eta)$ -Koordinatensystem mit den Komponenten λ als sphärischer Länge und ϑ als sphärischer Breite. Die Vertikalkomponente ist realisiert durch die druckabhängige Koordinate $\eta = \eta(p, p_s)$. Diese ist eine monotone Funktion des Drucks p und hängt zusätzlich vom Oberflächendruck p_s ab, so dass gilt:

$$\eta(0, p_s) = 0 \quad \text{und} \quad \eta(p_s, p_s) = 1. \quad (2.66)$$

Die vertikale Diskretisierung erfolgt später durch Aufteilung in Modellniveaus (*model level*). Die Indexierung erfolgt dabei von oben nach unten, d. h. die Schicht an der Erdoberfläche hat den größten Index.

Bewegungsgleichung. Der Geschwindigkeitsvektor u des Windfeldes wird zunächst ausgedrückt in einem topozentrischen Koordinatensystem (U, V, W) und aufgespalten in die horizontalen Komponenten $U = u \cos \vartheta$ und $V = v \cos \vartheta$ und die vertikale Komponente W , ausgedrückt in der druckabhängigen Koordinate η . Um das Windfeld in Abhängigkeit von der Zeit zu modellieren, wird die Bewegungsgleichung aus (2.52) im topozentrischen Koordinatensystem ausgedrückt. Die Horizontalkomponenten (also die Bewegungen auf einer Fläche gleichen Drucks) lauten dann (ECMWF, 2008):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{R \cos^2 \vartheta} \left[U \frac{\partial U}{\partial \lambda} + V \cos \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right] \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} - 2\Omega \sin \varphi V \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + R_d T_v \frac{\partial}{\partial \lambda} (\ln p) \right] = P_U \quad (2.67)$$

und

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{R \cos^2 \vartheta} \left[U \frac{\partial V}{\partial \lambda} + V \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \sin \vartheta (U^2 + V^2) \right] \frac{\partial V}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} + 2\Omega \sin \varphi U \frac{\cos \vartheta}{R} \left[\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} + R_d T_v \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\ln p) \right] = P_V. \quad (2.68)$$

Hierin bezeichnen P_U und P_V die jeweils modellierten physikalischen Prozesse und horizontalen Diffusionsterme, die für zeitliche Änderungen des Windfeldes ursächlich sind. Hierzu zählen beispielsweise die Modellierung der Einstrahlung (kurzwellige (solar) und langwellige (thermisch)), Wolkenprozesse (Wolkenbildung, Niederschlag) oder Prozesse in der Stratosphäre (Ozonbildung). Einige der Prozesse werden deterministisch, andere statistisch parametrisiert. In ECMWF (2008) findet sich hierzu ein vollständiger Überblick.

Zustandsgleichung. Die allgemeine Gasgleichung für feuchte Luft aus Gleichung (2.33),

$$p = \rho R_d T_v,$$

liefert einen zeitunabhängigen Zusammenhang zwischen den Größen Druck, Dichte und Temperatur.

Hydrostatische Gleichung. Die hydrostatische Gleichung aus (2.45)

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = - \frac{p}{R_d T_v} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \quad (2.69)$$

gibt das Verhältnis zwischen Abnahme des Drucks mit der Höhe und Änderungen der Atmosphärendichte an.

Kontinuitätsgleichung. Die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \nabla \cdot \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \right) = 0 \quad (2.70)$$

stellt Massenerhalt der Atmosphäre sicher. Aus der Kontinuitätsgleichung lässt sich auf einfache Weise die Vertikalkomponente des Windfeldes bestimmen:

$$W = - \int_0^\eta \nabla \cdot \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta + \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \nabla p \right) \quad (2.71)$$

Durch Integration von Gleichung (2.70) mit den Randbedingungen $\frac{d\eta}{dt} = 0$ bei $\eta = 0$ und $\eta = 1$ findet sich ein Ausdruck für die zeitliche Änderung des Oberflächendrucks p_s

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_0^1 \nabla \cdot \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta \quad (2.72)$$

und die vertikale Geschwindigkeit $\frac{d\eta}{dt}$ (also die Änderungsrate der Modellniveaus)

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial t} - \int_0^\eta \nabla \cdot \left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right) d\eta. \quad (2.73)$$

Thermodynamische Gleichung. Adiabatische Temperaturänderungen durch Erwärmen und Abkühlen der Luft während der vertikalen Bewegung eines Luftmasseiteilchens beschreibt die thermodynamische Gleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{R \cos^2 \vartheta} \left[U \frac{\partial T}{\partial \lambda} + V \cos \vartheta \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \right] \frac{\partial T}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} - \frac{\frac{R_d}{c_{p,d}} T_v W}{\left(1 + \left(\frac{c_{p,e}}{c_{p,d}} - 1 \right) q \right) p} = P_T + K_T. \quad (2.74)$$

Hierin ist $c_{p,d}$ die spezifische Wärme trockener Luft bei konstantem Druck, $c_{p,f}$ als spezifischer Wärme von Wasserdampf bei konstantem Druck und W die Vertikalkomponente des Windfeldes. P_T und K_T beschreiben Prozesse wie Kondensation, Evaporation oder Transporte durch turbulente Strömungen.

Feuchteerhaltung. Die Gleichung zur Feuchteerhaltung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{R \cos^2 \vartheta} \left[U \frac{\partial q}{\partial \lambda} + V \cos \vartheta \frac{\partial q}{\partial \vartheta} \right] \frac{\partial q}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} = P_q \quad (2.75)$$

stellt den Massenerhalt des Wassers in der Atmosphäre sicher. Im Term P_q werden Wasserverluste durch Kondensation oder Niederschlag oder Zuflüsse durch Verdunstung von Wolken, Regen, Ozeanen oder Kontinenten berücksichtigt.

2.2.1.4 Atmosphären-Dealiasing mit ECMWF-Daten

Bei der GRACE-Prozessierung müssen zeitlich hochfrequente Massenvariationen vorab von den Beobachtungen reduziert werden, da diese zu zeitlichem Aliasing führen. Daher wird das sogenannte AOD1B-Produkt (Atmosphären- und Ozean-Dealiasing für GRACE L1B Daten) generiert und bei der GRACE-Prozessierung genutzt. Dieses besteht aus einem Satz sechsständiger Potentialkoeffizienten, die die Massenvariationen der Atmosphäre und der Ozeanströmungen abbilden. Grundlage für deren Berechnung sind meteorologische Daten des ECMWF. In [Flechtner \(2007\)](#) findet sich eine technische Beschreibung des AOD1B-Produkts und seiner Erstellung, welche im Folgenden kurz wiedergegeben wird. An dieser Stelle wird jedoch nur die Bestimmung des Atmosphärenanteils des AOD1B-Produkts beschrieben, der Ozeananteil wird separat in Abschnitt 2.2.2.3 behandelt.

ECMWF-Modelldaten. Für die Bestimmung von Massenvariationen der Atmosphäre werden meteorologische Daten des ECMWF verwendet. Es sind dies (in Klammern ECMWF-Dateiname):

- Oberflächendruck p_s (PSFC),
- vertikale Temperaturverteilung T (TEMP),
- vertikale Verteilung der spezifischen Feuchte q (SHUM) und
- geopotentielle Höhen der Oberfläche H_s^g (PHISFC).

Die horizontale Auflösung entspricht dabei einem $0,5^\circ$ -Gitter. Vertikal ist das Modell in 60 Modellniveaus eingeteilt. Diese Modellniveaus entsprechen Schichten gleichen Drucks, der, wie in Abschnitt 2.2.1.3 beschrieben, vom Oberflächendruck p_s mit zunehmender Höhe bis auf 0,1 hPa abfällt. Die Indexierung erfolgt dabei von oben nach unten. Für den Druck an der Schnittstelle zweier Schichten (sogenannte *half level* (Index $i + 1/2$)) ergibt sich

$$p_{i+1/2} = a_{i+1/2} + p_s b_{i+1/2}. \quad (2.76)$$

Die Modellkonstanten $a_{i+1/2}$ und $b_{i+1/2}$ werden vom ECMWF mitgeliefert. Mit diesen Daten lässt sich für jeden Zeitpunkt (jeden Tag um 0:00, 6:00, 12:00 und 18:00 Uhr) ein Satz Potentialkoeffizienten bestimmen. Hierzu kommen zwei Verfahren zum Einsatz: ein einfaches Näherungsverfahren durch direkte Berechnung aus dem Oberflächendruck p_s unter Vernachlässigung der vertikalen Struktur und ein etwas aufwändigeres Integrationsverfahren, das die vertikale Struktur und auch die Höhenabhängigkeit der Schwere berücksichtigt. Die Zeitkoordinate ist dabei der Übersichtlichkeit wegen weggelassen.

Oberflächendruck. Aus gegebenen Oberflächendrücken p_s lässt sich mit Gleichung (2.25) die Oberflächendichte σ aus Gleichung (2.11) beschreiben als

$$\sigma = \frac{M}{A} = \rho \frac{V}{A} = \rho h = \frac{p_s}{g}. \quad (2.77)$$

Die Ortsabhängigkeit der Schwere wird hier vernachlässigt und als konstante mittlere Schwere angenommen, ebenso wird eine konstante Dichte ρ angenommen. Mit Gleichung (2.11) erhält man dann den Zusammenhang zwischen Oberflächendruck p_s und Potentialkoeffizienten:

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1+k'_n}{2n+1} \cdot \frac{3}{4\pi R \bar{\rho}} \cdot \frac{1}{g} \iint_{\Phi} p_s(t, \lambda_Q, \vartheta_Q) \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \\ S_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \end{array} \right\} d\Phi. \quad (2.78)$$

Vertikale Integration. Soll die vertikale Struktur der Atmosphäre berücksichtigt werden, so muss die entsprechende Luftsäule über dem betrachteten Flächenelement vertikal integriert werden, d. h. der vom Radius r abhängige Anteil aus Gleichung (2.5)

$$K_n(\lambda, \vartheta) = \left(\frac{1}{R} \right)^{n+2} \int_{r=0}^{\infty} r^{n+2} \rho(r, \lambda, \vartheta) dr \quad (2.79)$$

muss für jeden Punkt $\mathbf{P}(\lambda, \vartheta)$ bestimmt werden. Mit der hydrostatischen Gleichung $-\frac{dp}{g(r)} = \rho dr$ aus Gleichung (2.26) und der Approximation $g(r) = g_0 \left(\frac{R}{r} \right)^2$ lässt sich das Integral substituieren zu

$$K_n = - \left(\frac{1}{R} \right)^{n+4} \frac{1}{g_0} \int_{p=p_s}^0 r^{n+4} dp. \quad (2.80)$$

Für die radiale Koordinate gilt:

$$r = R + H_s^g + H^g. \quad (2.81)$$

Hierin ist H_s^g die geopotentielle Höhe der Erdoberfläche als Approximation der Geoidundulation und H^g die geopotentielle Höhe der betrachteten Schicht.

Nach Einsetzen in Gleichung (2.80) ergibt sich nach einigem Umformen (Flechtner, 2007):

$$K_n = - \left(\frac{1}{R} \right)^{n+2} \frac{1}{g_0} \int_{p_s}^0 \left(\frac{R}{R - H^g} + \frac{H_s^g}{R} \right)^{n+4} dP, \quad (2.82)$$

woraus schließlich für die gesuchten Potentialkoeffizienten folgt:

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm} \\ s_{nm} \end{array} \right\} = - \frac{1+k'_n}{2n+1} \cdot \frac{3}{4\pi R} \cdot \frac{1}{g_0} \iint_{\Phi} \int_{p_s}^0 \left(\frac{R}{R - H^g} + \frac{H_s^g}{R} \right)^{n+4} dP \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda, \vartheta) \\ S_{nm}(\lambda, \vartheta) \end{array} \right\} d\Phi \quad (2.83)$$

mit den noch zu bestimmenden geopotentiellen Höhen H^g der Modellniveaus. Für diese besteht durch Gleichung (2.40) in Verbindung mit Gleichung (2.34) ein Zusammenhang zu den gegebenen Modelldaten für spezifische Feuchte q , Temperatur T und dem Druck p aus Gleichung (2.76):

$$H_{i+1/2}^g = H_s^g + \frac{1}{g_1} \sum_{k=i+1}^{L_{\max}} R_d \underbrace{T \left(1 - q + q \frac{R_w}{R_d} \right)}_{T_v} \ln \frac{P_{k+1/2}}{P_{k-1/2}} \quad (2.84)$$

mit L_{\max} als Anzahl der Modellniveaus.

Damit ist eine Umrechnung der ECMWF-Modelldaten in Potentialkoeffizienten möglich, die im weiteren Verlauf der Arbeit verwendet werden.

2.2.2 Ozean

Nachdem im vorherigen Abschnitt die physikalischen Grundlagen der Atmosphärenmodellierung beschrieben wurden, soll dies in diesem Abschnitt für die Ozeanmodellierung geschehen. Wie die Atmosphäre folgt auch der Ozean thermo- und hydrodynamischen Gesetzmäßigkeiten, die neben Newtons Gravitationsgesetz im Wesentlichen auf der Erhaltung von Masse, Energie, Drehmoment und Impuls beruhen. Ein wichtiger Unterschied liegt im betrachteten Medium selbst. So weist das Wasser im Ozean eine rund 800 Mal größere Dichte als Luft auf, die Atmosphärenmasse beträgt mit $5,15 \cdot 10^{18}$ kg jedoch rund das Vierfache der Ozeanmassen (Kraus, 2004; Gill, 1982).

An dieser Stelle werden in Abschnitt 2.2.2.1 zunächst einige Grundbegriffe und oft verwandte Vereinfachungen in der Ozeanmodellierung angesprochen, bevor in Abschnitt 2.2.2.3 die Berechnung des GRACE-Dealiasing-Produkts AOD1B wiederum aus ECMWF-Modelldaten beschrieben wird.

Betrachtet werden hier nur Massenvariationen durch Ozeanströmungen, die nicht durch die äußeren Gezeitenkräfte von Sonne, Mond und den Planeten verursacht sind. Diese werden bei der GRACE-Prozessierung vorab von den Beobachtungsdaten reduziert. Näheres hierzu findet sich in Abschnitt 5.1.

2.2.2.1 Grundbegriffe der Ozeanmodellierung

Der Zustand des Ozeans lässt sich durch die sechs Größen

- Temperatur T ,
- Druck p ,
- Salzgehalt s und
- den drei Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ des Strömungsfeldes

charakterisieren, die im Folgenden miteinander verknüpft werden.

Zustandsgleichung. Die Dichte des Meerwassers hängt von Temperatur T , Salzgehalt s und Druck p ab, was sich formal in der Zustandsgleichung

$$\rho = \rho(T, p, s) \tag{2.85}$$

schreiben lässt. Der Zusammenhang ist allerdings komplex und nicht linear, lässt sich aber durch entsprechende Reihenentwicklungen, die in der Literatur beschrieben sind, approximieren (z. B. Gill, 1982). Es lässt sich festhalten, dass der Druck wegen der geringen Kompressibilität des Wassers einen vergleichsweise geringen Einfluss auf Dichteänderungen des Ozeans hat, während Salzgehalt und Temperatur umso größeren Einfluss haben.

Durch winderzeugte Turbulenzen kommt es in den oberen Schichten zu einer starken Durchmischung des Meerwassers, wodurch dieses in Tiefen bis ungefähr 200 m eine vertikal nahezu konstante Temperatur und konstanten Salzgehalt aufweist. In großen Wassertiefen ab circa 300 m zeichnet sich das Meerwasser durch eine räumlich homogene niedrige Temperatur und hohen Salzgehalt aus, was zu einer relativ hohen Dichte führt. Die dazwischen liegende Schicht ist in Bezug auf Temperatur und Salzgehalt und damit der Dichte sehr inhomogen und wird *Thermokline* genannt (Pickard und Emery, 1990).

Erhaltung von Masse, Salzgehalt und Wärme. Die Erhaltung der Ozeanmasse führt wie bei der Atmosphäre wieder auf die *Kontinuitätsgleichung* (vgl. Gleichung (2.50))

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.86)$$

die gleichzeitig bei inhomogener Dichte auch zum Erhalt des Volumens führt. Daneben kann ebenfalls die Erhaltung des Salzgehalts s formuliert werden.

Ist man an Austauschprozessen zwischen zwei Teilsystemen TS_1 und TS_2 interessiert, so lässt sich durch Messung des Salzgehaltes s_i in beiden Teilen die Volumenänderung und damit der Nettomassenfluss einfach berechnen. Da weder Salz aus dem Meer verschwindet noch zugeführt wird, gilt

$$\rho_1 V_1 s_1 = \rho_2 V_2 s_2, \quad (2.87)$$

worin V_i die Volumina der Teilsysteme sind.

Neben der Erhaltung von Masse und Salzgehalt lässt sich als weitere Erhaltungsgröße die Wärme (bzw. Energie) identifizieren. Nach dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (Gleichung (2.57)) stehen an der Wasseroberfläche zu- und abgeführte Wärme sowie durch Strömungen abtransportierte Wärme im Gleichgewicht. Für den Ozean sind dies (Stewart, 2008):

- die Sonneneinstrahlung Q_{sw} ,
- Infrarot(netto)abstrahlung Q_v ,
- Fühlbarer (sensibler) Wärmestrom Q_s (Energiezufuhr mit Erwärmung des Mediums),
- Latenter Wärmestrom Q_l (Energiezufuhr ohne Erwärmung des Mediums),
- Advektion Q_v (Wärmeabfuhr durch Strömungen),

die der *Wärmebilanzgleichung*

$$\frac{dQ}{dt} = Q_{sw} + Q_{lw} + Q_s + Q_l + Q_v \quad (2.88)$$

genügen müssen, worin $\frac{dQ}{dt}$ (in W/m^2) der resultierende Zu- oder Abgang ist. Auf die physikalische Modellierung der einzelnen Summanden wird an dieser Stelle nicht eingegangen, nähere Erläuterungen hierzu finden sich beispielsweise bei Stewart (2008). Die zugehörige Temperaturänderung folgt dann direkt aus Gleichung (2.57):

$$\frac{dQ}{dt} = c_p M \frac{dT}{dt}, \quad (2.89)$$

worin c_p wieder die spezifische Wärme von Meerwasser bei konstantem Druck ist und M die erwärmte Wassermasse.

Bewegungsgleichung: Navier-Stokes-Gleichungen. Das Strömungsfeld im Ozean wird durch die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{u} in einem rotierenden Koordinatensystem beschrieben (vgl. Gleichung (2.52)):

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \mathbf{g} + \mathbf{F}_R \quad (2.90)$$

mit

- der Druckgradientkraft $-\frac{1}{\rho} \nabla p$,
- der Corioliskraft $-2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$ (mit dem Drehvektor der Erde $\boldsymbol{\Omega}$),
- der Schwerkraft \mathbf{g} und
- weiteren Reibungskräften $\mathbf{F}_R = (F_x, F_y, F_z)^T$, darunter auch die Windreibung.

Für diese gelten die für die Bewegungsgleichung der Atmosphäre in Abschnitt 2.2.1.2 gemachten Feststellungen analog.

2.2.2.2 Modellvereinfachungen und weitere Begriffe der Ozeanmodellierung

Die zuvor vorgestellten physikalischen Zusammenhänge lassen sich für die tatsächliche Implementierung durch Hinzufügen weiterer Annahmen vereinfachen. Die Wesentlichen davon sollen an dieser Stelle vorgestellt werden.

Vereinfachte Navier-Stokes-Gleichungen. Unter einigen Annahmen lassen sich die *Navier-Stokes-Gleichungen* aus (2.53) bis (2.55) etwas vereinfachen. Unter der Annahme, dass die horizontalen Strömungen deutlich größer als die vertikalen sind, kann wegen $v \gg w$ der Term $2\Omega w \cos \varphi$ in Gleichung (2.53) weggelassen werden. Desweiteren kann die aus der Schiffsgravimetrie bekannte Eötvös-Korrektur $2\Omega u \cos \varphi$ aus Gleichung (2.55) wegen $2\Omega u \cos \varphi \ll g$ ebenfalls vernachlässigt werden. Mit dem Coriolisparameter $f = 2\Omega u \sin \varphi$ ergeben sich dann die vereinfachten Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_x \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + fu + F_y \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + F_z, \quad (2.93)$$

die für einfachere Modellbetrachtungen oft verwendet werden.

Boussinesq-Approximation. Bei der Boussinesq-Approximation wird angenommen, dass Dichteveränderungen lediglich vertikal auftreten und die Dichte in horizontaler Richtung als konstant angenommen werden kann. In der Boussinesq-Approximation wird aus dem Massenerhalt ein Volumenerhalt.

Geostrophisches Gleichgewicht, barotrope und barokline Strömung. Die einfachste Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ist ein stationärer Ozean, es gilt also $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}$. Nimmt man jetzt noch an, dass die Reibung vernachlässigbar klein ist, so vereinfachen sich die Gleichungen aus (2.91) bis (2.93) zu

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = fv \quad (2.94)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = fu \quad (2.95)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \quad (2.96)$$

und es stellt sich ein Gleichgewichtszustand ohne äußere Kräfte ein, das sogenannte *geostrophischen Gleichgewicht* zwischen Druckgradient und Corioliskraft in der Horizontalen und Druckgradient und Schwerkraft in der Vertikalen. Die Vertikalkomponente (2.96) wird daher auch hydrostatische Näherung genannt.

Treten äußere Kräfte auf, die oftmals zu horizontalen Druckgradienten führen, so entstehen horizontale Strömungen parallel zu den Isobaren (geostrophische Strömungen), die das geostrophische Gleichgewicht wieder herstellen. Je nach angenommener Dichteverteilung des Ozeans werden diese unterteilt in barotrope und barokline Strömungen.

Ist die Dichte homogen und proportional zum mit der Tiefe zunehmenden Druck, so sind, unter der Annahme konstanter Schwere, Flächen gleicher Dichte (Isopyknen) und Flächen gleichen Drucks (Isobaren) parallel zueinander. In jeder Tiefe sind die Isobaren gleich stark gegenüber den Äquipotentialflächen geneigt, so dass sich überall die gleiche Strömung ausbildet. Diese Situation wird als *barotrop* bezeichnet.

Bei einer *baroklinen Strömung* wird die Dichte nicht mehr als homogen angenommen, was insbesondere in den oberen Schichten des Ozeans zutrifft. In der Folge kommt es je nach Tiefe zu einer Neigung von Isobaren und Isopyknen, die mit zunehmender Tiefe abnimmt. Dementsprechend sind die geostrophischen Strömungen auch mit der Tiefe abnehmend.

Winderzeugte Strömungen. Die stärksten Strömungen in den oberflächennahen Schichten sind jedoch keine geostrophischen Strömungen, sondern werden durch die Reibung des Windes erzeugt. Diese Windschubspannung (*wind stress*) $\boldsymbol{\tau}$ kann modelliert werden als (Stewart, 2008):

$$\boldsymbol{\tau} = \rho_a C_d \mathbf{v}_{10}^2, \quad (2.97)$$

worin ρ_a die Luftdichte, C_d ein Reibungskoeffizient, der die Rauigkeit des Wassers (in m/s) beschreibt, und \mathbf{v}_{10} die Windgeschwindigkeit in zehn Meter Höhe sind. Bei Vorliegen eines homogenen und horizontalen Windes besteht ein Gleichgewicht zwischen Corioliskraft und der Reibungskraft. Gleichung (2.91) und Gleichung (2.92) vereinfachen sich mit $\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{0}$ zu:

$$fv = -\tau_x \quad \text{und} \quad fu = \tau_y. \quad (2.98)$$

Von besonderer Bedeutung sind die winderzeugten Strömungen, da die großen stabilen Windsysteme der Erde (z. B. die Westwind- oder Passatwindzone) eine ebenfalls recht stabile Strömung im Ozean erzeugen, die zu einem Wasseranstau insbesondere in einigen Gebieten der mittleren Subtropen führt. In diesen *Konvergenzzonen* genannten Gebieten kommt es zu geostrophischen Strömungen, die unter Einbeziehung der Küstenlinien zu den großen Strömungssystemen wie beispielsweise dem Golfstrom führen. Entsprechend gibt es auch Divergenzzonen, wo windinduziert Wassermassen abtransportiert werden.

Thermohaline Zirkulation. Thermohalinität bezeichnet die Eigenschaft des Meerwassers, durch Unterschiede in Temperatur (verursacht durch die Breitenabhängigkeit und jahreszeitliche Variationen der Sonneneinstrahlung) und der Salinität (Frischwasserzuflüsse oder Verdunstung) seine Dichte zu ändern.

Beispielsweise ist der Golfstrom Teil der thermohalinen Zirkulation. Er transportiert warmes, oberflächennahes Wasser Richtung Norden, wo es stark abkühlt. Durch diese Abkühlung kommt es zu einer Dichteerhöhung und damit zu einem höheren Gewicht, was zum Absinken von Wassermassen trotz der recht stabilen Schichtung der Ozeane beispielsweise in der Grönlandsee führt. Das abgesunkene Wasser strömt in den tiefen Schichten in Richtung der Divergenzzonen, wo es schließlich wieder aufsteigt. Hierdurch kommt es zu einer großräumigen, über alle Weltmeere verteilte, aber sehr langsamen Umwälzbewegung, die oft als *Global Conveyor Belt* (globales Förderband) (Stewart, 2008) bezeichnet wird.

Ozeanbodendruck. Der Ozeanbodendruck beschreibt den Druck der Meerwassersäule und der darüber liegenden Luftsäule auf ein betrachtetes Flächenelement:

$$p_b = p_o + p_s, \quad (2.99)$$

worin p_o der Druck der Wassersäule und p_s der Oberflächendruck der Atmosphäre ist.

Mit der hydrostatischen Gleichung und mit einer mittleren ruhenden Meeresoberfläche bei $z = 0$, der aktuellen Meeresoberfläche H_s und der Wassertiefe H_b folgt für den Ozeanbodendruck

$$p_b = \int_{z=-H_b}^{H_s} g\rho dz + p_s \approx g_0\rho_0 H_s + g_0 \int_{z=-H_b}^{H_s} \rho dz + p_s \quad (2.100)$$

mit einer mittleren Dichte ρ_0 und konstanter Schwere g_0 .

2.2.2.3 Ozean-Dealiasing mit dem Ozeanströmungsmodell OMCT

Zur Bestimmung ozeanischer Schwerevariationen wird das barokline Ozeanmodell OMCT (*Ocean Model for Circulation and Tides*) mit Daten des ECMWF operationell betrieben (Dobslaw und Thomas, 2007).

Das Modell basiert auf den Navier-Stokes-Gleichungen, der Kontinuitätsgleichung und Erhaltungsgleichungen für Salz und Wärme, wie sie in Abschnitt 2.2.2.1 beschrieben wurden. Weiterhin wurde die

Boussinesq-Approximation und die hydrostatische Näherung angewandt. Daneben ist ein prognostisches thermodynamisches See-Eis-Modell implementiert. Die Integrationsschrittweite beträgt 30 Minuten, die horizontale Auflösung des Modells beträgt konstant $1,875^\circ$ in Länge und Breite, in der Vertikalen sind 13 Schichten implementiert (Dobslaw und Thomas, 2007).

Zunächst wurde ein Quasi-Gleichgewichtszustand hergestellt. Hierzu wurde das Ozeanmodell zunächst für 265 Jahre mit klimatologischen Windschubspannungsdaten (vgl. Gleichung (2.97)) angetrieben. Anschließend wird das Modell mit Daten des ECMWF angetrieben und Ausgabedaten alle sechs Stunden erzeugt.

Um eine konsistente Bestimmung der Schwerevariationen durch Atmosphäre und Ozean zu erreichen werden für beide Größen die gleichen Eingabedaten des ECMWF verwendet. Zur Bestimmung der ozeanischen Schwerevariationen sind dies (für jeden Zeitpunkt):

- Windgeschwindigkeiten in zehn Metern Höhe,
- Atmosphärentemperaturen in zwei Metern Höhe,
- Frischwasserzuflüsse, die bestimmt wurden aus der Differenz von Niederschlag und Verdunstung, und
- Oberflächendruckfelder.

Alle Daten liegen auf einem $0,5^\circ$ -Gitter vor und werden auf das OMCT-Gitter interpoliert.

Da ein Antrieb über den Luftdruck verwandt wird, ist keine weitere Annahme über die Antwort des Ozeans auf die atmosphärische Last nötig. Als Ausgabedaten werden unter anderem Ozeanbodendruckfelder p_o zu den Zeitpunkten 0:00, 6:00, 12:00 und 18:00 Uhr erzeugt, die den Ozeanbodendruck ohne die Atmosphärensäule widerspiegeln. Hiermit können dann die durch Variationen im Ozean induzierten Schwerevariationen berechnet werden:

$$\left. \begin{array}{l} c_{nm}(t) \\ s_{nm}(t) \end{array} \right\} = \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \cdot \frac{3}{4\pi R\bar{\rho}} \iint_{\Phi} \frac{p_o(t, \lambda_Q, \vartheta_Q)}{g_0} \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \\ S_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \end{array} \right\} d\Phi. \quad (2.101)$$

2.2.3 Kontinentaler Wasserkreislauf

Die physikalische Modellierung hydrologischer Vorgänge ist ein sehr breit gefächertes Aufgabenspektrum, das von kleinräumiger Modellierung der physikalischen Prozesse zum Beispiel auf einer Ackerfläche über die Modellierung einzelner Flusseinzugsgebiete bis hin zur globalen Modellierung des kontinentalen Wasserkreislaufs reicht. Unterschieden werden können rein empirische Modellansätze und physikalisch determinierte Modellansätze. Diese reichen je nach Detaillierungsgrad von den sogenannten Prozessmodellen bis hin zu den konzeptionellen Modellen.

Prozessmodelle dienen dabei einer möglichst detaillierten physikalischen Modellierung mit physikalisch begründeten, meist direkt messbaren Parametern. Ihre Anwendung auf größeren räumlichen Skalen scheitert oft an der unzureichenden Verfügbarkeit von räumlichen und zeitlichen Informationen über die physikalischen Größen.

Konzeptionelle Modelle sind durch notwendige und sinnvolle Vereinfachungen und Modellreduktionen aus den Prozessmodellen hervorgegangen oder beschreiben die hydrologischen Prozesse mit Hilfe von Analogien (z. B. Einzellinearspeicher). In der Praxis und insbesondere in der globalen Modellierung haben diese Modelle ihre Zweckmäßigkeit unter Beweis gestellt. Ein häufiger Nachteil konzeptioneller Modelle ist, dass die Modellparameter teilweise keinen direkt messbaren physikalischen Bezug haben.

Im folgenden Abschnitt 2.2.3.1 wird der zu modellierende hydrologische Kreislauf kurz erläutert, bevor in Abschnitt 2.2.3.2 ein globales, konzeptionelles Modell skizziert werden soll: das *WaterGAP Global Hydrology Model* (WGHM, Döll et al., 2003; Hunger und Döll, 2008).

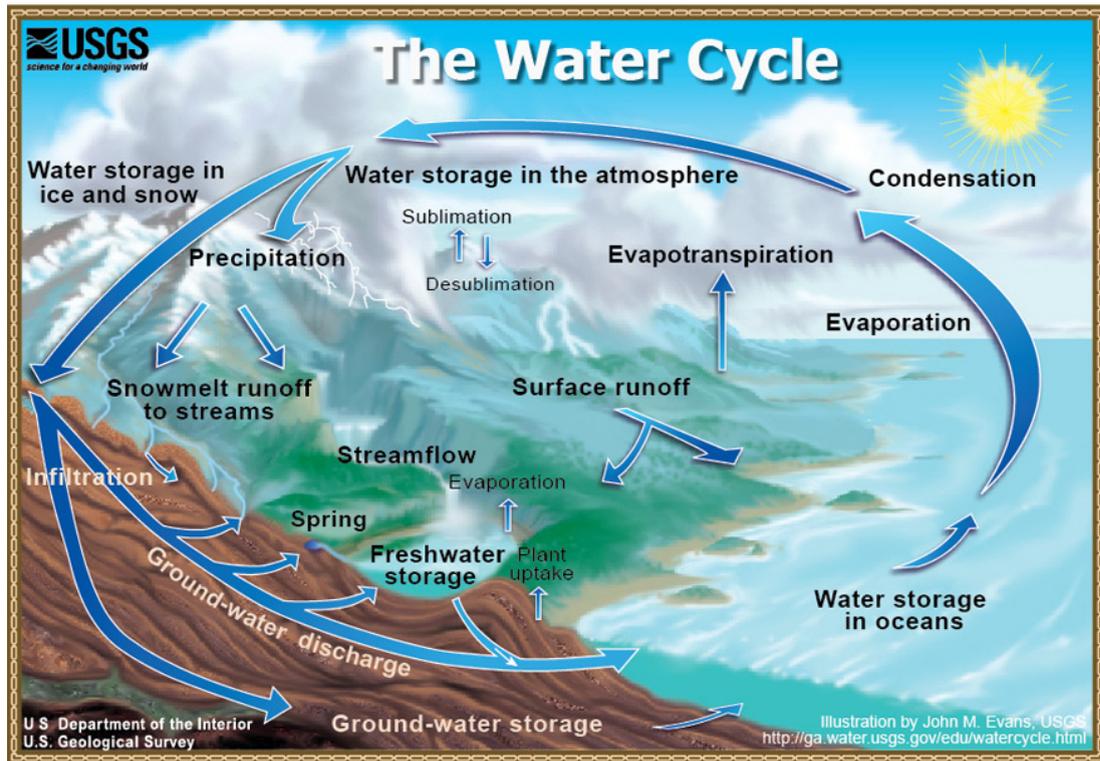


Abbildung 2.3: Die Prozesse im kontinentalen Wasserkreislauf (Quelle: <http://ga.water.usgs.gov/edu/watercycle.html>).

2.2.3.1 Hydrologischer Kreislauf

Der Wasserkreislauf transportiert Wasser zwischen Atmosphäre, Ozean und dem Land. Die wesentliche antreibende Kraft ist dabei die Sonneneinstrahlung, gleichzeitig ist die Schwerkraft für die Zirkulation und das Fließen von Wasser verantwortlich. Abbildung 2.3 zeigt die physikalischen Prozesse, die im Folgenden erläutert werden sollen. Die angegebenen Zahlenwerte bezeichnen den Wassertransport durch den entsprechenden Prozess und sind entnommen aus Peixoto und Oort (1991, S.271, Abb. 12.2).

Verdunstung. Die Sonneneinstrahlung bewirkt Verdunstung des Wassers an der Erdoberfläche, wobei es in die Atmosphäre gelangt. Hierbei wird unterschieden in Transpiration, also der Verdunstung von Wasser aus Tier- und Pflanzenwelt, und Evaporation, der Verdunstung über freien Land- ($62 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{Jahr}$) oder Wasserflächen ($361 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{Jahr}$). Die Summe aus den beiden Verdunstungsarten wird *Evapotranspiration* genannt. Diese ist abhängig von Faktoren wie der Temperatur der Oberfläche und der bodennahen Luftschichten, aber auch vom Wassergehalt des Bodens, der Vegetation, von Bodenbedeckung und Sonneneinstrahlung.

Transport in der Atmosphäre. Wärmekonvektion und Winde transportieren den Wasserdampf in der Luft weiter. Bei Abkühlung entstehen durch Kondensation an winzigen Partikeln Wassertropfen oder Eiskristalle, die optisch als Wolken erkennbar sind. Dabei verbleibt das Wasser durchschnittlich 10 Tage in der Atmosphäre. Von den Ozeanen verdunstetes Wasser wird so teilweise wieder an Land transportiert. Der sich dauerhaft in der Luft befindliche Wasserdampf wird mit $3 \cdot 10^{12} \text{ m}^3$ angegeben.

Niederschlag. Werden die Wassertropfen durch weitere Abkühlung zu groß, so kehren sie als Regen oder bei niedrigen Temperaturen als Schnee wieder zur Erde zurück. Dabei finden drei Viertel der Niederschläge über den Ozeanen ($324 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{Jahr}$), der Rest über Land ($99 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{Jahr}$) statt.

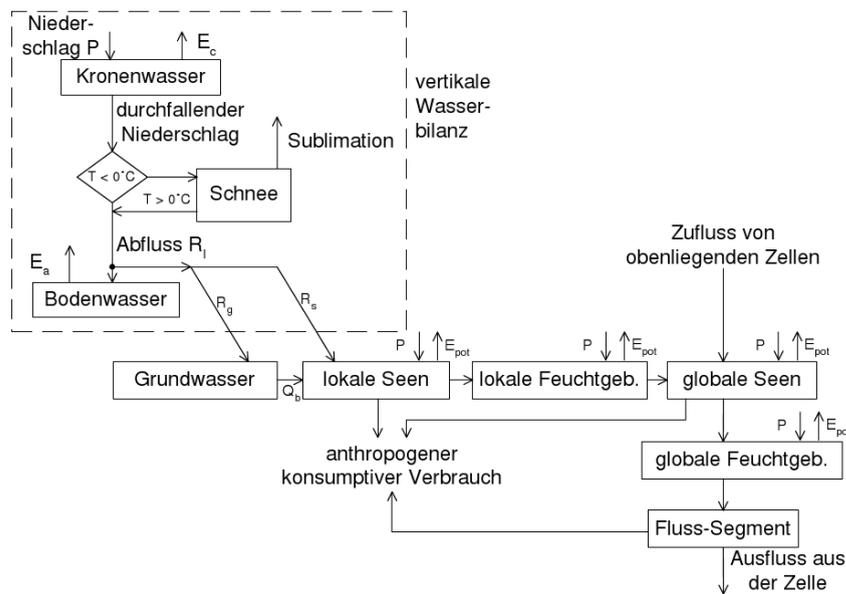


Abbildung 2.4: Modellierte Wasserspeicher des WGHM und die dazwischen stattfindenden Flüsse (aus Kaspar, 2004).

Speicherung an Land und Abfluss. Ein Teil des auftreffenden Niederschlags verdunstet direkt wieder. Daneben kann es zu Absorption durch Pflanzen, Verbleiben an der Oberfläche (Seen und Flüsse), Abfluss in Flüssen oder Speicherung kommen. Letztere geschieht durch Bildung von Eis aus Schnee oder Eindringen in den Boden. Diese Infiltration ist von vielen Faktoren wie Geländeneigung, Vegetation oder Bodenart abhängig. Reicht die Versickerung bis in wasserundurchlässige Schichten, so kann sich hier neues Grundwasser bilden. Ein großer Teil des Niederschlags (insgesamt $37 \cdot 10^{12} \text{ m}^3/\text{Jahr}$) kehrt jedoch durch Abfluss in Flüssen oder aus dem Grundwasser wieder zurück in die Ozeane.

Die Gesamtwassermenge an Land, bestehend aus Gletschern, Oberflächen- und Grundwasser und in der Biosphäre gespeichertes Wasser wird mit $33,6 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$ abgeschätzt. Dies entspricht 2,5 Prozent der in den Ozeanen vorhandenen Wassermenge ($1350 \cdot 10^{15} \text{ m}^3$).

2.2.3.2 Globale hydrologische Modellierung am Beispiel des WGHM

Das globale hydrologische Modell WGHM ist die hydrologische Komponente des Modells WaterGAP (*Water – Global Assessment and Prognosis*), daneben gibt es noch eine Komponente zur anthropogenen Wassernutzung. Die Modellierungsgrundzüge des WGHM sind bei Kaspar (2004) ausführlich dargelegt, an dieser Stelle sollen diese lediglich kurz skizziert werden.

Das WGHM modelliert auf einem $0,5^\circ$ -Gitter die tägliche Wasserbilanzgleichung

$$\Delta S = P - E - Q. \quad (2.102)$$

Hierin sind ΔS die Gesamtwasserspeicheränderung, P der Niederschlag (*precipitation*), E die Evapotranspiration und Q der Abfluss in jeder Speicherzelle. Der Gesamtwasserspeicher S setzt sich zusammen aus den Wasserspeichern (vgl. Abbildung 2.4):

- S_c Kronenwasser auf Pflanzen (*canopy*),
- S_{sn} Schnee (*snow*),
- S_{gw} Grundwasser (*groundwater*),
- S_s Bodenwasser (*soil*) und

- S_{sf} Oberflächenwasser (*surface*), aufgeteilt in
 - S_{r} Flüsse (*rivers*)
 - S_{wl} Feuchtgebiete (*wetlands*)
 - S_{l} Seen (*lakes*).

Die vertikale Bilanzgleichung umfasst dabei das Auffangen von Wasser in Baumkronen, Schneeakkumulation und Niederschlag direkt auf den Boden. In der horizontalen Bilanzgleichung werden Grundwasser- und Oberflächenabflüsse berechnet. Jede Gitterzelle ist dabei Bestandteil des Flussnetzwerks, für das eine Abflusstopologie in Form des globalen DDM30 (*Drainage Direction Map 30*, Döll und Lehner, 2002) vorliegt, und verfügt über Informationen zu Bodenbeschaffenheit, Bewuchs, Hydrogeologie oder Wasserspeichern, Seen oder Feuchtgebieten. Diese Informationen kommen aus verschiedenen globalen Datenquellen, die für die aktuelle Version des WGHM bei Hunger und Döll (2008) beschrieben sind. Das Modell wird angetrieben von Klimadaten über Niederschlag, Temperatur, Bewölkung und Anzahl der Regentage.

Da es sich um ein konzeptionelles Modell handelt, werden die physikalischen Prozesse des Wasserkreislaufs in vereinfachter Weise dargestellt. Dies geschieht im Allgemeinen durch proportionale Gegenüberstellung von bekannten und gesuchten Größen in Verbindung mit Proportionalitätsfaktoren, die aus gegebenen Hilfsdatensätzen (z. B. zur Bodenbedeckung) empirisch bestimmt werden (Regressionsverfahren). Daher sind die Modellparameter nicht direkt messbar, lassen sich den verschiedenen Prozessen jedoch eindeutig zuordnen. Die Modellierung des Wasserkreislaufs im WGHM ist in Abbildung 2.4 dargestellt und wird im Folgenden auf der Grundlage von Kaspar (2004), Döll et al. (2003) und Hunger und Döll (2008) skizziert.

Atmosphärischer Antrieb: potentielle Evapotranspiration. Um zu Beginn den Einfluss der atmosphärischen Bedingungen auf die Evapotranspiration vom Einfluss des Bewuchses zu trennen, wird zunächst aus den Klimadaten die potentielle Evapotranspiration (in mm/Tag)

$$E_{\text{p}} = \alpha_{\text{PT}} \frac{\Delta}{\Delta + \gamma_{\text{psy}}} (R_{\text{n}} - G) \quad (2.103)$$

bestimmt, die die Menge Wasser quantifiziert, die bei gegebenen Atmosphärenbedingungen (Temperatur, Niederschlag, Bewölkung) von einer idealisierten Grasfläche verdunsten kann. In der *Priestley-Taylor-Gleichung* (2.103) (Priestley und Taylor, 1972) hängt die potentielle Evapotranspiration vom Sättigungsdampfdruck Δ (in kPa/°C), der Psychrometerkonstanten γ_{psy} (in kPa/°C), der Nettostrahlung R_{n} (in mm/Tag), dem Bodenwärmestrom G (in mm/Tag) und dem empirisch zu bestimmenden Priestley-Taylor-Koeffizienten α_{PT} ab. Details zu den Größen, ihrer Bestimmung und insbesondere ihren physikalischen Einheiten finden sich bei Kaspar (2004). Nachdem der Atmosphäreinfluss auf die Evapotranspiration quantifiziert ist, kann mit der eigentlichen Simulation des Wasserkreislaufs begonnen werden.

Tatsächliche Evapotranspiration. Ein Teil des auf eine Zelle auftreffenden Niederschlags P wird zunächst von den Baumkronen aufgehalten. Diese bilden den Kronenwasserspeicher S_{c} , der solange aufgefüllt wird wie $S_{\text{c}} < S_{\text{c,max}}$. Die tatsächliche Evapotranspiration E_{c} berechnet sich dann im WGHM nach Deardorff (1978) (in mm/Tag):

$$E_{\text{c}} = E_{\text{p}} \left(\frac{S_{\text{c}}}{S_{\text{c,max}}} \right)^{\beta} \quad (2.104)$$

Darin wird angenommen, dass nur ein Teil der Blattflächen mit Wasser bedeckt ist, was durch den Parameter $\beta = 2/3$ (Deardorff, 1978) ausgedrückt wird. Der maximale Kronenwasserspeicher $S_{\text{c,max}}$ hängt ab von der Blattfläche und der Menge des Bewuchses, die durch zwei weitere Faktoren ausgedrückt werden können (Kaspar, 2004).

Schneeakkumulation und Bodenwasserspeicherbilanz. Der Niederschlag, der nicht durch Bewuchs aufgehalten wird, trifft schließlich auf den Boden. Bei Temperaturen unter dem Gefrierpunkt T_f wird das Wasser als Schnee P_{sn} im Schneespeicher S_{sn} akkumuliert. Steigt die aktuelle Temperatur T über den Gefrierpunkt, so setzt Schneeschmelze ein, wobei die Menge des Schmelzwasser M (für *melting water*) im Modell proportional zur Differenz aus aktueller Temperatur und Gefrierpunkt ist:

$$M = K_m(T - T_f). \quad (2.105)$$

Mit dem Schmelzwasser und dem effektiv auf dem Boden auftreffenden Niederschlag $P_{eff} = P - P_{sn} + M$ gilt dann für die Änderung des Bodenwasserspeichers

$$\frac{dS_s}{dt} = P_{eff} - R_L - E_a \quad (2.106)$$

mit der aktuellen Evapotranspiration E_a des Bodenspeichers und dem lokalen Abfluss R_L . Der Bodenwasserspeicher repräsentiert dabei den für Pflanzen nutzbaren Teil des versickerten Wassers. Bei [Kaspar \(2004\)](#) finden sich hierzu nähere Details.

Neben Änderungen im Bodenspeicher führt auftreffender Niederschlag auch zum direkten lokalen Abfluss ohne in den Bodenwasserspeicher einzugehen. Dieser ist abhängig vom maximalen Bodenwasserspeicher $S_{s,max}$:

$$R_L = P_{eff} \left(\frac{S_s}{S_{s,max}} \right)^\gamma \quad (2.107)$$

mit dem Abflusskoeffizienten γ , der in der ursprünglichen WGHM-Implementierung den einzigen Kalibrierparameter darstellt. [Werth und Güntner \(2010\)](#) führen in einem neueren Ansatz eine multikriterielle Kalibrierung mit mehreren Parametern durch, wobei die sechs für ein betrachtetes Flusseinzugsgebiet sensitivsten Kalibrierparameter hierbei zur Kalibrierung verwendet werden.

Der lokale Abfluss wird aufgespalten in einen schnell abfließenden Teil, der an der Oberfläche verbleibt (S_{sf}) und hier, je nach Topographie der Zelle, in lokalen (d. h. sich nicht über den Rand der Zelle erstreckenden) Seen S_l oder Feuchtgebieten S_{wl} gespeichert wird. Der Rest (R_g) sickert ins Grundwasser ein und landet von dort als Grundwasserabfluss Q_g wieder an der Oberfläche. Dieser Grundwasserabfluss ist hierbei proportional zum Grundwasserspeicher. Da keine globalen Informationen über Grundwasserflüsse verfügbar sind, werden die Grundwasserabflüsse in den Oberflächenwasserspeicher S_{sf} und seine Teilspeicher eingeleitet. Das dazugehörige Modell wurde von [Döll et al. \(2002\)](#) entwickelt. R_g ist hierbei abhängig von der Geländebeschaffenheit, die durch diverse Faktoren beschrieben ist, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen werden soll. Details finden sich bei [Kaspar \(2004\)](#).

Oberflächenwassertransport. Die Oberflächenspeicher für (globale) Seen S_l , Feuchtgebiete S_{wl} und Flüsse S_r werden gespeist von abfließendem Oberflächenwasser aus den lokalen Speichern, dem Grundwasserspeicher, dem Zufluss oberhalb liegender Zellen und dem direkt auf die Zelle treffenden Niederschlag (vgl. [Abbildung 2.4](#)). Die Verdunstung über den Wasserflächen entspricht der potentiellen Evapotranspiration aus [Gleichung \(2.103\)](#) mit einer Albedo von $\alpha = 0,08$ für Wasserflächen und einer zusätzlichen Abhängigkeit von der durch die Verdunstung sinkenden Wasserhöhe ([Hunger und Döll, 2008](#)).

Der Abfluss Q aus Seen S_l und Feuchtgebieten S_{wl} ist proportional zum Verhältnis von aktuellem und maximalem Speicherzustand mit dem Abflusskoeffizienten $k_{l,wl}$:

$$Q_{l,wl} = k_{l,wl} S_{l,wl} \left(\frac{S_{l,wl}}{S_{l,wl(max)}} \right)^x. \quad (2.108)$$

Mit $x = 1,5$ ist der Abfluss aus Seen schneller als der Abfluss aus Feuchtgebieten, für die $x = 2,5$ gesetzt wird. Diese Abflüsse erreichen schließlich das entsprechende Flusselement mit dem Speicher S_r , durch das Wasser von einer Zelle in die nächste transportiert werden kann. Der Speicherabfluss ist dabei gegeben als

$$Q_r = \frac{v_r}{s} S_r \quad (2.109)$$

mit dem Abstand zweier Gitterzellen s und der Abflussgeschwindigkeit v_r . Die Richtung des Abflusses ist dabei durch die Abflusstopologie der DDM30 festgelegt (Döll und Lehner, 2002).

