

**Phasengenaue Impedanzspektroskopie
und -tomographie
für geophysikalische Anwendungen**

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Egon Zimmermann

aus

Eschweiler

Bonn 2010

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Kemna
2. Gutachter: Prof. Dr. Jan van der Kruk

Tag der Promotion: 14.02.2011

Erscheinungsjahr: 2011

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung.....	1
1.1 Hintergrund, Definitionen und Geschichte.....	1
1.2 Motivation und Ziele.....	3
2. Grundlagen elektrischer Gesteinseigenschaften.....	4
2.1 Komplexe elektrische Leitfähigkeit.....	4
2.2 Leitfähigkeitsmodelle von Gesteinen.....	5
2.2.1 Leitfähigkeit des wässrigen Porenelektrolytes.....	6
2.2.2 Leitfähigkeit des gesättigten Gesteins.....	7
2.2.3 Cole-Cole-Modell.....	8
3. Impedanzspektroskopie.....	12
3.1 Grundlegende Messtechnik.....	12
3.2 Messsystem.....	14
3.3 Fehlerkorrektur auf der Basis eines elektrischen Modells.....	18
3.3.1 Berechnung des wahren Anregungsstromes.....	19
3.3.2 Genauigkeit und Korrektur der Spannungsmessung.....	20
3.3.3 Genauigkeit der Impedanzmessung.....	21
3.3.4 Bestimmung tolerierbarer Impedanzwerte.....	22
3.3.5 Gleichtaktfehler.....	24
3.4 Elektrodeneffekte.....	26
3.4.1 Kontaktimpedanzen der Stromelektroden.....	26
3.4.2 Phasenfehler aufgrund inhomogener Kontaktimpedanzen.....	28
3.4.3 Polarisierungseffekt der Spannungselektroden.....	31

3.4.4 Elektrodenrauschen und Störungen.....	34
3.5 Optimales Probenhalterdesign.....	35
3.6 Parasitäre Kapazitäten der Probe.....	36
3.7 Induktive Effekte.....	37
3.8 Skin-Effekt.....	39
3.9 Messungen an inhomogenen Proben.....	40
3.10 Driftkorrektur und Standardabweichung.....	41
3.11 Analyse der Messdaten.....	44
3.12 Testmessungen an Phantomen.....	46
3.12.1 Elektrische Netzwerke.....	46
3.12.2 Wasserprobe.....	49
3.12.3 Gesättigter Quarzsand.....	50
3.12.4 Metall im Wasser oder gesättigtem Sand.....	52
3.12.5 Kartoffel.....	55
4.Impedanztomographie.....	59
4.1 Grundlegende Messtechnik.....	59
4.2 Hardware des Impedanztomographen.....	60
4.3 Fehlerkorrektur auf der Basis eines elektrischen Modells.....	65
4.3.1 Berechnung der Anregungsströme.....	65
4.3.2 Genauigkeit und Korrektur der Spannungsmessung.....	67
4.3.3 Stromumschaltung.....	68
4.3.4 Detektion der parasitären Ströme und Impedanzen.....	72
4.3.5 Gleichtaktfehler.....	73

4.3.6 Kapazitätsmessung der Stromkanäle.....	74
4.4 Induktive Kopplung und Skin-Effekt.....	75
4.5 Modellierung.....	76
4.5.1 Finite-Elemente-Modellierung der Probe.....	76
4.5.2 Modellierung der parasitären Ableitströme.....	83
4.5.3 Berechnung der Transferimpedanzen.....	84
4.5.4 Singularität der Punktelektroden.....	84
4.6 Rekonstruktion.....	85
4.6.1 Gauß-Newton-Verfahren.....	85
4.6.2 Regularisierungsmatrix.....	88
4.6.3 Jacobi-Matrix.....	91
4.7 Messkonfiguration und Messzeit.....	95
4.8 Testmessungen.....	99
4.8.1 Messung am Widerstand.....	99
4.8.2 Messung am Netzwerk D01 und D02.....	100
4.8.3 Phasenmessung an einer Wasserprobe.....	101
4.8.4 Überprüfung der 2D- und 3D-FEM-Berechnung.....	104
4.8.5 Test der Eingangsimpedanz-Modellierung.....	107
4.8.6 Test der 2D- und 3D-Rekonstruktion.....	110
4.8.7 Messungen an Phantomen.....	112
5.Zusammenfassung.....	119
6.Diskussion und Ausblick.....	124
Literatur.....	127

Anhang A: Berechnung der Abtastrate.....	136
Anhang B: Berechnung der Cole-Cole-Parameter.....	136
Anhang C: Symbole und Abkürzungen.....	139

1. Einleitung

1.1 Hintergrund, Definitionen und Geschichte

In den letzten Jahren werden zunehmend Böden, Sedimente und Gesteine auf Basis von Impedanzspektren charakterisiert. Ursprünglich wurde das Impedanzspektrum, das in der geophysikalischen Gesellschaft auch unter dem Namen Spektral Induzierte Polarisation (SIP) bekannt ist, zur Untersuchung von mineralisierten Gesteinen, die elektrisch leitende Mineralkörnern aufweisen, verwendet (Pelton et al. 1978). Bei diesen Gesteinen entsteht die Polarisation an der Grenzfläche zwischen den elektrisch leitenden Mineralkörnern und den elektrolytisch leitenden flüssigkeitsgefüllten Poren. In den letzten zehn Jahren wurde die Technik auch vermehrt an Sedimentgesteinen, die keine elektronisch leitenden Komponenten aufweisen, angewendet, siehe z.B. Vanhala (1997), Slater und Lesmes (2002), Scott und Barker (2003), Binley et al. (2005), sowie Kemna et al. (2005). Die Polarisation entsteht hierbei aufgrund der Interaktion des Porenfluides (Elektrolyt) mit der elektrisch geladenen Mineraloberfläche, wo eine sogenannte elektrische Doppelschicht entsteht, siehe z.B. Leroy et al. (2008). Die Polarisation der Sedimente ist verknüpft mit der elektrischen Leitfähigkeit des Porenfluides (Lesmes und Frye 2001, Kemna et al. 2005), der Sättigung (Ulrich und Slater 2004, Binley et al. 2005) und den strukturellen und mineralogischen Eigenschaften, wie z.B. der Korngrößenverteilung (Lesmes und Morgan 2001), der Porenhalsgröße (Scott und Barker 2003, Binley et al. 2005) und dem Tonanteil (Slater und Lesmes 2002). Ein wesentliches Ziel ist hierbei die Verknüpfung der elektrischen mit der hydraulischen Leitfähigkeit, siehe z.B. Slater (2007) oder die Charakterisierung von Schadstoffen in Böden, siehe z.B. Cassiani et al. (2009). Diese Zustandsvariablen sind für viele hydrologische und umwelttechnische Fragestellung relevant.

Analog zum Impedanzspektrum ist auch der ortsabhängige komplexe spezifische Widerstand innerhalb des Untersuchungsobjektes eine wünschenswerte Information. Für die bildgebende Messung des komplexen spezifischen Widerstandes eignet sich besonders die Elektrische Impedanz Tomographie (EIT), die in der Geophysik zum Einen auf Grundlage der Induzierten Polarisation (IP) und zum Anderen auf Grundlage der Elektrischen Widerstandstomographie (ERT) entstanden ist. Eine sehr gute Übersicht bezüglich der IP-Messtechnik und deren frühen Anwendungen liefert zum Beispiel Bertin und Loeb (1976), sowie Sumner (1976) und eine Übersicht über ERT findet man z.B. in Daily et al. (2005). Parallel zu den geophysikalischen Aktivitäten wurde auch im medizinischen Bereich die elektrische Impedanztomographie weiterentwickelt. Ein Übersicht über frühe Messsysteme und Rekonstruktionsmethoden findet man zum Beispiel in Barber und Brown (1984), sowie Yorkey et al. (1987) und eine aktuellere in Holder (2005).

Der besondere Reiz der Impedanzmessung liegt nun darin, dass Impedanzspektren nicht nur von Laborproben sondern im Prinzip auch skalenübergreifend und bildgebend von der Laborskala bis zur Feldskala gemessen werden können. Die Impedanzspektroskopie (IS) sieht jedoch keine Bildgebung vor, bei der Impedanztomographie wird die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes gewöhnlich nur für eine Frequenz gemessen und bei den medizinischen Anwendungen wird unter dem Namen EIT nur der Absolutwert der Impedanz dargestellt. Die Phaseninformation wird meist nicht zur Charakterisierung der Objekte verwendet. Um nun die Vorteile der Impedanztomographie mit den Fähigkeiten der Impedanzspektroskopie bezüglich der strukturellen Charakterisierung zu kombinieren muss die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes spektral gemessen werden, sodass ein Satz von Amplituden und Phasenbildern der Verteilung für die jeweiligen Messfrequenzen entsteht. Dieser leistungsfähige Ansatz wurde erstmalig von Kemna et al. (2000) mit Hinblick auf geophysikalische Anwendungen demonstriert und später auch für medizinische Anwendungen von Yerworth et al. (2003) vorgestellt. Hierbei möchte ich auf weitere Feldstudien, wie z.B. Kemna et al. (2004), Slater und Binley (2006), Hördt et al. (2007) und Blaschek et al. (2008), hinweisen, die mit dem Ziel einer besseren Charakterisierung des Untergrundes für hydrologische und umwelttechnische Untersuchungen durchgeführt wurden.

Obwohl in den unterschiedlichen Fachbereichen die spektrale Messung des ortsabhängigen komplexen spezifischen Widerstandes als gemeinsames Ziel verfolgt wird, so sind die Randbedingungen und die daraus resultierenden Lösungsansätze doch sehr unterschiedlich. Systeme für medizinische Anwendungen werden meist für schnelle Messungen mit hohen Bildraten optimiert. Dies zeigt zum Beispiel das System von Cook et al. (1994), das damals schon einen Bilddatensatz in nur 133 ms messen konnte. Ein neueres erweitertes Multifrequenz-EIT-System von Oh et al. (2007) zielt auf die schnelle spektrale Impedanzmessung für den Frequenzbereich von 10 Hz bis 500 kHz und wird zusammen mit einer qualitativen Bildgebung mit Differenzinversion im Zeit- und Frequenzbereich vorgestellt. Für geophysikalische Anwendungen, bei der die spektrale Impedanztomographie zur Darstellung der spektral induzierten Polarisierungseigenschaften von Böden, Sedimenten und Gesteinen verwendet wird, ist eine relativ hohe Phasengenauigkeit erforderlich, da diese Materialien nur schwach polarisierbar sind. Die Phasen liegen typischerweise nur im Bereich von 1 bis 20 mrad wenn keine elektronisch leitenden Mineralien vorhanden sind. Der interessante Frequenzbereich reicht von 1 mHz bis zu einigen kHz (siehe z.B. Vanhala 1997, Scott und Barker 2005, Binley et al. 2005). Als weiterer Gegensatz zu medizinischen Anwendungen, dessen Bilder oft nur qualitativen Charakter haben, ist für geophysikalische Anwendungen die quantitative Bildgebung, wie zum Beispiel die genaue Angabe der Phasenwerte, von höchstem Interesse. Die tiefen

Frequenzen und die höhere Genauigkeitsanforderung geht jedoch im Vergleich zu medizinischen Anwendungen auf Kosten der Datenerfassungszeit.

1.2 Motivation und Ziele

Der Schwerpunkt der Arbeit ist die Phasengenauigkeit von spektroskopischen und tomographischen Impedanzmessungen zu verbessern und hierfür neue Messmethoden und -systeme zu entwickeln. Die Aussicht in naher Zukunft eine bessere Charakterisierung von schwach polarisierbaren Materialien zu ermöglichen war hierbei ein guter Grund sich intensiver mit diesem Thema zu beschäftigen. Wie schon im vorherigen Abschnitt erwähnt, ist die Phase der Impedanz bei den zu untersuchenden Materialien typischerweise kleiner als 20 mrad, manchmal sogar unterhalb von 1 mrad und der Frequenzbereich reicht von 1 mHz bis zu einigen kHz. Eine Genauigkeit von 0,1 mrad für Frequenzen bis 1 kHz wird daher als Zielgröße festgelegt.

Um diese hohe Genauigkeit zu erzielen wird zunächst ein Impedanzspektrometer entwickelt und ein optimaler Probenhalter für die schwach polarisierbaren Materialien entworfen. Begleitend dazu werden relevante Fehlerquellen untersucht und Methoden zur numerischen Korrektur der Messdaten bzw. Maßnahmen zur Vermeidung der Fehler erarbeitet. Auf Basis dessen und ergänzender Fehlerabschätzungen wird schließlich ein spektraler Impedanztomograph, einschließlich des Elektrodendesigns und angepasster Korrekturmethode, für bildgebende SIP-Messungen an Bodenmonolithen entwickelt. Ausgelegt werden die Systeme für einen Frequenzbereich von 1 mHz bis 45 kHz.

2. Grundlagen elektrischer Gesteinseigenschaften

2.1 Komplexe elektrische Leitfähigkeit

Die elektrische Leitfähigkeit σ ist eine materialspezifische Größe, die die Beziehung zwischen der Stromdichte \mathbf{J} und der Feldstärke \mathbf{E} eines elektrisch leitenden Mediums beschreibt. Diese Beziehung kann in Form der Maxwellschen Materialgleichung

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.1)$$

die auch Ohmsches Gesetz genannt wird, dargestellt werden. Hierbei ist \mathbf{r} der Ortsvektor und t die Zeit. In analoger Weise gilt für die dielektrische Leitfähigkeit ε (auch Permittivität) die Beziehung

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2.2)$$

mit \mathbf{D} der Verschiebungsstromdichte. Die Summe beider Stromdichten liefert die Gesamtstromdichte

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)_{ges} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Bei der Materialcharakterisierung wird die elektrische und dielektrische Leitfähigkeit oft als linear und isotrop angenommen und kann hierfür als skalare Funktion des Ortes betrachtet werden.

Für zeitlich harmonische (sinusförmige) Vorgänge mit der Kreisfrequenz ω ist es sinnvoll die Feldgrößen

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{J}(\mathbf{r})^* e^{j\omega t}\} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{D}(\mathbf{r})^* e^{j\omega t}\} \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \operatorname{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})^* e^{j\omega t}\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

mittels komplexer Amplituden \mathbf{J}^* , \mathbf{D}^* und \mathbf{E}^* zu beschreiben (Blume 1994). Dieser Ansatz ermöglicht die Darstellung von Gleichung (2.3) ohne Zeitableitung in der Form

$$\mathbf{J}^* = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}^*. \quad (2.5)$$

Der komplexe Zeitfaktor $e^{j\omega t}$ hebt sich bei dieser Darstellung heraus. Die Feldgrößen sind daher nur noch Funktionen des Ortes.

Die materialspezifischen elektrischen Eigenschaften

$$\sigma^* = j\omega\varepsilon^* = \sigma + j\omega\varepsilon = \sigma' + j\sigma'', \quad (2.6)$$

werden häufig auch als komplexe elektrische Leitfähigkeit σ^* oder als komplexe Permittivität ε^* ausgedrückt, siehe z.B. Fuller and Ward. (1970). Der Kehrwert der komplexen elektrischen Leitfähigkeit

$$\frac{1}{\sigma^*} = \rho^* \quad (2.7)$$

wird als komplexer elektrischer spezifischer Widerstand ρ^* bezeichnet.

Zur Unterscheidung der komplexen Anteile ist es üblich den Realteil mit einem Strich, z.B. σ' , und den Imaginärteil mit 2 Strichen, z.B. σ'' , zu kennzeichnen. Die komplexen Größen werden im folgenden Text nur noch um Verwechslungen zu vermeiden mit einem * gekennzeichnet.

2.2 Leitfähigkeitsmodelle von Gesteinen

In diesem Kapitel werden nun einige wichtige Modelle aufgezeigt, die die komplexe elektrische Leitfähigkeit von porösen Gesteinen beschreiben. Eine kurze Übersicht dieser Modelle findet man zum Beispiel in Olhoeft (1981) oder ausführlicher in Schön (1996), wobei das volle Verständnis der elektrischen Eigenschaften ein wichtiges Ziel der aktuellen petrophysikalischen Forschung ist. Dies betrifft insbesondere Modelle, die den Einfluss der Grenzflächen auf die Leitfähigkeit und die Polarisierbarkeit der Gesteine erklären und beschreiben. Grenzflächeneffekte wurden schon sehr früh bei Gesteinen beobachtet, die einen signifikanten Tonanteil beinhalten (s. z.B. Patnode and Wyllie 1950) oder bei mineralisierten Gesteinen mit elektrisch leitenden Mineralkörnern (s. z.B. Pelton et al. 1978). Bei diesen Gesteinen bewirkt die Grenzfläche zwischen den elektrisch leitenden Mineralkörnern und den elektrolytisch leitenden flüssigkeitsgefüllten Poren eine starke elektrische Polarisierbarkeit. Der Effekt wird aber auch bei Sedimentgesteinen, die keine elektronisch leitenden Komponenten aufweisen, beobachtet, siehe z.B. Vanhala (1997), Slater und Lesmes (2002), Scott und Barker (2003), Binley et al. (2005), sowie Kemna et al. (2005). Die deutlich geringere Polarisierbarkeit entsteht hierbei aufgrund der Interaktion des Porenfluides (Elektrolyt) mit der elektrisch geladenen Mineraloberfläche, wo eine sogenannte elektrische Doppelschicht entsteht, siehe z.B. Leroy et al. (2008). Die Modellierung der Polarisierbarkeit ist schwierig, da sie mit der elektrischen Leitfähigkeit des Porenfluides (Lesmes und Frye 2001, Kemna et al. 2005), der Sättigung (Ulrich und Slater 2004, Binley et al. 2005), und den strukturellen und mineralogischen Eigenschaften, wie z.B. der Korngrößenverteilung (Lesmes und Morgan 2001), der Poren-

halsgröße (Scott und Barker 2003, Binley et al. 2005), bzw. der Porenhalslänge (Titov et al. 2002) und dem Tonanteil (Slater und Lesmes 2002) verknüpft ist.

Da die Diskussion des aktuellen Forschungsgebietes in Hinblick auf die elektrische Modellierung von Gesteinen nicht Schwerpunkt der Arbeit ist, werden hier nur einige Modelle, die für das Verständnis der Arbeit notwendig sind, beschrieben. Zum Verständnis der physikalischen Eigenschaften werden die Gesteine durch eine Gesteinsmatrix, einem Porenraum, der zumindest teilweise mit wässriger Elektrolytlösung gefüllt ist, und der Grenzfläche zwischen dem Festkörper und der Flüssigkeit dargestellt. (siehe Abbildung 1). Entsprechend dieser Aufteilung liefert jede Komponente einen Beitrag zur komplexen elektrischen Leitfähigkeit, bzw. zum komplexen spezifischen Widerstand. Üblicherweise wird zur Beschreibung der komplexen elektrischen Leitfähigkeit der Ansatz

$$\sigma = \sigma_{el} + \sigma_{int} \quad (2.8)$$

von Waxman und Smits (1968) verwendet, bei dem die komplexe elektrische Leitfähigkeit des Porenraumes σ_{el} und die der Grenzfläche σ_{int} , wie bei einer Parallelschaltung, addiert werden. Die elektrische Leitfähigkeit der Gesteinsmatrix wird hierbei vernachlässigt, da davon ausgegangen wird, dass die zu untersuchenden Gesteine keine elektronisch leitenden Mineralien (elektrische Halbleiter oder Leiter) enthalten.

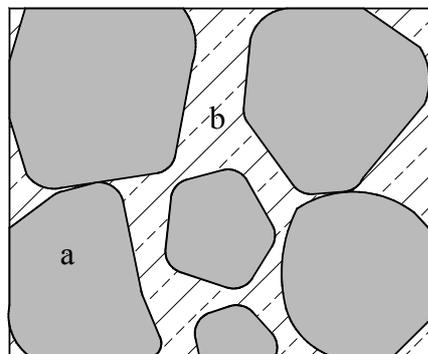


Abbildung 1: Schematische Darstellung eines mit Elektrolyt gefüllten porösen Gesteins, (a) Festmaterial, (b) mit Elektrolytlösung gefüllte Pore.

2.2.1 Leitfähigkeit des wässrigen Porenelektrolytes

Wie im vorherigen Abschnitt beschrieben liefert der mit wässriger Elektrolytlösung gefüllte Porenraum und damit auch die Elektrolytlösung einen Beitrag zur Gesamtleitfähigkeit des Gesteins. Die frequenzabhängige komplexe Leitfähigkeit der Elektrolytlösung (Porenwassers),

$$\sigma_w^* = \sigma_w + j\omega\varepsilon_w = \sigma_w' + j\sigma_w'', \quad (2.9)$$

kann für den relevanten Frequenzbereich mit zwei frequenzunabhängigen Parametern, der elektrischen Leitfähigkeit σ_w und der Permittivität ε_w , beschrieben werden. Die Leitfähigkeit σ_w ist im Wesentlichen abhängig von der Anzahl und dem Typ der im Wasser gelösten Ionen und der Temperatur. Die Werte hierfür können entsprechenden Büchern oder Tabellenwerken entnommen werden, siehe z.B. Schön (1983). Die Permittivität ε_w ist, ebenso wie die Leitfähigkeit, abhängig von der Ionen-Konzentration und der Temperatur. Da häufig das Elektrolyt größtenteils aus Wasser besteht, wird für die Permittivität in erster Näherung der Wert des Wassers angenommen. Für eine Temperatur von 20 °C ist die Permittivitätszahl ε_{wr} des Wassers ungefähr 80,1. Das Temperaturverhalten der Permittivität findet man zum Beispiel in Malmberg und Maryott (1956) und natürlich in aktuellen Handbüchern der Chemie.

2.2.2 Leitfähigkeit des gesättigten Gesteins

Das nächste Modell beschreibt die Leitfähigkeit σ_{el} des mit Elektrolytlösung gefüllten Porenraumes ohne Grenzflächeneffekte. Dabei wird angenommen, dass die Poren untereinander verbunden sind, sodass sich die im Wasser gelösten Ionen durch den Porenraum bewegen können. Um den Zusammenhang zwischen der Leitfähigkeit des Porenraumes und der Leitfähigkeit der Lösung zu beschreiben wird häufig die empirische Gleichung von Archie (1942),

$$\sigma'_{el} = \frac{1}{F} \sigma'_w \text{ mit } F = \frac{1}{\Phi^m}, \quad (2.10)$$

für voll gesättigte Gesteine verwendet. Der Formationsfaktor F in dieser Gleichung ist abhängig von der Porosität Φ des Gesteins, dem Exponenten m , der nach Archie Zementationsexponent genannt wird. Als Beispiel werden für unverfestigte Quarzsande typische Werte von $\Phi \approx 0,39 \dots 0,49$ und $m \approx 1,3$ angegeben (Schön 1996).

Zur Berechnung der Permittivität des Porenraumes ε_{el} in Abhängigkeit von der Permittivität der Elektrolytlösung ε_w , der Permittivität des Festmaterials ε_s und der Porosität wird häufig das Modell von Maxwell-Garnett (1904),

$$\varepsilon_{el} = \varepsilon_w \left(1 + \frac{3(1-\Phi)(\varepsilon_s - \varepsilon_w)}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_w - (1-\Phi)(\varepsilon_s - \varepsilon_w)} \right), \quad (2.11)$$

für ein Zweiphasengemisch verwendet. Entsprechend den Angaben von Robinson und Friedman (2003) ist dieses Modell sehr gut geeignet um die Eigenschaften körniger Böden zu beschreiben. Für die komplexe elektrische Leitfähigkeit des Porenraumes gilt nun analog zu Gleichung (2.9)

$$\sigma_{el} = \frac{1}{F} \sigma'_w + \frac{1}{K} j\omega \varepsilon_w = \sigma'_{el} + j\sigma''_{el} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{K} = 1 + \frac{3(1-\Phi)(\varepsilon_s - \varepsilon_w)}{\varepsilon_s + 2\varepsilon_w - (1-\Phi)(\varepsilon_s - \varepsilon_w)}. \quad (2.12)$$

Hierbei wurden die entsprechenden Beziehungen für die elektrische Leitfähigkeit und die Permittivität nach Gleichung (2.10) und (2.11) eingesetzt.

Für Materialien mit bekannter Permittivität ε_s des Festanteils und bekannter Permittivität ε_w kann der Faktor K und damit die Porosität aus dem Imaginärteil der komplexen Leitfähigkeit σ_{el} abgeschätzt werden. Gewöhnlich wird zur Bestimmung der Permittivität eine zusätzliche Messung bei Frequenzen oberhalb von 1 MHz mit einer hierfür optimierten Messanordnung durchgeführt. Für Materialien mit geringer Grenzflächenpolarisation können jedoch theoretisch beide Parameter, die Leitfähigkeit und die Permittivität, mit einer Messung und Messanordnung abgeschätzt werden. Diese Methode setzt aber eine sehr hohe Messgenauigkeit für die Phase bzw. für den Imaginärteil voraus und liefert somit einen weiteren Anreiz die Messgenauigkeit zu steigern.

2.2.3 Cole-Cole-Modell

Zur Darstellung der Grenzflächenleitfähigkeit σ_{int} wurden im Laufe der Jahre sehr viele Modelle entwickelt oder angewendet (siehe z.B. Dias 2000), wobei das Cole-Cole-Modell (Cole und Cole 1941) sehr häufig verwendet wird. In Pelton et al. (1978) werden mit diesem Modell die elektrischen Widerstände der mit Elektrolytlösung gefüllten Poren und die Impedanz aufgrund der elektronischen Polarisation eines Erzminerals beschrieben, siehe Abbildung 2.

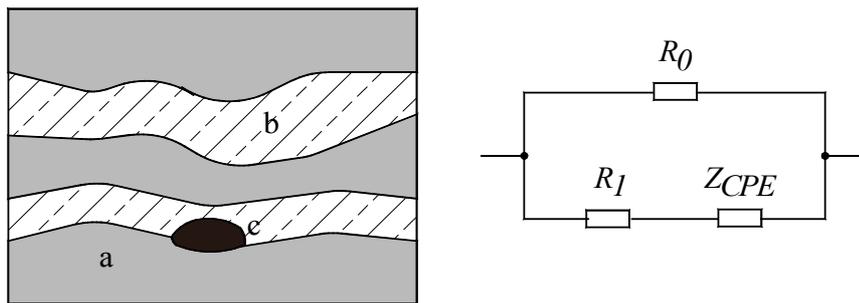


Abbildung 2: Links: Schematische Darstellung eines porösen Gesteins nach Pelton (1978), (a) Festmaterial, (b) Elektrolytlösung, (c) Erzmineral. Rechts: Elektrisches Modell.

Das Modell verwendet zwei frequenzunabhängige Widerstandswerte R_0 und R_1 (bzw. Leitwerte $G_0 = 1/R_0$ und $G_1 = 1/R_1$) in Kombination mit einem Element

$$Z_{CPE} = \frac{1}{Y_{CPE}} = \frac{1}{(j\omega X)^c} = \frac{1}{j^c (\omega X)^c}, \quad (2.13)$$

dessen Impedanz einen frequenzabhängigen Betrag und eine konstante Phase $j^{-c} = -c(\pi/2)$ aufweist. Das Element Z_{CPE} wird mit dem Parameter X und dem Formexponenten c beschrieben. In der Literatur wird dieses Element als Constant-Phase-Element (CPE) bezeichnet, siehe z.B. Macdonald (1987). Das Modell kann in einer analogen Schaltung nach Abbildung 3 dargestellt werden.

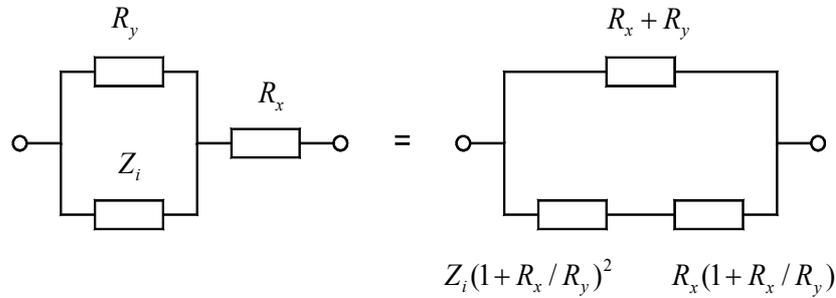


Abbildung 3: Analoge Schaltungen mit gleicher Impedanz Z_{cc} für den gesamten Frequenzbereich (aus Macdonald 1987).

Die drei Elemente bilden zusammen das Cole-Cole-Modell mit der Gesamtimpedanz Z_{cc} beziehungsweise der Gesamtdmittanz

$$Y_{cc} = G_0 + \frac{G_1 Y_{CPE}}{G_1 + Y_{CPE}} = \frac{1}{Z_{cc}} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1 + Z_{CPE}}. \quad (2.14)$$

Bei niedrigen Frequenzen nähert sich der Betrag der Admittanz Y_{cc} dem Leitwert G_0 und für hohe Frequenzen dem Leitwert

$$G_{\infty} = G_0 + G_1. \quad (2.15)$$

Anstelle der diskreten Impedanz oder Admittanz wird häufig der komplexe spezifische Widerstand oder die komplexe Leitfähigkeit beschrieben. Diese analoge Darstellung verwendet zum Beispiel die Leitfähigkeiten σ_0 , die Kreisfrequenz ω , die Relaxationszeit τ und die Aufladbarkeit

$$m = 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_{\infty}} \quad (2.16)$$

als Parameter. Hiermit erhält man die übliche Darstellung des Cole-Cole-Modells für die komplexe Leitfähigkeit,

$$\sigma_{cc} = \sigma_0 \left(1 + m \frac{(j\omega\tau)^c}{1 + (j\omega\tau)^c (1 - m)} \right), \quad (2.17)$$

siehe z.B. Binley et al. (2005), Slater (2007), oder für den komplexen spezifischen Widerstand,

$$\rho_{cc} = \rho_{\infty} + \frac{\rho_0 - \rho_{\infty}}{1 + (j\omega\tau)^c} = \rho_0 \left(1 - m \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau)^c} \right) \right), \quad (2.18)$$

siehe z.B. Pelton et al. (1978), Kemna et al. (2000). Diese Darstellungen liefern einen näheren Bezug zur Korngrößen- oder Porenraumverteilung bzw. zu den hydraulischen Eigenschaften des Gesteins, da zum Beispiel die Relaxationszeit τ mit dem Quadrat des Kornradius oder dem Quadrat der Porenlänge verknüpft ist, siehe. z.B. Schwarz (1962), Lesmes und Morgan (2001) und Titov et al. (2002).

Zur Veranschaulichung sind in Abbildung 4 exemplarisch Betrags- und Phasenspektren für unterschiedliche Werte von m gezeichnet. Das Phasenmaximum liegt für den typischen Fall $m < 1$ nach Major und Silic (1981) bei der Frequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau(1-m)^{1/(2c)}}, \quad (2.19)$$

siehe Abbildung 4a. Abhängig vom Formexponenten c variiert die Breite des Phasenverlaufs bzw. die maximale Steigung der Phase. Große Werte für c bewirken ein schlankes Phasenmaximum. Für den speziellen Fall $m = 1$ erreicht die Phase den maximalen Wert $j^c = c(\pi/2)$, siehe Abbildung 4b.

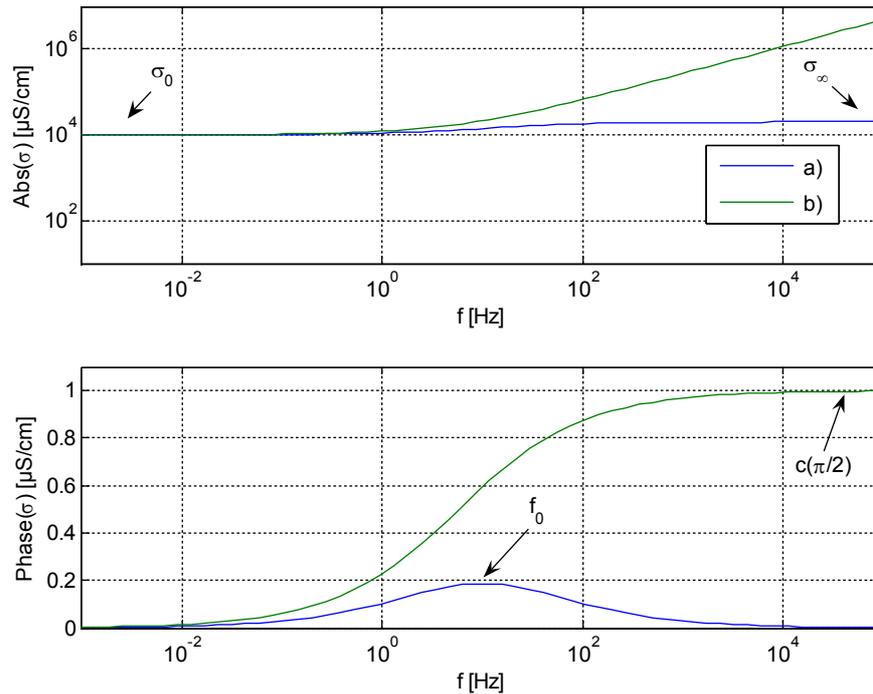


Abbildung 4: Amplituden- und Phasenspektrum des Cole-Cole-Modells für $\sigma_0 = 1 \text{ S/m}$, $\tau = 0,0274 \text{ s}$, $c = 2/\pi$ und a): $m = 0,5$, b): $m = 1$.

Aufgrund des variablen Formexponenten c können mit dem Cole-Cole-Modell weitere Modelle dargestellt werden. So beschreibt zum Beispiel $c = 1$ das Debye-Modell. Es ist auch üblich mehrere Cole-Cole-Modelle in einer Summendarstellung zur Beschreibung der komplexen Leitfähigkeiten,

$$\sigma_{cc} = \sigma_0 \left(1 + \sum_n \frac{m_{g,n} (j\omega\tau_n)^{c_n}}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n} (1 - m_{g,n})} \right), \quad (2.20)$$

bzw. des komplexen spezifischen Widerstandes,

$$\rho_{cc} = \rho_0 \left(1 - \sum_n m_{g,n} \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n}} \right) \right), \quad (2.21)$$

zu verwenden. Weitere Hinweise bezüglich diverser Modelle findet man zum Beispiel in Macdonald (1987) bzw. Barsoukov und Macdonald (2005).

3. Impedanzspektroskopie

3.1 Grundlegende Messtechnik

Aufgrund der vielen Fachbereiche, wie z.B. die Elektrochemie, die Materialwissenschaften, die biologischen und biomedizinischen Wissenschaften und natürlich die Geophysik so wie den damit verbundenen Anwendungen bezüglich der Impedanzspektroskopie unterscheiden sich auch die Messtechniken im Detail. Im Prinzip wird zwar bei der Impedanzspektroskopie der komplexe spezifische Widerstand ρ eines Mediums in Abhängigkeit von der Frequenz f gemessen. Der interessante Frequenz- und Widerstandsbereich ist aber durchaus verschieden und demzufolge auch die notwendige Messtechnik. Eine gute Übersicht hierüber liefert z.B. das Buch Impedance Spectroscopy von Macdonald (1987) bzw. Barsoukov und Macdonald (2005) und geophysikalischer Anwendungen, bzw. Labormessungen von Gesteinen, findet man zum Beispiel im Aufsatz von Emerson (1969). Unter anderem wird im Aufsatz von Emerson (1969) (und auch schon in Vacquier et al. 1957) die galvanische Messmethode mit vier Elektroden beschrieben, die sehr häufig zur Impedanzmessung von Bodenproben angewendet wird, da sie insbesondere Messfehler von Elektrodenpolarisationen, bzw. Messfehler aufgrund der Übergangswiderstände der einspeisenden Elektroden, nahezu vermeidet. Im Frequenzbereich unterhalb von einigen 10 kHz ist diese Methode daher die genaueste.

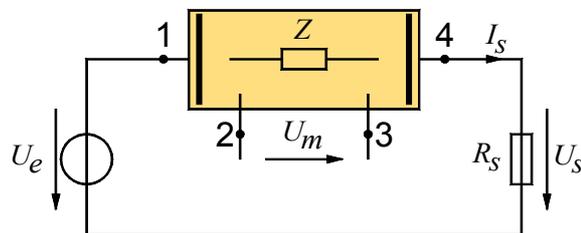


Abbildung 5: Schematische Darstellung der 4-Elektrodenmethode.

Bei der 4-Elektrodenmethode wird über zwei äußere Elektroden 1 und 4 der Strom I_s in die Probe eingespeist und an zwei inneren Elektroden 2 und 3 die resultierende Spannung $U_m(f)$ gemessen, siehe Abbildung 5. Zur Bestimmung des Probenstromes wird in diesem Beispiel die Spannung $U_s(f)$ an einem hoch-genauen Shunt-Widerstand R_s , der in Reihe zur Probe geschaltet ist, gemessen. Mittels der beiden gemessenen Spannungen $U_m(f)$ und $U_s(f)$ kann schließlich die Probenimpedanz

$$Z(f) = \frac{U_m(f)}{I_s(f)} = R_s \frac{U_m(f)}{U_s(f)} \quad (3.1)$$

berechnet werden.

Oft ist jedoch der komplexe spezifische Widerstand bzw. die komplexe Leitfähigkeit die interessante Messgröße. Die Beziehung zwischen der Impedanz Z und dem komplexen spezifischen Widerstand ρ liefert die Materialgleichung

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \mathbf{E}, \quad (3.2)$$

siehe auch Gleichung (2.5). Für einen Probenkörper mit einfacher Geometrie, bei dem sich eine konstante Stromdichte innerhalb eines isotropen und homogenen Mediums in Richtung der Probenachse einstellt, kann anstelle der Stromdichte \mathbf{J} und der elektrischen Feldstärke \mathbf{E} auch der Probenstrom I_s und die Probenspannung U_s verwendet werden. Die Materialgleichung vereinfacht sich damit zu

$$\frac{I_s}{A} = \frac{1}{\rho} \frac{U_m}{l}, \quad (3.3)$$

wobei l der Abstand zwischen den beiden Spannungselektroden und A die Querschnittsfläche der Probe darstellt. Nach Umstellen von Gleichung (3.3) erhält man schließlich die Beziehung

$$\rho = \frac{U_m}{I_s} \frac{A}{l} = Z \frac{A}{l} \quad (3.4)$$

zwischen dem komplexen spezifischen Widerstand und der gemessenen Impedanz Z . Um eine möglichst konstante Stromdichte zu erzielen werden für die Stromelektroden meist flächenhafte Elektroden in Form von Platten oder Netzen verwendet, die an den beiden Enden angeordnet werden. Ein Probenkörper mit Netzen wird zum Beispiel in Olhoeft (1979) beschrieben.

In einigen Fällen wird nicht der gesamte Probenraum mit einem homogenen Medium gefüllt, sondern es werden nur zwischen den einzelnen Elektrodenabschnitten stückweise homogene Medien verwendet. Dies ist zum Beispiel für die Messung an Gesteinen der Fall, bei denen zur elektrischen Ankopplung ein Elektrolyt zwischen Stromelektroden und der Gesteinsprobe verwendet wird (Emerson 1969). Auch bei diesen Anordnungen ist die Stromdichte ortsunabhängig, sodass auch hierfür Gleichung (3.4) gültig ist.

Zusätzlich zur optimalen Gestaltung der Probenkörper und zur Auswahl einer günstigen Messmethode ist eine geeignete Datenerfassung der Spannungen und Ströme wichtig. Die Fortschritte bei der Datenerfassung hängen sehr stark von den technischen Möglichkeiten ab. Eine Übersicht der vielen unterschiedlichen Methoden findet man zum Beispiel in Macdonald (1987). Unter anderem werden dort schon moderne Zeitbereichsmethoden mit digitaler

Signalverarbeitung vorgestellt. Diese Systeme, wie zum Beispiel das in Olhoeft (1979) oder Börner (1993), digitalisieren die analogen Spannungen und verarbeiten die gemessenen Zeitreihen numerisch. Dies ist auch die Basis auf die sich die Impedanzmessung in dieser Arbeit stützt.

Die Messungen werden im Zeitbereich durchgeführt und danach in den Frequenzbereich transformiert. Zur Impedanzbestimmung werden zunächst die komplexen Amplituden der Spannungen $U_m(\omega_n)$ und $U_s(\omega_n)$ mittels der Fouriertransformation

$$U = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(\omega t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(\omega t) dt \quad (3.5)$$

aus den gemessenen Zeitreihen $u_m(t)$ und $u_s(t)$ für das Intervall 0 bis T und für die zugehörigen Anregungskreisfrequenzen $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ mit T der jeweiligen Periodendauer des Anregungssignals berechnet. Aus den komplexen Amplituden der Spannungen oder kurz den komplexen Spannungen, wird schließlich die Probenimpedanz

$$Z(\omega_n) = R_s \frac{F\{u_m(t)\}}{F\{u_s(t)\}} = R_s \frac{U_m(\omega)}{U_s(\omega)}, \quad (3.6)$$

bestimmt.

Als Anregungssignal können im Prinzip beliebige Signalformen verwendet werden. So kann z.B. zur Steigerung der Messgeschwindigkeit ein breitbandiges Rauschsignal für die Anregung eingesetzt werden. Mit nur einer Messung könnte so das gesamte Spektrum erfasst werden. Die Zielsetzung dieser Arbeit ist jedoch eine möglichst hohe Phasengenauigkeit zu erzielen. Um mögliche Fehlerquellen aufgrund nichtlinearer Verzerrungen zu vermeiden wird daher nur mit einem Sinussignal angeregt und die Impedanz wird für diese Frequenz berechnet. Die Messung wird für eine Vielzahl von Kreisfrequenzen ω_n durchgeführt, sodass schließlich ein diskretes Spektrum mit den Impedanzwerten entsteht.

3.2 Messsystem

Im folgenden Abschnitt wird nun die praktische Realisierung eines Impedanzspektrometers auf Basis der Vierpunktmessmethode, wie sie oben beschrieben ist, vorgestellt. Dieses Gerät wurde speziell für hochgenaue Phasenmessungen von Bodenproben entwickelt und optimiert (Zimmermann et al. 2008). Das Impedanzspektrometer besteht aus einem Funktionsgenerator, einer Verstärkereinheit, einer ADC- Karte, einem PC und einem Probenhalter. siehe Abbildung 6 und 7.

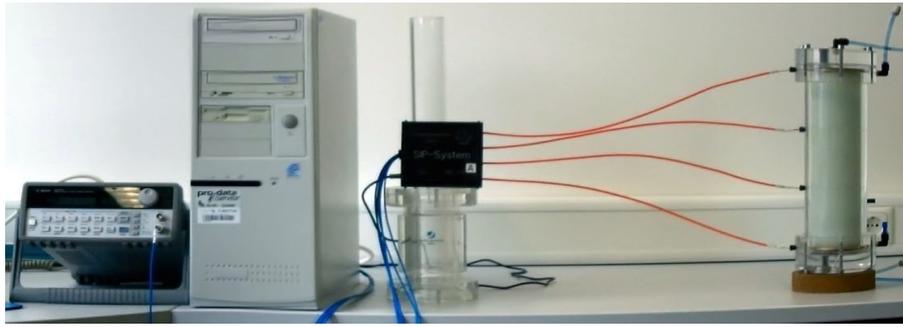


Abbildung 6: Foto des Impedanzspektrometers.

Zur Erzeugung der sinusförmigen Anregungsspannung im Frequenzbereich von 1 mHz bis 45 kHz wird ein quarzstabilisierter Funktionsgenerator, Agilent 33120A oder 33250A, verwendet. Der Ausgangswiderstand des Generators ist 50Ω . Die typische Anregungsspannung ist $\pm 10 \text{ V}$. Die Frequenz und die Amplitude werden vom PC gesteuert. Außer der Sinusspannung können für spezielle Messungen auch andere beliebige Kurvenformen programmiert werden.

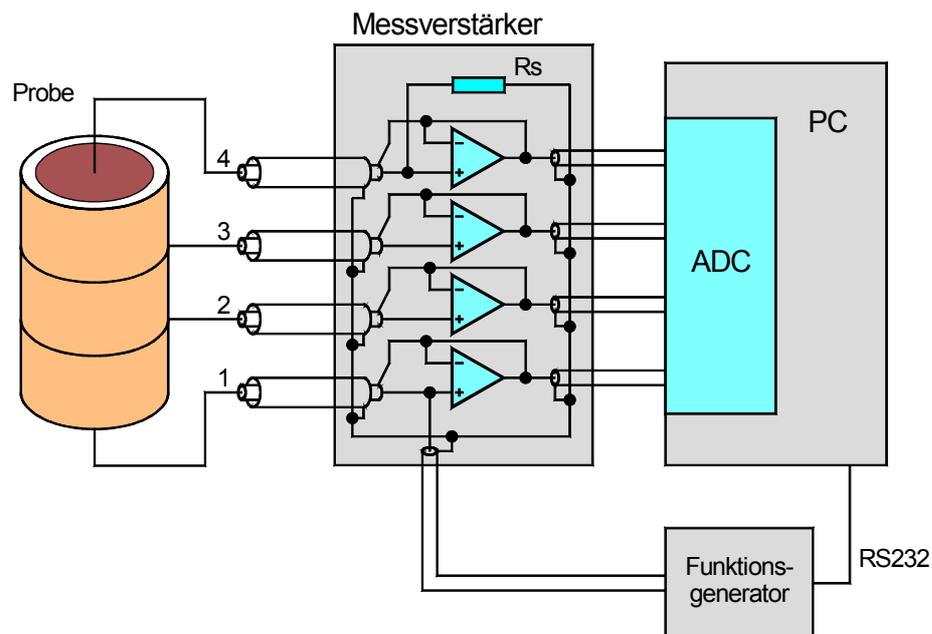


Abbildung 7: Blockschaltbild des Messsystems mit zwei Elektroden (1, 4) für die Stromerzeugung und zwei Elektroden (2, 3) für die Spannungsmessung.

Zur Messung der Elektrodenpotenziale wurde eine optimierte Verstärkereinheit entwickelt. Mit dieser Verstärkereinheit werden die Spannungen möglichst hochohmig an den Elektroden 1 bis 4 abgegriffen und mit geringem Übersprechen zwischen den Kanälen übertragen. Aus praktischen Gründen werden keine aktiven oder passiven Bauelemente unmittelbar an die Elektroden platziert. Die Elektrodenpotenziale werden über kurze triaxiale Kabel (0,5 m) zu hochohmigen kapazitätsarmen DC gekoppelten Verstärkern geführt. Die DC-Kopplung ist

notwendig damit auch niedrige Messfrequenzen von 1 mHz phasengenau gemessen werden können.

Um die kapazitive Last und die Leckströme der Kabel zu minimieren wird die Driven-Shield-Technik (Morrison 1967, Morrison 1998) angewendet. Bei dieser Technik wird das Spannungspotential der inneren Ader von einem Elektrometerverstärker mit der Verstärkung Eins verstärkt und anschließend auf den inneren Schirm gelegt. Diese aktive Rückführung des Signals minimiert die Potentialdifferenz zwischen innerer Ader und Schirm und damit auch die Wirkung der Kabelkapazitäten. Die Eingangskapazität und der Eingangswiderstand an einer Elektrode ist daher im Wesentlichen die des Verstärkers. Die gemessene Kapazität ist ungefähr 5 pF und der gemessene Widerstand ist wesentlich größer als 1 G Ω .

Die äußeren Schirme der triaxialen Kabel sind mit Erdpotential verbunden um das Übersprechen zwischen den Kabeln zu vermeiden. Zusätzlich zum Übersprechen der Kabel wurden auch die parasitären Kapazitäten der Verstärkerschaltung mittels eines optimierten Platinentwurfs minimiert. Die gemessenen Koppelkapazitäten zwischen den Kanälen der Verstärkerschaltung sind kleiner als 0,1 pF.

Der Shunt-Widerstand (10 Ω , 100 Ω oder 1 k Ω), der für die Strommessung benötigt wird, ist ebenfalls in der Verstärkereinheit angeordnet. Damit bei der Übertragung des zu messenden Stromes auf dem Weg von der Stromelektrode 4 zum Shunt-Widerstand möglichst keine parasitären Ströme abfließen wurde auch dieser Kanal mit der Driven-Shield-Technik aufgebaut.

Aus Gründen der Symmetrie wurde schließlich auch der erste Kanal, der mit der Elektrode 1 verbunden ist, mit der Driven-Shield-Technik realisiert. Dies hat den Vorteil, dass somit alle Verstärkerkanäle identisch realisiert sind, einschließlich der Kabel, und deshalb nahezu den gleichen Amplituden- und Phasengang haben.

Zur Auswahl eines geeigneten Operationsverstärkers (OP) für die Elektrometerschaltung wurde die Eingangsimpedanz einiger Operationsverstärker mit bipolaren Eingangstransistoren oder JFET-Eingängen gemessen. In engerer Wahl kamen OPs mit kleiner Eingangskapazität, einem stabilen Betrieb für eine Verstärkung von Eins und einem Eingangsspannungsbereich von ± 10 V. Um nichtlineare Verzerrungen der Verstärker zu vermeiden, sollte die Slew Rate mindestens 2,5 V/ μ s sein. Dies entspricht dem maximalen Anstieg einer Sinusspannung von ± 10 V bei einer Frequenz von 40 kHz. Ausgewählt wurden die Ops AD8021, AD847, AD829, AD8065, und AD825.

Die OPs mit bipolaren Eingangstransistoren (AD8021, AD847 und AD829) haben sehr kleine Eingangskapazitäten nach Masse von weniger als 1,5 pF. Nachteilig sind die kleinen ohmschen Eingangswiderstände. Obwohl die OPs mit der Verstärkung Eins und damit mit einer hohen Rückkopplung betrieben wurden, waren die Eingangswiderstände deutlich kleiner als 1 G Ω . Problematisch sind bei diesen OPs auch die großen Bias-Ströme, die im μ A Bereich liegen.

Die OPs mit JFET-Eingängen (AD8065 und AD825) haben aufgrund der anderen Eingangsbeschaltung prinzipiell höhere Eingangswiderstände und geringere Bias-Ströme. Problematisch ist hierbei die relativ große Eingangskapazität. Die Kapazitäten des schnellen OP, Typ AD8065, waren kleiner als 4 pF. Dieser war jedoch in Verbindung mit den Kabeln instabil.

Insgesamt hat der OP, Typ AD825, die besten Eigenschaften und wurde daher für die Elektrometerverstärker eingesetzt. Die gemessene Kapazität zwischen positivem Eingang und Masse war kleiner als 4,5 pF. Der Eingangsstrom ist nach Datenblatt kleiner als 30 pA, der ohmsche Eingangswiderstand ist 500 G Ω und die Slew Rate ist mit 140 V/ μ s wesentlich höher als erforderlich.

Zur phasengenauen Digitalisierung der Spannungen wird die PC-Karte NI4472 verwendet, die mit hochauflösenden Sigma-Delta-ADCs und digitalem Antialiasing-Filter bestückt ist. Die Karte hat eine Auflösung von 24 Bit und eine maximale Abtastrate von 102 kHz bei einer 64-fachen Überabtastung. Die maximale Messfrequenz ist ungefähr 45 kHz. Die Phasengenauigkeit der digitalen Antialiasing-Filter ist im Vergleich zu analogen Antialiasing-Filtern wesentlich höher, da analoge Filter aufgrund von Streuung und Temperaturdriften der Bauelemente große Phasenverschiebungen aufweisen können. Der Spannungsmessbereich ist mit ± 10 V ausreichend groß, sodass auch mögliche elektrochemische Elektrodenpotentiale den Eingang nicht übersteuern. Aufgrund der hohen Spannungsauflösung von 1,2 μ V (24 Bit) können auch kleinste Spannungen ohne weitere Verstärkung mit einem guten Signal-zu-Rauschverhältnis digitalisiert werden. Das Kanalübersprechen der Karte, bei kurzgeschlossenem Eingang, ist mit -90 dB hinreichend klein.