In einem letzten Berechnungsschritt werden die lokalen Speicher, Flüsse und Seen soweit geleert, bis der durch das Wassernutzungsmodul des WaterGAP-Modells bestimmte anthropogene Wasserbedarf gedeckt ist. Weitere Details hierzu finden sich bei Döll et al. (2003). Die aktuellen Speicherstände des Tages werden abschließend als Ausgabedaten zur Verfügung gestellt.

2.2.4 In dieser Arbeit verwendete Modelldaten

In diesem Abschnitt wurden die Quellen für zeitliche Variationen des Erdschwerefeldes zunächst allgemein beschrieben und charakterisiert. Anschließend wurde für die Prozesse in der Atmosphäre, im Ozean und im kontinentalen Wasserkreislauf die dynamische Modellierung näher erläutert. Hierbei sind sich Atmosphäre und Ozean in der zu modellierenden Dynamik sehr ähnlich und unterscheiden sich im Wesentlichen in den Eigenschaften des betrachteten Mediums selbst. Es wird oftmals ein deterministischer Modellansatz verwandt, dessen Modellparameter sich in der Regel direkt messen lassen. Im Gegensatz hierzu werden bei der globalen hydrologischen Modellierung eher konzeptionelle Modellansätze verwandt, bei denen die Prozesse zwar eindeutig zugeordnet werden können, die eigentlichen Modellparameter aber nicht direkt messbar sind.

Eine vollständige und konsistente Modellierung der Prozesse im System Erde liegt derzeit noch nicht vor. In dieser Arbeit werden daher Modelldaten der Subsysteme Atmosphäre, Ozean und kontinentale Hydrologie verwendet. Im Einzelnen sind dies:

- Für die Atmosphäre: der Atmosphärenanteil des AOD1B-Produkts aus Daten des ECMWF,
- für die Ozeanströmungen: Daten des OMCT und
- für die kontinentale Hydrologie: das WGHM.

Das AOD1B-Produkt und das OMCT liegen in sechsständiger Auflösung als Kugelfunktionsreihe bis Grad und Ordnung 100 vor. Die gegitterten, täglichen WGHM-Modelldaten werden in eine Kugelfunktionsreihe bis Grad und Ordnung 120 entwickelt. Die Eingangsdaten des AOD1B-Produkts werden auf tägliche Werte gemittelt, um eine einheitliche zeitliche Auflösung zu erreichen. Die Zeitreihe umfasst dabei für alle Daten den Zeitraum 01.01.1976 bis 31.12.2007.

3. Analyse von GRACE L1B-Daten

Ziel dieser Arbeit ist die Bestimmung zeitlicher Variationen des Erdschwerefeldes durch die Nutzung der GRACE-Satellitendaten. Da sich eine hohe zeitliche Auflösung – hier werden Tagesmittelwerte angestrebt – nur durch Hinzunahme zusätzlicher Informationen erreichen lässt, soll an dieser Stelle zunächst beschrieben werden, wie sich das Wissen über das zeitliche Verhalten der Massenverlagerungen in den Subsystemen so nutzen lässt, dass es auf einfache Weise in die bestehenden Auswerteprozesse bei der Bestimmung der zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes aus GRACE-Satellitendaten integriert werden kann.

Hierzu werden zunächst in Abschnitt 3.1 die Grundzüge des *Beobachtungsmodells* vorgestellt, das am Institut für Geodäsie und Geoinformation der Universität Bonn bei der GRACE-Prozessierung Anwendung findet. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 ein *Prozessmodell* entwickelt, welches das zeitliche Verhalten des Erdschwerefeldes in geeigneter Weise approximiert, indem es die zeitlichen Korrelationen zwischen aufeinanderfolgenden Epochen berücksichtigt. Die Verknüpfung der beiden Informationstypen *Prozessmodell* und *Beobachtungsmodell* im Rahmen eines Kalman-Filters wird dann in Abschnitt 3.3 beschrieben. In Abschnitt 3.4 erfolgt ein Vergleich mit anderen Ansätzen bei der Prozessierung von GRACE Beobachtungen, die ebenfalls zeitliche Korrelationen modellieren, bevor abschließend in Abschnitt 3.5 die wesentlichen Schritte bei der Analyse der GRACE L1B-Daten noch einmal zusammengefasst werden.

3.1 Beobachtungsmodell

Das in dieser Arbeit verwendete Beobachtungsmodell beruht auf Arbeiten von Mayer-Gürr (2006) und Eicker (2008) und wurde in dieser Arbeit nicht erweitert. Dennoch wird es in diesem Abschnitt der Vollständigkeit halber wiedergegeben. Die Ausführungen folgen dabei in wesentlichen Zügen der zusammenfassenden Darstellung bei Eicker (2008).

3.1.1 Kleinste-Quadrate-Ausgleichung im Gauss-Markoff-Modell

An dieser Stelle soll zunächst beschrieben werden, wie die gesuchten Schwerefeldkoeffizienten aus gegebenen GRACE-Beobachtungen im Gauss-Markoff-Modell (GMM) bestimmt werden können. Hierzu findet sich auch zahlreiche Literatur, z. B. Koch (1997) oder Niemeier (2002).

Die n Beobachtungen werden im $n \times 1$ -Vektor $\bar{\mathbf{l}}$ und die u unbekannt Parameter im $u \times 1$ -Vektor $\bar{\mathbf{x}}$ angeordnet. Die Beobachtungen mit dem Messrauschen \mathbf{v} werden durch das funktionale Modell

$$\bar{\mathbf{l}} = f(\bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{v} \tag{3.1}$$

mit den unbekannt Parameter $\bar{\mathbf{x}}$ verknüpft. Typischerweise ist dabei die Anzahl der Beobachtungen $n = \dim \bar{\mathbf{l}}$ deutlich größer als die Anzahl der unbekannt Parameter $u = \dim \bar{\mathbf{x}}$. Ist das Modell nicht linear, so wird eine Linearisierung nötig. Hierfür werden Näherungswerte für die unbekannt Parameter eingeführt und genäherte Beobachtungen aus dem funktionalen Modell bestimmt. Der Einfluss dieser Näherungswerte auf die Beobachtungen bestimmt sich dann mit:

$$\mathbf{l}_0 = f(\mathbf{x}_0). \tag{3.2}$$

Durch Entwicklung in eine Taylor-Reihe

$$\bar{\mathbf{l}} = \mathbf{l}_0 + \left. \frac{\partial f(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{\mathbf{x}}} \right|_0 (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0) + \dots \tag{3.3}$$

und Abbruch nach dem linearen Term wird das funktionale Modell linearisiert. Die reduzierten Beobachtungen und Parameter berechnen sich dann nach

$$\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}} - \mathbf{l}_0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_0. \tag{3.4}$$

Die partiellen Ableitungen in Gleichung (3.3) werden in der Design-Matrix \mathbf{A} mit

$$\mathbf{A} = (a_{ik}) = \left(\frac{\partial f_i(\bar{\mathbf{x}})}{\partial \bar{x}_k} \Big|_0 \right) \quad (3.5)$$

zusammengefasst, was zusammen mit Gleichung (3.4) auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{l} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\mathbf{v}\} = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1} \quad (3.6)$$

führt. Unter der Annahme, dass der Erwartungswert der zufälligen Fehler \mathbf{v} verschwindet und die Kovarianzmatrix, bis auf einen Gewichtungsfaktor σ , a priori bekannt ist und der Gewichtsmatrix der Beobachtungen \mathbf{P} entspricht,

$$\mathcal{E}\{\mathbf{v}\} = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}\{\mathbf{v}\} = \mathcal{C}\{\mathbf{l}\} = \sigma^2 \mathbf{P}^{-1}, \quad (3.7)$$

lässt sich das überbestimmte Gleichungssystem aus Gleichung (3.6) im Sinne eines Gauss-Markoff-Modells lösen.

Die Lösung dieses Gleichungssystems ergibt sich aus der Minimierung der Quadratsumme der Residuen

$$\Omega = \frac{1}{\sigma^2} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{P} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\mathbf{x}), \quad (3.8)$$

wofür

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} - 2\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = 0 \quad (3.9)$$

eine notwendige Bedingung ist. Dies führt auf das Normalgleichungssystem

$$\mathbf{N}\mathbf{x} = \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l}, \quad (3.10)$$

dessen Lösung die Schätzung der unbekannt Parameter im Sinne der Kleinste-Quadrate-Ausgleichung ergibt:

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{n}. \quad (3.11)$$

Sie ist gleichzeitig auch die beste lineare erwartungstreue Schätzung und führt zur Maximierung der Likelihoodfunktion (Koch, 1997).

Die Kovarianzmatrix der unbekannt Parameter $\mathcal{C}\{\hat{\mathbf{x}}\}$ lässt sich durch Anwendung des Varianzfortpflanzungsgesetzes auf Gleichung (3.11) unter Berücksichtigung von Gleichung (3.6) bestimmen:

$$\mathcal{C}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \sigma^2 \mathbf{N}^{-1}. \quad (3.12)$$

Eine Schätzung für den Varianzfaktor σ ergibt sich dann aus der Quadratsumme der Residuen

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n - u} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}})^T \mathbf{P} (\mathbf{l} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.13)$$

was schließlich zur geschätzten Kovarianzmatrix der unbekannt Parameter

$$\hat{\mathcal{C}}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \hat{\sigma}^2 \mathbf{N}^{-1} \quad (3.14)$$

führt.

Zur Bestimmung der unbekannt Gravitationsfeldparameter \mathbf{x} im Gauss-Markoff-Modell muss das funktionale Modell aus Gleichung (3.6) gegeben sein. Die für diese Arbeit verwendeten Beobachtungsgleichungen für die GRACE-Beobachtungstypen GPS-Orbits und K-Band-Distanzmessungen finden sich in aller Ausführlichkeit bei Mayer-Gürr (2006). Im folgenden Abschnitt wird die bei Eicker (2008) zu findende Zusammenfassung wiedergegeben.

3.1.2 Nutzung der mit GPS bestimmten Satellitenbahnen

Beide Satelliten des GRACE-Systems tragen einen Empfänger für das Global Positioning System (GPS) an Bord, um Satellite-to-Satellite-Tracking-Daten (SST-Daten) in der hoch-niedrig-Konfiguration (*high-low SST*) zu messen. Die Nutzung dieser Beobachtungsgruppe geschieht in einem Zwei-Schritt-Verfahren.

In einem ersten Schritt werden die ursprünglichen GPS-Beobachtungen (Code- und Phasenmessungen) genutzt, um die Bahnen (*Orbits*) der beiden GRACE-Satelliten jede für sich zu bestimmen. Die Möglichkeiten der Auswertung von GPS-Beobachtungen sollen an dieser Stelle nicht näher erläutert werden. Hierzu sei auf die zahlreiche Literatur zu diesem Thema verwiesen, z. B. bei Hofmann-Wellenhof et al. (1997) oder Xu (2007). Spezielle Anwendungen auf die Bahnbestimmung der GRACE-Satelliten finden sich dann beispielsweise bei Kang et al. (2006a) oder bei Jäggi et al. (2007). Kang et al. (2006b) und Van Helleputte und Visser (2008) verwenden hierbei zusätzlich zu den reinen GPS-Beobachtungen noch die Daten der ebenfalls an Bord befindlichen Beschleunigungsmesser. Das Ergebnis dieser GPS-Auswertung ist ein quasi-kontinuierlicher Orbit für die beiden Satelliten GRACE-A und GRACE-B.

Diese werden nun in einem zweiten Schritt zur Schwerefeldbestimmung genutzt. Einen systematischen Überblick zu den Möglichkeiten, kinematisch bestimmte Satellitenbahnen zur Bestimmung des Erdschwerefeldes zu nutzen, findet sich bei Löcher (2010). Dieser unterteilt die Verfahren (a) in solche, die auf differentieller Verbesserung einer Referenzbahn beruhen (z.B. Nutzung der Variationsgleichungen), (b) Verfahren, die auf Bilanzgleichungen nichtlinearer Bahnfunktionale (z.B. als prominentester Vertreter die Energiebilanz) und (c) Verfahren, die auf der linearisierten Bewegungsgleichung basieren. Zu dieser Gruppe gehört auch der für diese Arbeit verwendete Ansatz.

Er basiert auf einem Integralgleichungsansatz, zuerst vorgeschlagen von Schneider (1968) im Zusammenhang mit der Orbitbestimmung und dann angewendet auf die Gravitationsfeldbestimmung von Reigber (1969). Mayer-Gürr (2006) verfeinert diesen, so dass er sich auch für die Verwendung der K-Band-Beobachtungen nutzen lässt. In diesem Abschnitt wird der für diese Arbeit verwendete Integralgleichungsansatz, der bei Mayer-Gürr (2006) ausführlich beschrieben ist, erläutert. Die kurze Zusammenfassung, wie sie hier im Folgenden wiedergegeben wird, findet sich bei Eicker (2008).

Integralgleichungsansatz. Der Zusammenhang zwischen der Bewegung des Satelliten entlang seiner Bahn und den auf ihn wirkenden Kräften \mathbf{f} wird durch die Newton-Eulersche Bewegungsgleichung (bezogen auf die Einheitsmasse)

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{f}(t; \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) \quad (3.15)$$

beschrieben mit dem Ort \mathbf{r} , der Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}$ und der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ des Satelliten für einen Zeitpunkt t .

Zweifache Integration dieser nichtlinearen Differentialgleichung mit den Randwerten

$$\mathbf{r}_A := \mathbf{r}(t_A), \quad \mathbf{r}_B := \mathbf{r}(t_B) \quad \text{mit} \quad t_A < t_B \quad (3.16)$$

für den Startpunkt A und den Endpunkt B des Bahnboogens liefert die Integralgleichung

$$\mathbf{r}(\tau) = (1 - \tau) \mathbf{r}_A + \tau \mathbf{r}_B - T^2 \int_{\tau'=0}^1 K(\tau, \tau') \mathbf{f}(\tau', \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) d\tau' \quad (3.17)$$

mit den normierten Zeitpunkten

$$\tau = \frac{t - t_A}{T} \quad \text{mit} \quad T = t_B - t_A \quad (3.18)$$

und dem Integralkern

$$K(\tau, \tau') = \begin{cases} \tau(1 - \tau') & \text{für} \quad \tau \leq \tau' \\ \tau'(1 - \tau) & \text{für} \quad \tau' \leq \tau \end{cases} \quad (3.19)$$

als Lösung des Randwertproblems.

Gleichung (3.17) ist eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art. Die Unbekannten in dieser Gleichung sind die Randwerte \mathbf{r}_A und \mathbf{r}_B sowie die Kräftefunktion $\mathbf{f}(\tau', \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ entlang der Satellitenbahn. Im Folgenden werden die Positionen \mathbf{r} in der Kräftefunktion ersetzt durch die jeweiligen mit GPS bestimmten Positionen \mathbf{r}_ϵ , da diese im Falle der Orbit-Beobachtungen im Allgemeinen als genau genug bestimmt angenommen werden. Die Abhängigkeit der Kräftefunktion von der jeweiligen Position wird damit, wie auch bei anderen Ansätzen, die auf der linearisierten Bewegungsgleichung basieren, vernachlässigt (Löcher, 2010). Im Falle der wesentlich genaueren K-Band-Beobachtungen ist diese Vereinfachung nicht zulässig und es muss ein verfeinertes Modell eingeführt werden, das in Abschnitt 3.1.3.1 beschrieben wird. Die Geschwindigkeit des Satelliten beeinflusst nur die an der Oberfläche des Satelliten angreifenden Kräfte, die durch das ebenfalls an Bord befindliche Akzelerometer direkt gemessen werden. Daher kann diese Abhängigkeit ebenfalls vernachlässigt werden. Für die Orbit-Beobachtungen ergibt sich also die vereinfachte, bekannte Kräftefunktion

$$\mathbf{f}(\tau', \mathbf{r}_\epsilon, \dot{\mathbf{r}}_\epsilon) = \mathbf{f}(\tau'). \quad (3.20)$$

Als Beobachtungen sind die Satellitenpositionen $\mathbf{r}_\epsilon(\tau_k)$ an N diskreten, äquidistanten Zeitpunkten τ_k gegeben, so dass die normierten Zeitpunkte berechnet werden können mit

$$\tau_k = \frac{k-1}{N-1} \quad \text{für } k = 1, \dots, N. \quad (3.21)$$

Gleichung (3.17) wird an den beobachteten Positionen $\mathbf{r}_\epsilon(\tau_k)$ entlang des jeweiligen Bahn Bogens der Satellitenbahn ausgewertet, so dass sich ein Gleichungssystem ergibt, das sich in Matrixschreibweise wie folgt schreiben lässt:

$$\mathbf{l} = \mathbf{B}\mathbf{b} + \mathbf{h}. \quad (3.22)$$

Der Vektor

$$\mathbf{l} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_\epsilon(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{r}_\epsilon(\tau_N) \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

beinhaltet dabei die beobachteten Satellitenpositionen, der Vektor \mathbf{b} die Randwerte und die Matrix \mathbf{B} die jeweiligen normierten Beobachtungszeiten:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} (1-\tau_1) & \tau_1 \\ (1-\tau_2) & \tau_2 \\ \vdots & \vdots \\ (1-\tau_N) & \tau_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_A \\ \mathbf{r}_B \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Der Vektor \mathbf{h} repräsentiert dabei das Integral, ausgewertet an den N Beobachtungszeitpunkten:

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\tau_N) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{h}(\tau_k) = -T^2 \int_0^1 K(\tau_k, \tau') \mathbf{f}(\tau') d\tau'. \quad (3.25)$$

Der Zusammenhang zwischen den Beobachtungen \mathbf{l} und den gesuchten Parametern \mathbf{x} ergibt sich durch das linearisierte Funktional dieser Parameter,

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad (\mathbf{A})_{ki} = \frac{\partial \mathbf{h}(\tau_k)}{\partial x_i}, \quad (3.26)$$

was zu dem linearen System der Beobachtungsgleichungen

$$\mathbf{l} - \mathbf{h}_0 = \mathbf{B}\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.27)$$

mit dem Vektor der zu bestimmenden Parameter \mathbf{x} führt. Da die Abhängigkeit des Integrals von den Parametern nur implizit durch die abhängigen spezifischen Kräfte \mathbf{f} gegeben ist, können die Elemente der Designmatrix \mathbf{A} durch Anwendung der Kettenregel auf die Matrixelemente bestimmt werden:

$$(\mathbf{A})_{ki} = \frac{\partial \mathbf{h}(\tau_k)}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{h}(\tau_k)}{\partial \mathbf{f}(\tau')} \frac{\partial \mathbf{f}(\tau')}{\partial x_i}. \quad (3.28)$$

An dieser Stelle wird die Kräftefunktion noch als stetige Funktion vorausgesetzt. Da für die Auswertung aber die Positionen des Satelliten benötigt werden, man also exakt schreiben müsste $\mathbf{f}(\mathbf{r}(\tau'), \tau')$, kann die Funktion nur an den diskreten Zeitpunkten τ_k bestimmt werden, an denen auch Positionen gemessen wurden. Mit dieser Diskretisierung und der Kettenregel ergibt sich für die Designmatrix schließlich (Eicker, 2008, S. 61)

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} \mathbf{G} \quad \text{mit} \quad (\mathbf{K})_{kj} = \frac{\partial \mathbf{h}(\tau_k)}{\partial \mathbf{f}_j} \quad \text{und} \quad (\mathbf{G})_{ji} = \frac{\partial \mathbf{f}_j}{\partial x_i}. \quad (3.29)$$

Die Matrix \mathbf{G} wurde in Abschnitt 2.1.2 eingeführt, sie ergibt sich aus Gleichung (2.20).

So lassen sich die Kräfte entlang der Satellitenbahn mit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\tau_N) \end{pmatrix} = \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{a} \quad (3.30)$$

durch die zu bestimmenden Gravitationsparameter ausdrücken, worin der Vektor \mathbf{a} die vorab zu reduzierenden Kräfte repräsentiert. Hierzu gehören ein statisches Referenzfeld, die Erd- und Ozeangezeiten und die Oberflächenstörkräfte, wie sie vom Akzelerometer an Bord des Satelliten bestimmt wurden. Der Beobachtungsvektor wird um diese wirkenden Kräfte reduziert, was impliziert, dass die zugrundeliegenden Modelle bzw. Beobachtungen als fehlerfrei angenommen werden und nicht mitgeschätzt werden. Die Matrix \mathbf{K} steht für die numerische Integration des Integrals in Gleichung (3.25), für die sich mit Hilfe der Quadratur-Methode die lineare Beziehung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{h}(\tau_N) \end{pmatrix} = \mathbf{K} \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\tau_1) \\ \vdots \\ \mathbf{f}(\tau_N) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

zwischen \mathbf{h} und \mathbf{f} ergibt. Für weitergehende Details zur Bestimmung von \mathbf{K} sei auf Mayer-Gürr (2006) verwiesen. Mit Hilfe von \mathbf{K} können jetzt Näherungswerte \mathbf{h}_0 für das Integral aus den Referenzbeschleunigungen bestimmt werden:

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{K} \mathbf{a}. \quad (3.32)$$

Dies führt auf das Gauss-Markoff-Modell

$$\mathbf{l} - \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{G} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{b} + \mathbf{v}, \quad (3.33)$$

worin \mathbf{b} und \mathbf{x} die Vektoren der unbekannt Parameter sind, und \mathbf{v} das Beobachtungsrauschen darstellt.

3.1.3 Nutzung der K-Band-Beobachtungen

3.1.3.1 Modellverfeinerung für die Bahndaten

Das in Abschnitt 3.1.2 beschriebene funktionale Modell kann bei der Prozessierung der mit GPS bestimmten Orbitdaten verwendet werden. Für die Verwendung bei der Auswertung der K-Band-Beobachtungen muss dieses allerdings angepasst werden. Die deutlich höhere Genauigkeit von einigen Mikrometern der

K-Band-Beobachtungen gegenüber der Zentimeter-Genauigkeit der GPS-Beobachtungen stellt hohe Anforderungen an die Genauigkeit des funktionalen Modells. Die Approximationsfehler des Modells können vom Linearisierungsprozess, der numerischen Integration oder den eingeführten Werten selbst herrühren. Ersteres kann durch gute Näherungswerte oder einen iterativen Schätzprozess berücksichtigt werden, die Fehler der numerischen Integration liegen im Bereich der Messgenauigkeit (vgl. hierzu Mayer-Gürr, 2006, Abschnitt 4.2.4.3, insbesondere Abb. 4.5). Die größten Anforderungen werden an die Genauigkeit der Satellitenposition, die in das funktionale Modell eingeführt werden, gestellt. Im Integral von Gleichung (3.25) wird die Kräftefunktion \mathbf{f} an den Satellitenpositionen zu den jeweiligen Zeitpunkten ausgewertet. Das Ergebnis hängt dabei nicht nur vom Zeitpunkt τ , sondern auch von der Position $\mathbf{f}(\mathbf{r}(\tau))$ selber ab. Im Falle der Beobachtungsgleichung für die mit GPS bestimmte Satellitenbahn wurde die Unsicherheit der GPS-Positionen bei der Auswertung der Kräftefunktion vernachlässigt, für das funktionale Modell der K-Band-Beobachtungen ist dies nicht mehr möglich. Im Folgenden wird die von Mayer-Gürr (2006) vorgeschlagene und hier verwendete Verfeinerungsmethode für die Orbit-Beobachtungsgleichungen in der zusammenfassenden Darstellung von Eicker (2008) wiedergegeben.

Die Auswertung des Integrals aus Gleichung (3.25) an den verrauschten Positionen \mathbf{r}_ϵ resultiert in den Positionen

$$\hat{\mathbf{r}}(\tau) = (1 - \tau)\mathbf{r}_A + \tau\mathbf{r}_B + T^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon(\tau')) d\tau'. \quad (3.34)$$

Die Differenz zu den wahren Positionen \mathbf{r} bestimmt sich dabei nach

$$\mathbf{r}(\tau) - \hat{\mathbf{r}}(\tau) = T^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') [\mathbf{f}(\mathbf{r}(\tau')) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon(\tau'))] d\tau'. \quad (3.35)$$

Die obige Gleichung kann in vereinfachter Form dargestellt werden als

$$\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}} = \mathcal{K} [\mathbf{f}(\mathbf{r}) - \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon)], \quad (3.36)$$

mit dem linearen Integraloperator $\mathcal{K} = T^2 \int_0^1 K(\tau, \tau') (\cdot) d\tau'$. Mit der linearisierten Kräftefunktion

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon) + \nabla \mathbf{f}|_{\mathbf{r}_\epsilon} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\epsilon) + \dots, \quad (3.37)$$

ergibt sich für die Differenz schließlich

$$\mathbf{r} - \hat{\mathbf{r}} = \mathcal{K} \nabla \mathbf{f} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\epsilon). \quad (3.38)$$

Nach Einführung von Gleichung (3.38) anstelle von $\hat{\mathbf{r}}$ in Gleichung (3.34) und einigen Umformungen ergibt sich

$$[\mathcal{I} - \mathcal{K} \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon)] (\mathbf{r} - \mathbf{r}_\epsilon) = \mathcal{K} \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon) + \mathbf{b} - \mathbf{r}_\epsilon, \quad (3.39)$$

mit dem Einheitsoperator \mathcal{I} und dem Funktional der Sichtlinie zwischen den beiden Satelliten

$$\mathbf{b}(\tau) = (1 - \tau)\mathbf{r}_A + \tau\mathbf{r}_B. \quad (3.40)$$

Während der Linearisierung der Kräftefunktion können dann die unverrauschten Positionen

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\epsilon = [\mathcal{I} - \mathcal{K} \nabla \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon)]^{-1} [\mathcal{K} \mathbf{f}(\mathbf{r}_\epsilon) + \mathbf{b} - \mathbf{r}_\epsilon] \quad (3.41)$$

verwendet werden. Diese Gleichung kann genau wie bei den Orbit-Beobachtungen diskretisiert werden:

$$\Delta \mathbf{r} = (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{T})^{-1} (\mathbf{K} \mathbf{f} + \mathbf{B} \mathbf{b} - \mathbf{r}_\epsilon), \quad (3.42)$$

mit der Matrix der numerischen Quadratur \mathbf{K} aus Gleichung (3.29), den Randwerten \mathbf{b} und der Matrix der Randwertfunktionale \mathbf{B} aus Gleichung (3.24). Für die Matrix der Gravitationsgradienten

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \nabla \mathbf{f}(\tau_1) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \nabla \mathbf{f}(\tau_N) \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

wird an dieser Stelle ein genähertes Referenzfeld benötigt, wobei hier hierbei eine Reihenentwicklung bis zum Grad $n = 2$ oder $n = 3$ ausreicht (Mayer-Gürr, 2006). Mit Gleichung (3.42) ergeben sich dann die verbesserten Positionen für die Auswertung der Kräftefunktion zu

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\epsilon + \Delta \mathbf{r}. \quad (3.44)$$

3.1.3.2 Beobachtungsmodell für *low-low Satellite-to-Satellite Tracking*

Der Mikrowellendistanzmesser an Bord der beiden GRACE-Satelliten bestimmt Satellite-to-Satellite-Tracking-Daten (SST-Daten) in der niedrig-niedrig-Konfiguration (*low-low SST*). Zur Auswertung der *low-low SST*-Daten wurden in der Vergangenheit verschiedene Ansätze vorgeschlagen. Unter ihnen finden sich die Nutzung des Energieintegrals (Jekeli, 1999), der Beschleunigungsansatz (z.B. durch Sharifi und Keller, 2005) und die Hammerstein-Schneider-Methode (z.B. in Ilk, 1984). Der für diese Arbeit verwendete Ansatz basiert auf der Integralgleichung aus Gleichung (3.17) der Orbit-Beobachtungen und ist ausführlich beschrieben bei Mayer-Gürr (2006). Die im Folgenden wiedergegebene Zusammenfassung hiervon findet sich bei Eicker (2008).

Das mathematische Modell für die Abstands- und Abstandsänderungsmessungen zwischen den GRACE-Satelliten lässt sich durch Projektion der vektoriellen Relativstrecke zwischen den beiden Satelliten $\mathbf{r}_{12}(\tau)$ auf die Sichtlinie (*line of sight*, LOS)

$$\rho(\tau) = \mathbf{e}_{12}(\tau) \cdot (\mathbf{r}_2(\tau) - \mathbf{r}_1(\tau)) \quad (3.45)$$

bestimmen, wobei ρ der Abstand zwischen den beiden Satelliten ist. Die Vektoren $\mathbf{r}_2(\tau)$ und $\mathbf{r}_1(\tau)$ beschreiben die Position der beiden Satelliten und \mathbf{e}_{12} ist der Einheitsvektor der Sichtlinie

$$\mathbf{e}_{12}(\tau) = \frac{\mathbf{r}_{12}(\tau)}{\|\mathbf{r}_{12}(\tau)\|} \quad \text{mit} \quad \mathbf{r}_{12}(\tau) = \mathbf{r}_2(\tau) - \mathbf{r}_1(\tau). \quad (3.46)$$

Analoge Formeln finden sich beispielsweise bei Jekeli (1999) oder Mayer-Gürr (2006) für die Abstandsänderung (*range-rate*) und die Abstandsbeschleunigung (*range-acceleration*).

Das nichtlineare Funktional der unbekanntenen Parametern \mathbf{x} in Gleichung (3.45) muss zum Aufstellen der linearen Beobachtungsgleichungen zunächst linearisiert werden:

$$\rho = \rho_0 + \left. \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \Delta \mathbf{x} + \dots \quad (3.47)$$

Da die Beobachtungen ρ dabei nicht explizit von den unbekanntenen Parametern \mathbf{x} abhängen, muss zur Bestimmung der partiellen Ableitung die Kettenregel angewandt werden. Zunächst werden die Abstände nach den Satellitenpositionen partiell abgeleitet, anschließend werden die Positionen partiell nach der Kräftefunktion \mathbf{f} abgeleitet, bevor abschließend die Kräftefunktion nach den unbekanntenen Parametern abgeleitet wird:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_1}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_2}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.48)$$

Der erste Term jedes Produkts

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_1} = -\mathbf{e}_{12}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_2} = \mathbf{e}_{12} \quad (3.49)$$

ist die Differentiation von Gleichung (3.45). Der zweite Teil der Ableitung gibt einen linearisierten Zusammenhang zwischen den Positionen und den unbekanntenen Parametern $\partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{x} = \partial \mathbf{r} / \partial \mathbf{f} \cdot \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ und entspricht damit der Beobachtungsgleichung (3.33) für die Orbitbeobachtungen. Die Beobachtungsgleichung des Abstandsmessungen ergibt sich dann durch Multiplikation von Gleichung (3.33) mit den Ableitungen in Gleichung (3.49), was einer Projektion auf die Sichtlinie entspricht.

3.2 Prozessmodell

Mit den Daten der Satellitenmission GRACE lassen sich die zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes und damit mittelbar Massenverlagerungen auf und innerhalb der Erde bestimmen. Man erhält unter Nutzung des Beobachtungsmodells aus Abschnitt 3.1 für jede Auswerteepoche t einen Satz Schwerefeldkoeffizienten, angeordnet im Vektor

$$\mathbf{x}_t = (c_{nm}, s_{nm})_t^T, \quad (3.50)$$

die sich im Gauss-Markoff-Modell als Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}_t$ aus Gleichung (3.11) ergeben. Es besteht Grund zu der Annahme, dass sich das Schwerefeld der Erde von einer Epoche zur nächsten nicht beliebig ändern wird. Dann sollte sich auch der Lösungsvektor $\hat{\mathbf{x}}_t$ des Gleichungssystems nicht beliebig ändern, sondern wird das zeitliche Verhalten vielmehr physikalischen Gesetz unterliegen und in Grenzen vorhersagbar sein.

In diesem Abschnitt wird ein *stochastisches Prozessmodell* entwickelt, das eine geeignete Beschreibung des zeitlichen Verhaltens der Schwerefeldkoeffizienten liefert und in Abschnitt 3.3 auf einfache Weise in die GRACE-Datenprozessierung integriert werden kann. Kennzeichnend ist hierbei, dass die Beschreibung des zeitlichen Verhaltens nicht, wie sonst üblich, physikalisch motiviert ist, sondern lediglich aus geophysikalischen Modellen abgeleitete stochastische Informationen verwendet werden.

3.2.1 Modellvereinfachungen

An dieser Stelle werden zunächst die grundsätzlichen Annahmen und Vereinfachungen, die die stochastische Prozessmodellierung im folgenden Abschnitt 3.2.2 ermöglichen, eingeführt und erläutert. Grundlage hierfür ist Abbildung 3.1, die die Stufen der hier durchgeführten Modellvereinfachungen illustriert.

Reale Erde. Der Zustand des wahren Erdschwerefeldes, ausgedrückt durch den unbekanntem Zustandsvektor $\mathbf{x}(t)$, hängt ab vom Ort, der kontinuierlichen Zeit und allen bekannten und unbekanntem Prozessen innerhalb und auf der Erde, die zu Massenverlagerungen führen:

$$\mathbf{x}(t) = f(\text{Ort, Zeit, Prozesse}). \quad (3.51)$$

Eine vollständige Beschreibung aller Prozesse und ihrer Wechselwirkungen ist wegen ihrer Komplexität nicht möglich, stattdessen werden die Subsysteme in der Regel jeweils für sich modelliert. Einen Ausschnitt der relevanten Subsysteme bot Tabelle 2.1 in Abschnitt 2.2. Hierin finden sich unter anderem auch die Subsysteme Atmosphäre, Ozeanströmung (im Folgenden nur noch kurz mit Ozean bezeichnet) und kontinentale Hydrologie, die wesentlich zu den in dieser Arbeit betrachteten kurzzeitigen Variationen des Erdschwerefeldes beitragen.

Geophysikalische Modellierung. In Abschnitt 2.2 wurden diese drei Subsysteme näher beschrieben und die wesentlichen physikalischen Zusammenhänge näher erläutert. Diese mathematische Beschreibung des zeitlichen Verhaltens von Atmosphäre, Ozeanströmung und kontinentaler Hydrologie beruht auf Annahmen und Vereinfachungen und stellt damit schon eine Abstraktion der realen Erde dar.

Für die Atmosphäre ergeben sich, wie in Abschnitt 2.2.1.1 erläutert, als Zustandsgrößen

- die Temperatur T ,
- der Luftdruck p ,
- die spezifische Feuchte q und
- den Komponenten des Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ des Strömungsfeldes,

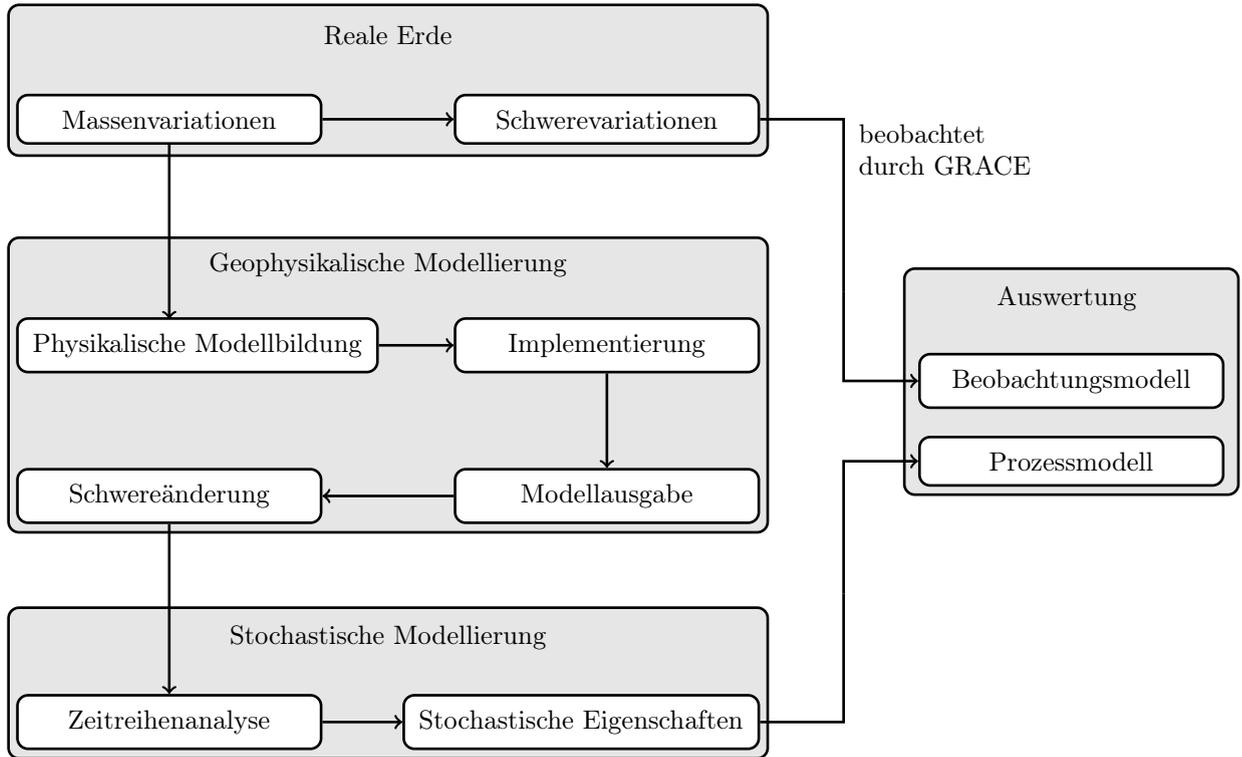


Abbildung 3.1: Stufen der Modellvereinfachung.

angeordnet im Zustandsvektor der Atmosphäre

$$\mathbf{x}^{\text{atm}} = (T, p, q, u, v, w)^T. \quad (3.52)$$

Zu erwähnen sei hierbei, dass es sich jeweils um Feldgrößen handelt, d. h. für jeden betrachteten Raumpunkt ergibt sich jeweils ein solcher Zustandsvektor.

Dies gilt ebenso für den Ozean, in Abschnitt 2.2.2.1 charakterisiert durch die Zustandsgrößen

- Temperatur T ,
- Druck p ,
- Salzgehalt s und
- den Komponenten des Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$ des Strömungsfeldes,

wiederum angeordnet im Zustandsvektor des Ozeans

$$\mathbf{x}^{\text{ocn}} = (T, p, s, u, v, w)^T. \quad (3.53)$$

Für die Modellierung der kontinentalen Hydrologie wurden in Abschnitt 2.2.3.2 die Stände der verschiedenen Wasserspeicher identifiziert:

$$\mathbf{x}^{\text{hyd}} = (S_c, S_{\text{sn}}, S_{\text{gw}}, S_s, S_{\text{sf}}, S_r, S_{\text{wl}}, S_l)^T. \quad (3.54)$$

Die einzelnen Speicherkompartimente sind auf Seite 28 erläutert und müssen für jeden Punkt der Landfläche betrachtet werden.

Die zeitliche Evolution des jeweiligen Zustandsvektors lässt sich in der Regel, nach Linearisierung der physikalischen Modellgleichungen, als Differentialgleichung erster Ordnung in Matrix-Vektor-Schreibweise formulieren (Gelb, 1974, S. 52):

$$\dot{\mathbf{x}}^{\text{atm}}(t) = \mathbf{B}(t) \mathbf{x}^{\text{atm}}(t) + \mathbf{w}(t), \quad (3.55)$$

hier und im Folgenden beispielhaft illustriert für die Atmosphäre. Hierin sind $\mathbf{B}(t)$ die Systemmatrix, die das linearisierte, zeitliche Verhalten auf der Grundlage physikalischer Gesetzmäßigkeiten beschreibt, und $\mathbf{w}(t)$ das stochastische Prozessrauschen des modellierten Zustandsvektors, das wiederum Modellungenauigkeiten beschreibt. Eine Modellierung durch Differentialgleichungen höherer Ordnung lässt sich einfach durch Erweiterung des Zustandsvektors um entsprechende höhere Ableitungen desselben realisieren (Gelb, 1974; Simon, 2006). Für die hier vorliegende Anwendung wird dies aber nicht näher betrachtet, da der Zustandsvektor bei den durchgeführten Simulationsrechnungen in Kapitel 4 und der Echtdatenauswertung in Kapitel 5 bereits rund 1700 Einträge besitzt. Um diesen Betrag müsste der Zustandsvektor jeweils nach Einführen von Differentialgleichungen höherer Ordnung erweitert werden, was rechentechnisch aufwändig wird, weshalb in dieser Arbeit darauf verzichtet wurde.

Diese physikalische Modellbeschreibung muss, um rechentechnisch überhaupt nutzbar zu sein, vereinfacht werden (*Implementierung*). Hierzu ist eine zeitliche Diskretisierung nötig und es müssen Modellannahmen unterschiedlicher Art eingeführt werden, woraus die diskretisierte Form von Gleichung (3.55) hervorgeht:

$$\mathbf{x}_t^{\text{atm}} = \mathbf{B}_t \mathbf{x}_{t-1}^{\text{atm}} + \mathbf{w}_t, \quad (3.56)$$

Ein Modell-Lauf liefert schließlich als *Modellausgabe* eine Zeitreihe geophysikalischer Zustandsgrößen (beispielsweise Temperatur- oder Druckfelder), aus denen sich schließlich die Schwereänderungen aus Gleichung (3.50) bestimmen lassen.

Stochastische Modellierung. In dieser Arbeit findet ein stochastisches Prozessmodell Anwendung (Abbildung 3.1). Hierbei wird das zeitliche Verhalten des Erdschwerefeldes als diskreter Markoff-Prozess 1. Ordnung (Markoff-Kette) mit konstanter Prozessdynamik aufgefasst:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}. \quad (3.57)$$

Die zeitlich konstante Systemmatrix \mathbf{B} beschreibt darin die Änderung der Schwerefeldkoeffizienten \mathbf{x}_t von einer Epoche zur nächsten, hervorgerufen durch Massenvariationen in allen Subsystemen.

Im folgenden Abschnitt 3.2.2 wird gezeigt werden, wie sich bei Kenntnis der Auto- und Kreuzkovarianzmatrix von \mathbf{x}_t eine Schätzung $\hat{\mathbf{B}}$ der für das wahre Erdschwerefeld unbekanntes Prozessdynamik \mathbf{B} finden lässt, die diese geeignet approximiert.

Die Evolution der wahren Zustände \mathbf{x}_t des Erdschwerefeldes ist allerdings in der Realität auch nicht zugänglich, diese soll durch GRACE gerade bestimmt werden, so dass in der praktischen Anwendung auf die Ausgabe geophysikalischer Modelle, die gleichsam als Black-Box behandelt werden, zurückgegriffen werden wird. Die oftmals kritische Linearisierung bei der Anwendung des Kalman-Filters wird so vermieden, was einen Vorteil der vorgestellten Methode darstellt. Diese wird in Abschnitt 3.2.3 näher erläutert. Das so gewonnene empirische Prozessmodell findet schließlich in der Analyse der GRACE-Daten Anwendung.

3.2.2 Stochastische Prozessmodellierung

An dieser Stelle wird nun aufgezeigt, wie sich die zeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes genähert als Prozess 1. Ordnung in der Form von Gleichung (3.57) darstellen lassen.

Das (wahre) Gravitationsfeld der Erde sei dabei approximiert als diskrete Zeitreihe von Schwerefeldkoeffizienten zur jeweiligen Epoche t , angeordnet im Vektor \mathbf{x}_t . Diese Zeitreihe beschreibe einen Prozess 1. Ordnung aus Gleichung (3.57),

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}, \quad (3.58)$$

mit der Autokovarianzmatrix

$$\Sigma := \mathcal{C} \{ \mathbf{x}_t \} \quad (3.59)$$

und der Kreuzkovarianzmatrix

$$\Sigma_{\Delta} := \mathcal{C} \{ \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1} \}. \quad (3.60)$$

Damit liegt ein stationärer Prozess vor, d. h. seine Autokovarianzfunktion $\varphi_{\mathbf{xx}}$ hängt nicht vom Zeitpunkt t_1 und t_2 , sondern lediglich vom zeitlichen Abstand τ ab:

$$\varphi_{\mathbf{xx}}(t_1, t_2) = \varphi_{\mathbf{xx}}(t_2 - t_1) = \varphi_{\mathbf{xx}}(\tau). \quad (3.61)$$

Desweiteren soll gelten

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{x}_t \} = \mathbf{0}, \quad (3.62)$$

d. h. die betrachteten Zustände sind mittelwertfrei. Diese Annahme ist nach [Gelb \(1974, S.72\)](#) gerechtfertigt: Die Kenntnis, dass die betrachtete Zufallsvariable nicht mittelwertfrei ist, impliziert, dass dieser Mittelwert bekannt sein muss. Damit kann er vorab reduziert werden, um Mittelwertfreiheit zu erreichen. Bei der Echtdataauswertung wird dies genähert dadurch erreicht, indem alle bekannten Signale vorab aus den Beobachtungen reduziert werden. Weitere Erläuterungen hierzu finden sich in [Kapitel 5](#). Hiermit ist der Prozess vollständig charakterisiert und für seine Kovarianzstruktur gilt dann

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{N} \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \Sigma & \Sigma_{\Delta} \\ \Sigma_{\Delta}^T & \Sigma \end{pmatrix} \right). \quad (3.63)$$

Da die Prozessdynamik \mathbf{B} des wahren Erdschwerefeldes unbekannt und auch nicht zugänglich ist, wird nun eine Approximation $\hat{\mathbf{B}}$ gesucht, so dass sich ein linearer Schätzer des Zustands \mathbf{x}_t , wenn \mathbf{x}_{t-1} gegeben ist, angeben lässt mit

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{x}_{t-1}. \quad (3.64)$$

Dieser soll erwartungstreu sein und er soll eine Schätzung liefern, deren Fehlervektor \mathbf{e}

$$\mathbf{e} = \hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} \{ \mathbf{e} \} = \mathcal{E} \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^T \} \quad (3.65)$$

minimale Varianz besitzt:

$$\text{tr} [\mathcal{C} \{ \mathbf{e} \}] \stackrel{!}{=} \min. \quad (3.66)$$

Die Erwartungstreue lässt sich leicht nachweisen, denn für alle \mathbf{B} gilt mit Gleichung (3.62):

$$\mathcal{E} \{ \hat{\mathbf{x}}_t \} = \mathcal{E} \{ \mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} \} = \mathbf{B} \mathcal{E} \{ \mathbf{x}_{t-1} \} = \mathbf{0} = \mathcal{E} \{ \mathbf{x}_t \}. \quad (3.67)$$

Um den Schätzer mit minimaler Varianz zu bestimmen, wird zunächst das äußere Produkt des Fehlervektors aus Gleichung (3.65) berechnet:

$$\mathbf{e} \mathbf{e}^T = (\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t) (\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)^T. \quad (3.68)$$

Einsetzen der Definitionsgleichung des Schätzers (3.64) und Ausmultiplizieren liefert dann

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \mathbf{e}^T &= (\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t) (\hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{x}_t)^T \\ &= (\mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_t) (\mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} - \mathbf{x}_t)^T \\ &= \mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t-1}^T \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \mathbf{x}_{t-1} \mathbf{x}_t^T + \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^T. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Für die Fehlerkovarianzmatrix gilt damit

$$\mathcal{C} \{ \mathbf{e} \} = \mathcal{E} \{ \mathbf{e} \mathbf{e}^T \} = \mathbf{B} \Sigma \mathbf{B}^T - \Sigma_{\Delta} \mathbf{B}^T - \mathbf{B} \Sigma_{\Delta}^T + \Sigma \quad (3.70)$$

und nach einigem Umformen schließlich

$$\mathcal{C}\{\mathbf{e}\} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T + (\mathbf{B} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{B} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^T. \quad (3.71)$$

Der erste Summand ist konstant und unabhängig vom gesuchten Schätzer \mathbf{B} :

$$\boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T = \text{const.} \quad (3.72)$$

Für den zweiten Teil gilt immer

$$(\mathbf{B} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \boldsymbol{\Sigma} (\mathbf{B} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1})^T \geq 0, \quad (3.73)$$

da es sich hierbei um eine quadratische Form in \mathbf{B} handelt. Die Fehlerkovarianzmatrix wird also minimal, wenn der zweite Summand verschwindet, was für

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \quad (3.74)$$

der Fall ist. Für die Fehlerkovarianzmatrix gilt in diesem Falle

$$\mathcal{C}\{\mathbf{e}\} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T. \quad (3.75)$$

Mit Gleichung (3.74) ergibt sich ein Prozess 1. Ordnung

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_{t-1}, \quad (3.76)$$

dessen Signalvarianz in Gleichung (3.63) als zeitlich konstant angenommen ist. Damit dies auch für den Prozess in Gleichung (3.76) gilt, wird dieser um das stochastische Prozessrauschen $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ erweitert, was auf die Form des Prozessmodells in Gleichung (3.57) führt. Die Kovarianzmatrix \mathbf{Q} des Prozessrauschens \mathbf{w} ergibt sich durch Varianzfortpflanzung:

$$\mathcal{C}\{\mathbf{x}_t\} = \mathbf{B} \mathcal{C}\{\mathbf{x}_{t-1}\} \mathbf{B}^T + \mathbf{Q} \quad (3.77)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T + \mathbf{Q} \quad (3.78)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{Q} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T. \quad (3.79)$$

Das so abgeleitete Prozessmodell

$$\mathbf{x}_t = \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\mathbf{w}\} = \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T \quad (3.80)$$

approximiert ein gegebenes Signal \mathbf{x}_t mit der Kovarianzstruktur aus Gleichung (3.63). Gleichung (3.76) liefert hierbei eine optimale lineare Prädiktion. Optimal heißt in diesem Falle, wie zuvor nachgewiesen, unverzerrt und mit minimaler Varianz. Bei Moritz (1980) findet sich eine analoge Vorgehensweise zur Bestimmung einer Prädiktion aus gegebenen Messwerten im Sinne der kleinsten Quadrate. Daher kann das hier abgeleitete Prozessmodell auch als *Kleinste-Quadrate-Prädiktion* bezeichnet werden.