Für die Datenerfassung und Auswertung wurden ein LabVIEW-Programm und ein MATLAB-Programm entwickelt. Das LabVIEW-Programm übernimmt die Steuerung des Sinusgenerators und die Signalerfassung. Für jede Messfrequenz werden die Zeitreihen der einzelnen Spannungen gemessen und gespeichert. Die notwendigen Messparameter werden den zugehörigen Konfigurationsdateien entnommen. Nach abgeschlossener Messung werden mit dem MATLAB-Programm zuerst mögliche Driften in den Zeitreihen entfernt, siehe Kapitel 3.10,

und anschließend wird die komplexe Spannung aus den Zeitreihen für die zugehörigen Anregungsfrequenzen berechnet. Aus den berechneten komplexen Amplituden wird die Probenimpedanz zwischen den Spannungselektroden 2 und 3, siehe Kapitel 3.3, und die Gesamtimpedanz zwischen den Stromelektroden 1 und 4 berechnet. Zusätzlich wird die statistische Messunsicherheit der Impedanzen berechnet.

3.3 Fehlerkorrektur auf der Basis eines elektrischen Modells

Einige systematischen Messfehler und mögliche Fehlerkorrekturen werden nun anhand eines elektrischen Modells der Probe und des Messsystems bestimmt. Das Modell, dargestellt in Abbildung 8, beinhaltet die Probenimpedanz Z_x zwischen den Spannungselektroden, die Kontaktimpedanzen Z_{e1} und Z_{e4} der Stromelektroden (einschließlich der Impedanzen zwischen den Stromelektroden und den Spannungselektroden) und die Kontaktimpedanzen Z_{e2} und Z_{e3} der Spannungselektroden. Zusätzlich beinhaltet das Modell die Eingangsimpedanzen Z_v der Verstärker (einschließlich der Kabel), den Shunt-Widerstand R_s und die Spannungsquelle U_0 . Zur Beschreibung der elektrischen Eigenschaften des Messsystems müssen keine zusätzlichen Kopplungsimpedanzen zwischen den Elektroden berücksichtigt werden, da das System für eine massebezogene Spannungsmessung mit minimalem Übersprechen zwischen den Kanälen entwickelt wurde.

Für eine genaue Bestimmung der Probenimpedanz

$$Z_x = \frac{U_x}{I_x} \quad (3.7)$$

muss sowohl die wahre Spannung $U_x = U_5 - U_6$ zwischen den Punkten 5 und 6 in Abbildung 8 als auch der genaue Strom I_x durch die Probe bekannt sein. Anhand des Ersatzschaltbildes erkennt man jedoch, dass nur die Ströme und die Spannung außerhalb der Probe gemessen werden können. Im Folgenden werden daher die Abweichungen zwischen den Spannungen U_x und U_m und den Strömen I_x und I_s diskutiert und es werden Methoden zur genaueren Berechnung der Werte vorgeschlagen.

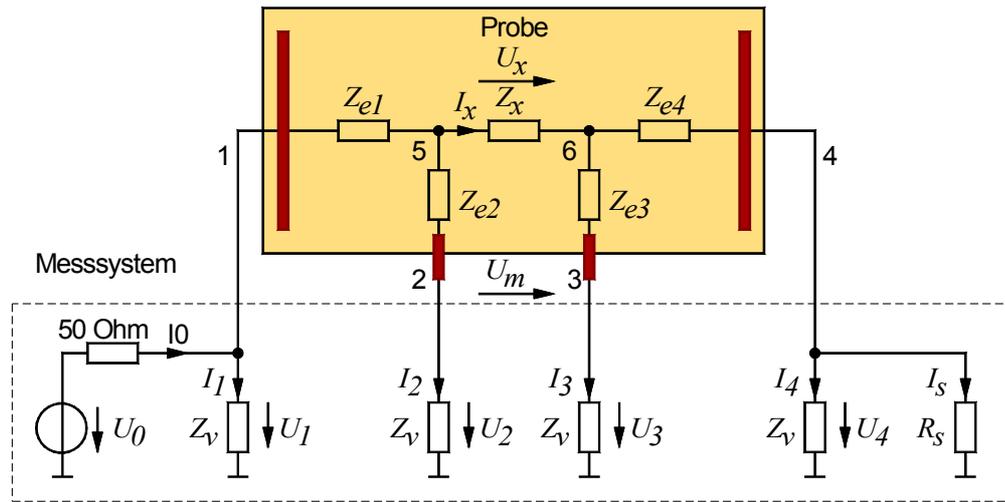


Abbildung 8: Vereinfachtes elektrisches Modell der Probe und des Messsystems.

3.3.1 Berechnung des wahren Anregungsstromes

Aufgrund der parasitären Ströme I_3 und I_4 die auf dem Wege von der Quelle zum Shunt-Widerstand abfließen ist der Strom I_x durch die Probe größer als der Strom I_s , der durch den Shunt-Widerstand R_s fließt, siehe Abbildung 8. Mittels Netzwerkanalyse wurde die Beziehung

$$\frac{I_s}{I_x} = \frac{Z_v + Z_{e3}}{Z_v + Z_{e3} + 2R_s + Z_{e4} + \frac{Z_{e3}R_s + Z_{e4}R_s}{Z_v}} \quad (3.8)$$

zwischen den Strömen I_x und I_s bestimmt. Die Beziehung in Gleichung 3.8 kann weiter vereinfacht werden, wenn berücksichtigt wird, dass die Eingangsimpedanzen der Verstärker Z_v wesentlich größer als die Kontaktimpedanzen der Elektroden und auch wesentlich größer als der Shunt-Widerstand sind, $Z_v \gg Z_{e3}$, $Z_v \gg Z_{e4}$, $Z_v \gg R_s$. Dies liefert die vereinfachte Beziehung

$$\frac{I_s}{I_x} \approx \frac{1}{1 + (2R_s + Z_{e4})/Z_v} \quad (3.9)$$

und zeigt, dass die Abweichung zwischen I_s und I_x für kleine R_s und Z_{e4} minimiert wird. Der Shunt-Widerstand kann bis zu einer gewissen Grenze verkleinert werden. Die Kontaktimpedanz Z_{e4} ist jedoch abhängig von der Probe.

Es stellt sich natürlich die Frage, ob zur Vermeidung des Fehlers eine günstigere Position für den Shunt-Widerstand möglich ist. Mit einer modifizierten Schaltung könnte zum Beispiel der Strom I_0 mit einem Shunt-Widerstand zwischen der Spannungsquelle U_0 und der Elektrode 1 gemessen werden (50Ω in Abbildung 8). Aufgrund der höheren Spannung an Elektrode 1 gegen Bezugspotential im Vergleich zu Elektrode 4 sind die Ableitströme I_1 und I_2 größer als die Ströme I_3 und I_4 . Die Abweichung zwischen I_x und I_0 ist folglich größer als die Abwei-

chung zwischen I_x und I_s . Dies zeigt, dass die optimale Position des Shunt-Widerstandes daher zwischen Elektrode 4 und Masse ist.

Bei kommerziellen Impedanzanalysatoren wird häufig zur genauen Strommessung die sogenannte auto balancing bridge method (Macdonald 1987, Agilent Technologies Co. Ltd. 2003) verwendet. Der Strommessfehler, der bei einer realen Bodenprobe von der Impedanz Z_{e4} bewirkt wird, kann jedoch auch mit dieser Methode nicht vermieden werden. Diese Methode ist daher für Messungen an Bodenproben nicht hilfreich.

Es ist jedoch möglich den wahren Strom I_x auf Basis des elektrischen Modells zu bestimmen. Da die Spannungen U_3 und U_4 bei diesem System gegen Bezugspotential gemessen werden (und nicht nur die sonst notwendige Differenzspannungen U_m) und die Eingangsimpedanzen Z_v aufgrund der gewählten Verkabelung definiert und bekannt sind, können die Ableitströme $I_3 = U_3/Z_v$ und $I_4 = U_4/Z_v$ berechnet werden. Der wahre Strom I_x ist die Summe der Ströme I_s , I_3 und I_4 . Dies führt zu

$$I_x = I_s + I_3 + I_4 = \frac{U_4}{R_s} + \frac{U_3}{Z_v} + \frac{U_4}{Z_v}. \quad (3.10)$$

Die Eingangsimpedanzen Z_v sind im Wesentlichen die Eingangskapazitäten der Verstärker, die ungefähr 5 pF betragen. Für die Korrektur werden diese genau gemessen.

3.3.2 Genauigkeit und Korrektur der Spannungsmessung

Die Verstärker belasten mit den Impedanzen Z_v die Elektroden 2 und 3 und bewirken dadurch einen Spannungsabfall über die Elektrodenimpedanzen. Dies führt zu einer Abweichung zwischen der wahren Probenspannung U_x und der gemessenen Spannung U_m . Zur Fehlerabschätzung werden zunächst die einzelnen Spannungen U_2 und U_3 betrachtet. Im Modell sind die Elektrodenimpedanzen Z_{e2} und Z_{e3} und die Eingangsimpedanzen der Verstärker in Reihe geschaltet. Diese bilden zusammen die Spannungsteiler

$$D_2 = \frac{U_2}{U_5} = \frac{1}{1 + Z_{e2}/Z_v} \quad \text{und} \quad D_3 = \frac{U_3}{U_6} = \frac{1}{1 + Z_{e3}/Z_v}. \quad (3.11)$$

Berücksichtigt man nun, dass die Spannung U_m die Differenz $U_2 - U_3$ und U_x die Differenz $U_5 - U_6$ ist, so liefert dies die Beziehung

$$\frac{U_m}{U_x} = \frac{U_2 - U_3}{U_5 - U_6} = \frac{U_5 D_2 - U_6 D_3}{U_5 - U_6} \quad (3.12)$$

zwischen U_m und U_x . Für gleiche Elektrodenimpedanzen $Z_{e2} = Z_{e3} = Z_{e2,e3}$ bzw. gleiche Spannungsteiler $D_2 = D_3 = D$ vereinfacht sich die Beziehung in Gleichung (3.12) zu

$$\frac{U_m}{U_x} = D = \frac{1}{1 + Z_{e2,e3}/Z_v} \quad (3.13)$$

Gleichung (3.13) zeigt, dass die Kontaktimpedanzen der Elektroden Z_{e2} , Z_{e3} möglichst klein sein sollten um die Abweichung zwischen U_m und U_x zu minimieren. Die Probenimpedanz Z_x hat, wie bei der Strommessung, keinen Einfluss auf den Messfehler.

Unter der Voraussetzung, dass die Impedanzen Z_{e2} und Z_{e3} bekannt sind, könnte auch die wahre Probenspannung $U_x = U_5 - U_6$ mit

$$U_x = U_2 \left(1 + \frac{Z_{e2}}{Z_v} \right) - U_3 \left(1 + \frac{Z_{e3}}{Z_v} \right) \quad (3.14)$$

genau bestimmt werden. Für reale Proben sind jedoch die Elektrodenimpedanzen oft nicht stabil bzw. nicht bekannt. Für diese Korrektur müssten während der normalen Impedanzmessung zusätzlich die Elektrodenimpedanzen bestimmt werden.

3.3.3 Genauigkeit der Impedanzmessung

Die Probenimpedanz wird schließlich aus den berechneten Werten für den Probenstrom und der Probenspannung berechnet. Für die Strommessung wird die Korrektur nach Gleichung (3.10) verwendet, sodass zunächst dieser Fehler vernachlässigt werden kann. Die Spannungsmessung wird wegen der unbekanntenen Elektrodenimpedanzen Z_{e2} und Z_{e3} nicht korrigiert. Die Genauigkeit wird daher entsprechend Gleichung (3.13) durch die Spannungsmessung bestimmt. Für die Abweichung zwischen der gemessenen Probenimpedanz $Z_m = U_m/I_x$ und der wahren $Z_x = U_x/I_x$ folgt somit

$$\frac{Z_m}{Z_x} = \frac{1}{1 + Z_{e2,e3}/Z_v} \quad (3.15)$$

Für den Fall, dass die Stromkorrektur nicht verwendet wird, ist die Abweichung zwischen Messwert und wahren Wert nach Zusammenfassung von Gleichung (3.9) und (3.13)

$$\frac{Z_m}{Z_x} = \frac{U_m}{U_x} \frac{I_x}{I_s} \approx \frac{1 + (2R_s + Z_{e4})/Z_v}{1 + Z_{e2,e3}/Z_v} \quad (3.16)$$

3.3.4 Bestimmung tolerierbarer Impedanzwerte

Mittels der vorherigen Fehlerabschätzung, siehe Kapitel 3.3, werden nun tolerierbare Impedanzwerte der Elektroden berechnet. Zusätzlich werden zur praktischen Überprüfung von Gleichungen (3.10), (3.15) und (3.16) die Phasenspektren eines definierten Widerstandsnetzwerkes, welches dem Modell in Abbildung 8 entspricht, gemessen.

Zuerst wird der zulässige Wertebereich von Z_{e4} für den Fall, dass keine Stromkorrektur nach Gleichung (3.10) durchgeführt wird, abgeschätzt. Dazu wird das Phasenspektrum in Abhängigkeit von Z_{e4} für die Werte $Z_{e4} = 1 \text{ k}\Omega$, $10 \text{ k}\Omega$ und $33 \text{ k}\Omega$ nach Gleichung (3.16) berechnet und an einem elektrischen Netzwerk gemessen. Die anderen Impedanzen sind $Z_x = 1 \text{ k}\Omega$, $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ und $Z_{e2} = Z_{e3} = 0 \text{ }\Omega$. Für die Eingangsimpedanz Z_v wurde eine Parallelschaltung mit einem ohmschen Leitwertes $G_v = 1 \text{ nS}$ und einer Kapazität $C_v = 5 \text{ pF}$ angenommen.

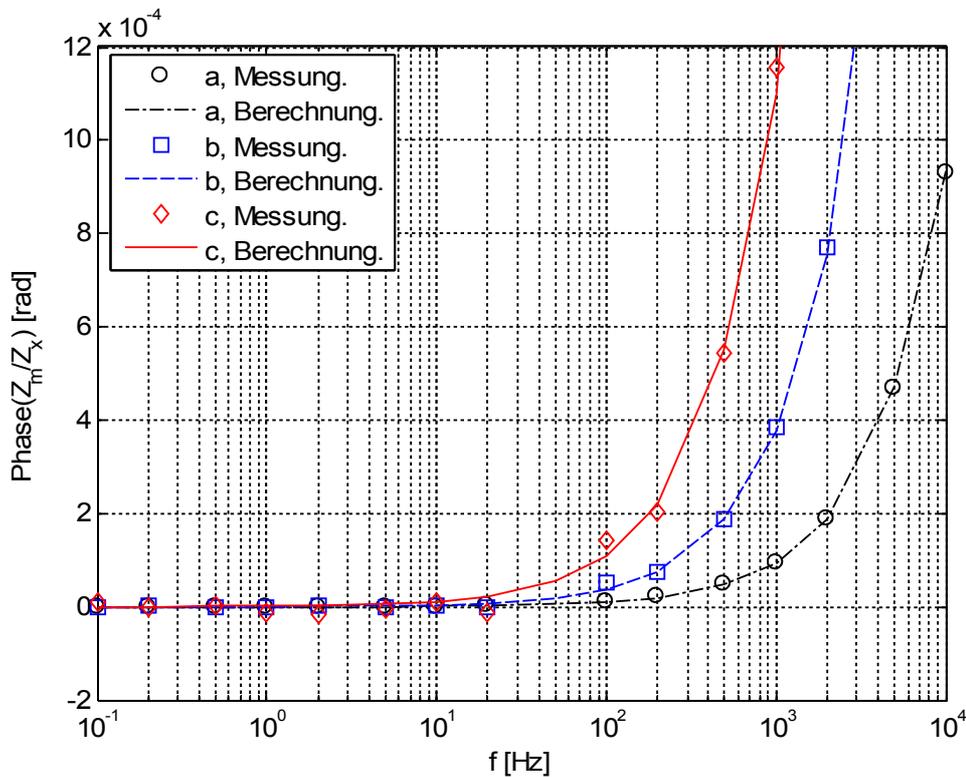


Abbildung 9: Gemessenes und berechnetes Phasenspektrum eines Widerstandsnetzwerkes für unterschiedliche Z_{e4} (a: $1 \text{ k}\Omega$, b: $10 \text{ k}\Omega$ und c: $33 \text{ k}\Omega$). Das Netzwerk entspricht dem elektrischen Modell der Probe in Abbildung 8 mit $Z_x = 1 \text{ k}\Omega$, $R_s = 1 \text{ k}\Omega$ und $Z_{e2} = Z_{e3} = 0 \text{ }\Omega$.

Die Ergebnisse dieser Berechnung, dargestellt in Abbildung 9, zeigen eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und gemessenen Phasenwerten. Die Phase ist positiv und nimmt aufgrund der kapazitiven Eingangsimpedanz der Verstärker mit der Frequenz zu.

Als nächstes wird nun der Phasenverlauf mit Stromkorrektur nach Gleichung (3.10) gemessen und nach Gleichung (3.15) berechnet. Für diesen Fall sollte die Phase im gesamten Spektrum Null sein. Die gemessenen Phasenwerte, dargestellt in Abbildung 10, zeigen, dass die Phasenfehler mittels Stromkorrektur wesentlich reduziert werden.

Anhand dieser Berechnungen und Messungen können nun die zulässigen Werte der Impedanz Z_{e4} und R_s für eine Genauigkeit von 0,1 mrad und für Frequenzen bis 1 kHz abgeschätzt werden. Ohne Stromkorrektur sollte der Widerstandswert für Z_{e4} nicht größer als 1 k Ω , bzw. der Widerstandswert von $(2R_s + Z_{e4})$ nicht größer als 3 k Ω , sein. Mit Stromkorrektur darf der Widerstandswert von Z_{e4} anhand der Messungen in Abbildung 10 selbst bei vorsichtiger Abschätzung größer als 33 k Ω sein. Für die spätere Auslegung des Probenhalters wird daher ein Wert von 35 k Ω für Z_{e4} zugelassen.

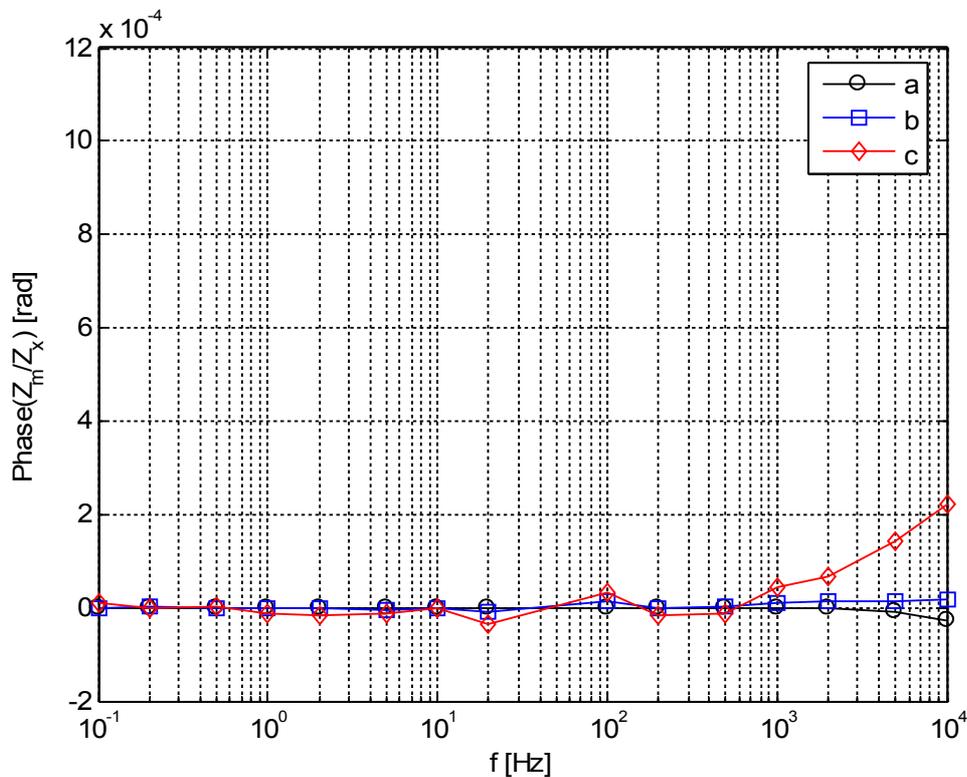


Abbildung 10: Gemessenes Phasenspektrum eines Widerstandnetzwerkes für unterschiedliche Z_{e4} (a: 1 k Ω , b: 10 k Ω und c: 33 k Ω) unter Verwendung der Stromkorrektur. Das Netzwerk entspricht dem elektrischen Modell der Probe in Abbildung 8 mit $Z_x = 1$ k Ω , $R_s = 1$ k Ω und $Z_{e2} = Z_{e3} = 0$ Ω .

Zur Abschätzung des Phasenfehlers aufgrund einer fehlerhaften Spannungsmessung unter Verwendung der Stromkorrektur wird nun das Phasenspektrum in Abhängigkeit von $Z_{e2,e3}$ für die Werte 1 k Ω und 10 k Ω gemessen und nach Gleichung (3.15) berechnet. Die anderen Impedanzen sind $Z_x = 1$ k Ω , $R_s = 1$ k Ω und $Z_{e1} = Z_{e4} = 0$ Ω . Der Phasenverlauf, dargestellt in Abbil-

dung 11, ist hierbei negativ. Die berechneten und gemessenen Phasenwerte stimmen sehr gut überein.

Mittels dieser Messungen und Berechnungen können nun die zulässigen Werte für $Z_{e2,e3}$ abgeschätzt werden. Wird wieder ein zulässiger Phasenfehler von 0,1 mrad für Frequenzen bis 1 kHz angenommen, dann sollten die Impedanzen Z_{e2} und Z_{e3} den Wert von 3 k Ω nicht überschreiten.

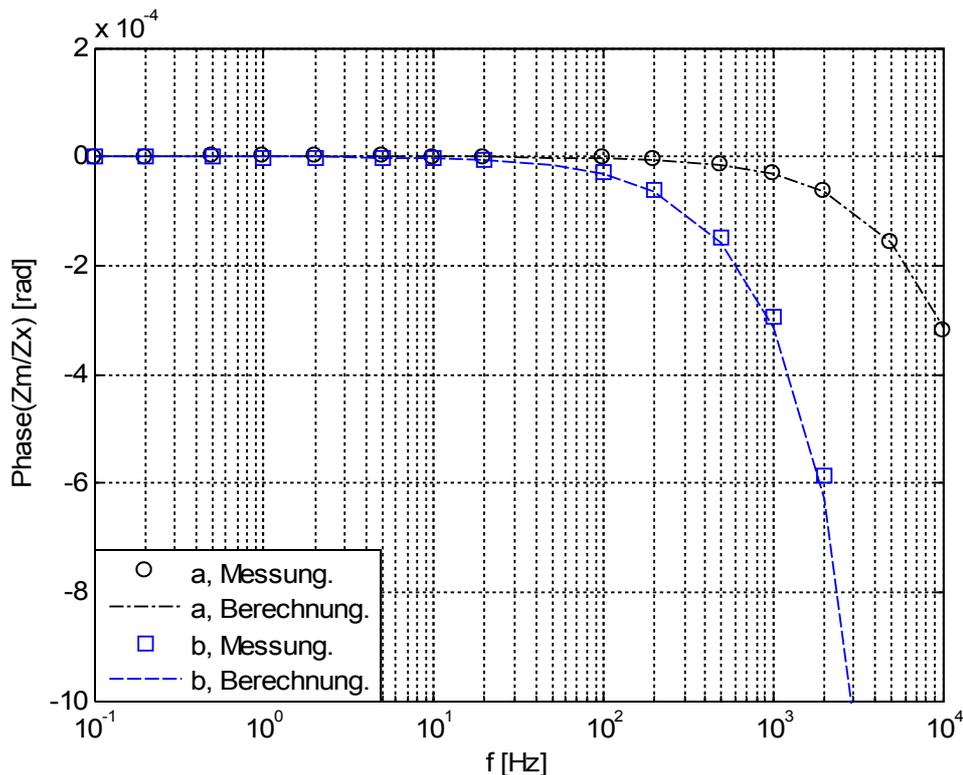


Abbildung 11: Gemessenes und berechnetes Phasenspektrum eines Widerstandsnetzwerkes für unterschiedliche $Z_{e2,e3}$ (a: 1 k Ω und b: 10 k Ω) unter Anwendung der Stromkorrektur. Das Netzwerk entspricht dem elektrischen Modell der Probe in Abbildung 8 mit $Z_x = 1$ k Ω , $R_s = 1$ k Ω , $Z_{e1} = 0$ Ω und $Z_{e4} = 0$ Ω .

3.3.5 Gleichtaktfehler

Bei der Messung von Differenzspannungen bewirken die Gleichtaktspannungen mehr oder weniger große Fehler. Diese Fehler werden typischerweise bei der Entwicklung von elektronischen Schaltungen behandelt, siehe zum Beispiel Tietze und Schenk (1985), sowie bei Impedanzmessungen, siehe zum Beispiel Petrova (1999). Im Folgenden wird nun der Phasenfehler für das obige System abgeschätzt.

Bei einem optimalen Messsystem sollte bei gleicher Spannung $U_5 = U_6$ keine Spannung U_a zwischen den Elektroden 2 und 3 gemessen werden. Aufgrund leicht unterschiedlicher Ver-

stärkungen der Kanäle und unterschiedlicher Spannungsteiler D_2 und D_3 , siehe Gleichung (3.11), entsteht jedoch eine Spannungsdifferenz, die von der Gleichtaktspannung $(U_5 + U_6)/2$ abhängig ist. Fügt man nun die unterschiedlichen Verstärkungen G_2 und G_3 in Gleichung (3.12) ein, so liefert dies die Beziehung

$$\frac{U_a}{U_x} = \frac{G_2 U_2 - G_3 U_3}{U_5 - U_6} = \frac{G_2 D_2 U_5 - G_3 D_3 U_6}{U_5 - U_6} \quad (3.17)$$

zwischen der gemessenen Spannung U_a und der wahren Spannung U_x .

Für die Abschätzung der Messfehler im unteren Frequenzbereich kann die Wirkung unterschiedlicher Elektrodenimpedanzen Z_{e2} und Z_{e3} , bzw. die Wirkung der Spannungsteiler D_2 und D_3 vernachlässigt werden. Die Eingangsimpedanzen Z_v der Verstärker sind im Wesentlichen kapazitiv und daher bei niedrigen Frequenzen sehr hoch, sodass die Spannungsteiler G_2 und G_3 nahezu den Wert Eins annehmen. Für die Spannungen U_5 und U_6 unter Vernachlässigung der Impedanzen Z_v gilt nun $U_5 = U_6 + I_x Z_x$ und $U_6 = I_x (Z_{e4} + R_s)$. Es wird weiterhin berücksichtigt, dass bei der Strommessung die Spannung U_4 mit der Verstärkung G_4 übertragen wird. Für den gemessenen Strom gilt daher $I_a = G_4 I_x$. Für die Beziehung zwischen der gemessenen Impedanz Z_a und der wahren Impedanz Z_x folgt somit

$$\frac{Z_a}{Z_x} = \frac{U_a}{U_x} \frac{I_x}{I_a} = 1 + \frac{G_2 - G_4}{G_4} + \frac{G_2 - G_3}{G_4} \frac{Z_{e4} + R_s}{Z_x}. \quad (3.18)$$

Der zweite Term in dieser Gleichung beschreibt einen Fehler, der nur aufgrund der unterschiedlichen Verstärkungen entsteht. Er ist unabhängig von den Impedanzwerten und daher leicht korrigierbar.

Der dritte Term beschreibt einen Fehler, der auch von den Impedanzen Z_{e4} und Z_x abhängt. Die verwendeten Stromelektroden bewirken typischerweise große Polarisierungseffekte im unteren Frequenzbereich. Die Phasen von Z_{e4} (und auch Z_{e1}) können einige 100 mrad betragen, siehe Abschnitt 3.4.1. Bei unterschiedlichen Verstärkungen G_2 und G_3 werden Anteile dieser Impedanz mit gemessen. Zur Veranschaulichung des Fehlers wird eine Verstärkungsdifferenz $(G_2 - G_3)/G_4$ von 0,1 % angenommen. Eine Impedanz von $Z_{e4} = Z_x \exp(0,5j)$ mit einer Phasenabweichung von 500 mrad zwischen Z_{e4} und Z_x würde in diesem Fall einen Phasenfehler von 0,5 mrad bewirken. Die Abschätzung zeigt, dass zur Vermeidung des Phasenfehlers die Verstärkungsdifferenz kleiner als 0,1 % sein sollte. Zusätzlich sollte die Impedanz Z_{e4} klein im Verhältnis zu Z_x sein.

Die Gleichtaktunterdrückung kann mittels numerischer Korrektur der gemessenen komplexen Spannungen $U_1(f) \dots U_4(f)$ verbessert werden. Dazu werden die frequenzabhängigen Verstär-

kungen der Kanäle $G_1(f) \dots G_4(f)$ ausgemessen. In der Praxis wird hierfür an allen Eingängen das gleiche Spannungssignal angelegt und es werden die resultierenden komplexen Spannungen gemessen. Da nur die Unterschiede zwischen den Kanälen einen Gleichtaktfehler verursachen, kann ein Kanal als Referenzkanal verwendet werden. Die anderen Kanäle werden auf diesen Kanal normiert. Dies liefert die entsprechenden frequenzabhängigen komplexen Korrekturfunktionen. Die Messungen zeigen Verstärkungsunterschiede von bis zu 0,1 % für Frequenzen unterhalb von 10 kHz. Mit der numerischen Korrektur können die Verstärkungsunterschiede auf 0,002 % für den gesamten Frequenzbereich bis 45 kHz und damit auch mögliche Gleichtaktfehler aufgrund unterschiedlicher Verstärkungen $G_1(f) \dots G_4(f)$ deutlich reduziert werden.

Um den Phasenfehler im oberen Frequenzbereich aufgrund unterschiedlicher Impedanzen Z_{e2} und Z_{e3} , beziehungsweise aufgrund unterschiedlicher Spannungsteiler D_2 und D_3 , abzuschätzen wird die Spannung U_5 in Gleichung (3.12) durch kU_6 mit einem Faktor k ausgedrückt. Dies liefert

$$\frac{U_m}{U_x} = D_2 + \frac{D_2 - D_3}{k-1} \quad (3.19)$$

Die Phase wird nun für den Faktor $k=2$ berechnet, bei dem die Spannungsdifferenz $U_x = U_5 - U_6$ der Spannung U_6 entspricht. Der Faktor 2 ist typisch für das bevorzugte Probenhalterdesign, siehe Kapitel 3.5. Weiterhin wird für die Impedanzen Z_{e2} und Z_{e3} der maximal zulässige Wert von 3 k Ω angenommen, siehe Kapitel 3.3.4. Diese liefert für die beiden extremen Fälle $Z_{e2} = 0 \Omega$, $Z_{e3} = 3 \text{ k}\Omega$ und $Z_{e2} = 3 \text{ k}\Omega$, $Z_{e3} = 0 \Omega$, bei denen die Impedanzunterschiede zwischen Z_{e2} und Z_{e3} maximal sind, Phasenwerte von ungefähr +0,1 mrad und -0,2 mrad bei 1 kHz. Diese Abschätzung zeigt, dass die fehlerhaften Phasen sowohl negative Werte als auch positive annehmen können und dass der Fehler von -0,1 mrad, wenn beide Impedanzen einen Wert von 3 k Ω haben, auf -0,2 mrad fallen kann.

3.4 Elektrodeneffekte

3.4.1 Kontaktimpedanzen der Stromelektroden

In den obigen Abschnitten wurde gezeigt, dass auch die Kontaktimpedanzen der Stromelektroden Messfehler bewirken können. Man muss davon ausgehen, dass die Impedanzen bei höheren Stromdichten ein nichtlineares Verhalten zeigen. Zur Auswahl eines geeigneten Elektrodenmaterials wurden daher die Impedanzspektren $Z_{14}(f)$ zwischen jeweils zwei Elektrodenplatten aus Kupfer, Edelstahl oder poröser Bronze für jeweils zwei unterschiedliche Strom-

dichten gemessen. Die Platten wurden an den Enden eines mit Leitungswasser gefüllten Behälters angebracht. Der Behälter hat eine Länge von 28 cm und eine Breite von 6 cm. Die Wasserhöhe war 1 cm und der spezifische Widerstand des Wassers $21 \Omega\text{m}$. Vor den Messungen wurden die Kupfer- und Edelstahlplatten poliert. Die Bronzeplatten wurden neuwertig ohne weitere Oberflächenbehandlung verwendet. Bei den porösen Bronzeplatten handelt es sich um Filterelemente mit einem mittleren Porendurchmesser von $15 \mu\text{m}$, einer Dicke von 4 mm und einer Porosität von 32 %. Das Material ist Cu89Sn11. Die Messung wurde erst einige Stunden nach Vorbereitung des Probenhalters gestartet, sodass sich ein stabiler Zustand einstellen konnte. Die Ergebnisse dieser Messung sind in Abbildung 12 dargestellt.

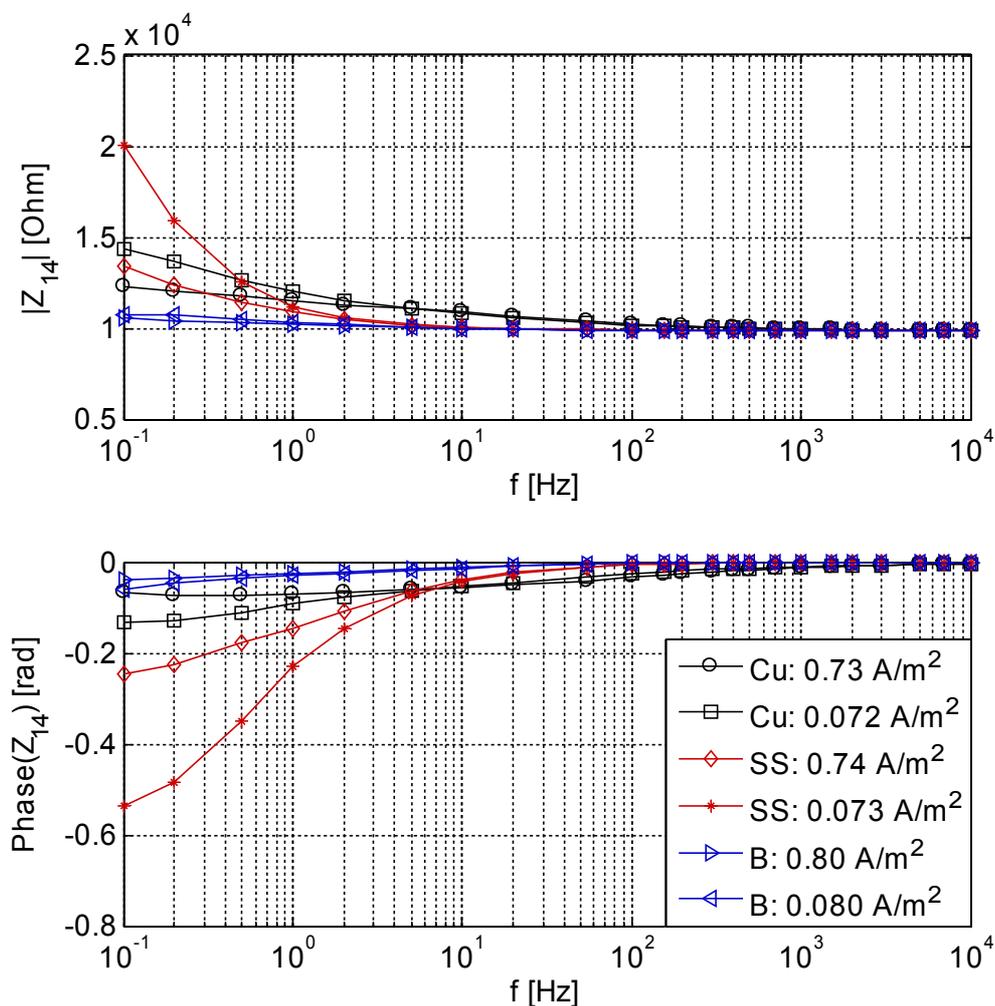


Abbildung 12: Gemessene Impedanzspektren Z_{14} für die Elektrodenmaterialien Kupfer (Cu), Edelstahl (SS) und poröser Bronze (B) für jeweils zwei Stromdichten.

Die gemessenen Impedanzspektren zeigen oberhalb von 10 Hz nur noch eine geringe Frequenzabhängigkeit. Die Werte sind nahezu unabhängig von Elektrodenmaterial und von der Stromdichte. Sie werden im Wesentlichen vom Probenmaterial (Wasser) und von den Abmes-

sungen der Probenhalters bestimmt. Im unteren Frequenzbereich variieren die Spektren jedoch wesentlich stärker. Von den getesteten Materialien zeigt die poröse Bronze die geringsten Beträge und Phasen.

Weiterhin zeigen die Messungen für hohe Stromdichten kleinere Werte für Betrag und Phase. Es ist daher sinnvoll mit höherer Stromdichte zu messen, vorausgesetzt, dass die höhere Stromdichte zur Messung der Probenimpedanzen noch geeignet ist. Die höhere Stromdichte liefert als weiteren Vorteil ein besseres Signal-Rausch-Verhältnis aufgrund der daraus resultierenden höheren Spannungsdifferenz zwischen den Potentialelektroden. Typischerweise werden Anregungsspannungen von ± 5 V verwendet die Stromdichten im Bereich von $0,01 \text{ Am}^{-2}$ bis 2 Am^{-2} bewirken.

Störende nichtlineare Effekte aufgrund der hohen Stromdichte wurden nicht festgestellt. Stromdichten oberhalb von 10^{-3} Am^{-2} bewirken gewöhnlich bei Elektroden nichtlineare Kontaktimpedanzen (Sumner 1976). Bei Anregung mit einer Spannungsquelle erzeugen diese nichtlinearen Impedanzen Ströme mit harmonischen Anteilen. Messungen haben jedoch gezeigt, dass diese harmonischen Signale die Messgenauigkeit nicht negativ beeinflussen. Zudem zeigten Vanhala und Soininen (1995) in ihren Studien, dass der beobachtete IP-Effekt der Proben sich für Stromdichten im Bereich von 10^{-5} Am^{-2} bis $0,2 \text{ Am}^{-2}$ nicht ändert.

Anhand dieser Messungen muss man in Betracht ziehen, dass die inverse Beziehung zwischen der Stromdichte und der Kontaktimpedanz eine inhomogene Stromdichte auf der Oberfläche der Elektroden bewirken kann. Bereiche mit niedriger Impedanz werden höhere Stromdichten erzeugen und diese wieder niedrigere Impedanzwerte. Diese positive Rückkopplung fördert eine inhomogene Stromdichte an der Elektrodenoberfläche.

3.4.2 Phasenfehler aufgrund inhomogener Kontaktimpedanzen

Wie die Messungen in Abschnitt 3.4.1 gezeigt haben, ist die Polarisation der Metallplatten im Vergleich zu schwach polarisierbaren Probenmaterialien relativ groß. Zudem können die Kontaktimpedanzen aufgrund von Oxidation oder weiteren Effekten inhomogen sein. Es stellt sich somit die Frage welche Wirkung inhomogene Kontaktimpedanzen auf den Phasenfehler haben. Im Folgenden wird dieser Fehler für kubische oder zylindrische Probenkörper untersucht, bei denen zur Stromeinspeisung Metallplatten an den Enden des Probenhalters angebracht sind. Es wird angenommen, dass der gesamte Probenkörper mit einem homogenen Probenmaterial gefüllt ist.

Zunächst wird zur Analyse des Phasenfehlers die 2D-Potentialverteilung eines rechteckigen wassergefüllten Behälters mit Länge $l_y = 28$ cm, einer Breite $l_x = 20$ cm, und einer Wasserhöhe $h = 1$ cm berechnet. Der spezifische Widerstand des Wassers ρ ist ungefähr $21 \Omega\text{m}$. Für die 20 cm breiten Elektroden wurde eine inhomogene Kontaktimpedanz $\partial Z_x/\partial x$ simuliert, die linear in x-Richtung von $1953\exp(-0,28j) \Omega\text{m}^{-1}$ auf $2387\exp(-0,28j) \Omega\text{m}^{-1}$ ansteigt.

Die partielle Ableitung des elektrischen Potentials in x-Richtung $\partial U/\partial x$ sollte für den idealen Probenhalter Null sein. Die berechnete Verteilung des Imaginärteils in Abbildung 13 zeigt jedoch deutliche Variationen der Werte in x-Richtung. Das bedeutet, dass die Ergebnisse einer Impedanzmessung von der Position der Spannungselektrode abhängig sind. Die Potentialdifferenz des Imaginärteils zwischen Position 1 und 4 ist in diesem Beispiel $-1,8$ mV, mit einer negativen Phase, und zwischen Position 5 und 8 ist die Potentialdifferenz $+1,8$ mV, mit einer positiven Phase. Weiterhin zeigt diese Berechnung, dass mit zunehmendem Abstand zwischen Stromelektrode und Potentialelektrode der Phasenfehler kleiner wird. In diesem Beispiel ist die berechnete Phase der Potentialdifferenz zwischen Position 1 und 2 $-1,3$ mrad und die Phase der Potentialdifferenz zwischen 2 und 3 $-0,8$ mrad. Mit einem gleichartig aufgebauten Probenkörper wurden vergleichbare Messungen durchgeführt. Für die beiden Stromelektroden wurden polierte Kupferplatten verwendet, deren Höhe über x linear von 8 mm auf 10 mm anstieg. Die Messdaten zeigen vergleichbare Eigenschaften wie die Simulation. Die Spannungselektroden, die nahe an den Stromelektroden lagen, bewirken deutlich größere Phasenfehler. Dies zeigen auch die Messungen in Ulrich und Slater (2004).

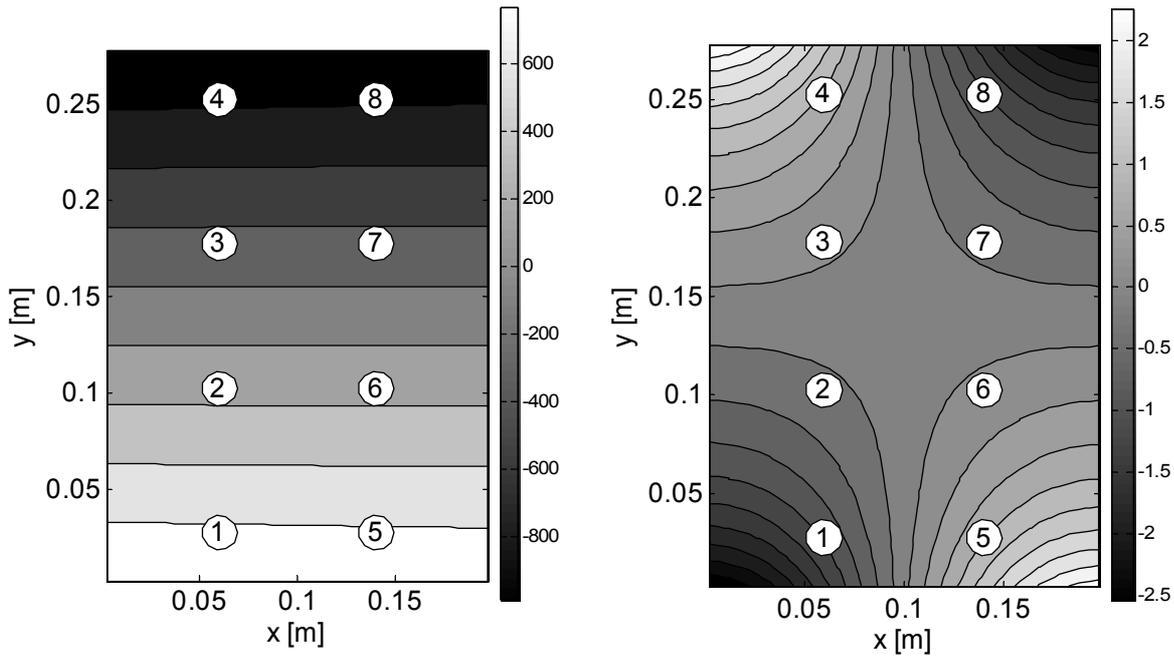


Abbildung 13: Berechnete elektrische Potentialverteilung eines flachen Probenkörpers mit inhomogenen Kontaktimpedanzen der Stromelektroden. Links: Realteil, Rechts: Imaginärteil.

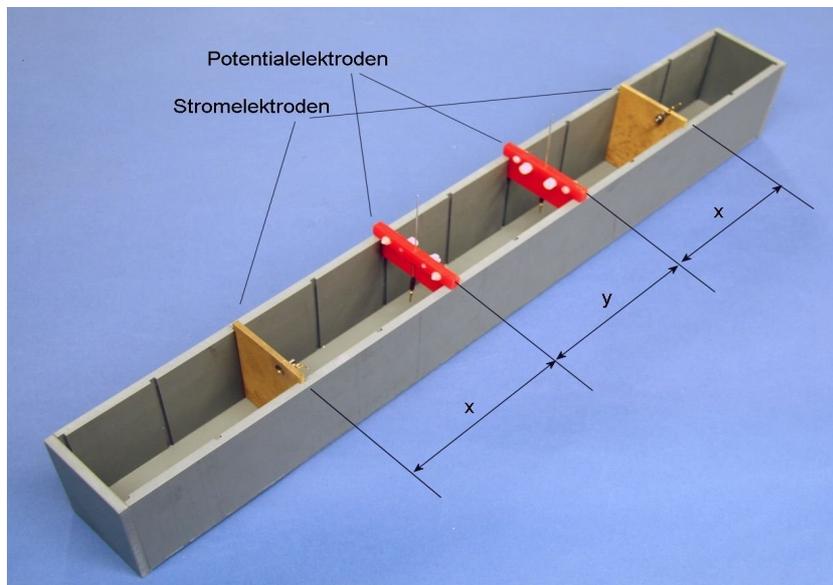


Abbildung 14: Design des Probenhalters für Testmessungen.

Es wurde nun versucht den notwendigen Abstand zwischen den Strom- und Spannungselektroden des Probenhalters für einen maximalen Phasenfehler von 0,1 mrad messtechnisch abzuschätzen. Hierfür wurde das Impedanzspektrum, abhängig vom Abstand zwischen Strom- und Spannungselektrode ($x = 6$ cm und $x = 12$ cm), für zwei unterschiedliche Materialien der Stromelektroden, Edelstahl und poröse Bronze, in einem wassergefüllten Behälter mit einem

rechteckigen Querschnitt von $5,8 \times 5,0 \text{ cm}^2$, siehe Abbildung 14, gemessen. Der Abstand zwischen den Potentialelektroden war $y = 12 \text{ cm}$.

Die gemessenen Phasenwerte der Impedanzen, siehe Abbildung 15, sind im unteren Frequenzbereich für $x = 12 \text{ cm}$ wesentlich kleiner als für $x = 6 \text{ cm}$ und bei einem Abstand von 12 cm ist der Phasenfehler sowohl für Edelstahl als auch für Bronze kleiner als $0,1 \text{ mrad}$.

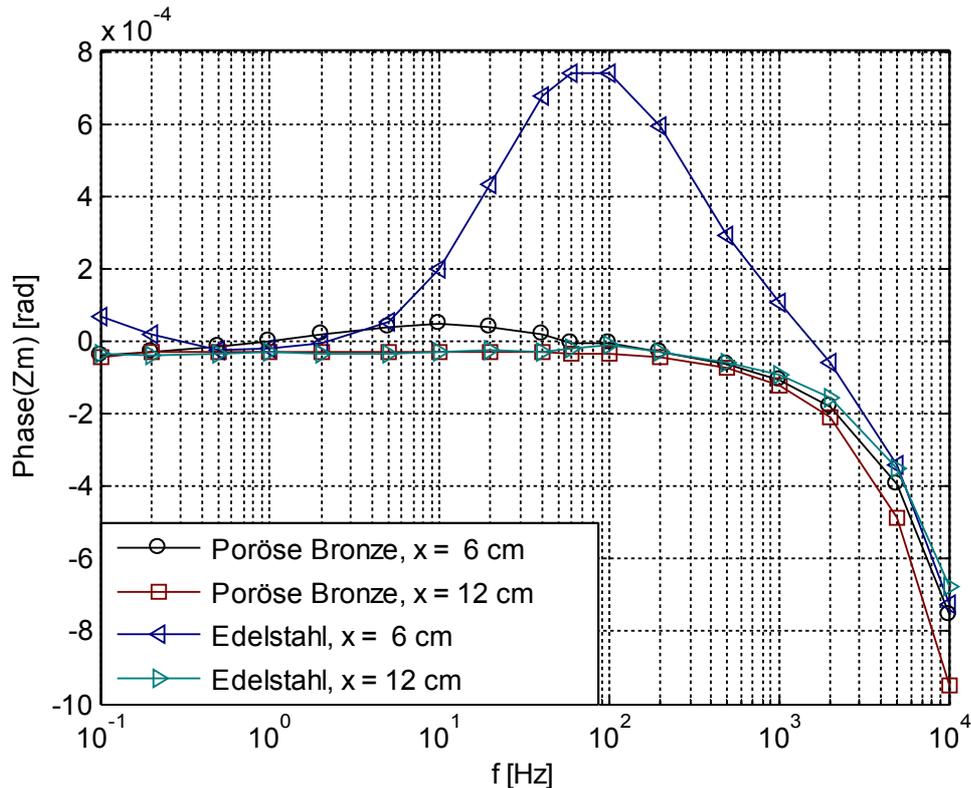


Abbildung 15: Phasenspektrum der Impedanz Z_m für zwei unterschiedliche Abstände zwischen Strom- und Spannungselektrode (6 cm und 12 cm) für jeweils zwei Materialien der Stromelektroden (Edelstahl und poröse Bronze).

Das Verhältnis zwischen dem Abstand der Strom- und Spannungselektrode und der Breite des Probenhalters ist für $x = 12 \text{ cm}$ ungefähr 2:1. Dieses Verhältnis ist aufgrund dieser Messungen bei einem Probenhalter dieser Bauart erforderlich um Phasengenauigkeit von $0,1 \text{ mrad}$ erzielen zu können. Diese Messungen zeigen auch, dass bevorzugt poröse Materialien mit großen Kontaktflächen und den daraus folgenden kleinen Kopplungsimpedanzen für die Stromelektroden verwendet werden sollten.

3.4.3 Polarisierungseffekt der Spannungselektroden

Für die Spannungselektroden wird, wie bei den Stromelektroden, typischerweise ein metallisches Material zur elektrischen Ankopplung an die Probe verwendet. Auch hier können wieder aufgrund der starken Polarisierbarkeit des Metalls große Phasenfehler entstehen. Eine

ungünstig angeordnete Elektrode würde, wie auch das Probenmaterial, vom angelegten elektrischen Feld polarisiert und einen unerwünschten Beitrag zur gemessenen Probenimpedanz liefern. Eine Übersicht über die Oberflächenpolarisation elektrischer Leiter im Elektrolyt findet man z.B. in Eskola (1992) oder Guptasarma (1983). Zur Demonstration der Polarisations-effekte wurde das Phasenspektrum für Potentialelektroden unterschiedlicher Größe und Form in einem wassergefüllten Probenhalter (Länge = 28 cm, Breite = 6 cm, Wasserhöhe = 1 cm, spezifischer Widerstand des Trinkwassers $\rho \approx 21 \Omega\text{m}$) gemessen. Die wirksame Elektrodenlänge ist 1 cm.