Mit diesem Prozessmodell kann das dynamische Verhalten des Erdschwerefeldes approximiert werden, wenn die Kovarianzstruktur aus Gleichung (3.63) bekannt ist. Dass dies für das wahre Erdschwerefeld nicht der Fall ist, wird im folgenden Abschnitt thematisiert.

3.2.3 Empirische Modellbestimmung

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, wie sich das zeitliche Verhalten des Erdschwerefeldes als dynamischer Prozess darstellen lässt. Voraussetzung hierfür ist die Kenntnis der Autokovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$ aus Gleichung (3.59) und der Kreuzkovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_\Delta$ aus Gleichung (3.60) des Signals. Diese lassen sich bei gegebener Zeitreihe der wahren Zustände des Erdschwerefeldes approximieren durch die empirische Autokovarianzmatrix und Kreuzkovarianzmatrix der Zeitreihe.

In der Realität liegt allerdings eine solche Zeitreihe der wahren Zustände nicht vor, weshalb diese durch den Einsatz geophysikalischer Modelle approximiert werden muss. Wie in Abbildung 3.1 angedeutet, wird hierzu die Ausgabe dieser Modelle, die normalerweise als Punktwerte auf einem Gitter vorliegen, in eine Zeitreihe von Potentialkoeffizienten umgerechnet. Nach Reduktion um langperiodische Anteile (zeitlicher Mittelwert, Trend, Jahres- und Halbjahresgang) und Addition der Anteile der Subsysteme liegt nun eine Zeitreihe von T Zustandsvektoren von Potentialkoeffizienten

$$\mathbf{x}_t \approx \mathbf{m}_t = (c_{nm}, s_{nm})_t^T \quad (3.81)$$

vor, die das kurzzeitige Verhalten des Erdschwerefeldes approximiert. Aus diesen Zustandsvektoren lässt sich Σ approximieren durch die empirische Autokovarianzmatrix

$$\Sigma \approx \bar{\Sigma} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T. \quad (3.82)$$

Für die gesuchte Kreuzkovarianzmatrix Σ_Δ gilt analog die Approximation

$$\Sigma_\Delta \approx \bar{\Sigma}_\Delta = \frac{1}{T-1} \sum_{i=2}^T \mathbf{m}_i \mathbf{m}_{i-1}^T. \quad (3.83)$$

Das zeitliche Verhalten des Erdschwerefeldes, ausgedrückt durch den zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors \mathbf{x}_t , lässt sich also genähert beschreiben durch das empirisch bestimmte stochastische Prozessmodell

$$\mathbf{x}_t = \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w} \quad (3.84)$$

mit dem stochastischen Prozessrauschen

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}_\Delta^T). \quad (3.85)$$

3.3 Zusammenführung von Prozess- und Beobachtungsmodell

Im vorherigen Abschnitt wurde aufgezeigt, wie sich das zeitliche Verhalten des Erdschwerefeldes durch ein stochastisches Prozessmodell

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{B} \mathbf{x}_t + \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q}) \quad (3.86)$$

mit der Prozessdynamik

$$\mathbf{B} = \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \quad (3.87)$$

und der Kovarianzmatrix des Prozessrauschens

$$\mathbf{Q} = \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}_\Delta^T \quad (3.88)$$

darstellen lässt. Der Zustandsvektor \mathbf{x}_t beschreibt dabei das Gravitationspotential V aus Gleichung (2.2) als Feldgröße.

Im Gegensatz zu anderen bekannten Anwendungen des Kalman-Filters wird hier der Zustand nicht nur durch einige wenige Zustandsgrößen modelliert. Der gesuchte Zustandsvektor ist vielmehr eine Feldgröße, die durch einen ganzen Satz Potentialkoeffizienten beschrieben ist. In den praktischen Berechnungen in Kapitel 4 und Kapitel 5 wird das Potential in eine Reihe nach Kugelfunktionen vom Grad $n = 2$ bis zum Grad $n = 40$ entwickelt, was 1677 Potentialkoeffizienten entspricht.

Die Dynamik des zugrundeliegenden Prozesses wird hierbei nicht physikalisch modelliert sondern stochastisch. Eine physikalische Modellierung wäre sehr viel aufwändiger, da der zu bestimmende Zustandsvektor nicht nur einen Satz Potentialkoeffizienten, sondern beispielsweise für die Atmosphäre Temperaturfelder,

Druckfelder und die weiteren in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten Zustandsgrößen beinhalten würde. Für die stochastische Modellierung wird hingegen die Ausgabe vorhandener geophysikalischer Modelle verwendet, um hieraus empirische Kovarianzmatrizen abzuleiten. Ihre Verwendung bietet den Vorteil, dass nur über eine große Datenmenge gemittelte Informationen verwendet werden, was insbesondere Einflüsse von Modellierungsungenauigkeiten und Modellfehlern einzelner Epochen reduziert.

Der Zustand des so modellierten linearen dynamischen Prozesses soll nun aus den Beobachtungen der GRACE-Satelliten bestimmt werden. Der funktionale Zusammenhang zwischen den beobachteten Größen, dies sind die Satellitenbahnen der beiden Satelliten und die Mikrowellen-Entfernungsmessungen, und dem zu bestimmenden Zustandsvektor \mathbf{x}_t wurde in Abschnitt 3.1 beschrieben. Für die Auswertung der Beobachtungen einer Epoche t ergibt sich das Beobachtungsmodell (vgl. Gleichung (3.6))

$$\mathbf{l}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (3.89)$$

Die Beobachtungen verschiedener Epochen i und j werden dabei als unkorreliert angenommen:

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T \} = \mathbf{0} \quad \text{für} \quad i \neq j. \quad (3.90)$$

Die beiden Größen *Prozessmodell* und *Beobachtungsmodell* sind voneinander unabhängig und können auch jeweils für sich alleine betrachtet werden. Dies ist bei der Standardprozessierung der GRACE-Beobachtungen der Fall, wo der Zustandsvektor als zeitlich konstant modelliert ist. Insbesondere sind das Rauschen des Prozessmodells aus Gleichung (3.86) und das Rauschen des Beobachtungsmodells aus Gleichung (3.89) unkorreliert, d.h es gilt

$$\mathcal{E} \{ \mathbf{w} \mathbf{v}_t^T \} = \mathbf{0}. \quad (3.91)$$

Prozessmodell und *Beobachtungsmodell* bilden zusammen ein lineares dynamisches System, dessen Zustand \mathbf{x}_t zur Epoche t unter Nutzung der Informationen aus dem Prozessmodell und den verrauschten GRACE-Beobachtungen zu schätzen ist. Diese Schätzung soll unverzerrt sein und minimale Varianz besitzen. Ein weitverbreiteter Algorithmus zur Lösung dieser Aufgabe, der auch in dieser Arbeit angewandt wird, ist der Kalman-Filter. Er wird daher in Abschnitt 3.3.1 kurz beschrieben. Neben der Filterung, die sämtliche Beobachtungen bis zum Zeitpunkt t bei der Schätzung des Zustands \mathbf{x}_t berücksichtigt, wird in Abschnitt 3.3.3 auch ein Glättungsalgorithmus (*RTS-Smoother*) vorgestellt, der zur Schätzung des Zustands zum Zeitpunkt t auch in der Zukunft liegende Beobachtungen berücksichtigt, was zu einer verbesserten Zustandsschätzung führt. Da die Auswertung der GRACE-Beobachtungen im *Postprocessing* stattfindet und alle zur Verfügung stehenden Beobachtungen verwendet werden sollen, ist diese Vorgehensweise angezeigt.

Ausführliche Erläuterungen zur Zustandsschätzung in dynamischen Systemen finden sich unter anderem bei Gelb (1974), Maybeck (1979) oder Simon (2006), auf die sich auch die Ausführungen im folgenden Abschnitt stützen.

3.3.1 Kalman-Filter

Der Kalman-Filter ist ein rekursiver Schätzalgorithmus, der den Zustand eines dynamischen Systems aus verrauschten Beobachtungen optimal im Sinne der kleinsten Quadrate schätzt. Kalman (1960) formulierte den nach ihm benannten Kalman-Filter-Algorithmus zunächst für zeitdiskrete Systeme, worauf bei Kalman und Bucy (1961) die Erweiterung für zeitkontinuierliche Systeme folgte.

Es soll die folgende Nomenklatur verwendet werden: Der tatsächliche (aber unbekannte) Systemzustand wird mit \mathbf{x}_t bezeichnet und die Schätzung des Zustands mit $\hat{\mathbf{x}}_t$. Die A-priori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ berücksichtigt alle Beobachtungen $[\mathbf{l}_0, \dots, \mathbf{l}_{t-1}]$ bis zum Zeitpunkt $t-1$, nicht aber die Beobachtung \mathbf{l}_t zum Zeitpunkt t , wohingegen die A-posteriori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ alle Beobachtungen bis einschließlich zum Zeitpunkt t berücksichtigt. Die entsprechenden Kovarianzmatrizen seien mit $\mathcal{C} \{ \hat{\mathbf{x}}_t^- \} = \mathbf{P}_t^-$ und $\mathcal{C} \{ \hat{\mathbf{x}}_t^+ \} = \mathbf{P}_t^+$ bezeichnet. Abbildung 3.2 verdeutlicht den zeitlichen Verlauf der verwendeten Größen.

Der Kalman-Filter lässt sich rechentechisch vorteilhaft in zwei Teile zerlegen: den Prädiktionsschritt und den Korrekturschritt (siehe hierzu auch Abbildung 3.3).

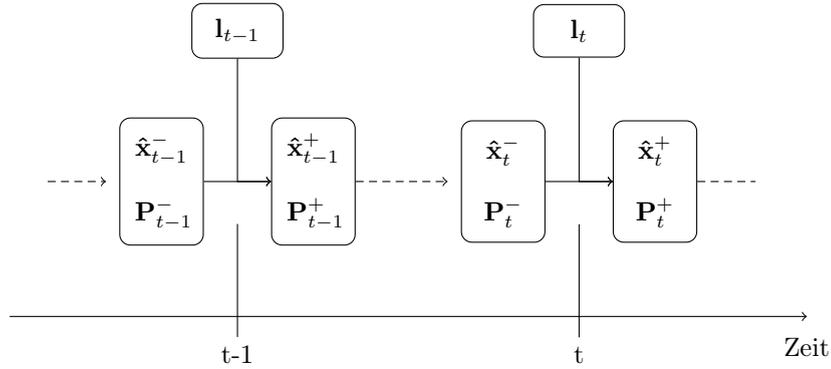


Abbildung 3.2: Illustration des zeitlichen Verlaufs für A-priori- und A-posteriori-Zustandsschätzung.

Prädiktionsschritt. Im Prädiktionsschritt des Kalman-Filter wird zum Zeitpunkt t eine A-priori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ für den Systemzustand gesucht. Da zu diesem Zeitpunkt noch keine Messungen \mathbf{l}_t vorliegen, kann der Zustand nur aus der Dynamik des Prozesses bestimmt werden. Hierzu wird der gesuchte Systemzustand aus der zuletzt vorliegenden Schätzung, welche alle Messwerte bis zum Zeitpunkt $t-1$ beinhaltet, bestimmt:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^+. \quad (3.92)$$

Die Kovarianzmatrix der A-priori-Schätzung \mathbf{P}_t^- ergibt sich dann durch einfache Varianzfortpflanzung (siehe hierzu beispielsweise Koch, 1997; Niemeier, 2002). Hierbei wird zunächst die Kovarianzmatrix des letzten A-posteriori-Zustands \mathbf{P}_{t-1}^+ transformiert:

$$\mathbf{B}\mathbf{P}_{t-1}^+\mathbf{B}^T. \quad (3.93)$$

Da die Prozessdynamik \mathbf{B} aber nicht fehlerfrei bekannt ist, sondern zusätzlich durch das Rauschen $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$ kontaminiert ist, muss dieses noch berücksichtigt werden, so dass sich für die A-priori-Kovarianzmatrix schließlich

$$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{B}\mathbf{P}_{t-1}^+\mathbf{B}^T + \mathbf{Q} \quad (3.94)$$

ergibt.

Korrekturschritt. Der Korrekturschritt des Kalman-Filters verbessert den A-priori-Schätzwert des Systemzustands mit den Beobachtungsresiduen der Prädiktion $\mathbf{l}_t - \mathbf{A}_t\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (Innovation), die durch eine noch zu bestimmende Matrix \mathbf{K}_t gewichtet werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^+ = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{K}_t (\mathbf{l}_t - \mathbf{A}_t\hat{\mathbf{x}}_t^-). \quad (3.95)$$

Das Ergebnis ist der A-posteriori-Schätzwert $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ zum Zeitpunkt t . Dieser soll erwartungstreu sein und es soll gelten:

$$\text{tr} [\mathbf{P}_t^+] \stackrel{!}{=} \min. \quad (3.96)$$

Für eine beliebige Matrix \mathbf{K}_t erhält man zunächst

$$\mathbf{P}_t^+ = \mathcal{E} \left\{ (\hat{\mathbf{x}}_t^+ - \mathbf{x}_t) (\hat{\mathbf{x}}_t^+ - \mathbf{x}_t)^T \right\} \quad (3.97)$$

$$= \mathcal{E} \left\{ \left(\hat{\mathbf{x}}_t^- - \mathbf{x}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{l}_t - \mathbf{A}_t\hat{\mathbf{x}}_t^-) \right) \left(\hat{\mathbf{x}}_t^- - \mathbf{x}_t + \mathbf{K}_t (\mathbf{l}_t - \mathbf{A}_t\hat{\mathbf{x}}_t^-) \right)^T \right\} \quad (3.98)$$

$$= \mathcal{E} \left\{ \left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{A}_t) (\hat{\mathbf{x}}_t^- - \mathbf{x}_t) + \mathbf{K}_t\mathbf{v}_t \right) \left((\mathbf{I} - \mathbf{K}_t\mathbf{A}_t) (\hat{\mathbf{x}}_t^- - \mathbf{x}_t) + \mathbf{K}_t\mathbf{v}_t \right)^T \right\}. \quad (3.99)$$

Da Systemrauschen und Beobachtungsrauschen nach Gleichung (3.91) als unkorreliert angenommen werden, ergibt sich für Gleichung (3.99) die sogenannte *Joseph-Form* der Kovarianzmatrix (Simon, 2006, S. 129):

$$\mathbf{P}_t^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{A}_t) \mathbf{P}_t^- (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{A}_t)^T + \mathbf{K}_t \mathbf{R}_t \mathbf{K}_t^T \quad (3.100)$$

mit der Kovarianzmatrix der Beobachtungen \mathbf{R}_t aus Gleichung (3.89). Das Minimum von $\text{tr} [\mathbf{P}_t^+]$ findet sich durch Nullsetzen der ersten Ableitung (Gelb, 1974, S. 109):

$$\frac{d \text{tr} [\mathbf{P}_t^+]}{d \mathbf{K}_t} = -2 (\mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^-)^T + 2 \mathbf{K}_t (\mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^T = 0. \quad (3.101)$$

Durch Umformung erhält man schließlich die Kalman-Verstärkungsmatrix (*Kalman gain*):

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T (\mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1}. \quad (3.102)$$

Einsetzen von Gleichung (3.102) in Gleichung (3.100) liefert nach einigem Umstellen für die *a posteriori*-Kovarianzmatrix:

$$\mathbf{P}_t^+ = \mathbf{P}_t^- - \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T (\mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^- \quad (3.103)$$

$$= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{A}_t) \mathbf{P}_t^-. \quad (3.104)$$

Für deren Inverse gilt die Beziehung (Simon, 2006, S.128):

$$(\mathbf{P}_t^+)^{-1} = (\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{A}_t^T \mathbf{R}_t \mathbf{A}_t, \quad (3.105)$$

die genutzt werden kann, um die Verstärkungsmatrix aus Gleichung (3.102) etwas zu vereinfachen. Einsetzen von Gleichung (3.105) in Gleichung (3.102) führt nach Ausmultiplizieren und erneutem Zusammenfassen auf (Simon, 2006, S. 129):

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t^+ \mathbf{A}_t^T (\mathbf{I} + \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T) (\mathbf{A}_t \mathbf{P}_t^- \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (3.106)$$

$$= \mathbf{P}_t^+ \mathbf{A}_t^T \mathbf{R}_t^{-1}. \quad (3.107)$$

Für die A-posteriori-Schätzung des Systemzustands ergibt sich dann

$$\hat{\mathbf{x}}_t^+ = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{P}_t^+ \mathbf{A}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} (\mathbf{l}_t - \mathbf{A}_t \hat{\mathbf{x}}_t^-). \quad (3.108)$$

Einführung der Normalgleichungen in den Kalman-Filter. Bei der Bestimmung des unbekannt Systemzustands \mathbf{x}_t einer Epoche t im Gauss-Markoff-Modell (siehe Abschnitt 3.1.1) werden zunächst die Beobachtungsgleichungen aufgestellt, die einen funktionalen Zusammenhang herstellen zwischen den in dieser Epoche gegebenen Beobachtungen \mathbf{l}_t und den gesuchten Gravitationsfeldparametern (vgl. Gleichung (3.6)):

$$\mathbf{l}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} \{ \mathbf{v}_t \} = \sigma^2 \mathbf{P}_t^{-1} =: \mathbf{R}_t. \quad (3.109)$$

Der Varianzfaktor σ sei hierbei im Folgenden mit 1 angenommen. Die Bestimmung einer Lösung dieses überbestimmten Gleichungssystems im Sinne der kleinsten Quadrate führt auf das Normalgleichungssystem

$$\mathbf{N}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{n}_t \quad (3.110)$$

mit

$$\mathbf{N}_t := \mathbf{A}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{A}_t \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_t := \mathbf{A}_t^T \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{l}_t. \quad (3.111)$$

Einsetzen von Gleichung (3.111) in Gleichung (3.105) und Gleichung (3.108) liefert schließlich für den A-posteriori-Systemzustand

$$\hat{\mathbf{x}}_t^+ = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{P}_t^+ (\mathbf{n}_t - \mathbf{N}_t \hat{\mathbf{x}}_t^-) \quad (3.112)$$

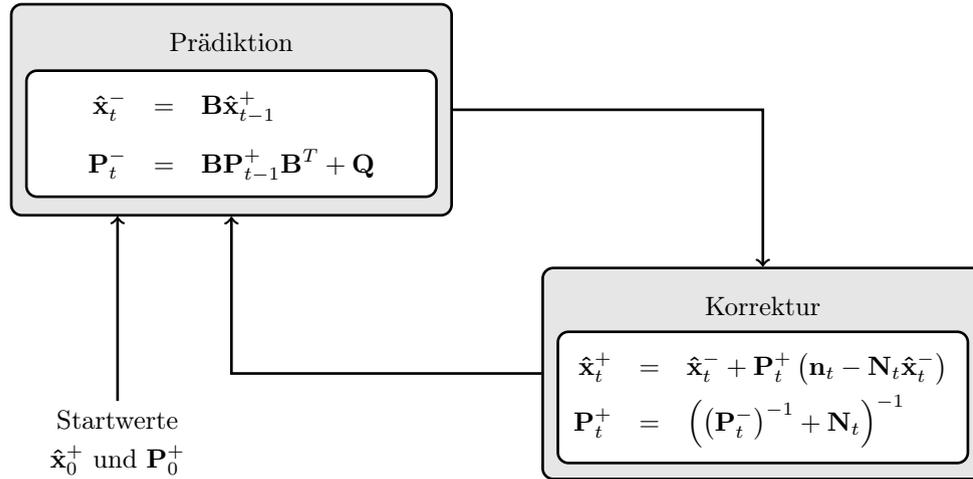


Abbildung 3.3: Prinzipdarstellung des Kalman-Filters nach [Welsh und Bishop \(2006\)](#), hier dargestellt in der Repräsentation des Beobachtungsmodells in Normalgleichungsform.

und für seine Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_t^+ = \left((\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{N}_t \right)^{-1} \quad (3.113)$$

in der Repräsentation der Beobachtungen in Normalgleichungsform. Damit lässt sich der Kalman-Filter-Algorithmus auf einfache Weise in bestehende Programmsysteme zur Analyse von GRACE-Beobachtungen integrieren. [Abbildung 3.3](#) fasst die Schritte des rekursiven Kalman-Filter-Algorithmus und seine Gleichungen noch einmal zusammen.

3.3.2 Anteil der GRACE-Beobachtungen am geschätzten Systemzustand

Die gesuchten Gravitationsfeldparameter, die sich als Lösung des Ausgleichsproblems aus Gleichung (3.110) mit

$$\hat{\mathbf{x}}_t = \mathbf{N}_t^{-1} \mathbf{n}_t \quad (3.114)$$

ergeben, hängen nur von den Beobachtungen \mathbf{l}_t der Epoche t ab. Im Gegensatz dazu hängt die A-priori-Schätzung des Systemzustands (Prädiktion)

$$\hat{\mathbf{x}}_t^- = \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^+ \quad (3.115)$$

nicht von den Beobachtungen zur Epoche t , sondern vom A-posteriori-Systemzustand $\hat{\mathbf{x}}_{t-1}^+$ der Vorgängerepoche und damit indirekt von den Beobachtungen der Epochen $[1, \dots, t-1]$ ab.

Der Kalman-Filter gewichtet nun die beiden Pseudobeobachtungen $\hat{\mathbf{x}}_t$ und $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ mit den zugehörigen Kovarianzmatrizen \mathbf{N}_t^{-1} aus Gleichung (3.12) und \mathbf{P}_t^- aus Gleichung (3.94) so gegeneinander, dass sich die optimale Lösung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ im Sinne der kleinsten Quadrate ergibt. Dies wird deutlich, wenn man Gleichung (3.114) in Gleichung (3.112) einsetzt:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^+ = \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{P}_t^+ (\mathbf{N}_t \hat{\mathbf{x}}_t - \mathbf{N}_t \hat{\mathbf{x}}_t^-). \quad (3.116)$$

Nach Ausmultiplizieren und erneutem Zusammenfassen ergibt sich der A-posteriori-Systemzustand $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ als gewichtetes Mittel

$$\hat{\mathbf{x}}_t^+ = \mathbf{P}_t^+ \mathbf{N}_t \hat{\mathbf{x}}_t + (\mathbf{I} - \mathbf{P}_t^+ \mathbf{N}_t) \hat{\mathbf{x}}_t^- \quad (3.117)$$

$$= \mathbf{P}_t^+ \mathbf{N}_t \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{P}_t^+ (\mathbf{P}_t^-)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_t^- \quad (3.118)$$

$$= \mathbf{W}_t \hat{\mathbf{x}}_t + \mathbf{W}_t^- \hat{\mathbf{x}}_t^- \quad (3.119)$$

aus der A-priori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ mit der Gewichtsmatrix

$$\mathbf{W}_t^- := \left((\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{N}_t \right)^{-1} (\mathbf{P}_t^-)^{-1} \quad (3.120)$$

und der Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t$ aus den reinen GRACE-Beobachtungen \mathbf{l}_t mit der Gewichtsmatrix

$$\mathbf{W}_t := \left((\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{N}_t \right)^{-1} \mathbf{N}_t \quad (3.121)$$

\mathbf{W}_t^- beschreibt damit den Anteil der Prädiktion $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ auf das Ergebnis $\hat{\mathbf{x}}_t^+$. Der Anteil \mathbf{W}_t der GRACE-Beobachtungen \mathbf{l}_t ergänzt diesen zur Einheitsmatrix \mathbf{I} , wie direkt aus Gleichung (3.117) folgt.

3.3.3 Glättungsalgorithmen

Eine besondere Eigenschaft des Kalman-Filters ist die Möglichkeit, ihn in Echtzeitsystemen einsetzen zu können, d. h. die Schätzung des Systemzustands $\hat{\mathbf{x}}_\tau$ zum Zeitpunkt τ berücksichtigt alle Beobachtungen \mathbf{l}_t , die bis zum Zeitpunkt τ angefallen sind: $t \in [t_0 \dots \tau]$. Diese Eigenschaft ist in dieser Arbeit allerdings nicht von Belang, da die GRACE-Beobachtungen erst im *Postprocessing* zur Verfügung stehen, und damit alle Beobachtungen im gesamten Beobachtungsintervall $[t_0 \dots T]$ bereits vorliegen. Gesucht ist nun eine Schätzung der Systemzustände zu allen Epochen innerhalb des Beobachtungsintervalls, wozu ein Glättungsalgorithmus benötigt wird. In diesem Abschnitt wird der in dieser Arbeit verwendete *RTS-Smoother*, benannt nach seinen drei Autoren Rauch, Tung und Striebel (Rauch et al., 1965), vorgestellt. Die Herleitung des Glättungsalgorithmus ist aufwendig und nimmt in der Literatur (z.B. Simon, 2006, Kap. 9) regelmäßig viel Platz in Anspruch, so dass auf eine detaillierte Darlegung an dieser Stelle verzichtet wird. Es sei nur kurz das grundsätzliche Prinzip zur Herleitung beschrieben, sehr ausführlich findet sie sich beispielsweise bei Simon (2006, S. 280).

Vorwärts-Rückwärts-Filter. Eine Möglichkeit, den Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t$ zu jeder Epoche innerhalb des Beobachtungsintervalls $[t_0 \dots T]$ unter Berücksichtigung aller Beobachtungen optimal im Sinne der kleinsten Quadrate zu schätzen, ist, den Kalman-Filter des vorherigen Abschnitts einmal vorwärts und anschließend einmal rückwärts laufen zu lassen (vgl. Abbildung 3.4).

Die Schätzung des Vorwärts-Filters $\hat{\mathbf{x}}_f$ zur Epoche τ berücksichtigt dabei alle Beobachtungen im Intervall $[t_0 \dots \tau]$, die Schätzung des Rückwärts-Filters $\hat{\mathbf{x}}_b$ entsprechend alle Beobachtungen des Intervalls $[\tau + 1 \dots T]$. Der Index τ der jeweiligen Epoche ist hier und im Folgenden zur Erhaltung der Übersichtlichkeit weggelassen.

Die Schätzung des Zustands zum Zeitpunkt τ unter Berücksichtigung aller Beobachtungen im gesamten Intervall ergibt sich dann als gewichtetes Mittel aus Hin- und Rückweg:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f + \mathbf{K}_b \hat{\mathbf{x}}_b, \quad (3.122)$$

wobei \mathbf{K}_f und \mathbf{K}_b die noch zu bestimmenden Gewichtsmatrizen für die Schätzungen aus Hin- und Rückweg sind. Da $\hat{\mathbf{x}}_f$ und $\hat{\mathbf{x}}_b$ jeweils Ausgaben eines Kalman-Filters sind, sind sie mittelwertfrei und $\hat{\mathbf{x}}$ sollte auch mittelwertfrei sein, wofür $\mathbf{K}_f + \mathbf{K}_b = \mathbf{I}$ gelten muss (Simon, 2006). Für den geglätteten Zustand zur Epoche τ gilt damit

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_f) \hat{\mathbf{x}}_b. \quad (3.123)$$

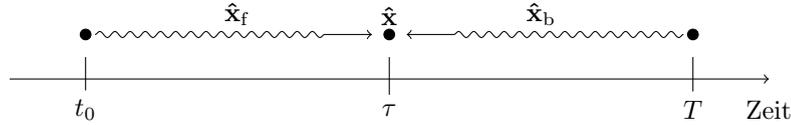
Soll die Schätzung $\hat{\mathbf{x}}$ minimale Varianz aufweisen, führt dies, ähnlich dem Vorgehen aus Abschnitt 3.3.1 auf die Minimierung der Spur $\text{tr}[\mathbf{P}]$ der Kovarianzmatrix des geschätzten Zustands \mathbf{P} . Für die Gewichtsmatrix \mathbf{K}_f ergibt sich schließlich (Simon, 2006, S. 280):

$$\mathbf{K}_f = \mathbf{P}_b^- (\mathbf{P}_f^+ + \mathbf{P}_b^-)^{-1} \quad (3.124)$$

und für den geglätteten Zustand und seine Kovarianzmatrix:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_f \hat{\mathbf{x}}_f^+ + (\mathbf{I} - \mathbf{K}_f) \hat{\mathbf{x}}_b^- \quad (3.125)$$

$$\mathcal{C}\{\hat{\mathbf{x}}\} = \mathbf{P} = \left(\left(\mathbf{P}_f^+ \right)^{-1} + \left(\mathbf{P}_b^- \right)^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.126)$$

Abbildung 3.4: Glättung durch Vorwärts- und Rückwärtsfilterung im Intervall $[t_0 \dots T]$.

RTS-Smoother. Der vorgestellte Vorwärts-Rückwärts-Filter hat den Nachteil, dass in Gleichung (3.124) bis Gleichung (3.126) explizit der prädierte Systemzustand $\hat{\mathbf{x}}_b^-$ des Rückwärtsfilters und seine Kovarianzmatrix \mathbf{P}_b^- bestimmt werden müssen. Einen oft verwendeten und rechentechnisch effizienteren Algorithmus, der nur noch vom Vorwärtsfilter berechnete Größen (mit Index f in den folgenden Gleichungen) und bereits geglättete Zustände verwendet, entwickelten [Rauch et al. \(1965\)](#). Er wird allgemein als *RTS-Smoother* bezeichnet. Für den geglätteten Systemzustand $\hat{\mathbf{x}}_\tau$ und seine Kovarianzmatrix \mathbf{P}_τ zur Epoche τ ergibt sich dann ([Simon, 2006](#)):

$$\hat{\mathbf{x}}_\tau = \hat{\mathbf{x}}_{f,\tau}^+ + \mathbf{K}_\tau \left(\hat{\mathbf{x}}_{\tau+1} - \hat{\mathbf{x}}_{f,\tau+1}^- \right) \quad (3.127)$$

$$\mathbf{P}_\tau = \mathbf{P}_{f,\tau}^+ - \mathbf{K}_\tau \left(\mathbf{P}_{f,\tau+1}^- - \mathbf{P}_{\tau+1} \right) \mathbf{K}_\tau^T \quad (3.128)$$

mit der Gewichtungsmatrix

$$\mathbf{K}_\tau = \mathbf{P}_{f,\tau}^+ \mathbf{B}^T \left(\mathbf{P}_{f,\tau+1}^- \right)^{-1}. \quad (3.129)$$

Hierbei wird die Zustandsschätzung des Hinwegs ($\hat{\mathbf{x}}_\tau$) verbessert um die Residuen zwischen der Prädiktion und der Schätzung des Folgetages im *RTS-Smoother*: $\hat{\mathbf{x}}_{\tau+1} - \hat{\mathbf{x}}_{f,\tau+1}^-$.

3.4 Vergleich mit dem Mascon-Ansatz

An dieser Stelle soll der hier entwickelte Kalman-Filter-Ansatz verglichen werden mit dem in der Literatur schon länger bekannten *Mascon-Ansatz* (Massenkonzentrationen) bei der GRACE-Schwerefeldbestimmung (z.B. in [Rowlands et al., 2005](#); [Luthcke et al., 2006, 2008](#)), der ebenfalls räumliche und zeitliche Korrelationen zwischen den zur Parametrisierung benutzten Basisfunktionen einführt. Daher wird zunächst der Mascon-Ansatz in seinen Grundzügen beschrieben, bevor anschließend Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum hier eingeführten Kalman-Filter-Ansatz hervorgehoben werden.

Mascon-Ansatz. Das Gravitationsfeld der Erde wird beim *Mascon-Ansatz* repräsentiert durch ein globales mittleres Feld, das durch regional beschränkte Funktionen zusätzlich verfeinert wird. Hierbei wird die Erde aufgeteilt in sogenannte *Mascons* (Massenkonzentrationen). Dies sind beliebig geformte Areale auf der Erdoberfläche belegt mit einer konstanten Massenschicht, üblicherweise parametrisiert als äquivalente Wasserhöhe H_i . Der Träger dieser räumlichen Treppenfunktion ist dabei problemabhängig zu wählen und bei [Rowlands et al. \(2010\)](#) zum Beispiel $4^\circ \times 4^\circ$ -Zellen. Die Verbesserung des mittleren, globalen Gravitationsfeldes, die sich durch die Mascon Φ_i in der Epoche t ergibt, lässt sich mit Gleichung (2.11) direkt ausdrücken als Zuschlag zum globalen, in Kugelfunktionen entwickelten Gravitationsfeld mit der konstanten Wasserhöhe $H_i(t)$:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta c_{nm,i}(t) \\ \Delta s_{nm,i}(t) \end{array} \right\} = H_i(t) \frac{1 + k'_n}{2n + 1} \cdot \frac{10M}{4\pi R^2} \iint_{\Phi_i} \left\{ \begin{array}{l} C_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \\ S_{nm}(\lambda_Q, \vartheta_Q) \end{array} \right\} d\Phi. \quad (3.130)$$

Die äquivalente Wasserhöhe $H_i(t)$ ist hierbei in Zentimeter angegeben. Der Faktor 10 in voranstehender Gleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass eine Wasserschicht von 1 cm auf einem Quadratmeter die Masse von 10 kg aufweist.

Die Kugelfunktionsentwicklung des einzelnen Mascons Φ_i stellt hierbei eine der Basisfunktionen dar, mit der die zeitliche Evolution des Gravitationsfeldes ausgedrückt wird. Das Gesamtfeld ergibt sich durch Addition der einzelnen Mascons. Die Basisfunktion wird mit dem Mascon-Parameter $H_i(t)$ des entsprechenden Mascons skaliert. Nach Anordnung der n Mascon-Parameter im $n \times 1$ -Vektor

$$\mathbf{m}_t = (H_1, H_2, \dots, H_n)_t^T \quad (3.131)$$

werden diese aus den GRACE-Beobachtungen einer Epoche t , angeordnet im Beobachtungsvektor \mathbf{l}_t , geschätzt. Als Besonderheit ist hierbei festzuhalten, dass nur die K-Band-Beobachtungen verwendet werden und die Bahnen der Satelliten vorab aus den GPS-Beobachtungen bestimmt und anschließend festgehalten werden (Rowlands et al., 2010). Details zu den verwendeten Beobachtungsgleichungen

$$\mathbf{l}_t = \mathbf{C}_t \mathbf{m}_t + \mathbf{v}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} \{ \mathbf{v}_t \} = \mathbf{R}_t \quad (3.132)$$

finden sich in der angegebenen Literatur. Für die gleichzeitige Bestimmung der Mascon-Parameter aller T Epochen ergibt sich unter Voraussetzung der Unkorreliertheit zweier Beobachtungsepochen zunächst die Beobachtungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_T \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} \{ \bar{\mathbf{v}} \} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{R}_T \end{pmatrix} \quad (3.133)$$

oder verkürzt geschrieben

$$\bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{m}} + \bar{\mathbf{v}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} \{ \bar{\mathbf{v}} \} = \bar{\mathbf{R}}. \quad (3.134)$$

Die betrachteten Mascons werden hierbei allerdings nicht als unabhängig voneinander betrachtet, sondern vielmehr durch Einführung räumlicher und zeitlicher Korrelationen miteinander verknüpft. Bei Sabaka et al. (2010) wird dies durch Einführung einer zusätzlichen Bedingungsgleichung

$$\mathbf{0} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{m}} + \mathbf{e} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{W}^{-1}) \quad (3.135)$$

beschrieben. Hierin beschreibt die Matrix $\mathbf{D} = (d_{ik})$ die räumliche und zeitliche Korrelation zwischen den einzelnen Mascon-Parametern als linearer Differenzoperator, so dass die k -te Spalte von \mathbf{D} den i -ten und j -ten Mascon-Parameter beschränkt (Sabaka et al., 2010):

$$d_{ki} = 1, \quad d_{kj} = -1, \quad d_{kq} = 0 \quad \text{für alle} \quad q \neq i, j. \quad (3.136)$$

Die einzelnen Mascons werden dabei zu zusammenhängenden Regionen \mathcal{R}_i zusammengefasst, in denen ein ähnliches räumlich-zeitliches Verhalten zu erwarten ist. Beispiele hierzu finden sich bei Rowlands et al. (2005); Luthcke et al. (2006, 2008).

Die Inverse der Kovarianzmatrix $\mathbf{W} = (w_{ik})$ des Fehlervektors \mathbf{e} ist dabei eine Diagonalmatrix, für deren Elemente gilt (Sabaka et al., 2010):

$$w_{kk} = \begin{cases} \exp\left(1 - \frac{d_{ij}}{D}\right) \cdot \exp\left(1 - \frac{t_{ij}}{T}\right) & \text{für } \mathcal{R}_i = \mathcal{R}_j \\ 0 & \text{für } \mathcal{R}_i \neq \mathcal{R}_j \end{cases}. \quad (3.137)$$

Hierin ist d_{ij} der räumliche Abstand zweier Mascons, t_{ij} die positive zeitliche Distanz und D und T Skalierungsfaktoren, die als Korrelationslängen bezeichnet werden. Die zeitliche und räumliche Korrelationsstruktur wird hierbei also als analytische Funktion in Zeit und Raum parametrisiert. Die jeweiligen Korrelationslängen ergeben sich dabei aus Vorinformationen über das erwartete Verhalten des Schwerefeldsignals und unterscheidet sich je nach Aufgabenstellung. Beispiele hierzu finden sich bei Luthcke et al. (2006) für eine Anwendung in Grönland und bei Luthcke et al. (2008) für die Anpassung auf ein Gletschergebiet in Alaska.

Gelöst werden muss schließlich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{l}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{m}} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} \left\{ \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.138)$$

wofür bei Sabaka et al. (2010) ein effizientes Lösungsverfahren angegeben ist.

Vergleich mit dem Kalman-Filter-Ansatz. Der vorgestellte Kalman-Filter-Ansatz ist formal identisch mit einer sequentiellen Ausgleichung im Gauss-Markoff-Modell (vgl. Abschnitt 3.1.1) mit den beiden Beobachtungsgruppen *GRACE* und *Prozessmodell*.

Die Beobachtungsgleichung aus Gleichung (3.89)

$$\mathbf{l}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\mathbf{v}_t\} = \mathbf{R}_t \quad (3.139)$$

stellt dabei den funktionalen Zusammenhang zwischen den GRACE-Beobachtungen \mathbf{l}_t einer Epoche t und dem gesuchten Systemzustand \mathbf{x}_t der Epoche dar. Im Gegensatz zum beschriebenen Mascon-Ansatz wird das Gravitationsfeld der Erde hier durch eine Kugelfunktionsreihe parametrisiert. Die unterschiedlichen Repräsentationen lassen sich jedoch durch eine einfache lineare Operation

$$\mathbf{x} = \mathbf{Lm} \quad (3.140)$$

einander überführen. Details hierzu, insbesondere zur im Regelfall unterschiedlichen Größe der jeweiligen Parametervektoren \mathbf{x} und \mathbf{m} , finden sich bei [Sabaka et al. \(2010\)](#) und sollen an dieser Stelle nicht weiter behandelt werden.

Für die gleichzeitige Bestimmung der Zustände aller T Epochen ergibt sich unter Voraussetzung der Unkorreliertheit zweier Beobachtungsepochen (vgl. Abschnitt 3.3), zunächst die Beobachtungsgleichung

$$\begin{pmatrix} \mathbf{l}_1 \\ \mathbf{l}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{l}_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_T \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\bar{\mathbf{v}}\} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{R}_T \end{pmatrix} \quad (3.141)$$

oder verkürzt geschrieben

$$\bar{\mathbf{l}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{v}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\bar{\mathbf{v}}\} = \bar{\mathbf{R}}. \quad (3.142)$$

Dieses Gleichungssystem ist so nicht stabil lösbar, es müssen zusätzliche Informationen in Form des Prozessmodells aus Gleichung (3.86)

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{B}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\mathbf{w}_t\} = \mathbf{Q} \quad (3.143)$$

eingeführt werden, das einen Zusammenhang zwischen den Zuständen zweier aufeinanderfolgender Epochen beschreibt. Mit dem Startwert \mathbf{x}_0 und seiner Kovarianzmatrix Σ ergibt sich für diese zweite Beobachtungsgruppe das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} -\mathbf{x}_0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{B} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & & \mathbf{0} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{T-1} \\ \mathbf{x}_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{T-1} \\ \mathbf{w}_T \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\bar{\mathbf{w}}\} = \begin{pmatrix} \Sigma & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{pmatrix} \quad (3.144)$$

oder ebenfalls abgekürzt

$$\bar{\mathbf{x}}_0 = \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{w}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\{\bar{\mathbf{w}}\} = \bar{\mathbf{Q}}. \quad (3.145)$$

Die Zustände der einzelnen Epochen, angeordnet im Vektor $\bar{\mathbf{x}}$, ergeben sich dann durch Lösung des zusammengesetzten Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{l}} \\ \bar{\mathbf{x}}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} \\ \bar{\mathbf{B}} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{x}} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C}\left\{\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{w}} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{R}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{Q}} \end{pmatrix}. \quad (3.146)$$

Die Matrix \mathbf{B} aus Gleichung (3.143) wurde dabei in Abschnitt 3.2.2 aus der Korrelationsstruktur zweier aufeinanderfolgender Epochen (vgl. Gleichung (3.63))

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{N} \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma} & \boldsymbol{\Sigma}_\Delta \\ \boldsymbol{\Sigma}_\Delta^T & \boldsymbol{\Sigma} \end{pmatrix} \right) \quad (3.147)$$

des erwarteten Schwerefeldsignals \mathbf{x}_t abgeleitet. Hierin beschreibt die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}$ die räumliche Variabilität des Signals und die Matrix $\boldsymbol{\Sigma}_\Delta$ die zeitliche Variabilität zweier aufeinanderfolgender Epochen. Bestimmt wurden diese empirisch aus vorhandenen geophysikalischen Modellen (Abschnitt 3.2.3).

Die beiden Ansätze unterscheiden sich also im Wesentlichen durch die unterschiedliche Art der Parametrisierung (Mascons gegen Kugelfunktionsreihe) und in der Art, wie Vorinformationen eingeführt werden. Durch die regionale Parametrisierung gelingt es auf einfache Weise räumliche und zeitliche Korrelationen einzuführen, mit der in Gleichung (3.137) angegebenen Exponentialfunktion entspricht dies einem Prozess erster Ordnung (Gelb, 1974). Dieser wird auch durch das im Kalman-Filter-Ansatz vorgegebene Prozessmodell realisiert. Eine ausführlichere Erläuterung hierzu findet sich im Anhang A.1. Der wesentliche Unterschied liegt hierbei darin, dass die Korrelationsstruktur in Raum und Zeit nicht durch eine analytische Funktion beschrieben, sondern eine empirische Beschreibung durch die aus vorhandenen geophysikalischen Modellen abgeleiteten Matrizen $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ und $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta$.

3.5 Zusammenfassung der GRACE-Datenprozessierung

Zum Abschluss des Kapitels wird an dieser Stelle der vollständige Auswerteprozess bei der Analyse der GRACE-Beobachtungen zusammenfassend wiedergegeben. Zunächst wird das Prozessmodell, das die zeitliche Evolution des Erdschwerefeldes approximiert, aus Modellausgaben \mathbf{m}_t bekannter geophysikalischer Modelle bestimmt. Mit dem Prozessmodell werden die GRACE-Beobachtungen \mathbf{l}_t , die in der Form von Normalgleichungen \mathbf{N}_t und \mathbf{n}_t für T Epochen gegeben sind, im Kalman-Filter ausgewertet (Hinweg). Abschließend wird die Ausgabe des Kalman-Filter mit dem *RTS-Smoother* zeitlich rückwärts geglättet (Rückweg).

Aufstellen des Prozessmodells.

- Bestimmung des Prozessmodells

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{B}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$$

mit

$$\mathbf{B} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{Q} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta^T$$

- Hierzu wird die empirische Autokovarianzmatrix

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T$$

aus Zeitreihen gegebener geophysikalischer Modelle \mathbf{m}_i bestimmt. $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ beschreibt dabei die räumliche Variabilität des erwarteten Schwerefeldes. Die empirische Kreuzkovarianzmatrix

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta = \frac{1}{T-1} \sum_{i=2}^T \mathbf{m}_i \mathbf{m}_{i-1}^T$$

hingegen beschreibt die Variabilität von einer Epoche zur nächsten.

Auswertung der Beobachtungen im Kalman-Filter (Hinweg).

- Initialisieren des Filters mit

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_0^+ &= \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_0^+ &= \bar{\boldsymbol{\Sigma}}.\end{aligned}$$

Mit dieser Wahl von \mathbf{P}_0^+ bleibt der Prädiktionsfehler zeitlich konstant, denn es gilt für die Prädiktion der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{P}_t^- = \mathbf{B}\mathbf{P}_{t-1}^+\mathbf{B}^T + \mathbf{Q} = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{-T} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta^T + \bar{\boldsymbol{\Sigma}} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \bar{\boldsymbol{\Sigma}}_\Delta^T = \bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{P}_{t-1}^-$$

Die Prädiktion verschlechtert dann später, wenn Beobachtungen zur entsprechenden Epoche vorliegen, nicht die Schätzung des Systemzustands $\hat{\mathbf{x}}_t^+$.

- Für alle $t \in [1 \dots T]$:
 - Prädiktion

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_t^- &= \mathbf{B}\mathbf{P}_{t-1}^+\mathbf{B}^T + \mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{x}}_t^- &= \mathbf{B}\hat{\mathbf{x}}_t^+\end{aligned}$$

- Aufstellen der Normalgleichungen mit den Beobachtungen \mathbf{l}_t für die Epoche t

$$\mathbf{N}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{n}_t$$

nach den Ausführungen in Abschnitt 3.1.

- Korrektur

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_t^+ &= \left((\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{N}_t \right)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_t^+ &= \hat{\mathbf{x}}_t^- + \mathbf{P}_t^+ (\mathbf{n}_t - \mathbf{N}_t \hat{\mathbf{x}}_t^-)\end{aligned}$$

- Ergebnis: Zeitreihe von T Zustandsvektoren $\hat{\mathbf{x}}_t^+$

Auswertung der Filter-Ergebnisse im RTS-Smoother (Rückweg).

- Initialisieren des *RTS-Smoother*s mit:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_T &= \hat{\mathbf{x}}_T^+ \\ \boldsymbol{\Sigma}_T &= \mathbf{P}_T^+\end{aligned}$$

- Für alle $t \in [T - 1 \dots 1]$ bestimme:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_t &= \mathbf{P}_t^+ \mathbf{B}^T (\mathbf{P}_{t+1}^-)^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_t &= \hat{\mathbf{x}}_t^+ + \mathbf{K}_t (\hat{\mathbf{x}}_{t+1}^- - \hat{\mathbf{x}}_{t+1}^+) \\ \boldsymbol{\Sigma}_t &= \mathbf{P}_t^+ - \mathbf{K}_t (\mathbf{P}_{t+1}^- - \boldsymbol{\Sigma}_{t+1}) \mathbf{K}_t^T\end{aligned}$$

- Ergebnis: Geglättete Zeitreihe von T Zustandsvektoren $\hat{\mathbf{x}}_t$

4. Simulationsstudie

In diesem Kapitel wird anhand eines Simulationsszenarios unter kontrollierten Bedingungen untersucht, inwiefern der in Kapitel 3 vorgestellte Ansatz in der Lage ist, kurzzeitige Schwerevariationen aus Beobachtungen der Satellitenmission GRACE abzuleiten. Dieses Simulationsszenario soll einfach gestaltet sein, und in der Hauptsache den Auswerteansatz im Kalman-Filter untersuchen. Daher wurden einige wichtige Effekte, die bei der Echtdatenprozessierung einen nicht geringen Einfluss auf die Ergebnisse haben, an dieser Stelle durch die Wahl der Rahmenbedingungen ausgeklammert. Hierbei sind insbesondere zwei wichtige Anteile zu nennen:

Erstens die durch räumliches und zeitliches Aliasing einfließenden Fehler. Entspricht die räumliche Auflösung der gewählten Parametrisierung nicht der räumlichen Variabilität des Signals, so kann es zu Verschmierungseffekten kommen. Die Energie in den einzelnen Kugelfunktionskoeffizienten des Referenzsignals wird dabei auf andere Kugelfunktionskoeffizienten des zu bestimmenden Zustandsvektors abgebildet. Diese Art der Unter- oder Überabtastung des gesuchten Signals führt zu den aus der Signaltheorie bekannten, in diesem Fall räumlichen, Aliasingeffekten. Um diesen Einfluss auszuschalten, wurde der maximale Kugelfunktionsgrad von Referenzsignal und zu schätzendem Zustandsvektor übereinstimmend mit $n = 40$ gewählt. Eine höhere Auflösung erscheint angesichts der Tatsache, dass ab ungefähr Grad 30 das Rauschen der GRACE-Beobachtungen das Signal deutlich übersteigt, nicht sinnvoll (vgl. Abbildung 5.8 auf Seite 94). Des Weiteren wurden auch Einflüsse des zeitlichen Aliasings, das durch inadäquate zeitliche Auflösung bei der Parametrisierung entsteht, ausgeklammert. Für das Referenzsignal liegen Tagesmittelwerte vor, so dass bei der Schätzung einer täglichen Schwerefeldlösung dieser Effekt des zeitlichen Aliasings nicht auftritt, da die zeitliche Auflösung des Referenzsignals und der gewählten Parametrisierung übereinstimmen. Für den Echtdatenfall trifft dies nicht zu, da das Schwerefeld der Erde auch innerhalb eines Tages variiert, was beispielsweise durch Nutzung des AOD1B-Produkts (Flechtner, 2007) mit sechsständiger Auflösung berücksichtigt werden soll.

Zweitens wurden alle Fehlerquellen bei der Auswertung, die durch fehlende oder unzureichende Modellierung des Instrumentenrauschens von beispielsweise Akzerelometer oder K-Band-Entfernungsmesser verursacht sind, in diesem Simulationsszenario ebenfalls außer Acht gelassen. Erreicht wird dies dadurch, dass sowohl bei der Simulation der Beobachtungen weißes Rauschen mit definierter Standardabweichung verwendet wird, als auch im späteren Auswerteprozess in der Gewichtsmatrix der Normalgleichungen dasselbe Fehlermodell Anwendung findet.

So wird zunächst in Abschnitt 4.1.1 ein Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ generiert, das die kurzzeitlichen Variationen des Erdschwerefeldes repräsentiert. Um eine Übertragbarkeit auf den Echtdatenfall sicherzustellen, müssen prinzipiell alle Subsysteme, die zu zeitlichen Schwerevariationen beitragen, in das Referenzsignal einfließen. Dies liegt im Widerspruch zu der Forderung ein möglichst einfaches und gut zu kontrollierendes Szenario zu entwerfen. Daher wird hier lediglich die drei Subsysteme Atmosphäre, Ozean und kontinentale Hydrologie in Form der Ausgabe der Modelle NCEP, MOG2d und GLDAS (nähere Erläuterungen finden sich im folgenden Abschnitt 4.1.1) modelliert.

Das Referenzsignal wird mit einer Satellitenmission in GRACE-Konfiguration beobachtet und die Daten anschließend mit dem Kalman-Filter-Ansatz ausgewertet. Hierfür wird zur Erstellung des empirischen Prozessmodells in Abschnitt 4.1.2 ein Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ benötigt, das unabhängig vom Referenzsignal sein soll, um eine Übertragbarkeit auf den Echtdatenfall sicherzustellen. Bei diesem kann nicht davon ausgegangen werden, dass die statistischen Eigenschaften der beobachteten Variationen des Erdschwerefeldes genau mit denen des für die Generierung des Prozessmodells benötigten Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ übereinstimmen. Um dies zu simulieren, wird in Abschnitt 4.1.2 das empirische Prozessmodell aus Daten der Modelle ECMWF, OMCT und WGHM abgeleitet (nähere Erläuterungen finden sich im Abschnitt 4.1.2).

In Abschnitt 4.2 wird das vorgeschlagene empirische Prozessmodell, zunächst noch ohne Hinzunahme weiterer Informationen in Form der simulierten Satellitenbeobachtungen, näher untersucht, bevor schließlich in Abschnitt 4.3 untersucht wird, wie gut der entwickelte Kalman-Filter-Ansatz das zugrunde liegende Referenzsignal durch die Satellitenbeobachtungen rekonstruieren kann. An dieser Stelle wird auch näher auf den Anteil der Beobachtungen an einer täglichen Schwerefeldlösung eingegangen.

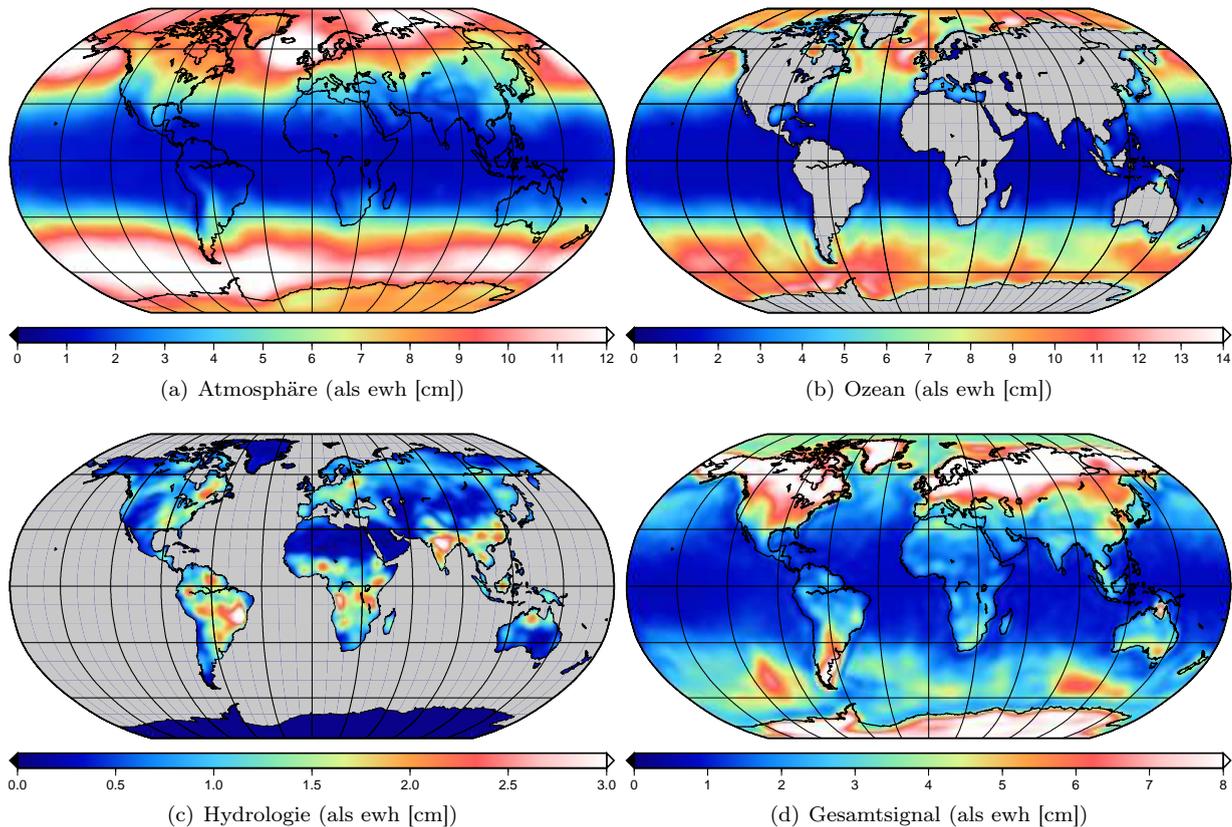


Abbildung 4.1: Zeitliche Variabilität als quadratisches Mittel (RMS) der Einzelsignale und des zusammengesetzten Referenzsignals $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ bis Grad und Ordnung 40 in Zentimeter äquivalenter Wasserhöhe (ewh [cm]). Die langperiodischen Anteile Jahres- und Halbjahresgang, Mittelwert und linearer Trend sind bereits reduziert. Man beachte die unterschiedliche Größenordnung der Einzelsignale.

Die zeitliche Variabilität der betrachteten Signale wird im Folgenden als quadratisches Mittel der Zeitreihe (RMS) für die betrachteten Gitterpunkte angegeben und in äquivalenten Wasserhöhen, abgekürzt mit *ewh* (*equivalent water height*), angegeben. Diese Darstellung wird durchgängig bei den betrachteten Zeitreihen in diesem Kapitel verwendet.

4.1 Konfiguration

4.1.1 Beobachtungsmodell

Referenzsignal. Um den zeitvariablen Anteil des Schwerefeldes zu simulieren, wurden zunächst Massenvariationen aus Daten eines hydrologischen Modells, eines Ozeanströmungsmodells und eines Atmosphärenmodells nach den Ausführungen in Kapitel 2 abgeleitet.

Zur Simulation der hydrologischen Massenvariationen wurde das *Global Land Data Assimilation System* (GLDAS; Rodell et al., 2004) genutzt. Dieses liegt hier für das Jahr 2006 in der Form täglicher Gesamtwasserspeicheränderungen auf einem globalen Gitter vor. Die Modelldaten wurden zunächst in eine Kugelfunktionsreihe des Gravitationspotentials bis Grad und Ordnung 100 entwickelt und anschließend um langperiodische Signale wie Jahres- und Halbjahresgang, Mittelwert und linearer Trend reduziert. Die zeitliche Variabilität des hydrologischen Signals in Form des quadratischen Mittels (*RMS*) ist in Abbildung 4.1(c) in äquivalenten Wasserhöhen dargestellt und erreicht Werte bis 3,8 cm ewh.

Zur Simulation ozeanischer Massenvariationen wurde das MOG2d-Ozeanströmungsmodell (Carrère und Lyard, 2003) genutzt, dessen Variationen auch in Form einer Kugelfunktionsreihe des Gravitationspotentials bis Grad und Ordnung 100 in einer zeitlichen Auflösung von sechs Stunden für das Jahr 2006 vorlagen. Die Zeitreihe der Potentialkoeffizienten wurde ebenfalls um die gleichen langperiodischen Signale reduziert. Abbildung 4.1(b) zeigt die zeitliche Variabilität des ozeanischen Signals, welche insgesamt mit Maxima bis 13,8 cm äquivalenter Wasserhöhe deutlich größer als das hydrologische Signal ist.

In der gleichen Größenordnung liegen auch die atmosphärischen Massenvariationen, die Maximalwerte bis 13,9 cm äquivalenter Wasserhöhe ausweisen (siehe hierzu Abbildung 4.1(a)). Diese wurden aus globalen Oberflächendruckdaten des *National Centers for Environmental Prediction* (NCEP; Kalnay et al., 1996), hier entwickelt in eine Kugelfunktionsreihe des Gravitationspotentials bis Grad und Ordnung 72, abgeleitet. Sie liegen als Zeitreihe in sechsstündiger Auflösung für das Jahr 2006 vor, welche ebenfalls vorab um Jahres- und Halbjahresgang, Mittelwert und Trend reduziert wurde.

Zur Simulation des zeitvariablen Schwerefeldes wurden die Koeffizienten-Zeitreihen der drei Subsysteme zunächst addiert und auf tägliche Werte bis Grad und Ordnung 40 gemittelt. Es liegen somit 365 Sätze von Potentialkoeffizienten vor, die im Folgenden als Referenzsignal oder $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ bezeichnet werden. Dieses Referenzsignal soll die kurzzeitigen Variationen des Erdschwerefeldes simulieren. Langzeitlichere Schwankungen werden in diesen Untersuchungen nicht berücksichtigt. Bei der Prozessierung der Echt-daten werden diese ebenfalls vorab von den Beobachtungen reduziert (vgl. Kapitel 5), so dass hier eine realistische Analysekonfiguration vorliegt. Abbildung 4.1 zeigt die zeitliche Variabilität des Referenzsignals wieder in Form des quadratischen Mittels (RMS). Große atmosphärische Variationen finden sich in den höheren Breiten. Während diese über den Ozeanen im Wesentlichen kompensiert werden, ist das Signal über den Kontinenten dort deutlich größer. Daneben sind die schnellen und großen Massenvariationen im Antarktischen Zirkumpolarstrom gut erkennbar. Der Anteil des hydrologischen Signals ist deutlich weniger hochfrequent und weist auch eine insgesamt niedrigere Amplitude auf. Äquatornahe Breiten haben eher kleine Signale, die vom Anteil der Hydrologie dominiert werden. Im Durchschnitt liegt die Variabilität des Referenzsignals bei 2,7 cm ewh, bei Maximalwerten bis 12,5 cm ewh. In den äquatornahen Regionen beträgt die Variabilität dagegen deutlich unter 2 cm ewh.

Simulation der GRACE-Beobachtungen und Aufstellen der Normalgleichungssysteme. Zur Erzeugung eines Datensatzes von simulierten GRACE-Beobachtungen werden zunächst die Bahnen zweier Satelliten in einem Gravitationsfeld mit dem statischen Anteil aus dem Erdschwerefeldmodell ITG-Grace03 (Mayer-Gürr et al., 2010b) und einem zeitvariablen Anteil aus $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ mit einer Abtastrate von $\Delta t = 5$ s über 365 Tage integriert. Für beide Satelliten werden dabei die gleichen Bahnparameter gewählt:

- große Halbachse $a = 6778$ km
- Exzentrizität $e = 0,001$
- Inklination $i = 89^\circ$.

Die Startbedingungen werden so gewählt, dass beide Satelliten auf der gleichen Bahn mit einem Abstand von ungefähr 220 km fliegen. Anschließend werden mit den so gewonnenen Ephemeriden die Relativentfernungen beider Satelliten zueinander bestimmt. Die Orbitdaten werden anschließend mit weißem Rauschen von 2 cm belegt. Die Relativentfernungen, die die K-Band-Beobachtungen simulieren, werden ebenfalls mit weißem Rauschen von 0,2 $\mu\text{m/s}$ belegt. Als weitere Datensätze werden Akzelerometerbeobachtungen, belegt mit weißem Rauschen von 10^{-10} m/s^2 , und Sternenkamerabeobachtungen ohne zusätzliches Rauschen generiert und weiter verwendet. Die Beobachtungen werden dabei für jede Epoche t mit einer Länge von einem Tag angeordnet im Beobachtungsvektor \mathbf{l}_t . Diese werden anschließend um ein statisches Referenzschwerefeld reduziert. Hierzu wird wieder ITG-Grace03 verwendet, um Fehlereinflüsse durch unterschiedliche statische Felder zu umgehen, denn in dieser Arbeit steht die Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Schwerefeldes im Vordergrund.

Zur Bestimmung der gesuchten Potentialkoeffizienten \mathbf{x}_t werden die Beobachtungsgleichungen aus Gleichung (3.6) und das überbestimmte Gleichungssystem aus Gleichung (3.10) für jede der 365 Epochen nach der bei Mayer-Gürr (2006) beschriebenen Methode der kurzen Bahnbögen aufgestellt. So liegen schließlich Normalgleichungsmatrizen \mathbf{N}_t und zugehörige rechte Seiten \mathbf{n}_t für 365 Epochen vor, die in der weiteren Prozessierung verwendet und als GRACE-Beobachtungen bezeichnet werden.

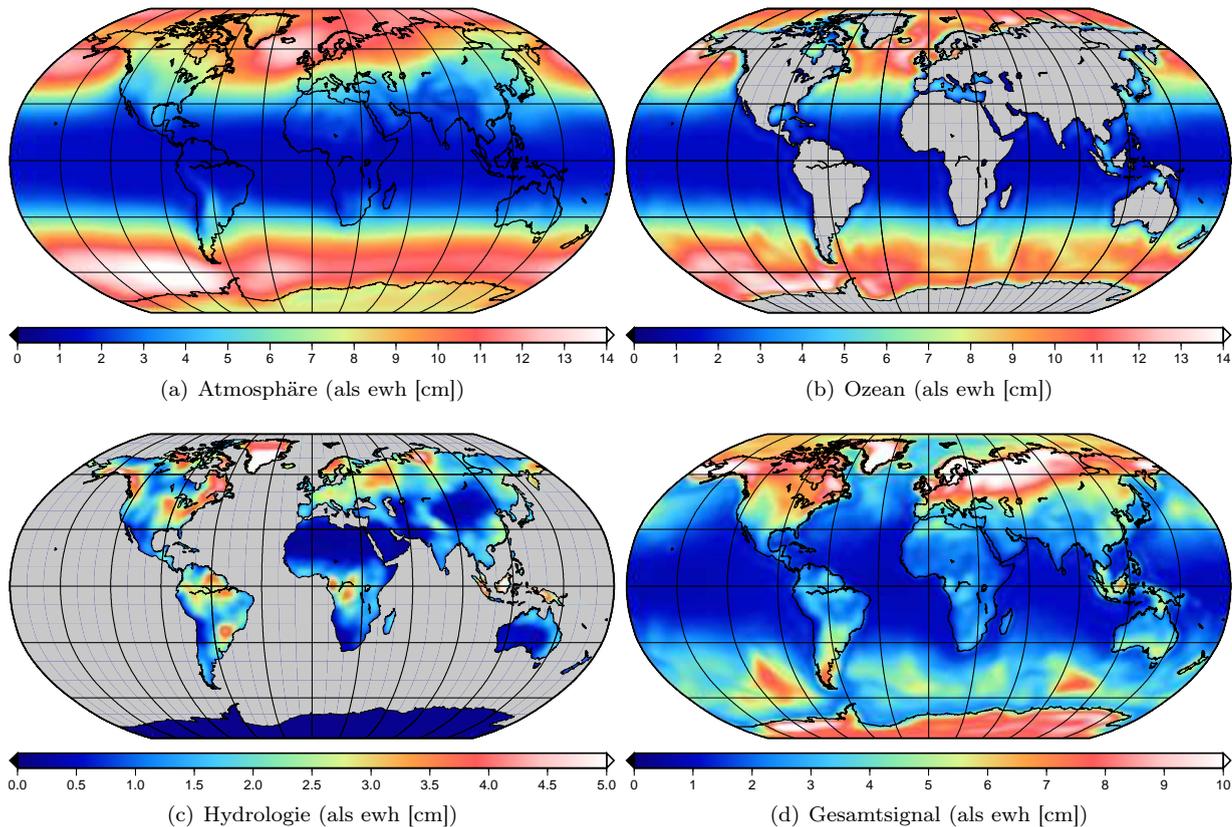


Abbildung 4.2: Zeitliche Variabilität als quadratisches Mittel (RMS) der Einzelsignale und des zusammengesetzten Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ in Zentimeter äquivalenter Wasserhöhe (ewh [cm]). Die langperiodischen Anteile Jahres- und Halbjahresgang, Mittelwert und linearer Trend sind bereits reduziert. Man beachte die unterschiedliche Größenordnung der Einzelsignale.

4.1.2 Prozessmodell

Neben den Beobachtungen wird für die weitere Prozessierung auch ein Prozessmodell, das die zeitliche Evolution der gesuchten Schwerfeldparameter beschreibt, benötigt. Dieses wird in dieser Arbeit aus den stochastischen Informationen vorhandener geophysikalischer Modelle abgeleitet, die im Folgenden als Prozesssignal bezeichnet werden. Seine Wahl ist Teil des Auswerteverfahrens. Hier werden zur Generierung des Prozesssignals geophysikalische Modelle gewählt, die nicht zur Simulation des zeitvariablen Signals in den Beobachtungen (Referenzsignal) verwendet wurden. Die Modelldaten des Prozesssignals sollen im Folgenden kurz beschrieben werden.

Verwendete geophysikalische Modelle. Nachdem bei der Generierung der Beobachtungen NCEP (Atmosphäre), MOG2d (Ozean) und GLDAS (Hydrologie) zur Simulation der Massenverlagerungen auf der Erde verwendet wurden, kommen bei der Bestimmung des Prozesssignals Massenvariation der folgenden Modelle zum Einsatz:

- für die Atmosphäre Daten des ECMWF (ECMWF, 2008),
- für den Ozean Daten des OMCT (Dobslaw und Thomas, 2007) und
- für die Hydrologie Daten des WGHM (Döll et al., 2003; Hunger und Döll, 2008).

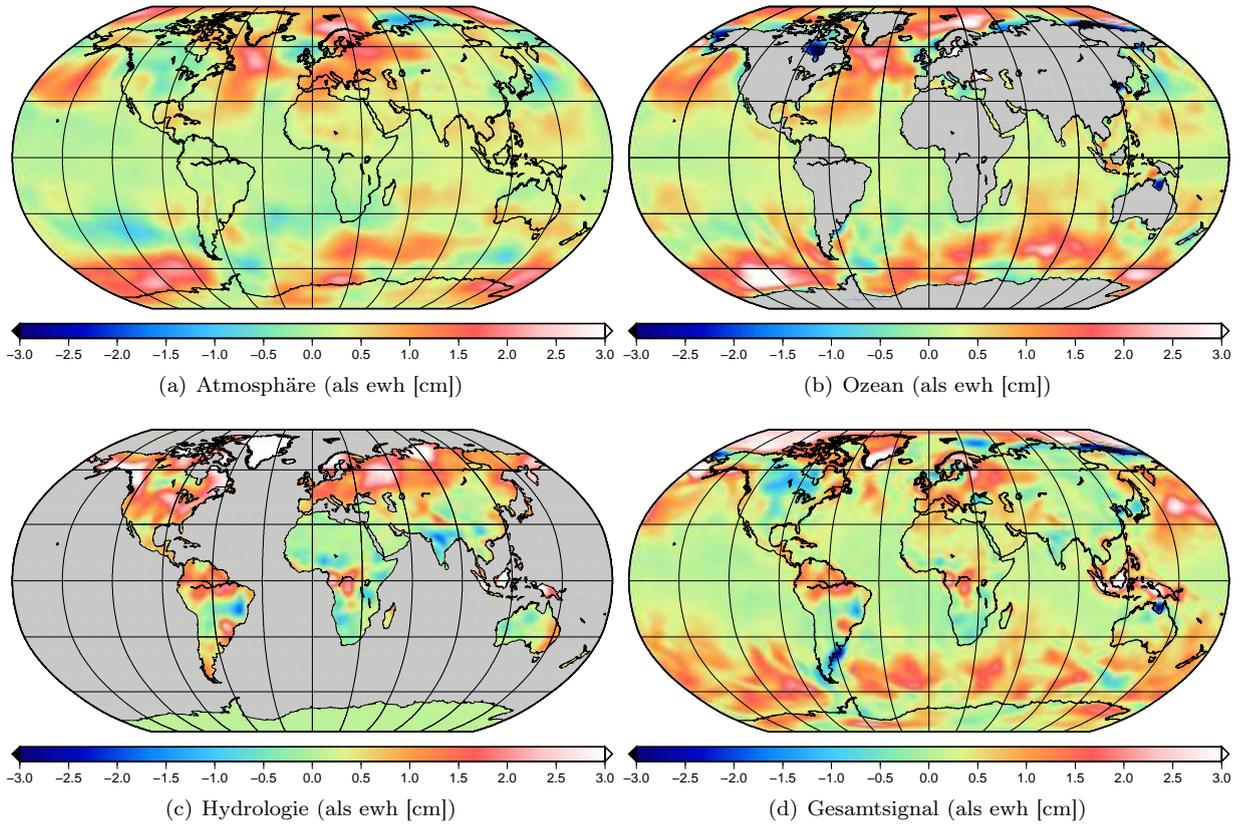


Abbildung 4.3: Differenzen der zeitlichen Variabilität zwischen Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ und Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$. Dargestellt sind Differenzen der quadratischen Mittel (RMS) der Einzelsignale und des Gesamtsignals in Zentimeter äquivalenter Wasserhöhe (ewh [cm]).

Die Atmosphären- und Ozeandaten lagen in Form von Kugelfunktionskoeffizienten bis Grad und Ordnung 100 für den Zeitraum vom 01.01.1976 bis zum 31.12.2007 in täglicher Auflösung vor. Die Daten des WGHM lagen als Gesamtwasserspeicher auf einem globalen Gitter für den gleichen Zeitraum in täglicher Auflösung vor und wurden in eine Kugelfunktionsreihe bis Grad und Ordnung 100 entwickelt.

Alle Signale wurden jeweils um langperiodische Anteile, d. h. Jahres- und Halbjahresgang, Mittelwert und linearer Trend, reduziert. Nach Addition der drei Anteile aus den Subsystemen Atmosphäre, Ozean und Hydrologie liegt damit ein simuliertes Signal für das kurzzeitige Verhalten des Erdschwerefeldes vor, dass bei der Prozessierung der GRACE-Beobachtungen verwendet werden kann. Dieses wird im Folgenden als Prozesssignal oder $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ bezeichnet. Da das Referenzsignal der simulierten Beobachtungen nur bis zu einem Kugelfunktionsgrad von 40 verwendet wurde, wird auch an dieser Stelle das Prozesssignal nur bis Grad und Ordnung 40 weiter verwendet.

Abbildung 4.2 zeigt die zeitliche Variabilität in Form des quadratischen Mittels (RMS) über die Zeitreihen der Gitterpunkte. Dargestellt ist die Variabilität der Subsysteme und des zusammengesetzten Gesamtsignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$. Es zeigen sich im Vergleich zum simulierten Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ im Wesentlichen die gleichen räumlichen Strukturen. Diese weisen jedoch teilweise deutliche Unterschiede in der Größe auf, so dass hier eine nähere Betrachtung angezeigt ist.

Abbildung 4.3 zeigt daher die Differenzen der jeweiligen zeitlichen Variabilität. Werte im roten Bereich weisen dabei Regionen aus, in denen die Variabilität des Prozessmodells $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ größer ist als die des Referenzsignals $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$, wohingegen Werte im blauen Bereich dem Prozessmodell eine geringere Variabilität im Vergleich zum Referenzsignal attestieren. Im weiteren Verlauf des Kapitels werden Zeitreihen des

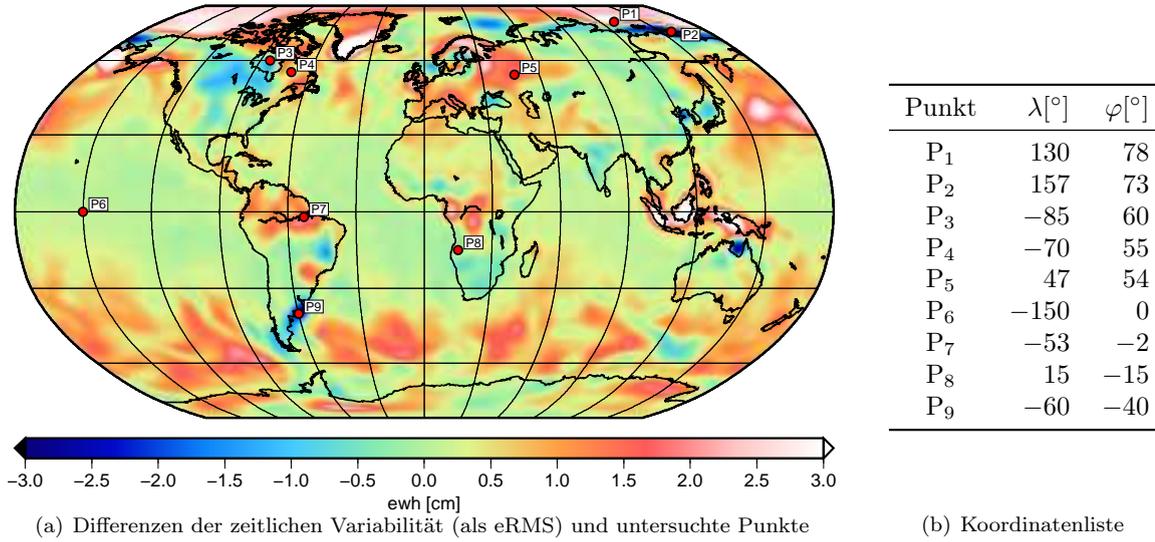


Abbildung 4.4: Differenzen der zeitlichen Variabilität wie in Abbildung 4.3(d) und untersuchte Punkte.

gefilterten und geglätteten Signals für einzelne Punkte auf der Kugel gezeigt. Deren Lage auf der Kugel ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Die Auswahl dieser Punkte erfolgte anhand der unterschiedlichen Signal-Charakteristika von Prozessmodell $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ und Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$. Interessant sind insbesondere die Bereiche, wo das Referenzsignal eine höhere Signalvariabilität aufweist als das Prozessmodell vorhersagt. Dies sind die blauen Bereiche in Abbildung 4.4(a), die eine verstärkte Dämpfung erwarten lassen.

Die Variationen des Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ werden nun genutzt, die empirischen Kovarianzmatrizen $\bar{\Sigma}$ und $\bar{\Sigma}_\Delta$ aus Gleichung (3.82) und Gleichung (3.83) zu bestimmen, um hiermit das stochastische Prozessmodell

$$\mathbf{x}_t = \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w}$$

aus Gleichung (3.84) mit dem Prozessrauschen

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}_\Delta^T).$$

aus Gleichung (3.85) zu bestimmen. Dieses beschreibt genähert den zeitlichen Verlauf des Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$. Da das für die Beobachtungen verwendete Referenzsignal die Ausgabe der hierfür genutzten geophysikalischen Modelle für das Jahr 2006 enthält, wurde das Signal zur Ableitung des stochastischen Prozessmodells nur bis zum Jahr 2005 ausgewertet. Modelldaten des Jahres 2006 werden also nicht das Ergebnis der Kalman-Filterung für das gleiche Jahr beeinflussen.

4.2 Untersuchung des Prozessmodells (Simulierter Zufallsprozess)

In diesem Abschnitt wird zunächst das Prozessmodell

$$\mathbf{x}_t^* = \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_{t-1}^* + \mathbf{w}_t, \quad (4.1)$$

wie es aus dem Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ generiert wurde, näher untersucht. Hierin ist der Vektor \mathbf{w} ein Zufallsvektor, der das stochastische Prozessrauschen beinhaltet. In Abschnitt 3.2.2 wurde dargelegt, dass Gleichung (4.1) die zeitliche Evolution der Modelldaten approximiert, aus denen die Kovarianzmatrizen $\bar{\Sigma}$ und $\bar{\Sigma}_\Delta$ generiert wurden. Dies ist im vorliegenden Fall das Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$, so dass in diesem Abschnitt ein Vergleich zwischen Prozessmodell und zugehörigem Prozesssignal beschrieben wird.

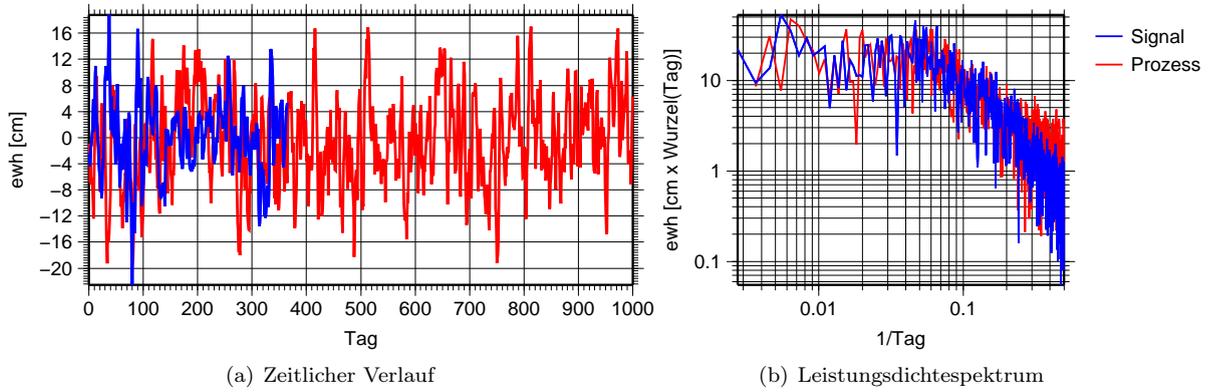


Abbildung 4.5: Zeitlicher Verlauf und Leistungsdichtespektrum des simulierten Zufallsprozesses \mathbf{x}_t^* (in rot) und des zugrundeliegenden Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ (in blau) im Punkt P_1 .

Hierzu wird zunächst für 1000 Epochen Gleichung (4.1) ausgewertet, wobei für jede Epoche ein Zufallsvektor \mathbf{w}_t gemäß

$$\mathbf{w}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}_\Delta^T)$$

generiert wird. Als Startwert des Zustandsvektors wurde

$$\mathbf{x}_0^* = \mathbf{x}_{01.01.2007}^{\text{AOH}} \quad (4.2)$$

gewählt, so dass es für die ersten 365 Epochen eine zeitliche Überschneidung von $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ und \mathbf{x}_t^* gibt. Das Ergebnis ist eine Zeitreihe von 1000 Vektoren \mathbf{x}_t^* von Potentialkoeffizienten, die die Realisierung eines stochastischen Prozesses in der Zeit darstellt.

Abbildung 4.5(a) zeigt in rot exemplarisch den zeitlichen Verlauf des simulierten Prozesses \mathbf{x}_t^* in einem willkürlich gewählten Punkt, hier P ($\lambda = 130^\circ, \varphi = 78^\circ$). Daneben ist für die ersten 365 Epochen das zugrundeliegende Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ in blau dargestellt. Offensichtlich bildet der simulierte Prozess die Eigenschaften des Prozesssignals in hohem Maße nach. Beide Signale haben Maximalwerte in gleicher Größenordnung und auch die kurzzeitigen Variationen beider Signale weisen ein ähnliches zeitliches Verhalten auf.

Diese eher qualitative Betrachtung lässt sich zusätzlich anhand des Leistungsdichtespektrums, wie es in Abbildung 4.5(b) dargestellt ist, untermauern. Auch hier zeigt sich, dass sowohl das deterministische Prozesssignal (wieder in blau) als auch der simulierte Zufallsprozess (in rot) sehr ähnliche Signalcharakteristika aufweisen und gleichen Signalgehalt haben. Unterstrichen wird diese Tatsache auch von Abbildung 4.6, in der die zeitliche Variabilität des Zufallsprozesses \mathbf{x}_t^* in Form des quadratischen Mittels über die Zeitreihe in den einzelnen Gitterpunkten dargestellt ist. Im Vergleich zur Variabilität des Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$, wie sie in Abbildung 4.2(d) dargestellt ist, zeigt sich auch hier eine starke Übereinstimmung in den räumlichen Strukturen.

An dieser Stelle sei noch einmal darauf hingewiesen, dass zur Generierung des in rot dargestellten Zufallsprozesses lediglich stochastische Informationen des Prozesssignals (in blau) verwendet wurden und nicht die Ausgaben der Modelle (in Form abgeleiteter Potentialkoeffizienten) selber. Hierdurch lässt sich der Einfluss der Modellfehler einzelner Epochen minimieren.

Abschließend ist festzuhalten, dass das Prozessmodell in Gleichung (4.1) geeignet ist, die zeitliche Evolution des Zustandsvektors, der das Erdschwerefeld charakterisiert, in hohem Maße zu approximieren.

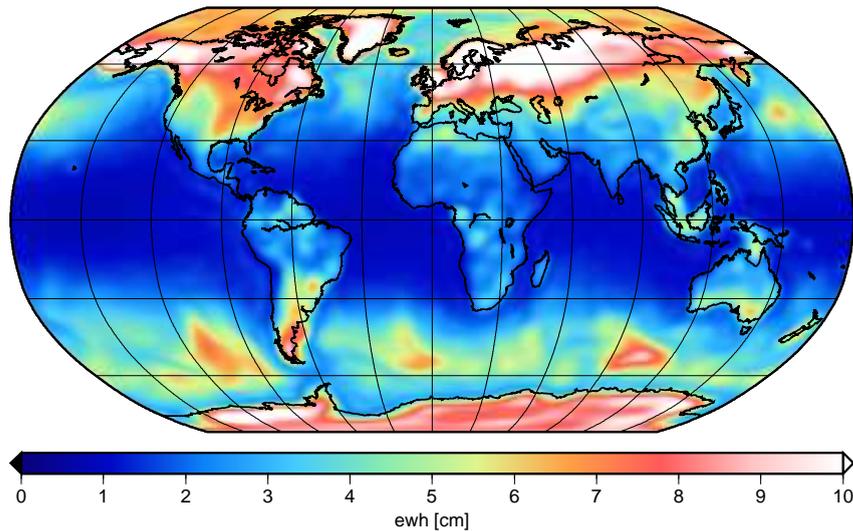


Abbildung 4.6: Zeitliche Variabilität des simulierten Zufallsprozesses \mathbf{x}_t^* im Ortsbereich als quadratisches Mittel.

4.3 Untersuchung des GRACE-Kalman-Filters

Nachdem im vorherigen Abschnitt gezeigt wurde, dass das in Abschnitt 3.2 abgeleitete Prozessmodell die zeitliche Evolution des Erdschwerefeldes in geeigneter Weise abbildet, wird in diesem Abschnitt nun das Prozessmodell aus Abschnitt 4.1.2 und das Beobachtungsmodell aus Abschnitt 4.1.1 mit Hilfe des Kalman-Filters in der Prozessierung zusammengeführt.

Nach Bestimmung geeigneter Startwerte in Abschnitt 4.3.1 wird die Zeitreihe von GRACE-Beobachtungen mit dem Kalman-Filter ausgewertet. Die Ergebnisse der Filterung werden dann in Abschnitt 4.3.2 vorgestellt und bewertet. Hierbei wird zunächst das Filterergebnis einer Epoche in Form eines globalen Gitters in Abschnitt 4.3.2.1 dargestellt. In einem zweiten Schritt wird in Abschnitt 4.3.2.2 die Zeitreihe für einige der Gitterpunkte näher untersucht, bevor abschließend in Abschnitt 4.3.2.3 die Qualitätsgrößen Korrelationskoeffizient, Fehler-RMS und Signalreduktion für das gesamte Gitter betrachtet werden.

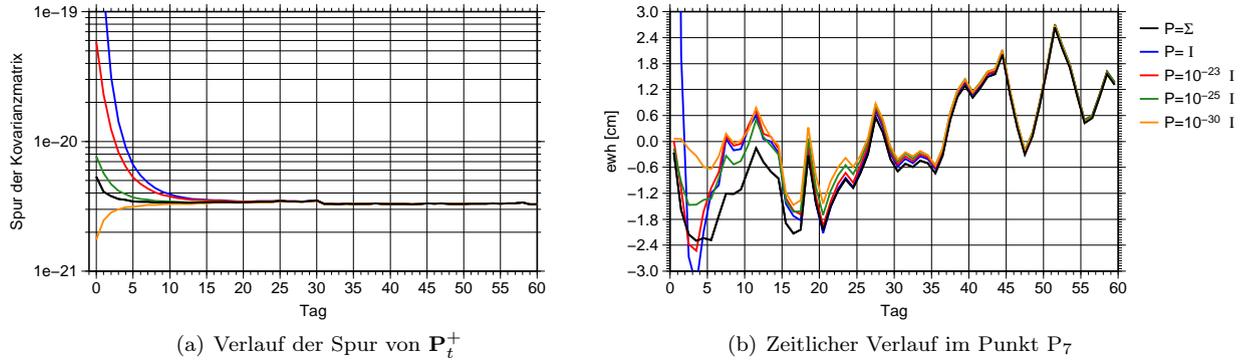
Wie sich das Filterergebnis im Falle einer Datenlücke verhält, wird dann in Abschnitt 4.3.3 beleuchtet, bevor in Abschnitt 4.3.4 das Verbesserungspotential durch zusätzlichen Einsatz eines Glättungsalgorithmus aufgezeigt wird.

Dass das Prozessmodell das in den Beobachtungen simulierte Referenzsignal nicht perfekt abbildet und welches Verbesserungspotential des Auswerteansatzes sich ergeben könnte, wird in Abschnitt 4.3.5 thematisiert.

Die beiden abschließenden Abschnitte widmen sich den Beobachtungsresiduen (Abschnitt 4.3.6) und dem Beitrag der GRACE-Beobachtungen einer einzelnen Epoche zum im Kalman-Filter geschätzten Systemzustand (Abschnitt 4.3.7).

4.3.1 Startwerte

Der Kalman-Filter ist ein rekursiver Schätzalgorithmus, der den zu bestimmenden Systemzustand zur Epoche t aus der Prädiktion der Vorgängerepoche und den neu hinzugenommenen Beobachtungen bestimmt. Hierzu werden Startwerte für die initiale A-posteriori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ und seine Kovarianzmatrix \mathbf{P}_0^+ benötigt. Im vorherigen Abschnitt 4.1.2 konnte gezeigt werden, dass die Wahl von $\mathbf{P}_0^+ = \bar{\Sigma}$ Vorteile bietet. Mit dem verwendeten Prozessmodell ergibt sich dann nämlich $\mathbf{P}_t^- = \mathbf{P}_{t-1}^+$, d. h. der Prädiktions-schritt des Kalman-Filters verändert nicht die A-posteriori-Kovarianzmatrix und diese hängt nur von den Beobachtungen ab.

Abbildung 4.7: Test für verschiedene Startkovarianzmatrizen \mathbf{P}_0^+ .

Variation der Startkovarianzmatrix \mathbf{P}_0^+ . Um zu testen, wie sich der Filter bei unterschiedlichen Startwerten verhält, wurde an dieser Stelle zunächst bei konstantem Startzustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{0}$ die Startkovarianzmatrix \mathbf{P}_0^+ variiert. Neben dem im vorherigen Abschnitt als besonders ausgewiesenen Fall $\mathbf{P}_0^+ = \bar{\Sigma}$ wurden in den anderen Filterläufen alle Korrelationen zwischen den Parametern des Zustandsvektors vernachlässigt und skalierte Einheitsmatrizen vorgegeben (für die genauen Werte siehe Abbildung 4.7).

Abbildung 4.7 zeigt die Ergebnisse der Filterläufe mit den unterschiedlichen Startkovarianzmatrizen. In Abbildung 4.7(a) ist dabei der Verlauf der Spur der A-posteriori-Kovarianzmatrix dargestellt. Es zeigt sich, dass die hier durchgeführten Filterläufe nach kurzer Zeit, in der Regel nach weniger als 20 Tagen, zu einem Wert konvergieren. Die schnellste Konvergenz wird erreicht, wenn man als Startwert der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}_0^+ = \bar{\Sigma}$ (schwarze Linie) vorgibt, was nach den Betrachtungen des vorherigen Kapitels auch so zu erwarten war.

Ein ähnliches Bild ergibt sich, wenn man sich den Verlauf des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ anschaut. In Abbildung 4.7(b) ist hierzu exemplarisch die zeitliche Evolution im Punkt P₇ dargestellt. Für die anderen betrachteten Punkte ergibt sich ein ähnliches Bild. Es zeigt sich, dass der Startwert $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{0}$ trotz teilweise sehr unterschiedlicher Wahl von \mathbf{P}_0^+ in den jeweiligen Filterläufen nach weniger als 60 Epochen zu einem Wert konvergiert.

Die kleinsten Variationen in Bezug zum Startwert $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{0}$ weist zunächst die gelbe Linie ($\mathbf{P}_0^+ = 10^{-30}\mathbf{I}$) auf. Dies ist so auch unmittelbar zu erwarten, denn in diesem Filterlauf weist die Spur von \mathbf{P}_t^+ (vgl. Abbildung 4.7(a)) zunächst die kleinsten Werte auf und der Startwert $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ wird damit mit der höchsten Genauigkeit vorgegeben. Erst im weiteren Verlauf, wenn mehr und mehr Beobachtungen hinzukommen, wird die zu optimistische Genauigkeitsvorgabe des Startwertes allmählich korrigiert und die Spur konvergiert zur Spur des Filterlaufs mit dem Startwert $\mathbf{P}_0^+ = \bar{\Sigma}$ (schwarze Linie).

Variation der Anfangszustands $\hat{\mathbf{x}}_0^+$. Zur weiteren Untersuchung des Einlaufverhaltens des Filters wurde bei festgehaltener Startkovarianzmatrix $\mathbf{P}_0^+ = \bar{\Sigma}$ in weiteren Filterläufen der Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ variiert. Hierzu wurde als Idealfall $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{x}_0^{\text{ref}}$ vorgegeben, d. h. der Startwert des Filters entspricht gerade dem in den Beobachtungen simulierten Referenzsignal zur gleichen Epoche. Als weitere Fälle wurden Skalierungen dieses Idealwertes, Skalierungen eines grob falschen Wertes aus der Mitte der Zeitreihe des Referenzsignals, $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{x}_{T/2}^{\text{ref}}$, und der Fall $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{0}$ untersucht. Der Verlauf der Kovarianzmatrix ist für die verschiedenen Filterläufe identisch und hier nicht dargestellt. Es ergeben sich lediglich Unterschiede im zeitlichen Verlauf des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_t^+$. Dieser ist exemplarisch für zwei Punkte in Abbildung 4.8 dargestellt. In beiden Beispielen zeigt sich, dass alle Filterläufe zum Idealwert $\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{x}_0^{\text{ref}}$ konvergieren. Dies kann als Indiz angesehen werden, dass der Filter unabhängig von der Vorgabe des Startwertes $\hat{\mathbf{x}}_0^+$ ist. Wie im Vergleich der beiden Beispielpunkte deutlich wird, ergibt sich aber nach Wahl des untersuchten Punktes eine unterschiedliche Anzahl der Epochen, bis Konvergenz erreicht ist. An der grundsätzlichen Aussage zum guten Einlaufverhalten des Filters ändert dies allerdings nichts.

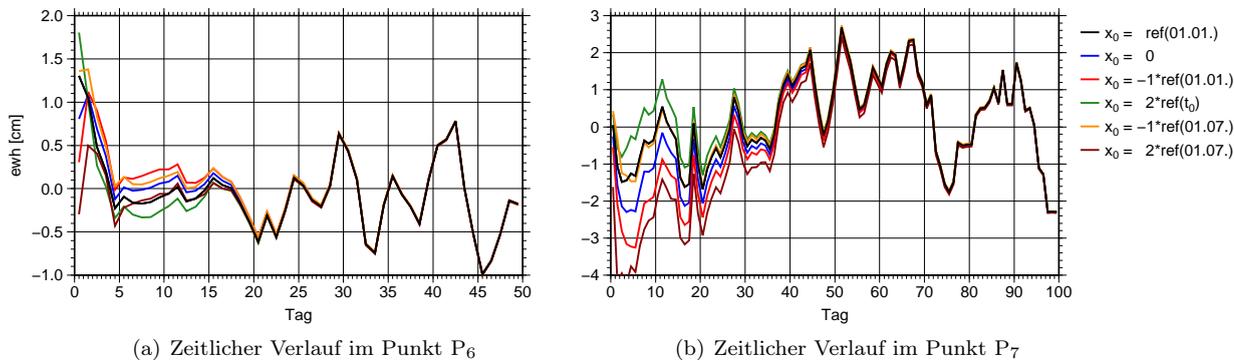


Abbildung 4.8: Test für verschiedene Start-Zustandsvektoren $\hat{\mathbf{x}}_0^+$.

Wahl der Startwerte für die weiteren Betrachtungen. Bei Betrachtung der Ergebnisse dieses Abschnitts wird deutlich, dass die Wahl der Startwerte nicht entscheidend für die Leistungsfähigkeit des untersuchten Kalman-Filters ist. Es kann lediglich vorkommen, dass man den Ergebnissen der Filterung zu Beginn der Zeitreihe entsprechend vorsichtig begegnen muss, da sich hier, je nach Wahl der Startwerte, doch recht unterschiedliche Ergebnisse ergeben können, wie der Vergleich der Abbildungen 4.7(b), 4.8(a) und 4.8(b) deutlich macht. Hier sind dann bei den weiteren Betrachtungen auch größere Abweichungen vom in den Beobachtungen simulierten Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ zu erwarten. Um nicht den Anfang der untersuchten Zeitreihen von der Betrachtung und der Bestimmung von Fehlermaßen ausschließen zu müssen, werden für die weiteren Betrachtungen dieses Kapitels als Startwerte der Filterläufe die Werte mit der schnellsten Konvergenz, also

$$\hat{\mathbf{x}}_0^+ = \mathbf{x}_0^{\text{ref}} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}_0^+ = \bar{\Sigma},$$

gewählt.

4.3.2 Ergebnisse des Kalman-Filters

Die Analyse und der Vergleich des mit dem Kalman-Filter-Ansatz bestimmten geglätteten Signals mit dem in den Beobachtungen simulierten Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ ist Gegenstand dieses Abschnitts. Sie beschreibt die Leistungsfähigkeit des Kalman-Filter-Ansatzes zur Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Schwerfeldes aus GRACE-Beobachtungen. Das Ergebnis der Simulation ist eine Zeitreihe von $T = 365$ Zustandsvektoren $\hat{\mathbf{x}}_t^+$, die 1677 Potentialkoeffizienten von Grad 2 bis Grad 40 enthalten. Diese repräsentieren eine zweidimensionale Karte für jede der 365 Epochen. Da sich diese drei Dimensionen λ , φ und t schlecht als zweidimensionale Abbildungen darstellen lassen, wird an dieser Stelle zunächst das Filterergebnis einer Epoche dargestellt ($t = \text{const}$). In einem zweiten Schritt wird die Zeitreihe für einige der Gitterpunkte dargestellt ($\lambda = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$), bevor abschließend die Zeitreihen für das gesamte Gitter betrachtet werden.

4.3.2.1 Betrachtung eines Tages der Zeitreihe (Schnappschuss)

Im Auswertalgorithmus wird für jede Epoche t zunächst eine A-priori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ des Systemzustands durchgeführt, ohne, dass Beobachtungen für die jeweilige Epoche genutzt werden. Diese A-priori-Schätzung lässt sich durch Prädiktion der Vorgängerepoche auf die aktuelle durch das zugrundeliegende Prozessmodell bestimmen. Anschließend wird diese Schätzung durch Hinzunahme der Beobachtungen zur jeweiligen Epoche verbessert und als A-posteriori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ bezeichnet (zu den Begrifflichkeiten siehe auch Abbildung 3.2 auf Seite 47).