Die Elektroden mit der größten Oberfläche, die flache 11 mm breite Kupferelektroden, bewirken bei der Impedanzmessung des Wassers Phasen von -6 mrad und -9 mrad bei 600 Hz, siehe Abbildung 16. Die kleineren Goldelektroden mit einem Durchmesser von 6 mm zeigen eine Phase von -4 mrad bei 40 Hz und die kleinsten Goldelektroden mit einem Durchmesser von 1 mm bewirken noch eine Phase von -1 mrad bei 50 Hz. Diese unerwünschte Phase im unteren Frequenzbereich aufgrund der Elektrodenpolarisation können vermieden werden, wenn mittels konstruktiver Maßnahmen das elektrische Feld am Elektrodenmetall minimiert wird. Dazu wird das Elektrodenmetall außerhalb der Probe, z.B. in Schlitzten bei Ringelektroden oder Röhrchen bei Stabelektroden, angeordnet und elektrisch mit der Probe über ein Elektrolyt oder einem mit Elektrolyt gesättigtem Träger verbunden. Theoretisch sollten die Röhrchen möglichst lang und dünn sein, da die Feldstärke im Röhrchen und damit die mögliche Polarisation mit zunehmendem Abstand von der Probe und mit abnehmender Dicke des Röhrchens abnimmt. Ein dünnes langes Röhrchen wäre daher optimal, wenn nicht gleichzeitig die Kopplungsimpedanz zwischen Metall und Proben mit zunehmendem Abstand und abnehmender Dicke zunehmen würde. Elektroden dieser Art können daher aufgrund der hochohmigeren elektrischen Verbindungen zum Probenmaterial im oberen Frequenzbereich größere Phasenfehler bewirken. Dies zeigt die Messung in Abbildung 16, bei der die Elektrode mit der Probe über wassergesättigtes saugfähiges Papier (Durchmesser 8 mm) elektrisch angekoppelt wurde. Der Phasenfehler konnte nach Gleichung (3.14) für eine Kontaktimpedanz von $8 \text{ k}\Omega$ numerisch korrigiert werden. Da jedoch die Kontaktimpedanz bei praktischen Messungen schwer bestimmbar ist, sollte die Kopplungsimpedanz hinreichend klein sein. Für diesen Elektrodentyp sollte je nach Anwendung eine optimale Konstruktion gesucht werden, bei der sowohl die Kopplungsimpedanz als auch die Elektrodenpolarisation hinreichend klein sind.

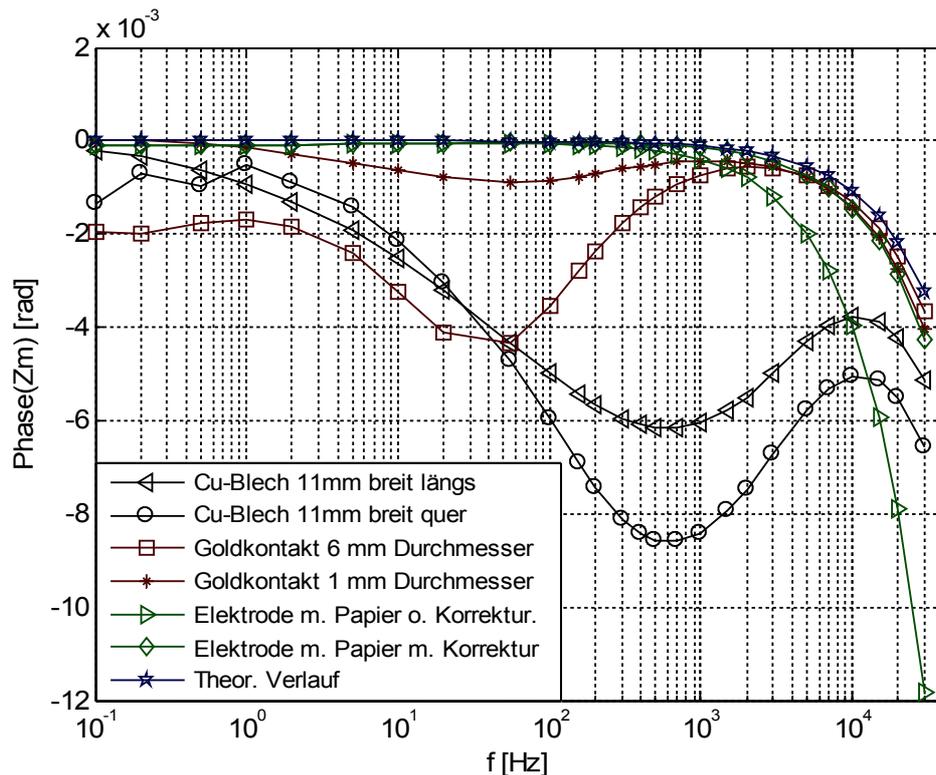


Abbildung 16: Gemessene Phasenspektren unterschiedlicher Potentialelektroden und theoretisches Phasenspektrum des Wassers ($21 \Omega m$, $\epsilon_r = 80$).

Ein anderer Elektrodentyp ist eine Konstruktion nach dem Muster der klassischen unpolarisierbaren Elektroden, bei denen eine Membran, zum Beispiel aus Keramik, zum Trennen des Probenelektrolyts vom Elektrodenelektrolyt verwendet wird, siehe z.B. Ulrich und Slater (2004). Mit diesem Design können Elektrodenelektrolyte mit relativ hoher elektrischer Leitfähigkeit verwendet werden, damit die Kopplungsimpedanz aufgrund des Elektrolytes vernachlässigbar klein wird. Problematisch bei dieser Elektrodenkonstruktion ist die relativ hochohmige Impedanz der Membran. Diese reduziert zwar zusätzlich die Polarisierbarkeit, da sie als elektrische Barriere wirkt, führt aber besonders bei dünnen Elektroden mit geringer Membranfläche zu hohen Kopplungsimpedanzen. Es ist daher sinnvoll ein geeignetes Membranmaterial und eine optimale Größe der Membranfläche zu wählen, sodass zum Einen die Impedanz vernachlässigbar gering ist und zum Anderen die Diffusion der Ionen vom Inneren der Elektrode in das Testmedium keine neuen Messprobleme bewirkt. Die Konstruktion mit Membran ist auch bei teilgesättigten Untersuchungsmedien vorteilhaft.

Eine Elektrode mit Keramikmembran und größerem Querschnitt wurde zum Beispiel für die Messung in Abbildung 25 verwendet. Die Elektrode ist im Wesentlichen ein poröser hohler Keramikkegel. Im Inneren des Kegels befindet sich der metallische Anschluss der über das innere Elektrolyt (meist Wasser) und der Keramikwand mit der Probe elektrisch verbunden

ist. Der mittlere Außendurchmesser des Kegels, der die Probe kontaktiert, ist ungefähr 13 mm und die Länge ist ungefähr 30 mm. Bei diesem Design wirkt besonders die große Membranfläche und der große Querschnitt. Die Elektrolytlösung des Mediums und der Elektrode war identisch.

3.4.4 Elektrodenrauschen und Störungen

Elektrodenrauschen und elektromagnetische Störungen sind die wesentlichen Effekte, welche die statistische Messgenauigkeit bestimmen. Bezüglich des Elektrodenrauschens wurden schon viele Untersuchungen durchgeführt, sowohl für Metallelektroden als auch für sogenannte unpolarisierbare Elektroden. Einige Daten hierzu findet man zum Beispiel in Vanhala und Soininen (1995), Lu und Macnae (1998). In Vanhala und Soininen (1995) wurden bezüglich der Metallelektroden Aluminium, Stahl, rostfreier Stahl, und Platin getestet. Von diesen Elektroden zeigte Platin und rostfreier Stahl das geringste Rauschen. In Lu und Macnae (1998) wurden Aluminium, Eisen, rostfreier Stahl und Messing untersucht, mit dem Ergebnis, dass von den Metallelektroden rostfreier Stahl und Messing am geringsten rauschten. Demnach sind die chemisch edleren Metalle wie Platin, Messing und rostfreier Stahl bezüglich des Rauschens sehr gut geeignet. Da bei den Messungen im Rahmen dieser Arbeit die Messgenauigkeit nur bei sehr kleinen Anregungsspannungen durch das Elektrodenrauschen eingeschränkt wurde, wurden keine Untersuchungen bezüglich des Elektrodenrauschens durchgeführt. Das Rauschen der Verstärker und der DAQ-Karten kann im Vergleich zum Elektrodenrauschen ohnehin vernachlässigt werden.

Um dennoch insbesondere bei kleinen Anregungsspannungen das Rauschen bzw. die statistische Messunsicherheit der Signale zu reduzieren, könnte die Messzeit verlängert werden. Die vierfache Messzeit würde die statistische Messunsicherheit um den Faktor zwei reduzieren, sofern die Störsignale zufällig sind. Bei den niedrigen Frequenzen wird dies jedoch sehr schnell unpraktisch, da eine Messung mit 3 Perioden bei 1 mHz schon 50 Minuten dauert.

Es wurde auch die Wirkung spezieller Filterfunktionen, wie zum Beispiel das Hanningfilter, untersucht. Mit diesen Filterfunktionen werden die Daten vor der Fouriertransformation multipliziert. Simulationen zeigten jedoch, dass alle Filter eine größere Messunsicherheit als das einfache Rechteckfilter aufwiesen, weil immer ein Teil der Information unterdrückt wird. Die Anwendung des Hanningfilters auf reale Messungen zeigten auch keine besseren Ergebnisse.

Problematischer als das Rauschen sind die elektromagnetischen Störungen der 50 Hz Netzspannung. Diese Messfrequenz wurde daher möglichst vermieden. Auch bei der ersten und zweiten harmonischen Schwingung, also bei 100 Hz und 150 Hz, wurden möglichst keine

Messungen durchgeführt. Anstelle dessen wurden bei Frequenzen kurz davor und dahinter gemessen.

3.5 Optimales Probenhalterdesign

Anhand der Fehlerabschätzungen in den vorhergehenden Kapiteln wird nun ein Probenhalter entworfen, der Impedanzmessungen an Proben mit einer Phasengenauigkeit von 0,1 mrad für Frequenzen von 1 mHz bis 1 kHz ermöglicht. Der Querschnitt des Probenhalters ist quadratisch oder kreisförmig und die Stromelektroden sind poröse Platten, die an den Enden des Probenhalters angebracht sind. Weiterhin wird angenommen, dass der gesamte Probenhalter mit einem einheitlichen Probenmaterial gefüllt ist.

Zuerst werden die relativen Abstände der Elektroden festgelegt. Nach Kapitel 3.3.5 sollte zur Vermeidung von unerwünschten Gleichtaktfehlern die zu messende Probenimpedanz Z_x nicht kleiner sein als die Impedanz Z_{e4} , die bei vernachlässigten Kontaktimpedanzen der Stromelektroden die Impedanz des Mediums zwischen Elektrode 3 und 4 ist. Daraus folgt für eine Füllung mit einem einheitlichen Material, dass der Abstand der Spannungselektroden nicht kleiner sein soll als der Abstand zwischen der Spannungselektrode 3 und der Stromelektrode 4. Es wird daher vorgeschlagen die Potentialelektroden symmetrisch bei 33% und 66% der gesamten Länge der Probenhalters anzuordnen, sodass $Z_{e1} \approx Z_x \approx Z_{e4}$ ist.

Als zweites wird das Verhältnis der Probenhalterlänge zum Durchmesser bestimmt. Die Messungen in Kapitel 3.4.2 zeigen, dass die Polarisierung inhomogener Stromelektroden eine Rückwirkung auf die Probenimpedanz haben können, die zu Phasenfehlern führt, wenn die Stromelektroden zu nah an den Spannungselektroden positioniert werden. Hier wurde ein Abstand, der mindestens das Zweifache des Durchmessers betragen soll, vorgeschlagen. Aus diesem Grunde wurde für die Probenhalterlänge das sechsfache des Durchmessers gewählt.

Als drittes wird die absolute Größe des Probenhalters abgeschätzt. Hierfür ist die Impedanz Z_{e4} und der spezifische Widerstand des Probenmaterials entscheidend. Entsprechend den Anforderungen in Kapitel 3.3.4 sollte die Impedanz Z_{e4} nicht größer als 35 k Ω sein. Für die einfache Geometrie des Probenhalters kann die Impedanz mit

$$Z_{e4} = \rho \frac{l_{34}}{A} \quad (3.20)$$

sehr leicht aus dem spezifischen Widerstand ρ der Probe, dem Querschnitt A des Probenhalters und dem Abstand l_{34} zwischen der Spannungselektrode 3 und der Stromelektrode 4 unter Vernachlässigung der Kontaktimpedanzen der Stromelektroden berechnet werden (siehe auch

Gleichung (3.4)). Dies führt bei einem Probenhalter mit quadratischem Querschnitt und den obigen relativen Abmessungen für Probenmaterialien, deren spezifischer Widerstand nicht größer als $1000 \Omega\text{m}$ ist, zu einem Abstand von $l_{34} = 12 \text{ cm}$, einem Querschnitt von $A = 6 \times 6 \text{ cm}^2$ und damit zu einer Gesamtlänge des Probenhalters von 36 cm .

Weiterhin werden zur Vermeidung unerwünschter Polarisierungseffekte bei den folgenden Testmessungen für die Spannungselektroden poröse hohle Keramikkegel verwendet, siehe auch Kapitel 3.4.3. Für die Stromelektroden werden poröse Bronzeplatten verwendet, die im Vergleich zur Probenimpedanz kleine Kontaktimpedanzen aufweisen, siehe Kapitel 3.4.1 und 3.4.2.

Um zusätzliche parasitäre Kapazitäten zur Probe zu vermeiden, sollte der Probenhalter in großem Abstand ($> 30 \text{ cm}$) von elektrisch leitenden Flächen aufgebaut werden.

3.6 Parasitäre Kapazitäten der Probe

Über die elektrische Kapazität, die sich zwischen der Probe und benachbarten elektrisch leitenden Objekten bildet, können weitere parasitäre Ströme abfließen. Es wird nun abgeschätzt, ob diese Kapazitäten einen relevanten Messfehler bewirken können. Dazu wird die Kapazität näherungsweise bestimmt. Hierfür wird die Probe als zylindrisches Leitungsstück angenommen, welches sich über einer elektrisch leitenden Fläche befindet. Für dieses einfache Modell kann die Kapazität zwischen Probe und Fläche mittels

$$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon_r \frac{1}{\ln\left[\frac{2h}{D} + \sqrt{\left(\frac{2h}{D}\right)^2 - 1}\right]} \quad (3.21)$$

berechnet werden (Meinke und Gundlach 1992). Hierbei ist l die Länge der Probe, D der Durchmesser und h der Abstand von der Probenachse zur Fläche. Als Beispiel wurde die Kapazität der vorgeschlagenen Probe in Kapitel 3.5 mit $l = 36 \text{ cm}$ und $D = 6 \text{ cm}$ in Abhängigkeit von h berechnet. Die Ergebnisse in Tabelle 1 zeigen zum Einen, dass die Kapazitäten eine relevante Größe haben, die zu Messfehlern bei hohen Frequenzen führen können, und zum Anderen, dass bei kleinen Abständen die Kapazität sehr stark zunimmt.

$h[\text{cm}]$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$C[\text{pF}]$	18,2	10,7	8,7	7,7	7,1	6,7	6,4	6,1	5,9	5,7

Tabelle 1: Probenkapazität C in Abhängigkeit vom Abstand h .

Es ist daher sinnvoll die Proben hinreichend weit (> 20 cm) von elektrisch leitenden Objekten aufzubauen. Da die Berechnung nur eine grobe Abschätzung ist, können die Kapazitätswerte nicht zur Korrektur des Probenstromes bei einem realen System verwendet werden. Zur Korrektur des Stromes sollte die Kapazität, bzw. einzelne Werte für Teilabschnitte der Probe, ausgemessen werden, und im Modell in Abbildung 8 zum Beispiel als zusätzliche Kapazitäten von den Elektroden 3 und 4 gegen Erdpotential berücksichtigt werden.

Die Kapazität zwischen den Elektroden und die daraus resultierende Phasenverschiebung ist, unter Vernachlässigung der Streufelder, eine Eigenschaft der Probe und verursacht daher keinen Fehler.

3.7 Induktive Effekte

Bei den induktiven Effekten wirkt zum Einen die Probeninduktivität und zum Anderen die Gegeninduktivität, die sich zwischen den stromführenden Leitungen und den Leitungen zur Spannungsmessung bilden. Zur Abschätzung der maximalen Probeninduktivität wird für die Probe ein Draht in großem Abstand von einer leitfähigen Fläche angenommen. Der Induktivitätswert liegt hierfür bei 1000 nH/m (Meinke und Gundlach 1992). Der Probenabschnitt zwischen den Spannungselektroden hat bei der vorgeschlagenen Probe in Kapitel 3.5 eine Länge von 12 cm. Der maximal zu erwartende Induktivitätswert wäre damit 120 nH. Die Phase der Gesamtimpedanz

$$Z = R + j\omega L \quad , \quad (3.22)$$

die als Reihenschaltung der Probeninduktivität L und dem Probenwiderstand R dargestellt werden kann, wird für kleine Widerstandswerte der Probe maximal. Für eine maximale Phase von 0,1 mrad bei einer Frequenz von 1 kHz sollte der Probenwiderstand nicht kleiner als $7,5 \Omega$ werden, bzw. der spezifische Widerstand dieser Probe sollte nicht kleiner als $0,18 \Omega\text{m}$ sein. Dieser spezifische Widerstand wird bei typischen Bodenproben nicht unterschritten, sodass dieser induktive Effekt vernachlässigt werden kann.

Der zweite mögliche Messfehler wird durch die Gegeninduktivität M bewirkt. Der Messstrom I fließt gemäß Abbildung 7 über die Leiterschleife C1, die die Stromzuleitung zusammen mit der Probe (Elektroden 1 und 4) bildet. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, das wiederum eine Spannung in die Leiterschleife C2, die die Spannungsmessleitung zusammen mit der Probe (Elektrode 2 und 3) bildet, induziert. Die induzierte Spannung wirkt additiv zur Spannung, die aufgrund des stromdurchflossenen Probenwiderstandes R entsteht. Vergleichbar zur Gleichung (3.22) gilt daher für die Gesamtimpedanz

$$Z = R + j\omega M \quad (3.23)$$

Zur groben Abschätzung der Gegeninduktivität M werden zwei ineinander liegende kreisförmige Leiterschleifen mit gemeinsamem Zentrum in einer Ebene angenommen. Die Gegeninduktivität dieser Anordnung ist

$$M = \frac{2\pi^2 \cdot 10^{-7} r_2^2}{r_1} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right], \quad (3.24)$$

wobei r_1 der Radius der äußeren Schleife und r_2 der Radius der inneren ist (Purcell 1989). Der Umfang der äußeren Schleife einschließlich der vorgeschlagenen Probenlänge ist 1,36 m. Der äquivalente Radius wäre demnach $r_1 = 0,217$ m. Der Abstand zwischen den Spannungselektroden ist 12 cm, für den inneren Radius wird daher $r_2 = 0,06$ m angenommen. Für diese Werte ist die Gegeninduktivität $M = 32$ nH. Der Wert ist noch kleiner als die oben berechnete Probeninduktivität L und damit vernachlässigbar.

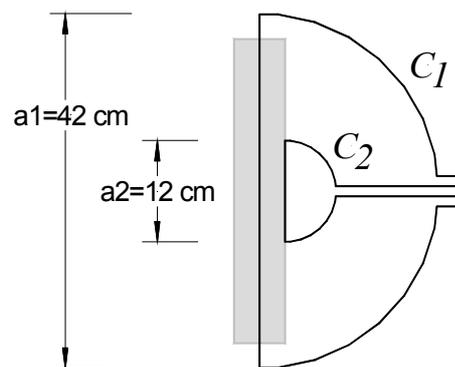


Abbildung 17: Anordnung der Leiterschleifen zur Abschätzung der Gegeninduktivität.

Mit der Neumannschen Formel zur Berechnung von Gegeninduktivitäten linienförmiger Leiterkreise (siehe z.B. Blume 1994),

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{ds_1 \cdot ds_2}{|r_1 - r_2|}, \quad (3.25)$$

wird zusätzlich eine etwas genauere Schätzung durchgeführt. In dieser Formel sind C_1 , C_2 die beiden Leiterschleifen und r_1 , r_2 die Koordinaten der Schleife bezogen auf einen Referenzpunkt. Zur Berechnung wird die Geometrie mit zwei Halbkreisen nach Abbildung 17 angenommen. Problematisch ist dabei der gemeinsame Rand (die 12 cm) der Schleifen. Die Spannung in der Schleife C_2 für diesen Abschnitt wird durch die Selbstinduktion in C_1 vorgegeben. Um dennoch einen Wert abzuschätzen endet C_2 am Probenrand in 3 cm Abstand von der Mittelachse der Probe. Dies liefert eine Gegeninduktivität von 34 nH. Auch diese Abschätzung zeigt, dass der Effekt der Gegeninduktivität vernachlässigt werden kann.

3.8 Skin-Effekt

Im Folgenden wird nun der Einfluss des Skin-Effektes auf die Messgenauigkeit abgeschätzt. Die zeitlich veränderliche Stromverteilung in der Probe erzeugt ein Magnetfeld, das nach dem Induktionsgesetz ein elektrisches Feld bewirkt, welches wiederum einen Stromfluss zur Folge hat. Dieser Stromfluss wirkt dem erzeugenden entgegen und bewirkt damit eine Stromverdrängung. Für ein homogenes lineares isotropes Medium mit der komplexen Leitfähigkeit σ und der magnetischen Permeabilität μ kann die resultierende Stromdichte \mathbf{J} als Vektordifferentialgleichung

$$\Delta \mathbf{J} = j\omega\sigma\mu \mathbf{J} \quad (3.26)$$

beschrieben werden (siehe z.B. Blume 1994). Die Lösung der Differentialgleichung für eine angenommene Stromdichte an der Oberfläche ($z = 0$) des Halbraums liefert die bekannte Gleichung des Skin-Effektes

$$\mathbf{J}(z) = \mathbf{J}(z=0) \exp\left(- (1+j) \frac{z}{d}\right), \quad (3.27)$$

mit der Skin-Tiefe (oder auch äquivalente Leiterschichtdicke)

$$d = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu}}. \quad (3.28)$$

Für eine relative magnetische Permeabilität von $\mu_r = 1$ erhält man

$$d \text{ [m]} = 503 \sqrt{\frac{\rho \text{ [}\Omega\text{m}]}{f \text{ [Hz]}}}. \quad (3.29)$$

(siehe z.B. deGroot-Hedlin und Constable 1990). Bei einer Frequenz von 1 kHz, einer relativen magnetischen Permeabilität $\mu_r = 1$ und einem spezifischen Widerstand von $\rho = 10 \Omega\text{m}$ ist die Skin-Tiefe ungefähr $d = 50 \text{ m}$ und damit wesentlich größer als der Radius der Probe. Zur Berechnung der Stromdichte im Inneren der Probe ist aufgrund der relativ großen Skin-Tiefe die Gleichung (3.27) nicht geeignet.

Zur Fehlerabschätzung wird daher Gleichung (3.26) für Zylinderkoordinaten gelöst. Hierfür wird angenommen, dass die Probe ein unendlich langer Zylinder ist und der Strom nur in Achsrichtung durch den Zylinder fließt. Aufgrund der Rotationssymmetrie ist die Stromdichte nur vom Radius r abhängig. Dies führt nach Umstellung von Gleichung (3.26) in Zylinderkoordinaten zu

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_z}{\partial r} - j\omega\sigma\mu J_z = 0. \quad (3.30)$$

Hierbei weist jetzt der Index z auf die Richtung der Zylinderachse hin. Diese Gleichung wurde in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung umgestellt und mit MATLAB gelöst. Als Startbedingung, bzw. Randbedingung wurde angenommen, dass für den Radius $r = 0$ die erste Ableitung der Stromdichte Null ist und die Stromdichte einen Wert von Eins hat. Die Berechnung liefert für eine Probe mit einem Radius von 3 cm, einem spezifischen Widerstand von $10 \Omega\text{m}$ bei einer Frequenz von 1 kHz eine Phasenverschiebung zwischen $r = 3 \text{ cm}$ und $r = 0$ von $-0,2 \mu\text{rad}$. Dieser Wert ist sehr klein. Der Einfluss des Skin-Effektes auf die Messgenauigkeit kann somit vernachlässigt werden. Selbst für Proben mit einem Durchmesser von 1 m ist die Phasendifferenz nur $-50 \mu\text{rad}$. Der Betrag des Stromes fällt hierbei von außen nach innen um 50 ppm.

3.9 Messungen an inhomogenen Proben

Vergleichbar zu den Phasenfehlern aufgrund inhomogener Kontaktimpedanzen der Stromelektroden kann auch die inhomogene Probe eine ungünstige Stromverteilung bewirken, sodass abhängig von der Position der Spannungselektroden eine falsche, auch positive, Phase der Impedanz gemessen wird. Die Verwendung von Ringelektroden zur Messung eines mittleren Potential über den Probenquerschnitt ist hierfür nicht hilfreich, da gerade die resultierende inhomogene Spannungsverteilung einen Stromfluss entlang des Elektrodenringes und damit einen Elektroden-Polarisationsfehler bewirken würde. Die mittlere Spannung über den Querschnitt der Probe sollte besser mit mehreren Elektroden, die nicht elektrisch verbunden sind, gemessen und anschließend numerisch bestimmt werden.

Für ein vereinfachtes Probenmodell aus diskreten Impedanzen mit den Werten Z_1 , Z_2 und Z_x wird nun der Phasenfehler bestimmt, siehe Abbildung (18).

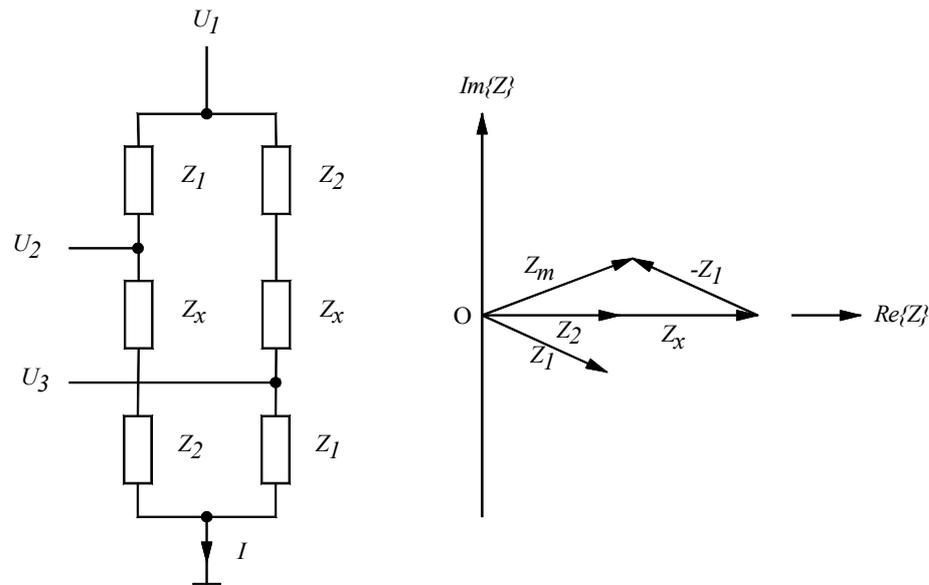


Abbildung 18: Vereinfachtes Modell der inhomogenen Probenimpedanz zur Abschätzung des Phasenfehlers (links) und Zeigerdiagramm der Impedanzen (rechts).

Für dieses Modell ist die gemessene Impedanz

$$Z_m = \frac{U_2 - U_3}{I} = \frac{(Z_x + Z_2) \frac{I}{2} - (Z_1) \frac{I}{2}}{I} = \frac{Z_x + Z_2 - Z_1}{2}. \quad (3.31)$$

Werden nun, wie in der Zeigerdarstellung in Abbildung (18), als Beispiel für Z_x und Z_2 Impedanzwerte ohne Phase angenommen und für Z_1 ein Wert mit negativer Phase, so wird die Phase von Z_m positiv. Dieses Beispiel zeigt, dass bei inhomogenen Proben durchaus Impedanzen mit positiven Phasen gemessen werden können, obwohl die Phasen der Teilimpedanzen innerhalb der Probe alle negativ sind. Dies gilt natürlich auch für tomographische Messungen mit mehreren Elektroden. Auch hier können die einzelnen gemessenen Transferimpedanzen, abhängig von der Probeninhomogenität, positive Werte annehmen.

3.10 Driftkorrektur und Standardabweichung

Bei praktischen Messungen können die gemessenen Zeitreihen $u(t)$ zusätzlich zu den stimulierten Messsignalen Störspannungen enthalten, zum Beispiel aufgrund von niederfrequenten Elektrodendriften, Elektrodenrauschen und elektromagnetischen Störungen. Im Folgenden werden die Phasenfehler aufgrund der niederfrequenten Störsignale behandelt. Weiterhin wird eine Methode aufgezeigt, wie diese Fehler bei SIP-Messungen im Frequenzbereich minimiert werden können. Die Driftkorrektur von Zeitreihen bei IP-Messungen im Zeitbereich wurde von Dahlin et al. (2002) mit gutem Erfolg durchgeführt. Er konnte zeigen, dass auch mit Edelmetallelektroden, im Vergleich zu unpolarisierbaren Elektroden, unter Verwendung einer Driftkorrektur gute IP Messungen durchgeführt werden konnten. Für die Abschätzung des Fehlers

wird ein lineares System angenommen, dass eine Aufteilung des gemessenen Signals in den Anteil des stimulierten Messsignals $u_m(t)$ und den Anteil des Störsignals $u_s(t)$ zulässt mit

$$u(t) = u_m(t) + u_s(t). \quad (3.32)$$

Entsprechend kann auch die komplexe Amplitude des gemessenen Signals U in die komplexen Amplituden des stimulierten Messsignals U_m und des Störsignals U_s aufgeteilt werden. Als Beispiel wird für das Störsignal eine lineare Drift $u_s(t) = 1 \text{ V } t/T$ angenommen. Die entsprechenden Koeffizienten der Fourierreihe liefern nun die komplexen Amplituden für diese Signalform. Die Koeffizienten sind $a_n = 0$ und $b_n = -1 \text{ V}/(n\pi)$. Zur Berechnung wurde die Anregungsfrequenz ω in Gleichung 3.5 durch ein vielfaches der Grundfrequenz $\omega_0 = 2\pi/T$ ersetzt:

$$U = a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{2}{T} \int_0^T u(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (3.33)$$

Für den Phasenfehler wird das Verhältnis $(U_m + U_s)/U_m$ berechnet, wobei für U_m zur einfacheren Berechnung die Amplitude 1 V und die Phase Null angenommen wird. Dies liefert einen Phasenfehler von $\arctan(1/(n\pi))$. Nimmt man weiterhin an, dass die Anregungsfrequenz des Messsignals mit der Grundfrequenz f_0 des Störsignals übereinstimmt ($n = 1$), so erhält man einen Phasenfehler von 308 mrad. Zur Veranschaulichung ist der zugehörige Zeitverlauf des Signals $u(t)$ in Abbildung 19 dargestellt.

In Vanhala und Soininen (1995) wird ein Phasenfehler von 1 mrad für eine Drift von 1 mV/100 s bei einem Quellsignal von 100 mV und einer Frequenz von 16 MHz angegeben. Die komplexe Amplitude wird in dieser Arbeit mittels -least squares fitting- bestimmt. Eine Abschätzung des Fehlers nach der obigen Berechnung würde einen Fehler von 1,4 mrad ergeben unter der Annahme, dass im Aufsatz von Vanhala und Soininen (1995) mit dem Begriff Quellsignal der Effektivwert des stimulierten Signals gemeint ist.

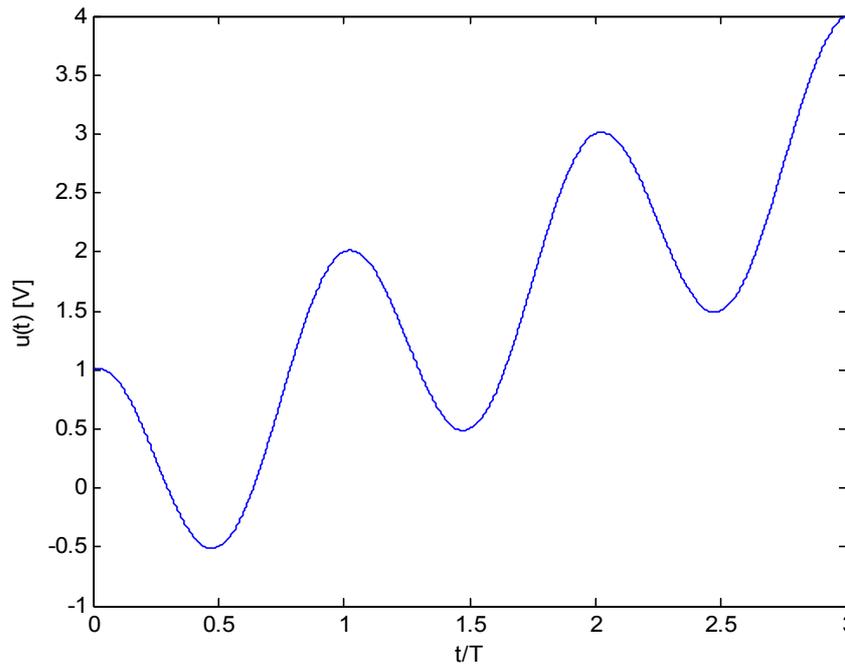


Abbildung 19: Zeitverlauf des stimulierten Messsignals mit Drift.

Die Berechnungen zeigen, dass niederfrequente Driften große Phasenfehler bewirken können. Es ist daher sinnvoll diese Driften, sofern sie vorhanden sind, numerisch zu korrigieren. Zur Driftkorrektur wird die Zeitreihe in m Abschnitte gleicher Dauer aufgeteilt. Für jeden Abschnitt wird der arithmetische Mittelwert

$$u_n = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} u(t) dt \quad (3.34)$$

berechnet. Die Integrationszeit T der Abschnitte wird so gewählt, dass über eine ganze Anzahl von Perioden des Anregungssignals, mindestens eine, integriert wird. Da der arithmetische Mittelwert des stimulierten Messsignals $u_m(t)$ für diese Integrationszeit Null ist, liefert nur das Driftsignal $u_s(t)$ einen Beitrag. Zusätzlich wird der mittlere Zeitpunkt

$$t_n = \frac{1}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} t dt \quad (3.35)$$

für den jeweiligen Abschnitt berechnet. Mittels der Spannungsmittelwerte u_n , den zugehörigen Zeitpunkten t_n und einer Spline-Interpolation wird ein Driftsignal $u_d(t)$ geschätzt. Mit diesem Signal wird anschließend die gemessene Zeitreihe entsprechend der Gleichung

$$u_c(t) = u(t) - u_d(t) \quad (3.36)$$

korrigiert. Numerische Tests zeigten, dass die Phasenfehler von Driften mit dieser Korrektur vollständig behoben werden können, wenn die Drift für den Zeitausschnitt 0 bis nT mit einem Polynom zweiter Ordnung $u_s(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ beschrieben werden kann.

Zur Berechnung der Standardabweichung wird, wie für Gleichung 3.34 beschrieben, die Zeitreihe ebenfalls in Abschnitte gleicher Dauer T aufgeteilt. Für jeden Abschnitt wird die komplexe Amplitude U_n berechnet:

$$U = \frac{2}{nT} \int_0^{nT} u(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{n} \sum_n \frac{2}{T} \int_{(n-1)T}^{nT} u(t) e^{-jn2\pi f_0 t} dt = \frac{1}{n} \sum_n U_n . \quad (3.37)$$

Zur einfacheren Darstellung wurde hier die eulersche Identität verwendet. Aus den einzelnen Amplituden U_n werden schließlich die mittlere komplexe Amplitude U und die Standardabweichung berechnet. Für die niedrige Frequenz von 1 mHz werden wegen der sehr langen Messzeiten in der Regel nur wenige Perioden gemessen, sodass auch nur wenige einzelne Amplituden berechnet werden können. Die berechnete Standardabweichung kann daher nur eine ungefähre Aussage über die statistische Genauigkeit der berechneten komplexen Amplitude liefern.

3.11 Analyse der Messdaten

Für eine erste Überprüfung der Messdaten können die gemessenen Impedanzspektren grafisch dargestellt werden. Hierfür wird häufig das Bode- oder Nyquist-Diagramm verwendet. Beim Bode-Diagramm wird der Betrag und die Phase der komplexen Impedanz oder Admittanz über die Frequenz aufgetragen. Es ist auch üblich Real- und Imaginärteil über die Frequenz aufzutragen. Die Diagramme ermöglichen zusätzlich eine übersichtliche Darstellung der statistischen Messunsicherheit für die einzelnen Frequenzen. Beim Nyquist-Diagramm wird der Imaginärteil in Abhängigkeit von Realteil aufgetragen mit der Frequenz als Parameter. Diese Darstellung wird häufig bei elektrochemischen Analysen verwendet. Es werden auch Kombinationen als 3D-Darstellung verwendet (Macdonald 1987). Diese Darstellungen ermöglichen eine erste Überprüfung der Messdaten und Analyse des Mediums durch Vergleich mit bekannten Ergebnissen.

Eine weitere Prüfmöglichkeit liefert die Beziehung von Kramers-Kronig (Kronig 1926, Kramers 1929). In Macdonald (1987) wird für die Relation zwischen dem Real- und dem Imaginärteil der Impedanz die Gleichung

$$\text{Im}\{Z(\omega)\} = -\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{Re}\{Z(\nu)\} - \text{Re}\{Z(\omega)\}}{\nu^2 - \omega^2} d\nu \quad (3.38)$$

und für die Relation zwischen Betrag und Phase die Gleichung

$$\varphi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln|Z(\nu)|}{\nu^2 - \omega^2} d\nu \quad (3.39)$$

angegeben. Da gewöhnlich der Realteil und Imaginärteil gemessen wird können mittels dieser Gleichungen die beiden Anteile gegeneinander überprüft werden. Die Relationen sind für Minimalphasensysteme bzw. für lineare und zeitinvariante Systeme gültig. Voraussetzung für die Anwendung ist jedoch, dass die Impedanz für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ feste definierte Grenzwerte annimmt, wodurch die Anwendung erschwert wird.

Für weitergehende Analysen werden gewöhnlich Modelle verwendet, welche die chemischen und physikalischen Prozesse des Mediums möglichst gut beschreiben. Die Modelle können als Funktion $F(f_n, \mathbf{m})$ dargestellt werden. Hierbei sind f_n die Messfrequenzen und \mathbf{m} die Modellparameter. Für das Cole-Cole-Modell Gleichung (2.18) wären die Modellparameter zum Beispiel ρ , m , τ , und c . Zusätzlich zur physikalischen Beschreibung der Prozesse ermöglicht das Modell die Beziehung zwischen Real- und Imaginärteil der Messdaten zu prüfen. Die Modelle sind gewöhnlich Minimalphasensysteme und erfüllen daher die Anforderungen der Kramers-Kronig-Transformation. Dies bedeutet, wenn das gemessene Impedanzspektrum mit dem Spektrum des Modells übereinstimmt, dann erfüllen auch die Messdaten die Beziehung nach Kramers-Kronig für den relevanten Frequenzbereich.

Die Modellparameter können mittels Optimierungsmethoden bestimmt werden, siehe z.B. Macdonald (1987), Kemna (2000A) oder Chen et al. (2008). Bei der Optimierung wird versucht die Modellparameter so zu ändern, dass die Abweichung zwischen den Messwerten und den modellierten Werten minimal wird. Als Maß für die Abweichung kann z.B. das Fehlerquadrat

$$\|Z_m(f_n) - F(f_n, \mathbf{m})\|_2 \quad (3.40)$$

verwendet werden. Z_m ist hierbei das gemessene Impedanzspektrum. Zusätzlich können die Messdaten der jeweiligen Frequenzen oder die komplexen Anteile getrennt (z.B. Real- und Imaginärteil) mit einem zusätzlichen Parameter gewichtet werden, um damit zum Beispiel fehlerhafte Werte weniger zu berücksichtigen (siehe z.B. Macdonald 1987). Ein sehr universelles Optimierungsverfahren für wenige Parameter ist die Simplex-Methode von Nelder und Mead (1965), die unter anderem im Rahmen der Arbeit verwendet wird.

3.12 Testmessungen an Phantomen

3.12.1 Elektrische Netzwerke

Zur Überprüfung der Genauigkeit und Auflösung des Impedanzspektrometers wurden verschiedene Testmessungen an definierten Testobjekten durchgeführt. Einfache und gut beschreibbare Testobjekte sind elektrische Netzwerke, die aus diskreten Bauelementen aufgebaut werden. In Abschnitt 3.3 wurden schon elektrische Netzwerke zum Test einzelner Systemeigenschaften verwendet. Hierfür wurden jedoch nur elektrische Widerstände eingesetzt. Im Folgenden wird nun das Netzwerk D01 in Abbildung 20 mit Bauelementwerten, vergleichbar zu Vanhala und Soininen (1995), verwendet, das einen typischen Phasenverlauf einer Sedimentprobe simuliert. Zusätzlich wurde ein Netzwerk D02 mit modifizierten Bauelementwerten realisiert, das zwei Phasenminima mit deutlich kleineren Phasenwerten bewirkt. Die grundsätzliche Topologie dieser Netzwerke findet man z.B auch in Macdonald (1987).

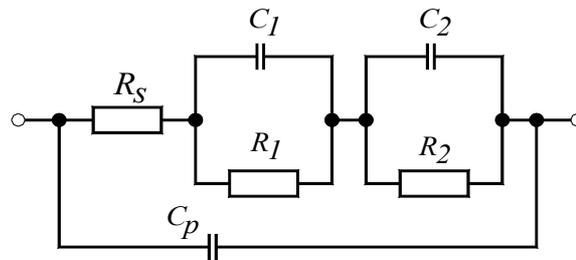


Abbildung 20: Elektrisches Testnetzwerk.

Die einzelnen elektrischen Bauelemente des Netzwerkes wurden mit einem Impedanzanalysator gemessen, siehe Tabelle 2. Anschließend wurde der theoretische Phasenverlauf berechnet. Zusätzlich zu den Bauelementen wurde eine parasitäre Kapazität C_p bei der Simulation berücksichtigt.

Bezeichnung	R_s	R_1	R_2	C_1	C_2	C_p
D01	150,09 k Ω	5092 Ω	9970 Ω	2,317 nF	21,2 μ F	0,9 pF
D02	99,87 k Ω	270 Ω	272 Ω	2106 nF	475 μ F	1,5 pF

Tabelle 2: Bauelementwerte für die Netze D01 und D02 für die Schaltung in Abbildung 20.

Zur Abschätzung des Frequenzverlaufs wurden die Cole-Cole-Parameter aus den Bauelementwerten bestimmt. Aufgrund der beiden Parallelschaltungen des Netzes hat das Cole-Cole-Modell

$$\begin{aligned}
 Z_{cc} &= R_0 \left(1 - \sum_n m_n \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n}} \right) \right) \\
 &= R_0 \left(1 - \sum_n m_n + \sum_n \frac{m_n}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n}} \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.41}$$

zwei Summenterme mit den Parametern (siehe Anhang Anhang B:)

$$m_{g,1} = \frac{R_1}{R_0}, \quad m_{g,2} = \frac{R_2}{R_0}, \quad \tau_1 = R_1 C_1, \quad \tau_2 = R_2 C_2, \quad c_1 = 1, \quad c_2 = 1.
 \tag{3.42}$$

Der Widerstand des Netzes wird für $\omega \rightarrow 0$ maximal, folglich ist $R_0 = R_s + R_l + R_2$. Um gleichzeitig auch die Eigenschaften bei hohen Frequenzen modellieren zu können, wurde zusätzlich der Term $j\omega C_p$ berücksichtigt,

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_{cc}} + j\omega C_p.
 \tag{3.43}$$

Die Werte der Cole-Cole-Parameter für die beiden Netze sind in Tabelle (3) aufgelistet. Zusätzlich sind in der Tabelle die Frequenzen der lokalen Phasenminima, die nach Gleichung (2.19) berechnet wurden, enthalten.

Bezeichnung	$1/R_0$	m_1	m_2	τ_1	τ_2	$f1$	$f2$	C_p
D01	6,055 μS	0,03083	0,06037 Ω	11,80 μs	0,2114 s	13,7 kHz	0,78 Hz	0,9 pF
D02	9,959 μS	0,002689	0,002709	568,6 μs	0,1292 s	280 Hz	1,23 Hz	1,5 pF

Tabelle 3: Cole-Cole-Parameter der Netze D01 und D02 für die Schaltung in Abbildung 20

Die realisierten Netzwerke beinhalten keine Übergangsimpedanzen der Spannungselektroden. Insofern sollten bei der Messung keine Spannungsmessfehler nach Abschnitt 3.3.2 entstehen. Die parasitären Ableitströme sollten auch keine Fehler verursachen, da der Messstrom bei dieser Messung, und bei den folgenden, nach Abschnitt 3.3.1 korrigiert wird.

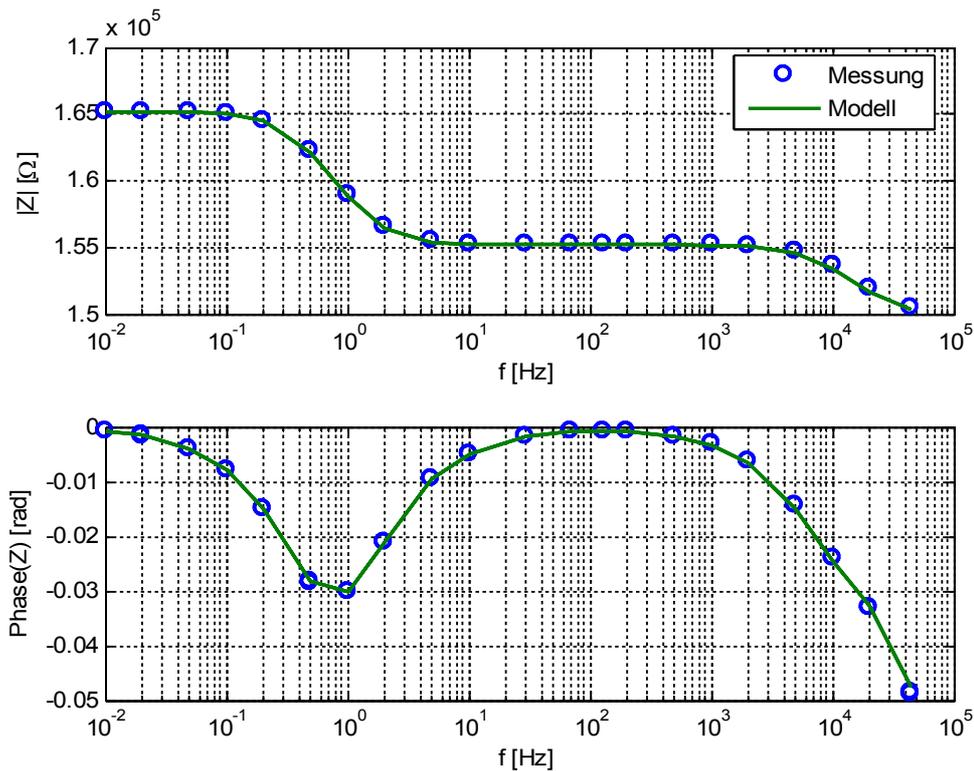


Abbildung 21: Gemessener und simulierter Phasenverlauf des Netzwerkes D01.

Die gemessenen Betrags- und Phasenspektren, dargestellt in Abbildung 21 und 22, stimmen sowohl für D01 als auch für D02 mit den theoretischen Spektren gut überein. Obwohl der Phasenverlauf im oberen Frequenzbereich im Wesentlichen von der parasitären Kapazität C_p bestimmt wird ist das Phasenminimum der höheren Frequenz von D01, das nach Tabelle 3 bei 13,7 kHz liegen soll, im Spektrum noch schwach erkennbar. Da sowohl die gemessenen Absolutwerte als auch Phasenwerte den theoretischen Spektren folgen, ist auch die Bedingung nach Kramers-Kronig erfüllt. Die geringen Abweichungen hängen unter anderem von der Genauigkeit der gemessenen Bauelementwerte ab.

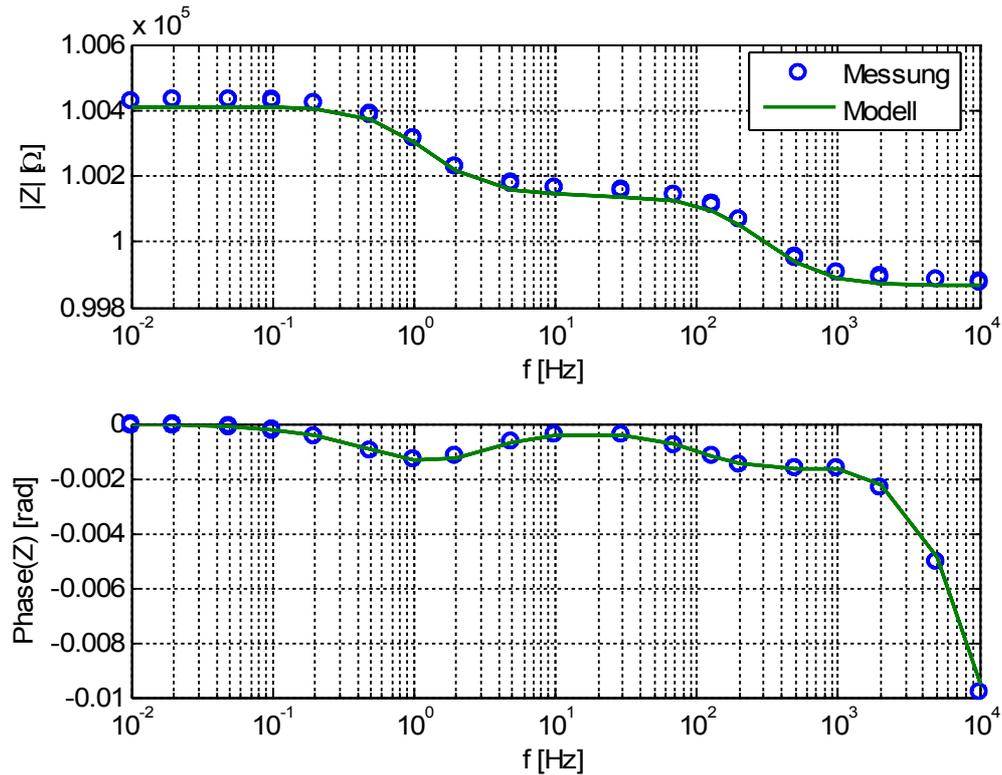


Abbildung 22: Gemessener und simulierter Phasenverlauf des Netzwerkes D02.

3.12.2 Wasserprobe

Für praxisnahe Tests der Messanordnung einschließlich möglicher Polarisierungseffekte der Elektroden werden Medien mit gut bekannten elektrischen Eigenschaften benötigt. Das erste Medium ist Wasser, dessen Eigenschaften schon in Kapitel 2.2 beschrieben wurde. Für eine Frequenz von 1 kHz und einer relativen Permittivität $\varepsilon_r = 80,1$ (Wasser bei 20 °C) ist der Imaginärteil der komplexen Leitfähigkeit,

$$\sigma_w^* = \sigma_w + j\omega\varepsilon_w = \sigma_w + j\omega\varepsilon_{wr}\varepsilon_0, \quad (3.44)$$

0,046 $\mu\text{S}/\text{cm}$ (Permittivität des Vakuums $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$). Wird weiterhin eine typische Leitfähigkeit des Wasser (Trinkwasser) von $\sigma_w = 40 \mu\text{S}/\text{cm}$ angenommen, so ist die Phase

$$\varphi = \arctan \frac{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}{\sigma_w} \quad (3.45)$$

bei dieser Frequenz ungefähr 0,11 mrad. Für typische Leitfähigkeiten des Trinkwasser ist die Phase relativ klein. Genau aus diesem Grund ist Wasser ein sehr gutes Medium zum Test der Messanordnung.

Die Wasserprobe wird im vorgeschlagenen Probenhalter gemäß Abschnitt 3.5 gemessen. Das theoretische Spektrum wurde für $\rho_w = 21 \Omega\text{m}$ und $\varepsilon_{wr} = 80$ berechnet. Der Phasenunterschied

der Spektren, dargestellt in Abbildung 23, ist für Frequenzen bis 100 Hz wesentlich kleiner als 0,1 mrad. Die Polarisierungseffekte sind somit vernachlässigbar klein. Bei 1 kHz ist der Phasenunterschied ungefähr 0,1 mrad. Der geringe Phasenunterschied entsteht hauptsächlich aufgrund der Kopplungsimpedanzen der Potentialelektroden (siehe Abschnitt 3.3.2). Die Impedanzen der Elektroden sind hinreichend klein, sodass auch ohne Korrektur des Spannungsmessfehlers die Zielgenauigkeit von 0,1 mrad noch erreicht wird. Auch die Streuung der Messwerte ist relativ gering. In der Abbildung sind jeweils drei gemessene Amplituden- und Phasenspektren dargestellt, die nach Gleichung (3.37) aus den einzelnen Abschnitten der Zeitreihen berechnet wurden. Ein Unterschied ist nur bei der tiefsten Frequenz erkennbar. Eine sinnvolle Darstellung der Standardabweichung ist in dieser Abbildung schlecht möglich, da die Fehlerbalken sehr klein sind.

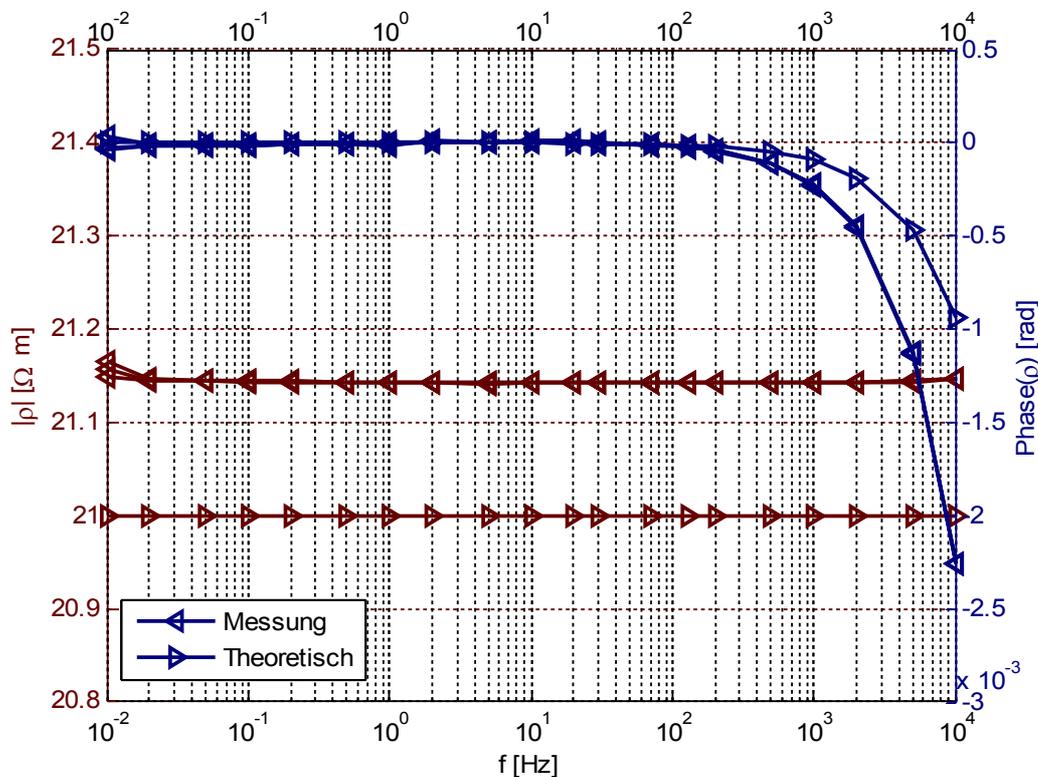


Abbildung 23: Gemessenes und theoretisches Spektrum von Wasser (21 Ωm).

3.12.3 Gesättigter Quarzsand

Als weiteres Testmedium wird gesättigter unverfestigter Quarzsand mit einem Korngrößenbereich von 0,1-0,5 mm verwendet. Entsprechend Abschnitt 2.2.2 gilt für die komplexe elektrische Leitfähigkeit des Porenraumes unter Vernachlässigung der Grenzflächenpolarisation

$$\sigma_{el} = \frac{1}{F} \sigma_w + \frac{1}{K} j\omega \epsilon_w. \quad (3.46)$$

Die Faktoren F und K sind real und frequenzunabhängig. Folglich gilt für die Phase

$$\varphi_{el} = \arctan \frac{F}{K} \frac{\omega \varepsilon_w}{\sigma_w}. \quad (3.47)$$

Unterschiedliche Faktoren würden die Phase des Sandes in Relation zur Phase des Wassers um den Quotienten F/K (für kleine Phasenwerte) verschieben. Zur Abschätzung der Phasenverschiebung werden die Werte von F und K auf Basis bekannter Messdaten bestimmt. In Schön (1996) wird ein Faktor $m \approx 1,3$ für unverfestigte Quarzsande angegeben. Wird weiterhin eine Porosität $\Phi \approx 0,42$ für den Sand (Korngrößenbereich: 0,1-0,5 mm) angenommen, so erhält man für F einen Wert von ungefähr 3,1. In Robinson und Friedman (2003) wird für Quarzsand eine Permittivität $\varepsilon_s \approx 4,7$ angenommen (Zum Vergleich wird in Telford et al. (1990) ein Wertebereich von 4,2 bis 5,0 angegeben). Nach Gleichung (2.11) liefert dies für Wasser mit $\varepsilon_{wr} = 80,1$ (20 °C) bei gleicher Porosität einen Wert von $K = 2,7$ und somit ein Verhältnis F/K von ungefähr 1,1. Entsprechend dieser Abschätzung wäre die Phase nur etwas größer als die Phase des Wassers, obwohl der spezifische Widerstand deutlich höher ist.

Die Messungen wurden an der gesättigten Quarzsandprobe unter sonst gleichen Bedingungen wie bei der Wasserprobe durchgeführt. Zusätzlich wurde das theoretische Spektrum für die Leitfähigkeit des Wassers von $\sigma_w = 21 \Omega\text{m}$ berechnet. Wegen der Kopplungsimpedanzen der Potentialelektroden ist die gemessene Phase auch hier, wie beim Wasser, größer als die theoretische. In der Abbildung erkennt man jedoch auch, dass der Phasenverlauf, unabhängig von den absoluten Werten, nicht genau mit dem theoretischen übereinstimmt. Der Grund dafür ist die bisher vernachlässigte Grenzflächenpolarisation des Sandes. Die Phase geht für kleine Frequenzen nicht auf Null zurück. Folglich werden die Grenzflächeneffekte auch bei 1 kHz einen Phasenbeitrag liefern. Der Unterschied zwischen der gemessenen Phase und der theoretischen von 0,25 mrad bei 1 kHz ist unter Berücksichtigung der Grenzflächenpolarisation auch bei dieser Messung relativ klein.

Im unteren Frequenzbereich zeigt die Messung eine zeitliche Drift und wie bei der Wasser-messung eine größere statistische Messunsicherheit. Jede Frequenz des Spektrums wurde zweimal gemessen. Mit der niedrigsten Frequenz wurde die Messung begonnen und auch beendet, sodass zwischen diesen Messwerten die größten Zeitunterschiede lagen. Dies erklärt die beiden unterschiedlichen Betragsspektren. Da bei der Messung die Phase und weniger der Betrag überprüft werden sollte, wurde nicht versucht diese Drift zu vermeiden.

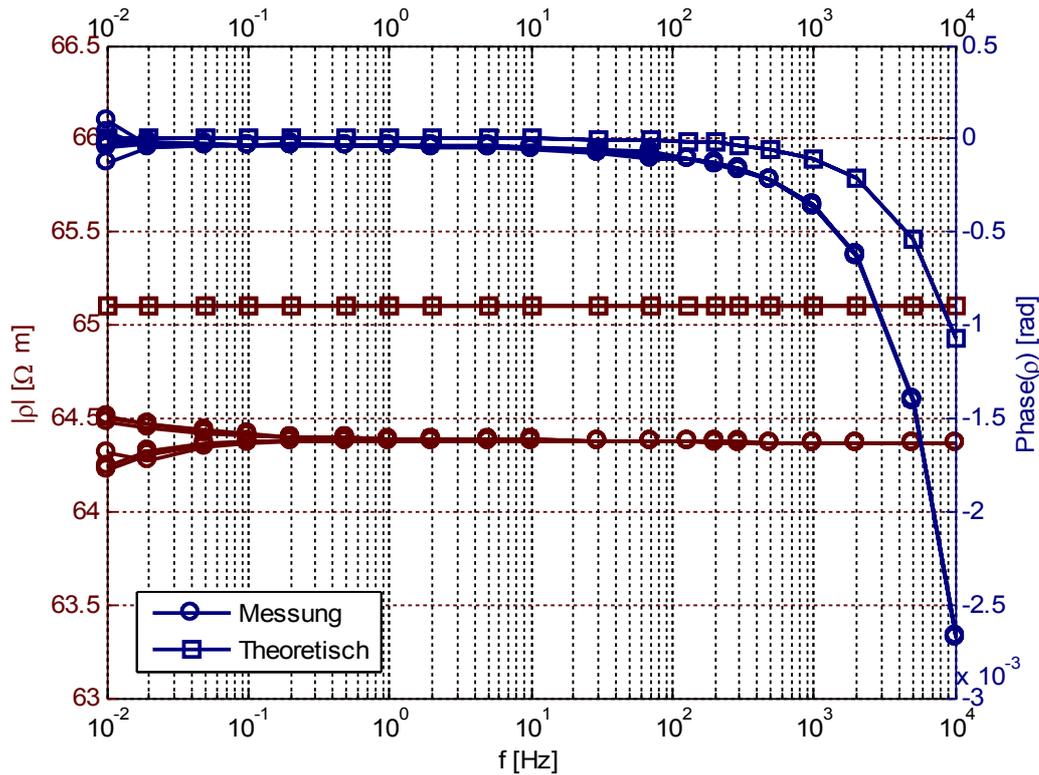


Abbildung 24: Gemessenes, theoretisches und gefittetes Spektrum des gesättigten Quarzsandes (Korngrößenbereich: 0,1-0,5 mm, Wasser 21 Ωm).

3.12.4 Metall im Wasser oder gesättigtem Sand

Als weitere Testmedien wird ein Metallkörper in Wasser und ein Metallkörper in gesättigtem Sand verwendet. Diese Medien weisen ein ausgeprägtes Cole-Cole-Spektrum auf (siehe z.B. Eskola (1992) und Guptasarma (1983)). Zur qualitativen Abschätzung der Cole-Cole-Parameter wird von folgender Situation ausgegangen. Es wird angenommen, dass der elektrische Strom eine homogene Stromdichte aufweist und geradlinig durch das Wasser (bzw. dem gesättigten Sand) fließt. In dieses Medium wird nun das Metall als Störkörper eingebracht. Das Metall wirkt aufgrund der elektrischen Doppelschichten, die sich an der Oberfläche zwischen Wasser und Metall bilden, elektrisch wie ein Kondensator. Bei tiefen Frequenzen fließt wenig Strom durch das Metall. Demzufolge ist die Impedanz der gesamten Probe bei der niedrigsten Frequenz maximal. Bei hohen Frequenzen wirkt der Bereich des Metalls wie ein Kurzschluss, sodass bei der höchsten Frequenz die Impedanz minimal wird. Der Unterschied zwischen der maximalen und minimalen Impedanz bzw. der Leitfähigkeit wird durch den Faktor m des Cole-Cole-Modells beschrieben (siehe Abschnitt 8). Es ist leicht einzusehen, dass der Faktor m mit der Größe des Metall-Störkörpers zunehmen wird.

Es wird nun weiter angenommen, dass der Störkörper in erster Näherung wie ein Zylinder wirkt, bei dem nur in dessen Stirnflächen der Strom ein- und austritt und dessen Mittelachse

in Stromrichtung ausgerichtet ist. Für den Zylinder wird eine homogene komplexe Leitfähigkeit angenommen, die im Wesentlichen durch die Doppelschicht bestimmt wird. Die Impedanz des Metalls ist im Vergleich zur Doppelschicht vernachlässigbar klein. Folglich hängt die Impedanz des Störkörpers auch nicht von der Länge des Zylinders ab. Die wirksame komplexe Leitfähigkeit wird daher mit der Länge des Zylinders zunehmen. Bei der Frequenz, bei der die Leitfähigkeit des Störkörpers der Leitfähigkeit des Wassers entspricht, wird die Phase der gesamten Probe maximal. Entsprechend wird mit zunehmender Länge des Zylinders oder mit abnehmender Leitfähigkeit des Wassers die Frequenz zu niedrigeren Frequenzen verschoben. Demzufolge nimmt die Zeitkonstante des Cole-Cole-Modells mit zunehmender Länge zu. Messtechnische Untersuchungen zu Metallen in Elektrolytlösung wurden schon von Gupta (1983) durchgeführt, wo gezeigt wird, dass mit zunehmender Größe des Metallkörpers die Frequenz des Phasenmaximums zu niedrigeren Frequenzen verschoben wird. Weiterhin hat natürlich die Doppelschicht bzw. die elektrochemische Eigenschaft der Metall-Elektrolyt-Kombination einen Einfluss auf die Zeitkonstante. Diese werden jedoch bei den vergleichenden Messungen nicht verändert. Insofern ist das Testmedium, Wasser plus Metallkörper, qualitativ vorhersehbar und daher gut geeignet um den charakteristischen Phasenverlauf des Cole-Cole-Modells zu realisieren.

Die erste Messung wurde an einer Wasserprobe durchgeführt, bei der im Zentrum ein Kupferstift mit einer Länge von 15 mm bzw. 20 mm und einem Durchmesser von 1,7 mm in Stromrichtung angeordnet war. Die Größe der Stifte wurde so gewählt, dass Phasen von einigen mrad erzeugt werden. Die gemessenen Spektren in Abbildung 25 zeigen Phasen von $-1,3$ mrad (15 mm Stift) und $-2,7$ mrad (20 mm Stift) im mittleren Frequenzbereich bei ungefähr 200 Hz. Wie zu erwarten liegt das lokale Phasenminimum des größeren Stiftes bei der niedrigeren Frequenz. Die entsprechenden Cole-Cole-Parameter sind in Tabelle (4) aufgelistet. Um gleichzeitig auch die Eigenschaften bei hohen Frequenzen modellieren zu können wurde das Cole-Cole-Modell (2.20) entsprechend modifiziert,

$$\sigma_{ccx} = \sigma'_{el} \left(1 + \sum_n \frac{m_n (j\omega\tau_n)^{c_n}}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n} (1 - m_n)} \right) + j\sigma''_{el}. \quad (3.48)$$

Anstelle der Leitfähigkeit σ_0 wurde hier die komplexe Leitfähigkeit σ_{el} , verwendet. Der Term σ''_{el} wirkt, vergleichbar zu Gleichung (3.43), wie eine Kapazität.

Bezeichnung	σ'_{el}	m_l	τ_l	fl	c_l	ϵ_r
Wasser mit 15 mm Stift	22 Ωm	0,0034	0,73 ms	219 Hz	0,80	200
Wasser mit 20 mm Stift	20 Ωm	0,0070	0,81 ms	197 Hz	0,80	200
Sand mit 15 mm Stift	67 Ωm	0,0044	4,06 ms	39.3 Hz	0,65	72
Sand mit 20 mm Stift	67 Ωm	0,0076	4,61 ms	34.7 Hz	0,66	72

Tabelle 4: Cole-Cole-Parameter der Wasser- und Sandprobe mit Kupferstift im Zentrum.

Ähnlich verhält sich die Sandprobe. Die Phasenwerte der lokalen Phasenminima liegen bei $-1,3$ mrad und -2.3 mrad für die beiden Kupferstifte 15 mm und 20 mm. Die lokalen Phasenminima liegen jedoch tiefer bei ungefähr 35 Hz. Auch dies war zu erwarten, da die Frequenz der Phasenminima mit abnehmender Leitfähigkeit kleiner werden sollte.

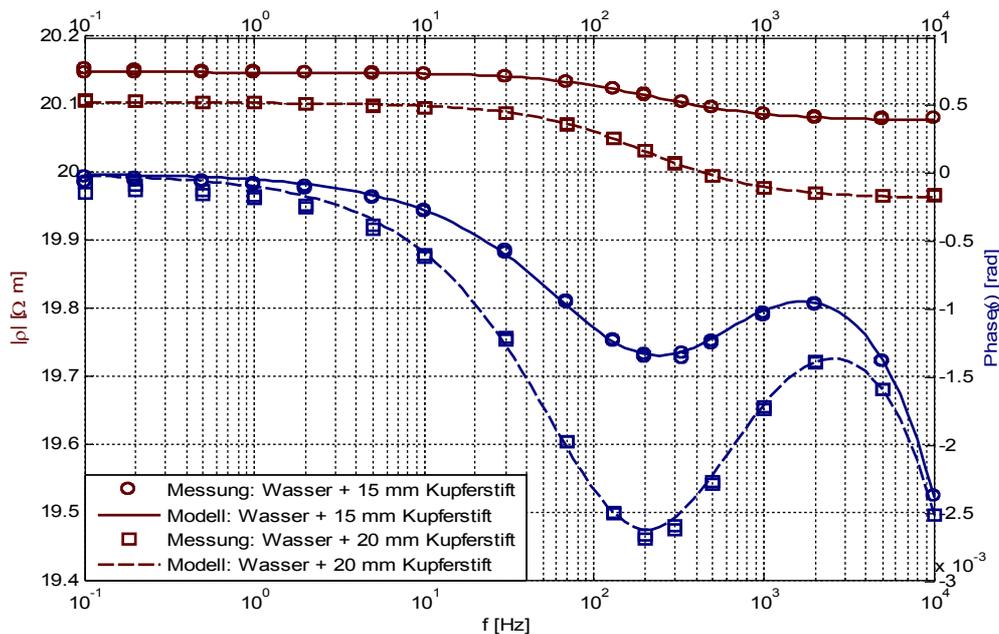


Abbildung 25: Gemessenes und modelliertes Phasenspektrum des Wassers ($21 \Omega\text{m}$, $\epsilon_r = 80$) mit Kupferstift im Zentrum der Probe (Länge 15 mm oder 20 mm, Durchmesser 1,7 mm, Längsachse ausgerichtet in Richtung des Stromflusses). Die Parameter des Modells wurden aus den Messdaten bestimmt.

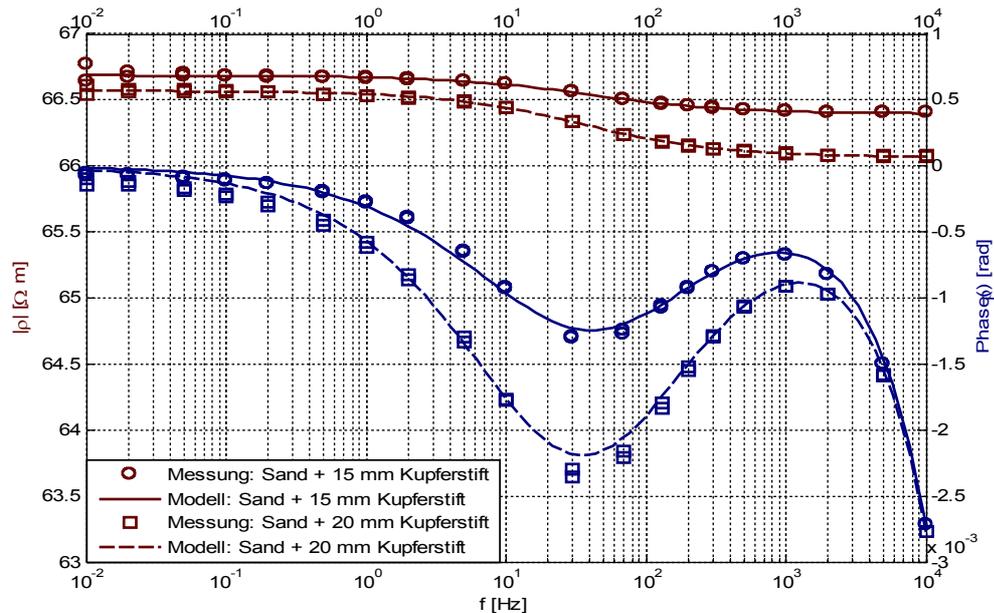


Abbildung 26: Gemessenes und modelliertes Phasenspektrum des gesättigten Quarzsandes (Korngrößenbereich 0,1-0,5 mm, Wasser $21 \Omega\text{m}$, $\epsilon_r = 80$) mit Kupferstift im Zentrum der Probe (Länge 15 mm oder 20 mm, Durchmesser 1,7 mm, Längsachse ausgerichtet in Richtung des Stromflusses). Die Parameter des Modells wurden aus den Messdaten bestimmt.

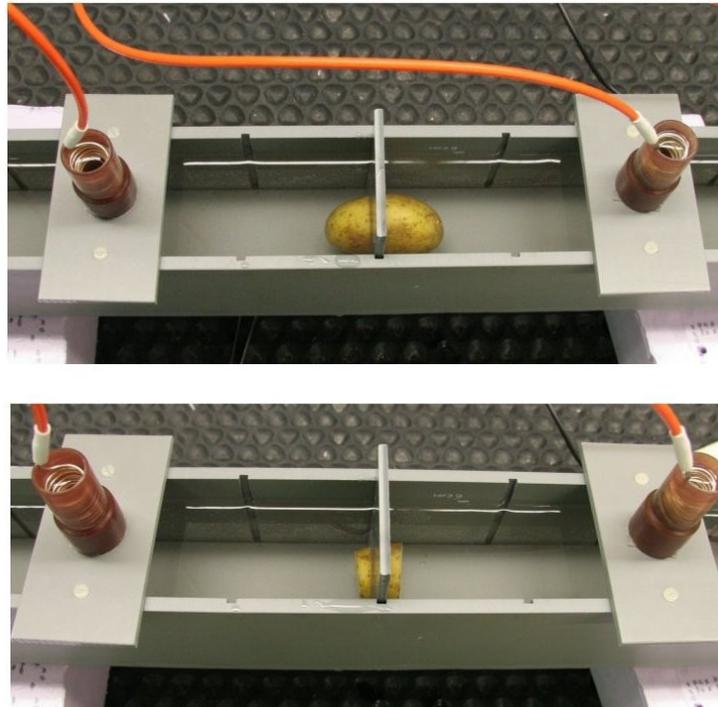
Die Messungen demonstrieren sehr gut die Auflösung des Systems und zeigen, dass auch schwach polarisierbare Proben mit kleinen Phasenwerten sehr gut unterschieden werden können.

3.12.5 Kartoffel

Als letztes Testobjekt wird ein möglichst homogenes Material mit ausgeprägtem Phasenverlauf gesucht, das auch für die folgenden tomographischen Messungen gut geeignet ist. Dazu werden bei medizinischen Testmessungen häufig biologische Materialien verwendet, wie zum Beispiel Bananen, Kürbis oder Gurken. Weiterhin werden auch Phantome aus einer Graphit-Agar-Mischung getestet (Kao et al. 2008) oder Mischungen mit Metall, wie zum Beispiel die Sand-Blei-Mischung in Kemna et al. (2000). Im Rahmen dieser Arbeit wird eine Kartoffel verwendet, da sie wegen der Form und der Festigkeit gut geeignet ist und ein ausgeprägtes Phasenminimum bei höheren Frequenzen erzeugt. Die Messwerte dienen als Referenz um auch die tomographisch ermittelten Impedanzspektren besser beurteilen zu können.

Für diese Messung wurde in die Mitte des Probenkörpers eine Kunststoffplatte mit Loch eingefügt. In das Loch wurde die Kartoffel gesteckt, siehe Abbildung 27. Durch diese Maßnahme hat der elektrische Strom keine andere Möglichkeit als durch das Testobjekt zu fließen. Es

wurde nun das Spektrum einer ungeschälten und einer geschälten Kartoffel gemessen. Bei der zweiten Messung wurde dazu die Kartoffel an beiden Seiten abgeschnitten.



*Abbildung 27: Messaufbau zur Messung der Kartoffel. Bild oben: Kartoffel mit Schale.
Bild unten: Kartoffel an beiden Seiten abgeschnitten.*

Die gemessenen Spektren der geschälten und ungeschälten Kartoffel haben die Phasenminima bei der gleichen Frequenz, siehe Abbildung 28. Die Phasen sind bei 10 kHz mit -290 mrad und -220 mrad relativ groß. Im Vergleich zu den Metall-Testkörpern liegt das Phasenminimum bei höheren Frequenzen. Dies stimmt auch mit den Messungen in Zhang (1992) überein.

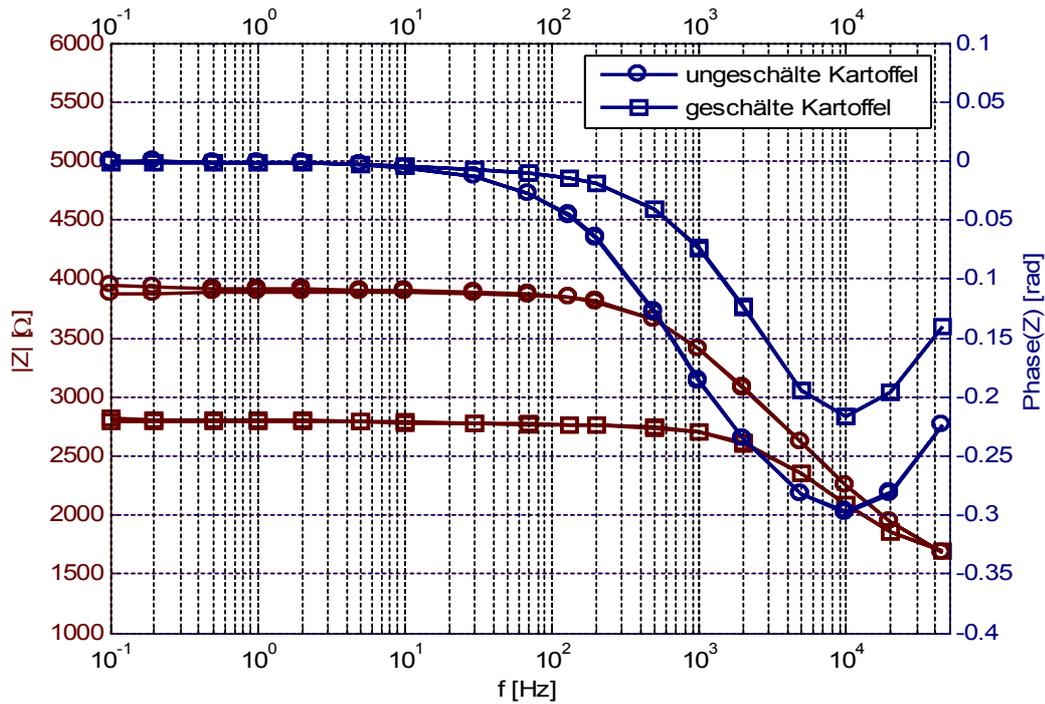


Abbildung 28: Gemessene Impedanzspektren einer geschälten und ungeschälten Kartoffel.

Zur Bestimmung des komplexen spezifischen Widerstandes der Kartoffel werden die Cole-Cole-Parameter des Modells in Abbildung 29 aus den Spektren bestimmt, wobei Z_I und R_I die elektrische Eigenschaft der Kartoffel und R_S im Wesentlichen die Eigenschaft des Wassers beschreiben sollen. Die Impedanz von Z_I parallel zu R_I ist entsprechend Gleichung (B.6) im Anhang

$$\frac{Z_I R_I}{Z_I + R_I} = R_0 \frac{m}{1 + (j\omega\tau)^c} \quad (3.49)$$

Mittels der Kartoffel-Abmessungen liefert dies bei 10 kHz für die spezifischen Widerstände $22 \Omega \text{m} \exp(-0,66j)$ und $23 \Omega \text{m} \exp(-0,75j)$ für die ungeschälte und geschälte Kartoffel. Dabei wurde ein Durchmesser von 3 cm und eine Länge von 2 cm für die geschälte Kartoffel und eine mittlere geschätzte Länge von 3,5 cm für die ungeschälte angenommen.

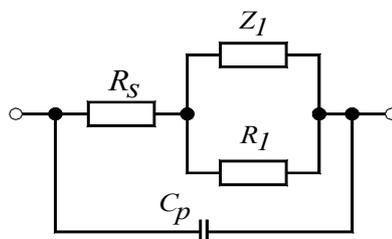


Abbildung 29: Elektrisches Modell der Kartoffel-Messung.

Auf Basis dieser Messung wird bei 10 kHz für die Kartoffel ein Referenzwert mit einem Betrag von $22 \Omega\text{m}$ und einer Phase von -700 mrad angenommen. Bei 1 kHz ist der geschätzte spezifische Widerstand der geschälten Kartoffel $40 \Omega\text{m}$ und -180 mrad

4. Impedanztomographie

4.1 Grundlegende Messtechnik

Ergänzend zur Impedanzspektroskopie wird nun eine bildgebende Messmethode vorgestellt, mit der die spektrale Impedanz von inhomogenen Proben orts aufgelöst mittels Impedanzmessungen an der Oberfläche bzw. am Randbereich des Untersuchungsgebietes gemessen werden kann. In Analogie zu anderen tomographischen Verfahren, bei denen äußere Messungen das Innere des Körpers abbilden, nennt man diese Methode Impedanztomographie. Wie bei der Impedanzspektroskopie wird bei der Tomographie häufig die 4-Elektrodenmethode angewendet, siehe z.B. Daily (2005). Über jeweils zwei Elektroden wird ein Stromfluss im Körper angeregt und zwischen zwei weiteren Elektroden wird die resultierende Spannung gemessen. Diese Messung wird an sehr vielen Elektroden für unterschiedliche Kombinationen der Strom- und Spannungspaare durchgeführt, wobei die Elektroden meist am Randbereich des Untersuchungsgebietes angebracht werden. Die Impedanzmessungen der unterschiedlichen Elektrodenkombinationen bilden dabei immer andere räumliche Bereiche des Messobjektes ab. Bei einer günstigen Anordnung der Elektroden und einer sinnvollen Auswahl der Messpaare kann schließlich aus den einzelnen Impedanzmessungen die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes im Inneren des Messobjektes berechnet werden.

Zur Veranschaulichung der Methode ist in Abbildung 30 ein kreisförmiges 2D-Modell mit 16 Elektroden, die symmetrisch um den Körper angeordnet sind, dargestellt. Am Elektrodenpaar (2, 15) wird der Strom eingespeist und am Elektrodenpaar (8, 10) wird die resultierende Spannung gemessen. Diese Messung wird für weitere Elektrodenkombinationen durchgeführt. Aus den Strom- und Spannungswerten werden, wie bei der Impedanzspektroskopie, die Impedanzen bzw. die sogenannten Transferimpedanzen

$$Z_n(\rho(f)) = \frac{U_n(\rho(f))}{I_n(\rho(f))} \quad (4.1)$$

für die jeweiligen Elektrodenpaare bestimmt, die zusammen einen Messdatensatz für n Kombinationen und einer Messfrequenz f bilden.

Mit diesen Daten wird nun der spezifische komplexe Widerstand im Inneren des Körpers rekonstruiert. Hierfür wird das elektrische Potential Φ im Medium, für eine vorgegebene Leitfähigkeitsverteilung auf Basis der Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = I\delta(\mathbf{r}) \quad (4.2)$$

berechnet. Die Anregung über die Stromelektroden wird hierbei als quasi statische punktförmige Stromeinspeisung $I\delta(\mathbf{r})$ mit der Delta-Distribution $\delta(\mathbf{r})$ berücksichtigt, siehe z.B. Pelton et al. (1978A).

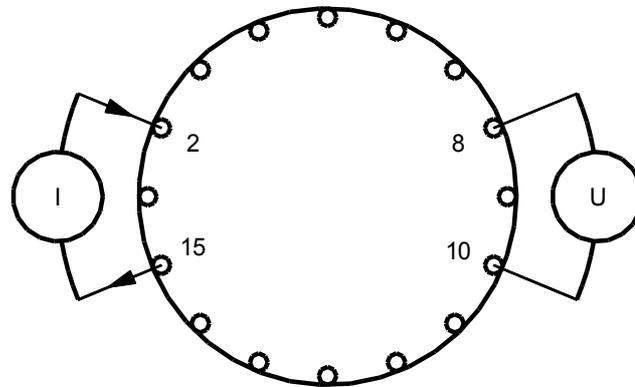


Abbildung 30: Schematische Darstellung eines einfachen kreisförmigen 2D-Probekörpers mit 16 Elektroden die als Kreise gekennzeichnet wurden.

Diese Berechnung liefert für die jeweiligen Elektrodenpaare die resultierenden Spannungen und damit auch die theoretischen Transferimpedanzen für die angenommene Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes. Mittels einer Inversionstechnik wird nun die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes im Medium, ausgehend von einer Startverteilung, solange variiert bis die theoretischen Transferimpedanzen mit den gemessenen möglichst gut übereinstimmen. Dies liefert schließlich den gesuchten komplexen spezifischen Widerstand im Inneren der Probe. Auf die Modellierung und Rekonstruktion wird noch in den späteren Kapiteln ausführlicher eingegangen.

Wird nun dieses Verfahren für mehrere Anregungsfrequenzen durchgeführt, so ermöglicht dies die spektrale und orts aufgelöste Messung des komplexen spezifischen Widerstandes im Inneren des Körpers. Die Messung wird häufig nur für ein oder zwei Frequenzen durchgeführt. Insofern ist die spektrale Messung eine Erweiterung der bisherigen Systeme, wobei im Rahmen dieser Arbeit speziell die hohe Phasengenauigkeit im Vordergrund steht.

4.2 Hardware des Impedanztomographen

Im Folgenden wird nun das Messsystem vorgestellt, welches für Messungen mit hoher Phasengenauigkeit im oberen Frequenzbereich entwickelt wurde (Zimmermann et al. 2008A). Das System, dargestellt in Abbildung 31 und 32, beinhaltet bis zu 96 Spannungskanäle zur Messung der Elektroden Spannungen und 32 Kanäle für die Stromeinspeisung. Die Spannungsmessungen und Stromeinspeisungen werden an getrennten Elektroden durchgeführt um Phasenfehler aufgrund von Entladungseffekten zu vermeiden (Dahlin 2000).



Abbildung 31: Foto des EIT-Messsystems.

Zur Spannungsmessung wurden Verstärker möglichst nahe an die Potentialelektroden U01 bis U96 in etwa 1cm Entfernung platziert, siehe Abbildung 32, um die kapazitive Belastung an den Elektroden zu minimieren. Gemessen wurde eine Eingangskapazität von ungefähr 5 pF und ein Eingangswiderstand von ungefähr 500 G Ω . Für die Verstärker wurden Operationsverstärker vom Typ AD825 in Elektrometerschaltung eingesetzt, siehe auch Kapitel 3.2 .

Für die Signalübertragung von den Verstärkern zu den ADC-Karten wurden geschirmte (koaxiale) Kabel eingesetzt um das Kanalübersprechen zu vermeiden und die Fehlerabschätzung zu erleichtern. Für die Fehlerabschätzung und -korrektur, ist es wichtig die elektrischen Parameter der Kabel gut modellieren zu können. Die Parameter sollten möglichst nicht von der Kabelführung oder der Kopplung zwischen den Kabeln abhängen.

Da die Verstärker an den Elektroden den praktischen Einsatz etwas erschweren, wurde auch ein System mit triaxialen Kabeln, wie beim Impedanzspektrometer in Kapitel 3.2 oder bei einigen medizinischen Systemen, siehe zum Beispiel Oh et al. (2007), untersucht. Bei den langen Elektrodenkabeln waren jedoch entweder die Verstärker nicht stabil oder die kapazitiven Belastungen nach der Stabilisierung zu groß. Das Konzept mit triaxialen Kabeln und *Driven-Shield-Technik* wurde daher nicht weiter verfolgt. Statt dessen wurde eine möglichst kleine Bauform der Verstärker angestrebt.

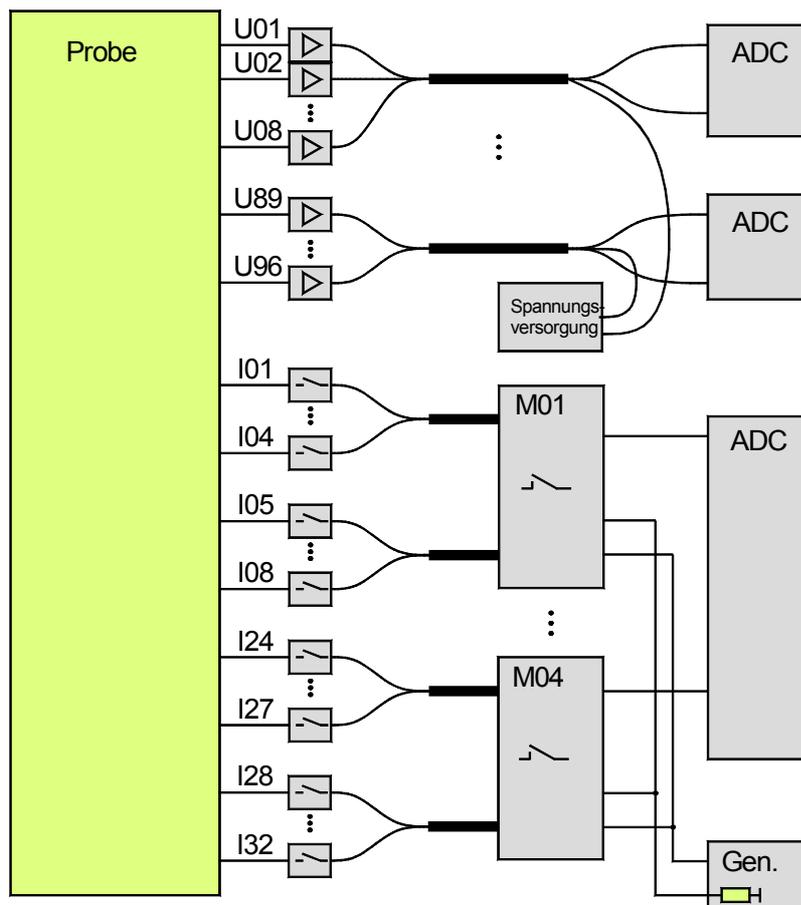


Abbildung 32: Blockschaltbild des Messsystems EIT96 (MEDUSA-1).

Die Verdrahtung der Elektrodenkabel (Länge 3 m) wurde sternförmig und massebezogen ausgeführt. Im Gegensatz zu vielen anderen Systemen werden die Elektrodenspannungen gegen das Massepotential des Messsystems gemessen. Die Spannungsdifferenzen, die später für die Bildrekonstruktion benötigt werden, werden nach abgeschlossener Messung numerisch zwischen ausgewählten Elektrodenpaaren berechnet. Dies ist ein Vorteil der massebezogenen Spannungsmessung. Es müssen keine Spannungspaare vor der Messung spezifiziert werden. Der Messfehler einer berechneten Spannungsdifferenz hängt nur vom Fehler der beiden zugehörigen massebezogenen Messungen ab. Es können daher Spannungsdifferenzen beliebiger Elektrodenpaare berechnet werden ohne dass sich aufgrund einer Fehlerfortpflanzung der Messfehler erhöhen würde. Ein weiterer Vorteil der massebezogenen Messung ist, dass die Gleichtaktunterdrückung mittels numerischer Korrektur auch noch nach abgeschlossener Messung verbessert werden kann, siehe Kapitel 4.3.5. Insofern unterscheidet sich das Messsystem von anderen Systemen, welche die Spannungsdifferenzen zwischen spezifizierten Elektrodenpaaren mittels Differenzverstärker vor der Digitalisierung der Signale bilden [siehe zum Beispiel Oh et al. (2007)]

Für die Stromeinspeisung wurden Relais unmittelbar an den Elektroden angebracht. Die unterschiedlichen Stromeinspeisungen erfolgen sequenziell, wobei jeweils ein Elektrodenpaar durchgeschaltet wird. Alle anderen Stromelektroden (I01 bis I32) werden zu dieser Zeit abgeschaltet um die kapazitive Belastung zu vermeiden. An den inaktiven Stromelektroden wurde eine kapazitive Last von ungefähr 1 pF gemessen. Für die Signalübertragung wurden wie bei den Spannungskanälen koaxiale Kabel verwendet um das Kanalübersprechen zu vermeiden.

Zur Auswahl von zwei aktiven Stromkanälen aus insgesamt 32 werden vier Multiplexerkarten M01-M04 verwendet. Jede Karte hat zwei Anschlüsse für die Spannungsquelle und zwei Shunt-Widerstände zur Strommessung der beiden aktiven Kanäle. Damit die Widerstände nach Bedarf möglichst einfach ausgetauscht werden können, wurden die Widerstände auf den Multiplexerkarten angeordnet. Im Hinblick auf die Messgenauigkeit sollten diese jedoch möglichst nahe an den einspeisenden Elektroden angeordnet werden. Um dennoch den genauen Anregungsstrom an den jeweiligen Elektroden berechnen zu können, müssen die Leckströme, die entlang der Zuleitung abfließen, bestimmt werden. Dazu wird die Spannung der aktiven Stromkanäle an beiden Enden der Shunt-Widerstände gegen Masse gemessen. Zusammen mit den elektrischen Parametern der Kabel können dann die Anregungsströme an den Elektroden berechnet werden (siehe Kapitel 4.3.1).

Zur Erzeugung der sinusförmigen Anregungsspannung wird, wie beim Impedanzspektrometer, ein quarzstabilisierter kommerzieller Funktionsgenerator (Agilent 33120A) eingesetzt. Der verwendete Frequenzbereich reicht von 1 mHz bis 45 kHz und die maximale Spannung ist 10 V. Die Spannungsamplituden und die Frequenzen werden vom PC gesteuert.

Für die Datenerfassung werden ADC-Karten vom Typ National Instruments NI4472 verwendet, die auch schon beim Impedanzspektrometer erfolgreich eingesetzt wurden. Diesmal jedoch als CompactPCI-Karte, da eine größere Anzahl von Karten synchron arbeiten müssen. Um eine schnellere Messung zu ermöglichen werden alle Spannungen der Potentialelektroden und die Spannungen der Strommessung gleichzeitig digitalisiert. Die Vorteile der Karte und weitere technische Daten wurden schon in Kapitel 3.2 beschrieben.

Die Datenerfassung und Auswertung erfolgt mit dem PC in analoger Weise wie beim Impedanzspektrometer. Bei der Steuerung werden jedoch zusätzlich die Konfigurationsdaten für die Stromeinspeisungen an den verschiedenen Elektrodenpaaren berücksichtigt. Bei der Auswertung werden schließlich die einzelnen Transferimpedanzen für die Strom- und Spannungspaare berechnet.

Wegen der getrennten Strom- und Spannungskanäle ist das Messsystem nicht unmittelbar für reziproke Messung geeignet. Wenn die Messungen mit einer Verkabelung durchgeführt werden sollen, müssen dazu jeweils ein Strom- und ein Spannungskanal an einer Elektrode angeschlossen werden.

Zusätzlich zum obigen System wurde daher eine erweiterte Variante realisiert, bei der jeweils ein Strom- und ein Spannungsmodul für einen Kanal zu einem Modul entsprechend Abbildung 33 zusammengefasst wurden. Jedes Modul wird über ein austauschbares Kabel mit einer Multiplexerkarte verbunden um möglichst einfach die Kabellängen an das Messobjekt anpassen zu können. Wie beim obigen System, werden die Kanäle für die Stromeinspeisung mittels Multiplexerkarten geschaltet. Über die Multiplexerkarten werden auch die Elektrodenspannungen zu den ADCs geführt. Der Strom wird zentral in einer zusätzlichen Karte mit Shunt-Widerständen gemessen. Aufgrund der Zusammenfassung sind die Eingangskapazitäten der Elektrodenmodule etwas größer. Gemessen wurden 10 pF. Die sonstigen Parameter sind gleich. Mit zusätzlichen Elektrodenketten, in der 8 Elektrodenmodule im Abstand von 1 m angeordnet sind, soll dieses System auch für Bohrlochmessungen eingesetzt werden. Hinweise bezüglich geeigneter Elektrodenmaterialien für reziproke Messungen findet man zum Beispiel in LaBrecque und Daily (2008).

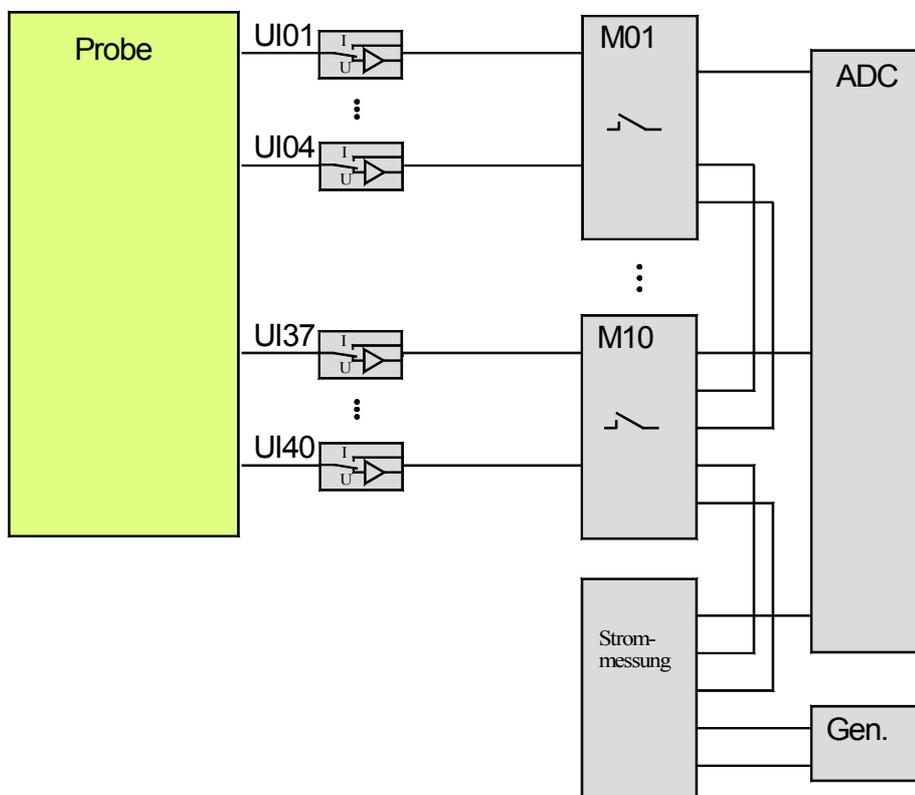


Abbildung 33: Blockschaltbild des Messsystems EIT40 (MEDUSA-2).

4.3 Fehlerkorrektur auf der Basis eines elektrischen Modells

4.3.1 Berechnung der Anregungsströme

Zur Abschätzung der Spannungs- und Strommessfehler und der Fehlerkorrektur wird, wie beim Impedanzspektrometer, ein vereinfachtes elektrisches Modell der Probe und des Messsystems verwendet, siehe Abbildung 34.

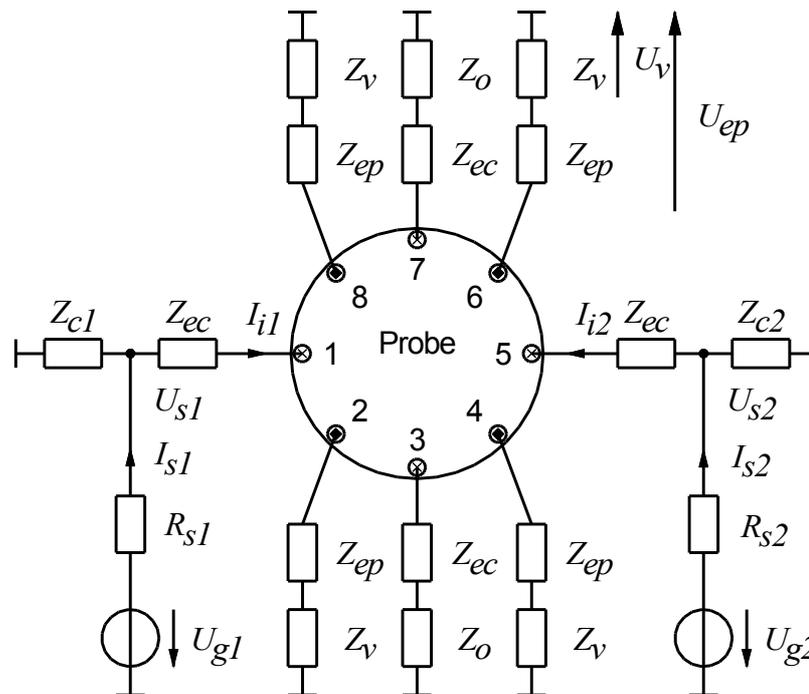


Abbildung 34: Vereinfachtes elektrisches Modell der Probe und des EIT-Messsystems.

Das Modell beinhaltet die Kontaktimpedanzen Z_{ec} , Z_{ep} der Strom- und Spannungselektroden, die Eingangsimpedanzen Z_v der Verstärker, die Impedanzen Z_{c1} , Z_{c2} der aktiven Stromkanäle, die Impedanzen Z_o der inaktiven Stromkanäle, die Shunt-Widerstände R_{s1} , R_{s2} für die Strommessung und die Spannungsquellen U_{g1} und U_{g2} für die Stromeinspeisung.