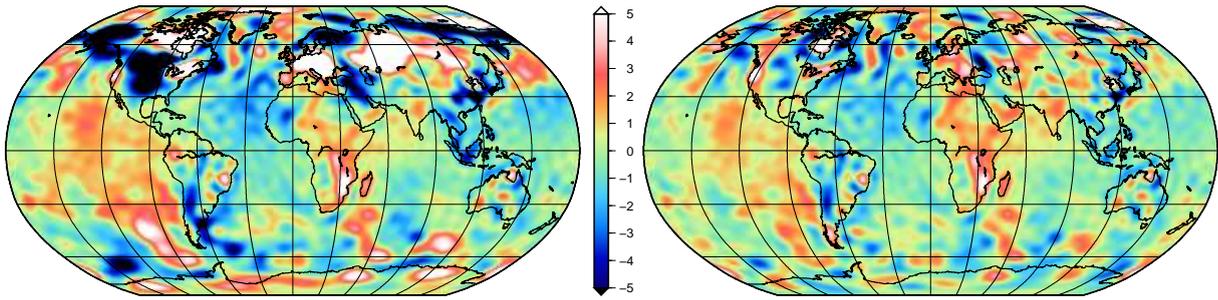


Abbildung 4.9: A-priori-Schätzung (links) und A-posteriori-Schätzung (rechts) einer willkürlich gewählten Epoche der Zeitreihe (hier $t = 48$). Dargestellt ist jeweils die Differenz zum in den GRACE-Beobachtungen simulierten Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ als ewh [cm].

In Abbildung 4.9 ist im linken Teil für jeden Gitterpunkt die Differenz zwischen der A-priori-Schätzung einer willkürlich gewählten Epoche (hier $t = 48$) und dem in den GRACE-Beobachtungen simulierten Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ dargestellt. Die mittlere Differenz beträgt hier 1,6 cm ewh bei einer Bandbreite von $-12,9$ bis 26,5 cm ewh. Größere Abweichungen zeigen sich dort, wo das Signal groß ist, vgl. Abbildung 4.1(d), beziehungsweise eine hohe kurzzeitige Variabilität aufweist, was eine relativ schlechte Vorhersagbarkeit zur Folge hat. Beispiele hierfür wären Bereiche auf den Kontinenten in höheren Breiten oder im antarktischen Zirkumpolarstrom zwischen 30 und 60° südlicher Breite.

Durch Hinzunahme von Beobachtungen lassen sich diese Differenzen signifikant reduzieren, wie der rechte Teil von Abbildung 4.9 sehr gut illustriert. Die Bandbreite wird auf $-6,3$ bis 10,2 cm ewh verringert und die mittlere Differenz beträgt nach Hinzunahme der Beobachtungen für die Epoche 1,0 cm ewh, was einer Reduktion um rund 37 Prozent entspricht. Korrigiert werden vornehmlich die großen Differenzen in den hohen Breiten. Für die Differenzen der relativ kleinen Signale für Punkte in Äquatornähe ergeben sich nur geringe Änderungen. Dies ist auch unmittelbar einsichtig, da GRACE große Signale deutlich besser detektiert als kleine und zusätzlich die Überdeckung mit Beobachtungen in höheren Breiten deutlich größer ist als in äquatornahen Regionen.

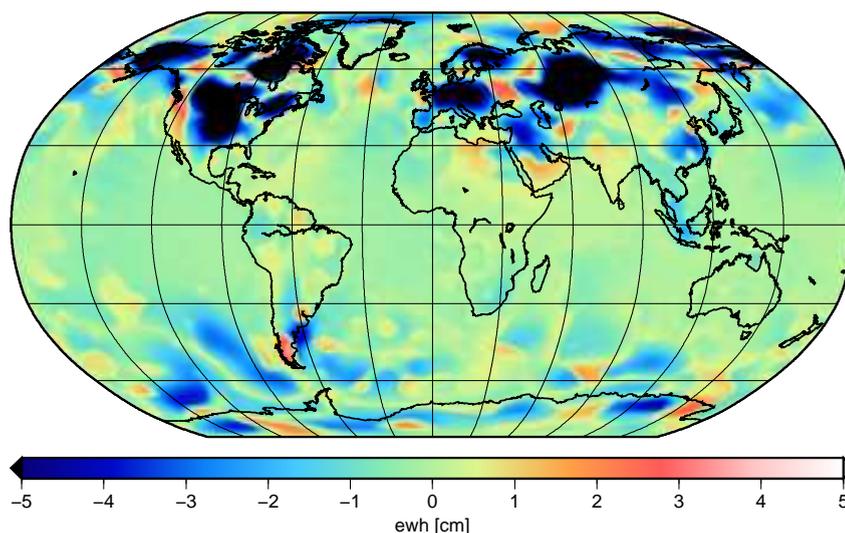


Abbildung 4.10: Verbesserung der Schätzung durch Hinzunahme von Beobachtungen. Dargestellt ist die Differenz der Absolutbeträge $|\hat{\mathbf{x}}_{48}^+ - \mathbf{x}_{48}^{\text{ref}}| - |\hat{\mathbf{x}}_{48}^- - \mathbf{x}_{48}^{\text{ref}}|$. Negative Werte bedeuten dabei eine Verkleinerung der Differenzen durch die Filterung.

Abbildung 4.10 unterstreicht diese Aussage. Dargestellt ist die Verbesserung der Zustandsschätzung nach Hinzunahme von Beobachtungen, hier als Differenz der Absolutbeträge aus dem linken und rechten Teil von Abbildung 4.9. Negative Werte bedeuten hier eine Verkleinerung der Differenz zum Referenzsignal nach Hinzunahme der Beobachtungen. Diese finden sich vornehmlich in Breiten größer als 30° im Norden und Süden. In den äquatornahen Gebieten dazwischen liegen die Veränderungen im Bereich von unter 1 cm ewh. Für die anderen Epochen der Zeitreihe ergibt sich ein ähnliches Bild, so dass an dieser Stelle auf weitere Darstellungen verzichtet wird. Stattdessen wird im folgenden Abschnitt die zeitliche Evolution des Zustandsvektors näher betrachtet.

4.3.2.2 Zeitreihen für ausgewählte Einzelpunkte

Aus der Zeitreihe der Zustandsvektoren werden zunächst Massenvariationen, ausgedrückt in äquivalenter Wasserhöhe, an beliebigen Punkten auf der Erdoberfläche bestimmt und zur Untersuchung der zeitlichen Evolution des Zustandsvektors herangezogen. Das Ergebnis ist eine Zeitreihe, wie sie in Abbildung 4.11 illustriert ist. Hierbei ist das simulierte Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ (ref) in schwarz, die *a priori*-Schätzung oder Prädiktion $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ in orange und die A-posteriori-Schätzung oder Filterung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ in blau dargestellt. Auf der linken Seite ist die gesamte Zeitreihe dargestellt, rechts wird zur besseren Erkennbarkeit von Details ein Ausschnitt von 100 Epochen gezeigt.

Gut erkennbar ist die Tatsache, dass sowohl das prädizierte Signal $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ als auch der gefilterte Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ das simulierte Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ gut rekonstruieren. Für die Prädiktion ergibt sich für den betrachteten Punkt ein Korrelationskoeffizient von $\rho = 0,55$, beziehungsweise eine mittlere quadratische Abweichung, im Folgenden als *Fehler-RMS* oder *eRMS* bezeichnet, von $eRMS = 3,6$ cm äquivalenter Wasserhöhe. An dieser Stelle sei noch einmal hingewiesen, dass der prädizierte Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ zur Epoche t nicht allein Informationen des Prozessmodells beinhaltet, sondern vielmehr alle Beobachtungen bis zur Epoche $t - 1$ ebenfalls im prädizierten Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ zur Epoche t enthalten sind. Dies erklärt die für sich genommen schon gute Übereinstimmung des prädizierten Signals mit dem Referenzsignal. Für den Fall, dass keine Beobachtungen vorliegen, fällt die Prädiktion der Folgeepoche in sehr kurzer Zeit in erster Näherung auf Null ab. Dieser Sachverhalt wird in Abschnitt 4.3.3 weiter ausgeführt. Die bereits gute Übereinstimmung der Prädiktion wird nach Hinzunahme der GRACE-Beobachtungen der betreffenden Epoche noch deutlich verbessert: der Fehler-RMS verringert sich auf 2,1 cm ewh und der Korrelationskoeffizient steigt auf $\rho = 0,84$.

Da der Korrelationskoeffizient nur sensitiv gegenüber Phasenverschiebungen zweier Signale ist und der Fehler-RMS stark von der Größe des eigentlichen Signals abhängt, wird als dritte Qualitätsgröße zur quantitativen Beschreibung der Übereinstimmung der Signale mit dem Referenzsignal die Signalreduktion

$$SR(\mathbf{x}_t) = 1 - \frac{\text{RMS}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_t^{\text{ref}})}{\text{RMS}(\mathbf{x}_t^{\text{ref}})} \quad (4.3)$$

eingeführt, die das Verhältnis von Fehler-RMS zu Signal-RMS beschreibt. Interpretieren lässt sich die Signalreduktion als Maß, wie viel Prozent des Referenzsignals durch das jeweils untersuchte Signal erklärt werden. Für den in Abbildung 4.11 betrachteten Punkt P_1 ergibt sich, dass lediglich 3 Prozent des Referenzsignals durch die Prädiktion erklärt werden. Nach Hinzunahme der GRACE-Beobachtungen werden jedoch 69 Prozent des Referenzsignals durch die gefilterte Zeitreihe erklärt.

Der in Abbildung 4.11 betrachtete Punkt P_1 weist für die Bestimmung zeitlicher Variationen durch GRACE sehr günstige Bedingungen auf: zum einen ist das simulierte Signal mit Amplitudenmaxima von zum Teil deutlich über 15 cm ewh sehr groß, zum anderen liegt der Punkt auch in hoher nördlicher Breite, so dass eine sehr gute Überdeckung mit GRACE-Bodenspuren vorliegt, d. h. es sind ausreichend Beobachtungen vorhanden. Als dritter Grund kann angegeben werden, dass das Prozesssignal eine höhere Variabilität vorhersagt, als tatsächlich in Form des Referenzsignals in den Beobachtungen simuliert war. Diese letzte Beobachtung wird in Abschnitt 4.3.5 ausführlicher thematisiert und soll daher an dieser Stelle nicht näher erläutert werden. In Abbildung 4.12 finden sich einige Gegenbeispiele zu den angesprochenen günstigen Gegebenheiten im Punkt P_1 .

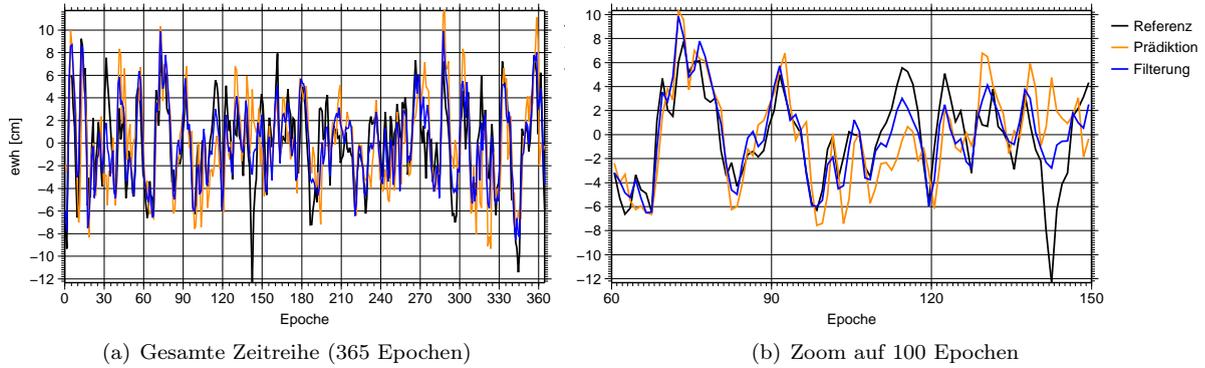


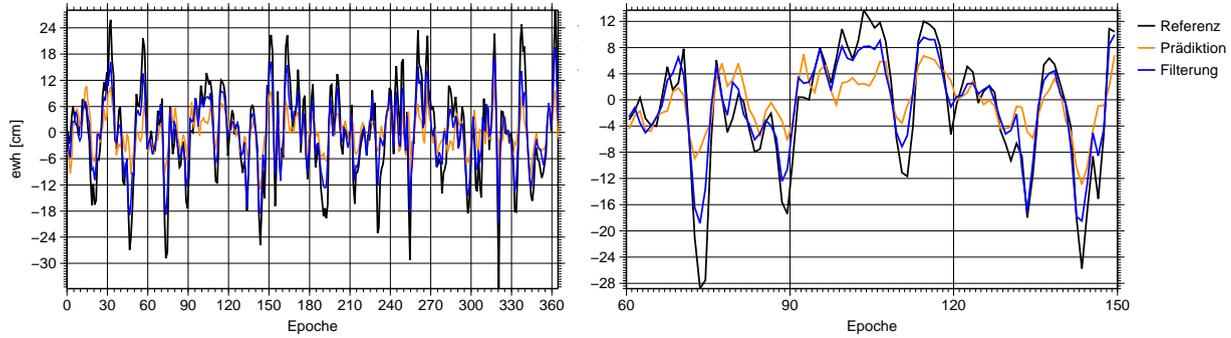
Abbildung 4.11: Zeitlicher Verlauf des Zustandsvektors ausgewertet im Punkt P_1 in Zentimetern äquivalenter Wasserhöhe. Dargestellt sind das simulierte Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ (ref) in schwarz, die *a priori*-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (Prädiktion) in orange und die A-posteriori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (Filterung) in blau.

Der Punkt P_2 liegt zwar in unmittelbarer Nähe zu P_1 , weist jedoch entscheidende Unterschiede auf: zum einen sind die Amplitudenmaxima mit fast 25 cm ewh deutlich größer, zum anderen prädiziert das Prozessmodell aber eine deutlich geringere Variabilität, wie in Abbildung 4.4 deutlich wurde. Die Zeitreihe in Abbildung 4.12(a) zeigt dann auch die deutlich zu kleinen prädizierten Werte (orange Linie), die nicht vollständig durch die Einführung von GRACE-Beobachtungen korrigiert werden. Die Qualitätsgrößen verbessern sich allerdings deutlich: Der Fehler-RMS verbessert sich von 7,9 cm ewh auf 4,3 cm ewh und das gefilterte Signal erklärt das Referenzsignal mit 83 Prozent fast doppelt so gut wie die Prädiktion. Ein ähnliches Bild liefert der Punkt P_5 in Abbildung 4.12(b). Dieser liegt ebenfalls in höheren Breiten, jedoch im Gegensatz zu den bisher vorgestellten auf Land, wo die zum Teil deutlichen Unterschiede der in Beobachtungs- und Prozessmodell verwendeten Ozeanströmungsmodelle keinen Einfluss haben. So ergibt sich bereits für das prädizierte Signal eine sehr gute Übereinstimmung mit dem Referenzsignal, wie die Zahlen in Abbildung 4.12(b) belegen. Die Prädiktion erklärt bereits 72 Prozent des Referenzsignals, was sich für das gefilterte Signal dann auf 94 Prozent verbessert. Der Fehler-RMS reduziert sich dabei um mehr als die Hälfte von 4,2 cm ewh auf 2,0 cm ewh.

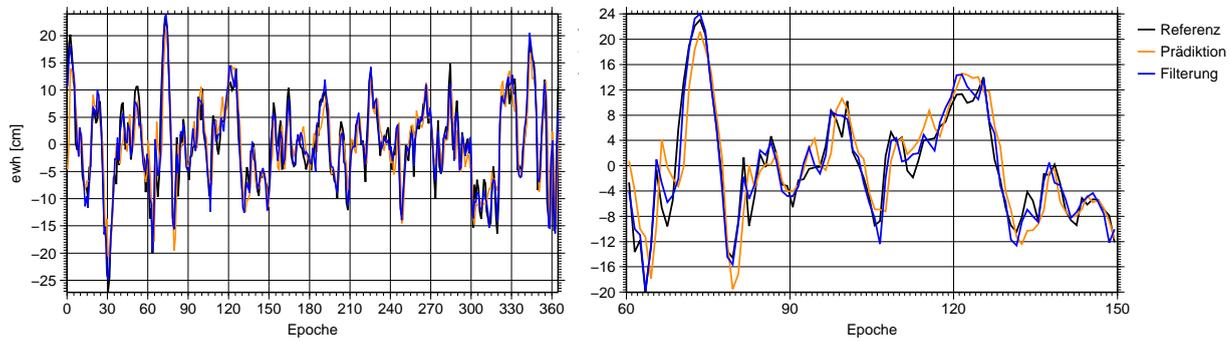
Ganz andere Charakteristika weist P_6 in Abbildung 4.12(c) auf. Dieser Punkt liegt am Äquator mitten im Pazifik. Die Umstände sind mit sehr kleinem Signal (Maxima deutlich unter 2 cm ewh) und großen Bodenspurabständen recht ungünstig. Entsprechend gering ist auch der Einfluss der GRACE-Beobachtungen, die den Fehler-RMS der Prädiktion im Vergleich zu den zuvor betrachteten Punkten in hohen Breiten nur marginal verbessern (0,1 cm ewh). Auch erklärt das gefilterte Signal das Referenzsignal nur zu 56 Prozent, was zwar eine Verbesserung gegenüber der Prädiktion um 12 Prozent bedeutet, im Vergleich zu den Punkten in höheren Breiten jedoch recht gering ist.

Vorteilhaft wirkt sich bei Punkt P_6 aus, dass die Abweichungen zwischen Beobachtungs- und Prozessmodell gering sind. Im Gegensatz zu Punkt P_8 in Abbildung 4.12(d), wo im Prinzip alle ungünstigen Umstände zusammentreffen: Das Signal ist relativ klein, der Punkt liegt in Äquatornähe und das Prozessmodell weicht stark vom Beobachtungsmodell ab. Dies wird deutlich, wenn man sich die Prädiktion (orange Linie) in Abbildung 4.12(d) betrachtet, deren Korrelation zum Referenzsignal mit 34 Prozent sehr gering ist und die das Referenzsignal gar nicht erklärt (Signalreduktion von 3 Prozent). Das gefilterte Signal bringt an dieser Stelle kaum Verbesserungen. Dies ist ein Hinweis darauf, dass das Prozessrauschen an dieser Stelle vermutlich zu klein angenommen wurde. Dies lässt sich so interpretieren, dass dem Prozessmodell an dieser Stelle ein zu hohes Vertrauen geschenkt wurde und die GRACE-Beobachtungen kaum ihren Einfluss geltend machen können. Mögliches Verbesserungspotential wird in Abschnitt 4.3.5 erläutert.

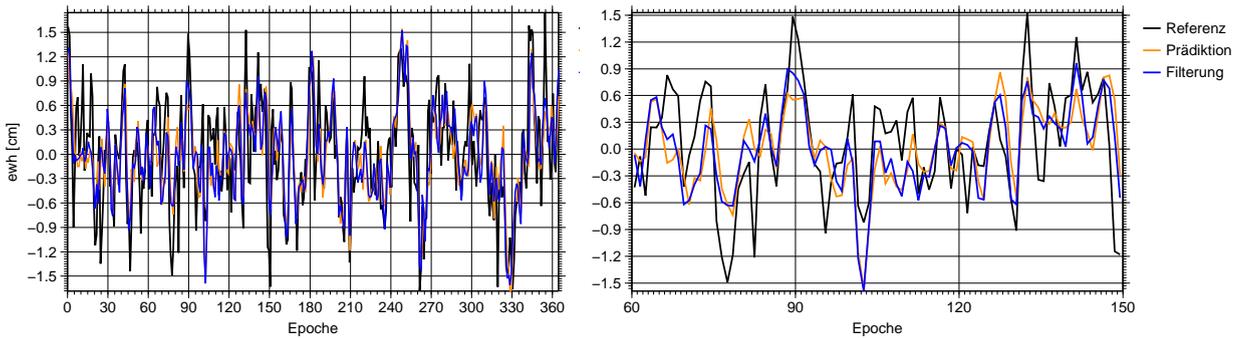
Nachdem in diesem Abschnitt die zeitliche Evolution des Zustandsvektors für einige Punkte im Raum dargestellt wurde und entsprechende Qualitätsgrößen für die Übereinstimmung der Zeitreihen von Referenzsignal und gefiltertem Signal eingeführt wurden, sollen diese im folgenden Abschnitt in ihrer räumlichen Verteilung betrachtet werden.



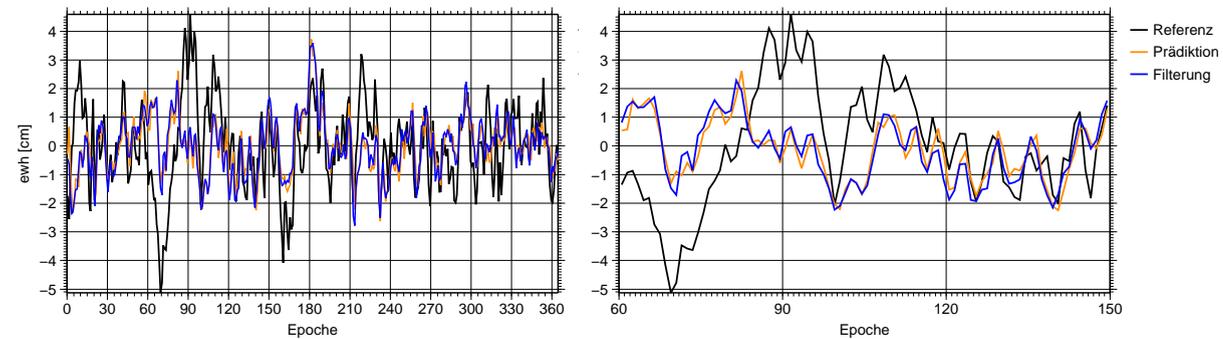
(a) P_2 : Prädiktion: eRMS = 7,9 cm ewh, $\rho = 0,73$, SR = 43 % – Filterung: eRMS = 4,3 cm ewh, $\rho = 0,95$, SR = 83 %



(b) P_5 : Prädiktion: eRMS = 4,2 cm ewh, $\rho = 0,85$, SR = 72 % – Filterung: eRMS = 2,0 cm ewh, $\rho = 0,97$, SR = 94 %



(c) P_6 : Prädiktion: eRMS = 0,5 cm ewh, $\rho = 0,67$, SR = 44 % – Filterung: eRMS = 0,4 cm ewh, $\rho = 0,75$, SR = 56 %



(d) P_8 : Prädiktion: eRMS = 1,5 cm ewh, $\rho = 0,34$, SR = 3 % – Filterung: eRMS = 1,4 cm ewh, $\rho = 0,40$, SR = 8 %

Abbildung 4.12: Zeitlicher Verlauf des Zustandsvektors ausgewertet in weiteren Punkten in Zentimeter äquivalenter Wasserhöhe. Zusätzlich angegeben sind der Korrelationskoeffizient (ρ), der Fehler-RMS (eRMS) und die Signalreduktion (SR) für Prädiktion und Filterung.

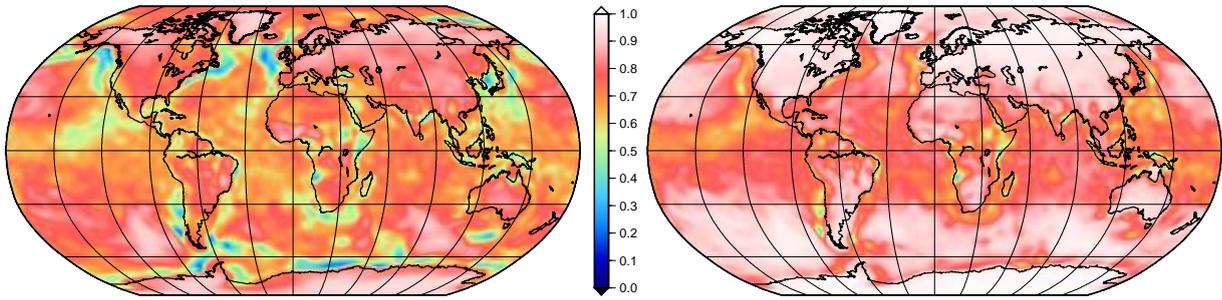


Abbildung 4.13: Korrelationskoeffizient zwischen Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ und A-priori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (links) beziehungsweise zwischen Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ und A-posteriori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (rechts).

4.3.2.3 Globale Betrachtungen

Die im vorhergehenden Abschnitt durchgeführten Untersuchungen lassen sich für alle Punkte des Gitters durchführen und die dort eingeführten Qualitätsmaße Korrelationskoeffizient, Fehler-RMS und Signalreduktion lassen sich dann in ihrer räumlichen Verteilung darstellen.

In Abbildung 4.13 ist die räumliche Verteilung des Korrelationskoeffizienten zwischen Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ und A-priori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (links) und A-posteriori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (rechts) der Zeitreihen für jeden Gitterpunkt dargestellt. In den A-priori-Zuständen für jede Epoche sind dabei nicht die Beobachtungen zur jeweiligen Epoche berücksichtigt. Diese beschreiben lediglich die Information, die sich aus dem Prozessmodell für die jeweilige Epoche ergibt. Es zeigt sich, dass über das gesamte Gitter gemittelt eine durchschnittliche Korrelation von 0,7 besteht, was bedeutet, dass das Prozessmodell das in den Beobachtungen simulierte Referenzsignal bereits recht gut approximiert. Kleine Korrelationen mit Minimalwerten von 0,21 finden sich hauptsächlich in ozeanischen Gebieten, was auf größere Differenzen in den verwendeten Ozeanmodellen hindeutet. Nach Hinzunahme der GRACE-Beobachtungen zeigen sich im rechten Teil von Abbildung 4.13 durchschnittliche Korrelationen von 0,83: eine Verbesserung um 13 Prozentpunkte. Die Minimalkorrelation ist mit 0,36 deutlich verbessert. Des Weiteren lassen sich in großen Teilen der Kontinente Korrelationen sehr nahe bei 1 beobachten, was auf eine fast vollständige Rekonstruktion des Referenzsignals bezüglich der Phase schließen lässt.

Ein ähnliches Bild ergibt sich bei Betrachtung des Fehler-RMS der A-priori-Zustände und der A-posteriori-Zustände bezogen auf das Referenzsignal in Abbildung 4.14. Auch hier zeigt sich eine deutliche Verbesserung nach Hinzunahme der GRACE-Beobachtungen. Die Maximalwerte von 8,9 cm ewh beim Fehler-RMS der A-priori-Zustände, die vornehmlich in Gebieten mit großen Signalamplituden und hoher Variabilität auftreten, verringern sich bei den A-posteriori-Zuständen auf 5,6 cm ewh. Der durchschnittliche Fehler-RMS verbessert sich um 33 Prozent von 1,8 cm ewh auf 1,2 cm ewh. Was daneben auffällt, ist die Tatsache,

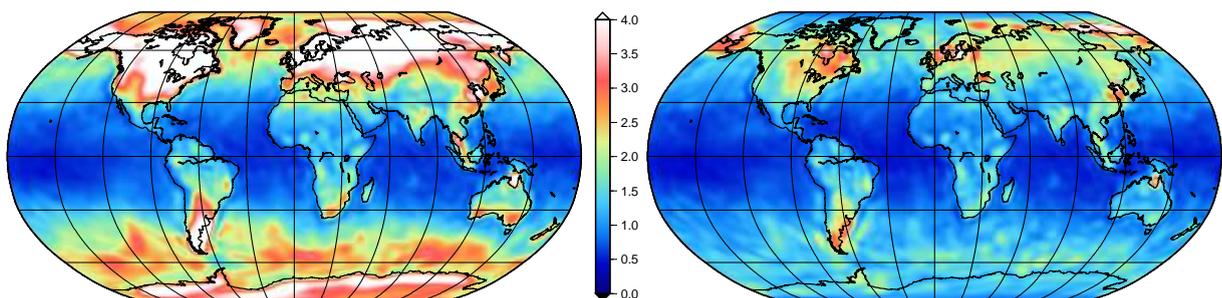


Abbildung 4.14: Fehler-RMS (als ewh [cm]) für A-priori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (links) und A-posteriori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (rechts), jeweils bezogen auf das Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$.

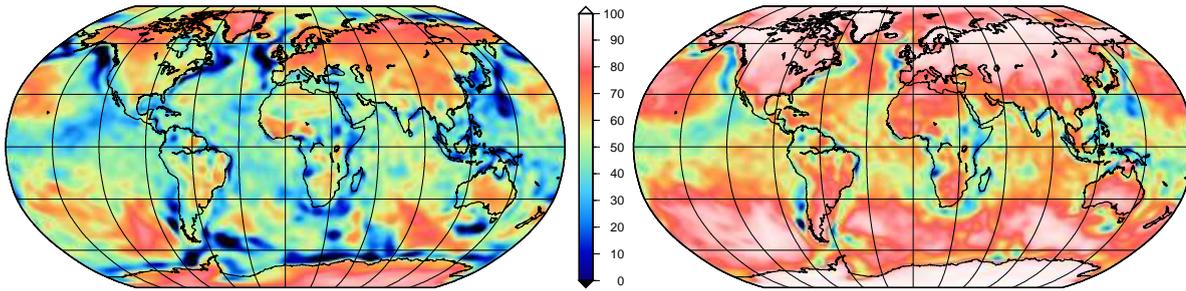


Abbildung 4.15: Signalreduktion (in Prozent) für A-priori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (links) und A-posteriori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (rechts).

dass die Verbesserung in einigen Bereichen geringer ausfällt, z. B. im arktischen Meer oder im südlichen Lateinamerika. Zur Erklärung sei auf Abbildung 4.3(d) in Abschnitt 4.1.2 verwiesen, die die Differenzen in der Variabilität von simuliertem Referenzsignal und dem verwendeten Prozessmodell darstellt. Es zeigt sich, dass die Verbesserungen dort kleiner ausfallen, wo das Prozessmodell eine geringere Variabilität vorhersagt als tatsächlich in die simulierten Beobachtungen eingeflossen ist (die blauen Bereiche in Abbildung 4.3(d)). An diesen Stellen wird das Signal der Beobachtungen also zu stark gedämpft, beziehungsweise das Gewicht des Prozessmodells in der Abwägung zwischen Prozessmodell und Beobachtungen ist zu hoch angenommen. In Abschnitt 4.3.5 wird eine Möglichkeit aufgezeigt, die das Ergebnis der Filterung verbessern kann, indem das Gewicht des Prozessmodells (und damit auch das Vertrauen in dieses) durch Erhöhen des Prozessrauschens verringert wird.

Abbildung 4.15 stellt dar, zu welchem Prozentsatz die A-priori-Zustände und die A-posteriori-Zustände jeweils das Referenzsignal erklären. Für die größeren Signale über den Kontinenten ergeben sich für die A-priori-Zustände (linke Abbildung) bereits recht große Übereinstimmungen von über 70 Prozent. Für Gebiete mit kleineren Signalen, insbesondere die Ozeane, ist diese Übereinstimmung verhältnismäßig klein und erreicht in einigen Küstengebieten sogar negative Werte bis -52 Prozent. Dies bedeutet, dass sich der RMS des Referenzsignals nach Abzug der A-priori-Zustände sogar erhöht. Im Durchschnitt ergibt sich hier eine Signalreduktion von $48,4$ Prozent, was eben hauptsächlich auf die guten Werte auf den Landmassen zurückzuführen ist. Nach Hinzunahme der GRACE-Beobachtungen ergibt sich für die A-posteriori-Zustände (rechte Abbildung) mit einer durchschnittlichen Signalreduktion von $68,8$ Prozent ein deutlich positiveres Bild. Über den Landmassen werden Werte von deutlich über 90 Prozent erreicht, und auch die Ozeanbereiche erfahren eine deutliche Verbesserung. Sehr hohe Werte ergeben sich hierbei vor allem in den Bereichen, wo die Signalamplitude groß und damit mit GRACE gut beobachtbar ist. Gebiete, die a priori bereits negative Werte aufwiesen, werden korrigiert, bleiben a posteriori aber sichtbar.

Die Struktur der Gebiete, die a priori schlechte Werte in den beschriebenen Qualitätsgrößen Korrelationskoeffizient, Fehler-RMS und Signalreduktion aufweisen, lässt sich in allen drei Fällen mit den Abweichungen in der durch das Prozessmodell vorhergesagten Variabilität und der in den Beobachtungen tatsächlich simulierten Variabilität aus Abbildung 4.3(d) erklären. Hier findet sich zumindest eine sehr ähnliche Struktur. Durch Hinzunahme der GRACE-Beobachtungen werden diese Abweichungen a posteriori zwar zum Teil deutlich kleiner, bleiben aber in vornehmlich äquatornahen Gebieten, wo die Überdeckung mit Beobachtungen verhältnismäßig gering ist, deutlich sichtbar.

Trotz dieser noch vorhandenen Defizite lässt sich abschließend festhalten, dass der implementierte Kalman-Filter in der Lage ist, das in den Beobachtungen simulierte Referenzsignal in hohem Maße zu rekonstruieren. Hierbei handelt es sich um tägliche Schwerefeldvariationen, die mit bisher vorhandenen Auswerteverfahren nicht rekonstruierbar sind, da hier Beobachtungen für mindestens 7 Tage vorliegen müssen. Im globalen Mittel ergibt sich mit dem Kalman-Filter ein durchschnittlicher Fehler-RMS von $1,2$ cm ewh und eine durchschnittliche Signalreduktion von $68,8$ Prozent.

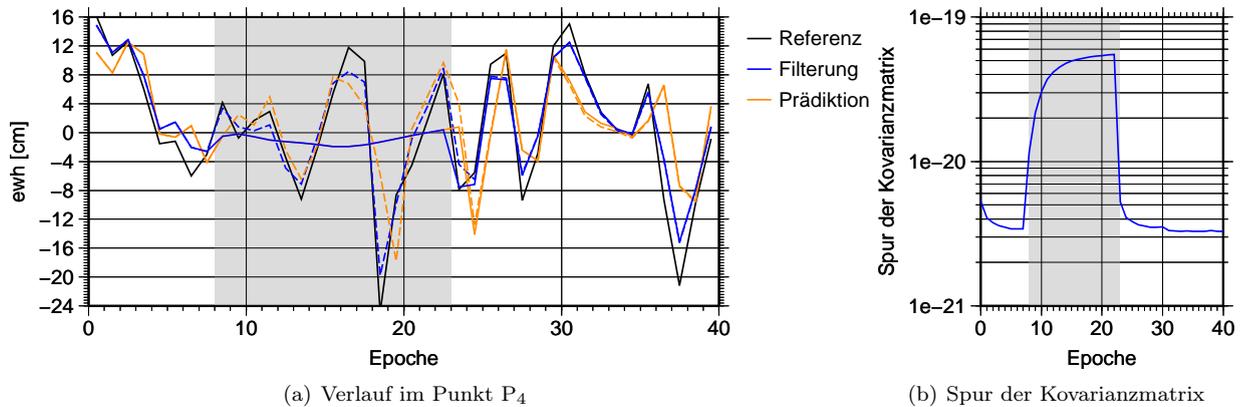


Abbildung 4.16: Zeitlicher Verlauf des Zustandsvektors (als ewh [cm]) ausgewertet im Punkt P₄ (links) und die Spur der Kovarianzmatrix (rechts) bei fehlenden Beobachtungen in den Epochen 9 bis 23 (grau hinterlegt). Dargestellt sind das simulierte Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ (Referenz) in schwarz, die A-priori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (Prädiktion) in orange und die A-posteriori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (Filterung) in blau. Gestrichelt dargestellt ist der Verlauf für eine Auswertung ohne Datenlücke aber sonst identischer Konfiguration.

4.3.3 Verhalten bei fehlenden Beobachtungen

Nachdem im vorherigen Abschnitt die Leistungsfähigkeit des Kalman-Filter-Ansatzes nachgewiesen wurde, soll in diesem Abschnitt noch kurz das Verhalten bei einer Datenlücke beschrieben werden. Hierzu wurde für die Epochen 9 bis 23 angenommen, dass keine GRACE-Beobachtungen vorliegen. In diesem Zeitraum fällt das Ergebnis der A-posteriori-Zustandsschätzung mit der A-priori-Zustandsschätzung zusammen.

Abbildung 4.16(a) zeigt beispielhaft das Ergebnis der Filterung anhand des zeitlichen Verlaufs im Punkt P₄. Dargestellt sind das simulierte Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ (Referenz) in schwarz, die *a priori*-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^-$ (Prädiktion) in orange und die A-posteriori-Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ (Filterung) in blau. Grau hinterlegt ist der Bereich, in dem keine GRACE-Beobachtungen vorliegen. Gestrichelt dargestellt ist der Verlauf für eine Auswertung, bei der die Datenlücke nicht vorhanden ist, die sonstige Konfiguration aber identisch ist. Es zeigt sich, dass, wie erwartet, zu der Epoche, wo erstmals keine Beobachtungen vorliegen, gefiltertes und prädiziertes Signal zusammenfallen. Es findet also keine Verbesserung der *a priori*-Schätzung statt. Ihr Verlauf bewegt sich im Bereich der Datenlücke nahe Null und folgt, im Gegensatz zur Auswertung ohne Datenlücke (gestrichelte Linien) in keiner Weise dem simulierten Referenzsignal, was auch unmittelbar einleuchtet, da ein schnelles Abklingen der Norm des Zustandsvektors zu Null erwartet wird. Dies bedeutet jedoch nicht, dass gleichzeitig alle Einträge dieses Vektors für sich genommen abklingen müssen, so dass die dargestellte äquivalente Wasserhöhe, die sich als Linearkombination der Einträge des Zustandsvektors bestimmt, ebenfalls abklingt. Im Anhang A.1 sind hierzu weitere Ausführungen zu finden, insbesondere wird eine Erklärung für die in diesem Beispiel sichtbare überlagerte Schwingung gegeben. Sobald wieder Beobachtungen vorliegen (ab Epoche 24), wird die Prädiktion wieder durch diese verbessert, so dass nach wenigen (drei) Epochen die Verläufe der gefilterten Zustände für die Auswertung mit (durchgezogene Linie) und ohne Datenlücke (gestrichelte Linie) wieder zusammenlaufen.

Das vorliegende Verhalten bei einer Datenlücke ist in dieser Form positiv zu bewerten. Wie in Kapitel 1 angedeutet, ist eine Lösung ohne Zwangsbedingungen oder starke Vorinformationen wünschenswert. Das beschriebene Verhalten bei fehlenden Beobachtungen zeigt deutlich, dass dieser Anspruch als in hohem Maße erfüllt gelten kann. Es wird bei fehlenden Beobachtungen kein starkes künstliches Signal, dem lediglich der eingeführten Prozessdynamik zugrunde liegt, in die Schätzung des Zustands eingeführt. Stattdessen wird ein Zustand nahe Null geschätzt, der dem aus den Beobachtungen ableitbaren Wissen über den Zustand der betreffenden Epoche entspricht.

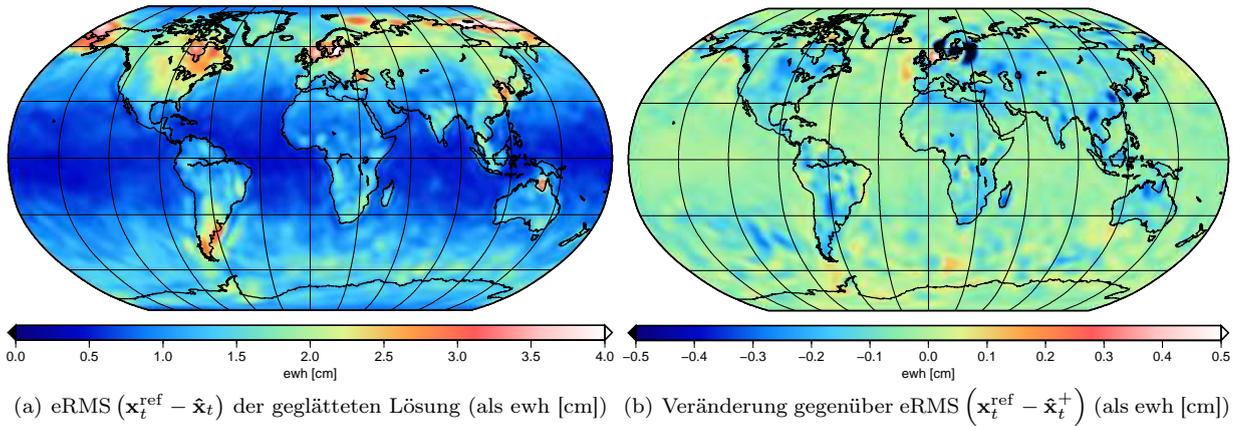


Abbildung 4.17: Fehler-RMS zwischen Referenzsignal und geglättetem Signal $\hat{\mathbf{x}}_t$ und Veränderung des Fehler-RMS gegenüber der Filterung $\hat{\mathbf{x}}_t^+$. Beide Darstellungen als ewh [cm].

4.3.4 Verbesserung durch Glättung

Die für sich genommen schon guten Ergebnisse der Filterung lassen sich durch Anwendung eines Glättungsalgorithmus, wie er in Abschnitt 3.3.3 beschrieben wurde, noch weiter verbessern. Bei der Bestimmung des A-posteriori-Zustands der Filterung werden lediglich Beobachtungen berücksichtigt, die in den vorhergehenden Epochen gewonnen wurden. Da aber bereits alle GRACE-Beobachtungen des betrachteten Intervalls vorliegen, also auch jene, die aus Sicht der aktuell zu filternden Epoche in der Zukunft liegen, bietet sich eine weiterführende Glättung des gefilterten Signals an. In Abschnitt 3.3.3 wurde hierzu der *RTS-Glätter* vorgestellt, der auch an dieser Stelle Anwendung findet. Das Ergebnis einer solchen Glättung ist in Abbildung 4.17(a) dargestellt. Angegeben ist der Fehler-RMS des geglätteten Signals bezogen auf das in den Beobachtungen simulierte Referenzsignal. Es zeigen sich kleine Verbesserungen gegenüber dem Fehler-RMS des lediglich gefilterten Signals, der in Abbildung 4.14 dargestellt ist.

Durch Glättung ergibt sich eine Verbesserung des mittleren RMS von 1,16 cm ewh für die Filterung auf 1,12 cm ewh für die Glättung. Die maximalen Abweichungen verringern sich dabei von 5,6 cm ewh auf 4,8 cm ewh.

Die räumliche Verteilung dieser Verbesserungen ist in Abbildung 4.17(b) durch die Differenz der Fehler-RMS-Werte dargestellt. Diese ist recht homogen über die mit GRACE gut beobachtbaren Bereiche. Hierzu gehören die Kontinente, die ein starkes Atmosphärensignal aufweisen sowie ozeanische Bereiche außerhalb der Tropen. Insgesamt ist festzuhalten, dass die Verbesserungen durch Glättung mit einem Wertebereich von $-0,8$ bis $0,5$ cm ewh recht klein ausfallen.

Verschlechterungen gegenüber der Filterung sind in einigen wenigen Bereichen (beispielsweise der Nordsee) zu finden. Dies sind die bereits in Abschnitt 4.1.2 und Abschnitt 4.3.2.3 angesprochenen Gebiete, wo die im Prozessmodell erwartete Signalvarianz kleiner ist als die in den Beobachtungen tatsächlich simulierte. Zwei Möglichkeiten, in diesen Bereichen bessere Ergebnisse in Form eines kleineren Fehler-RMS zu erzielen, werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

4.3.5 Verbesserungspotential durch Anpassung des Prozessmodells

In Abschnitt 4.3.2.3 wurden die Qualitätsgrößen Korrelationskoeffizient, Fehler-RMS und Signalreduktion in ihrer räumlichen Verteilung dargestellt und diskutiert. Die Abbildung 4.14 zeigt hierbei den Fehler-RMS zwischen dem Referenzsignal und den A-posteriori-Zuständen der Filterung. Allgemein zeigt sich eine sehr starke Verringerung des Fehler-RMS gegenüber dem prädizierten Signal, was auf einen großen Einfluss der GRACE-Beobachtungen auf das Ergebnis schließen lässt. Dennoch verbleiben einige charakteristische

Tabelle 4.1: Ergebnisse der Glättung für erhöhtes Prozessrauschen $\alpha \mathbf{Q}$ und isotropes Grundrauschen

Faktor α	eRMS [cm] (ewh)			Korrelation [%]			Signalreduktion [%]		
	min	max	avg	min	max	avg	min	max	avg
1	0,39	4,83	1,12	36,2	99,6	84,5	-18,7	99,2	71,3
5	0,38	3,66	1,01	44,9	99,8	86,9	-15,7	99,5	75,3
10	0,39	3,41	1,01	48,8	99,8	87,1	-17,5	99,6	75,3
15	0,40	3,35	1,02	51,1	99,8	86,8	-28,8	99,6	74,6
20	0,41	3,39	1,04	50,5	99,8	86,4	-41,9	99,6	73,5
30	0,43	3,61	1,09	50,2	99,8	85,5	-69,3	99,5	71,0
40	0,46	3,77	1,14	49,0	99,8	84,6	-95,3	99,5	68,4
isotrop (3cm)	0,68	4,20	1,25	15,5	99,6	77,4	-129,3	99,3	56,1

Strukturen im Fehler-RMS-Bild sichtbar, beispielsweise die verhältnismäßig großen Werte im östlichen Nordpolarmeer, in der Nord- und Ostsee oder der Arafurasee nördlich von Australien. Diese sind stark korreliert mit den Gebieten in Abbildung 4.3(d), bei denen die im Prozessmodell vorhergesagte Variabilität des Signals geringer ist als die in den simulierten Beobachtungen tatsächlich realisierte (blaue Bereiche in Abbildung 4.3(d)). Der umgekehrte Fall, dass mehr Variabilität vorhergesagt als vorhanden ist, ist hingegen weniger kritisch, da sich in diesen Gebieten in Abbildung 4.14 keine auffälligen Signaturen zeigen und das simulierte Referenzsignal durch die Filterung gut rekonstruiert werden kann.

Zur Aufklärung und Reduzierung des beschriebenen Phänomens sei noch einmal an die Mechanismen des Kalman-Filters erinnert: Dieser bestimmt zu jeder Epoche ein gewichtetes Mittel aus den Informationen des Prozessmodells

$$\mathbf{x}_t = \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{w} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}_\Delta^T) \quad (4.4)$$

aus Gleichung (3.84) und dem Beobachtungsmodell

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_t \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R}_t) \quad (4.5)$$

aus Gleichung (3.89). Zur Ableitung des Prozessmodells wurde hierfür die Kovarianzstruktur (vgl. Gleichung (3.63))

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t \\ \mathbf{x}_{t-1} \end{pmatrix} \right\} = \mathcal{N} \left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} \bar{\Sigma} & \bar{\Sigma}_\Delta \\ \bar{\Sigma}_\Delta^T & \bar{\Sigma} \end{pmatrix} \right) \quad (4.6)$$

der Ausgabesignale aus geophysikalischen Modellen (in dieser Simulation $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$) verwendet.

Einführen räumlichen Grundrauschens. Die Kovarianzstruktur beschreibt mit $\bar{\Sigma}$, in welchen Gebieten Variationen zu erwarten sind und in $\bar{\Sigma}_\Delta$ die Variabilität zweier aufeinanderfolgender Tage. Weicht nun die in $\bar{\Sigma}$ erwartete Variabilität von der tatsächlich simulierten stark ab, so wird der Kalman-Filter diese als Rauschanteil der Beobachtungen interpretieren und entsprechend unterdrücken. Ist die erwartete Variabilität größer als die tatsächliche, so tritt das Problem in der Form nicht auf. Dies erklärt die hohe Korrelation der Muster in Abbildung 4.14 und Abbildung 4.3(d) und liefert gleichzeitig einen Ansatzpunkt für Verbesserungen: Führt man in $\bar{\Sigma}$ ein isotropes Grundrauschen ein, d. h. erwartet man an allen Stellen auf dem Gitter eine gewisse Grundvariabilität, so würde erwartet, dass auf diese Weise auch ein gewisser Anteil der im Prozessmodell bisher unmodellierten Variabilität Berücksichtigung findet. Ein Blick auf Tabelle 4.1 zeigt im Fall mit isotropem Grundrauschen von 3 cm ewh eine Reduktion des maximalen Fehler-RMS von 4,8 auf 4,2 cm ewh. Isotropes Grundrauschen bewirkt natürlich auch eine Erhöhung der erwarteten Variabilität in Gebieten, wo vorher keine war. Dies führt insgesamt zu deutlich schlechteren Ergebnissen bei allen angegebenen Qualitätsgrößen im Vergleich zum Fall ohne isotropes Rauschen (in der Tabelle Faktor $\alpha = 1$).

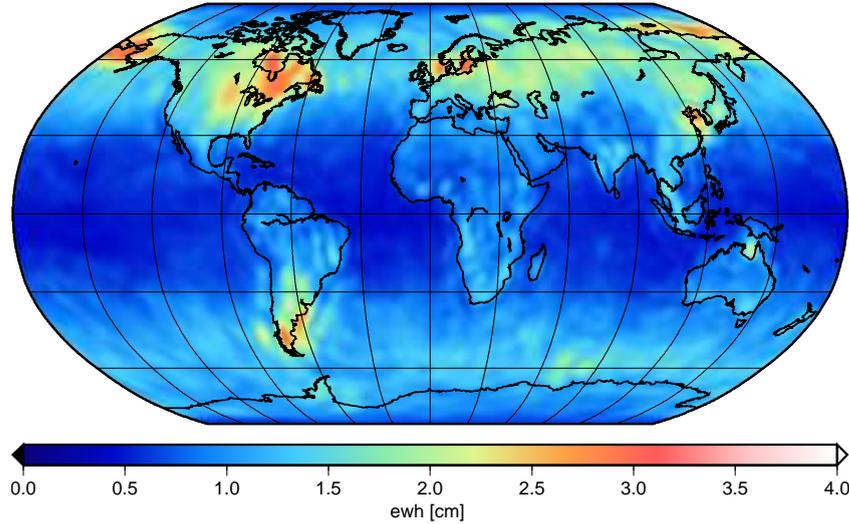


Abbildung 4.18: Fehler-RMS zwischen Referenzsignal und geglättetem Signal $\hat{\mathbf{x}}_t$ als ewh [cm] nach Anpassung des Prozessrauschens mit $\alpha = 10$.

Skalierung des Prozessrauschens. Der Fall isotropen Grundrauschens beeinflusst Prozessdynamik $\mathbf{B} = \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1}$ und Prozessrauschen \mathbf{Q} gleichermaßen, da die Matrix $\bar{\Sigma}$ verändert wird. Ein alternativer Ansatz lässt die Prozessdynamik unverändert und manipuliert lediglich das Prozessrauschen.

Das Rauschen des Prozessmodells wurde in Abschnitt 3.2.2 mit

$$\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \bar{\Sigma} - \bar{\Sigma}_\Delta \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}_\Delta^T) \quad (4.7)$$

angegeben und beschreibt die Modellierungsunsicherheit der Prozessdynamik \mathbf{B} . Da Prozessmodell und simuliertes Referenzsignal, wie in Abbildung 4.3(d) sichtbar, Differenzen aufweisen, erscheint es sinnvoll, durch Erhöhen des Prozessrauschens \mathbf{Q} das Vertrauen in das Prozessmodell herabzusetzen. Dies geschieht in dieser Simulation durch Anbringen eines Faktors α an die Matrix des Prozessrauschens:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \alpha \mathbf{Q}. \quad (4.8)$$

Die modellierte Dynamik \mathbf{B} des Prozesses bleibt hierbei, im Gegensatz zum vorher beschriebenen Ansatz, unverändert. In Tabelle 4.1 sind die Qualitätsgrößen für einige Auswertungen mit unterschiedlichen Faktoren α angegeben. Es zeigt sich, dass die Maximalwerte der Fehler-RMS in allen Fällen deutlich reduziert wurde bei praktisch nicht vorhandener Erhöhung der Minima. Der mittlere Fehler-RMS wird dabei um bis zu 10 Prozent reduziert.

In Abbildung 4.18 ist die räumliche Verteilung des Fehler-RMS nach Erhöhung des Prozessrauschens um den Faktor 10 dargestellt. Es zeigt sich, dass die wesentlichen Strukturen im Vergleich zu Abbildung 4.17 zwar erhalten bleiben, in ihrer Größe jedoch deutlich reduziert wurden. Insbesondere die Bereiche mit Abweichungen von mehr als 3cm ewh wurden deutlich reduziert. Die Bereiche, die bereits einen sehr geringen Fehler-RMS aufwiesen, wurden durch die Skalierung des Prozessrauschens hingegen nicht verschlechtert. Für die weiteren Qualitätsgrößen Korrelationskoeffizient und Signalreduktion ergeben sich ebenfalls mittlere Verbesserungen im Bereich weniger Prozentpunkte wie in Tabelle 4.1 angegeben. Die minimale Korrelation konnte durch eine Erhöhung des Prozessrauschens um über 12 Prozentpunkte verbessert werden, im Mittel traten Verbesserungen von 2,6 Prozentpunkten ein. Bei der Signalreduktion, also dem Anteil des Referenzsignals, das durch das geglättete Signal rekonstruiert werden kann, ergeben sich im Mittel Verbesserungen von 4 Prozentpunkten. Einige Punkte, die bereits eine schlechte Bestimmbarkeit aufweisen, weil sich zum einen die Variabilität zwischen Prozessmodell und simuliertem Referenzsignal stark unterscheidet und zum anderen wegen ihrer äquatornahen Lage wenig (sowohl räumlich als auch zeitlich) GRACE-Beobachtungen vorliegen, verschlechtern sich durch das erhöhte Prozessrauschen noch, so dass sich die minimale Signalreduktion beispielsweise für $\alpha = 15$ um 10 Prozentpunkte verschlechtert.

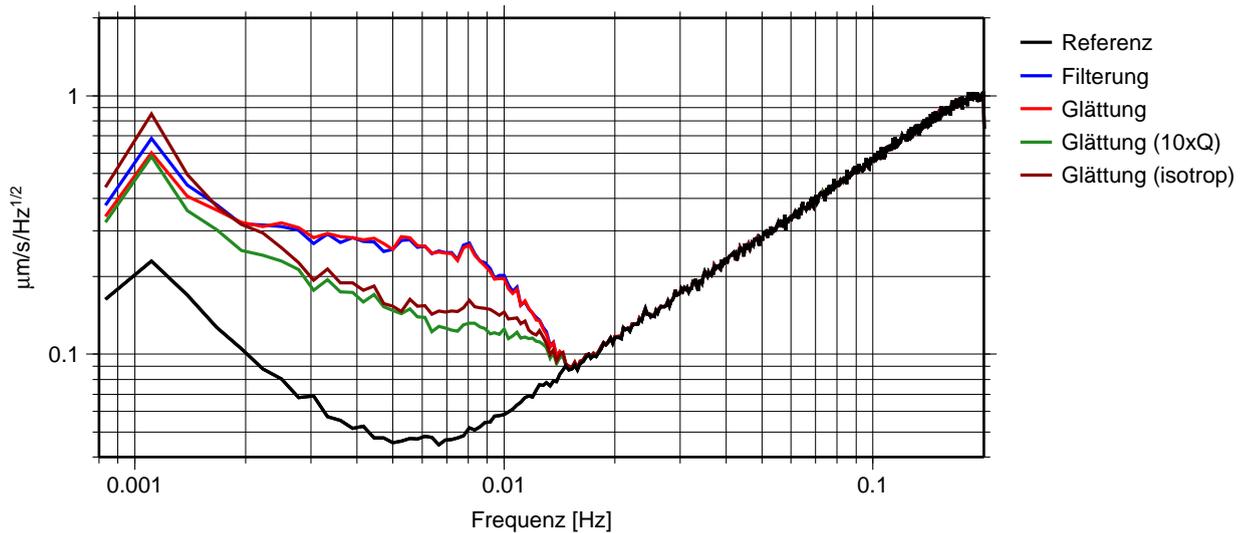


Abbildung 4.19: Leistungsdichtespektrum der SST-Residuen (*range-rates*) für 28 Tage.

Zusammenfassend indiziert dieses Simulationsbeispiel, dass eine Erhöhung des Prozessrauschens um den Faktor 10 das Ergebnis in diesem Fall deutlich verbessert. Für die Echt Daten-Prozessierung, bei der keine Informationen über die Realität in Form des Referenzsignals vorliegen, ist eine solche Vorabbestimmung eines Anpassungsfaktors natürlich nicht zu bewerkstelligen. Dennoch zeigt sich, dass sich bei Abweichungen zwischen Beobachtungs- und Prozessmodell, mit denen bei der Echt Datenprozessierung zu rechnen ist, eine Anpassung des Prozessmodells angezeigt ist. Für die Prozessierung der GRACE-Daten für das Schwerfeldmodell ITG-Grace2010, die in Kapitel 5 beschrieben wird, wurde hierfür der isotrope Ansatz gewählt, was aufgrund der vorgestellten Begründung auch gerechtfertigt ist. Nähere Ausführungen hierzu finden sich in Kapitel 5.

4.3.6 SST-Residuen

In den vorhergehenden Abschnitten wurde untersucht, inwiefern der Kalman-Filter in der Lage ist, das simulierte Referenzsignal zu rekonstruieren und es konnte im vorliegenden Simulationsszenario festgestellt werden, dass das Signal zu 70 Prozent rekonstruiert werden kann. Diese Betrachtungen zur Leistungsfähigkeit fanden dabei alle auf Parameterebene statt, d. h. es wurden die A-posteriori-Zustandsvektoren betrachtet. In diesem Abschnitt sollen die Beobachtungen selber zur Beurteilung herangezogen werden.

In Abbildung 4.19 ist hierzu das Leistungsdichtespektrum (*power spectral density, PSD*) der Residuen der Entfernungsänderungen über 28 Tage dargestellt. Die schwarze Linie zeigt die PSD des simulierten Referenzsignals und damit das simulierte Fehlerspektrum der K-Band-Beobachtungen. In Abschnitt 4.1.1 wurde hierzu ausgeführt, dass die Akzelerometer-Beobachtungen und die K-Band-Entfernungsmessungen mit weißem Rauschen belegt wurden. Durch Differentiation zu den in der Auswertung als Pseudobeobachtungen verwendeten Entfernungsänderungen (*range-rates*) entsteht ein Fehlerspektrum, das proportional zur Frequenz ansteigt. Die vom Akzelerometer gemessenen Störbeschleunigungen nicht-gravitativer Kräfte werden durch Integration in entsprechende Korrekturgrößen der Entfernungsänderungen transformiert. Durch diese Integration ergibt sich für das simulierte weiße Rauschen des Akzelerometers im Leistungsdichtespektrum ein mit der Frequenz absteigender Verlauf. Die Summe dieser beiden Rauscheinflüsse bildet schließlich die schwarze Kurve, die auch das minimale Rauschniveau der Schwerfeldlösung wiedergibt. Dieses Rauschniveau ist aber mit der GRACE-Mission nicht erreichbar, stattdessen ergibt sich für die Residuen der Entfernungsänderungen der in blau (Filterung) beziehungsweise rot (Glättung) dargestellte Verlauf. Modifiziert man das Prozessmodell durch die in Abschnitt 4.3.5 vorgeschlagenen Maßnahmen *isotropes Grundrauschen* (in dunkelrot) oder *skaliertes Prozessrauschen* (in grün), so erhöht sich

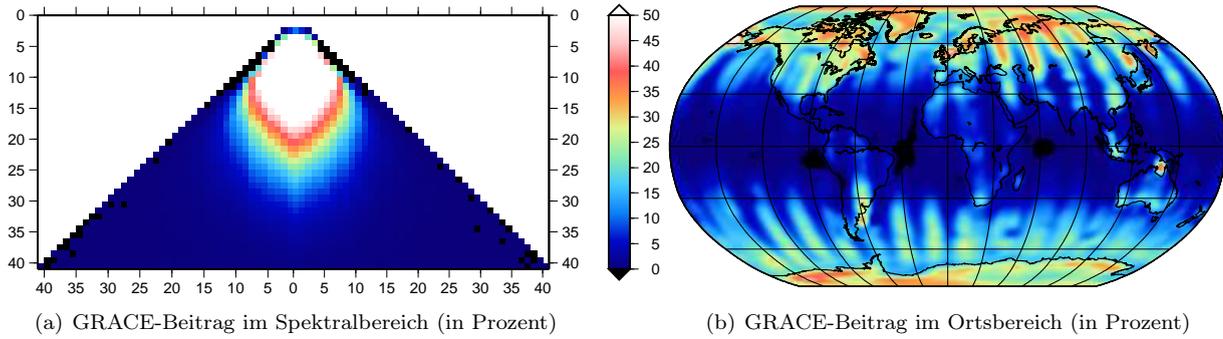


Abbildung 4.20: GRACE-Beitrag zum Korrekturschritt des Kalman-Filters (in Prozent).

die Gewichtung der Beobachtungen und die Residuen werden entsprechend kleiner. Dies bedeutet nicht zwangsläufig, dass auch die dann geschätzten Zustände das Referenzsignal besser rekonstruieren, wie in Tabelle 4.1 erkennbar ist.

4.3.7 GRACE-Beitrag zum Korrekturschritt des Kalman-Filters

In Abschnitt 3.3.2 wurde gezeigt, dass sich der A-posteriori-Zustand darstellen lässt als gewichtetes Mittel aus der Lösung $\hat{\mathbf{x}}_t$, die sich nur aus den GRACE-Beobachtungen ergibt, und dem durch das Prozessmodell bestimmtem A-priori-Zustand $\hat{\mathbf{x}}_t^-$:

$$\hat{\mathbf{x}}_t^+ = \underbrace{\left((\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{N}_t \right)^{-1} \mathbf{N}_t}_{\mathbf{W}_t} \hat{\mathbf{x}}_t + \underbrace{\left((\mathbf{P}_t^-)^{-1} + \mathbf{N}_t \right)^{-1} (\mathbf{P}_t^-)^{-1}}_{\mathbf{W}_t^-} \hat{\mathbf{x}}_t^-. \quad (4.9)$$

Die Matrix \mathbf{W}_t ist hierin die Gewichtsmatrix der GRACE-only-Lösung $\hat{\mathbf{x}}_t$ und \mathbf{W}_t^- die Gewichtsmatrix des prädierten Zustands $\hat{\mathbf{x}}_t^-$, die sich beide zur Einheitsmatrix ergänzen.

Um eine Vorstellung davon zu bekommen, welchen Einfluss die GRACE-Beobachtungen auf die Schätzung des A-posteriori-Zustands haben, wird die Hauptdiagonale von \mathbf{W}_t in Abbildung 4.20(a) dargestellt. Die Interpretation der Elemente der Hauptdiagonale als Redundanzanteile eines Ausgleichungsproblems ist eigentlich nur bei einer diagonalen Gewichtsmatrix zulässig, insofern kann Abbildung 4.20(a) nur eine grobe Näherung des tatsächlichen Einflusses sein, da sämtliche Korrelationen zwischen den einzelnen Koeffizienten vernachlässigt werden. Die absoluten Werte in Abbildung 4.20(a) sind also für sich genommen weniger aussagekräftig, dennoch beleuchten sie sehr gut die Struktur der Lösung. Es zeigt sich, dass der Einfluss der GRACE-Beobachtungen auf Koeffizienten bis zur Ordnung $m \approx 15$ beschränkt ist. Diese Erkenntnis ist nicht unmittelbar überraschend, da GRACE eine Umlaufzeit von circa 90 Minuten hat und somit etwa 15 Umläufe um die Erde pro Tag hat. Eine höhere Auflösung der Variationen entlang eines Breitenkreises (beispielsweise des Äquators) ist also prinzipbedingt gar nicht möglich.

Die Fortpflanzung von \mathbf{W}_t in den Ortsbereich, hierfür wird die vollständige Matrix benutzt, zeigt dies deutlich. In Abbildung 4.20(b) ist der prozentuale Einfluss der GRACE-only-Lösung für jeden Gitterpunkt dargestellt. Es zeigt sich, dass der Einfluss wie erwartet nicht homogen verteilt ist, sondern sich vielmehr an den Bodenspuren, also den von GRACE an diesem Tag überflogenen Gebieten, orientiert. Der Einfluss ist relativ groß in Gebieten, in denen eine gute Überdeckung vorliegt und das zu detektierende Signal relativ groß ist. Dies sind vornehmlich Gebiete in Breiten nördlich beziehungsweise südlich von 30° . Des Weiteren ist der Einfluss dort groß, wo die Genauigkeit der Prädiktion relativ schlecht ist. In Gebieten, die einer hohen Variabilität unterliegen, ist die Prädiktion entsprechend ungenau und die GRACE-Beobachtungen verbessern die A-priori-Schätzung entsprechend stark. In den äquatornahen Gebieten ist der Einfluss der GRACE-Beobachtungen gering. Hier ist einerseits das Signal relativ klein und damit die Prädiktion relativ

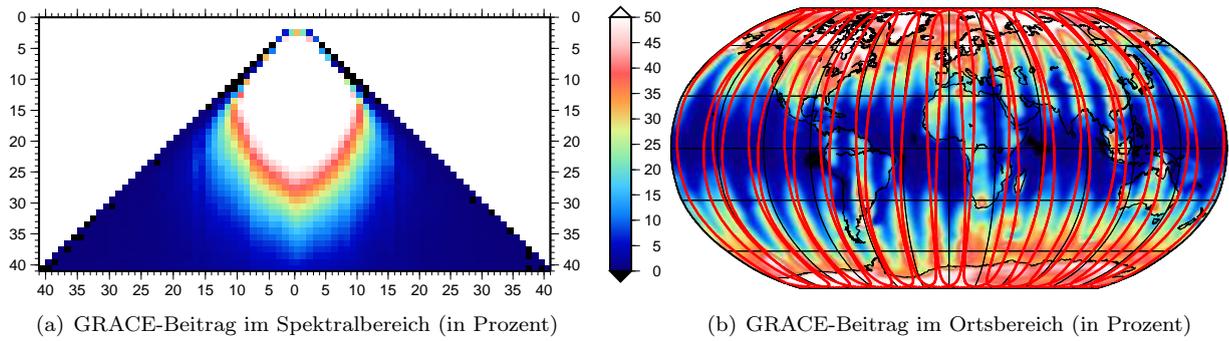


Abbildung 4.21: GRACE-Beitrag zum Korrekturschritt des Kalman-Filters (in Prozent) für erhöhtes Prozessrauschen ($\alpha = 10$). In rot dargestellt sind die Bodenspuren der GRACE-Satelliten.

gut und andererseits ist die Überdeckung mit Beobachtungen recht gering. Aber auch die Darstellung im Ortsbereich ist nur eine Annäherung an die tatsächlichen Verhältnisse. Auch bei der Darstellung im Ortsbereich sind die Korrelationen zwischen den einzelnen Punkten des Gitters nicht dargestellt, so dass der tatsächliche Einfluss der GRACE-Beobachtungen insbesondere in den äquatornahen Gebieten sicherlich höher ausfällt, als dies Abbildung 4.20(b) suggeriert.

An dieser Stelle zeigt sich auch, dass die Wahl der Darstellung des Erdschwerefeldes durch eine Kugelfunktionsreihe, deren Basisfunktionen einen globalen Träger aufweisen, zu überdenken sein wird. Eine Darstellung des Erdschwerefeldes durch Basisfunktionen mit lokalem Träger, wie sie beispielsweise bei Eicker (2008) verwendet wurden, würde dem lokalen Charakter der verwendeten Beobachtungen sicherlich eher gerecht werden. Dieser Ansatz soll in zukünftigen Arbeiten weiter verfolgt werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts sei noch einmal an Abschnitt 4.3.5 erinnert, in dem das Prozessrauschen \mathbf{w} künstlich heraufgesetzt wurde, um dem Umstand gerecht zu werden, dass die Modellierung der Prozessdynamik nicht den tatsächlichen Verhältnissen des simulierten Referenzsignals entsprechen muss. Dieses Vorgehen bedeutet ein Herabsetzen der Vertrauenswürdigkeit des Prozessmodells und damit eine Aufwertung des Vertrauens in die GRACE-Beobachtungen. Diese Umgewichtung wird auch bei den in diesem Abschnitt angestellten Betrachtungen deutlich.

Abbildung 4.21 zeigt den Einfluss der GRACE-Beobachtungen bei Erhöhung des Prozessrauschens um den Faktor 10, der sich durch die Regewichtung deutlich erhöht. Bei der Darstellung im Spektralbereich in Abbildung 4.21(a) ist sehr gut erkennbar, wo bei der Parametrisierung des Erdschwerefeldes als Kugelfunktionsreihe die Grenze der Bestimmbarkeit einzelner Kugelfunktionskoeffizienten liegt: Der Bruch bei der Ordnung $m \approx 15$ wird noch deutlicher sichtbar. In Abbildung 4.21(b) wird noch einmal deutlich, wie sehr der Anteil der GRACE-Beobachtungen von der Beobachtungsgeometrie abhängt. Hier sind neben dem GRACE-Beitrag im Ortsbereich zusätzlich die Bodenspuren der beiden Satelliten für den betrachteten Tag dargestellt. In den Bereichen, die an diesem Tag überflogen ist der Einfluss entsprechend hoch, die zwischen den Bodenspuren liegenden Bereiche bleiben durch die GRACE-Beobachtungen unbestimmt und werden durch das Prozessmodell entsprechend ergänzt.

4.4 Interpretation der Ergebnisse

An dieser Stelle sollen noch einmal die wichtigsten Ergebnisse des in diesem Kapitel beschriebenen Simulationsszenarios zusammengefasst und geophysikalisch interpretiert werden.

Mit der Ausgabe dreier geophysikalischer Modelle (NCEP, MOG2d und GLDAS) für das Jahr 2006 wurden kurzzeitige Variationen des Erdschwerefeldes simuliert und als Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ bezeichnet. Diese simulieren das wahre Erdschwerefeld und wurden mit einer GRACE-ähnlichen Satellitenkonfiguration

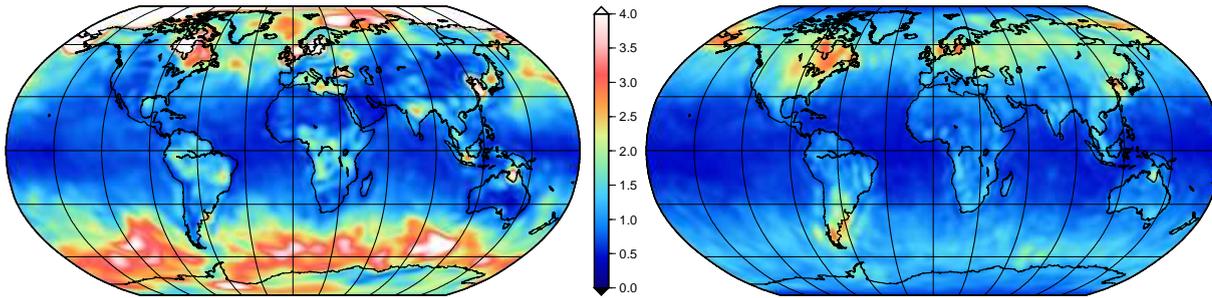


Abbildung 4.22: Wissen über die kurzzeitigen Variationen des simulierte Schwerfeldes $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ vor (links) und nach der Beobachtung durch GRACE (rechts), dargestellt als eRMS ($\mathbf{x}_t^{\text{ref}} - \mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$) (als ewh [cm]) zwischen Referenzsignal und Prozesssignal für das Jahr 2006 (links) und eRMS ($\mathbf{x}_t^{\text{ref}} - \hat{\mathbf{x}}_t$) der geglätteten Lösung aus Abbildung 4.18 (rechts).

beobachtet. Daneben wurde aus den Modelldaten dreier von $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ unabhängiger geophysikalischer Modelle (ECMWF, OMCT und WGHM) für die Jahre 1976 bis 2007 das Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ generiert. Das Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ symbolisiert dabei das Wissen, das in Form von Modellen über das tatsächliche Erdschwerfeld, hier wiederum symbolisiert durch das Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$, vorhanden ist. Dieses Wissen ist, wie in der Realität, nicht perfekt, sondern im Gegenteil fehlerbehaftet, wie Abbildung 4.3 verdeutlicht. Mit Hilfe der globalen Beobachtungen der Satellitenmission GRACE kann dieses Wissen jetzt verbessert werden, wie Abbildung 4.22 illustriert.

Dargestellt ist hier im linken Teil der Unterschied zwischen simuliertem Modellwissen (Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$) und simulierter Realität (Referenzsignal $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$) in Form der mittleren quadratischen Abweichungen (RMS) zwischen $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$ und $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ für das Jahr 2006 als betrachtetem Zeitraum. Es ergeben sich große Abweichungen in Gebieten mit starker Variabilität und maximale Fehler-RMS-Werte von 10,6 cm ewh. Der mittlere Fehler-RMS beträgt dabei 1,4 cm ewh. Nach Einführung dieses Modellwissens in die GRACE-Prozessierung in Form eines stochastischen Prozessmodells ergibt sich nach der Auswertung der Beobachtungen ein deutlich erhöhtes Wissen über die kurzzeitigen Variationen, die in Form des Referenzsignals in den Beobachtungen simuliert wurden. Die Abweichungen der geglätteten Lösung vom Referenzsignal im rechten Bild zeigen dies deutlich. Der maximale Fehler-RMS ist, insbesondere in den Gebieten mit hoher Variabilität, auf 3,1 cm ewh zurückgegangen, der mittlere Fehler-RMS reduziert sich um 29 Prozent auf 1,0 cm ewh.

Genau dieses Erkenntnis wurde bei der Prozessierung des Schwerfeldmodells ITG-Grace2010 ausgenutzt. Die mit dem vorgestellten Ansatz bestimmten täglichen Variationen fungieren in diesem Fall als Verbesserung zu den Dealiasing-Modellen, was einen erheblichen Beitrag zur Verbesserung der monatlichen Schwerfeldlösungen im ITG-Grace2010 hat. Dies wird in Kapitel 5 näher ausgeführt.

5. Auswertung der GRACE-Daten

Nachdem im vorherigen Kapitel die Möglichkeiten des Kalman-Filter-Ansatzes zur Bestimmung kurzzeitiger Schwerevariationen anhand eines Simulationsszenarios nachgewiesen wurden, sollen in diesem Kapitel die echten GRACE-Beobachtungen ausgewertet werden. Hierzu wird in Abschnitt 5.1 zunächst das Aufstellen der Normalgleichungen und die verwendeten Hintergrundmodelle erläutert, bevor in Abschnitt 5.2 das verwendete Prozessmodell erläutert wird. Schließlich werden in Abschnitt 5.3 die mit dem Kalman-Filter-Ansatz berechneten täglichen Schwerefeldlösungen mit unabhängigen Datensätzen verglichen. Hierfür stehen mit GPS (Global Positioning System) gemessene Vertikaldeformationen (Abschnitt 5.3.1) ebenso zur Verfügung wie Daten von Ozeanbodendruck-Rekordern (Abschnitt 5.3.2). Das Verbesserungspotential, das die mit dem vorgestellten Ansatz bestimmten Tageslösungen bei der Prozessierung monatlicher Schwerefeldlösungen bieten, wird in Abschnitt 5.4 aufgezeigt.

5.1 Beobachtungsmodell

Zunächst soll an dieser Stelle erläutert werden, wie die Level-1B-Daten der Satellitenmission GRACE weiterverarbeitet werden.

Beobachtungen und Hintergrundmodelle. Als Beobachtungen stehen für den Zeitraum August 2002 bis August 2009 zur Verfügung:

- im Hause prozessierte kinematische Orbits der beiden Satelliten GRACE-A und GRACE-B aus Code- und Phasenmessungen mit GPS mit ihren 3×3 -Kovarianzmatrizen (Datenrate 30 s),
- K-Band-Entfernungsmessungen zwischen den beiden Satelliten (Datenrate 5 s),
- Beschleunigungsmessungen der Akzelerometer der beiden Satelliten GRACE-A und GRACE-B (Datenrate 1 s) und
- Orientierungsdaten der beiden Sternenkameras der beiden Satelliten GRACE-A und GRACE-B (Datenrate 5 s).

Die vorliegenden GRACE-Beobachtungen werden vorab um die bekannten Effekte kurzzeitiger Variationen des Gravitationspotentials reduziert. Im Einzelnen wurden die folgenden Effekte durch Modelle berücksichtigt:

- Gezeitenkräfte dritter Körper, d.h. Sonne, Mond und die Planeten des Sonnensystems. Hierfür wurden die Ephemeriden des JPL DE405 (Standish, 1998) verwendet.
- Gezeiten der festen Erde und Polgezeiten nach den IERS-Konventionen von 2003 (McCarthy und Petit, 2004).
- Gezeiten der Ozeane durch das empirische Ozeangezeitenmodell EOT08a (Savcenko und Bosch, 2008).
- Ozeanpolgezeiten, entnommen aus Desai (2002).
- Atmosphärengezeiten (S1 und S2), entnommen aus Biancale und Bode (2006).
- Kurzzeitige Variationen der Atmosphäre und des Ozeans durch das Atmosphären- und Ozean-Dealiasing-Produkt AOD1B (Flechtner, 2007). Diese Daten sind mit einer Rate von sechs Stunden gegeben.
- Jährliche und zeitlich lineare Variationen des Erdschwerefeldes, die vorab aus einer älteren Ausgabe monatlicher GRACE-Schwerefeldlösungen in Form einer jährlichen Sinus- und Cosinus-Schwingung und eines linearen Trends geschätzt wurden.

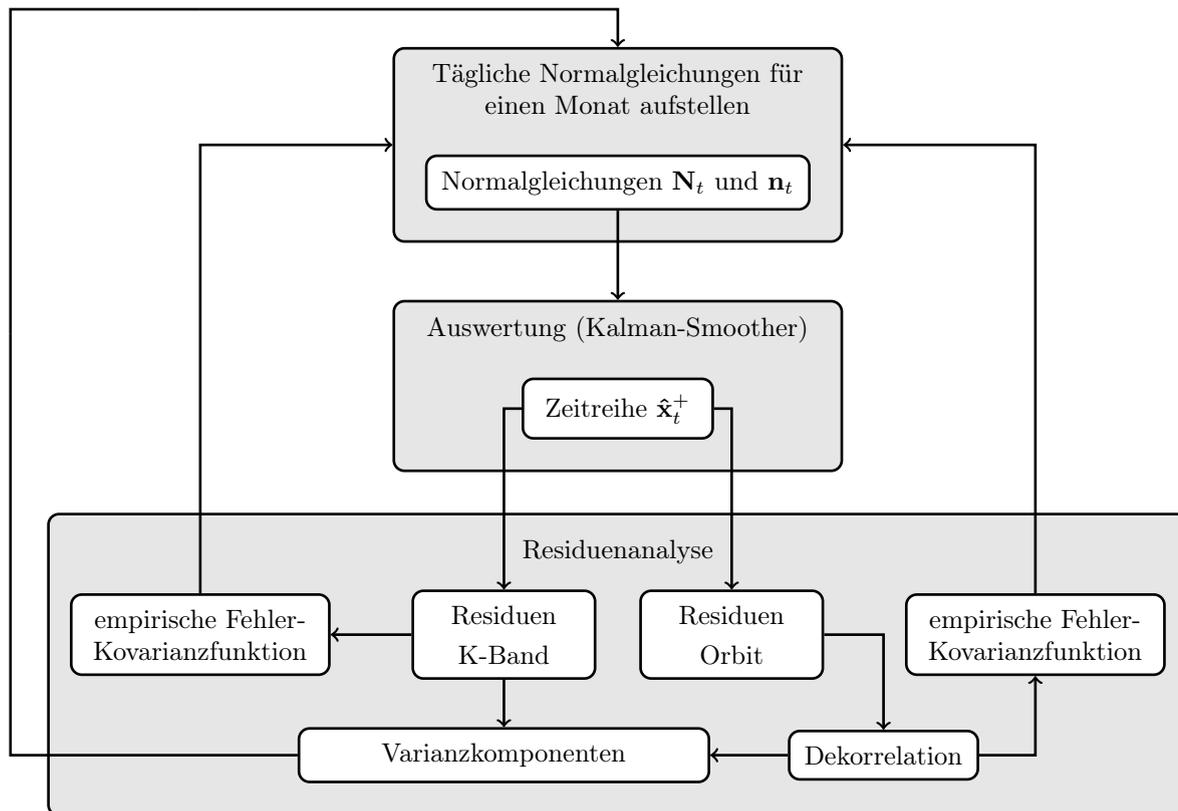


Abbildung 5.1: Bestimmung des stochastischen Modells bei der Prozessierung von GRACE-Beobachtungen. Für einen Monat Beobachtungen werden iterativ die Residuen ausgewertet und empirische Fehler-Kovarianzfunktionen und Varianzkomponenten bestimmt.

Desweiteren wurden die Beobachtungen, um räumliches Aliasing zu vermeiden, noch um die räumlich hochfrequenten Anteile des Erdschwerefeldes reduziert. Hierzu wurde eine Kombination des EGM08 (Pavlis et al., 2008) und des EigenGRGS (RL04, Förste et al., 2008) bis Grad und Ordnung 240 verwendet. Der Jahres- und Halbjahresgang und der lineare Trend werden nach der Parameterschätzung wieder zum Lösungsvektor zurück addiert (*remove/restore*-Technik), so dass die generierte Zeitreihe als Differenz zum statischen Referenzfeld (Kombination aus EGM08 und EigenGRGS) zu sehen ist.

Aufstellen der Normalgleichungen und stochastisches Modell. Die um die bekannten zeitlichen und räumlichen Signale reduzierten Beobachtungen werden im Folgenden nach der bei Mayer-Gürr (2006) beschriebenden Methode der kurzen Bahnbögen weiterverarbeitet.

Dies bedeutet, dass jeweils die Beobachtungen kurzer Bahnstücke von circa 60 Minuten Länge verwendet werden, um die Normalgleichungen aufzustellen. Mit der Annahme, dass zwei aufeinander folgende Bahnstücke voneinander unabhängig sind, lassen sich die täglichen Normalgleichungen durch Akkumulation der Normalgleichungen für die 24 einstündigen Bahnstücke aufstellen.

Um eine realistische Kovarianzmatrix der geschätzten Schwerefeldparameter zu erhalten, muss das stochastische Modell bei Aufstellen der Normalgleichungen sorgfältig gewählt werden. Zum einen muss die Größenordnung des angenommenen Beobachtungsräuschens zu dem Beobachtungen passen, zum anderen müssen aber auch die beiden Beobachtungsgruppen *Orbitdaten der beiden Satelliten* und *K-Band-Beobachtungen* untereinander gewichtet werden. Die in Abbildung 5.1 illustrierte iterative Vorgehensweise hierzu wird im Folgenden kurz wiedergegeben.

In einem ersten Schritt werden für einen Monat Beobachtungen tägliche Normalgleichungen $\mathbf{N}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{n}_t$ aufgestellt und mit dem vorgestellten Kalman-Filter-Ansatz (hier einschließlich Glättung) eine Schwerefeldlösung bestimmt. Aus der Zeitreihe der geschätzten Potentialkoeffizienten $\hat{\mathbf{x}}_t^+$ lassen sich nun die Beobachtungsresiduen für die Orbits und für die K-Band-Beobachtungen bestimmen, die dann für die Bestimmung des stochastischen Modells Verwendung finden:

- Für die K-Band-Beobachtungen wird direkt aus der Zeitreihe eine empirische Fehler-Kovarianzfunktion bestimmt.
- Die Residuen der Orbitbeobachtungen werden zunächst epochenweise dekorreliert (Ditmar et al., 2006). Aus den dekorrelierten Residuen wird nun ebenfalls eine empirische Fehler-Kovarianzfunktion der Beobachtungen im Bahnsystem der Satelliten (Mayer-Gürr, 2006) einschließlich der Korrelationen zwischen den drei Koordinaten bestimmt.

Gleichzeitig wird aus den Residuen für jeweils einen Bahnbogen von 60 Minuten Länge durch Varianzkomponentenschätzung (Koch, 1997) die Gewichtung der beiden Beobachtungsgruppen innerhalb des Bahn bogens angepasst (Mayer-Gürr, 2006).

Mit den so bestimmten empirischen Fehler-Kovarianzfunktionen und den angepassten Gewichten der beiden Beobachtungsgruppen untereinander werden anschließend im nächsten Iterationsschritt erneut tägliche Normalgleichungen aufgestellt, die als Beobachtungsmodell in den Kalman-Smoother eingehen. Das Verfahren konvergiert nach wenigen Iterationsschritten und besonders schnell, wenn man als Startwerte für die jeweiligen Fehler-Kovarianzfunktionen die Ergebnisse der Bestimmung aus dem Vormonat verwendet.

So erhält man schließlich einen Satz täglicher Normalgleichungen von Grad 2 bis 40 für den gesamten Beobachtungszeitraum, die als Beobachtungsmodell in den Kalman-Filter-Ansatz eingeführt werden.

5.2 Prozessmodell

Für die Auswertung der GRACE-Daten mit dem Kalman-Filter-Ansatz wird ein Prozessmodell benötigt, das die erwartete Variabilität des Zustandsvektors widerspiegelt (vgl. Abschnitt 3.2). Das Prozessmodell wird in dieser Arbeit empirisch aus der Ausgabe geophysikalischer Modelle abgeleitet. In der Simulationsstudie waren dies

- für die Variationen der Atmosphäre Daten des ECMWF (ECMWF, 2008),
- für ozeanische Variationen das OMCT (Dobslaw und Thomas, 2007) und
- für Massenvariationen der kontinentalen Hydrologie Daten des WGHM (Döll et al., 2003; Hunger und Döll, 2008).

Wie in Abschnitt 5.1 beschrieben, werden die GRACE-Beobachtungen vorab um zeitlich hochfrequente Variationen der Atmosphäre und des Ozeans mit einer Datenrate von 6 Stunden reduziert, so dass erwartet wird, dass das residuale GRACE-Signal im Wesentlichen Variationen der kontinentalen Hydrologie abbildet. Jedoch sind die Modelle, die zur Reduktion der L1B-Daten verwendet werden, nicht fehlerfrei, so dass ein Restsignal der durch die Hintergrundmodelle reduzierten Subsysteme sicher noch vorhanden ist. In dieser Arbeit werden die Hintergrundmodelle weiterhin als fehlerfrei angenommen, mit einer Ausnahme: die durch das AOD1B-Produkt abgebildeten Variationen von Atmosphäre und Ozean.

Es wird angenommen, dass in den residualen GRACE-Beobachtungen neben dem Signal der kontinentalen Hydrologie noch ein atmosphärisches und ozeanisches Restsignal vorhanden ist, das die Modellfehler des AOD1B-Produkts widerspiegelt. Das erwartete Signal in den GRACE-Beobachtungen setzt sich also zusammen aus der kontinentalen Hydrologie und den Modellfehlern von Atmosphäre und Ozean. Da es bisher keine verlässlichen Angaben zur Genauigkeit der verwendeten geophysikalischen Modelle gibt, einen ersten Ansatz zu einer Abschätzung liefert beispielsweise Zenner et al. (2010), werden an dieser Stelle die Modellfehler des AOD1B-Produkts mit 50 Prozent des eigentlichen Signals abgeschätzt. Wie die Ergebnisse der Simulationsstudie in Kapitel 4 zeigen, ist eine Überschätzung der angenommenen Variabilität

unkritischer als eine Unterschätzung, so dass die gemachte Annahme in diesem Kontext zielführend ist. Das der Ableitung des Prozessmodells zugrunde liegende Prozesssignal setzt sich damit wie folgt zusammen:

$$\mathbf{x}_t^{\text{AOH}} = 0,5 \mathbf{x}_t^{\text{ECMWF}} + 0,5 \mathbf{x}_t^{\text{OMCT}} + 1,0 \mathbf{x}_t^{\text{WGHM}}. \quad (5.1)$$

Dieses wird, reduziert um Jahres- und Halbjahresgang, Mittelwert und linearem Trend für den Zeitraum von 1976 bis 2001 zur Ableitung des Prozessmodells für den Kalman-Filter-Ansatz verwendet. Es liegt damit keine zeitliche Überschneidung von Beobachtungen, die erst ab August 2002 vorliegen, und Prozessmodell, das aus Daten bis Dezember 2001 generiert wird, vor. Dieser Umstand ist wichtig, da dem Nutzer anschließend die Möglichkeit verbleibt, die generierte Schwerefeldzeitreihe gegen entsprechende geophysikalische Modelle vergleichen zu können. Die bei der Prozessierung der GRACE-Beobachtungen eingeführten Vorinformationen beziehen sich auf einen Zeitraum vor den GRACE-Beobachtungen und sind zudem rein stochastischer Natur. Daher kann davon ausgegangen werden, dass die Schwerefeldlösung von den geophysikalischen Modellen, die hier zur Generierung des Prozessmodells genutzt werden, unabhängig ist.

Zusätzlich wurde zeitlich unkorreliertes, isotropes Grundrauschen von 2 cm ewh in Form einer Diagonalmatrix eingeführt, um die im Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ bisher unberücksichtigten Effekte, wie beispielsweise Variationen der Kryosphäre zu berücksichtigen. Diese werden aber im Folgenden nicht weiter thematisiert, da sich diese Arbeit auf die Variationen von Atmosphäre, Ozean und kontinentaler Hydrologie konzentriert, die allesamt im Prozesssignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ abgebildet sind.

5.3 Validierung der täglichen Schwerefeldzeitreihe mit unabhängigen Datensätzen

Mit dem Kalman-Filter-Ansatz wurde eine Schwerefeldzeitreihe vom 01.08.2002 bis zum 31.08.2009 von Grad 2 bis 40 prozessiert und das zuvor abgezogene jährliche und halbjährliche Signal sowie der lineare Trend wurden wieder zurück addiert. Die Zeitreihe enthält damit über Land Variationen der kontinentalen Hydrologie und der Atmosphäre und über dem Ozean Variationen der Atmosphäre und des Ozeans.

In diesem Abschnitt wird überprüft, ob die abgeleitete tägliche GRACE-Zeitreihe tatsächlich auch ein geophysikalisch interpretierbares Signal in dieser hohen zeitlichen Auflösung enthält. Eine globale Validierung der abgeleiteten Schwerefeldzeitreihe, wie sie in der Simulation in Kapitel 4 durch Vergleich entsprechender Feldgrößen noch möglich war, scheidet an dieser Stelle aus, da keine globalen Zeitreihen vergleichbarer zeitlicher Auflösung vorliegen.

Stattdessen wird an dieser Stelle die GRACE-Zeitreihe verglichen mit anderen unabhängigen Datensätzen, die ebenfalls kurzzeitige Variationen im Erdsystem beobachten, wenn auch punktuell und nicht als globales Feld wie GRACE. Es sind dies in Abschnitt 5.3.1 GPS-Stationsbewegungen und in Abschnitt 5.3.2 Variationen des Ozeanbodendrucks, gemessen mit entsprechenden Ozeanbodendruck-Rekordern.

Die Übereinstimmung der verglichenen Zeitreihe wird dabei charakterisiert durch die bereits in Kapitel 4 verwendeten Kriterien Korrelationskoeffizient, Fehler-RMS und Signalreduktion.

5.3.1 GPS-Stationsbewegungen

Die kurzzeitige Höhenänderung einer GPS-Station wird für einen Vergleich mit der GRACE-Zeitreihe an dieser Stelle interpretiert als elastische Deformation der Erdoberfläche, die hervorgerufen wird durch Massenverlagerungen auf und über dieser. Über Land sind diese Massenverlagerungen hauptsächlich atmosphärischer und hydrologischer Natur, wie sie auch durch GRACE indirekt in Form der integralen Schwereänderung beobachtet werden. Der Teil der Höhenänderung, der nicht durch die elastische Deformation des Erdkörpers sondern andere kleinräumige Effekte verursacht ist, sei an dieser Stelle vernachlässigt, da eine klare Trennung nicht möglich ist. Dies kann ebenso zu einer Verschlechterung der Vergleichsgrößen führen wie die Tatsache, dass die Höhenänderung der GPS-Station eine sehr lokale Beobachtungsgröße

ist und die hier bestimmte Schwerefeldreihe bis Grad und Ordnung 40 entwickelt wurde und damit eine eher großräumigere Glättung darstellt. Nichtsdestotrotz bleiben die Bewegungen der GPS-Stationen eine wertvolle Vergleichsgröße zur Validierung der in dieser Arbeit bestimmten GRACE-Zeitreihe.

Eine Umrechnung der Schwereänderung in die entsprechende Vertikaldeformation wurde in Gleichung (2.12) angegeben:

$$\Delta h = R \sum_{n=2}^{40} \sum_{m=0}^n \frac{h'_n}{1+k'_n} (c_{nm}C_{nm}(\lambda, \vartheta) + s_{nm}S_{nm}(\lambda, \vartheta)).$$

In dieser Arbeit wurden zur Bestimmung der Vertikaldeformation aus den GRACE-Schwerefeldkoeffizienten die Love-Zahlen h'_n und k'_n von Gegout (2005) verwendet.

Zu beachten ist hierbei, dass GPS- und GRACE-Beobachtungen nicht im gleichen Referenzsystem vorliegen. Während die Bewegungen der GPS-Stationen, nachdem sie aus dem GPS-Referenzsystem in den ITRF konvertiert wurden, in einem im Wesentlichen durch den Figurenmittelpunkt der Erde festgelegten Koordinatensystem (ein sogenannter *CF (Center of Figure) frame*) gegeben sind (Dong et al., 2003), liegen die mit GRACE bestimmten Stationsbewegungen in einem durch den Massenmittelpunkt der Erde festgelegten Koordinatensystem (ein sogenannter *CM (Center of Mass) frame*) vor. Die Grad-1-Terme der Kugelfunktionsreihe des durch GRACE bestimmten Erdschwerefeldes sind damit unbestimmt und zu Null gesetzt. Um nun die beiden in unterschiedlichen Referenzsystemen bestimmten Stationsbewegungen vergleichbar zu machen, bietet es sich an, die in den GRACE-Schwerefeldern fehlenden Grad-1-Terme auf anderem Wege zu bestimmen und zu ersetzen. Rietbroek et al. (2011) bestimmen beispielsweise wöchentliche Auflastvariationen durch eine gemeinsame Kleinste-Quadrate-Auswertung von GPS-Stationenbewegungen, GRACE-Schwerefeldern und simulierten Ozeanbodendruckdaten des Ozeanmodells FESOM (*Finite Element Sea-Ice Ocean Model*).

Die an dieser Stelle verwendeten GPS-Zeitreihen des IGS-Stationsnetzwerks (Dow et al., 2009) wurden bei Tesmer et al. (2011) beschrieben; sie liegen hier aber in täglicher anstatt monatlicher Auflösung vor. Die GPS-Zeitreihen sind hier in das GRACE-Referenzsystem transformiert worden, so dass die GRACE-Zeitreihen ohne zusätzliche Grad-1-Terme verwendet werden können.

Tesmer et al. (2011) bestimmten hierzu zunächst die Bewegung $d\mathbf{X}$ des Koordinatenursprungs aus der mittleren Deformation der n verwendeten IGS-Stationen:

$$d\mathbf{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d\mathbf{x}_i. \quad (5.2)$$

Hierbei sind die $d\mathbf{x}_i = (dx, dy, dz)^T$ die an den einzelnen Stationen gemessenen Deformationen. Wegen der Tatsache, dass die IGS-Stationen nicht gleichmäßig über die Erdoberfläche verteilt sind, ergibt sich eine Abweichung zwischen dem Zentrum des Figuresystems und dem Ursprung des Stationsnetzes. Diese wird von Tesmer et al. (2011) aus der monatlichen GRACE-Zeitreihe bestimmt. Unter der Annahme, dass GRACE und GPS die gleichen Signale messen, wird nun an den Orten der GPS-Stationen die Auflastdeformation aus der GRACE-Zeitreihe bestimmt und ebenfalls die mittlere Abweichung nach Gleichung (5.2) bestimmt. Diese wird als Korrektur an die mit GPS bestimmten Stationsbewegungen angebracht, so dass beide Koordinatensysteme nun zusammenfallen und die Zeitreihen vergleichbar sind.

Für die Validierung der hier vorliegenden täglichen GRACE-Schwerefeldzeitreihe werden die von Tesmer et al. (2011) prozessierten Zeitreihen des IGS-Stationsnetzwerks (Dow et al., 2009) verwendet, hier allerdings in täglicher an Stelle der bei Tesmer et al. (2011) beschriebenen monatlichen Auflösung.

Die GPS-Zeitreihe beinhaltet, nachdem die Effekte der Erd- und Ozeangezeiten reduziert wurden, neben dem hydrologischen Anteil der Vertikaldeformation, auch die Deformation aufgrund des gesamten atmosphärischen Massensignals. Dieses wurde bei der Prozessierung der GRACE-Beobachtungen in Form des AOD1B-Produkts zunächst reduziert (vgl. Abschnitt 5.1) und muss daher für einen Vergleich im Sinne der *remove/restore*-Technik wieder zurückaddiert werden.