Als erstes werden mittels des Modells die wahren Anregungsströme an der Elektrode berechnet. Aufgrund der parasitären Ströme, die über die Impedanzen Z_{c1} und Z_{c2} abfließen, unterscheiden sich die eingespeisten Ströme an der Elektrode von den gemessenen Strömen I_{s1} und I_{s2} , die über die Shunt-Widerstände fließen. Die parasitären Ströme hängen linear von den elektrischen Spannungen U_{s1} und U_{s2} der Kabel ab. Da es sich um elektrische kurze Kabel handelt, deren Leitungslänge mit 3 m wesentlich kleiner sind als die Wellenlänge des Signals, können die Leitungen mittels der konzentrierten Impedanzen Z_{c1} und Z_{c2} hinreichend gut modelliert werden. Die Wellenlänge einer 10 kHz Schwingung ist 20000 m für typische Koaxialkabel. Selbst Leitungslängen von 100 m sind noch elektrisch kurze Leitungen für den

Messfrequenzbereich. Die wirksamen konzentrierten Elemente werden nun mittels den vereinfachten Leitungsgleichungen

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 + I_2(R' + j\omega L')l \\ I_1 &= I_2 + U_2(G' + j\omega C')l \end{aligned} \quad (4.3)$$

für elektrisch kurze Kabel bestimmt. In dieser Gleichung sind die Spannungen und Ströme am Anfang und am Ende mit den Indizes 1 und 2 gekennzeichnet. Die Parameter R' , L' , G' und C' sind die Leitungsbeläge und l beschreibt die Leitungslänge (Meinke und Gundlach 1992). Zur weiteren Berechnung wird diese Gleichung in der Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (R' + j\omega L')l \\ (G' + j\omega C')l & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

mit der Kettenmatrix \mathbf{A} dargestellt. Das Invertieren der Matrix \mathbf{A} liefert mit

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

auf einfache Weise ein Gleichungssystem, bei dem I_2 in Abhängigkeit von U_1 und I_1 beschrieben wird. Dies ergibt schließlich

$$I_2 = \frac{(I_1 - U_1(G' + j\omega C')l)}{1 - (R' + j\omega L')l(G' + j\omega C')l}. \quad (4.6)$$

Berechnungen zeigten, dass der Einfluss von

$$(R' + j\omega L')l(G' + j\omega C')l. \quad (4.7)$$

im Nenner von Gleichung (4.6) auf den Phasenfehler für die kurzen Koaxialkabel (< 10 m) vernachlässigt werden kann. Gleichung (4.6) kann folglich zu

$$I_2 \approx I_1 - U_1(G' + j\omega C')l \approx I_1 + \frac{U_1}{Z_c} \quad (4.8)$$

vereinfacht werden. Im Modell wird nur noch die Impedanz $Z_c = 1/(G' + j\omega C')l$ zur Beschreibung der Leitungseigenschaften benötigt. Setzt man nun die Indizes des Modells für Strom und Spannung, mit $I_i = I_2$ und $I_s = I_1$, in Gleichung (4.8), ein so folgt

$$I_{i1} = I_{s1} - \frac{U_{s1}}{Z_{c1}} \quad \text{und} \quad I_{i2} = I_{s2} - \frac{U_{s2}}{Z_{c2}}. \quad (4.9)$$

Mittels dieser Gleichungen können nun die eingespeisten Ströme I_{i1} und I_{i2} an den Elektroden berechnet werden. Die Impedanzen Z_{c1} und Z_{c2} werden im Wesentlichen durch den Kapazi-

tätsbelag C' der Leitung bestimmt. Für eine Leitungslänge von $l = 3$ m und einer Kapazität von $C' = 100$ pF/m ist die wirksame Kapazität 300 pF. Für die genaue Berechnung der Ströme müssen jedoch zusätzlich zur Leitung die parasitären Kapazitäten der Multiplexerkarten berücksichtigt werden. Die wirksamen Impedanzen werden daher mit dem System genau ausgemessen, siehe Kapitel 4.3.6. Die für die Korrektur notwendigen Spannungen U_{s1} und U_{s2} werden bei jeder Messung automatisch mit erfasst.

4.3.2 Genauigkeit und Korrektur der Spannungsmessung

Der erste Spannungsmessfehler entsteht, wie beim Impedanzspektrometer, aufgrund der nicht vermeidbaren Kopplungsimpedanzen Z_{ep} der Spannungselektroden und den Belastungen der Elektroden mit den endlichen Eingangsimpedanzen Z_v der Verstärker. Beides zusammen bilden die Spannungsteiler

$$D = \frac{U_v}{U_{ep}} = \frac{Z_v}{Z_{ep} + Z_v}, \quad (4.10)$$

die dazu führen, dass die Spannungen U_v an den Verstärkern kleiner sind als die Spannungen U_{ep} an den Messpunkten der Probe. Auch in diesem Fall könnte der Fehler korrigiert werden, wenn die Impedanz Z_{ep} bekannt wäre. Dies ist jedoch bei praktischen Messungen in der Regel nur schwer möglich. Um den Fehler zu minimieren werden daher Verstärker mit möglichst hohen Eingangsimpedanzen verwendet. Zusätzlich sollte die Kopplungsimpedanz der Elektroden hinreichend klein sein.

Der zweite Spannungsmessfehler entsteht aufgrund der Signallaufzeiten im Kabel. Zur Fehlerabschätzung und -korrektur kann Gleichung 4.4 für elektrisch kurze Leitungen angewendet werden. Index 1 kennzeichnet die Quelle und ist in diesem Fall der Verstärker. Die Senke, gekennzeichnet mit Index 2, ist der ADC-Eingang. Der Strom I_2 ist aufgrund der hochohmigen ADC-Eingänge relativ klein und wird daher vernachlässigt ($I_2 = 0$). Für diese Annahme vereinfacht sich Gleichung 4.4 zu

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 = U_{ADC} \\ I_1 &= U_{ADC}(G' + j\omega C')l \end{aligned} \quad (4.11)$$

Zur Berechnung der Phasenverschiebung sind noch die Eigenschaften des Verstärkers wichtig. Er hat eine Verstärkung von eins und wird über einen definierten Ausgangswiderstand R_a an das Kabel angekoppelt. Die Spannung am Eingang des Kabels ist somit

$$U_1 = U_v - I_1 R_a. \quad (4.12)$$

Einsetzen in Gleichung 4.11 liefert

$$\frac{U_{ADC}}{U_v} = \frac{1}{1 + R_a(G' + j\omega C')l} \quad (4.13)$$

Dies ist die Gleichung eines einfachen Spannungsteilers bestehend aus R_a und

$$Z = \frac{1}{(G' + j\omega C')l} \quad (4.14)$$

Da die Leitungsbeläge G' und C' und der Ausgangswiderstand R_a bekannt sind, kann der Fehler leicht korrigiert werden. Für die weitere Berechnung wird der Ableitungsbelag G' vernachlässigt, da er im oberen Messfrequenzbereich wesentlich kleiner ist als $\omega C'$. Dies führt zu

$$U_v = U_{ADC}(1 + j\omega R_a C' l) \quad (4.15)$$

Die Leitung bewirkt daher eine Phasenverschiebung von $\arctan(-j\omega R_a C' l)$. Für einen Ausgangswiderstand von 50Ω , einem Kapazitätsbelag von 100 pF/m , einer Frequenz von 1 kHz und einer Leitungslänge von 3 m ist die Phasenverschiebung $0,1 \text{ mrad}$.

4.3.3 Stromumschaltung

Leck- oder Anregungsströme, die über parasitäre Impedanzen zwischen Probe- und Erdpotential fließen, können zusätzliche Messfehler bewirken. Um die Leckströme zu minimieren wird üblicherweise eine symmetrische Anregung $U_{g1} = -U_{g2}$ verwendet. Bei typischen Probenkörpern und ähnlich großen Kontaktimpedanzen der Stromelektroden kann man davon ausgehen, dass bei dieser Einspeisung das mittlere Spannungspotential minimal wird und damit auch die Leckströme.

Im Folgenden wird nun eine effiziente Methode vorgestellt, die parasitäre Leckströme und zusätzlich auch parasitäre Anregungsströme minimiert. Bei dieser Methode werden jeweils zwei Messungen mit getauschten Anregungsströmen I_{i1} und I_{i2} , bzw. Anregungsspannungen s.u., durchgeführt. Zur Erläuterung der Methode wird ein lineares System mit Stromanregung angenommen, sodass die Spannung

$$U_{24} = I_{i1}Z_1 + I_{i2}Z_2 + I_{ext}Z_3 \quad (4.16)$$

zwischen zwei beliebigen Elektroden, z.B. 2 und 4 in Abbildung 34, in Abhängigkeit von den Anregungsströmen I_{i1} und I_{i2} und zwei Kopplungsparametern Z_1 und Z_2 beschrieben werden kann. Zusätzlich wird ein parasitärer Anregungsstrom I_{ext} mit dem Kopplungsparameter Z_3 berücksichtigt, der durch das Medium fließt und eine störende Spannung bewirkt. Äquivalent

dazu könnte auch eine parasitäre Spannung $U_{ext} = I_{ext}Z_3$ eingesetzt werden. Es wird nun die Spannung auf den mittleren Anregungsstrom

$$I_i = \frac{(I_{i1} - I_{i2})}{2} \quad (4.17)$$

normiert. Angewendet auf Gleichung 4.16 liefert dies die zugehörige Transferimpedanz

$$Z_{T12} = 2 \frac{U_{24}}{(I_{i1} - I_{i2})} = 2 \frac{I_{i1}Z_1 + I_{i2}Z_2 + I_{ext}Z_3}{(I_{i1} - I_{i2})}. \quad (4.18)$$

Die Gleichung zeigt, dass die berechnete Impedanz nicht nur vom parasitären Strom I_{ext} , sondern auch von den Stromwerten I_{i1} und I_{i2} abhängt. Dieser unerwünschte Effekt kann mittels einer zusätzlichen Messung mit getauschten Anregungsströmen I_{i1} und I_{i2} behoben werden. Die Transferimpedanz der zweiten Messung ist hierfür

$$Z_{T21} = 2 \frac{I_{i2}Z_1 + I_{i1}Z_2 + I_{ext}Z_3}{(I_{i2} - I_{i1})}. \quad (4.19)$$

Bildet man nun den Mittelwert von Z_{T12} und Z_{T21} so folgt für die mittlere Transferimpedanz

$$Z_T = \frac{Z_{T12} + Z_{T21}}{2} = Z_1 - Z_2. \quad (4.20)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass der Fehler aufgrund des parasitären Anregungsstromes I_{ext} behoben wird und dass die mittlere Transferimpedanz Z_T nicht mehr von den Werten der einzelnen Anregungsströme I_{i1} und I_{i2} abhängt.

In der Herleitung wurde nur ein externer Anregungsstrom definiert. Im Prinzip kann jedoch mit dieser Methode die schädliche Wirkung beliebig vieler parasitärer Anregungsströme eliminiert werden, solange diese mit dem Generatorsignal korreliert sind und sich nicht nach dem Umschalten des Stromes ändern. Korrelierte parasitäre Ströme können zum Beispiel durch Masseschleifen oder durch elektrische oder magnetische Felder eingekoppelt werden. Die Störquelle könnte zum Beispiel der Sinusgenerator sein, der für die Anregung verwendet wird, oder die Verbindungskabel, die vom Generator zur Strom-Umschalteneinheit führen.

Etwas verwirrend ist die Differenz $Z_1 - Z_2$ in Gleichung (4.20). Dies ist nur eine Folge der Stromrichtungsdefinition. Für eine gedrehte Festlegung des Stromzeigers für I_{i2} wäre z.B. der mittlere Anregungsstrom

$$I_i = \frac{(I_{i1} + I_{i2})}{2} \quad (4.21)$$

und es würde I_{i1} mit $-I_{i2}$ getauscht. Dies hätte für die mittlere Transferimpedanz die Summe $Z_1 + Z_2$ zum Ergebnis.

Anhand von zwei Beispielen wird nun die Methode demonstriert. Zuerst wird eine symmetrische Stromeinspeisung mit gleichen Amplituden der Anregungsströme $I_{i1} = -I_{i2} = I_i$ angenommen, die um 180° phasenverschoben sind. Eingesetzt in Gleichung (4.18) liefert dies

$$U_{24} = (Z_1 - Z_2)I_i + I_{ext}Z_3. \quad (4.22)$$

Ohne Stromumschaltung würde zusätzlich zur Transferimpedanz $(Z_1 - Z_2) = Z_T$ ein Anteil von Z_3 mit gemessen. Für die erste Einspeisung wird nun $(I_{i1} - I_{i2})/2 = I_i$ und für die getauschte $(I_{i2} - I_{i1})/2 = -I_i$ eingespeist. Die Phase wird also bei der zweiten Einspeisung um 180° gedreht. Im Gegensatz dazu bleibt die Phase des parasitären Stromes I_{ext} , der durch das Messobjekt fließt, für beide Einspeisungen konstant. Bildet man nun den Mittelwert der Messung, nach Normalisieren auf die Ströme $+I_i$ und $-I_i$ entsprechend Gleichung (4.20), so wird die schädliche Wirkung des parasitären Stromes I_{ext} aufgehoben.

Im zweiten Beispiel wird nun eine unsymmetrische Stromeinspeisung angenommen. Da die Summe aller Ströme Null ist, wird der verbleibende Strom als Leckstrom

$$I_L = I_{i1} + I_{i2} \quad (4.23)$$

abfließen. Es werden wieder bei der zweiten Messung die Ströme vertauscht. Für beide Einspeisungen ist die Summe $(I_{i1} + I_{i2})$ und demzufolge auch der Leckstrom konstant. Die Phase des Leckstromes ändert sich, wie beim externen Strom, nach dem umschalten nicht. Insofern wird auch der Leckstrom eliminiert. Die beiden Messungen mit unsymmetrischer Einspeisung wirken zusammen wie eine symmetrische Stromeinspeisung.

Es bleibt noch die Frage wie das Tauschen der Ströme I_{i1} und I_{i2} realisiert werden kann. Natürlich ist es naheliegend hierfür präzise Stromquellen zu verwenden, wie zum Beispiel die in Ross (2003). Für diesen Fall wäre der parasitäre Leckstrom prinzipiell Null. Aufgrund der parasitären Kapazitäten ist die Realisierung jedoch sehr schwierig. Zudem würde die Anregung mit zwei Stromquellen bei galvanisch getrennten Proben undefinierte Spannungen gegen Systemmasse bewirken und folglich große Gleichtaktfehler. Alternativ könnte nur eine Stromquelle verwendet und die andere Seite mit Systemmasse verbunden werden. Der zur Systemmasse abfließende Strom ist jedoch in diesem Fall anhängig von der Probe, sodass das Tauschen des Anregungsstromes nicht unbedingt auch das Tauschen des abfließenden Stromes bewirkt.

Im Folgenden wird daher untersucht unter welchen Voraussetzungen Spannungsquellen die Stromumschaltung ermöglichen. Bei diesen Überlegungen werden zur einfacheren Darstellung die Spannungen, die über die Shunt-Widerstände abfallen, vernachlässigt, sodass $U_{g1} \approx U_{s1}$ und $U_{g2} \approx U_{s2}$. Weiterhin wird das Probenmodell für die Anregung als Vierpol

$$\begin{pmatrix} I_{i1} \\ I_{i2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{g1} \\ U_{g2} \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

dargestellt, mit den Anregungsströmen I_{i1} und I_{i2} , den resultierenden Anregungsspannungen U_{g1} und U_{g2} und den Admittanzen Y_{11} bis Y_{22} . Die Probe hat typischerweise die elektrischen Eigenschaften eines passiven linearen zeitinvarianten Netzwerkes. Bezüglich der Zeitinvarianz wird vorausgesetzt, dass sich die Eigenschaften für den Zeitraum der Messung mit normaler und getauschter Einspeisung nicht ändern. Diese Netzwerke sind kopplungssymmetrisch (reziprok) mit identischen Admittanzen $Y_{12} = Y_{21}$. Wird zusätzlich angenommen, dass das Modell auch widerstandssymmetrisch (symmetrisch) ist, mit $Y_{11} = Y_{22}$, so bewirkt das Tauschen der Spannungen $U_{g1} \leftrightarrow U_{g2}$ auch das Tauschen der Ströme, wie man leicht nachprüfen kann. Kopplungs- und widerstandssymmetrische Netzwerke erfüllen daher die Voraussetzungen.

Etwas schwieriger wird die Ansteuerung, wenn keine Widerstandssymmetrie vorliegt, zum Beispiel durch unterschiedliche Übergangsimpedanzen der Stromelektroden. Um hierfür die Umschaltung zu realisieren wird das Spannungsverhältnis $r = U_{g1}/U_{g2}$ so eingestellt, dass die Ströme identisch sind, also $I_{i1} = -I_{i2} = I_i$. Das Umschalten der Spannungen U_{g1} nach $-U_{g1}$ und U_{g2} nach $-U_{g2}$ bewirkt damit auch ein Umschalten des Stromes von I_i nach $-I_i$.

Die in dieser Arbeit verwendete Probe ist reziprok und nahezu widerstandssymmetrisch. Aus praktischen Gründen wurden daher für die ersten Erprobungen der Messmethode die Spannungen U_{g1} und U_{g2} getauscht. In der Konfigurationsdatei wird dazu die Liste der Elektrodennummern für die Stromeinspeisung modifiziert damit der Multiplexer die Spannungen entsprechend schaltet. So wird zum Beispiel für die erste Einspeisung das Elektrodenpaar $n_1 - n_2$ verwendet, für die zweite das Elektrodenpaar $n_2 - n_1$, für die dritte das Paar $n_3 - n_4$ und für die vierte das Paar $n_4 - n_3$, usw. Nach abgeschlossener Messung wird anhand der Messdaten die Funktion der Stromumschaltung überprüft. Siehe dazu Abschnitt 4.3.4 und die Messungen in Abbildung 43.

Offen ist noch, ob bei kopplungs- und widerstandssymmetrischen Proben besser eine symmetrische oder unsymmetrische Spannungsanregung verwendet werden sollte. Die Messung mit normalen und getauschten Spannungen $U_{g1} \leftrightarrow U_{g2}$ wirken zusammen wie symmetrische Spannungsanregungen, auch wenn die einzelnen Messungen unsymmetrisch angeregt werden.

Insofern verhält sich eine einmalige Messung mit einer symmetrischen Spannungsquelle in Hinblick auf den Leckstrom vergleichbar, da eine symmetrische Spannungsanregung $U_{g1} = -U_{g2}$ bei einem kopplungs- und widerstandssymmetrischen Netzwerk die Ströme $I_{i1} = -I_{i2}$ bewirkt und somit der Leckstrom $I_L = I_{i1} + I_{i2}$ Null ist. Um zusätzlich die Fehler aufgrund der parasitären Anregungsströme zu vermeiden, ist auch bei symmetrischer Anregung die zweite Messung mit Umschaltung erforderlich. Bezüglich der parasitären Ströme verhalten sich beide Anregungen somit gleich. Eine symmetrische Spannungsanregung ist jedoch wegen des besseren Signal-zu-Rauschverhältnisses bei widerstandssymmetrischen Netzwerken günstiger. Die Anregungsspannung $U_{g1} - U_{g2}$ ist im Vergleich zur einseitigen Anregung bei gleicher Maximalspannung gegen Erdpotential größer, wodurch ein höheres Signal-zu-Rauschverhältnis erzielt wird.

4.3.4 Detektion der parasitären Ströme und Impedanzen

Im Gegensatz zum vorherigen Kapitel wird nun die Stromumschaltung angewendet um die Qualität der einzelnen Messwertpaare zur beurteilen, bzw. parasitäre Ströme und Impedanzen zu detektieren. Vergleichbar zur Auswertung der Standardabweichung der Messdaten oder möglicher reziproker Messungen wird nun auch hier der Unterschied der Messwertpaare ausgewertet. Dazu wird formal anstelle des Mittelwertes der Transferimpedanzen Z_{T12} und Z_{T21} (siehe Gleichung (4.20) die Differenz

$$\begin{aligned} \frac{Z_{T12} - Z_{T21}}{2} &= \frac{I_{i1}Z_1 + I_{i2}Z_2 + I_{ext}Z_3}{(I_{i1} - I_{i2})} - \frac{I_{i2}Z_1 + I_{i1}Z_2 + I_{ext}Z_3}{-(I_{i1} - I_{i2})} \\ &= \frac{(I_{i1} + I_{i2})}{(I_{i1} - I_{i2})} (Z_1 + Z_2) + 2 \frac{I_{ext}}{(I_{i1} - I_{i2})} Z_3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

gebildet. Der erste Term auf der linken Seite der unteren Gleichung

$$I_{Ln} = \frac{I_L}{2I_i} = \frac{(I_{i1} + I_{i2})}{(I_{i1} - I_{i2})} \quad (4.26)$$

ist der, auf den Anregungsstrom normierte, Leckstrom I_{Ln} . Bei Messungen an galvanisch isolierten Probenkörpern sollte der niederfrequente Leckstrom (DC) auch bei unsymmetrischer Spannungsanregung Null sein. Insofern liefert die Überprüfung des Leckstromes speziell bei unsymmetrischer Anregung Hinweise auf unerwünschte elektrische Leitungspfade zur Systemmasse. So konnten zum Beispiel hiermit undichte Stellen im Behälter festgestellt werden, die elektrisch leitende Verbindungen über einen Wasserpfad vom Körper zur Systemmasse bewirkten.

Im oberen Frequenzbereich wird der Leckstrom zusätzlich über parasitäre Kapazitäten abfließen. Folglich wird der Imaginärteil des Leckstromes mit der Frequenz zunehmen. Der Imaginärteil liefert somit einen Hinweis auf die Größe der parasitären Kapazitäten.

Zur Kontrolle der Widerstandssymmetrie bzw. der Stromumschaltung werden die Leckströme für die normale und getauschte Messung verglichen. Bei einer gut funktionierenden Umschaltung sollten sich die beiden Ströme nicht unterscheiden. Um einen Phasenbezug zu erhalten werden auch hierfür vor dem Vergleich die Leckströme auf den Anregungsstrom gemäß Gleichung (4.26) normiert. Typische Spektren der Leckströme sind zum Beispiel in Abbildung (43) dargestellt.

Der zweite Term

$$2 \frac{I_{ext}}{(I_{i1} - I_{i2})} Z_3. \quad (4.27)$$

in Gleichung (4.25) ist der schädliche Beitrag, der durch den parasitären Anregungsstrom I_{ext} erzeugt wird. Typischerweise ist der Leckstrom im unteren Frequenzbereich bei Messungen an isolierten Proben vernachlässigbar klein. Unter dieser Annahme ist bei niedrigen Frequenzen in Gleichung (4.25) im Wesentlichen der externe Anregungsstrom wirksam. Bei hohen Frequenzen wirkt zusätzlich der Leckstrom.

Die bisherigen Ergebnisse zeigten, dass die Überprüfung der Leckströme auf Ausreißer sehr hilfreich ist, da z.B. auch unterschiedliche Übergangsimpedanzen der Stromelektroden anhand der Leckströme detektiert werden können. Bezüglich der Differenz $Z_{T12} - Z_{T21}$, zur erweiterten Beurteilung der Messdaten, werden in Zukunft noch weitere Untersuchungen folgen.

4.3.5 Gleichtaktfehler

Da Gleichtaktfehler und mögliche Korrekturverfahren schon in Kapitel 3.3.5 beschrieben wurden, werden hier nur noch die Ergebnisse der Korrektur vorgestellt. Die gemessenen Übertragungsfunktionen der ADC-Kanäle zeigten Amplitudenunterschiede von 0,3 % und Phasenunterschiede von 0,3 mrad bei 1 kHz. Mittels der numerischen Korrektur konnten die Verstärkungsunterschiede auf 0,02 % und die Phasenunterschiede auf 0,01 mrad bei 1 kHz reduziert werden. Messungen zeigten, dass der Einfluss der Verstärkerkanäle auf den Gleichtaktfehler wieder vernachlässigt werden kann, da die einzelnen Verstärkerkanäle identisch, mit gleich langen Leitungen, aufgebaut wurden. Im Gegensatz zum Impedanzspektrometer wird beim Tomographen versucht mittels der Stromumschaltung oder einer angepassten (sym-

metrischen) Anregung die parasitären Ströme zu minimieren und damit auch die mittleren Gleichtaktspannungen der Probe. Diese Anregung reduziert zusätzlich zur Korrektur die Gleichtaktfehler.

4.3.6 Kapazitätsmessung der Stromkanäle

Entsprechend der Herleitung in Kapitel 4.3.1 ist für die Korrektur der Stromwerte die genaue Kapazität der Leitungen und der Multiplexerkarte erforderlich. Diese Werte können sehr einfach durch Messungen der unbelasteten Stromkanäle bestimmt werden, da hierbei nur die eigenen parasitären Kapazitäten der Kabel wirksam sind. Für diese Messung werden die Kabel der Stromkanäle so ausgelegt, dass die einzelnen Ausgänge einen größeren Abstand voneinander und von leitfähigen Körpern haben. Die Anordnung sorgt für minimale Kopplungskapazitäten und vernachlässigbare Leitwerte.

Zur Berechnung der Kapazitäten wird ein einfaches elektrisches Modell verwendet. Die Kapazitäten der jeweiligen Kanäle C_{c1} und C_{c2} bilden mit den beiden Shunt-Widerständen R_{s1} und R_{s2} einfache Spannungsteiler

$$U_{s1} = U_{g1} \frac{Z_{c1}}{Z_{c1} + R_{s1}} = U_{g1} \frac{1}{1 + j\omega R_{s1} C_{c1}}, \quad (4.28)$$

$$U_{s2} = U_{g2} \frac{Z_{c2}}{Z_{c2} + R_{s2}} = U_{g2} \frac{1}{1 + j\omega R_{s2} C_{c2}}. \quad (4.29)$$

Aufgrund der kapazitiven Belastung C_{c1} und C_{c2} sind die Spannungen U_{s1} und U_{s2} betragsmäßig kleiner als die Generatorspannungen U_{g1} und U_{g2} . Nach Umstellung von Gleichung (4.28) folgt für die Kapazitäten der einzelnen Stromkanäle

$$C_{c1} = \left(\frac{U_{g1}}{U_{s1}} - 1 \right) \frac{1}{j\omega R_{s1}}, \quad (4.30)$$

$$C_{c2} = \left(\frac{U_{g2}}{U_{s2}} - 1 \right) \frac{1}{j\omega R_{s2}}. \quad (4.31)$$

Um zusätzlich auch den Einfluss der Multiplexer zu erfassen, wird jeder Stromkanal einmal über den ersten Shunt-Widerstand R_{s1} und einmal über den zweiten Shunt-Widerstand R_{s2} angesprochen. Hierbei wird zum Beispiel für die ersten beiden Stromkanäle die Konfiguration 1-2 und 2-1 verwendet.

4.4 Induktive Kopplung und Skin-Effekt

Es wird nun der maximal mögliche Phasenfehler aufgrund induktiver Kopplungen abgeschätzt. Anhand der Berechnungen in Abschnitt 3.8 ist der Phasenfehler aufgrund des Skin-Effektes selbst für Proben mit einem Durchmesser von 1 m nur ungefähr 50 μ rad. Dieser Fehler kann daher vernachlässigt werden.

Zur Abschätzung der induktiven Kopplungen wird, wie in Abschnitt 3.7 beschrieben, zunächst die Probeninduktivität und dann die Gegeninduktivität berechnet. Zur Abschätzung der maximalen Probeninduktivität wird eine zylindrische Probe angenommen mit einer Länge von 0,5 m und einem Durchmesser von 0,4 m. Die Einspeisung und Spannungsmessung erfolgt an den Stirnseiten des Zylinders in maximalem Abstand. Wird nun ein Induktivitätswert von 1000 nH/m angenommen, so ist die maximal zu erwartende Induktivität 500 nH. Dies würde bei der Gesamtimpedanz

$$Z = R + j\omega L \quad , \quad (4.32)$$

für einen Probenwiderstand von 31 Ω eine Phase von 0,1 mrad bei einer Frequenz von 1 kHz bewirken. Für diese Probenabmessungen sollte der spezifische Widerstand folglich nicht kleiner als 8 Ω m sein. Da für die Einspeisung der größte Abstand gewählt wurde und der Induktivitätswert pro Meter wegen der räumlichen Nähe zum Boden wahrscheinlich kleiner ist, kann die Wirkung der Probeninduktivität bei praktischen Messungen vernachlässigt werden.

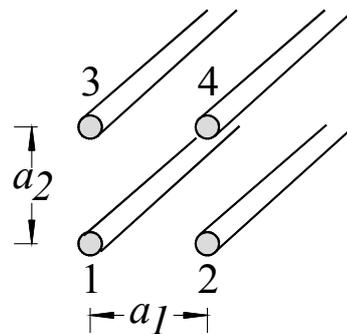


Abbildung 35: Anordnung der Leitungen zur Berechnung der Gegeninduktivität.

Zur Berechnung der Gegeninduktivität wird angenommen, dass die 3 m langen Kabel vom Messgerät zur Probe 2 m parallel verlaufen. Es wird weiterhin angenommen, dass das einspeisende Kabelpaar mit den Leitungen 1 und 2 gemäß Abbildung 35 unterhalb des messenden Kabelpaars mit den Leitungen 3 und 4 liegt. Jedes Paar ist eine Doppelleitung, sodass nun die Gegeninduktivität mit

$$M = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{r_{14} r_{23}}{r_{13} r_{24}} \quad (4.33)$$

berechnet werden kann (Pregla 1985). Hierbei ist r der Abstand zwischen den Leitungen und l die Länge der Leitungen. Für eine quadratische Anordnung mit $a_1 = a_2$ nach Abbildung 35 ist die Induktivität 277 nH und für eine flache rechteckige Anordnung mit $a_1 = 10 a_2$ ist die Induktivität 1,8 μ H. Dies zeigt, dass recht große Gegeninduktivitäten erzeugt werden können, wenn die Kabel ungünstig angeordnet sind. Um diesen Anteil der Gegeninduktivität zu vermeiden, sollten die Kabel für die Einspeisung und die Kabel für die Spannungsmessung getrennt verlegt werden, zum Beispiel jeweils in Bündeln.

Die Gegeninduktivität der Kabel am Messkörper werden nun mit Gleichung (3.25) in Abschnitt 3.7 berechnet. Für die Schleifen C_1 und C_2 in Abbildung 17 wird ein Radius von 0,3 m angenommen. Weiterhin wird angenommen, dass die Schleifen im Abstand von 0,01 m übereinander liegen. Für diese ungünstigen Annahmen ist die Gegeninduktivität 0,9 μ H. Die Schleifen an der Säule können kaum vermieden werden. Da der Strom über verschiedene Wege eingespeist wird, ist es sehr wahrscheinlich, dass einige Schleifen stärker gekoppelt sind. Diese Gegeninduktivität ist daher realistisch und kann zu Messfehlern führen. Übertragen auf die gemessene Transferimpedanz R bedeutet dies, dass Messwerte unter 100 Ω bei 1 kHz Phasenfehler von 0,1 mrad aufweisen können.

4.5 Modellierung

4.5.1 Finite-Elemente-Modellierung der Probe

Zur Rekonstruktion der komplexen Leitfähigkeit σ im Medium wird zunächst eine Methode benötigt mit der die elektrische Potentialverteilung in Abhängigkeit von der komplexen Leitfähigkeit für punktförmige Stromeinspeisungen $I\delta(\mathbf{r})$ berechnet werden kann. Hierfür bietet sich die Finite-Element-Methode an. Mit der Methode wird die Poisson-Gleichung

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \Phi) = I\delta(\mathbf{r}) \quad (4.34)$$

diskretisiert und in ein numerisch lösbares Gleichungssystem überführt (siehe z.B. Pelton et al. 1978A). Das gesamte Feldgebiet des Mediums wird dazu in Teilgebiete (finite Elemente) mit möglichst einfacher geometrischer Form aufgeteilt. Innerhalb der Feldgebiete ist die Leitfähigkeit konstant. Die Eckpunkte und Kanten der Elemente bilden zusammen ein Netzwerk aus Knoten und Zweigen, die das gesamte Gebiet formen. Innerhalb der Teilgebiete wird das Potential

$$\varphi = H(\mathbf{r}) U \quad (4.35)$$

mittels Basisfunktionen $H(\mathbf{r})$ approximiert. Die Basisfunktionen sind Funktionen der Ortskoordinaten \mathbf{r} und beziehen sich nur auf die Knotenpotentiale \mathbf{U} . Durch diese Diskretisierung braucht zur Lösung der Poisson-Gleichung nur noch das Potential \mathbf{U} an den Knoten der Elemente berechnet werden. Entsprechend wird anstelle der Stromdichte \mathbf{J} der Knotenstrom \mathbf{I} als Randbedingung vorgegeben, wodurch die Poisson-Gleichung auf ein numerisch lösbares lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{Y}\mathbf{U} = \mathbf{I} \quad (4.36)$$

mit einer noch zu bestimmenden Systemmatrix \mathbf{Y} reduziert wird. Die Anzahl der Elemente der Vektoren \mathbf{U} und \mathbf{I} entspricht der Knotenanzahl des Netzes.

Da für hinreichend genaue Potential-Berechnungen Netze mit einigen 1000 Elementen notwendig sind, werden die Netze meist automatisch mit Programmen generiert. Hierfür stehen kommerzielle als auch freie Programme zur Verfügung. Die in dieser Arbeit verwendeten Netze wurden mit einer MATLAB-Funktion von Persson und Strang (2004) erzeugt. Der Datensatz dieser Netzwerke beinhaltet die Knotennummern der einzelnen Elemente und die Koordinaten der Knoten.

Im Folgenden wird nun ein Verfahren aufgezeigt, wie die Systemmatrix für das entsprechende Netz berechnet werden kann. Dazu wird zunächst das approximierte Potential φ in die Poisson-Gleichung eingetragen und als Residuum R in der Form

$$R = \nabla \cdot (\sigma \nabla \varphi) - I \delta(\mathbf{r}) \quad (4.37)$$

dargestellt. Das approximierte Potential ist dann die richtige Lösung, wenn das Residuum minimal wird. Um das Residuum zu minimieren wird die Methode der gewichteten Residuen von Galerkin verwendet. Das Residuum R wird mit einer Wichtungsfunktion w multipliziert und über das gesamte Gebiet des Mediums integriert,

$$\int_{\Omega} w R d\Omega = 0, \quad (4.38)$$

wobei im dreidimensionalen Fall Ω das Volumen darstellt. Das Integral (4.38) wird nun als Summe von Teilintegralen dargestellt

$$\sum_{e=1}^{N_e} \left[\sigma_e \int_{\Omega_e} w (\nabla \cdot \nabla \varphi) d\Omega - \int_{\Omega_e} w I \delta(\mathbf{r}) d\Omega \right] = 0. \quad (4.39)$$

Da die Leitfähigkeit innerhalb der Teilgebiete konstant ist, kann sie vor das Teilintegral gestellt werden. Um die zweifache Differenzierbarkeit der Basisfunktion zu vermeiden, wird

in einem weiteren Schritt das linke Teilintegral mittels des ersten Greenschen Theorems als schwache Formulierung geschrieben (Kwon und Bang 1997, Hunter und Pullan 2002),

$$\sigma_e \int_{\Omega_e} w(\nabla \cdot \nabla \varphi) d\Omega = -\sigma_e \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi \cdot \nabla w) d\Omega + \sigma_e \int_{\Gamma_e} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma, \quad (4.40)$$

wobei Γ_e im dreidimensionalen Fall die Fläche ist, die das Teilgebiet umschließt. In das mittlere Integral wird nun die Basisfunktion für φ nach Gleichung (4.35) eingesetzt und für die Wichtungsfunktion

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial U} = H(\mathbf{r}) \quad (4.41)$$

wird entsprechend der Galerkin-Methode die Ableitung der Lösungsfunktion nach den zu suchenden Parametern, den Knotenspannungen, verwendet. Dies liefert schließlich die Gleichung

$$\sigma_e \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi \cdot \nabla w) d\Omega = \sigma_e \int_{\Omega_e} (\nabla H \cdot \nabla H) d\Omega \mathbf{U} = \sigma_e \mathbf{K}_e \mathbf{U} \quad (4.42)$$

zur Bestimmung der Elementmatrizen \mathbf{K}_e , die später zur Systemmatrix zusammengefasst werden.

Als nächstes wird nun die Basisfunktion H bestimmt. Innerhalb der Teilgebiete kann das Potential φ im einfachsten Fall durch einen linearen Ansatz approximiert werden. Für ein tetraederförmiges Element würde z.B. folgender Ansatz

$$\varphi = C_1 + C_2 x + C_3 y + C_4 z = \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \end{pmatrix} \mathbf{C} \quad (4.43)$$

gewählt, in dem \mathbf{C} ein Spaltenvektor mit den Koeffizienten C_1 bis C_4 darstellt. Durch Einsetzen der entsprechenden Knotenkoordinaten x_i, y_i, z_i folgt für die Knotenspannungen

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{C}. \quad (4.44)$$

Das Potential φ wird nun als Funktion der Knotenspannungen dargestellt. Dazu wird die Matrix \mathbf{P} , die nur von der Geometrie des Elementes abhängt, invertiert und in Gleichung (4.43) eingesetzt. Dies liefert:

$$\varphi = (1 \quad x \quad y \quad z) \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \mathbf{H}(r) \mathbf{U}. \quad (4.45)$$

Im nächsten Schritt wird der Gradient

$$\nabla \varphi = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (1 \quad x \quad y \quad z) \\ \frac{\partial}{\partial y} (1 \quad x \quad y \quad z) \\ \frac{\partial}{\partial z} (1 \quad x \quad y \quad z) \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{U} = \nabla \mathbf{H}(r) \mathbf{U} \quad (4.46)$$

berechnet. Dies liefert den Operator

$$\nabla \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}, \quad (4.47)$$

der angewendet auf die Knotenpotentiale des Elementes die elektrische Feldstärke \mathbf{E} innerhalb des Elementes bestimmt. Wird nun noch das Skalarprodukt in Gleichung (4.42) als Matrixprodukt geschrieben, so liefert dies die Werte der Elementmatrix

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}) d\Omega = (\nabla \mathbf{H} \cdot \nabla \mathbf{H}) \int_{\Omega_e} d\Omega = \nabla \mathbf{H}^T \nabla \mathbf{H} V_e \quad (4.48)$$

mit

$$V_e = \int_{\Omega_e} d\Omega = \left| \frac{1}{6} \det \mathbf{P} \right|, \quad (4.49)$$

dem Volumen des Elementes. In gleicher Weise können die Elementmatrizen für Dreieckelemente berechnet werden. Entsprechend gilt

$$\nabla \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{P}^{-1}, \quad (4.50)$$

wobei \mathbf{P} nur zwei Koordinatenachsen enthält. Der Rechenweg unterscheidet sich ein wenig von den sonst üblichen Darstellungen, wie zum Beispiel in Murai und Kagawa (1985), Xu et al. (2005) oder Kwon und Bang (1997). Er liefert dafür jedoch eine kompaktere Darstellung in Matrizenform.

In Bezug auf Gleichung (4.42) gilt nun für die Admittanzmatrix der Elemente

$$\mathbf{Y}_e = \sigma_e \mathbf{K}_e. \quad (4.51)$$

Da die Admittanzmatrizen \mathbf{Y}_e symmetrisch und die Werte der Hauptdiagonalen die negative Summe der jeweiligen Zeilen bzw. Spalten sind (für identische Knotenspannungen kann kein Strom über die Knoten fließen), hat ein Dreieckselement somit nur 3 unabhängige Admittanzen Y_{Z1} bis Y_{Z3} ,

$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_{Z1} + Y_{Z3} & -Y_{Z1} & -Y_{Z3} \\ -Y_{Z1} & Y_{Z1} + Y_{Z2} & -Y_{Z2} \\ -Y_{Z3} & -Y_{Z2} & Y_{Z2} + Y_{Z3} \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

und ein Tetraeder-Element entsprechend nur 6 unabhängige Admittanzen Y_{Z1} bis Y_{Z6} ,

$$\mathbf{Y}_e = \begin{bmatrix} Y_{Z1} + Y_{Z3} + Y_{Z4} & -Y_{Z1} & -Y_{Z3} & -Y_{Z4} \\ -Y_{Z1} & Y_{Z1} + Y_{Z2} + Y_{Z5} & -Y_{Z2} & -Y_{Z5} \\ -Y_{Z3} & -Y_{Z2} & Y_{Z2} + Y_{Z3} + Y_{Z6} & -Y_{Z6} \\ -Y_{Z4} & -Y_{Z5} & -Y_{Z6} & Y_{Z4} + Y_{Z5} + Y_{Z6} \end{bmatrix}. \quad (4.53)$$

Für die Admittanzmatrix der Elemente kann folglich ein einfaches äquivalentes elektrisches Netzwerk gemäß Abbildung 36 mit 3 bzw. 6 Zweig-Admittanzen angegeben werden.

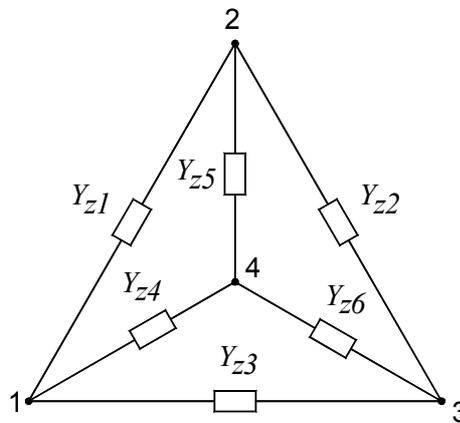


Abbildung 36: Zweig-Admittanzen der Dreieck- und Tetraederelemente. Beim Dreieckselement fehlen die Admittanzen Y_{Z4} , Y_{Z5} und Y_{Z6} .

Der Zusammenhang zwischen den Zweigspannungen und den Zweigströmen der Elemente wird hierbei durch das ohmschen Gesetz

$$\mathbf{I}_{ze} = \mathbf{Y}_{ze} \mathbf{U}_{ze} \quad (4.54)$$

beschrieben, wobei \mathbf{Y}_{ze} eine Diagonalmatrix darstellt, deren Diagonalelemente die Zweig-Admittanzen sind. In Analogie zur Elementmatrix \mathbf{K}_e kann auch für die Zweigdarstellung ein Elementvektor \mathbf{k}_{ze} zur Berechnung der Admittanzmatrix \mathbf{Y}_{ze} gemäß der Gleichung

$$\mathbf{Y}_{ze} = \sigma_e \text{diag}(\mathbf{k}_{ze}) \quad (4.55)$$

angegeben werden.

Für spätere Berechnungen wird nun die Beziehung zwischen der Elementmatrix \mathbf{K}_e und dem Elementvektor \mathbf{k}_{ze} hergeleitet. Zunächst werden die Zweigspannungen mit

$$\mathbf{U}_{ze} = \mathbf{A}_e \mathbf{U}_e \quad (4.56)$$

in Abhängigkeit von den Knotenspannungen \mathbf{U}_k und der Inzidenzmatrix \mathbf{A} dargestellt. Die Inzidenzmatrix ist relativ einfach aufgebaut. Sie ist am positiv definierten Knoten des zugehörigen Zweiges + 1 und am negativ definierten Knoten - 1. Mit der transponierten Matrix können entsprechend aus den Zweigströmen mit

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{I}_{ze} \quad (4.57)$$

die Knotenströme berechnet werden. Wird nun Gleichung (4.56) in (4.54) und diese in (4.57) eingesetzt, so folgt

$$\mathbf{I}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{Y}_{ze} \mathbf{A}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{Y}_e \mathbf{U}_e \quad (4.58)$$

und somit

$$\mathbf{Y}_e = \mathbf{A}_e^T \mathbf{Y}_{ze} \mathbf{A}_e. \quad (4.59)$$

Einsetzen von Gleichung (4.51) und (4.55) in (4.59) liefert schließlich die Beziehung

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{k}_{ze}) \mathbf{A}_e, \quad (4.60)$$

die die Elementmatrix \mathbf{K}_e der Knoten mit dem Elementvektor \mathbf{k}_{ze} der Zweige verknüpft.

Zur Darstellung des gesamten Systems wird nun aus den einzelnen Elementmatrizen oder den Elementvektoren die Admittanzmatrix des Systems \mathbf{Y} gebildet. Meist werden die Elementmatrizen verwendet. Zur Berechnung wird die Summe aller Teilintegrale gemäß Gleichung (4.39) und (4.40) gebildet,

$$\sum_{e=1}^{N_e} \sigma_e \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi \cdot \nabla w) d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \sigma_e \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e = \mathbf{Y} \mathbf{U}. \quad (4.61)$$

Die Elementmatrizen mit den lokalen Indizes werden zur Systemmatrix mit globalen Indizes des gesamten Netzwerkes zusammengefasst. Die Systemmatrix ist, wie die Elementmatrizen, symmetrisch.

Alternativ kann die Systemmatrix auf Basis der Zweig-Admittanzen mittels der Inzidenzmatrix \mathbf{A} des Systems berechnet. In Analogie zu Gleichung (4.59) gilt für die Systemmatrix

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_z \mathbf{A}. \quad (4.62)$$

Die Admittanzmatrix \mathbf{Y}_z wird mit

$$\mathbf{Y}_z = \text{diag}(\mathbf{B}\boldsymbol{\sigma}_e) \quad (4.63)$$

berechnet. Die Matrix \mathbf{B} wird einmalig aus den Werten aller Elementvektoren \mathbf{k}_{ze} zusammengestellt.

Zur Lösung des Gleichungssystem $\mathbf{YU} = \mathbf{I}$ muss noch der Knotenstrom \mathbf{I} bestimmt werden. Dieser wird durch den anregenden Strom in Gleichung (3.29) und der Neumann Randbedingung in Gleichung (4.40) festgelegt

$$I_e = \sum_{e=1}^{N_e} \left[\sigma_e \int_{\Gamma_e} w \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Omega_e} w I \delta(r) d\Omega \right]. \quad (4.64)$$

In dieser Arbeit werden hauptsächlich isolierte Probenkörper verwendet. Aufgrund der Isolierung fließen, zumindest im ersten Ansatz, bis auf die Anregung keine Ströme in das Objekt hinein oder hinaus. Das linke Integral ist daher Null. Das rechte Integral wird aufgrund der Multiplikation mit der Delta-Distribution nach Einsetzen von Gleichung (4.41) zu

$$I_e = \int_{\Omega_e} w I \delta(r) d\Omega = H(r) I. \quad (4.65)$$

Der Stromvektor \mathbf{I} des Systems ist daher bis auf die Knoten der Elemente, in der die Anregung durchgeführt wird, Null.

Um auch die Dirichlet-Randbedingungen zu berücksichtigen wird das Gleichungssystem modifiziert. Anstelle der Stromwerte im Vektor \mathbf{I} werden für die entsprechenden Knoten die Spannungswerte eingetragen. In der Admittanzmatrix \mathbf{Y} werden alle Elemente der Zeilen mit der entsprechenden Knotennummer auf Null gesetzt, bis auf die Elemente der Hauptdiagonalen, welche auf Eins gesetzt werden. Mit dieser modifizierten Matrix und dem neuen Stromvektor werden zunächst die unbekanntenen Knotenspannungen berechnet. Anschließend können gegebenenfalls mit den nun bekannten Knotenspannungen und der nicht modifizierten Matrix alle Knotenströme $\mathbf{I} = \mathbf{YU}$ berechnet werden. Für die isolierten Probenkörper werden keine Dirichlet-Randbedingung vorgeben.

4.5.2 Modellierung der parasitären Ableitströme

Damit die Ableitströme über die Eingangsimpedanzen der Elektrodenkabel bei der späteren Bildgebung keine zusätzlichen Fehler bewirken, ist es sinnvoll die Impedanzen schon bei der Modellierung zu berücksichtigen. Es ist daher naheliegend für die Eingangsimpedanzen eine zusätzliche symmetrische Admittanzmatrix \mathbf{Y}_a hinzuzufügen,

$$(\mathbf{Y} + \mathbf{Y}_a)\mathbf{U} = \mathbf{I}. \quad (4.66)$$

Dazu wird im einfachsten Fall das Netz so erstellt, dass für jede Einkoppelstelle der Elektrode auch ein entsprechender Knoten im Netzwerk vorhanden ist. Diese Knoten werden mit den Eingangsimpedanzen der einzelnen Strom- und Spannungskanäle belastet. Aufgrund der Systemhardware sind diese Strompfade ausschließlich mit der Systemmasse verbunden. Demzufolge müssen nur einige Elemente der Hauptdiagonalen mit den jeweiligen Admittanz-Werten der Strom- oder Spannungskanäle besetzt werden. Die Elementnummer entspricht der Knotennummer. Alle anderen Werte der Matrix sind Null.

Bei der Modellierung wird für die Anregung ein widerstandssymmetrisches Modell angenommen (s. Kapitel 4.3.3), sodass sich bei symmetrischer Spannungsanregung die gleichen Knotenpotentiale einstellen wie bei einer symmetrischen Stromeinspeisung. Im anderen Fall muss für die Modellierung die Kopplungsimpedanz der anregenden Knoten bekannt sein, wodurch die Realisierung erschwert wird.

Zusätzlich zu den Eingangsimpedanzen der Elektrodenkabel können auch die parasitären Kapazitäten des Randes gegen eine Bezugserde modelliert werden. Hierfür fehlen jedoch zurzeit noch zuverlässige Abschätzungen der Kapazitätswerte. Diese Modellierungen werden daher erst in den Anschlussarbeiten erprobt.

Alternativ könnten anstelle der Impedanzen die Ableitströme als Neumann-Bedingung berücksichtigt werden. Da jedoch bei den offenen Stromkanälen die zugehörigen Elektroden-spannungen nicht gemessen werden, bleiben folglich diese resultierenden Ströme unberücksichtigt.

Auch wenn keine zusätzlichen Eingangsimpedanzen berücksichtigt werden, sollte zumindest ein Knoten als Referenz, über eine Impedanz mit Systemmasse verbunden oder alternativ eine Knotenspannung festgelegt werden, um die Singularität der Matrix \mathbf{Y} zu vermeiden.

4.5.3 Berechnung der Transferimpedanzen

Im letzten Schritt werden nun die Transferimpedanzen Z_T für die unterschiedlichen Stromeinspeisungen aus den jeweiligen berechneten Knotenpotentialen mit

$$Z_{(a,b,c,d)} = \frac{U_c - U_d}{I_{a,b}} \quad (4.67)$$

bestimmt. Die Indizes a, b kennzeichnen die beiden Anregungselektroden und c, d die Potentialelektroden. Um den Rechenaufwand zu reduzieren wird eine Elektrode der Stromanregung als Referenz verwendet. Alle weiteren verwendeten Stromelektroden bilden in Kombination mit der Referenz jeweils ein Paar für die Stromeinspeisung. Für diese Paare werden die Elektrodenpotentiale berechnet. So werden zum Beispiel für die Stromeinspeisung an 10 unterschiedlichen Elektroden 9 Vektoren für U mit den zugehörigen Potentialen berechnet. Nach der Berechnung werden für die tatsächlich verwendeten Paare der Stromanregung die resultierenden Elektrodenpotentiale mittels Superposition bestimmt und schließlich daraus die einzelnen Transferimpedanzen für die entsprechenden Paare der Strom- und Spannungselektroden berechnet.

4.5.4 Singularität der Punktelektroden

In der Poisson-Gleichung werden für die Anregung Punktelektroden mit einer Delta-Distribution $\delta(r)$ beschrieben. An diesen Stellen wird das Potential singular und kann mittels der einfachen Basisfunktion nur schlecht modelliert werden. Eine Methode zur Minimierung der Fehler ist die Aufteilung des Potentials in einen primären und sekundären Anteil (Pelton et al. 1978A). Das primäre Potential wird möglichst genau für eine homogene Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes berechnet und der sekundäre Anteil, der aufgrund der Anomalien entsteht, wird mittels der Finite-Elemente-Methode bestimmt. So wird z.B in Lowry et al (1989) für das primäre Potential die analytische Lösung des Halbraums berücksichtigt.

Für die in dieser Arbeit verwendeten Körper gibt es jedoch kaum analytische Lösungen, die das Potential für den homogen Fall beschreiben. Es wäre daher wünschenswert das Netz so zu verfeinern, dass die Modellierungsfehler vernachlässigbar klein werden. Dies ist jedoch in der Praxis wegen der resultierenden Rechenzeit und des erforderlichen Speicherbedarfs nur begrenzt möglich. Ein Ausweg ist in der Nähe der Elektroden das Netz zu verfeinern um die Fehler aufgrund der Singularitäten zu reduzieren. Eine weitere Methode verwendet nur für die Vorwärtsmodellierung ein feineres Netz. Beides wird in der Praxis angewendet.

4.6 Rekonstruktion

4.6.1 Gauß-Newton-Verfahren

Im Folgenden wird nun die Rekonstruktion des ortsabhängigen komplexen spezifischen Widerstandes auf Basis des Gauß-Newton-Verfahrens aufgezeigt. Es handelt sich hierbei um ein numerisches iteratives Verfahren zur Lösung nichtlinearer Minimierungsprobleme, bei dem ρ so bestimmt wird, dass die Abweichung zwischen den modellierten Transferimpedanzen $f(\rho)$ und den gemessenen Transferimpedanzen Z_T minimal wird. Die Abweichung wird dabei durch die Fehlerfunktion

$$g(\rho) = W(f(\rho) - Z_T) \quad (4.68)$$

mit $g(\rho)$ dem Residuenvektor beschrieben. Um Genauigkeitsunterschiede der einzelnen gemessenen Transferimpedanzen zu berücksichtigen wird zusätzlich eine Datenwichtungsmatrix W verwendet.

Zur Lösung des Problems wird zunächst die Funktion $f(\rho)$ durch eine Taylorreihe ersten Grades mit

$$f(\rho) = \frac{\partial f(\rho_0)}{\partial \rho_0} (\rho - \rho_0) + f(\rho_0) = J(\rho - \rho_0) + f(\rho_0) \quad (4.69)$$

linearisiert, wobei ρ_0 die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes an einem Ausgangspunkt und

$$J = \frac{\partial f(\rho_n)}{\partial \rho_n} \quad (4.70)$$

die Jacobi-Matrix darstellt. Mittels der Linearisierung hat das Residuum nun die Form

$$g(\rho) = WJ(\rho - \rho_0) - W(Z_T - f(\rho_0)). \quad (4.71)$$

Da bei der Impedanztomographie die Dateninversion meist ein unterbestimmtes Problem darstellt, wird zur Stabilisierung der Rekonstruktion (Regularisierung) zusätzlich ein zweiter Term $I(\rho)$ minimiert. Typischerweise beschreibt $I(\rho)$ die Rauheit der Verteilung, siehe z.B. deGroot-Hedlin und Constable (1990), die als lineare Funktion

$$I(\rho) = \lambda L\rho \quad (4.72)$$

mit L der Regularisierungsmatrix und einem Regularisierungsfaktor λ dargestellt werden kann. Entsprechend dem Gaußschen Ausgleichsprinzip soll nun der quadratische Fehler minimiert werden. Das vollständige Minimierungsproblem hat schließlich die Form

$$\min\{\|\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho})\|_2 + \|\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho})\|_2\}. \quad (4.73)$$

Zur Lösung des Problems wird Gleichung (4.73) als Vektordarstellung umgestellt,

$$\min\{\|\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho})\|_2 + \|\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho})\|_2\} = \min\left\{\left\|\begin{pmatrix} \mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}) \\ \mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}) \end{pmatrix}\right\|_2\right\} = \min\{\|\mathbf{r}(\boldsymbol{\rho})\|_2\}. \quad (4.74)$$

Die Fehlerfunktion des kombinierten Terms hat nun die Form

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}\mathbf{s} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{J} \\ \lambda\mathbf{L} \end{pmatrix}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) - \begin{pmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_0)) \\ -\lambda\mathbf{L}\boldsymbol{\rho}_0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

mit dem Residuenvektor \mathbf{r} , der Matrix

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{J} \\ \lambda\mathbf{L} \end{pmatrix}, \quad (4.76)$$

dem Differenzvektor

$$\mathbf{s} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0 \quad (4.77)$$

und dem Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_0)) \\ -\lambda\mathbf{L}\boldsymbol{\rho}_0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Entsprechend des Gaußschen Ausgleichsprinzips bzw. der Gauß-Newton-Methode (siehe z.B. Schwarz und Köckler 2006) kann nun mittels der Normalgleichung

$$\mathbf{D}^H \mathbf{D}\mathbf{s} = \mathbf{D}^H \mathbf{b} \quad (4.79)$$

die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes

$$\boldsymbol{\rho}_{n+1} = \boldsymbol{\rho}_n + c\mathbf{s} \quad (4.80)$$

iterativ bestimmt werden. Das Symbol H kennzeichnet die konjugierte und transponierte Matrix. Die Konstante c ist ein variabler Faktor zwischen 0 und 1, der zur Einstellung der Schrittweite verwendet wird. Das Einfügen von Gleichung (4.76) und (4.78) in Gleichung (4.79) liefert

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{J} \\ \lambda\mathbf{L} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{J} \\ \lambda\mathbf{L} \end{pmatrix} \mathbf{s} = - \begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{J} \\ \lambda\mathbf{L} \end{pmatrix}^H \begin{pmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_n) - \mathbf{Z}_T) \\ \lambda\mathbf{L}\boldsymbol{\rho}_n \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Nach Umstellen folgt schließlich das Gleichungssystem

$$\left(\mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L}\right) \mathbf{s} = \mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \left(\mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_n)\right) - \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_n. \quad (4.82)$$

Diese Gleichung wird z.B. in Kemna et al. (2000), Kemna et al. (2004) oder Daily et al. (2005) zur Dateninversion mit logarithmischen Parametern und Daten angewendet. Entsprechend dem Ansatz in Gleichung (4.74) können weitere Regularisierungsfunktionen hinzugefügt werden, die wiederum mit einem eigenen Regularisierungsfaktor berücksichtigt werden. Zum Beispiel könnte zusätzlich der Term

$$e = \mu \mathbf{E}(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) \quad (4.83)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} als Regularisierungsmatrix, dem Regularisierungsfaktor μ und der zusätzlichen Referenzverteilung $\boldsymbol{\rho}_r$ minimiert werden. Dies liefert

$$\mathbf{r} = \mathbf{D}\mathbf{s} - \mathbf{b} = \left(\begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \mathbf{W}\mathbf{J} \\ \lambda\mathbf{L} \\ \mu\mathbf{E} \end{array} \right) (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_0) - \left(\begin{array}{c} \mathbf{W}(\mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_0)) \\ -\lambda\mathbf{L}\boldsymbol{\rho}_0 \\ 0 \end{array} \right) \end{array} \right) \quad (4.84)$$

und führt zu

$$\left(\mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L} + \mu^2 \mathbf{E}^H \mathbf{E}\right) \mathbf{s} = \mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \left(\mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_n)\right) - \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_n. \quad (4.85)$$

Diese zusätzliche Regularisierung mit der Einheitsmatrix wird zum Beispiel in LaBrecque et al. (1996) verwendet, was nach eigenen Erfahrungen ebenfalls zu guten Rekonstruktionsergebnissen führt.

Das Einsetzen von $\mathbf{s} = \boldsymbol{\rho}_{n+1} - \boldsymbol{\rho}_n$ in Gleichung (4.82) oder (4.85) liefert eine andere Darstellung der Iterationsgleichung. Für Gleichung (4.82) mit nur einem Regularisierungsterm folgt

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L}\right) \boldsymbol{\rho}_{n+1} &= \left(\mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \mathbf{J} + \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L}\right) \boldsymbol{\rho}_n + \mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \left(\mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_n)\right) - \lambda^2 \mathbf{L}^H \mathbf{L} \boldsymbol{\rho}_n \\ &= \mathbf{J}^H \mathbf{W}^H \mathbf{W} \left(\mathbf{J} \boldsymbol{\rho}_n + \mathbf{Z}_T - \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}_n)\right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

Die Iteration beginnt meist mit einer homogenen Verteilung $\boldsymbol{\rho}_0$. Für jede weitere Iteration wird der Lösungsvektor \mathbf{s} einschließlich der Jacobian-Matrix \mathbf{J} des Vorwärtsoperators $\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho})$ berechnet. Um die Rechengeschwindigkeit zu erhöhen kann auch mehrfach ohne Neuberechnung von \mathbf{J} iteriert werden. Dies kann jedoch dazu führen, dass die Iteration nicht konvergiert und sollte deshalb erst angewendet werden, wenn sich die Verteilung $\boldsymbol{\rho}$ nur noch wenig ändert.

Um den optimalen Regularisierungsfaktor λ^2 zu bestimmen, gibt es verschiedene Verfahren. Ein häufig verwendetes Verfahren ist das von Levenberg-Marquardt (Marquardt 1963), das zum Beispiel in modifizierter Form für die Impedanztomographie in Breckon und Pidcock (1988) beschrieben wird. Abhängig von der Fehlanpassung

$$\varepsilon_1 = \|\mathbf{W}(\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) - \mathbf{Z}_T)\|_2 \quad (4.87)$$

wird nach jedem Iterationsschritt der Regularisierungsfaktor vergrößert oder verkleinert. Als Startwert wird z.B. in Oristaglio und Worthington (1980) die Frobenius-Norm

$$\lambda = \sqrt{\sum_n \sum_e (\mathbf{J}_{n,e})(\mathbf{J}_{n,e})^*} \quad (4.88)$$

der Jacobi-Matrix berechnet. Ein weiteres Verfahren verwendet die L-Kurve um den optimalen Regularisierungsfaktor zu finden, siehe z.B. Hansen et al. (2007). Hierbei wird zusätzlich die Fehlanpassung des Regularisierungsterms

$$\varepsilon_2 = \{\|\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho})\|_2\}. \quad (4.89)$$

ausgewertet um einen guten Kompromiss zwischen beiden Werten ε_1 und ε_2 zu finden. Andere Methoden schätzen den Regularisierungsfaktor anhand der Mess- und Modellierungsfehler ab, siehe zum Beispiel Occam-Inversion in deGroot Hedlin und Constable (1990) oder LaBrecque et al. (1996). Unabhängig vom Regularisierungsfaktor ist die Abschätzung der einzelnen Datenfehler auch für die Berechnung einer geeigneten Datenwichtungsmatrix hilfreich. Die Abschätzung der Fehler ist jedoch relativ schwierig. Die gemessene Standardabweichung der Messdaten unterschätzt nach LaBrecque et al. (1996) und auch nach eigenen Erfahrungen deutlich den Fehler. In Binley et al. (1995) sowie LaBrecque et al. (1996) werden daher zusätzlich reziproke Messungen zur Abschätzungen des Fehlers vorgeschlagen.

Im Rahmen der Arbeit wird der Regularisierungsfaktor meist manuell anhand der rekonstruierten Bilder unter Einbezug der Fehler ε_1 und ε_2 bzw. der L-Kurve ausgewählt.

4.6.2 Regularisierungsmatrix

Wie im obigen Abschnitt schon beschrieben ist zur Stabilisierung der Rekonstruktion eine zusätzliche Regularisierung erforderlich. Diese soll die Bildgebung unterstützen und die Bilder möglichst wenig verfälschen. Es werden daher häufig Regularisierungen verwendet, die einen glatten Verlauf des spezifischen Widerstandes fordern, wie zum Beispiel die Regularisierung in deGroot-Hedlin und Constable (1990). Hierbei wird angenommen, dass die natürliche Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes von Böden eher glatt ist. Sehr häufig werden Regularisierungen verwendet, die jegliche Variation der Verteilung und damit auch Gradienten erster Ordnung unterdrücken. Für die in dieser Arbeit verwendeten Rekonstruktionen sollen jedoch auch Verteilungen mit konstantem Anstieg uneingeschränkt zugelassen werden. Die Regularisierung soll nur auf alle räumlichen Gradienten zweiter oder höherer Ordnung wirken. Ein Gradient zweiter Ordnung wird zum Beispiel in Hua et al. (1988) für eine

flache Verteilungen empfohlen und dort auf ein 2D-Netz mit quadratischen Elementen angewendet. In Sasaki (1994) wird ein einfacher 3D-Operator für kubische Elemente beschrieben. Im Vergleich zu quadratischen oder kubischen Elementen ist die Berechnung der Regularisierungsmatrix \mathbf{L} für dreieck- oder tetraederförmige Elemente etwas aufwendiger.

Im Folgendem wird zur Berechnung der Regularisierungsmatrix, die nur Gradienten zweiter und höherer Ordnung unterdrücken soll, als Basis der diskrete Laplace-Operator verwendet, der ein Hochpassfilter darstellt und bei der Rekonstruktion wie ein Tiefpassfilter wirkt. Dies bedeutet, dass der Minimierungsterm $e = \|\mathbf{L}\boldsymbol{\rho}\|_2$, der die Rauheit beschreibt, für homogene Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes oder für Verteilungen mit konstanten Gradienten Null ist. Um die Elemente der Matrix zu bestimmen wird die Definition

$$\Delta\rho_e = \sum_{k:NB(e)} c_{e,k} (\rho_k - \rho_e) \quad (4.90)$$

des Laplace-Operators verwendet, wobei der Index k die Nachbarn des Elementes e kennzeichnet. Der Laplace-Operator $\Delta\rho_e$ ist für Gradienten erster Ordnung Null. Dies spezifiziert die Koeffizienten $c_{e,k}$. Die Differenzen $\rho_k - \rho_e$ können mit der Taylor-Reihe erster Ordnung,

$$\rho_k = \rho_e + (x_k - x_e) \frac{\partial\rho_e}{\partial x_e} + (y_k - y_e) \frac{\partial\rho_e}{\partial y_e} + (z_k - z_e) \frac{\partial\rho_e}{\partial z_e}, \quad (4.91)$$

berechnet werden. Dieser Ansatz liefert ein lineares Gleichungssystem, dass zur Berechnung der Koeffizienten $c_{e,k}$ verwendet wird. Die Beziehung zwischen den Koeffizienten $c_{e,k}$ und den Elementen von \mathbf{L}_e ,

$$\sum_{k:NB(e)} c_{e,k} (\rho_k - \rho_e) = \sum_n L_{e,n} \rho_n, \quad (4.92)$$

liefert schließlich die Elemente der Regularisierungs-Matrix \mathbf{L} .

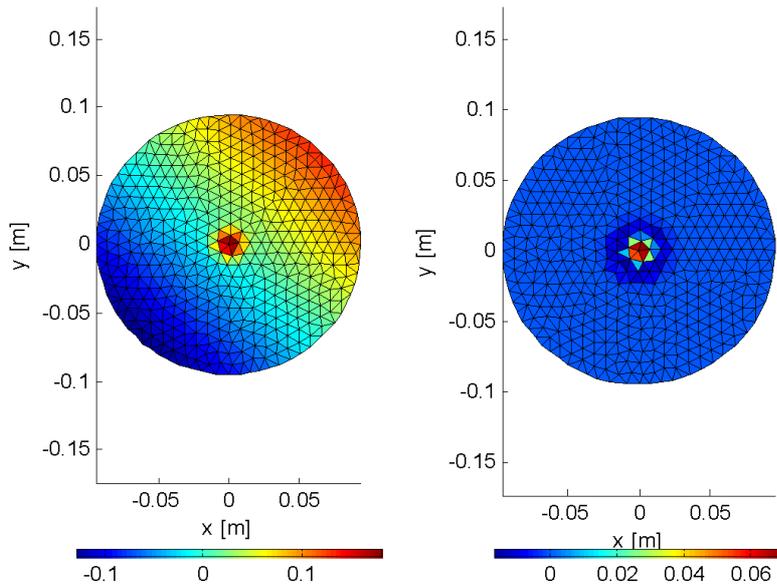


Abbildung 37: Links: 2D-Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes mit konstanter Steigung und Anomalie in der Mitte des Gebietes. Rechts: Gefilterte Verteilung.

Zum Test der Funktion wurde die Regularisierungsmatrix auf eine zweidimensionale und eine dreidimensionale Verteilung ρ mit konstanter Steigung angewendet, siehe Abbildungen 37 und 38. Jeder Testverteilung (in den Abbildungen links) wurde zusätzlich eine Anomalie in der Form einer Exponentialverteilung hinzugefügt.

Diese Tests zeigen, dass in der gefilterten Verteilung $L\rho$ (in den Abbildungen rechts) der konstante Anstieg über den gesamten Bereich eliminiert wird. Es bleibt nur die Anomalie übrig. Da auch der konstante Anteil der Verteilungen verschwindet und damit der Mittelwert der Verteilung Null wird, beinhaltet die gefilterte Anomalie nun auch negative Werte. Die negativen Werte sind in der Abbildung als Kreis um den Mittelpunkt gut erkennbar.

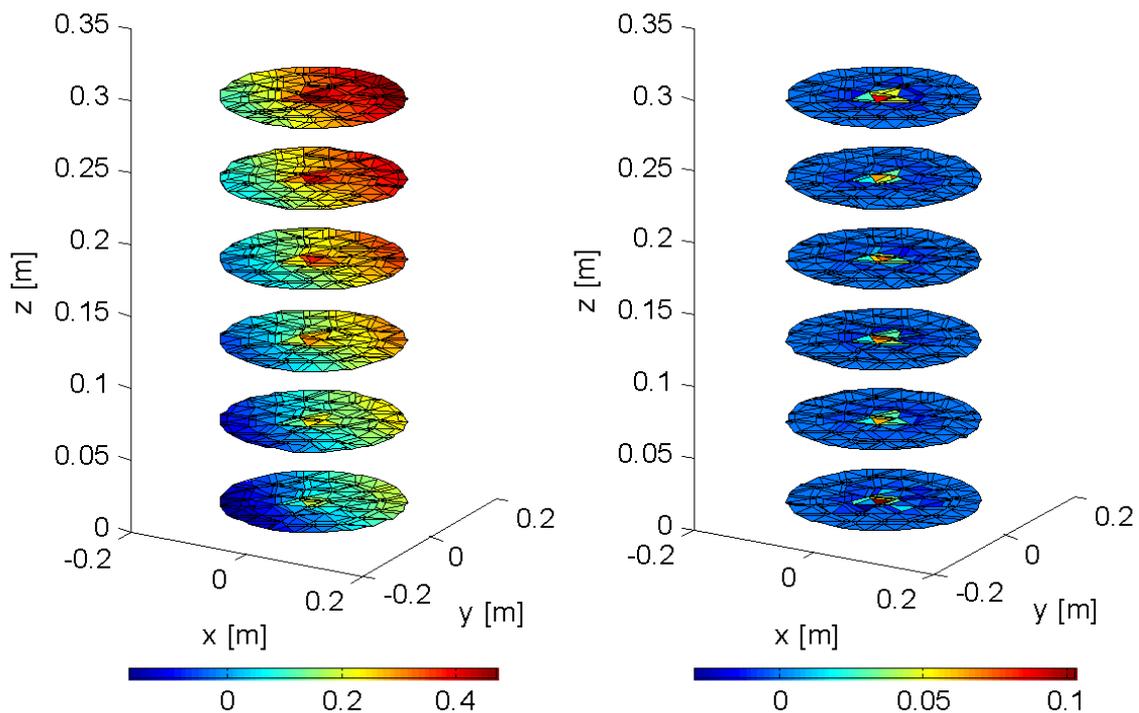


Abbildung 38: Links: 3D-Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes mit konstanter Steigung und Anomalie in der Mitte des Gebietes. Rechts: Gefilterte Verteilung.

Die stabilisierende Wirkung der Laplace-Filter bei der Bildrekonstruktion ist im Vergleich zu Filtern erster Ordnung etwas geringer, da ein weiterer Freiheitsgrad, der Gradient erster Ordnung, uneingeschränkt zugelassen wird. Zur zusätzlichen Stabilisierung wird daher bei Bedarf die zweite Regularisierung in Gleichung (4.83) angewendet.

4.6.3 Jacobi-Matrix

Die Jacobi-Matrix oder Sensitivitätsmatrix wird nicht nur zur Rekonstruktion des komplexen spezifischen Widerstandes, sondern auch zur Bestimmung geeigneter Messkonfigurationen benötigt. Sie sagt aus in welchem Maße die Transferimpedanzen auf Änderungen des komplexen spezifischen Widerstandes reagieren. Eine Konfiguration, bei der die zu erwartenden Transferimpedanzen unabhängig von der Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes im Untersuchungsgebiet sind, würde einen Messdatensatz erzeugen, der nicht sinnvoll invertiert werden kann. Insofern wird diese Matrix auch für Sensitivitätsstudien verwendet. Da die Berechnung der Matrix je nach Größe sehr zeitaufwendig sein kann, wurden speziell für die Impedanztomographie effektive Methoden entwickelt. Im Folgenden werden nun einige, im Rahmen der Arbeit getestete, Methoden aufgezeigt.

Die Elemente der Matrix sind sämtliche erste partielle Ableitungen des Vorwärtsoperators

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}) = \begin{pmatrix} f_1(\rho_1 \cdots \rho_{N_e}) \\ \vdots \\ f_{N_n}(\rho_1 \cdots \rho_{N_e}) \end{pmatrix} \quad (4.93)$$

nach dem komplexen spezifischen Widerstand ρ_e der Elemente 1 bis N_e und hat die Form

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_{N_e}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{N_n}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_1} & \cdots & \frac{\partial f_{N_n}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_{N_e}} \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

Entsprechend der Anzahl N_n der unterschiedlichen Strom-Spannungspaare, für die jeweils der Vorwärtsoperator $f_n(\boldsymbol{\rho})$ gilt, und der Anzahl N_e der Elemente ρ_e müssen für die Jacobi-Matrix $N_e \cdot N_n$ Elemente (Differentialquotienten) bestimmt werden. Zur numerischen Berechnung wird häufig anstelle des Differentialquotienten der Differenzenquotient

$$J_{n,e} = \frac{\partial f_n(\rho_{e0})}{\partial \rho_e} \approx \frac{f_n(\rho_{e0} + h) - f_n(\rho_{e0})}{h} \quad (4.95)$$

verwendet. Es wird angenommen, dass der Vorwärtsoperator holomorph ist und daher die Werte unabhängig davon sind, in welcher Richtung h am Ort ρ_{e0} in der komplexen Ebene gegen Null strebt (Blume 1994). Zur numerischen Berechnung der Differentialquotienten kann daher für h z.B. ein kleiner positiver Wert eingesetzt. Die Berechnung der Jacobi-Matrix mittels des Differenzenquotienten ist sehr universell aber auch sehr rechenintensiv.

Eine effizientere Methode zur Berechnung der Jacobi-Matrix wird zum Beispiel in Rodi (1976) oder Oristaglio und Worthington (1980) beschrieben. Die Methode bezieht sich auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{YU} = \mathbf{I} \quad (4.96)$$

und berechnet die Elemente $J_{n,e}$ durch partielle Ableitung von \mathbf{U} nach dem komplexen spezifischen Widerstand unter Anwendung der Produktregel

$$\frac{\partial(\mathbf{YU} - \mathbf{I})}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{U} + \mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\rho}} - \frac{\partial \mathbf{I}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = 0. \quad (4.97)$$

Da die partielle Ableitung der Anregung \mathbf{I} nach dem komplexen spezifischen Widerstand verschwindet liefert dies

$$\mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \boldsymbol{\rho}} \mathbf{U}. \quad (4.98)$$

Substituiert man nun den komplexen spezifischen Widerstand durch die komplexe Leitfähigkeit,

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial(\rho^{-1})}{\partial \rho} = -\frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{1}{\rho^2}, \quad (4.99)$$

so folgt aus Gleichung (4.98)

$$\mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \sigma} \mathbf{U}. \quad (4.100)$$

Die Matrix \mathbf{Y} ist die Summe der jeweils mit σ_e multiplizierten Elementmatrizen. Somit verschwinden bei der Ableitung nach σ_e alle anderen Summanden, bis auf die (globale) Elementmatrix \mathbf{K}_{eg} mit dem zugehörigen Index. Um die einzelnen Elemente der Jacobi-Matrix für die jeweiligen Strom-Spannungspaare zu bestimmen, wird nun eine Stromeinspeisung am Elektrodenpaar A mit dem Stromwert I angenommen. Dies führt zu

$$\mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{U}_A}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e^2} \mathbf{K}_{eg} \mathbf{U}_A. \quad (4.101)$$

Im nächsten Schritt wird nun die Spannungsänderung am zugehörigen Elektrodenpaar B selektiert. Dazu wird Gleichung (4.101) formal mit der resultierenden Knotenspannung

$$\mathbf{U}_B^T = \mathbf{I}_B^T \mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{I}_B^T \mathbf{Y}^{-1} \quad (4.102)$$

für eine Stromeinspeisung an Paar B multipliziert, wobei die Knotenspannung mit

$$\mathbf{I}_B^T = (\mathbf{Y} \mathbf{U}_B)^T = \mathbf{U}_B^T \mathbf{Y}^T = \mathbf{U}_B^T \mathbf{Y} \quad (4.103)$$

berechnet wird. Dies liefert schließlich

$$\mathbf{U}_B^T \mathbf{Y} \frac{\partial \mathbf{U}_A}{\partial \rho_e} = \mathbf{I}_B^T \frac{\partial \mathbf{U}_A}{\partial \rho_e} = \frac{1}{\rho_e^2} \mathbf{U}_B^T \mathbf{K}_{eg} \mathbf{U}_A. \quad (4.104)$$

Die Matrix \mathbf{A}_B wirkt hierbei wie ein Filter, welches die entsprechenden Werte für das Elektrodenpaar B selektiert. Nach normieren auf den Stromwert I liefert dies schließlich die Elemente

$$\mathbf{J}_{n,e} = \frac{1}{I^2 \rho_e^2} \mathbf{U}_{A_n}^T \mathbf{K}_{eg} \mathbf{U}_{B_n}, \quad (4.105)$$

der Jacobi-Matrix für die n Strom-Spannungspaare, (siehe z.B. auch Kemna (1995)). Wegen der Reziprozität der Strom-Spannungsmessung können die Indizes A und B vertauscht werden.

Eine weitere sehr effiziente Methode zur Berechnung der Jacobi-Matrix basiert auf dem Sensitivitätstheorem von Geselowitz (1971). Mit Bezug auf die Finite-Elemente-Methode wird das Verfahren unter anderem in Murai und Kagawa (1985) beschrieben und dort in einer diskreten Version auf Basis des Kompensationstheorems abgeleitet. Zur Bestimmung von \underline{J} für eine Strom-Spannungsmessung wird die Sensitivitäts-Gleichung

$$\frac{\partial f_{AB}}{\partial \sigma_e} = - \int_{\Omega_e} \frac{\nabla \varphi_A}{I_A} \cdot \frac{\nabla \varphi_B}{I_B} d\Omega \quad (4.106)$$

verwendet, wobei das Potential φ_A im Messobjekt aus einer Stromeinspeisung I_A am Elektrodenpaar A und das Potential φ_B aus einer Stromeinspeisung I_B am Elektrodenpaar B resultiert (s. z.B. auch die Herleitung in Friedel 2000). Wird nun, wie z.B. in Li (2000) beschrieben, wieder der komplexe spezifische Widerstand durch die komplexe Leitfähigkeit substituiert (siehe Gleichung (4.99)) und werden gleiche Werte

$$I_A = I_B = I \quad (4.107)$$

für die Stromeinspeisung verwendet, so folgt für die Elemente der Jacobi-Matrix

$$J_{AB,e} = \frac{\partial f_{AB}}{\partial \rho_e} = \frac{1}{I^2 \rho_{e0}^2} \int_{\Omega_e} (\nabla \varphi_A \cdot \nabla \varphi_B) d\Omega. \quad (4.108)$$

Die Potentiale in Gleichung (4.108) beziehen sich nur auf das jeweilige Element und werden daher im folgenden Schritt durch die Knotenpotentiale \mathbf{U}_{eA} und \mathbf{U}_{eB} für die beiden Einspeisungen A, B und dem Operator $\nabla \mathbf{H}$ (siehe Gleichung (4.46)) dargestellt. Daraus folgt

$$J_{AB,e} = \frac{1}{I^2 \rho_{e0}^2} \int_{\Omega_e} (\nabla \mathbf{H} \mathbf{U}_{eA})^T (\nabla \mathbf{H} \mathbf{U}_{eB}) d\Omega = \frac{1}{I^2 \rho_{e0}^2} \int_{\Omega_e} d\Omega (\nabla \mathbf{H} \mathbf{U}_{eA})^T (\nabla \mathbf{H} \mathbf{U}_{eB}), \quad (4.109)$$

wobei das Skalarprodukt wieder als Matrixprodukt geschrieben wurde. Dies liefert schließlich die Gleichung

$$J_{n,e} = \frac{1}{I^2 \rho_e^2} \mathbf{V}_e \mathbf{U}_{eA_n}^T \nabla \mathbf{H}^T \nabla \mathbf{H} \mathbf{U}_{eB_n} = \frac{1}{I^2 \rho_e^2} \mathbf{U}_{eA_n}^T \mathbf{K}_e \mathbf{U}_{eB_n}. \quad (4.110)$$

Diese Gleichung ist bis auf die Indizierung der Knotenspannungen und der Elementmatrix, die hier nicht global sondern elementbezogen angegeben sind, äquivalent zu Gleichung (4.105).

Ein weiterer Ansatz zur Berechnung der Jacobi-Matrix findet man in Yorkey et al. (1987). Dort wird \mathbf{J} mittels der Gleichung

$$J_{AB,e} = \frac{1}{I^2 \rho_e^2} \sum_l k_{ze,l} \mathbf{U}_{ze,A,l} \mathbf{U}_{ze,B,l} = \frac{1}{I^2 \rho_e^2} \mathbf{U}_{ze,A}^T \text{diag}(\mathbf{k}_{ze}) \mathbf{U}_{ze,B} \quad (4.111)$$

auf Basis der Element-Zweigspannungen berechnet, wobei $U_{ze,A}$ die Zweigspannungen für die Einspeisung an A, $U_{ze,B}$ die Zweigspannungen für die Einspeisung an B sind und k_{ze} der Elementvektor der Zweige ist, siehe auch Abbildung 36 und Gleichung (4.55). Ergänzend zur Summendarstellung in der Mitte der Gleichung zeigt die rechte Seite die entsprechende Matrixdarstellung.

Die Berechnungsmethode nach Gleichung (4.110) und Gleichung (4.111) haben den gleichen Kern und lassen sich ineinander überführen. Wird z.B. Gleichung (4.60) in (4.110) eingesetzt so folgt wieder

$$\begin{aligned}
 J_{AB,e} &= \frac{1}{I^2 \rho^2} \mathbf{U}_{eA}^T \mathbf{K} \mathbf{U}_{eB} \\
 &= \frac{1}{I^2 \rho^2} \mathbf{U}_{eA}^T \mathbf{A}_e^T \text{diag}(\mathbf{k}_{ze}) \mathbf{A}_e \mathbf{U}_{eB} \\
 &= \frac{1}{I^2 \rho^2} (\mathbf{A}_e \mathbf{U}_{eA})^T \text{diag}(\mathbf{k}_{ze}) (\mathbf{A}_e \mathbf{U}_{eB}) \\
 &= \frac{1}{I^2 \rho^2} \mathbf{U}_{ze,A}^T \text{diag}(\mathbf{k}_{ze}) \mathbf{U}_{ze,B}
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

Letztendlich unterscheiden sich die unterschiedlichen Berechnungsmethoden und die damit verbundene Rechenzeit nur durch die jeweilige Implementierung. Zum Test wurden die Berechnungen nach Gleichung (4.95), (4.105) und (4.110) realisiert. Dabei war die effektivste Methode die Berechnung nach Gleichung (4.110).

4.7 Messkonfiguration und Messzeit

Die Wahl einer optimalen Messkonfiguration hat nicht nur einen Einfluss auf die Genauigkeit der rekonstruierten Bilder, sondern auch auf die erforderliche Messzeit für einen Datensatz, die besonders bei niedrigen Anregungsfrequenzen sehr groß werden kann. Die Anordnung und Anzahl der Elektroden und die Auswahl geeigneter Paare für die Stromeinspeisung und Spannungsmessung sind hier die wesentlichen Einflussfaktoren.

Die Anordnung der Elektroden kann für zylinderförmige Objekte relativ einfach festgelegt werden. Sofern nicht an ausgewählten Stellen Anomalien zu erwarten sind, die mit einer höheren geometrischen Auflösung gemessen werden sollen, ist eine Gleichverteilung der Elektroden auf der Oberfläche des Probenkörpers (Untersuchungsgebiet) sinnvoll, wobei bei flüssigkeitsgefüllten zylinderförmigen Objekten meist aus konstruktiven Gründen oben und unten keine Elektroden angeordnet werden können, sondern nur auf dem Zylindermantel. Manchmal werden auch innerhalb des Untersuchungsgebietes Elektroden angebracht um die

Auflösung im Zentrum zu verbessern. Dies ist jedoch nur möglich, wenn der zu beobachtende Prozess dadurch nicht gestört wird.

Die Festlegung einer geeigneten Elektrodenanzahl ist deutlich schwieriger. Die geometrische Auflösung wird mit zunehmender Elektrodenanzahl zunehmen. Gleichzeitig wird jedoch die erzielbare Phasengenauigkeit wegen der störenden Elektrodenpolarisationen und der parasitären Ströme, die über die Elektroden abfließen, mit der Anzahl abnehmen.

Ein Hinweis auf die zu erwartende geometrische Auflösung unter Vernachlässigung von Mess-, Modellierungs- und Phasenfehlern liefert die Anzahl der linear unabhängigen Messwerte eines Datensatzes. Die Anzahl der berechenbaren Modellparameter (die jeweiligen spezifischen Widerstände der Elemente des Netzes) und damit indirekt auch die Auflösung kann ohne Regularisierung nicht höher sein als die Anzahl der unabhängigen Messdaten. Insofern kann hiermit eine maximal erreichbare Auflösung abgeschätzt werden. Für eine Dipol-Dipol-Messung mit N Elektroden, die sowohl zur Strom- und Spannungsmessung verwendet werden, wird in Xu und Noel (1993)

$$S_N = N(N - 3) / 2 \quad (4.113)$$

für die Anzahl der unabhängigen Messdaten angegeben, wenn an den Stromelektroden nicht gleichzeitig die Spannung gemessen wird. Für eine Dipol-Dipol-Konfiguration mit getrennten Strom- und Spannungselektroden, bei der N_i Stromelektroden und N_u Spannungselektroden verwendet werden, ist die Anzahl der unabhängigen Messdaten

$$S_N = (N_i - 1)(N_u - 1). \quad (4.114)$$

Hierbei sind genau $(N_i - 1)$ Einspeisungen mit jeweils $(N_u - 1)$ Spannungsmessungen notwendig. Im Vergleich zur obigen Messung ohne Elektrodentrennung ist für eine große Elektrodenanzahl und gleich vielen Spannungs- und Stromelektroden die Anzahl der unabhängigen Gleichungen mit $N^2/4$ halb so groß.

Bei einer Pol-Pol- oder Pol-Dipol-Konfiguration werden Referenzelektroden verwendet, über die eine Einspeisung erfolgt oder gegen die die Spannung gemessen wird. Werden die Referenzelektroden mitgezählt, so gelangt man wieder zur obigen Anzahl der unabhängigen Messdaten.

Für die jeweiligen Strompaare eines Datensatzes wird im Rahmen dieser Arbeit eine zirkulierende Dipol-Dipol-Konfiguration verwendet, siehe zum Beispiel Xu und Noel (1993). Zur Messung eines primären Datensatzes (nur unabhängige Daten), bei getrennten Strom- und

Spannungselektroden, sind z.B. die Einspeisungen (1, 2), (2, 3), (3, 4) bis $(N_i - 1, N_i)$ notwendig. Aus Gründen der Symmetrie wird die Konfiguration um die Einspeisung $(N_i, 1)$ erweitert, sodass jede Elektrode gleich oft verwendet wird damit eventuelle Messfehler, z.B. Rauschen durch schlechte Ankopplungen, einzelner Elektroden nicht überproportional wirken. Dies bedeutet für jede Stromelektrode genau 2 Einspeisungen, also N_i Einspeisungen. Die Elektrodennummer soll hier keineswegs die Position kennzeichnen. Bei den späteren Messungen werden für die Stromeinspeisung bevorzugt Paare mit gegenüberliegenden Elektroden verwendet, da diese Einspeisung eine bessere Auslösung im Innern des Untersuchungsgebietes liefern soll, siehe z.B. Slater et al. (2000). Für eine kreisförmige Anordnung von 16 Elektroden mit fortlaufender Nummerierung (siehe Abbildung 30), bei der jede zweite Elektrode eine Spannungselektrode ist, wären dies zum Beispiel die Einspeisungen (1, 7), (7, 13), (13, 3), (3, 9), (9, 15), (15, 5), (5, 11), (11, 1). Wird weiterhin noch die Stromumschaltung berücksichtigt so sind zusätzlich N_i Strompaare mit getauschten Elektrodennummern erforderlich. Für einen Datensatz werden folglich insgesamt $2N_i$ Einspeisungen durchgeführt.

Äquivalent zur den Strompaaren werden auch die Spannungspaare gemäß der zirkulierenden Dipol-Dipol-Konfiguration gebildet, wobei aus Gründen der Symmetrie auch hier aus jeder gemessenen Elektrodenspannung zwei Paare berechnet werden, also somit für N_u Elektroden auch N_u Paare. Die Bildung redundanter Paare, bzw. aller Paare, kostet hier keine zusätzliche Messzeit, da diese beim Messsystem erst nachträglich aus den einzelnen Spannungswerten berechnet werden. Für die obige kreisförmige Anordnung der Elektroden sind dies zum Beispiel die Paare (2, 4), (4, 6), (6, 8), (8, 10), (10, 12), (12, 14), (14, 16), (16, 2). Ob hier die Wahl der Paare, nebeneinander oder gegenüberliegend, einen Einfluss auf das Rekonstruktionsergebnis hat, ist noch ungeklärt. Das Signal-zu-Rauschverhältnis wird zwar bei zunehmendem Abstand aufgrund der gleichzeitig zunehmenden Spannung besser (siehe z. B. auch Slater et al. 2002), die absolute Größe des Rauschens bleibt jedoch bei diesem Messsystem gleich und letztendlich sind im gesamten Datensatz nach einer vollständigen Paarbildung die gleichen Rauschanteile bzw. Unsicherheiten unabhängig von der Wahl der Paare vorhanden.

Aufgrund der simultanen Messung der Elektrodenspannungen ist die gesamte Messzeit nur abhängig von der Anzahl der Stromeinspeisungen und der Messzeit T , die für ein Spektrum benötigt wird. Ausgehend von der oben vorgeschlagenen Konfiguration mit $2N_i$ Einspeisungen ist folglich die Messzeit für einen Datensatz $2N_i T$. Die Messzeit für ein Spektrum wird im Wesentlichen von den niedrigen Frequenzen bestimmt. Für eine Messung mit 0,1 Hz mit mindestens 3 Perioden wäre eine Messzeit von 30 Sekunden und für 1 mHz 3000 s erforderlich. Zusätzlich müssen hier noch systembedingte Verzögerungszeiten berücksichtigt werden. Für

Messungen im unteren Frequenzbereich sind daher aufgrund der langen Messzeiten für eine Frequenz nur noch wenige Einspeisung praktikabel. Um dennoch einen Datensatz mit hinreichend vielen unabhängigen Daten zu erhalten müssen entsprechend Gleichung (4.114) hinreichend viele Spannungspaare gemessen werden. Zum Vergleich ist S_N für 40 Strom- und 40 Spannungselektroden 1521 und für 20 Strom- und 60 Spannungselektroden 1121. Obwohl sich die Messzeit halbiert ist die Anzahl der unabhängigen Daten nur auf 74 % zurückgegangen. In der Regel wird daher bei getrennten Strom- und Spannungselektroden eine höhere Anzahl von Spannungselektroden verwendet.

Zur Beurteilung der gewählten Konfiguration werden auch häufig Sensitivitäts- oder Auflösungsuntersuchungen auf Basis der Finite-Element-Modelle durchgeführt. Hierzu möchte ich auf entsprechende Literatur, wie z.B. Sasaki (1994), Spitzer (1998), Kemna, A. (2000A) sowie Daily et al. (2005) hinweisen.

4.8 Testmessungen

4.8.1 Messung am Widerstand

Zunächst wird die Berechnung der wahren Anregungsströme und die Korrektur der Spannungsmessung mittels einer Messung an einem diskreten elektrischen Widerstand geprüft. Das elektrische Modell dieser Anordnung ist in Abbildung 39 dargestellt. An den Testwiderstand R_x werden zwei Stromelektroden (1, 4) und zwei Spannungselektroden (2, 3) angeschlossen. Für diese Messung wird eine symmetrische Anregung $U_{g1} = -U_{g2}$ verwendet. Die Ströme I_{s1} und I_{s2} fließen über die Shunt-Widerstände R_{s1} und R_{s2} zu den Elektroden 1 und 4. Ein Teil der Ströme fließt über die Kapazitäten C_{c1} und C_{c2} der Kabel ab. Die wahren Ströme I_{i1} und I_{i2} , die in die Probe fließen, werden gemäß Abschnitt 4.3.1 berechnet. Die Ströme, die über die Eingangsimpedanzen C_{v1} und C_{v2} der Spannungskanäle abfließen, werden nicht korrigiert. Die Widerstände der Übergangsimpedanzen Z_{e1} bis Z_{e4} sind bei dieser Messung Null. Die Spannung zwischen 2 und 3 am Eingang der Verstärker ist folglich identisch mit der Spannung zwischen 5 und 6 am Testwiderstand und muss daher nicht korrigiert werden. Die Laufzeitfehler bei Spannungsübertragung werden gemäß Abschnitt 4.3.2 korrigiert.

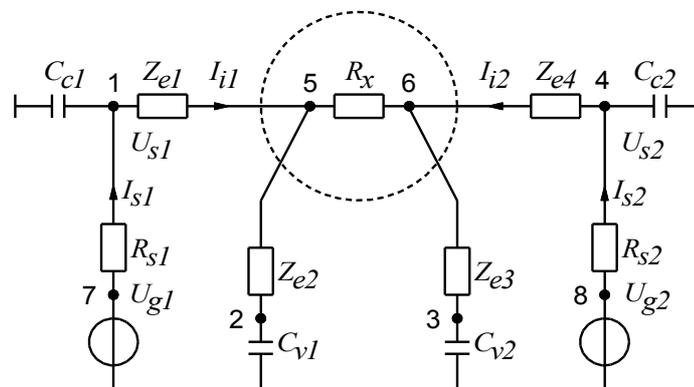


Abbildung 39: Vereinfachtes elektrisches Modell des EIT-Messsystems für eine Messung mit 2 Strom- und 2 Spannungselektroden an einem Netzwerk mit diskreten Bauelementen.

In Abbildung 40 sind die Spektren der Messung dargestellt. Ohne Korrektur ist der Phasenfehler bei 1 kHz ungefähr $-1,2$ mrad. Mit Strom-Korrektur ist die Phase bei 1 kHz ungefähr $-0,12$ mrad und nach zusätzlicher Spannungskorrektur nur noch $-0,02$ mrad. Die theoretische Phase für dieses Modell liefert einen vergleichbaren Phasenwert, wenn parallel zum Testwiderstand R_x eine Kapazität von 2 pF berücksichtigt wird. Für die Eingangskapazitäten der Verstärker C_{v1} und C_{v2} wurden 5 pF modelliert. Die zusätzliche Streukapazität von 2 pF ist durchaus realistisch. Aber auch ohne die Annahme einer Streukapazität zeigen die Messungen, dass die Strom- und Spannungskorrektur sehr gute Ergebnisse liefert.

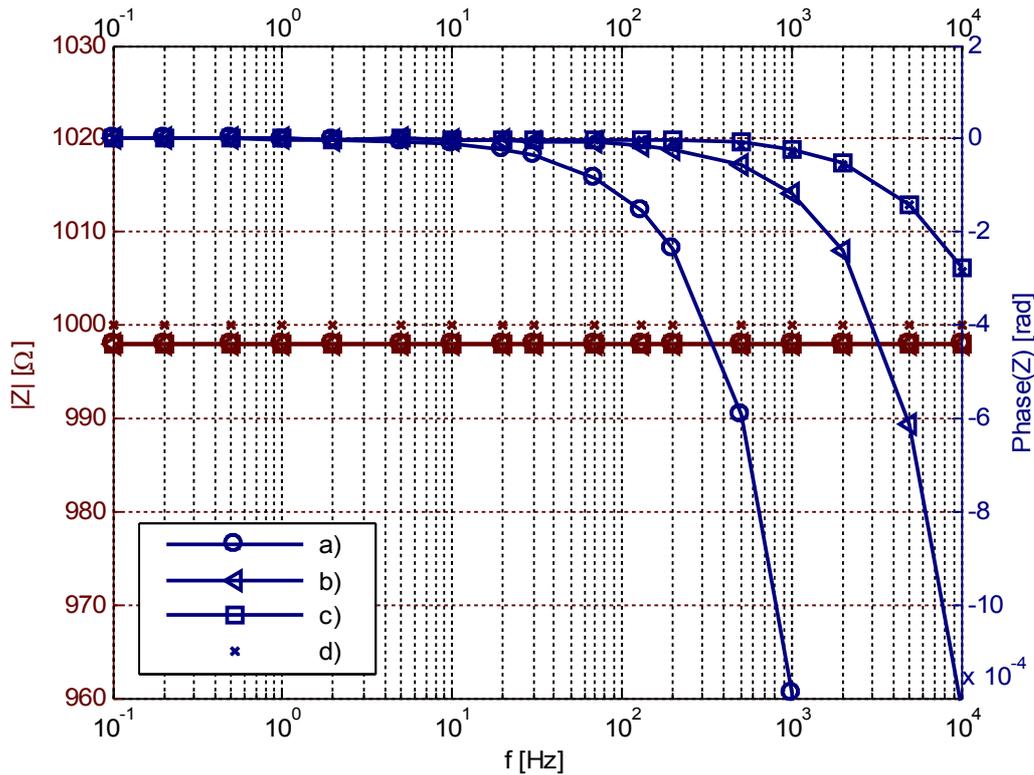


Abbildung 40: Gemessenes Impedanzspektrum eines 1-k Ω -Widerstandes, a) ohne Korrektur, b) mit Stromkorrektur; c) mit zusätzlicher Spannungskorrektur, d) theoretisch mit Strom- und Spannungskorrektur.

4.8.2 Messung am Netzwerk D01 und D02

Der folgende Test wird am Netzwerk D01 und D02, analog zu den Messungen mit dem Impedanzspektrometer in Abschnitt 3.12.1, durchgeführt. Anstelle des 1-k Ω -Widerstandes R_x in Abbildung 39 werden unter sonst gleichen Bedingungen die Impedanzspektren der Netzwerke gemessen. Die Ströme, die über die Eingangsimpedanzen C_{v1} und C_{v2} der Spannungskanäle abfließen, werden auch hierbei nicht korrigiert. Die Ergebnisse dieser Messungen sind in Abbildung 41 dargestellt. Da die Impedanz der Netzwerke im Vergleich zum 1-k Ω -Widerstand wesentlich höher ist, ist der relative Anteil der parasitären Ströme, die über die Kapazitäten C_{v1} und C_{v2} abfließen, wesentlich größer. Folglich sind auch die gemessenen Phasen im oberen Frequenzbereich im Vergleich zu den Messungen mit dem 1-k Ω -Widerstand deutlich größer. Ein Vergleich mit den theoretischen Phasenwerten zeigt wieder eine gute Übereinstimmung, wenn 5 pF für die Kapazitäten der Spannungskanäle und eine parasitäre Kapazität von 0,8 pF parallel zu Netzwerk D01 bzw. 1,8 pF parallel zu Netzwerk D02 modelliert wird. Die theoretischen Betragswerte stimmen auch gut mit den gemessenen überein. Insofern ist auch die Beziehung von Kramers und Kronig erfüllt.

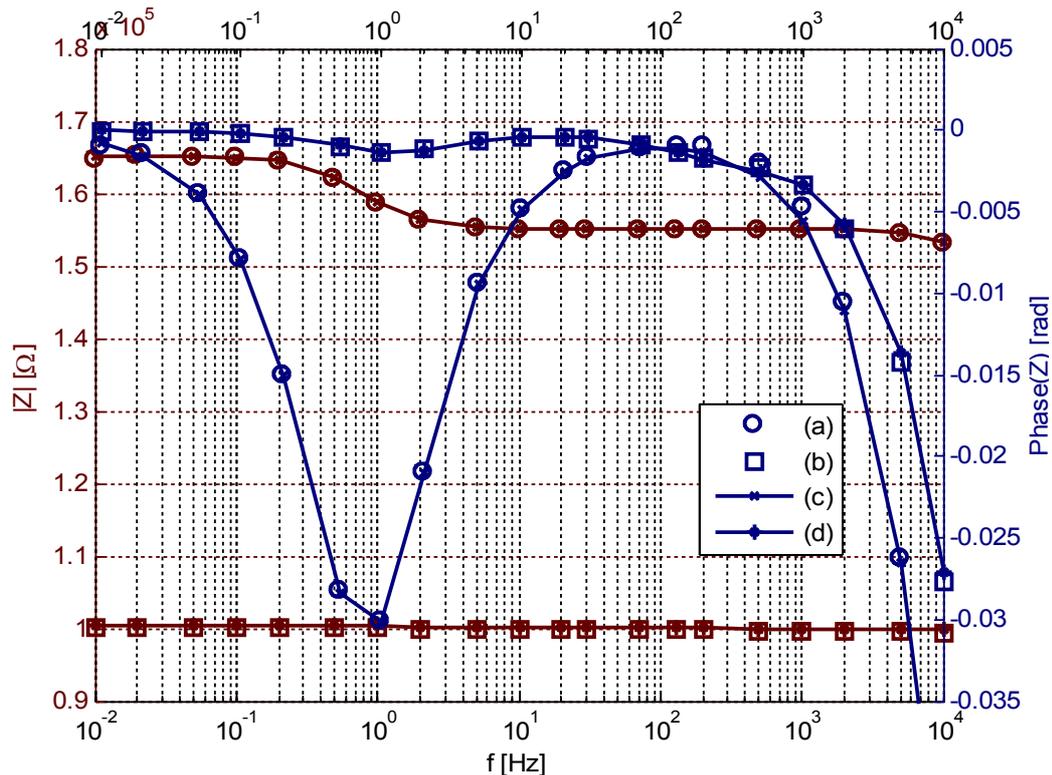


Abbildung 41: Gemessene und modellierte Betrags- und Phasenspektren der Netzwerke D01 und D02. a) und c): Messung am Netzwerk D01 und theoretischer Verlauf. b) und d): Messung am Netzwerk D02 und theoretischer Verlauf.

4.8.3 Phasenmessung an einer Wasserprobe

Zum Test der Stromumschaltung wird nun das Impedanzspektrum einer Wasserprobe gemessen. Hierfür wird ein einfacher zylindrischer Körper mit 8 Strom- und 8 Spannungselektroden verwendet, siehe Abbildung 42. Um Phasenfehler aufgrund von Elektrodenpolarisationen zu vermeiden, sind die Elektroden entsprechend den Vorschlägen in Abschnitt 3.4.3 in Kunststoffröhrchen (PG-Verschraubungen) platziert. Die Elektroden sind Messingstifte und haben einen Durchmesser von 6 mm. Sie sind im Hohlraum der PG-Verschraubung um 6 mm versenkt und daher in der Abbildung nicht sichtbar. Alle Elektroden sind auf einer Höhe von 20 mm angeordnet. Der Wasserstand ist 40 mm. Die in Abbildung 42 erkennbaren schwarzen Kunststoffstäbe (oben als Schraubenkopf erkennbar) wurden bei diesem Test nicht verwendet. Die Strom- und Spannungselektroden sind abwechselnd angeordnet. Sie beginnen in der Abbildung unten mit der Stromelektrode 1 und werden im Uhrzeigersinn fortlaufend bis 16 nummeriert.

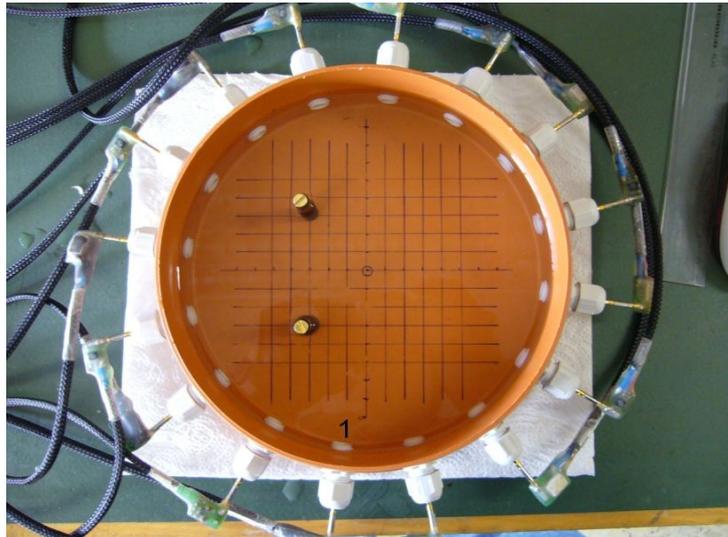


Abbildung 42: Zylinder ($d = 190$ mm) mit 8 Strom- und 8 Spannungselektroden. Die Elektroden sind in PG-Verschraubungen versenkt. Die Wasserhöhe ist 40 mm.