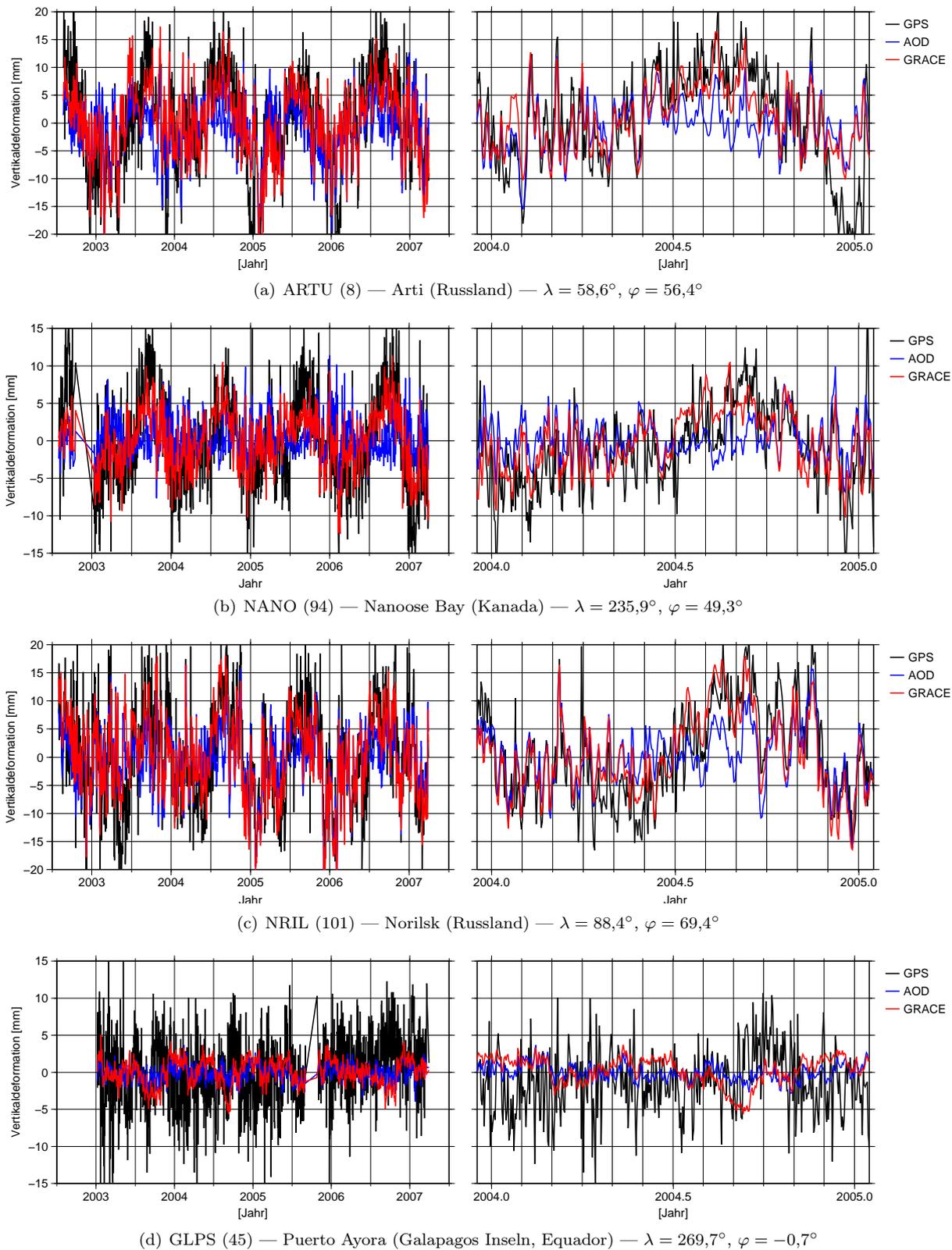


Abbildung 5.2: Zeitreihen für ausgewählte GPS-Stationen. In Klammern die zugehörige Stationsnummer aus Abbildung 5.4. Links: vollständige Zeitreihe, rechts: Ausschnitt von einem Jahr.

Abbildung 5.2 zeigt die jeweiligen Zeitreihen für vier ausgewählte Punkte des IGS-Stationsnetzes. In schwarz ist die Vertikaldeformation dargestellt, wie sie auf den jeweiligen Stationen durch GPS beobachtet wurde. Demgegenüber steht in rot die Vertikaldeformation, wie sie mit GRACE beobachtet wurde, wobei das AOD1B-Produkt an dieser Stelle zurück addiert wurde, um ebenfalls das volle Signal der Massenvariationen zu erhalten. Zum Vergleich ist in blau der zeitliche Verlauf des AOD1B-Produkts dargestellt, das zur Reduktion der ursprünglichen GRACE-Beobachtungen um kurzzeitige Massenvariationen zur Vermeidung zeitlichen Aliasings verwendet wurde. Da dieses nur atmosphärische und ozeanische Massenvariationen modelliert, fehlt natürlich der Anteil der kontinentalen Hydrologie, wie er im GRACE-Signal (in rot) enthalten ist.

Beim Vergleich der Signale an den ausgewählten Vergleichsstationen zeigt sich eine gute Übereinstimmung der kurzzeitigen Variationen wie sie mit den unabhängigen Messsystemen GRACE und GPS bestimmt wurden. Die drei Stationen ARTU, NRIL und NANO (Abbildungen 5.2(a), 5.2(b) und 5.2(c)), die alle in höheren nördlichen Breiten liegen, zeigen jeweils sehr gute Übereinstimmungen zwischen der GRACE- und der GPS-Zeitreihe. Der Korrelationskoeffizient liegt hier zwischen 0,68 und 0,76, der Fehler-RMS liegt dabei zwischen 4,5 mm und 6,1 mm (Vertikaldeformation). Zwischen 46 und 58 Prozent des GPS-Signals wird durch die GRACE-Zeitreihe erklärt.

Gegenüber dem in blau dargestellten AOD1B-Produkt bedeutet dies eine deutlich höhere Übereinstimmung, wie sich auch aus den jeweiligen Ausschnittvergrößerungen auf der rechten Seite optisch gut erkennen lässt. Diese Verbesserung ist, neben der reinen Modellverbesserung der Atmosphärenvariationen, zum Großteil auf die Hinzunahme des hydrologischen Signals an den betreffenden Stationen zurückzuführen, das im AOD1B-Produkt nicht enthalten ist. Nichtsdestotrotz wird bei Betrachtung der Zeitreihen deutlich, dass auch kurzzeitige hydrologische Variationen vorliegen, die mit dem vorgestellten Auswertansatz beobachtbar sind.

Bei den ausgewählten Stationen handelt es sich zugegebenermaßen um herausragende positive Beispiele. In Abbildung 5.2(d) ist hingegen mit der Station GLPS auf den Galapagos-Inseln ein Beispiel aufgeführt, das die Grenzen des Ansatzes, wie sie schon in den Simulationen aus Kapitel 4 deutlich wurden, aufzeigt. Die Station liegt in Äquaturnähe und weist nur eine geringe Variabilität auf. Sowohl die Zeitreihe des AOD1B-Produkts als auch die GRACE-Zeitreihe zeigen nahezu keine Ähnlichkeit zur gemessenen GPS-Zeitreihe (Korrelation 0,02 (GRACE) bzw. 0,06 (AOD1B)). Zurückzuführen ist dies zum einen auf die Lage in Äquaturnähe, die eine deutlich geringere Datendichte zur Folge hat im Vergleich zu Stationen in höheren Breiten. Zum anderen sind die Variationen des GPS-Signals für sich genommen schon klein, so dass vermutet werden kann, dass es sich zu einem gewissen Teil lediglich um Rauschen handelt. Dies sollte in späteren Arbeiten näher untersucht werden.

In Abbildung 5.3 sind die Qualitätsmaße für alle verglichenen GPS-Stationen dargestellt. Bei Betrachtung der Korrelationskoeffizienten in Abbildung 5.3(a) finden sich hohe Korrelationen zwischen den unabhängigen Datensätzen GPS und GRACE wie erwartet zum großen Teil in den höheren Breiten, die Korrelationen in Äquaturnähe sind hingegen eher gering. Auffällig ist auch, dass die Insel-Stationen im Pazifik und Atlantik eine sehr geringe Korrelation aufweisen, wie dies auch schon für die Station GLPS aus Abbildung 5.2(d) der Fall war. Zurückzuführen ist dies vornehmlich auf die Tatsache, dass der Ozean auf Variationen der Atmosphärenmassen in der Regel im Sinne des inversen Barometereffekts reagiert und daher die Variation über den Ozeanen in der Summe eher klein sind. Damit sind sie mit GRACE, insbesondere in den äquaturnahen Bereichen natürlich schlecht beobachtbar, was zu geringen Korrelationen mit der GPS-Zeitreihe an diesen Stationen führt.

Ein ähnliches Bild findet sich bei Betrachtung des Fehler-RMS in Abbildung 5.3(b). Dieser liegt für einen Großteil der Stationen im Bereich von 4 bis 6 mm, einige ozeanische Stationen weisen aber auch Werte von über 12 mm auf. Für die Signalreduktion, also der Anteil der Variabilität des GPS-Signals, das durch das GRACE-Signal erklärt werden kann, ergibt sich ein ähnlich homogenes Bild. In den höheren Breiten werden bis zu 62 Prozent der Signalvariabilität der GPS-Stationen durch GRACE erklärt. Für Inselstationen und äquaturnahe Stationen ergibt sich eine geringere Übereinstimmung. Das Negativbeispiel der äquaturnahen Station GLPS wurde bereits erwähnt (siehe auch Abbildung 5.2(d)).

Insgesamt lässt sich feststellen, dass die von den GPS-Stationen und GRACE beobachtete Variabilität des Erdschwerefeldes in einem Großteil der Stationen eine gute Übereinstimmung zeigt. Dies lässt den

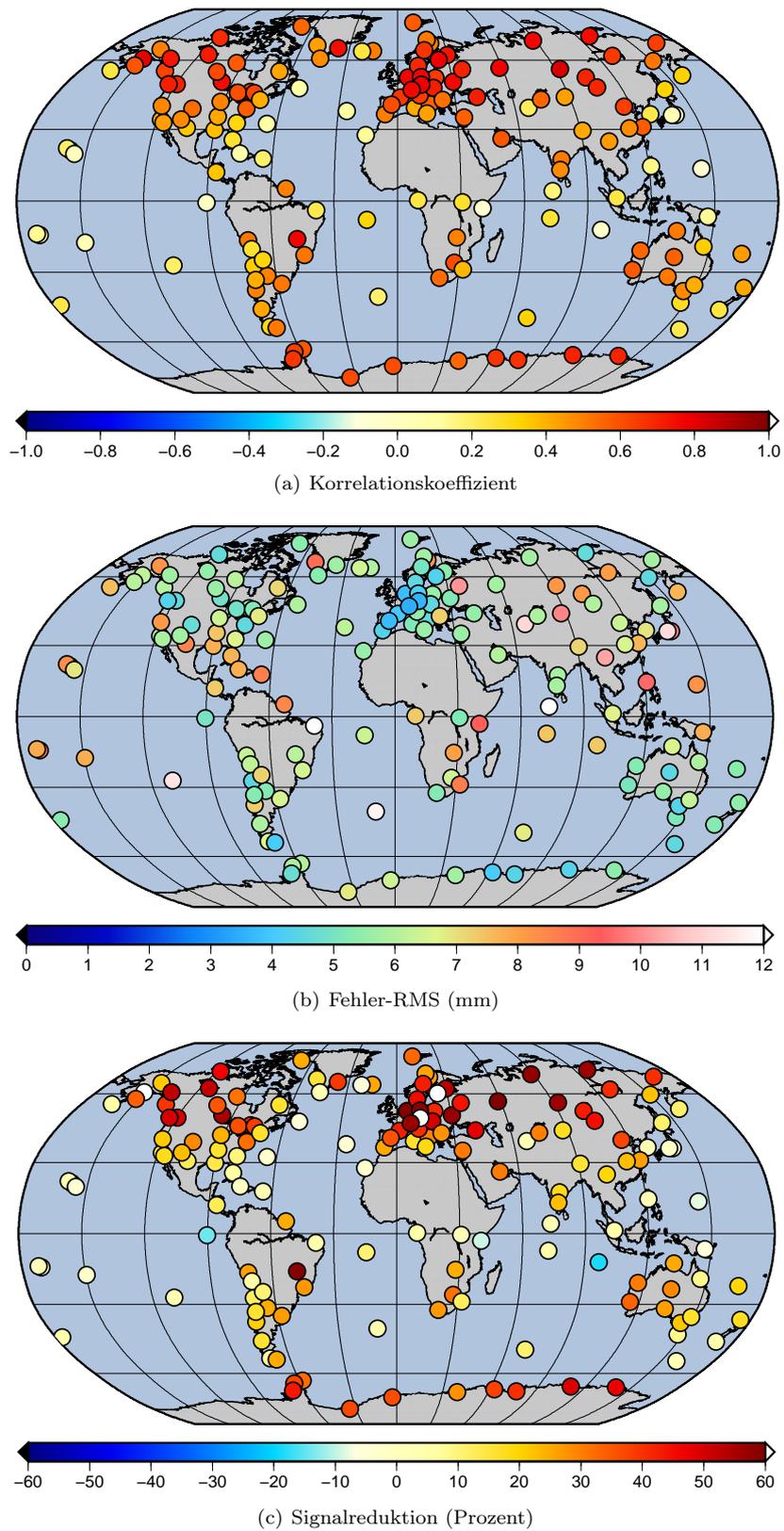
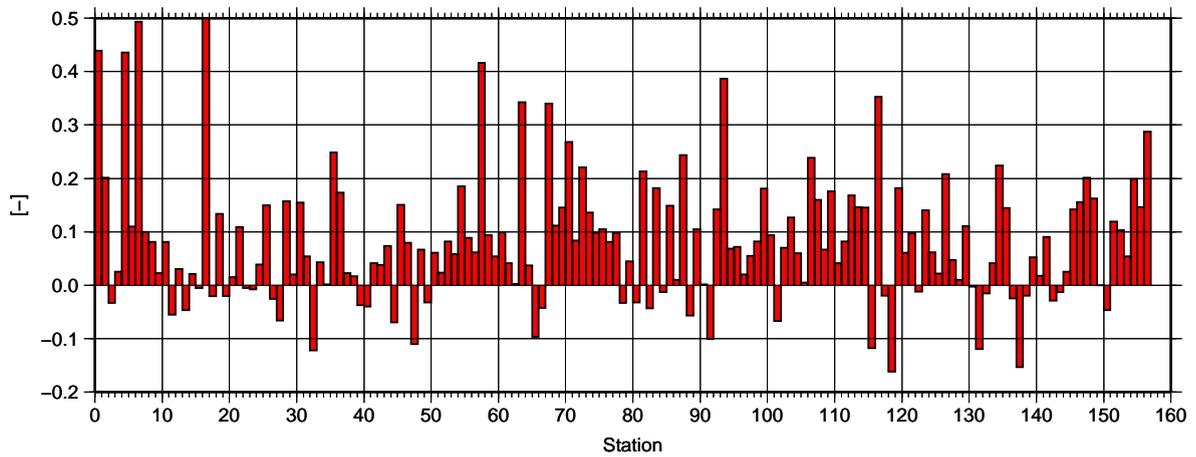
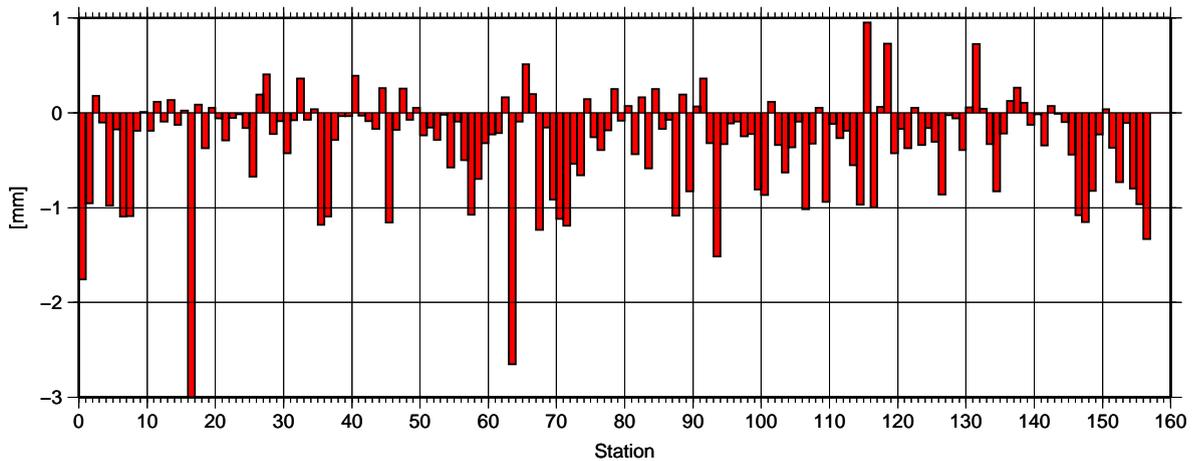


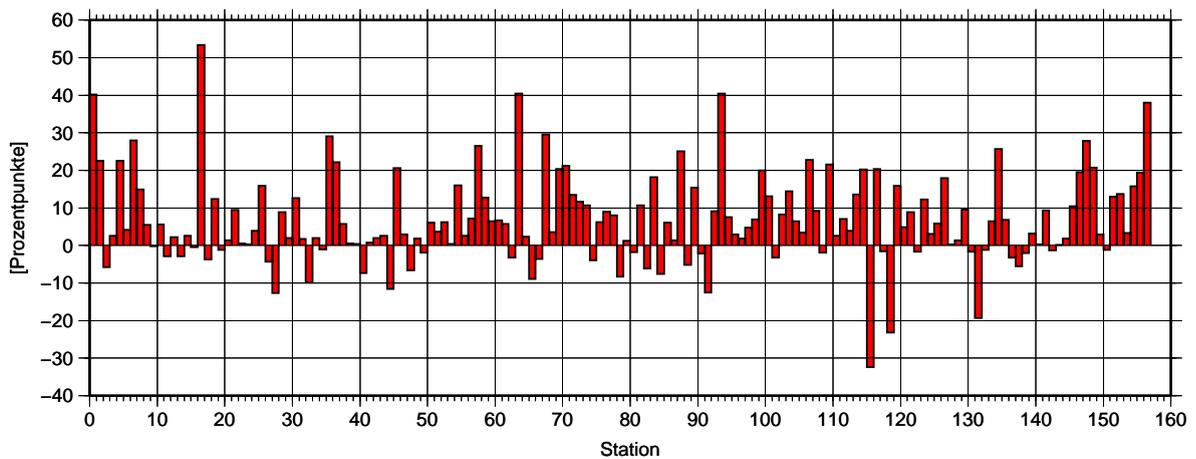
Abbildung 5.3: Vergleich von GPS- und GRACE-Zeitreihen an den Stationen des IGS-Stationsnetzes.



(a) Verbesserung des Korrelationskoeffizienten



(b) Verbesserung des Fehler-RMS



(c) Verbesserung der Signalreduktion

Abbildung 5.4: Verbesserung der Übereinstimmung zwischen GPS-Zeitreihen und AOD1B durch Addition der täglichen Schwerefeldlösungen.

Schluss zu, dass der vorgestellte Ansatz in der Lage ist, insbesondere in den höheren Breiten, kurzzeitige Schwerevariationen zu bestimmen.

Diese Variationen können als verbessertes Dealiasing-Produkt angesehen werden, denn hier sind neben den atmosphärischen und ozeanischen zusätzlich die kurzzeitigen hydrologischen Variationen mit einer zeitlichen Auflösung von einem Tag enthalten, wie auch schon bei [Van Dam et al. \(2007\)](#) für die Monatslösungen anderer Auswertezentren beschrieben wurde. Einen Eindruck über die Größenordnung der Verbesserungen liefert Abbildung 5.4. Hier wurden zunächst für die Zeitreihe des AOD1B-Produkts in den jeweiligen GPS-Stationen die Übereinstimmung mit dem GPS-Signal bestimmt und anhand der drei Qualitätsgrößen Korrelationskoeffizient, Fehler-RMS und Signalreduktion charakterisiert (Übereinstimmung der schwarzen und blauen Kurve aus Abbildung 5.2). Nach Addition der mit dem vorgestellten Kalman-Filter-Ansatz bestimmten Zeitreihe (rote Kurve aus Abbildung 5.2) ergibt sich für einen großen Anteil der Stationen eine Verbesserung der Übereinstimmung zum GPS-Signal. Erkennbar ist dies an der vergrößerten Korrelation (Abbildung 5.4(a)), dem verkleinerten Fehler-RMS (Abbildung 5.4(b)) und dem erhöhten Prozentsatz der Signalreduktion (Abbildung 5.4(c)) für einen Großteil der Stationen.

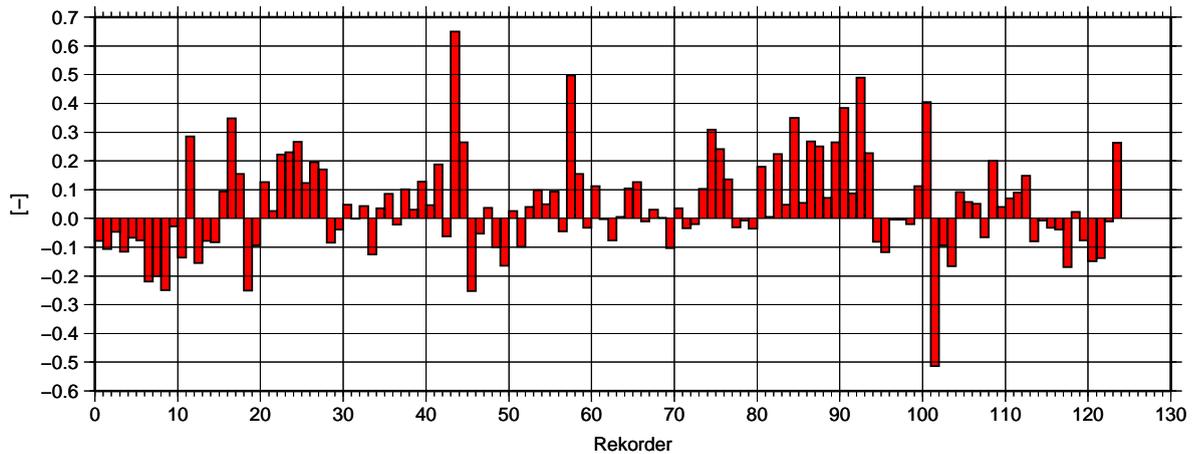
Zu den Verbesserungen tragen zwei Effekte bei, die nicht genau voneinander getrennt werden können: zum einen die Hinzunahme kurzzeitiger hydrologische Variationen zum Dealiasing-Produkt und zum anderen Modellfehler im Atmosphärenmodell. Diese Modellfehler lassen sich durch die GRACE-Zeitreihe verbessern, wie auch der Vergleich mit Ozeanbodendruck-Zeitreihen im folgenden Abschnitt 5.3.2 zeigen wird.

Die mit GRACE bestimmten kurzzeitigen Variationen der kontinentalen Hydrologie sollten bei der Prozessierung einer GRACE-Schwerefeldlösung nicht unberücksichtigt bleiben, da auch sie zu zeitlichen Aliasing-Effekten führen. In Abschnitt 5.4 wird dies beispielhaft anhand einer monatlichen Schwerefeldlösung deutlich gemacht, bei der die täglichen Kalman-Filter-Schwerefeldlösungen als zusätzliches Dealiasing-Produkt eingeführt werden.

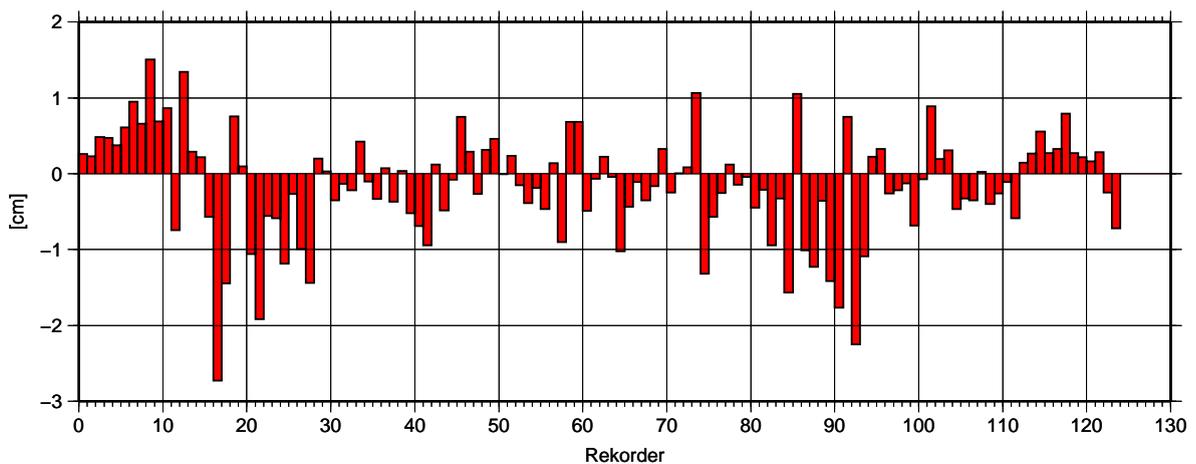
5.3.2 Variationen des Ozeanbodendrucks

Neben den Stationsbewegungen des IGS-Stationsnetzes steht ein weiterer Datensatz zur Verfügung, der punktuell kurzzeitige Variationen des Erdsystems bestimmt. Es sind dies Aufzeichnungen des Ozeanbodendrucks (im Folgenden mit OBP abgekürzt), die an verschiedenen Stellen der Weltmeere vorgenommen wurden, z. B. im Nordpolarmeer, im antarktischen Zirkumpolarstrom (*ACC*, *Antarctic Circumpolar Current*) oder im Pazifik. Eine Aufstellung und Darstellung der räumlichen Verteilung findet sich bei [Macrande et al. \(2010\)](#). Diese Ozeanbodendruck-Rekorder messen punktuell, den Druck durch die darüber liegende integrale Massensäule aus ozeanischen und atmosphärischen Massen, der sich wiederum einfach nach Gleichung (2.100) in eine entsprechende Schwerevariation oder Variation der äquivalenten Wasserhöhe umrechnen lässt.

Ein Vergleich der OBP-Zeitreihen mit GRACE-Zeitreihen verschiedener Auswertezentren mit monatlicher beziehungsweise wöchentlicher Auflösung ist bei [Macrande et al. \(2010\)](#) beschrieben. Die von [Macrande et al. \(2010\)](#) aufbereiteten OBP-Daten standen in täglicher Auflösung auch für einen Vergleich mit der in dieser Arbeit prozessierten GRACE-Zeitreihe zur Verfügung. Leider sind die OBP-Daten, was die Anzahl der Zeitreihen, ihre globale Verteilung und die Länge der jeweiligen Zeitreihen anbelangt, nicht mit den Zeitreihen der IGS-Stationen vergleichbar, die wesentlich mehr Stationen mit globaler Überdeckung und einer in den meisten Stationen kontinuierlichen Zeitreihe von mindestens 5 Jahren beinhaltet. Die GPS-Zeitreihen sind insgesamt wesentlich homogener. Vor diesem Hintergrund sind die Vergleiche zwischen den OBP-Zeitreihen und der GRACE-Zeitreihe in manchen OBP-Lokationen sicher von geringerer Aussagekraft. Rückschlüsse auf die Güte der GRACE-Zeitreihe sind mitunter schwerlich möglich. Zusätzlich verschlechtert sich die Vergleichbarkeit der Zeitreihen durch die Tatsache, dass die OBP-Messung eine sehr lokale Größe mit eher lokaler Aussagekraft ist, wohingegen die bis Grad und Ordnung 40 bestimmten GRACE-Zeitreihen einen über größere Gebiete glättenden Effekt haben.



(a) Verbesserung des Korrelationskoeffizienten



(b) Verbesserung des Fehler-RMS als ewh [cm]

Abbildung 5.5: Verbesserung der Übereinstimmung zwischen OBP-Zeitreihen und AOD1B durch Addition der täglichen GRACE-Schwerefeldlösungen.

Verglichen werden in dieser Untersuchung jeweils drei Zeitreihen: In schwarz (OBP) die *in situ*-Messungen der OBP-Rekorder und in blau (AOD) die Tagesmittelwerte des AOD1B-Produkts, die den Wissensstand über die kurzzeitigen Variationen des Erdschwerefeldes durch Atmosphäre und Ozean repräsentieren. In rot dargestellt sind die täglichen Schwerefeldlösungen aus dem Kalman-Filter-Ansatz mit dem zurück addierten AOD1B-Produkt. Dies ist das volle mit GRACE beobachtete Signal der kurzzeitigen Variationen im Sinne der *remove/restore*-Technik (vergleiche hierzu auch die Ausführungen des vorhergehenden Abschnitts 5.3.1). Die GRACE-Zeitreihe lässt sich damit als Verbesserung zum AOD1B-Produkt über den Ozeanen interpretieren.

Abbildung 5.5 zeigt die Veränderungen des Korrelationskoeffizienten und des Fehler-RMS, jeweils bezogen auf die OBP-Zeitreihe, die sich nach Addition der GRACE-Zeitreihe zur Zeitreihe des AOD1B-Produkts ergibt. Es zeigt sich, im Gegensatz zu den Veränderungen bei den GPS-Zeitreihen (vgl. Abbildung 5.4), ein eher indifferentes Bild, inwieweit kurzzeitige Variationen des Erdschwerefeldes mit GRACE beobachtbar sind und ob sich mit dieser GRACE-Zeitreihe das AOD1B-Produkt verbessern lässt. Die Veränderungen sind im Schnitt deutlich kleiner, was sicherlich auch darauf zurückzuführen ist, dass bei den GPS-Zeitreihen die Berücksichtigung des hydrologischen Signals vollständig in das Verbesserungspotential eingeflossen ist. Gleichzeitig sind auch einige Zeitreihen darunter, bei denen die Hinzunahme der Kalman-Filter-Lösung das AOD1B-Produkt nicht verbessert, sondern im Gegenteil eine deutliche Verschlechterung der Übereinstimmung mit der OBP-Zeitreihe im Vergleich zum AOD1B-Produkt alleine zu beobachten ist. Abbildung 5.6

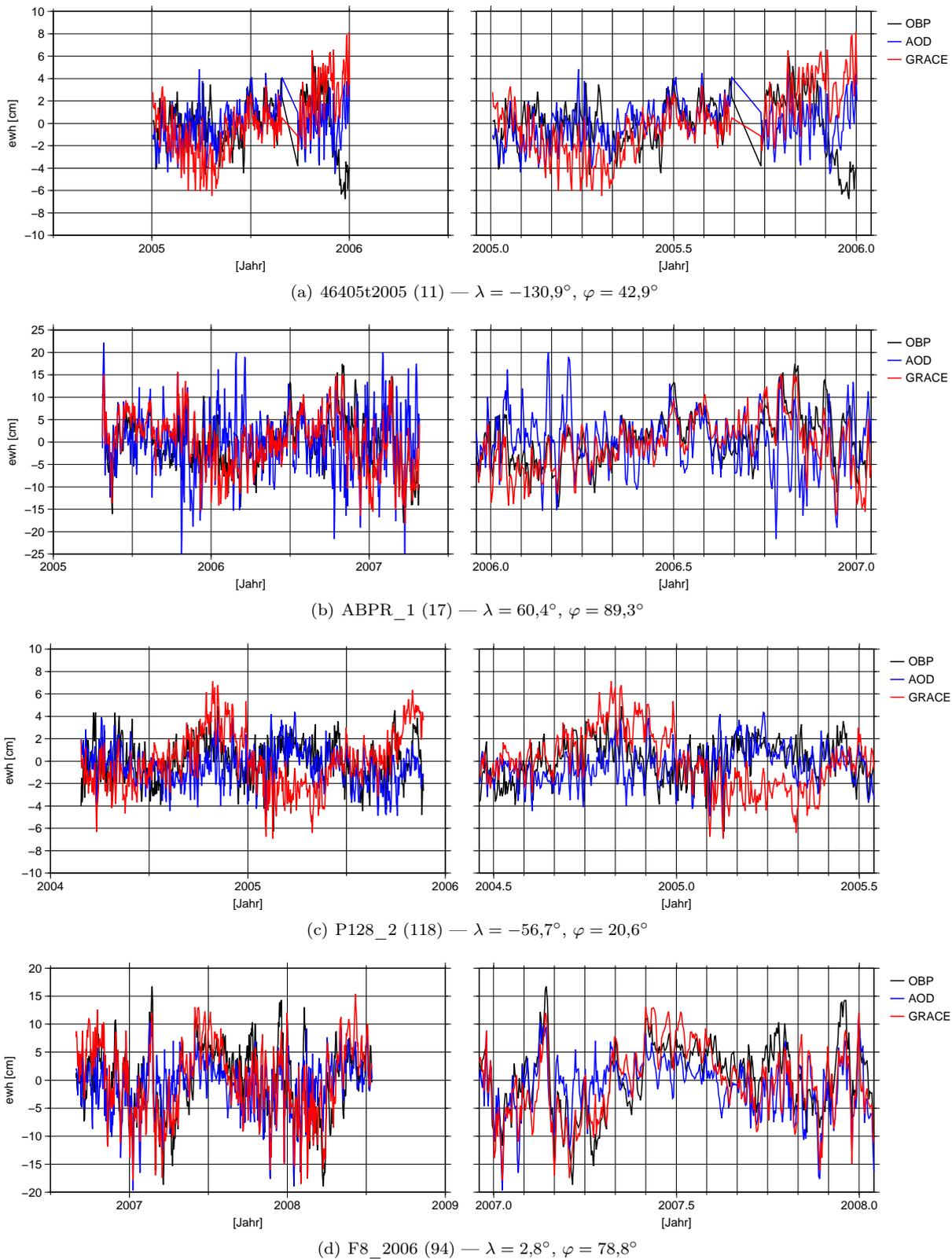


Abbildung 5.6: Zeitreihen für ausgewählte OBP-Rekorder. In Klammern die zugehörige Rekordernummer aus Abbildung 5.5.

zeigt zwei positive Beispiele, die eine deutliche Verbesserung der Übereinstimmung der Zeitreihen zeigen, aber auch zwei negative Beispiele, wo sich nach Hinzunahme des GRACE-Signals zum AOD1B-Produkt eine Verschlechterung der Übereinstimmung mit der OBP-Zeitreihe ergibt.

Für die in Abbildung 5.6(d) dargestellte Station F8 im Nordpolarmeer ergibt sich beim Vergleich der AOD1B- mit der OBP-Zeitreihe eine deutliche Verbesserung nach Hinzunahme des GRACE-Signals. Der Korrelationskoeffizient verbessert sich von 0,54 auf 0,77 und der Fehler-RMS verringert sich um 20 Prozent von 5,4 cm ewh auf 4,4 cm ewh. Auch der Anteil des OBP-Signals, der durch die AOD1B- beziehungsweise GRACE-Zeitreihe erklärt wird, verbessert sich von 23,7 Prozent (AOD1B) auf 49,7 Prozent (GRACE). Dies ist darauf zurückzuführen, dass in den höheren Breiten die Überdeckung mit GRACE-Beobachtungen, wie schon in Kapitel 4 gesehen, deutlich größer ist, und damit der Beitrag der GRACE-Beobachtungen zur Kalman-Filter-Lösung in Relation zum Anteil aus dem Prozessmodell entsprechend hoch ist. Zum anderen lassen die deutlichen Verbesserungen der GRACE-Zeitreihe gegenüber der AOD1B-Zeitreihe vermuten, dass die dem AOD1B-Produkt zugrundeliegenden Atmosphärendaten des ECMWF und das damit betriebene OMCT-Ozeanmodell in der Region des Nordpolarmeers Defizite aufweist, die zukünftig noch näher zu untersuchen sind. Das gleiche Bild ergibt sich für die Station ABPR_1 in Abbildung 5.6(b), die ebenfalls im Nordpolarmeer liegt. Auch hier verbessert sich die Übereinstimmung zwischen der OBP-Zeitreihe und der AOD1B-Zeitreihe nach Hinzunahme des GRACE-Signals (GRACE-Zeitreihe): Der Korrelationskoeffizient verbessert sich von 0,37 auf 0,72, der Fehler-RMS verringert sich von 7,2 cm ewh auf 4,5 cm ewh. Diese gute Übereinstimmung von GRACE mit den Ozeanbodendruck-Zeitreihen im Nordpolarmeer wurde auch schon von Morison et al. (2007) für die monatlichen Zeitreihen anderer Auswertezentren bestätigt. Die Stationen 46405t (Abbildung 5.6(a)) und P128_2 (Abbildung 5.6(c)) sind zwei Beispiele, wo die GRACE-Schwerefelder nicht zu einer Verbesserung des AOD1B-Produkts führen. Im Gegenteil: Für die Station 46405t verschlechtert sich der schon recht geringe Korrelationskoeffizient von 0,18 auf 0,05, der Fehler-RMS verschlechtert sich von 2,7 auf 3,5 cm ewh. Ein ähnliches Bild ergibt sich bei der zweiten Station P128_2. Auch hier halbiert sich der Korrelationskoeffizient von 0,32 auf 0,15 und der Fehler-RMS steigt von 2,1 auf 2,9 cm ewh. Beide Stationen liegen allerdings auch nicht in höheren Breiten, sondern auf $42,9^\circ$ beziehungsweise $20,6^\circ$ nördlicher Breite. Die Überdeckung der GRACE-Beobachtungen ist hier deutlich geringer, so dass der Einfluss des Prozessmodells auf die tägliche Schwerefeldlösung entsprechend höher ausfällt. Dieses muss aber nicht zwingend eine gute Übereinstimmung mit den Daten der Ozeanbodendruck-Rekorder aufweisen.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die von den OBP-Rekordern und GRACE beobachtete kurzzeitige Variabilität des Erdschwerefeldes lediglich in einem Teil der Stationen eine gute Übereinstimmung zeigt. Insbesondere bei den Stationen im Nordpolarmeer ist diese Übereinstimmung zum Teil deutlich besser als die des AOD1B-Produkts, das zur Reduktion der kurzzeitigen Schwerevariationen bei der Prozessierung der GRACE-Monatslösungen verwendet wird. Leider gilt dies nicht für alle betrachteten Zeitreihen. Bei einigen Stationen, vornehmlich in Äquatornähe bzw. eher niedrigeren Breiten, verschlechtert sich die Korrelation zu den OBP-Messungen bei Hinzunahme des GRACE-Signals. Die Gründe hierfür liegen einerseits im sehr lokalen Charakter der OBP-Beobachtung im Gegensatz zur räumlich glättenden GRACE-Zeitreihe. Andererseits können sich auch an dieser Stelle nicht untersuchte Effekte der Rekorder selber (Bias, Drift) und die verwendeten Hintergrundmodelle für die Ozeangezeiten auf die Vergleichbarkeit beider Zeitreihen auswirken.

5.4 Verbesserung der monatlichen Schwerefeldlösungen

Wie im vorherigen Abschnitt beim Vergleich mit Daten von GPS-Stationsbewegungen und einigen OBP-Rekordern gezeigt, sind die mit dem Kalman-Filter-Ansatz bestimmten täglichen GRACE-Schwerefelder geeignet, kurzzeitige Variationen des Erdschwerefeldes zu bestimmen. Da sich hierbei signifikante Unterschiede zum AOD1B-Produkt, insbesondere durch Berücksichtigung hydrologischer Massenvariationen, ergeben, ist es naheliegend, die täglichen GRACE-Schwerefeldlösungen als Ergänzung zum bisherigen Dealiasing bei der Bestimmung einer monatlichen Schwerefeldlösung zu verwenden.

Im derzeitigen Auswerteansatz der GRACE-Analysezentren für die Bestimmung einer monatlichen Schwerefeldlösung werden kurzzeitige Massenvariationen der Atmosphäre und des Ozeans in Form des AOD1B-Produkts vorab reduziert. Ergänzend hierzu wird in diesem Abschnitt gezeigt, welche Auswirkung die

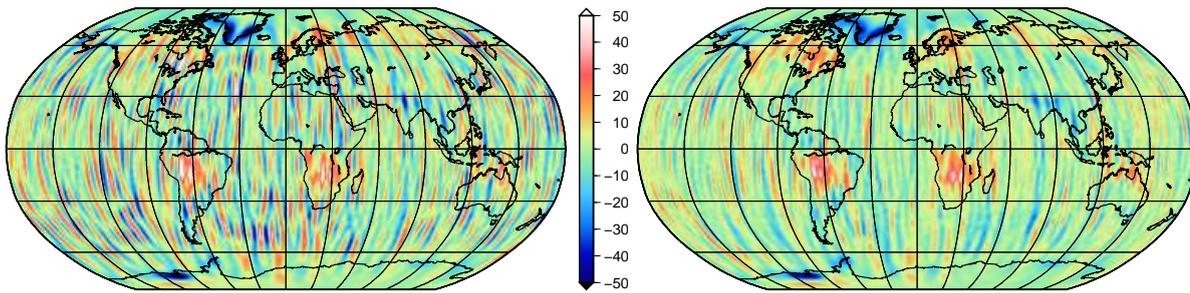


Abbildung 5.7: GRACE-Monatslösungen für Februar 2008 (als ewh [cm]) ohne (links) und mit (rechts) den täglichen Kalman-Filter-Lösungen als Dealiasing-Produkt. Auf beide Lösungen wurde ein 250-km-Gauss-Filter angewendet.

zusätzliche Reduktion der täglichen GRACE-Schwerevariationen auf eine monatliche Schwerefeldlösung haben.

Hierzu wird eine Schwerefeldlösung aus einem Monat GRACE-Beobachtungen auf zwei Arten bestimmt: In einer ersten Variante mit Reduktion der bereits in Abschnitt 5.1 beschriebenen Hintergrundmodelle, insbesondere das AOD1B-Produkt, aber ohne die mit dem Kalman-Filter-Ansatz bestimmten täglichen Schwerefeldlösungen. In der zweiten Variante werden zusätzlich zu den Reduktionen der ersten Variante die mit dem Kalman-Filter-Ansatz bestimmten täglichen Schwerevariationen reduziert. Abschließend werden sie als Monatsmittelwert zur Lösung des Normalgleichungssystems wieder zurück addiert. Ein Vergleich dieser beiden, bis auf die Verwendung der täglichen GRACE-Lösungen, identischen Monatslösungen zeigt den Einfluss der Reduktion täglicher GRACE-Lösungen auf eine Monatslösung.

Abbildung 5.7 zeigt eine GRACE-Monatslösung für Februar 2008 im Ortsbereich. Im linken Teil ist eine herkömmliche Monatslösung ohne die Kalman-Filter-Lösungen als Dealiasing-Produkt dargestellt, im rechten Teil die Lösung mit Kalman-Filter-Dealiasing.

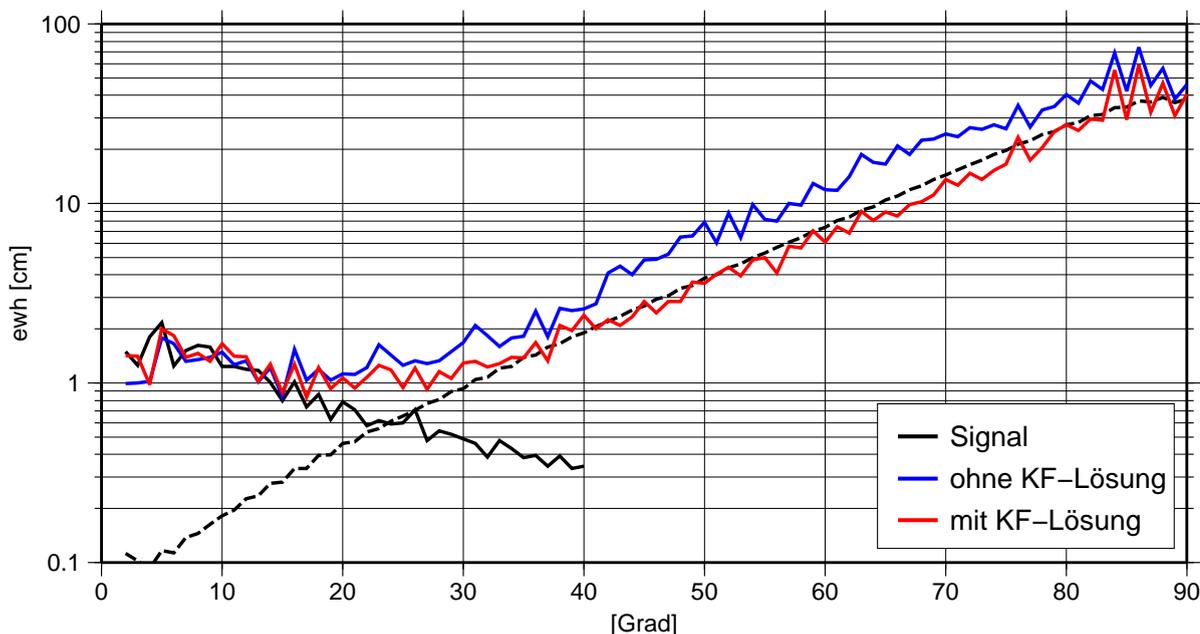


Abbildung 5.8: Fehler-Gradvarianzen einer Monatslösung. Dargestellt sind die Fehler-Gradvarianzen zum statischen Feld ITG-Grace2010 für eine Monatslösung ohne (blau) und mit (rot) den täglichen Kalman-Filter-Lösungen als Dealiasing-Produkt. Gestrichelt dargestellt sind die formalen Fehler der Monatslösung.

Es zeigt sich, dass hier die für GRACE typischen Nord-Süd-Streifenstrukturen deutlich weniger ausgeprägt sind. Diese werden üblicherweise als GRACE-Fehler interpretiert, die durch nachträgliche Filterung beseitigt werden müssen. Hierzu wurde in den vergangenen Jahren neben dem Gauss-Filter eine Vielzahl unterschiedlicher Filtertechniken entwickelt, z. B. bei Swenson und Wahr (2006) oder Kusche (2007). Auch in dieser Abbildung sind beide Felder mit einem 250-km-Gauss-Filter geglättet. Eine Schwerefeldlösung mit weniger geophysikalisch nicht begründbaren Streifen ist daher als besser anzusehen. Diese benötigt auch ein geringeres Maß an Filterung, die neben den Fehlern auch das Signal dämpft.

Neben der Darstellung im Ortsbereich hat sich auch die Darstellung im Frequenzbereich als Fehler-Gradvarianzen zur Beurteilung einer Schwerefeldlösung bewährt. Für die beiden verglichenen Lösungen ist dies in Abbildung 5.8 geschehen. Dargestellt sind hier die Fehler-Gradvarianzen bezogen auf das statische Schwerefeld ITG-Grace2010, das als Pseudo-Referenzlösung dient, da hier 7 Jahre GRACE-Beobachtungen eingegangen sind. In blau dargestellt sind die Abweichungen zwischen der statischen Lösung und der Monatslösung ohne Kalman-Filter-Dealiasing, in rot die entsprechenden Abweichungen mit Kalman-Filter-Dealiasing. Die Abweichungen zeigen einen typischen Verlauf: Für die niedrigen Grade bis etwa 25 zeigt sich ein Abfallen, anschließend ein schneller und großer Anstieg. Zur Erklärung dieses Verlaufs ist zusätzlich in schwarz der Signalgehalt dargestellt. Dieser wurde aus dem Prozessignal $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$ (vgl. Abschnitt 5.2) bestimmt. Die formalen Fehler der GRACE-Monatslösung sind zusätzlich gestrichelt dargestellt. Sie repräsentieren in dieser Abbildung die typische GRACE-Fehlerkurve mit ihrem starken Anstieg in hohen Graden. Man erkennt sehr gut, dass die Abweichungen der verbesserten Monatslösung vom Referenzfeld in rot mit den formalen Fehlern zusammenfallen, was auf ein realistisches stochastisches Modell bei der Prozessierung schließen lässt. Desweiteren erkennt man, dass bei der Lösung ohne zusätzliches Kalman-Filter-Dealiasing die Fehlerkurve deutlich über der verbesserten Variante liegt, was mit den stärkeren Streifenstrukturen im Ortsbereich aus Abbildung 5.7 korrespondiert.

6. Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Verfahren zur Bestimmung kurzzeitiger Variationen des Erdschwerfeldes aus Daten der Satellitenmission GRACE vorgestellt. Grundlage hierfür ist die Interpretation des zeitlichen Verhaltens des Erdschwerfeldes als einen dynamischen Prozess, der mit GRACE beobachtet wird. Für die Modellierung dieses dynamischen Prozesses wurde in der vorliegenden Arbeit ein stochastischer Ansatz verwendet, da eine physikalische Modellierung der Dynamik des Erdsystems sich als zu komplex erweist.

Das stochastische Prozessmodell zeichnet sich dadurch aus, dass es die vollständige Korrelationsstruktur zweier aufeinanderfolgender Epochen des Prozesses in Form seiner Auto- und Kreuzkovarianzmatrix beschreibt. Da ein direkter Zugang zu diesen nicht möglich ist, wird stattdessen eine aus vorhandenen geophysikalischen Modellen abgeleitete empirische Variante verwendet. GRACE-Beobachtungen, hier in Form täglicher Normalgleichungen, und Prozessmodell wurden im Kalman-Filter zusammengeführt um für jede Epoche (Tag) eine gewichtete Kleinste-Quadrate-Schätzung des Systemzustands zu erhalten.

Eine umfangreiche Simulationsstudie zeigt Eigenschaften und Möglichkeiten des entwickelten Kalman-Filter-Ansatzes zur Bestimmung kurzzeitiger Schwerevariationen aus den GRACE-Beobachtungen. Hierzu werden GRACE-Beobachtungen generiert, wobei ein zeitvariables Schwerfeldsignal mit den geophysikalischen Modellen NCEP, MOG2d und GLDAS simuliert wird. Zur Ableitung des Prozessmodells werden die hiervon unabhängigen Modelle ECMWF, OMCT und WGHM verwendet. Es zeigt sich, dass die täglichen Variationen des simulierten Schwerfeldes (ausgedrückt in äquivalenten Wasserhöhen) mit dem vorgestellten Ansatz zu rund 69 Prozent der Variabilität des Referenzsignals rekonstruierbar sind. Die Korrelation zwischen Referenzsignal und aus den GRACE-Beobachtungen bestimmten gefilterten Signal liegt hierbei im globalen Mittel bei 0,7. Dabei sind die Bereichen in höheren Breiten wegen der deutlich besseren Überdeckung mit GRACE-Beobachtungen im Vergleich zu den äquaturnahen Breiten deutlich besser bestimmt: In höheren Breiten lässt sich nahezu das gesamte Referenzsignal rekonstruieren.