Um die Wirkung der parasitären Ströme und der Stromumschaltung zu demonstrieren wurde der Strom mit einer unsymmetrischen Spannungsquelle (eine Seite Null Volt) an den Elektroden normal (1, 7) und getauscht (7, 1) eingespeist. Zunächst wird überprüft ob das Wechseln der Spannungen auch das Tauschen der Ströme bewirkt. In Abbildung 43 sind dazu die Spektren der normierten Leckströme für die normale und getauschte Einspeisung dargestellt. Aufgrund der galvanisch isolierten Probe sollten die Ströme übereinstimmen, wie die Abbildung zeigt. Weiterhin erkennt man in der Abbildung, dass der Imaginärteil der Ströme im oberen Frequenzbereich aufgrund der parasitären Kapazitäten deutlich zunimmt.

Als nächstes sind nun die Transferimpedanzen Z_{T12} und Z_{T21} für die Einspeisung (1, 7) und (7, 1) und für die Spannungspaare (2, 4), (4, 6), (10, 8) in Abbildung 44 dargestellt. Bei hohen Frequenzen sind die Phasenwerte positiv oder negativ, je nachdem wie die parasitären Ströme wirken. Die maximalen Phasen sind für diese Konfiguration 3 bis 4 mrad. Auch im unteren Frequenzbereich ist ein deutlicher Phasenunterschied zwischen den einzelnen Spektren erkennbar. Diese Phase wird eventuell durch Gleichtaktfehler (siehe Abschnitt 3.3.5) bewirkt.

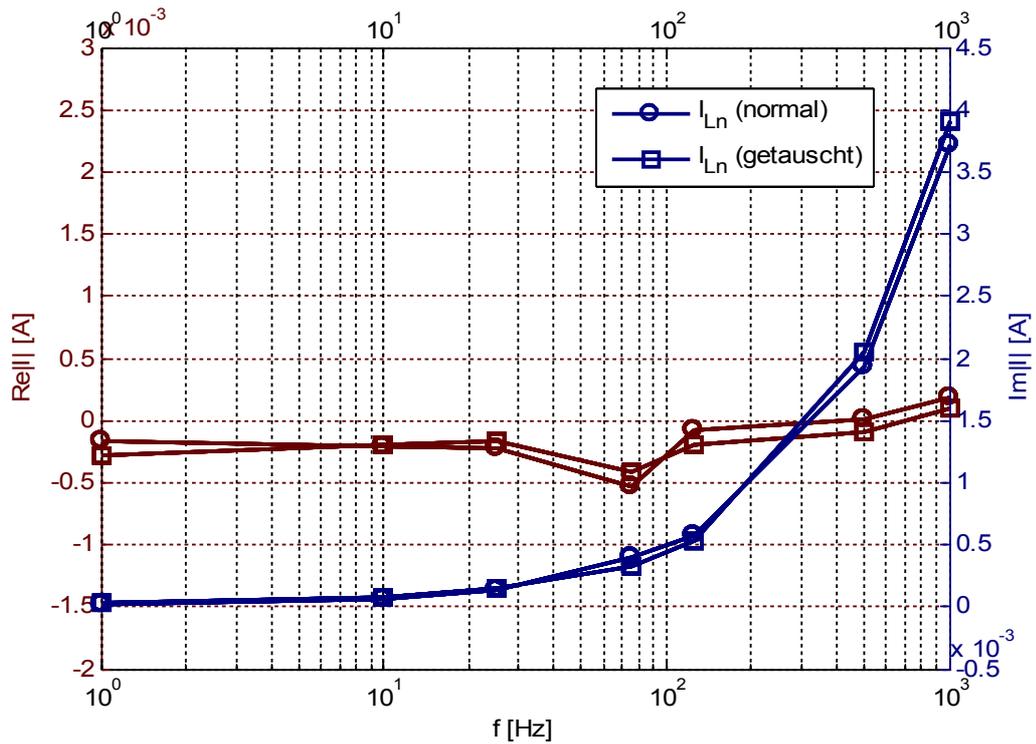


Abbildung 43: Spektren der normierten Leckströme I_{Ln} der normalen und getauschten Einspeisung.

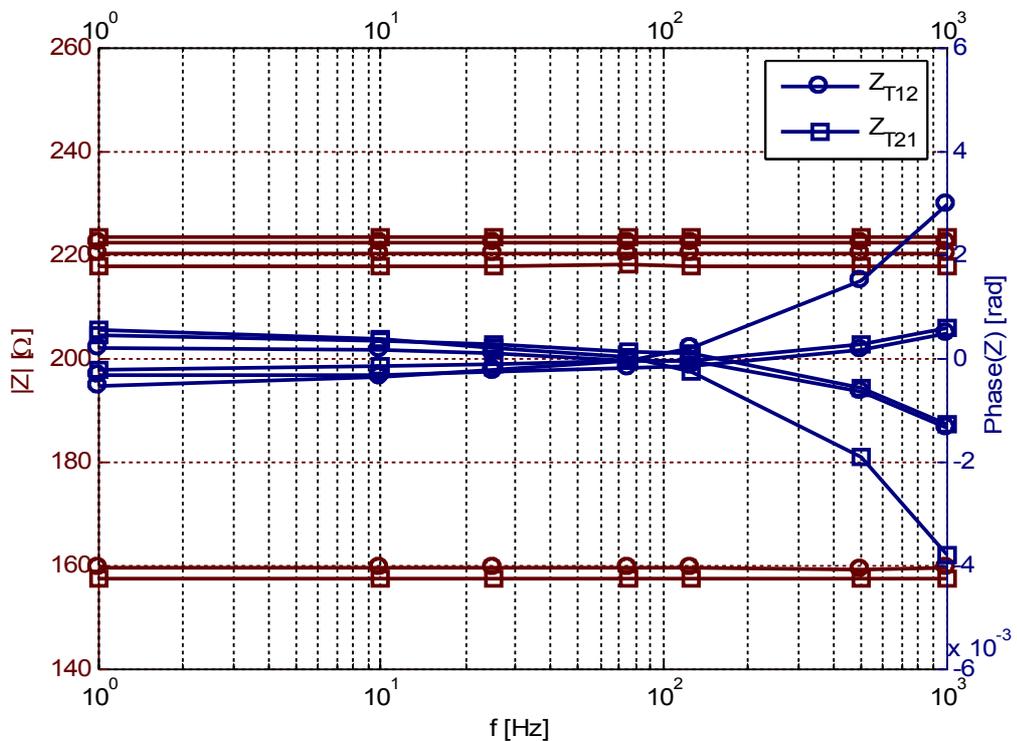


Abbildung 44: Beispielhaftes Spektrum der Transferimpedanzen Z_{T12} und Z_{T21} der normalen und getauschten Einspeisung (1, 7) und (7, 1) und für die Spannungspaare (2, 4), (4, 6) und (10, 8).

Die folgende Abbildung 45 zeigt die Wirkung der Stromumschaltung, die besonders bei unsymmetrischer Anregung sowohl die Phasenfehler im oberen als auch im unteren Frequenzbereich minimiert. Für dieses Beispiel ist die Phase der mittleren Transferimpedanz Z_T , berechnet nach Gleichung (4.20), bei 1 kHz nur noch 0,4 mrad und im unteren Frequenzbereich bei 1 Hz kleiner als 0,05 mrad. Zum Vergleich, die theoretische Phase des Wassers mit einem spezifischen Widerstand von $20 \Omega\text{m}$ ist ungefähr 0,1 mrad bei 1 kHz. Die symmetrierende Wirkung der Stromumschaltung minimiert einen großen Teil der parasitären Ströme. Trotzdem verbleibt ein restlicher Anteil, der teilweise noch durch eine verbesserte Modellierung, z.B. gemäß Abschnitt 4.5.2, berücksichtigt werden kann. Auch wurde der Phasenfehler aufgrund der Übergangsimpedanzen der Spannungselektroden bei dieser Messung noch nicht korrigiert.

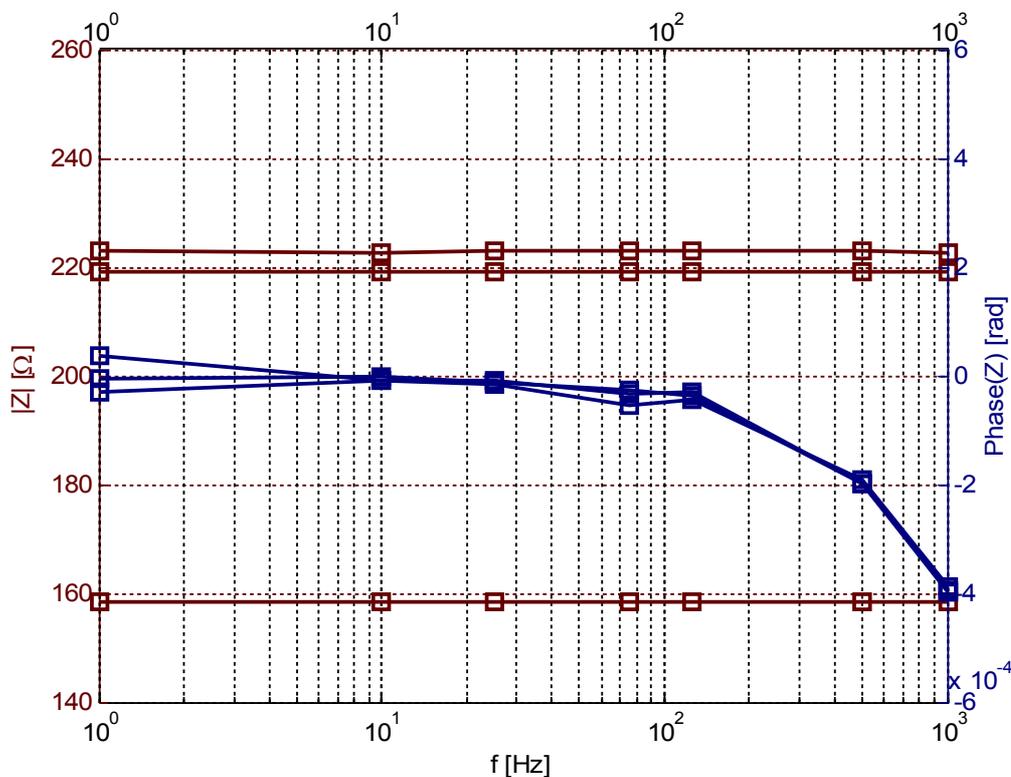


Abbildung 45: Beispielhaftes Spektrum der mittleren Transferimpedanzen Z_T der normalen und getauschten Einspeisung (1, 7) und (7, 1) für die Spannungspaare (2, 4), (4, 6) und (10, 8).

4.8.4 Überprüfung der 2D- und 3D-FEM-Berechnung

In diesem Abschnitt wird die Funktion der FEM-Berechnung überprüft. Entsprechend Gleichung (4.51) ist für die Genauigkeit der Modellierung im Wesentlichen die Elementmatrix K_e und weniger die komplexe Leitfähigkeit σ_e verantwortlich, da die Leitfähigkeit nur als ein komplexer Faktor pro Element wirkt. Insofern ist es ausreichend für die Tests eine reale Leit-

fähigkeitsverteilung ohne Phasenanteil anzunehmen und nur die modellierten Realteile der Transferimpedanzen, bzw. die Absolutwerte, auf Richtigkeit zu prüfen. Für den zweidimensionalen Fall kann dazu die analytische Lösung eines Kreiszyinders verwendet werden, die die Berechnung des Potentials

$$\varphi(x, y) = \frac{I\rho}{2\pi h} \ln \left(\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} \right) \quad (4.115)$$

im Inneren des Zylinders an der Stelle (x, y) für die Positionen x_1, y_1 und x_2, y_2 der beiden aktiven Stromelektroden am Rand des Zylinders ermöglicht (siehe z.B. Osypka 1993 oder Li 2000). Im Gegensatz zum Testkörper in Abbildung 42 wird bei diesem Modell der Strom I über die gesamte Höhe h des Zylinders eingespeist, siehe Abbildung 46.

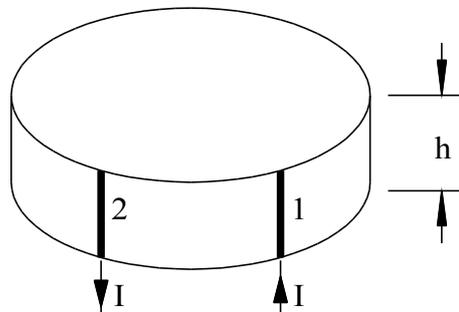


Abbildung 46: Kreisförmiger Zylinder für 2D-Testmessungen.

Für den Test werden, wie in Abschnitt 4.8.3, sechzehn Elektroden symmetrisch am Rand angeordnet. Der Strom wird über die Elektroden (1, 7), (3, 9), (5, 11), (7, 13), (9, 15), (11, 1), (13, 3) und (15, 5) eingespeist und die Spannungen werden für die benachbarten Paare (2, 4), (4, 6) usw. berechnet. Für diese Konfiguration werden nun die Transferimpedanzen analytisch und mittels der FEM-Methode für ein relativ kleines Netz mit nur 368 Dreieck-Elementen berechnet, siehe Abbildung 47.

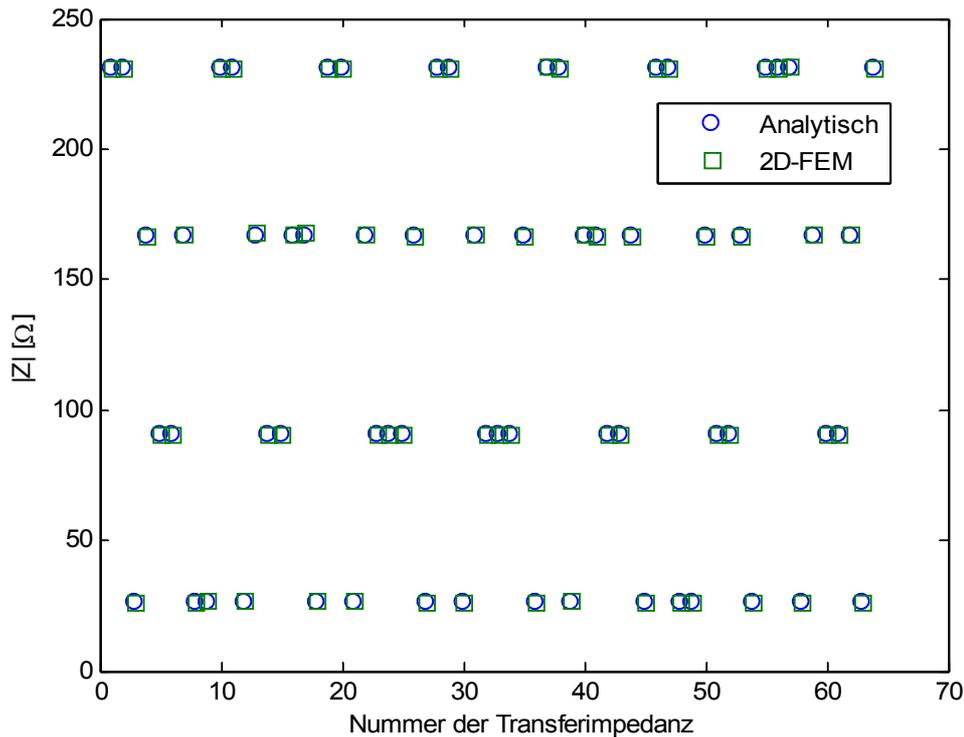


Abbildung 47: Überprüfung der 2D-FEM-Berechnung durch Vergleich der numerisch berechneten Transferimpedanzen mit der analytischen Lösung. Für die FEM-Berechnung wurde ein Netz mit 368 Dreieck-Elementen verwendet.

Der Vergleich der Impedanzen liefert für die FEM-Berechnung einen mittleren Fehler der Einzelmessung von $0,35 \Omega$ und einen maximalen Fehler von $0,9 \Omega$. Bezogen auf die Maximalimpedanz von ungefähr 500Ω , für eine Einspeisung an (1, 9) und eine Potentialmessung an (2, 10), ist der mittlere Fehler $0,07 \%$ und der maximale $0,18 \%$.

Zur Überprüfung der 3D-FEM-Berechnung wird die Wasserprobe in Abschnitt 4.8.3 mit der obigen Messkonfiguration verwendet. Da hierfür keine einfache analytische Lösung existiert, bzw. mir keine bekannt ist, werden zum Einen Symmetrieeigenschaften überprüft und zum Anderen die berechneten Impedanzen mit den gemessenen verglichen. Aus Gründen der Rotationssymmetrie sollten die Transferimpedanzen, wie beim 2D-Test, nur vier unterschiedliche Werte annehmen. Für die Modellierung wird ein homogenes Netz mit 3054 Elementen verwendet. Der Vergleich der berechneten Impedanzen mit den gemessenen, dargestellt in Abbildung 48, liefert eine mittlere Einzelabweichung von $2,3 \Omega$ und eine maximale von $6,7 \Omega$. Diese Abweichungen bewirken größtenteils die Messwerte. In der Abbildung ist die Streuung der Messwerte deutlich erkennbar, obwohl der Probenkörper sehr präzise gefertigt wurde. Es handelt sich dabei nicht um statistische Unsicherheiten, sondern eher um systematische Fehler, die eventuell von unsymmetrischen Stromdichteverteilungen an den Elektroden bewirkt werden. Hierfür sind jedoch noch weitere Untersuchungen notwendig. Ein Vergleich der

berechneten Werte mit den Mittelwerten der vier möglichen Impedanzen (berechnete Werte) ergibt einen mittleren Einzelfehler von $0,95 \Omega$ und einen maximalen von $2,3 \Omega$. Bezogen auf die Maximalimpedanz von 500Ω ist der mittlere relative Fehler $0,19 \%$ und der maximale $0,47 \%$. Im Vergleich zu den Fehlern der Messwerte zeigt dies, dass auch die 3D-FEM-Modellierung eine hinreichend genaue Berechnung der Transferimpedanzen ermöglicht.

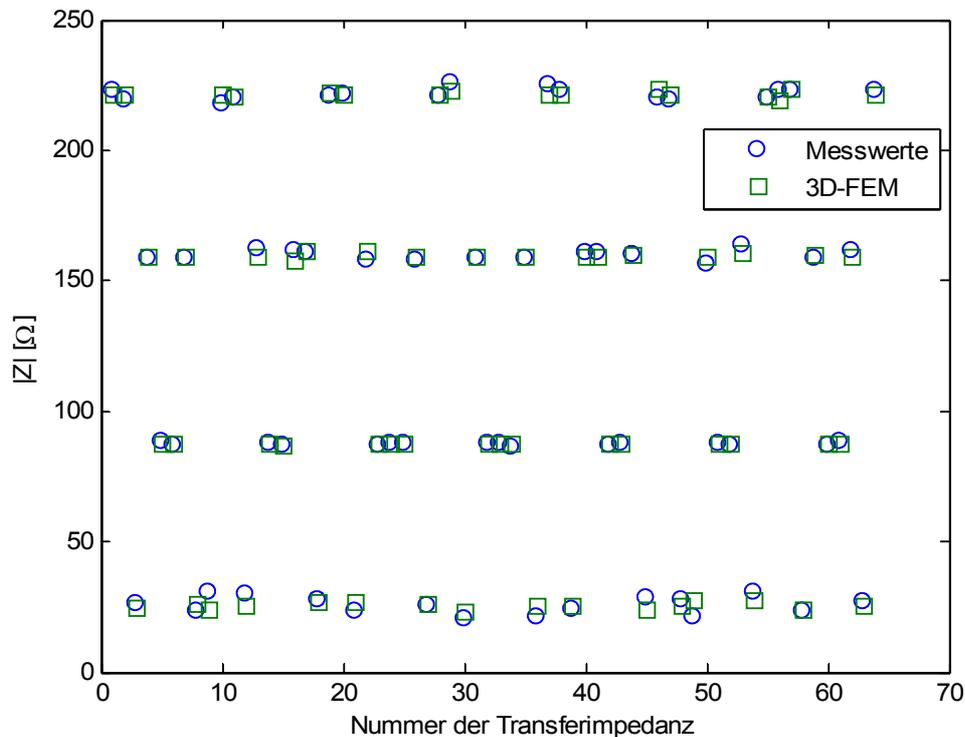


Abbildung 48: Überprüfung der 3D-FEM-Berechnung durch Vergleich der numerisch berechneten Transferimpedanzen mit den gemessenen einer Wasserprobe. Für die FEM-Berechnung wurde ein Netz mit 3054 Tetraeder-Elementen verwendet.

4.8.5 Test der Eingangsimpedanz-Modellierung

Die zusätzliche Modellierung der Eingangsimpedanzen wurde an einem Probenkörper mit möglichst vielen angeschlossenen Elektroden getestet, da die parasitären Ströme mit zunehmender Anzahl der angeschlossenen Elektroden zunimmt und damit der Effekt der erweiterten Modellierung deutlicher erkennbar ist. Für den Test wurde der rechteckige, mit wassergefüllte, 2D-Tank in Abbildung 49 verwendet. Die Wasserhöhe war 20 mm und der Widerstand ungefähr 26Ω . Die inneren Abmessungen des Tanks sind $48 \times 48 \text{ cm}^2$. Jede Seite wurde mit 4 Stromelektroden und 8 Spannungselektroden bestückt.

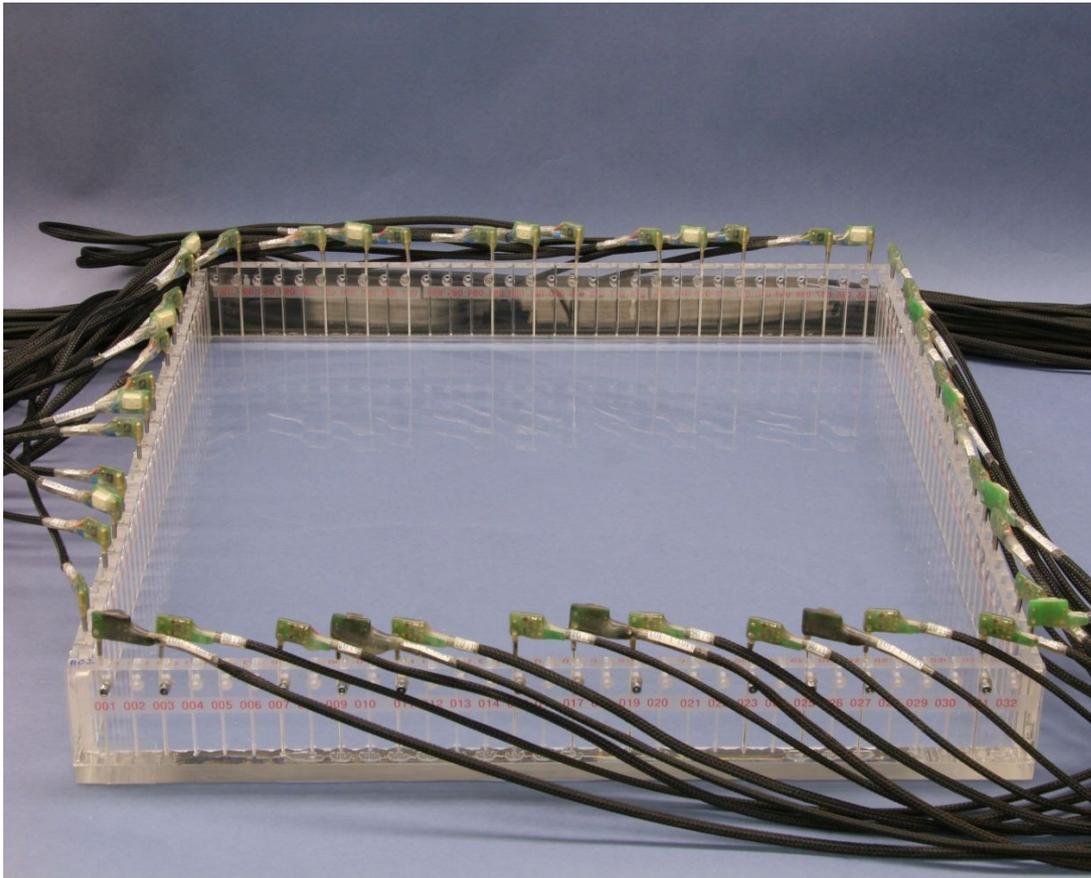


Abbildung 49: Foto des rechteckigen 2D-Tanks.

Zur Vermeidung von störenden Polarisierungseffekten wurden die Elektroden in Schlitz platziert, siehe Abbildung 50 und Abschnitt 3.4.3 . Die Elektroden sind versilberte Kupferdrähte mit einem Durchmesser von 1,5 mm. Die Schlitz haben eine Breite von 1,6 mm und eine Tiefe von 5,6 mm.

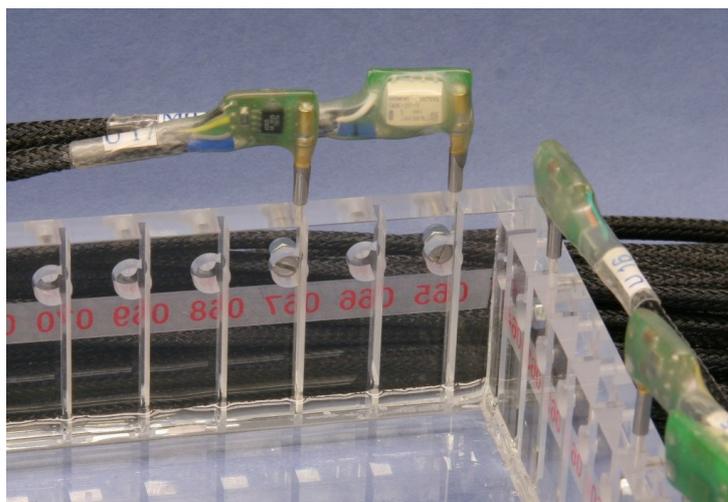


Abbildung 50: Ausschnittfoto, dass die Silberdrahtelektroden in den Schlitz und die elektrischen Anschlüsse für die Stromeinspeisung und Spannungsmessung zeigt.

An jeder Seite sind Schlitz für 32 Elektroden vorgesehen, sodass insgesamt 128 Elektroden angeschlossen werden können. Die Elektroden wurden deshalb entsprechend der möglichen Position von 1 bis 128 fortlaufend nummeriert, beginnend mit 1 unten links. An diesem Tank wurde nun eine Messung durchgeführt: Die Impedanzspektren der Messung für eine Einspeisung an (13, 77) und Spannungsmessungen an (39, 43), (43, 47), (47, 51) und (51, 55) sind in Abbildung dargestellt.

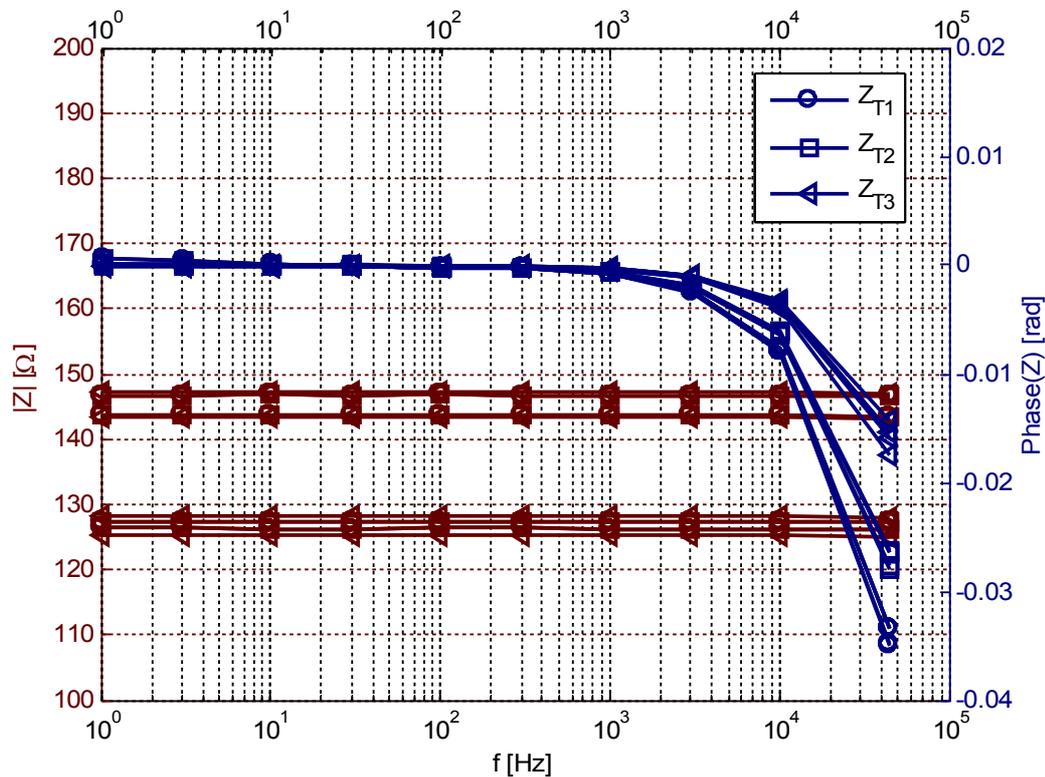


Abbildung 51: Gemessene (Z_{T1} und Z_{T2}) und modellierte (Z_{T3}) Impedanzspektren einer Wasserprobe im 2D-Tank (siehe Abbildung 49) für eine Einspeisung an (13, 77) und Spannungsmessungen an (39, 43), (43, 47), (47, 51) sowie (51, 55). Bei Z_{T2} wurde zusätzlich der Spannungsmessfehler aufgrund der Übergangsimpedanzen korrigiert.

Für die Phasenspektren Z_{T1} wurden die bisher vorgestellten Korrekturen angewendet. Zusätzlich wurde bei den Spektren Z_{T2} der Spannungsmessfehler aufgrund der Übergangsimpedanzen mit Gleichung 4.10 für eine geschätzte Übergangsimpedanz von 5 k Ω korrigiert. Die Impedanz der Schlitz für die gegebenen Abmessungen und einer Leitfähigkeit von 26 Ωm ist ungefähr 3,5 k Ω . Da jedoch zusätzlich noch die Übergangsimpedanz zum Metall und die ersten Millimeter außerhalb des Schlitzes einen Beitrag liefern, wurde für die Impedanz 5 k Ω geschätzt. Zum Vergleich wurden die Spektren Z_{T3} mit dem erweiterten Modell für die gleiche Leitfähigkeit aber ohne den imaginären Anteil des Wasser berechnet. Im Idealfall sollte der Phasenunterschied zwischen Z_{T3} und Z_{T2} mit der Phase des Wassers übereinstimmen. Der gemessene Phasenunterschied bei 10 kHz ist ungefähr 5 mrad, wobei der Phasenanteil des

Wassers ungefähr 1 mrad ist. Demnach ist der Phasenfehler für diese Messung bei 10 kHz ungefähr 4 mrad und folglich bei 1 kHz ungefähr 0,4 mrad. Obwohl der Fehler sehr klein ist könnte er eventuell weiter reduziert werden, wenn die wirksamen Übergangsimpedanzen und zusätzlichen parasitären Kapazitäten genauer bekannt wären.

4.8.6 Test der 2D- und 3D-Rekonstruktion.

Zum Test der Rekonstruktion wurden die theoretischen Transferimpedanzen für zylinderförmige Körper mit Anomalie modelliert, wobei für den Realteil und den Imaginärteil unterschiedliche Verteilungen des komplexen spezifischen Widerstandes angenommen wurden. Für den Realteil wurde ein spezifischer Widerstand angenommen, der in x-Richtung von $0,5 \Omega_m$ bis $1,5 \Omega_m$ steigt mit einer Anomalie auf der rechten Seite. Der Imaginärteil nimmt dagegen in y-Richtung von $0,5 \Omega_m$ bis $1,5 \Omega_m$ zu mit einer Anomalie auf der linken Seite.

Zum Test der 2D-Inversion wurde diese Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes für den Körper in Abschnitt 4.8.4 vorgegeben und es wurden die theoretischen Transferimpedanzen entsprechend der dort beschriebenen Messkonfiguration berechnet. Aus den Transferimpedanzen wurde anschließend für das gleiche Netz ohne Zusatz von Rauschen (Rauschen als Ersatz für reale Messfehler) die Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes rekonstruiert, siehe Abbildung 52.

Im Idealfall sollte die Verteilung ohne Abweichung rekonstruiert werden können. Aufgrund der notwendigen Regularisierung ist dies jedoch auch bei fehlerfreier Messung und Modellierung nicht möglich. Die rekonstruierte Verteilung wird mit zunehmendem Regularisierungsfaktor immer glatter, sodass insbesondere die Anomalie nicht vollständig rekonstruiert werden kann. Für das Beispiel in Abbildung 52 ist die maximale Abweichung (an der Anomalie) ungefähr $0,33 \Omega_m$ und bezogen auf die Höhe der Anomalie ungefähr 20 %. Der mittlere Fehler ist ungefähr $0,08 \Omega_m$.

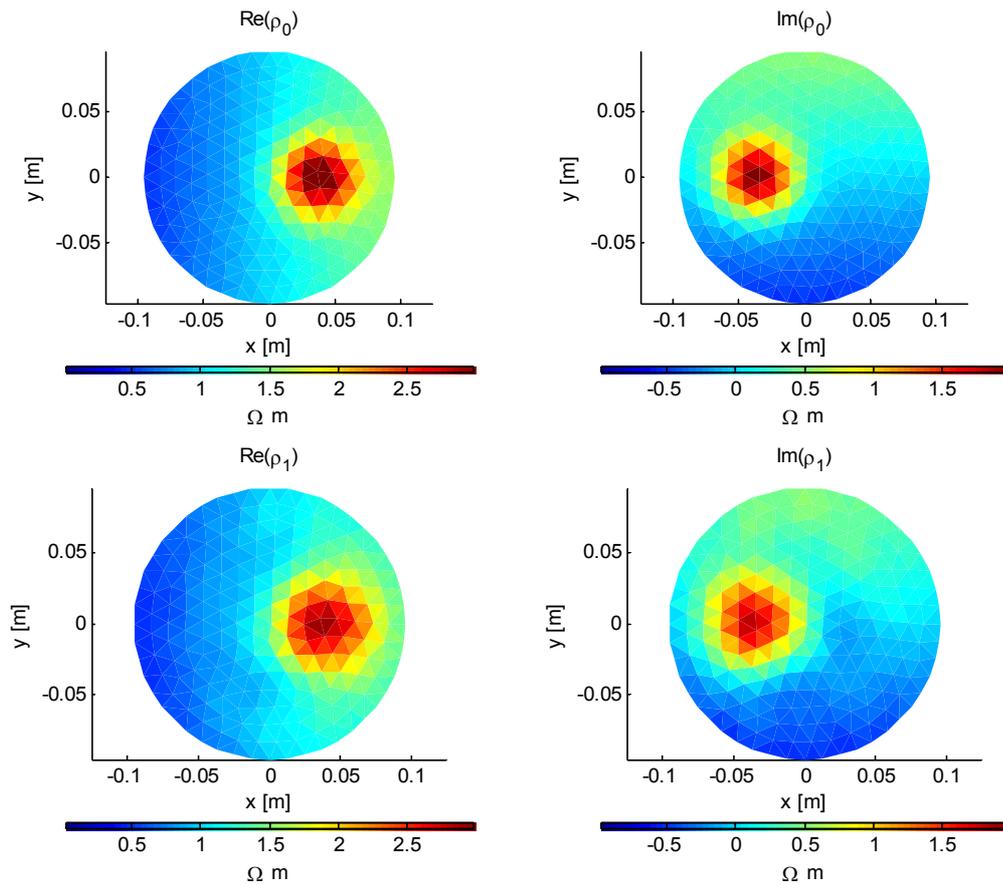


Abbildung 52: Test der 2D-Rekonstruktion für den Körper und die Messkonfiguration in Abschnitt 4.8.4. ρ_0 : vorgegebener komplexer spezifischer Widerstand. ρ_1 : rekonstruierter komplexer spezifischer Widerstand.

Zum Test der 3D-Rekonstruktion wurden die theoretischen Transferimpedanzen für den Zylinder in Abbildung 59 und einer ähnlichen Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes berechnet, siehe Abbildung 53. Aufgrund der Regularisierung unterscheidet sich auch hier die berechnete komplexe Verteilung von der vorgegebenen besonders an den Stellen der Anomalien. Die maximale Abweichung ist hier 0,26 Ωm und die mittlere 0,03 Ωm .

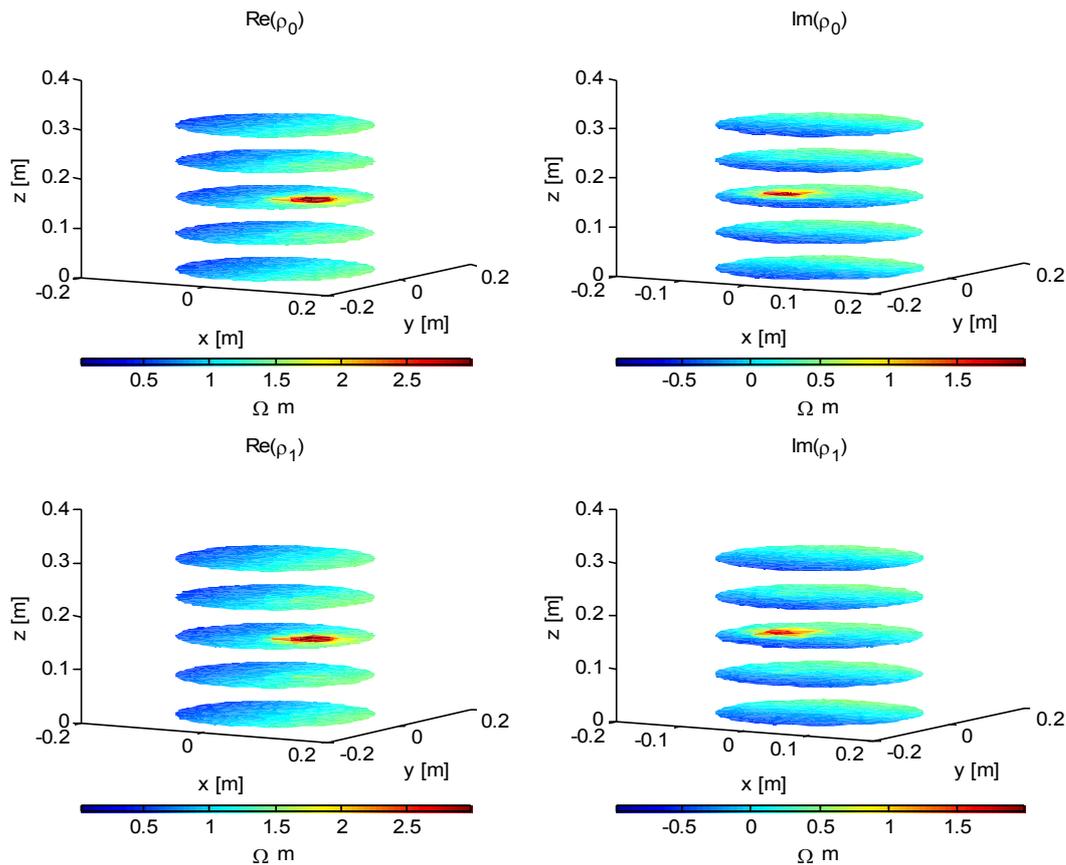


Abbildung 53: Test der 3D-Rekonstruktion für den Zylinder in Abbildung 59. ρ_0 : vorgegebener komplexer spezifischer Widerstand. ρ_1 : rekonstruierter komplexer spezifischer Widerstand.

4.8.7 Messungen an Phantomen

Die erzielbare Genauigkeit des Systems wurde zunächst für den zweidimensionalen Fall, vergleichbar zu den Tests in Kemna et al. (2000), am rechteckigen wassergefüllten Probenkörper in Abbildung 54 getestet, der zusätzlich mit fünf Objekten, Kupfer, Messing, Chrom, PVC und einer geschälten Kartoffelscheibe bestückt war. Die Metallstifte hatten einen Durchmesser von 10 mm, die PVC-Scheibe 50 mm und die Kartoffelscheibe 3 cm. Zum Test kleiner Phasen wurden wegen der starken Polarisierbarkeit der Materialien relativ kleine Körper gewählt. Die Transferimpedanzen und die komplexen spezifischen Widerstände wurden für Frequenzen von 1 Hz bis 45 kHz gemessen und rekonstruiert. Für die Rekonstruktion wurde ein inhomogenes Netz mit 1724 Elementen und 927 Knoten verwendet. Die Fläche der Elemente nimmt dabei von der Mitte zum Rand hin ab. Es wurden die absoluten komplexen spezifischen Widerstände rekonstruiert. Das heißt, es wurde keine Differenzinversion eingesetzt wie es bei vielen medizinischen Anwendungen üblich ist (siehe z.B. Oh et al. 2007), weder im Zeitbereich noch im Frequenzbereich.

Um zunächst die Ergebnisse qualitativ zu beurteilen sind die rekonstruierten Bilder des komplexen spezifischen Widerstandes für die Frequenzen 10 Hz bis 1 kHz in Abbildung 55 dargestellt. Werden nur die Betragsbilder betrachtet, so ist keine Frequenzabhängigkeit zu erkennen. Die Betragsbilder sehen alle gleich aus. Außerdem sind in den Betragsbildern nur das PVC-Objekt und die Kartoffelscheibe erkennbar, die Metalle jedoch nicht.

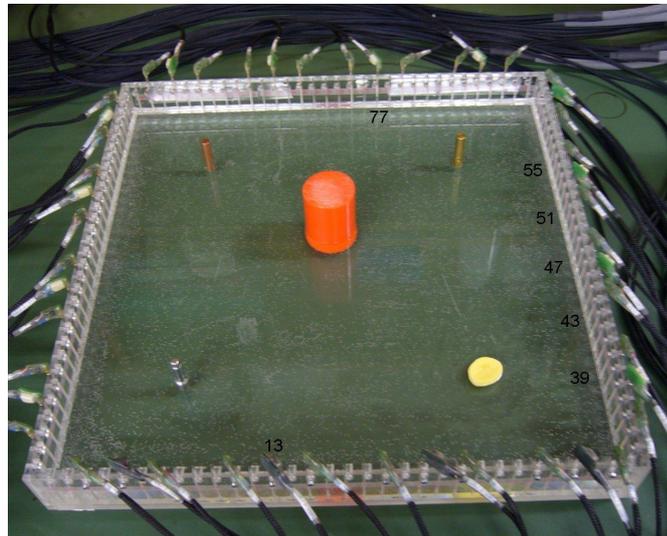


Abbildung 54: Wassergefüllter 2D-Tank mit fünf Objekten: Kupfer oben links, Bronze oben rechts, Chrom unten links, geschälte Kartoffel unten rechts und PVC in der Mitte.

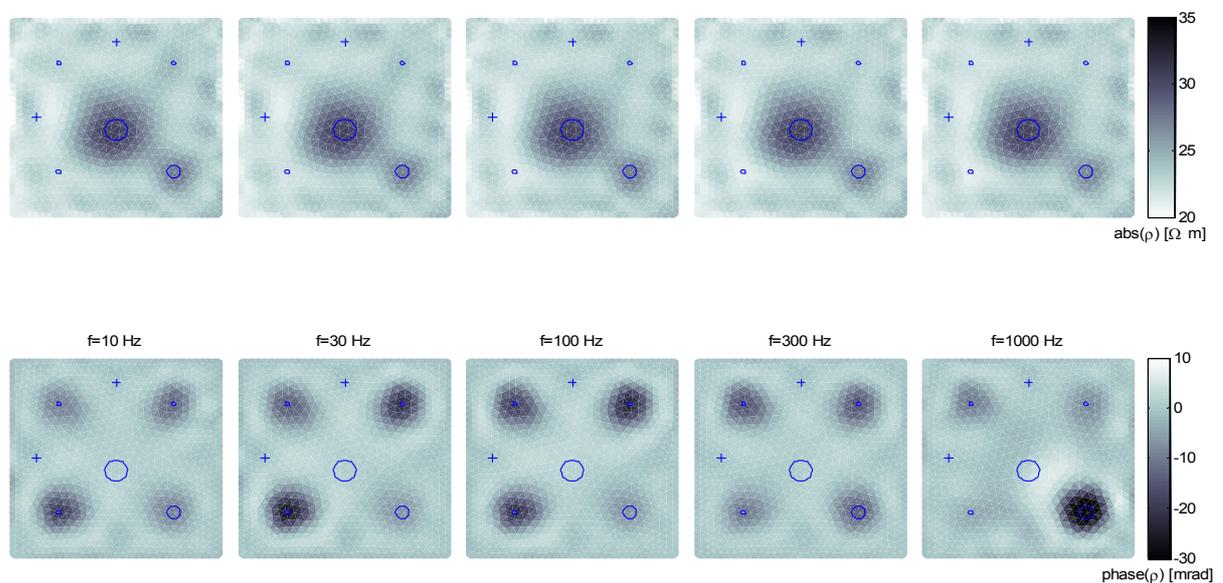


Abbildung 55: Betrag (oben) und Phase (unten) des rekonstruierten komplexen spezifischen Widerstandes für unterschiedliche Frequenzen, gemessen am wassergefüllten 2D-Tank, bestückt mit fünf Objekten: Kupfer (oben links), Messing (oben rechts), Chrom (unten links), Kartoffel (unten rechts) und PVC (Mitte). Positionen sind mit Kreisen gekennzeichnet.

Im Gegensatz dazu werden die Metalle in den Phasenbildern sehr gut detektiert. Die Abbildung zeigt aber auch die starke Polarisierbarkeit der Kartoffel im oberen Frequenzbereich und

deutlich die Frequenzabhängigkeit der Objekte. Diese Messung und Rekonstruktion demonstriert daher sehr gut das Potential der spektralen Impedanztomographie zur Identifikation und Charakterisierung von Objekten, im Vergleich zu einer Widerstandstomographie, wenn die Phase mit berücksichtigt wird.

Um nun die rekonstruierten Phasenspektren quantitativ beurteilen zu können, wurden die Impedanzwerte der Objektmittelpunkte als Bode-Diagramm in Abbildung 56 dargestellt. Die mit dem Impedanzspektrometer gemessenen Phasenspektren von Kupfer und von der Kartoffel (siehe Abschnitt 3.12) dienen hier als Referenz. Zusätzlich zu den Werten der Objektmittelpunkte, deren Position durch Kreise in Abbildung 55 gekennzeichnet sind, wurden auch die Phasenwerte des Wasser an den durch Kreuzen gekennzeichneten Positionen bestimmt. Für Wasser wird ein Wert von ungefähr 0,1 mrad bei 1 kHz erwartet.

Das rekonstruierte Phasenminimum des Kupferstiftes liegt zwischen 100 Hz und 200 Hz. Dies stimmt sehr gut mit dem gemessenen Phasenspektrum des größeren Kupferpins in Abbildung 25 überein. Da die Phase für das Zentrum des Pins rekonstruiert wurde, sind die rekonstruierten Werte im Vergleich zu den gemessenen deutlich größer. Auch die Phasenwerte der anderen Metalle zeigen zu erwartende Phasenminima im Bereich von 10 bis 1 kHz (siehe z.B. Gupta-arma 1983).

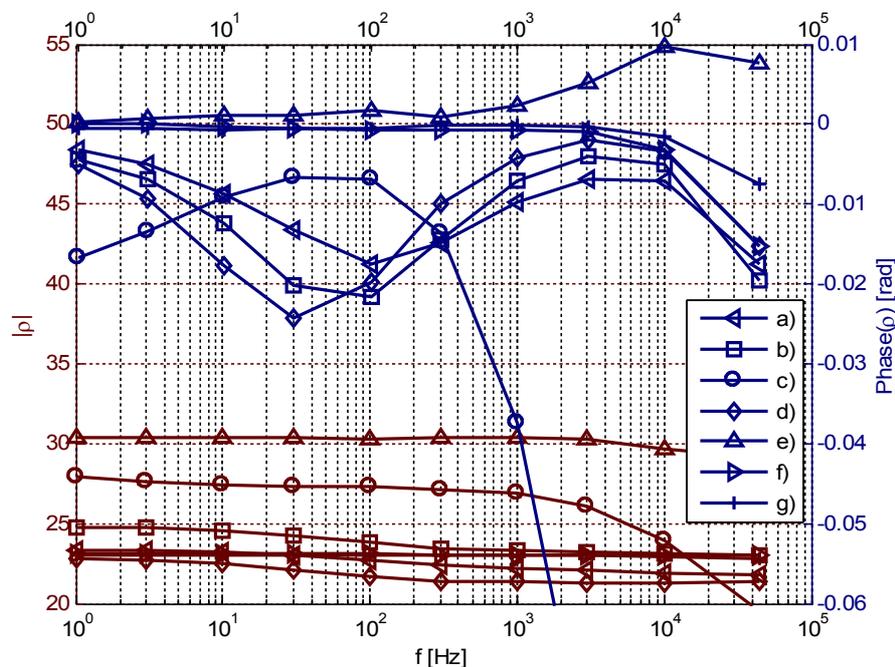


Abbildung 56: Rekonstruiertes Amplituden- und Phasenspektrum des komplexen spezifischen Widerstandes im Mittelpunkt der Objekte: Kupfer (a), Messing (b), Chrom (d), Kartoffel (c), PVC (e) und Wasser (f, g).

Die rekonstruierten Phasenspektren des Wassers liefern eine Abschätzung der erzielbaren Phasengenauigkeit. Im Bereich von 1 Hz bis 1 kHz ist die Phase kleiner als 1 mrad, obwohl die Phasenwerte der anderen Objekte deutlich größer sind. Aufgrund der verwendeten Regularisierung werden auch die räumlichen Phasengradienten gedämpft, sodass Phasenanteile der Objekte auch auf die freien Bereiche wirken können. Deshalb ist dies für praktische Messungen ein guter aber auch harter Test der erzielbaren Genauigkeit.

Die Kartoffel zeigt bei den Referenzmessungen mit dem Impedanzspektrometer ein ausgeprägtes Phasenminimum bei 10 kHz, siehe Abbildung 28. Dies ist auch bei den Spektren in Abbildung 57 der rekonstruierten Bilder erkennbar. Die Phase des rekonstruierten spezifischen Widerstandes ist bei 10 kHz mit -150 mrad deutlich kleiner als die geschätzte Phase von -700 mrad der Referenzspektren. Hier muss man berücksichtigen, dass die rekonstruierte Fläche der Kartoffel deutlich größer ist als die tatsächliche und damit die komplexen spezifischen Widerstände auf einen größeren Bereich verteilt sind. Es ist daher richtig, dass kleinere negative Phasenwerte bei den rekonstruierten Bildern gemessen werden. Eine genauere Untersuchung wird in den zukünftigen Arbeiten folgen.