Die guten Ergebnisse der Simulationsstudie lassen sich in Teilen auch auf eine Auswertung echter GRACE-Daten übertragen. Ein globaler Vergleich der gefundenen täglichen Schwerevariationen mit Zeitreihen übergeordneter Genauigkeit als Referenzlösung ist allerdings nicht möglich, da diese nicht zur Verfügung stehen. Stattdessen wird hier mit den an den IGS-Stationen mit GPS beobachteten Vertikaldeformationen verglichen und in einem Großteil der Stationen hohe Korrelationen festgestellt. Diese sind zum Teil deutlich besser als beim Vergleich der GPS-Stationsbewegungen mit dem AOD1B-Produkts, das atmosphärische und ozeanische Variationen modelliert. Erklärbar ist diese Verbesserung mit den in der GRACE-Zeitreihe berücksichtigten hydrologischen Variationen, die im AOD1B-Produkt nicht enthalten sind. Der Vergleich mit Daten von Ozeanbodendruck-Rekordern bestätigt für die im Nordpolarmeer gelegenen Stationen das Verbesserungspotential des AOD1B-Produkts. An anderen Stationen lassen sich jedoch keine Verbesserungen feststellen.

Dies ist vermutlich darin begründet, dass sowohl die OBP-Rekorder, als auch die Zeitreihen der GPS-Stationen lokale Messungen sind, wohingegen die GRACE-Zeitreihe eine Kugelfunktionsentwicklung bis Grad und Ordnung 40 darstellt, was einer Glättung über ein deutlich größeres Gebiet gleichkommt. Daneben spielen Sensoreinflüsse sicher ebenfalls eine nicht unbeträchtliche Rolle. Dies gilt sowohl für die GPS-Zeitreihen, die mehr messen, als die durch elastische Deformation der Erde induzierte Höhenänderung, als auch für die OBP-Zeitreihen. Hier spielen Einflüsse der Sensoren wie Driften andere systematische Abweichungen ebenso eine Rolle wie die zur Reduktion der Daten benötigten Hintergrundmodelle.

Die mit dem Kalman-Filter-Ansatz bestimmte GRACE-Zeitreihe täglicher Schwerevariationen lässt sich als Verbesserung zum AOD1B-Produkt auch bei der Prozessierung monatlicher Schwerfeldlösungen verwenden. Anhand eines Beispielmonats wird hier das mögliche Verbesserungspotential aufgezeigt.

Trotz dieser ermutigenden Ergebnisse ergibt sich für den vorgestellten Kalman-Filter-Ansatz noch Möglichkeiten des Ausbaus und der Verbesserung. Es ergeben sich mehrere Gruppen für mögliche Verbesserungen, die weiter untersucht werden müssen.

Ein wichtiger Ansatzpunkt ist die Modellierung der Prozessdynamik selber. Die bisher verwendeten empirischen Kovarianzmatrizen können zu numerischen Instabilitäten führen, weshalb ein Übergang zu einer analytischen Form dieser Matrizen zu überlegen ist. Bisher wurde hier implizit die Autokovarianzfunktion des Schwerefeldsignals nur an zwei Stellen abgetastet: $\Delta t = 0$ und $\Delta t = 1$. Eine Abtastung über einen weiteren Bereich und Schätzung einer analytischen Autokovarianzfunktion, beispielsweise einer Exponentialfunktion für den Prozess erster Ordnung, könnte hier eine Stabilisierung des Verfahrens bringen. Desweiteren sollte generell über den Ausbau auf Prozesse höherer Ordnung nachgedacht werden, die eine bessere Abbildung der Prozessdynamik ermöglichen können.

Der zweite Ansatzpunkt betrifft die Beobachtungen selber. Eine wichtige Eigenschaft des Kalman-Filters ist die Tatsache, unterschiedliche Beobachtungsgruppen zusammenzuführen und bei der Zustandsschätzung einer Epoche zu fusionieren. Die bisher als Zeitreihen zur Validierung verwendeten GPS-Stationsbewegungen bieten sich beispielsweise als eine solche weitere Beobachtungsgruppe an. [Rietbroek et al. \(2011\)](#) verwenden beispielsweise GRACE-Beobachtungen, modellierte Ozeanbodendruck-Daten und GPS-Daten für eine gemeinsame Bestimmung der Massenverlagerungen im System Erde.

Ein dritter Ansatzpunkt wurde in Abschnitt 4.3.7 angesprochen. Es zeigte sich, dass die Wahl der Darstellung des Erdschwerefeldes durch eine Kugelfunktionsreihe, deren Basisfunktionen einen globalen Träger aufweisen, zu überdenken sein wird. Um dem lokalen Charakter der verwendeten Beobachtungen gerecht zu werden, wurden in der Vergangenheit des Öfteren Basisfunktionen mit lokalem Träger zur Repräsentation des Erdschwerefeldes vorgeschlagen. Eine Darstellung mit den bei [Eicker \(2008\)](#) vorgeschlagenen radialen Basisfunktionen soll daher in Zukunft weiterverfolgt werden.

A. Anhang

A.1 Eigenschaften der Prozessdynamikmatrix

An dieser Stelle sollen einige Eigenschaften der Prozessdynamikmatrix \mathbf{B} aus Gleichung (3.57) näher beschrieben werden, da sie für das Verständnis des dynamischen Verhaltens des in dieser Arbeit implementierten Kalman-Filters von Relevanz sind.

Zeitkontinuierlicher Prozess. Gleichung (3.57) stellt bei verschwindendem Prozessrauschen $\mathbf{w}_t = \mathbf{0}$ die diskrete Form eines Systems homogener linearer Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten dar. An dieser Stelle sei jedoch ein zeitkontinuierliches System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \quad (\text{A.1})$$

angenommen, da einige Eigenschaften der Prozessdynamikmatrix \mathbf{B} so leichter einsehbar sind. Hierin ist $\mathbf{x}(t)$ der zeitabhängige Zustandsvektor, $\dot{\mathbf{x}}$ dessen Zeitableitung und \mathbf{B} die Matrix konstanter Koeffizienten. Den Übergang auf zeitdiskrete Systeme, unter Erhaltung dieser Eigenschaften, lässt sich auf durch Diskretisierung vollziehen (Gelb, 1974).

Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ dieser homogenen Differentialgleichung lässt sich mit dem Anfangswert $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ einfach angeben:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{B}(t-t_0)}\mathbf{x}_0. \quad (\text{A.2})$$

Hierin ist t_0 der Anfangszeitpunkt und

$$e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{\mathbf{B}^2}{2!}t^2 + \frac{\mathbf{B}^3}{3!}t^3 + \dots \quad (\text{A.3})$$

die Matrix-Exponentialfunktion. Mit der *Transitionsmatrix*

$$\Phi(t - t_0) := e^{\mathbf{B}(t-t_0)} \quad (\text{A.4})$$

lässt sich der Zustandsvektor zu jedem beliebigen Zeitpunkt t , ausgehend vom Anfangszustand \mathbf{x}_0 , mit

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0)\mathbf{x}_0 \quad (\text{A.5})$$

angeben.

Die Darstellung des zeitlichen Verhaltens eines Systems im Zustandsraum ist nicht eindeutig, vielmehr gibt es unendlich viele äquivalente Darstellungen, die alle durch lineare Transformation des Zustandsvektor ineinander überführt werden können, wobei die Eigenschaften des Systems erhalten bleiben (Ludyk, 1990). Eine ausgewiesene Transformation, die nun näher betrachtet werden soll, ist

$$\mathbf{z} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{x}, \quad (\text{A.6})$$

die die Transitionsmatrix auf Diagonalgestalt bringt und damit die Größen des Zustandsvektors voneinander entkoppelt. Mit der Eigenwertzerlegung $\mathbf{B} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ ergibt sich für die transformierte Lösung

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{\Lambda}(t-t_0)}\mathbf{z}_0 \quad (\text{A.7})$$

mit der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ der Eigenwerte λ_i von \mathbf{B} . Die Transitionsmatrix des neuen Systems lässt sich dann sehr einfach angeben mit

$$\Phi(t - t_0) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & & \\ & e^{\lambda_2(t-t_0)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Anhand der Eigenwerte der Transitionsmatrix lassen sich nun einige Eigenschaften betrachteten Systems feststellen:

1. Besitzt Φ nur reelle Eigenwerte kleiner Null, so beschreibt das System einen exponentiell abklingenden Zustandsvektor. Zusätzlich ist das System vollständig entkoppelt, d.h. die Einträge des Zustandsvektors sind unabhängig voneinander.
2. Im Falle komplexer Eigenwerte $\lambda = \lambda^{\text{Re}} + i\lambda^{\text{Im}}$, die immer als Paar konjugiert komplexer Eigenwerte vorliegen, ist der Dämpfung zusätzlich eine Schwingung überlagert. Die beiden Einträge des Zustandsvektors, die zueinander konjugiert komplexe Eigenwerte haben, sind dabei nicht vollständig entkoppelt.

Der letzte Fall komplexer Eigenwerte soll nun näher betrachtet werden. Zum Paar konjugiert komplexer Eigenwerte gehört auch ein Paar konjugiert komplexer Eigenvektoren $\mathbf{e} = \mathbf{e}^{\text{Re}} \pm i\mathbf{e}^{\text{Im}}$, deren Realteil und Imaginärteil ebenfalls linear unabhängig sind. Daher können diese nun anstelle der komplexen Eigenvektoren zur Darstellung der Lösung der Differentialgleichung verwendet werden. Dies geschieht mittels der einfachen Transformation (Ludyk, 1990)

$$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{T}\mathbf{U} \quad (\text{A.9})$$

mit der Transformationsmatrix (hier beispielhaft für die zueinander konjugiert komplexen Eigenwerte λ_1 und λ_2):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.10})$$

die ebenfalls auf die Matrix Λ der Eigenwerte anzuwenden ist. Die Einträge realer Eigenwerte bleiben dabei unverändert. Für Λ ergibt sich dann nach der Transformation die Quasidiagonalform

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1^{\text{Re}}(t-t_0)} \cos \lambda_1^{\text{Im}}(t-t_0) & e^{\lambda_1^{\text{Re}}(t-t_0)} \sin \lambda_1^{\text{Im}}(t-t_0) & & & \\ -e^{\lambda_1^{\text{Re}}(t-t_0)} \sin \lambda_1^{\text{Im}}(t-t_0) & e^{\lambda_1^{\text{Re}}(t-t_0)} \cos \lambda_1^{\text{Im}}(t-t_0) & & & \\ & & e^{\lambda_3(t-t_0)} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Die ursprüngliche Transitionsmatrix $\Phi(t-t_0)$ aus Gleichung (A.4) wurde damit auf Quasidiagonalform

$$\tilde{\Phi}(t-t_0) = \mathbf{T}\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^{-1}\mathbf{T}^{-1} \quad (\text{A.12})$$

gebracht, die nur reelle Einträge besitzt. Die Einträge des Zustandsvektors aus Gleichung (A.5) sind dabei jeweils Linearkombinationen aller Einträge des Vektors der Anfangswerte \mathbf{x}_0 , die eine Überlagerung von exponentiellem Abklingen und einer Schwingung ergeben.

Zeitdiskreter Prozess. Die obigen Feststellungen gelten analog auch für zeitdiskrete Systeme, wie sie in dieser Arbeit verwendet werden. Das zeitdiskrete System

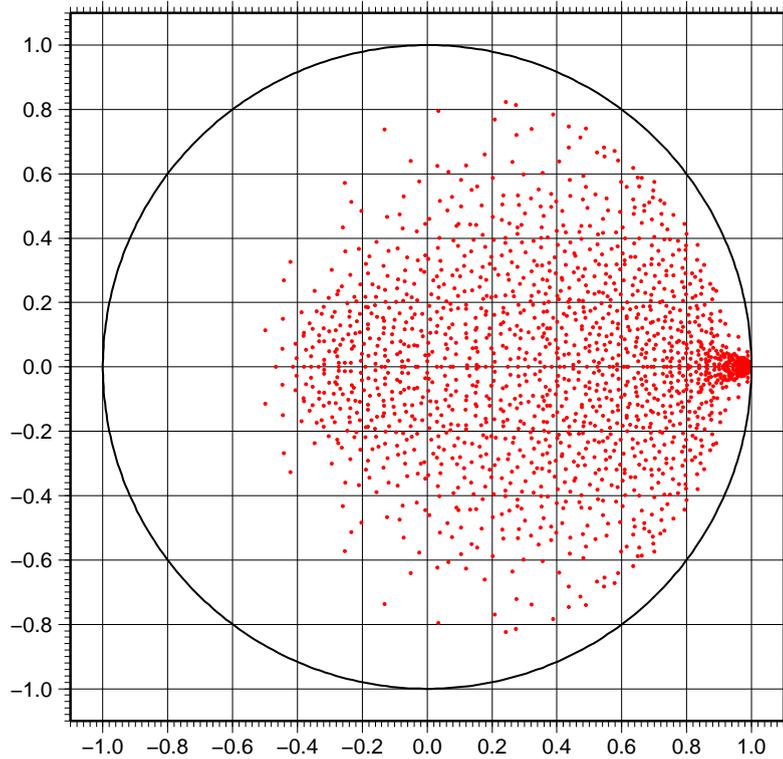
$$\mathbf{x}_t = \mathbf{B}\mathbf{x}_{t-1} \quad (\text{A.13})$$

kann gleichfalls in der Form von Gleichung (A.6) transformiert werden, so dass sich

$$\mathbf{z}_t = \Lambda\mathbf{z}_{t-1} \quad (\text{A.14})$$

mit der Matrix der Eigenwerte $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ergibt. Die Transitionsmatrix des transformierten Systems lautet dann

$$\Phi(t-t_0) = \Lambda^{t-t_0}. \quad (\text{A.15})$$

Abbildung A.1: Eigenwerte der Prozessdynamikmatrix \mathbf{B} in der komplexen Zahlenebene.

Wieder gibt die Betrachtung der Eigenwerte Aufschluss über das Verhalten des Prozesses:

1. Mit $|\lambda_i| < 1$ für alle i konvergiert der Prozess gegen die Ruhelage \mathbf{x}_r . Der Prozess heißt asymptotisch stabil. Für Eigenwerte größer eins ist der Prozess instabil und die Norm des Zustandsvektors steigt über alle Grenzen.
2. Im Falle komplexer Eigenwerte $\lambda = \lambda^{\text{Re}} + i\lambda^{\text{Im}}$, die immer konjugiert komplex auftreten, ist dem Abklingen des Zustandsvektors eines asymptotisch stabilen Prozesses eine Schwingung überlagert und die Komponenten des Zustandsvektors sind nicht vollständig entkoppelt.

Mit der Transformationsmatrix aus Gleichung (A.10) ergibt sich für die Transitionsmatrix des zeitdiskreten Systems (hier beispielhaft für die zueinander konjugiert komplexen Eigenwerte λ_1 und λ_2):

$$\Phi(t - t_0) = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^{t-t_0} \cos \lambda_1^{\text{Im}}(t - t_0) & |\lambda_1|^{t-t_0} \sin \lambda_1^{\text{Im}}(t - t_0) & & & \\ -|\lambda_1|^{t-t_0} \sin \lambda_1^{\text{Im}}(t - t_0) & |\lambda_1|^{t-t_0} \cos \lambda_1^{\text{Im}}(t - t_0) & & & \\ & & |\lambda_3|^{t-t_0} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & |\lambda_n|^{t-t_0} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

Die Schwingungsdauer T der jeweils gekoppelten Einträge des Zustandsvektors lässt sich aus dem Imaginärteil der zueinander konjugiert komplexen Eigenwerte ablesen:

$$T_{i,i+1} = \frac{1}{\lambda_i^{\text{Im}}}. \quad (\text{A.17})$$

Für die Halbwertszeit $T_{1/2}$, also die Zeit, bei der der Startwert \mathbf{x}_0 auf die Hälfte seines Ursprungswertes abgeklingen ist, ergibt sich aus dem Betrag des jeweiligen Eigenwerts λ_i :

$$T_{1/2,i} = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln |\lambda_i|}. \quad (\text{A.18})$$

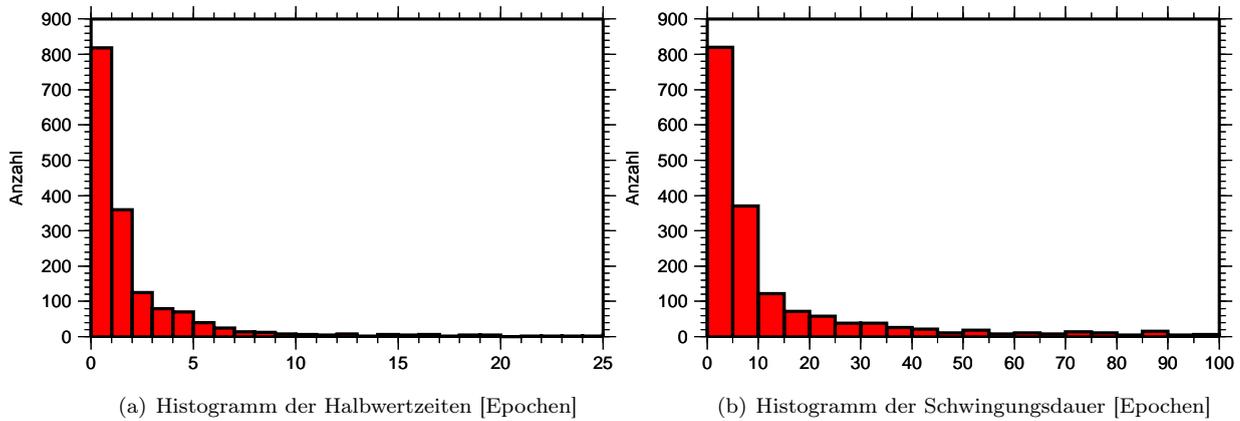


Abbildung A.2: Analyse der Eigenwerte. Dargestellt sind die Histogramme der Halbwertzeiten zur Beschreibung des Abklingverhaltens und das Histogramm der Schwingungsdauer zur Beschreibung des Schwingverhaltens.

Eigenwerte der in dieser Arbeit realisierten Prozessdynamikmatrix. In Abbildung A.1 sind die Eigenwerte der in dieser Arbeit verwendeten Prozessdynamikmatrix dargestellt, deren Bestimmung in Abschnitt 4.1.2 näher beschrieben ist.

Es zeigt sich, dass alle Eigenwerte innerhalb des Einheitskreises liegen. Das gewählte Prozessmodell ist somit stabil. Es ist festzustellen, dass der weit überwiegende Teil der Eigenwerte (97 Prozent) komplex sind, was in Summe zwar einen asymptotisch abfallenden, zugleich aber auch schwingenden Verlauf erwarten lässt. Eine physikalische Deutung der Eigenwerte der Prozessdynamikmatrix erlaubt der Blick auf die Halbwertzeiten und die Schwingungsdauer der einzelnen Koeffizienten.

In Abbildung A.2 sind hierzu die entsprechenden Histogramme dargestellt. Es zeigt sich, dass mehr als die Hälfte der Koeffizienten eine modellierte Halbwertzeit von maximal einem Tag haben (Abbildung A.2(a)), was so auch zu erwarten gewesen ist. 87 Prozent haben Abklingzeiten von 5 Tagen oder weniger. Was dies für den zeitlichen Verlauf der Koeffizienten bedeutet, illustriert die Abbildung A.3.

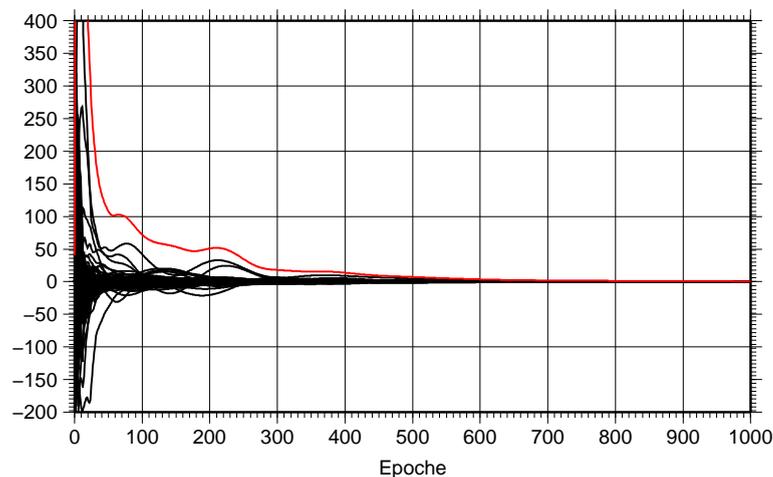


Abbildung A.3: Simulierter Verlauf der 1677 Koeffizienten des Zustandsvektors \mathbf{x}_t (schwarz). In rot zusätzlich eingetragen ist die L_2 -Norm des Zustandsvektors, die die räumliche Variabilität des Signals (RMS) widerspiegelt.

Hier wurde Gleichung (A.13) für 1000 Epochen ausgewertet, wobei als Startwert des Zustandsvektors $\mathbf{x}_0 = (1, \dots, 1)^T$ verwendet wurde. In schwarz ist nun der zeitliche Verlauf der 1677 dimensionslosen Komponenten des Zustandsvektors für 1000 Epochen dargestellt.

Es zeigt sich ein exponentielles Abklingen der Koeffizienten mit der Zeit, dem für einen Großteil der Koeffizienten eine Schwingung überlagert ist. Einige wenige Koeffizienten weisen hier ein sehr schwaches Abklingen bei gleichzeitig großer Amplitude der Schwingung auf, was im Bereich zwischen $t = 150$ und $t = 250$ gut illustriert wird, wo diese stark hervortreten.

Die Gesamtheit der Koeffizienten, hier dargestellt als L_2 -Norm in rot, weist im Wesentlichen ebenfalls einen exponentiell abklingenden Verlauf auf, der wiederum durch eine Schwingung überlagert ist. Die Abklingzeit des Prozesses ist recht lang: Die Norm des Zustandsvektors, die die räumliche Variabilität des Signals widerspiegelt, benötigt circa 800 Epochen, bis sie auf ein Prozent ihres Ursprungswertes abgeklungen ist. Die Korrelation in der Zeit ist also für einige Komponenten des Zustandsvektors relativ hoch, diese ändern sich also im zeitlichen Verlauf von einer zur nächsten Epoche nur wenig. Dies erklärt auch das Verhalten des Filters bei einer Datenlücke, wie es in Abschnitt 4.3.3 erläutert wurde. In Abbildung 4.16(a) erkennt man deutlich, dass es beim Vorliegen einer Datenlücke nicht zu einem exponentiellen Abfall des Zustandsvektors auf Null kommt, sondern dieser Abfall von einer zusätzlichen Schwingung überlagert ist.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Simulation zu Aliasing-Fehlern bei der GRACE-Datenprozessierung	4
2.1	Zur Herleitung der Druckgradientkraft	14
2.2	Zur Kontinuitätsgleichung in Flussform	16
2.3	Die Prozesse im kontinentalen Wasserkreislauf	27
2.4	Modellierte Wasserspeicher des WGHM	28
3.1	Stufen der Modellvereinfachung	41
3.2	Illustration des zeitlichen Verlaufs für A-priori- und A-posteriori-Zustandsschätzung . . .	47
3.3	Prinzipdarstellung des Kalman-Filters	49
3.4	Glättung durch Vorwärts- und Rückwärtsfilterung	51
4.1	Zeitliche Variabilität des Referenzsignals $\mathbf{x}_t^{\text{ref}}$	58
4.2	Zeitliche Variabilität des Prozesssignals $\mathbf{x}_t^{\text{AOH}}$	60
4.3	Differenz der Variabilität von Referenz- und Prozesssignal	61
4.4	Untersuchte Einzelpunkte	62
4.5	Simulierter Zufallsprozess und sein Leistungsdichtespektrum	63
4.6	Zeitliche Variabilität des simulierten Prozesssignals	64
4.7	Test für verschiedene Startkovarianzmatrizen	65
4.8	Test für verschiedene Start-Zustandsvektoren	66
4.9	A-priori- und a-posteriori-Schätzung einer willkürlich gewählten Epoche	67
4.10	Verbesserung der Prädiktion durch Beobachtungen	67
4.11	Zeitlicher Verlauf im Punkt P_1	69
4.12	Zeitlicher Verlauf für weitere Punkte	70
4.13	Korrelationskoeffizient für Prädiktion und Filterung	71
4.14	Fehler-RMS für Prädiktion und Filterung	71
4.15	Signalreduktion für Prädiktion und Filterung	72
4.16	Verhalten bei fehlenden Beobachtungen	73
4.17	Fehler-RMS für Glättung	74
4.18	Fehler-RMS für Glättung bei angepasstem Prozessrauschen	76
4.19	Leistungsdichtespektrum der SST-Residuen	77

4.20	GRACE-Beitrag zum Korrekturschritt	78
4.21	GRACE-Beitrag zum Korrekturschritt für erhöhtes Prozessrauschen	79
4.22	Wissensgewinn durch GRACE-Beobachtungen	80
5.1	Bestimmung des stochastischen Modells für die GRACE-Beobachtungen	82
5.2	Zeitreihen für ausgewählte GPS-Stationen	86
5.3	Vergleich zwischen GPS- und GRACE-Signal	88
5.4	AOD1B-Verbesserung durch GRACE-Tageslösungen (für GPS-Zeitreihen)	89
5.5	AOD1B-Verbesserung durch GRACE-Tageslösungen (für OBP-Zeitreihen)	91
5.6	Zeitreihen für ausgewählte OBP-Stationen	92
5.7	GRACE-Monatslösung mit und ohne Kalman-Filter-Dealasing	94
5.8	Fehler-Gradvarianzen einer Monatslösung	94
A.1	Eigenwerte der Prozessdynamikmatrix \mathbf{B} in der komplexen Zahlenebene	101
A.2	Histogramme von Halbwertzeit und Schwingungsdauer	102
A.3	Simulierter Verlauf der Koeffizienten	102

Tabellenverzeichnis

2.1	Größenordnung verschiedener Quellen zeitlicher Schwerevariationen	11
4.1	Ergebnisse der Glättung für erhöhtes Prozessrauschen und isotropes Grundrauschen . . .	75

Abkürzungsverzeichnis

AOD1B	Atmosphären- und Ozean-Dealiasing für GRACE Level-1B-Daten
CHAMP	Challenging Minisatellite Payload (Satellitenmission)
CSR	Centre for Space Research, Universität Texas, Austin
DLR	Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt
ECMWF	European Centre for Medium Range Weather Forecasts
EGM08	European Gravitational Model 2008
EOT08a	Empirical Ocean Tide Model
ewh	Äquivalente Wasserhöhe
FESOM	Finite Element Sea-Ice Ocean Model
GFZ	Geoforschungszentrum Potsdam
GLDAS	Global Land Data Assimilation Model
GNSS	Global Navigation Satellite System
GMM	Gauss-Markov-Modell
GPS	Global Positioning System
GRACE	Gravity Recovery and Climate Experiment (Satellitenmission)
ICRF	International Celestial Reference Frame
IERS	International Earth Rotation and Reference Systems Service
IFS	Integrated Forecast System
IGS	International GNSS Service
IPCC	Intergovernmental Panel on Climate Change
ITRF	International Terrestrial Reference Frame
JPL	Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology
NASA	National Aeronautics and Space Administration
NCEP	National Centers for Environmental Prediction
OBP	Ozeanbodendruck
OMCT	Ocean Model for Circulation and Tides
SDS	Science Data Service
WGHM	WaterGAP Global Hydrology Model

Literaturverzeichnis

- Bergmann, I., H. Dobsław und M. Thomas (2011). *Variability of the Antarctic Circumpolar Current deduced from time-variable GRACE gravity fields*. Geophysical Research Abstracts, 13(EGU2011-11948).
- Bettadpur, S., B. Tapley, M. Watkins und F. Flechtner (2011). *GRACE mission: assessments of recent developments and future plans*. Geophysical Research Abstracts, 13(EGU2011-1534).
- Biancale, R., und A. Bode (2006). *Mean annual and seasonal atmospheric tide models based on 3-hourly and 6-hourly ECMWF surface pressure data*. Technischer Bericht, Geoforschungszentrum, Potsdam. ebooks.gfz-potsdam.de/pubman/item/escidoc:8692:2/component/escidoc:8691/0601.pdf.
- Boening, C., T. Lee und V. Zlotnicki (2011). *A record-high ocean bottom pressure in the South Pacific observed by GRACE*. Geophysical Research Letters, 38. doi: 10.1029/2010GL046013.
- Bonin, J., und D. Chambers (2011). *Evaluation of high-frequency oceanographic signal in ITG-Grace2010 using altimetry*. Geophysical Research Abstracts, 13(EGU2011-3803).
- Carrère, L., und F. Lyard (2003). *Modeling the barotropic response of the global ocean to atmospheric wind and pressure forcing - comparisons with observations*. Geophysical Research Letters, 30(1275). doi: 10.1029/2002GL016473.
- Chen, J. L., C. R. Wilson, D. Blankenship und B. D. Tapley (2009). *Accelerated Antarctic ice loss from satellite gravity measurements*. Nature Geoscience, 2. doi: 10.1038/ngeo694.
- Deardorff, J. W. (1978). *Efficient prediction of ground-surface temperature and moisture, with inclusion of a layer of vegetation*. Journal of Geophysical Research, 83(C4):1889–1903.
- Desai, S. D. (2002). *Observing the pole tide with satellite altimetry*. Journal of Geophysical Research (Oceans), 107(3186). doi: 10.1029/2001JC001224.
- Ditmar, P., R. Klees und X. Liu (2006). *Frequency-dependent data weighting in global gravity field modeling from satellite data contaminated by non-stationary noise*. Journal of Geodesy, 81(1):81–96. doi: 10.1007/s00190-006-0074-4.
- Dobsław, H., und M. Thomas (2007). *Simulation and observation of global ocean mass anomalies*. Journal of Geophysical Research, 112(C05040). doi: 10.1029/2006JC004035.
- Döll, P., und B. Lehner (2002). *Validation of a new global 30-min drainage direction map*. Journal of Hydrology, 258(1–4):214–231.
- Döll, P., B. Lehner und F. Kaspar (2002). *Global modeling of groundwater recharge*. In: *Proceedings of Third International Conference on Water Resources and the Environment Research*, Band 1, S. 27–31.
- Döll, P., F. Kaspar und B. Kaspar (2003). *A global hydrological model for deriving water availability indicators: model tuning and validation*. Journal of Hydrology, 270:105–134. doi: 10.1016/S0022-1694(02)00283-4.
- Dong, D., T. Yunck und M. Hefflin (2003). *Origin of the International Terrestrial Reference Frame*. Journal of Geophysical Research, 108. doi: 10.1029/2002JB002035.
- Dow, J. M., R. E. Neilan und C. Rizos (2009). *The International GNSS Service in a changing landscape of Global Navigation Satellite Systems*. Journal of Geodesy, 83:191–198. doi: 10.1007/s00190-008-0300-3.
- ECMWF, Research Department (2008). *IFS Documentation – Part III: Dynamics and Numerical Procedures (Cy33r1)*. www.ecmwf.int/research/ifsdocs.
- Eicker, A. (2008). *Gravity Field Refinement by Radial Basis Functions from In-situ Satellite Data*. Dissertation, Universität Bonn.

- Einarsson, I., A. Hoechner, R. Wang und J. Kusche (2010). *Gravity changes due to the Sumatra-Andaman and Nias earthquakes as detected by the GRACE satellites: a reexamination*. Geophysical Journal International, 183. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04756.x.
- Farrell, W. E. (1972). *Deformation of the Earth by surface loads*. Reviews of Geophysics and Space Physics, 10(3):761–797.
- Flechtner, F. (2007). *AOD1B Product Description Document for Product Releases 01 to 04*. Technischer Bericht, Geoforschungszentrum Potsdam.
- Flechtner, F., C. Dahle, K. H. Neumayer, R. König und C. Förste (2010). *The Release 04 CHAMP and GRACE EIGEN gravity field models*. In: Stroink, L., V. Mosbrugger, G. Wefer, F. Flechtner, T. Gruber, A. Güntner, M. Manda, M. Rothacher, T. Schöne und J. Wickert (Hrsg.), *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*, Advanced Technologies in Earth Sciences, S. 41–58. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-10228-8. doi: 10.1007/978-3-642-10228-8_4.
- Förste, C., R. Schmidt, R. Stubenvoll, F. Flechtner, U. Meyer, R. König, H. Neumayer, R. Biancale, J.-M. Lemoine, S. Bruinsma, S. Loyer, F. Barthelmes und S. Esselborn (2008). *The GeoForschungsZentrum Potsdam/Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale satellite-only and combined gravity field models: EIGEN-GL04S1 and EIGEN-GL04C*. Journal of Geodesy, 82(6):331–346. ISSN 0949-7714. doi: 10.1007/s00190-007-0183-8.
- Gegout, P. (2005). *Load love numbers*. http://gemini.gsfc.nasa.gov/aplo/Load_Love2_CM.dat.
- Gelb, A. (1974). *Applied Optimal Estimation*. The M.I.T Press, Cambridge, Massachusetts, and London, England.
- Gill, A. E. (1982). *Atmosphere-Ocean Dynamics*. Academic Press, New York.
- Han, S.-C., C. K. Shum, M. Bevis C. Ji und C.-Y. Kuo (2006). *Crustal Dilatation Observed by GRACE After the 2004 Sumatra-Andaman Earthquake*. Science, 313(5787):658–662. doi: 10.1126/science.1128661.
- Heiskanen, W. A., und H. Moritz (1967). *Physical Geodesy*. Freeman, San Francisco.
- Hofmann-Wellenhof, B., H. Lichtenegger und J. Collins (1997). *Global Positioning System – Theory and Practice*. 4. Auflage. Springer, Wien.
- Hunger, M., und P. Döll (2008). *Value of river discharge data for global-scale hydrological modeling*. Hydrology and Earth System Sciences, 12(3):841–861. ISSN 1027-5606. <http://www.hydrol-earth-syst-sci.net/12/841/2008/>.
- Ilk, K. H. (1984). *On the analysis of satellite-to-satellite tracking data*. In: *Proceedings of the International Symposium on Space Techniques for Geodesy*, S. 59–64, Sopron, Hungary.
- Ilk, K. H., J. Flury, R. Rummel, P. Schwintzer, W. Bosch, C. Haas, J. Schröter, D. Stammer, W. Zahel, H. Miller, R. Dietrich, P. Huybrechts, H. Schmeling, D. Wolf, H. J. Götze, J. Riegger, A. Bardossy, A. Güntner und Th. Gruber (2004). *Mass Transport and Mass Distribution in the Earth System – Proposal for a German Priority Research Program*, 2004.
- IPCC-Report (2007). *Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, und New York, USA.
- Jäggi, A., U. Hugentobler, H. Bock und G. Beutler (2007). *Precise orbit determination for GRACE using undifferenced or doubly differenced GPS data*. Advances in Space Research, 39:1612–1619. doi: 10.1016/j.asr.2007.03.012.
- Jekeli, C. (1999). *The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite tracking*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 7582:85–100.
- Kalman, R. E. (1960). *A new approach to linear filtering and prediction problems*. Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, 82:35–45.

- Kalman, R. E., und R. S. Bucy (1961). *New results in linear filtering and prediction theory*. Transactions of the ASME, Series D, Journal of Basic Engineering, 83:95–107.
- Kalnay, E., M. Kanamitsu, R. Kistler, W. Collins, D. Deaven, L. Gandin, M. Iredell, S. Saha, G. White, J. Woollen, Y. Zhu, M. Chelliah, W. Ebisuzaki, W. Higgins, J. Janowiak, K. C. Mo, C. Ropelewski, J. Wang, A. Leetmaa, R. Reynolds, R. Jenne und D. Joseph (1996). *The NCEP/NCAR 40-Year Reanalysis Project*. Bulletin of the American Meteorological Society, 77(3):437–471.
- Kang, Z., B. Tapley, S. Bettadpur, J. Ries, P. Nagel und R. Pastor (2006a). *Precise orbit determination for the GRACE mission using only GPS data*. Journal of Geodesy, 80:322–331. doi: 10.1007/s00190-006-0073-5.
- Kang, Z., B. Tapley, S. Bettadpur, J. Ries und P. Nagel (2006b). *Precise orbit determination for GRACE using accelerometer data*. Advances in Space Research, 38:2131–2136. doi: 10.1016/j.asr.2006.02.021.
- Kaspar, F. (2004). *Entwicklung und Unsicherheitsanalyse eines globalen hydrologischen Modells*. Dissertation, Universität Kassel.
- Khan, S. A., J. Wahr, M. Bevis, I. Velicogna und E. Kendrick (2010). *Spread of ice mass loss into northwest Greenland observed by GRACE and GPS*. Geophysical Research Letters, 37. doi: 10.1029/2010GL042460.
- Kim, J. R. (2000). *Simulation Study of a Low-Low Satellite-to-Satellite Tracking Mission*. Dissertation, Universität von Texas, Austin.
- Klose, B. (2008). *Meteorologie – Eine interdisziplinäre Einführung in die Physik der Atmosphäre*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York. doi: 10.1007/978-3-540-71309-8.
- Koch, K.-R. (1997). *Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen*. 3. Auflage. Dümmler Verlag, Bonn.
- Kraus, H. (2004). *Die Atmosphäre der Erde – Eine Einführung in die Meteorologie*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Kurtenbach, E., T. Mayer-Gürr und A. Eicker (2009). *Deriving daily snapshots of the Earth’s gravity field from GRACE L1B data using Kalman filtering*. Geophysical Research Letters, 36(L17102). doi: 10.1029/2009GL039564.
- Kusche, J. (2007). *Approximate decorrelation and non-isotropic smoothing of time-variable GRACE-type gravity field models*. Journal of Geodesy, 81(11):733–749. doi: 10.1007/s00190-007-0143-3.
- Lemoine, J.-M., S. Bruinsma, S. Loyer, R. Biancale, J.-C. Marty, F. Perosanz und G. Balmino (2007). *Temporal gravity field models inferred from GRACE data*. Advances in Space Research, 39:1620–1629. doi: 10.1016/j.asr.2007.03.062.
- Liu, X., P. Ditmar, C. Siemes, D. C. Slobbe, E. Revtova, R. Klees, R. Riva und Q. Zhao (2010). *DEOS Mass Transport model (DMT-1) based on GRACE satellite data: methodology and validation*. Geophysical Journal International, 181. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04533.x.
- Löcher, A. (2010). *Möglichkeiten der Nutzung kinematischer Satellitenbahnen zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde*. Dissertation, Universität Bonn.
- Ludyk, G. (1990). *CAE von dynamischen Systemen*. 1. Auflage. Springer, Berlin.
- Luthcke, S. B., D. D. Rowlands, F. G. Lemoine, S. M. Klosko, D. Chinn und J. J. McCarthy (2006). *Monthly spherical harmonic gravity field solutions determined from GRACE inter-satellite range-rate data alone*. Geophysical Research Letters, 33(L02402). doi: 10.1029/2005GL024846.
- Luthcke, S. B., A. A. Arendt, D. D. Rowlands, J. J. McCarthy und C. F. Larsen (2008). *Recent glacier mass changes in the Gulf of Alaska region from GRACE mascon solutions*. Journal of Glaciology, 54 (188). doi: 10.3189/002214308787779933.

- Macrander, A., C. Böning, O. Boebel und J. Schröter (2010). *Validation of GRACE gravity fields by in-situ data of ocean bottom pressure*. In: Stroink, L., V. Mosbrugger, G. Wefer, F. Flechtner, T. Gruber, A. Güntner, M. Manda, M. Rothacher, T. Schöne und J. Wickert (Hrsg.), *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*, Advanced Technologies in Earth Sciences, S. 169–185. Springer Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-642-10228-8. doi: 10.1007/978-3-642-10228-8_14.
- Maybeck, P. S. (1979). *Stochastic Models, Estimation, and Control*, Band 141 der Reihe *Mathematics in Science and Engineering*.
- Mayer-Gürr, T. (2006). *Gravitationsfeldbestimmung aus der Analyse kurzer Bahnbögen am Beispiel der Satellitenmissionen CHAMP und GRACE*. Dissertation, Universität Bonn.
- Mayer-Gürr, T., E. Kurtenbach und A. Eicker (2010a). *Different representations of the time variable gravity field to reduce the aliasing problem in GRACE data analysis*. In: *Proceedings of the VII Hotine-Marussi Symposium on Theoretical and Computational Geodesy (im Druck)*. Springer Berlin Heidelberg.
- Mayer-Gürr, T., A. Eicker, E. Kurtenbach und K. H. Ilk (2010b). *ITG-GRACE: Global static and temporal gravity field models from GRACE data*. In: Stroink, L., V. Mosbrugger, G. Wefer, F. Flechtner, T. Gruber, A. Güntner, M. Manda, M. Rothacher, T. Schöne und J. Wickert (Hrsg.), *System Earth via Geodetic-Geophysical Space Techniques*. Springer. doi: 10.1007/978-3-642-10228-8_13.
- McCarthy, D. D., und G. Petit (Hrsg.). *IERS Conventions 2003*. Number 32 in IERS Technical Notes. Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main.
- Morison, J., J. Wahr, R. Kwok und C. Peralta-Ferriz (2007). *Recent trends in Arctic Ocean mass distribution revealed by GRACE*. *Geophysical Research Letters*, 34(L07602). doi: 10.1029/2006GL029016.
- Moritz, H. (1980). *Advanced Physical Geodesy*. Wichmann, Karlsruhe.
- Niemeier, W. (2002). *Ausgleichsrechnung*. Walter de Gruyter, Berlin.
- Pavlis, N. K., S. A. Holmes, S. C. Kenyon und J. K. Factor (2008). *An Earth gravitational model to degree 2160: EGM2008*. *Geophysical Research Abstracts*, 10(EGU2008-A-01891).
- Peixoto, A. P., und A. H. Oort (1991). *Physics of Climate*. 2. Auflage. Springer, New York Berlin Heidelberg. ISBN 978-0883187128.
- Peralta-Ferriz, C., und J. Morison (2010). *Understanding the annual cycle of the Arctic Ocean bottom pressure*. *Geophysical Research Letters*, 37. doi: 10.1029/2010GL042827.
- Persson, A., und F. Grazzini (2005). *User Guide to ECMWF forecast products*. www.ecmwf.int/products/forecasts.
- Peters, T. (2007). *Modellierung zeitlicher Schwerefeldvariationen und ihre Erfassung mit Methoden der Satellitengravimetrie*. Dissertation, Technische Universität München.
- Pickard, G. L., und W. J. Emery (1990). *Descriptive Physical Oceanography – An Introduction*. Pergamon Press, Oxford.
- Priestley, C. H., und R. J. Taylor (1972). *On the assessment of surface heat flux and evaporation using large-scale parameters*. *Monthly Weather Review*, 100(1):81–92.
- Rauch, H., F. Tung und C. Striebel (1965). *Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems*. *AIAA Journal*, 3(8):1445–1450.
- Reigber, C. (1969). *Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen*, Band 137 der Reihe C. Deutsche Geodätische Kommission, München.
- Rietbroek, R., M. Fritsche, S.-E. Brunnabend, I. Daras, J. Kusche, J. Schröter, F. Flechtner und R. Dietrich (2011). *Global surface mass from a new combination of GRACE, modelled OBP and reprocessed GPS data*. *Journal of Geodynamics*. doi: 10.1016/j.jog.2011.02.003.

- Rodell, M., P. R. Houser, U. Jambor, J. Gottschalck, K. Mitchell, C.-J. Meng, K. Arsenault, B. Cosgrove, J. Radakovich, M. Bosilovich, J. K. Entin, J. P. Walker, D. Lohmann und D. Toll (2004). *The Global Land Data Assimilation System*. Bulletin of the American Meteorological Society, 85(3):381–394.
- Rodell, M., I. Velicogna und J. S. Famiglietti (2009). *Satellite-based estimates of groundwater depletion in India*. Nature, 460. doi: 10.1038/nature08238.
- Rowlands, D. D., S. B. Luthcke, S. M. Klosko, F. G. Lemoine, D. S. Chinn, J. J. McCarthy, C. M. Cox und O. B. Anderson (2005). *Resolving mass flux at high spatial and temporal resolution using GRACE intersatellite measurements*. Geophysical Research Letters, 32(L04310). doi: 10.1029/2004GL021908.
- Rowlands, D. D., S. B. Luthcke, J. J. McCarthy, S. M. Klosko, D. S. Chinn, F. G. Lemoine, J.-P. Boy und T. J. Sabaka (2010). *Global mass flux solutions from GRACE: A comparison of parameter estimation strategies - Mass concentrations versus Stokes coefficients*. Journal of Geophysical Research, 115 (B01403). doi: 10.1029/2009JB006546.
- Sabaka, T. J., D. D. Rowlands, S. B. Luthcke und J.-P. Boy (2010). *Improving global mass flux solutions from Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) through forward modeling and continuous time correlation*. Journal of Geophysical Research (Solid Earth), 15(B11403):973–988. doi: 10.1029/2010JB007533.
- Savcenko, R., und W. Bosch (2008). *EOT08a – Empirical ocean tide model from multi-mission satellite altimetry*. Technischer Bericht, Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut, München. <ftp.dgfi.badw.de/pub/EOT08a/doc/EOT08a.pdf>.
- Schneider, M. (1968). *A General Method of Orbit Determination*. In: *Library Translation*, Band 1279. Royal Aircraft Establishment, Ministry of Technology, Farnborough, England.
- Schrama, E. J. O., und B. Wouters (2011). *Revisiting Greenland ice sheet mass loss observed by GRACE*. Journal of Geophysical Research (Solid Earth), 116. doi: 10.1029/2009JB006847.
- Sharifi, M. A., und W. Keller (2005). *GRACE gradiometer*. In: Jekeli, C., L. Bastos und J. Fernandes (Hrsg.), *Gravity Geoid and Space Mission, GGSM 2004*, Band 129 der Reihe *International Association of Geodesy Symposia*, S. 42–47. Springer.
- Simon, D. (2006). *Optimal State Estimation: Kalman, H Infinity, and Nonlinear Approaches*. Wiley-Interscience.
- Song, Y. T., und F. Colberg (2011). *Deep ocean warming assessed from altimeters, Gravity Recovery and Climate Experiment, in situ measurements, and a non-Boussinesq ocean general circulation model*. Journal of Geophysical Research (Oceans), 116. doi: 10.1029/2010JC006601.
- Standish, E. M. (1998). *JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405*. Jet Propulsion Laboratory Interoffice Memorandum, 312.F-98-048.
- Stewart, R. H. (2008). *Introduction to Physical Oceanography*. http://oceanworld.tamu.edu/home/course_book.htm.
- Swenson, S., und J. Wahr (2006). *Post-processing removal of correlated errors in GRACE data*. Geophysical Research Letters, 33(L084202).
- Tapley, B. D., S. Bettadpur, M. Watkins und C. Reigber (2004). *The gravity recovery and climate experiment: Mission overview and early results*. Geophysical Research Letters, 31(L09607). doi: 10.1029/2004GL019920.
- Tesmer, V., P. Steigenberger, T. van Dam und T. Mayer-Gürr (2011). *Vertical deformations from homogeneously processed GRACE and global GPS long-term series*. Journal of Geodesy. doi: 10.1007/s00190-010-0437-8.
- Van Dam, T., J. Wahr und D. Lavalée (2007). *A comparison of annual vertical crustal displacements from GPS and Gravity Recovery and Climate Experiment (GRACE) over Europe*. Journal of Geophysical Research, 112(B03404). doi: 10.1029/2006JB004335.

- Van Helleputte, T., und P. Visser (2008). *GPS based orbit determination using accelerometer data*. Aerospace Science and Technology, 12:478–484.
- Wahr, J., M. Molenaar und F. Bryan (1998). *Time-variability of the Earth's gravity field: Hydrological and oceanic effects and their possible detection using GRACE*. Journal of Geophysical Research, 103 (B12):205–229.
- Welsh, G., und G. Bishop (2006). *An Introduction to the Kalman Filter*. Technischer Bericht, Department of Computer Science University of North Carolina, Chapel Hill.
- Werth, S., und A. Güntner (2010). *Calibration analysis for water storage estimations of the global hydrological model WGHM*. Hydrology and Earth System Sciences, 14:59–78.
- Xu, G. (2007). *GPS – Theory, Algorithms and Applications*. 2. Auflage. Springer, Berlin.
- Zaitchik, B. F., M. Rodell und R. H. Reichle (2008). *Assimilation of GRACE terrestrial water storage data into a land surface model: Results for the Mississippi river basin*. Journal of Hydrometeorology, 9:535–548.
- Zenner, L., T. Gruber, G. Beutler und A. Jäggi (2010). *Propagation of atmospheric model errors to gravity potential harmonics – impact on GRACE de-aliasing*. Geophysical Journal International, 182 (2):797–807. doi: 10.1111/j.1365-246X.2010.04669.x.