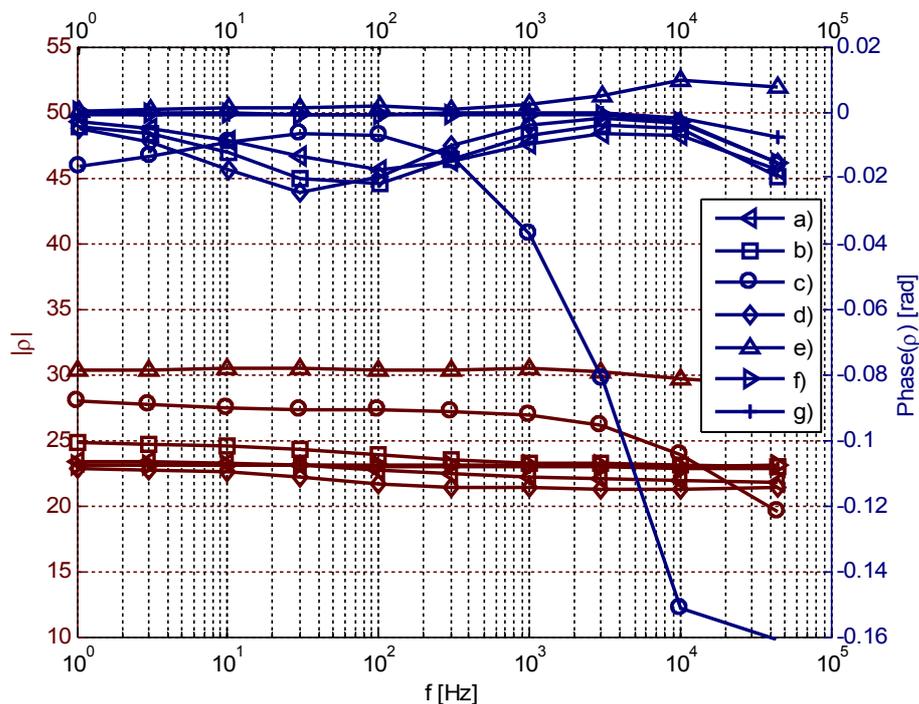


Abbildung 57: Abbildung 56 mit einem größeren Phasenbereich. [.: Rekonstruiertes Amplituden- und Phasenspektrum des komplexen spezifischen Widerstandes im Mittelpunkt der Objekte: Kupfer (a), Messing (b), Chrom (d), Kartoffel (c), PVC (e) und Wasser (f, g).].

Im Folgenden wird die Wirkung der Stromumschaltung auf die Bildgebung demonstriert. Dazu wurde der Datensatz der obigen Messung auf die Hälfte reduziert, sodass nur noch die

Transferimpedanzen der normalen Stromspeisung enthalten sind. Die Daten der getauschten Einspeisung wurden entfernt. Die Ergebnisse dieser Rekonstruktion sind in Abbildung 58 dargestellt. Betrachtet man zunächst wieder nur die Betragsbilder, so sind diese vergleichbar mit den rekonstruierten Bildern des vollständigen Datensatzes in Abbildung 55. Es sind sowohl das PVC-Objekt als auch die Kartoffelscheibe erkennbar. Dies zeigt, dass für die Widerstandstomographie die Anforderung an die Phasengenaugigkeit wesentlich unkritischer ist. Betrachtet man nun die Phasenbilder, so erkennt man, dass die Datensätze der hohen Frequenzen nicht mehr sinnvoll invertiert werden können. Aufgrund des gestörten oberen Frequenzbereiches ist die Phase der Metalle und der Kartoffelscheibe nur noch im unteren Frequenzbereich sinnvoll auswertbar. Die Charakterisierung der Objekte wird aufgrund des deutlich kleineren auswertbaren Frequenzbereiches stark eingeschränkt. Zusammenfassend zeigt dieses Beispiel zum Einen anhand von rekonstruierten Bildern die Wirkung der Stromumschaltung und zum Anderen, dass für die spektrale Impedanztomographie die phasengenaue Messung eine notwendige Voraussetzung ist.

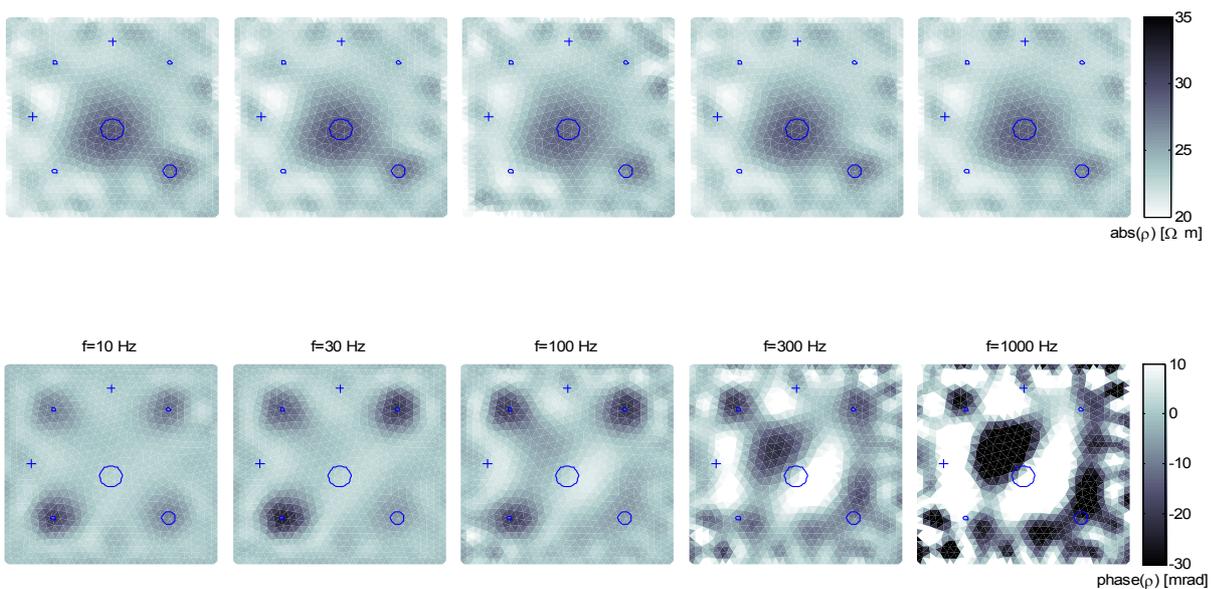


Abbildung 58: Betrag (oben) und Phase (unten) des komplexen spezifischen Widerstandes für unterschiedliche Frequenzen, wie in Abbildung 55, jedoch rekonstruiert aus Daten ohne Stromumkehr des wassergefüllten 2D-Tanks, bestückt mit Kupfer (oben links), Messing (oben rechts), Chrom (unten links), Kartoffel (unten rechts) und PVC (Mitte). Positionen sind mit Kreisen gekennzeichnet.

Abschließend wurde untersucht, ob die Messung und Rekonstruktion auch für den dreidimensionalen Fall im oberen Frequenzbereich erfolgreich durchgeführt werden kann. Hierzu wurde ein PVC-Objekt und eine geschälte Kartoffel, jeweils mit einem Durchmesser von 5 cm und einer Höhe von 8 cm, in einem wassergefüllten Zylinder mit einem Durchmesser von 28 cm

und einer Wasserstandshöhe von 30 cm eingetaucht, siehe Abbildung 59. Für den Versuch wurden 20 Stromelektroden und 48 Spannungselektroden verwendet. Die Messung wurde bei 1 kHz durchgeführt. Bei diesem Versuch wurde keine spezielle Konstruktion, wie zum Beispiel die PG-Verschraubungen in Abbildung 42, zur Vermeidung der Elektrodenpolarisationen, verwendet. Es wurde angenommen, dass die Polarisation der Metallelektroden im Vergleich zur Kartoffel bei 1 kHz wesentlich kleiner ist und die Rekonstruktion der Kartoffelpolarisation nicht negativ beeinflusst. Für die Modellierung wurde ein Netz mit 4431 Elementen und 1043 Knoten verwendet.

Die rekonstruierte Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes, dargestellt in Abbildung 60, zeigt auch für den dreidimensionalen Fall sehr deutlich die Kartoffel im Phasenbild, wogegen das PVC-Objekt im Betragsbild gut erkennbar ist. Die Phase im Zentrum der Kartoffel liegt zwischen -30 und -40 mrad bei 1 kHz. Der Wert ist kleiner als die Phase von -180 mrad, die mit dem Impedanzspektrometer bei 1 kHz abgeschätzt wurde. Hier müssen wieder die Unterschiede zwischen dem tatsächlichen und rekonstruierten Volumen der Kartoffel berücksichtigt werden. Zusammenfassend zeigt auch dieses 3D-Beispiel die hohe erzielbare Auflösung des Messsystems bei Anwendung der vorgestellten Methoden und demonstriert das mögliche Anwendungspotential zur Unterscheidung von Objekten, wenn zusätzlich die Phase ausgewertet wird.

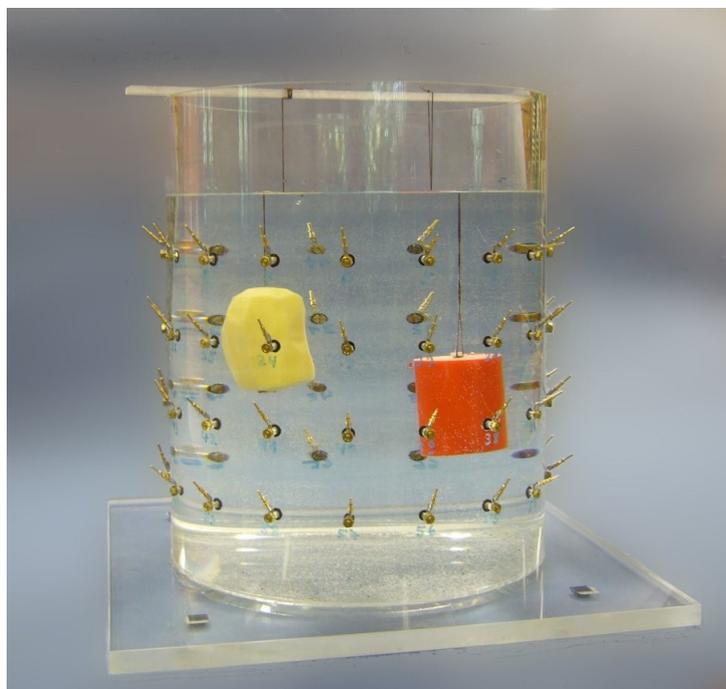


Abbildung 59: Wassergefüllter Zylinder mit zwei Objekten, geschälte Kartoffel und PVC-Objekt (Abmessungen siehe Text).

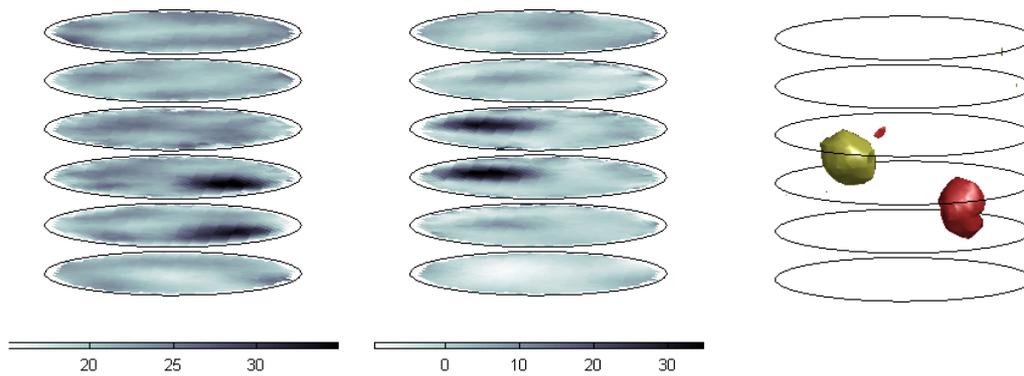


Abbildung 60: 3D-Bilder des Betrags (Links) und der Phase (Mitte) des rekonstruierten komplexen spezifischen Widerstandes bei 1 kHz eines wassergefüllten Zylinders, der mit einem PVC-Zylinder und einer geschälten Kartoffel bestückt war. Rechts: Berechnete Isosurface-Abbildung, die Beträge von $35 \Omega m$ (rechte Anomalie) und Phasen von -35 mrad (linke Anomalie) als Oberfläche darstellt.

5. Zusammenfassung

Ziel der Arbeit war es die Phasengenauigkeit von spektroskopischen und tomographischen Impedanzmessungen für geophysikalische Anwendungen zu verbessern und hierfür neue Messmethoden und -systeme zu entwickeln, mit der Motivation in naher Zukunft eine bessere und erweiterte Charakterisierung von schwach polarisierbaren Materialien zu ermöglichen. Die Phase der Impedanz bei den zu untersuchenden Materialien ist typischerweise kleiner als 20 mrad, teilweise sogar unterhalb von 1 mrad und der Frequenzbereich reicht von 1 mHz bis zu einigen 10 kHz. Als Zielgröße wurde daher eine Genauigkeit von 0,1 mrad für Frequenzen bis 1 kHz festgelegt. Um diese hohe Genauigkeit zu erzielen wurde zunächst ein Impedanzspektrometer entwickelt und ein optimaler Probenhalter für schwach polarisierbaren Materialien entworfen. Begleitend dazu wurden relevante Fehlerquellen untersucht und Methoden zur numerischen Korrektur der Messdaten bzw. Maßnahmen zur Vermeidung der Fehler erarbeitet. Auf Basis dessen und ergänzender Fehlerabschätzungen wurde schließlich ein spektraler Impedanztomograph entwickelt, einschließlich des Elektrodendesigns und notwendiger Korrekturmethode für bildgebende SIP-Messungen an Bodenmonolithen. Ausgelegt wurden die Systeme für einen Frequenzbereich von 1 mHz bis 45 kHz.

Das Impedanzspektrometer wurde auf Basis der Vierpunktmessmethode realisiert. Es besteht aus einem Funktionsgenerator, einer Verstärkereinheit, einer ADC-Karte, einem PC und einem Probenhalter. Die Verstärkereinheit nutzt als Eingangsbeschaltung extrem hochohmige und kapazitätsarme Operationsverstärker und Elektrodenkabel mit Driven-Shield-Technik. Die Eingangskapazität an den Elektroden sind ungefähr 5 pF und die Eingangswiderstände ungefähr 500 G Ω . Für die Datenerfassung wird eine PC-Karte mit einer Auflösung von 24 Bit (1,2 μ V) und einer maximalen Abtastrate von 102 kHz verwendet. Die Programme für die Datenerfassung und Auswertung basieren auf LabVIEW und MATLAB.

Die Abschätzung und Korrektur einiger systematischer Messfehler wurde auf Basis eines elektrischen Modells der Probe und des Messsystems durchgeführt. Dies betrifft insbesondere die Fehler der Strom- und Spannungsmessung bei hohen Frequenzen in Abhängigkeit von den Übergangsimpedanzen der Elektroden und der Probenimpedanz. Dieses Modell ermöglicht eine genauere Berechnung der Anregungsströme und der Messspannungen an den Elektroden, sowie eine Abschätzung tolerierbarer Übergangsimpedanzen der Elektroden. Unter anderem wurde mit diesem Modell die Wirkung von Gleichtaktfehlern auf die Phasengenauigkeit untersucht, die zum Teil mittels numerischer Korrektur der Verstärkungsunterschiede reduziert werden können.

Weiterhin wurden Elektrodeneigenschaften in Hinblick auf Übergangsimpedanzen und Polarisierbarkeit untersucht. Bezüglich der Stromelektroden zeigten poröse Materialien aufgrund der großen Oberfläche die geringsten Übergangsimpedanzen. Die Impedanz hängt jedoch auch von der Stromdichte ab. In diesem Zusammenhang wurde auch die Wirkung inhomogener Kontaktimpedanzen von plattenförmigen Stromelektroden auf den Phasenfehler untersucht. Die Inhomogenität bewirkt eine Rückwirkung der Elektrodenpolarisation auf die Probenimpedanz und damit auch einen Phasenfehler. Um diesen Fehler zu vermeiden ist für die Zielgenauigkeit ein Verhältnis von mindestens 2:1 zwischen dem Abstand der Strom- und Spannungselektrode und dem Durchmesser des Probenhalters sinnvoll. Die Untersuchungen bezüglich der Spannungselektroden zeigten, dass auch kleinste Metallelektroden, die im Strompfad der Probe angebracht sind, aufgrund der starken Polarisierbarkeit unzulässig große Phasenfehler bewirken. Günstiger ist es das Elektrodenmetall außerhalb der Probe anzuordnen und dieses elektrisch mit der Probe über ein Elektrolyt mit oder ohne Membran elektrisch zu verbinden, wobei je nach Anwendung eine optimale Konstruktion notwendig ist, die sowohl eine hinreichend kleine Kopplungsimpedanz als auch eine geringe Elektrodenpolarisation ermöglicht. Um das primäre Rauschen, das Elektrodenrauschen, zu minimieren wurden für die Strom- und Spannungselektroden chemisch edle Metalle, Messing und Silber, verwendet.

Auf Basis aller Fehlerabschätzungen wurde ein Probenhalter dimensioniert, der Impedanzmessungen an Proben mit einer Phasengenauigkeit von 0,1 mrad für Frequenzen von 1 mHz bis 1 kHz ermöglicht. Der Querschnitt des Probenhalters ist quadratisch oder kreisförmig. Für die Probenhalterlänge wurde das Sechsfache des Durchmessers gewählt. Als Stromelektroden sind poröse Platten an den Enden des Probenhalters angebracht. Die Potentialelektroden befinden sich symmetrisch bei 33% und 66% der gesamten Probenhalterlänge. Für Proben mit spezifischen Widerständen kleiner als 1000 Ωm führt dies zu einem Querschnitt von 6 x 6 cm^2 und einer Probenhalterlänge von 36 cm.

Um die störenden parasitären Kapazitäten der Probe gegen Erdpotential und den damit verbundenen Phasenfehler zu minimieren, sollte die Probe hinreichend weit von elektrisch leitenden Objekten aufgebaut werden. Dagegen zeigt eine Abschätzung der induktiven Effekte einschließlich des Skin-Effektes nur vernachlässigbar kleine Phasenfehler. Problematischer sind inhomogene Probenfüllungen, die nahezu beliebige Fehler in positive und negative Phasenrichtungen bewirken können. Die Homogenität des Probenmaterials ist daher besonders wichtig. Leichte niederfrequente Driften in den gemessenen Impedanzen, die eventuell durch instabile Proben bewirkt werden, sind nicht störend, da diese vor der Berechnung der komplexen Amplituden in den Zeitreihen eliminiert werden können.

Getestet wurde das Impedanzspektrometer und die Messmethoden an definierten Proben. Hierbei wurden zum Einen die gemessenen Impedanzspektren mit theoretischen Spektren und zum Anderen mit Spektren eines angepassten Cole-Cole-Modells verglichen, um auch die Kramers-Kronig-Relation, die die Beziehung zwischen Betrag und Phase beschreibt, zu überprüfen. Zunächst wurden elektrische Netzwerke als Testobjekte verwendet, deren Impedanzspektren sehr genau berechenbar sind. Für die praxisnahe Genauigkeitsprüfung der Messanordnung einschließlich möglicher Polarisierungseffekte der Elektroden wurde Wasser und gesättigter Quarzsand verwendet, deren Eigenschaften gut bekannt sind und deren Impedanzspektren ebenfalls gut berechnet werden können. Bei diesen Messungen wurde die Zielgenauigkeit erreicht. Um die Auflösung zu demonstrieren wurden als weitere Testmedien kleine Metallkörper in Wasser und gesättigtem Sand verwendet, da diese je nach Größe des Metalls wie schwach polarisierbare Objekte wirken und ein Cole-Cole-Spektrum mit negativer Phase im mittleren Frequenzbereich aufweisen. Als letztes Testmedium, mit negativer Phase im oberen Frequenzbereich, wurde eine Kartoffel verwendet. Diese Messungen dienten unter anderem als Referenz für die späteren tomographischen Messungen.

Aufbauend auf den Erkenntnissen der Impedanzspektroskopie wurde ein Impedanztomograph einschließlich der Messmethoden für den Frequenzbereich von 1 mHz bis 45 kHz realisiert. Das System beinhaltet 96 Spannungskanäle zur Messung der Elektrodenspannungen und 32 Kanäle für die Stromeinspeisung. Die Spannungen werden mittels Verstärker unmittelbar an den Elektroden abgegriffen um die kapazitive Belastung zu minimieren. Die Eingangsimpedanz ist ungefähr $5 \text{ pF} \parallel 500 \text{ G}\Omega$. Die Signale werden über gleichlange koaxiale Kabel zu den ADCs übertragen und gegen Systemmasse gemessen, mit dem Vorteil, dass zum Einen kapazitives Kanalübersprechen vermieden wird und zum Anderen, dass nach abgeschlossener Messung die Differenzspannungen beliebiger Potentialelektroden-Kombinationen numerisch berechnet werden können. Um die kapazitive Belastung der inaktiven Stromkanäle zu minimieren wurden Relais an den Elektroden platziert. Die Eingangskapazität der offenen Relais ist ungefähr 1 pF. Geschaltet werden die Ströme mittels Multiplexerkarten in denen jeweils zwei Shunt-Widerstände zur Strommessung der beiden aktiven Kanäle eingebaut sind. Analog zum Impedanzspektrometer werden für die Signalerzeugung ein quarzstabilisierter kommerzieller Funktionsgenerator (z.B. Agilent 33120A) und für die Datenerfassung ADC-Karten vom Typ National Instruments NI4472 eingesetzt. Entsprechend basiert auch die Messung und Auswertung auf LabVIEW und MATLAB mit vergleichbaren Funktionen für die Datenvorverarbeitung.

Für die Abschätzung und Korrektur der systematischen Fehler wurde, wie beim Impedanzspektrometer, ein elektrisches Modell des Systems und der Probe verwendet. Für die Berech-

nung der wahren Anregungsströme ist es ausreichend die koaxialen Kabel und die Multiplexer als Kapazitäten gegen Systemerde zu modellieren. Die Kapazitäten werden mittels Messungen an unbelasteten Stromkanälen bestimmt. Bei der Spannungsmessung wird nun zusätzlich die Laufzeit der Signale vom Verstärker zu den ADCs berücksichtigt. Um die Fehler aufgrund parasitärer Anregungs- und Ableitströme zu minimieren wird eine Stromumschaltung verwendet, bei der jeweils zwei Messungen mit getauschten komplexen Amplituden der beiden aktiven Anregungsströme durchgeführt werden. Die Stromumschaltung ermöglicht auch die Prüfung der parasitären Ableitströme auf Ausreißer. Die Gleichtaktfehler werden wie beim Impedanzspektrometer minimiert. Bezüglich der induktiven Kopplung und des Skin-Effektes ist nur die Kopplung der Kabel problematisch. Die Kabel für die Spannungsmessung und Stromspeisung sollten getrennt verlegt werden.

Zur Modellierung der Potentialverteilung wird eine Finite-Element-Berechnung auf Basis der Poisson-Gleichung für punktförmige Stromspeisungen verwendet. Die Elementmatrizen werden mittels der Galerkin-Methode bestimmt. Als Ergebnis wird für die 2D- und 3D-Modellierung eine kompakte Berechnung der Elementmatrizen in Matrizenform angegeben, aus denen die Systemmatrix gebildet wird, mit der schließlich die Potentialverteilung und die Transferimpedanzen für eine gegebene Stromanregung berechnet werden. Bei der Modellierung werden auch die parasitären elektrischen Belastungen der Probe durch die angeschlossene Verkabelung mittels einer zusätzlichen Admittanzmatrix berücksichtigt. Die Singularitätsfehler aufgrund der punktförmigen Stromquellen werden durch entsprechend feine Netze minimiert.

Die Rekonstruktion wird auf Basis des Gauß-Newton-Verfahrens durchgeführt, die zusätzlich eine Datenwichtungsmatrix und ein bis zwei Regularisierungs-Matrizen zur iterativen Berechnung des komplexen spezifischen Widerstandes berücksichtigt. Für die primäre Regularisierung wird eine Matrix auf Basis des diskreten Laplace-Operators verwendet, die nur alle räumlichen Gradienten zweiter oder höherer Ordnung unterdrückt. Zur schnellen Berechnung der Jacobi-Matrix wurden einige Methoden verglichen mit dem Ergebnis, dass alle den gleichen Kern haben und sich nur aufgrund unterschiedlicher Implementierung in der Rechengeschwindigkeit unterscheiden. Zur Berechnung der Jacobi-Matrix wurde eine Gleichung auf Basis der Elementmatrix des FEM-Modells verwendet.

Für die Messkonfiguration wird eine zirkulierende Dipol-Dipol-Konfiguration verwendet, bei der an jeder Stromelektrode genau 2 Einspeisungen an Paaren mit möglichst gegenüberliegenden Elektroden durchgeführt werden.

Analog zum Impedanzspektrometer wurde der Tomograph und die Messmethoden an definierten Proben geprüft. Zunächst wurde die erzielbare Phasengenauigkeit unter Verwendung der Strom- und Spannungskorrektur mit 4 Elektroden an elektrischen Netzwerken getestet, wobei nur die Impedanzspektren der gemessenen Transferimpedanzen ohne Bildgebung beurteilt wurden. Hierbei wurde die Zielgenauigkeit von 0.1 mrad bei 1 kHz erreicht. Zum Test der Stromumschaltung wurde mit 16 Elektroden an einem mit Wasser gefüllten zylindrischen Behälter gemessen, mit dem Ergebnis, dass auch mit dieser größeren Elektrodenanzahl noch eine Genauigkeit von 0.3 mrad bei 1 kHz erzielbar ist.

Für die folgenden Tests, die die Bildgebung einschließen, wurde zuerst die Genauigkeit der 2D-Modellierung durch Vergleich mit einer analytischen Lösung und die 3D-Modellierung durch Vergleich mit Messwerten eines homogenen Objektes und anhand der Symmetrieeigenschaften überprüft. Der maximale Fehler war kleiner 1 %. Eine weitere Messung mit möglichst vielen an einem wassergefüllten Behälter angeschlossenen Elektroden zeigte, dass die erweiterte FEM-Modellierung, die die parasitären Ableitströme über die Elektroden berücksichtigt, die tatsächlichen Phasenspektren besser beschreibt. Die Rekonstruktion wurde mit synthetischen Modellen überprüft.

Abschließend wurde das System und die Methoden an wassergefüllten Probenkörpern mit diversen Objekten getestet. Beim 2D-Test wurden fünf Objekte, Kupfer, Messing, Chrom, PVC und eine geschälte Kartoffelscheibe, im Wasser platziert. Die rekonstruierten Phasenspektren des Wassers zeigen im Bereich von 1 Hz bis 1 kHz eine Phase kleiner als 1 mrad. Die Phasenspektren des Kupferobjektes und der Kartoffel stimmen mit den Messungen des Impedanzspektrometers überein. Das Kupferobjekt zeigt zwischen 100 Hz und 200 Hz eine große negative Phase und die Kartoffel bei 10 kHz. Wie bei der 2D-Tomographie konnte auch bei der 3D-Tomographie die Kartoffel sehr gut lokalisiert und von nichtpolarisierbaren Objekten deutlich unterschieden werden. Dies demonstriert sehr gut das Potential der Messmethode zur Diskriminierung von Objekten, wenn auch die Phaseninformation zur Rekonstruktion der Leitfähigkeitsbilder verwendet wird.

6. Diskussion und Ausblick

Diese Arbeit beschreibt Systemkonzepte und Methoden, mit der die Phasengenauigkeit bei der Impedanzspektroskopie und -tomographie deutlich gesteigert werden kann. Die hohe Phasengenauigkeit ermöglicht eine erweiterte Charakterisierung von Böden, Sedimenten und Gesteinen bzw. des Untergrundes in Hinblick auf geophysikalische, hydrologische und umwelttechnische Fragestellungen. Ein vielversprechendes Forschungsgebiet ist zum Beispiel die Untersuchung von Sedimenten ohne elektronisch leitende Mineralien, die aufgrund der elektrischen Doppelschicht an den Schichtgrenzen zwischen dem Porenfluid und den elektrisch geladenen Mineraloberflächen polarisierbar sind, siehe z.B. Leroy et al. (2008). Die Polarisation dieser Sedimente ist mit der elektrischen Leitfähigkeit des Porenfluides (Lesmes und Frye 2001, Kemna et al. 2005), der Sättigung (Ulrich und Slater 2004, Binley et al. 2005) und insbesondere mit den strukturellen und mineralogischen Eigenschaften verknüpft, wie z.B. der Korngrößenverteilung (Lesmes und Morgan 2001), der Porenhalsgröße (Scott und Barker 2003, Binley et al. 2005) und dem Tonanteil (Slater und Lesmes 2002). Dies bedeutet folglich auch eine Verknüpfung der elektrischen mit der hydraulischen Leitfähigkeit, siehe z.B. Slater (2007). Bemerkenswert ist dabei die Verknüpfung der Relaxationszeiten der elektrischen Polarisation mit den Radien der Körner, den Porenlängen und den Porengrößen. Diese Relaxationszeiten nehmen mit dem Quadrat des Kornradius (s. z.B. Schwarz 1962, Lesmes und Morgan 2001) oder dem Quadrat der Porenlänge (s. z.B. Titov et al. 2002) zu. Zur Charakterisierung von Strukturen mit feinen und groben Körnern bzw. Poren ist folglich eine hohe Phasengenauigkeit über einen großen Frequenzbereich notwendig. Typische Phasen liegen hier im Bereich von 1 bis 20 mrad.

Insofern erweitern Messsysteme und -methoden, die eine hohe Phasengenauigkeit über einen großen Frequenzbereich erzielen (z.B. von 1 mHz bis 45 kHz), das Anwendungspotential bei geophysikalischen und hydrologischen Fragestellungen. Hierbei ist insbesondere die Vermeidung von Phasenfehlern bei hohen Frequenzen, die z.B. aufgrund parasitärer Kapazitäten entstehen, die größte Schwierigkeit und damit auch die größte messtechnische Herausforderung.

Da die diagnostischen Möglichkeiten mit der Frequenzbandbreite und der Phasengenauigkeit steigen, ist auch jetzt noch Forschungsbedarf zur Verbesserung der Systemtechnik und der Messmethoden vorhanden. Wünschenswert wäre zum Beispiel eine Genauigkeit von mindestens 0.1 mrad bei 10 kHz um die Phase von Leitungswasser mit 1 mrad bei 20 Ωm und damit die Phase von gesättigten Sanden und Sedimenten bis zu dieser Grenze messen zu können.

Es ist klar, dass hierfür weitere numerische Korrekturen und eine erweiterte Modellierung und Systemtechnik notwendig ist. Obwohl die beschriebenen Konzepte und Methoden einen

Großteil der Möglichkeiten erschöpft hat und damit eine relativ hohe Phasengenauigkeit erzielt wurde, ist bei einigen Punkten noch Potential zur Verbesserung vorhanden. Problematisch sind zum Beispiel die teilweise hohen Kopplungsimpedanzen der Spannungselektroden, die aufgrund des speziellen Elektrodendesigns kaum vermieden werden können. Um diese Phasenfehler zu vermeiden, sollten die Messverstärker weiter optimiert oder eine Methode zur in situ Messung der Kopplungsimpedanzen entwickelt werden. Auch die parasitären Kapazitäten zwischen der Probe und der Umgebung sind noch nicht hinreichend genau berücksichtigt. Zum Einen ist eine Methode erforderlich, mit der diese Kapazitäten gemessen werden können und zum Anderen ist eine erweiterte Modellierung für diese Kapazitäten notwendig.

Die quantitative Überprüfung der rekonstruierten Leitfähigkeitsbilder ist auch noch nicht abgeschlossen. Hierzu fehlen noch weitere Testobjekte die langzeitstabil sind und eine homogene Leitfähigkeit im Inneren mit definierter Phase aufweisen, um weiter spektrale Bereiche und Geometrieformen prüfen zu können. Optimal wären Testmaterialien, die in beliebigen Formen, zum Beispiel als Schichtung, in einen Proben-Behälter eingebracht werden können. In der Arbeit wurden Testobjekte verwendet, die klein im Vergleich zur Ortsauflösung der rekonstruierten Bilder waren. Hierfür ist ein direkter Vergleich mit den Soll-Phasen noch nicht erfolgt, da aufgrund der zu geringen Ortsauflösung ein größerer räumlicher Bereich rekonstruiert und die Phase auf diesen Bereich verteilt wird.

Zusätzlich zum getesteten Impedanztomographen wird in der Arbeit eine konstruktiv einfachere herstellbare Variante vorgestellt, bei der jeweils ein Strom- und ein Spannungsmodul für einen Kanal zu einem Modul zusammengefasst wurden. Diese Konstruktion vereinfacht reziproke Messung und aufgrund austauschbarer Kabel auch die Anpassung der Kabellängen an diverse Messobjekt. Mittels zusätzlicher Elektrodenketten, in der 8 Elektrodenmodule im Abstand von 1 m angeordnet sind, ist dieses System auch für Bohrlochmessungen geeignet. Hiermit werden in naher Zukunft ausgiebige Tests durchgeführt.

Unabhängig von den oben beschriebenen zukünftigen Vorhaben zur Genauigkeitssteigerung eröffnen die im Rahmen dieser Arbeit dargestellten Messsysteme und -methoden aufgrund der hohen Phasengenauigkeit in einem breiten Frequenzbereich auch jetzt schon neue diagnostische Möglichkeiten und damit einen Beitrag zu den Messmethoden der angewandten Geophysik bzw. der angewandten Hydrogeophysik, s. z.B. Vereecken et al. (2006). Dies betrifft auch umwelttechnische Fragestellungen, wie zum Beispiel die impedanzspektroskopische Untersuchung von Schadstoffen in Böden (Cassiani et al. 2009) oder biogeophysikalische Fragestellungen, wie zum Beispiel die Untersuchung von mikrobiellen Prozessen im Boden (Williams et al. 2009). Weiterhin sind auch impedanzspektroskopische und spektrale EIT-Messungen an Wurzeln im Boden, wie z.B. die Untersuchung des Wurzelwachstums in Ozier-Lafontaine und

Bajazet (2005), interessante und aktuelle Forschungsziele. Aufgrund der speziellen Zellstrukturen und der Oberflächeneigenschaften zeigen auch Wurzeln ein charakteristisches Impedanzspektrum, wobei das Phasenmaximum häufig oberhalb von 1 kHz liegt. Zusätzlich zu den Labormessungen an einfachen Bodenproben oder an Säulen wird aufgrund des erweiterten Frequenzbereiches der Bohrlochketten auch bei den Feldmessungen im Vergleich zu den bisherigen Feldstudien, wie z.B. Kemna et al. (2004), Slater und Binley (2006), Hördt et al. (2007) und Blaschek et al. (2008), eine bessere Charakterisierung des Untergrundes erwartet. Diese Anwendungsbeispiele zeigen, dass in naher Zukunft mittels der neuen Messsysteme und -methoden aufgrund der erweiterten diagnostischen Möglichkeiten für viele aktuelle und spannende Forschungsgebiete ein Beitrag geleistet werden kann.

Literatur

Agilent Technologies Co. Ltd, (2003), *The Impedance Measurement Handbook, A Guide to Measurement Technology and Techniques*

Archie, G. (1942), 'The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics.', *Trans. Am. Inst. Mineral Metall Petrol Eng* **146**, 54-62.

Barber, D. & Brown, B. (1984), 'Applied potential tomography', *J. Phys. E. Sci. Instrum.* **17**, 723-733.

Barsoukov, E. & MacDonald, J. R. (2005), *Impedance Spectroscopy—Theory, Experiment, and Applications 2nd edn*, New York: Wiley.

Bertin, J. & Loeb, J. (1976), *Experimental and Theoretical Aspects of Induced Polarization*, Germany: Gebrüder Borntraeger.

Binley, A.; Ramirez, A. & Daily, W. (1995), 'Regularised image reconstruction of noisy electrical resistance tomography data', *Proc. of the 4th Workshop of the European Concerted Action on Process Tomography, Bergen, 6 - 8 April 1995.*, 401-410.

Binley, A.; Slater, L. D.; Fukes, M. & Cassiani, G. (2005), 'Relationship between spectral induced polarization and hydraulic properties of saturated and unsaturated sandstone.', *Water Resources Research* **41**, w12417.

Blaschek, R.; Hördt, A. & Kemna, A. (2008), 'A new sensitivity-controlled focusing regularization scheme for the inversion of induced polarization data based on the minimum gradient support.', *Geophysics* **73**, F45-54.

Blume, S. (1994), *Theorie elektromagnetischer Felder.*, Hüthig Verlag.

Breckon, W. R. & Pidcock, M. K. (1988), 'Data errors and reconstruction algorithms in electrical impedance tomography', *Clinical Physics and Physiological Measurement* **9**(4A), 105-109.

Börner, F.; Gruhne, M. & Schön, J. (1993), 'Contamination indications derived from electrical properties in the low frequency range', *Geophysical Prospecting* **41**, 83-98.

Cassiani, G.; Kemna, A.; Villa, A. & Zimmermann, E. (2009), 'Spectral induced polarization for the characterization of free-phase hydrocarbon contamination of sediments with low clay content', *Special Issue on Hydrogeophysics - Methods and Processes* **7**(5-6), 547-562.

Chen, J.; Kemna, A. & Hubbard, S. S. (2008), 'A comparison between Gauss-Newton and Markov-chain Monte Carlo-based methods for inverting spectral induced-polarization data for Cole-Cole parameters', *Geophysics* **73**, F247.

Cook, R.; Saulnier, G.; Gisser, D.; Goble, J.; Newell, J. & Isaacson, D. (1994), 'ACT3: A high speed, high precision, electrical impedance tomograph.', *Biomed. Eng.* **41**, 713-22.

Cole, K. S. & Cole, R. H. (1941), 'Dispersion and absorption in dielectrics', *J. Chem. Phys.* **9**, 341.

Dahlin, T. (2000), 'Short note on electrode charge-up effects in DC resistivity data acquisition using multi-electrode arrays', *Geophysical prospecting* **48**, 181-187.

Dahlin, T.; Leroux, V. & Nissen, J. (2002), 'Measuring techniques in induced polarisation imaging', *Journal of Applied Geophysics* **50**, 279-298.

Daily, W.; Ramirez, A.; Binley, A. & LaBrecque, D. (2005), 'Electrical resistance tomography —theory and practice', *Near surface geophysics. Investigations in geophysics (13). Society Of Exploration Geophysicists*, 525-550..

deGroot Hedlin, C. & Constable, S. (1990), 'Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data', *Geophysics* **55**, 1613-24.

Dias, C. A. (2000), 'Developements in a model to describe low-frequency electrical polarization of rocks.', *Geophysics* **65(2)**, 437-451.

Emerson, D. W. (1969), 'Laboratory electrical resistivity measurements of rocks', *Proc. Aust. Inst. Min. Met.* **230**, 51-62.

Eskola, L. (1992), *Geophysical Interpretation Using Integral Equations*, London: Chapman and Hall.

Friedel, S. (2000), 'Über die Abbildungseigenschaften der geoelektrischen Impedanztomographie unter Berücksichtigung von endlicher Anzahl und endlicher Genauigkeit der Meßdaten.', PhD thesis, Universität Leipzig, Germany.

Fuller, B. D. & Ward, S. H. (1970), 'Linear system description of the electrical parameters of rocks', *IEEE transactions on geoscience electronics* **GE-8**, 7-18.

Geselowitz, D. B. (1971), 'An Application of Electrocardiographic Lead Theory to Impedance Plethysmography', *IEEE Trans. on Biomed. Eng.* **18(1)**, 38-41.

-
- Guptasarma, D. (1983), 'Effect of surface polarization on resistivity modeling', *Geophysics* **48** No. 1, 98-106.
- Hansen, P. C.; Jensen, T. K. & Rodriguez, G. (2007), 'An adaptive pruning algorithm for the discrete L-curve criterion', *Journal of computational and applied mathematics* **198**(2), 483-492.
- Holder, D. S. (2005), *Electrical impedance tomography: methods, history and applications*, Bristol: Institute of Physics Publishing.
- Hua, P.; Webster, J. G. & Tompkins, W. J. (1988), 'A regularised electrical impedance tomography reconstruction algorithm', *Clinical Physics and Physiological Measurement* **9**(4A), 137-141.
- Hunter, P. & Pullan, A. (2002), 'FEM/BEM NOTES', Technical report, Department of Engineering Science, The University of Auckland, New Zealand.
- Hördt, A.; Blaschek, R.; Kemna, A. & Zisser, N. (2007), 'Hydraulic conductivity estimation from induced polarisation data at the field scale—the Krauthausen case history', *Journal of Applied Geophysics* **62**, 33-46.
- Kao, T.-J.; Saulnier, G. J.; Isaacson, D.; Szabo, T. L. & Newell, J. C. (2008), 'A Versatile High-Permittivity Phantom for EIT', *IEEE Trans. on Biomedical Engineering* **55**(11).
- Kemna, A. (1995), 'Tomographische Inversion des spezifischen Widerstandes in der Geoelektrik', Diplomarbeit, Universität zu Köln.
- Kemna, A.; Binley, A.; Ramirez, A. & Daily, W. (2000), 'Complex resistivity tomography for environmental applications', *Elsevier; Chemical Engineering Journal* **77**, 11-18.
- Kemna, A. (2000A), 'Tomographic inversion of complex resistivity - theory and application', PhD thesis, Bochum University, Germany.
- Kemna, A.; Binley, A. & Slater, L. (2004), 'Crosshole IP imaging for engineering and environmental applications', *Geophysics* **69**, 97-107.
- Kemna, A.; Münch, H.-M.; Titov, K.; Zimmermann, E. & Vereecken, H. (2005), 'Relation of SIP relaxation time of sands to salinity, grain size and hydraulic conductivity', *Proc. of EAGE Near Surface 2005, Palermo, P054, 4p.*
-

Kramers, H. A. (1929), 'Die Dispersion und Absorption von Röntgenstrahlen', *Physik. Z.*, 522-523.

Kronig, R. L. (1926), 'The Theory of Dispersion of X-Rays', *Journal of the Optical Society of America* **12**(6), 547-558.

Kwon, Y. W. & Bang, H. Kulacki, F. A., ed. (1997), *The Finite Element Method using MATLAB*, CRC Press.

LaBrecque, D. & Daily, W. (2008), 'Assessment of measurement errors for galvanic-resistivity electrodes of different composition', *Geophysics* **73**(2), F55-F64.

LaBrecque, D. J.; Miletto, M.; Daily, W.; Ramirez, A. & Owen, E. (1996), 'The effects of noise on Occam's inversion of resistivity tomography data', *Geophysics* **61**, 538-548.

Leroy, P.; Revil, A.; Kemna, A.; Cosenza, P. & Ghorbani, A. (2008), 'Complex conductivity of water-saturated packs of glass beads', *Journal of Colloid and Interface Science* **321**, 103-117.

Lesmes, D. & Frye, K. (2001), 'Influence of pore fluid chemistry on the complex conductivity and induced polarization responses of Berea sandstone', *J. Geophys. Res.* **106**(B3), 4079-4090.

Lesmes, D. P. & Morgan, F. D. (2001), 'Dielectric spectroscopy of sedimentary rocks.', *J. Geophys. Res.* **106**, 13329-13346.

Li., J. (2000), 'Multifrequente Impedanztomographie zur Darstellung der elektrischen Impedanzverteilung im menschlichen Thorax.', PhD thesis, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik der Universität Stuttgart.

Lowry, T.; Allen, M. B. & Shive, P. N. (1989), 'Singularity removal: A refinement of resistivity modeling techniques', *Geophysics* **54**(6), 766-774.

Lu, K. & Macnae, J. (1998), 'The international campaign on intercomparison between electrodes for geoelectric measurements.', *Exploration Geophysics* **29**, 484-488.

Macdonald, J. R. (1987), *Impedance Spectroscopy*, John Wiley & Sons

Major, J. & Silic, J. (1981), 'Restriction on the use of Cole-Cole dispersion model in complex resistivity interpretation', *Geophysics* **46**, 916-931.

Malmberg, C.G.; Maryott, A. (1956), 'Dielectric Constant of Water from 0° to 100° C.', *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **56**(1), 2641, 8p.

-
- Marquardt, D. W. (1963), 'An algorithm for least.squares estimation of nonlinear parameters', *SIAM J. Appl. Math* **11**, 431-441.
- Maxwell-Garnett, J. C. (1904), 'Colours in metal glasses and in metallic films', *Philos. Trans. R. Soc. London, Ser. A.* **203**, 385-420.
- Meinke, H. H. & Gundlach, F.-W. (1992), *Taschenbuch der Hochfrequenztechnik*, Springer Verlag Berlin, Hrsg. v. Klaus Lange u. Karl-Heinz Löcherer, Studienausg..
- Morrison, R. (1998), *Grounding and Shielding Techniques*, John Wiley & Sons
- Morrison, R. (1967), *Grounding and Shielding Techniques in Instrumentation*, New York, Wiley.
- Murai, T. & Kagawa, Y. (1985), 'Electrical impedance computed tomography based on a finite element model', *IEEE transactions on bio-medical engineering* **BME-32(3)**, 177-184.
- Nelder, J. A. & Mead, R. A. (1965), 'A Simplex Method for Function Minimization', *Computer Journal* **7**, 308-313.
- Oh, T. I.; Woo, E. J. & Holder, D. (2007), 'Multi-frequency EIT system with radially symmetric architecture: KHU Mark1', *Physiol. Meas.* **28**, 183-95.
- Olhoeft, G. R. (1979), 'Electrical properties', *Initial Reports on the Petrophysics Laboratory, Geological Survey circular, Washington, DC* **789**, 1-26.
- Olhoeft, G. R. (1981), *Physical properties of rocks and minerals*, McGraw-Hill Inc., chapter Electrical Properties of Rocks, pp. 257-297.
- Oristaglio, M. & Worthington, M. (1980), 'Inversion of surface and borehole electromagnetic data for two-dimensional electrical conductivity models', *Geophysical Prospecting* **28(4)**, 633-657.
- Osyпка, M. (1993), 'Komplexe Impedanztomografie im Frequenzbereich von 10 Hz bis 40 kHz', PhD thesis, Universität Frideriana Karlsruhe.
- Ozier-Lafontaine, H. & Bajazet, T. (2005), 'Analysis of root growth by impedance spectroscopy (EIS)', *Plant and Soil* **277**, 299–313.
- Patnode, H. & Wyllie, M. (1950), 'The presence of conductive solids in reservoir rocks as a factor in electric log interpretation', *Trans. Am. Inst. Min. Metall. Eng.* **189**, 47–52.
-

Pelton, W. H.; Rijo, L. & Swift, C. (1978A), 'Inversion of two-dimensional resistivity and induced-polarization data.', *Geophysics* **43**(4), 788-803.

Pelton, W. H.; Ward, S. H.; Hallof, P. G.; Sill, W. R. & Nelson, P. H. (1978), 'Mineral discrimination and removal of inductive coupling with multifrequency IP', *Geophysics* **43**, 588-609.

Persson, P.-O. & Strang, G. (2004), 'A simple mesh generator in Matlab.', *SIAM review* **46**(2), 329-345.

Purcell, E. M. (1989), *Elektrizität und Magnetismus*, Vieweg-Verlag.

Petrova, G. I. (1999), *Influence of electrode impedance changes on the common-mode rejection ratio in bioimpedance measurements*, *Physiol. Meas.* **20** (1999) N11-N19. Printed in the UK.

Robinson, D. A. & Friedman, S. P. (2003), 'A method for measuring the solid particle permittivity or electrical conductivity of rocks, sediments, and granular materials', *J. Geophys. Res.* **108**(B2), 2076.

Rodi, W. L. (1976), 'A technique for improving the accuracy of finite element solutions for magnetotelluric data', *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **44**, 483-506.

Ross, A. S.; Saulnier, G. J.; Newell, J. C. & Isaacson, D. (2003), 'Current source design for electrical impedance tomography', *Physiol. Meas.* **24**, 509-16.

Sasaki, Y. (1994), '3-D resistivity inversion using the finite-element-method', *Geophysics* **59**(12), 1839-1848.

Schwarz, G. (1962), 'A theory of the low-frequency dispersion of colloidal particles in electrolyte solution', *J. Phys. Chem.* **66**, 2636-2642.

Schwarz, H. R. & Köckler, N. (2006), *Numerische Mathematik*, Teubner.

Schön, J. (1983), *Petrophysik*, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart.

Schön, J. H. (1996), *Handbook of geophysical exploration, Seismic exploration*, Elsevier Science Ltd., chapter Physical properties of rocks - fundamentals and principles of petrophysics, Volume 18.

- Scott, J. B. T. & Barker, R. (2005), 'Characterization of sandstone by electrical spectroscopy for stratigraphical and hydrogeological investigations', *Q. J. Eng. Geol. Hydrogeol.* **38**, 143-54.
- Scott, J. B. T. & Barker, R. D. (2003), 'Determining pore-throat size in Permo-Triassic sandstones from low frequency electrical spectroscopy', *Geophys. Res. Lett.* **20**, 1450.
- Slater, L. (2007), 'Near Surface Electrical Characterization of Hydraulic Conductivity: From Petrophysical Properties to Aquifer Geometries—A Review', *Surveys in Geophysics* **28**(2-3).
- Slater, L. & Binley, A. (2006), 'Synthetic and field-based electrical imaging of a zerovalent iron barrier: Implications for monitoring long-term barrier performance', *Geophysics* **71**, B129-37.
- Slater, L.; Binley, A.; Versteeg, R.; Cassiani, G.; Birken, R. & Sandberg, S. (2002), 'A 3D ERT study of solute transport in a large experimental tank', *Journal of Applied Geophysics* **49**, 211-229.
- Slater, L.; Binley, A. M.; Daily, W. & Johnson, R. (2000), 'Cross-hole electrical imaging of a controlled saline tracer injection', *Journal of Applied Geophysics* **44**(2-3), 85 - 102.
- Slater, L. & Lesmes, D. P. (2002), 'Electrical-hydraulic relationships observed for unconsolidated sediments.', *Water Resources Research* **38**(10), 1213.
- Spitzer, K. (1998), 'The three-dimensional DC sensitivity for surface and subsurface sources', *Geophysical Journal International* **134**(3), 736--746.
- Sumner, J. S. (1976), *Principles of induced polarization for geophysical exploration*, Elsevier Science Publishing Co.
- Telford, W.; Geldart, L. & R.E.Sheriff (1990), *Applied Geophysics. Second Edition.*, Cambridge University Press.
- Tietze, U. & Schenk, C. (1985), *Halbleiterschaltungstechnik*, Springer-Verlag.
- Titov, K.; Komarov, V.; Tarasov, V. & Levitski, A. (2002), 'Theoretical and experimental study of time domain-induced polarization in water-saturated sands', *Journal of Applied Geophysics* **50**, 417-433.
- Ulrich, C. & Slater, L. (2004), 'Induced polarization measurements on unsaturated, unconsolidated sands', *Geophysics* **69**, 762-71.

Vacquier, V.; Holmes, C.; Kintzinger, P. & Lavergne, M. (1957), 'Prospecting for ground water by induced electrical polarization', *Geophysics* **23**, 660-687.

Vanhala, H. (1997), 'Mapping oil-contamination sand and till with the spectral induced polarization (SIP) method.', *Geophysical Prospecting* **45**, 303-326.

Vanhala, H. & Soininen, H. (1995), 'Laboratory technique for measurement of spectral induced polarization response of soil samples', *Journal Geophysical Prospecting* **43**, 655-676.

Vauhkonen, M. (1997), 'Electrical impedance tomography and prior information', *Kuopio University Publications C. Natural and Environmental Sciences* **62**, 110.

Vereecken, H.; Binley, A.; Cassiani, G.; Revil, A. & Titov, K., ed. (2006), *Applied Hydrogeophysics*, Vol. 71, Springer Netherlands.

Waxman, M. H. & Smits, L. J. M. (1968), 'Electrical conductivities in oil-bearing shaly sands', *Trans. Am Inst. Mineral. Metall. Petrol. Eng.* **243**(2), 107-122.

Williams, K. H.; Kemna, A.; Wilkins, M. J.; Druhan, J.; Arntzen, E.; N'Guessan, A. L.; Long, P. E.; Hubbard, S. S. & Banfield, J. F. (2009), 'Geophysical Monitoring of Coupled Microbial and Geochemical Processes During Stimulated Subsurface Bioremediation', *Environmental Science & Technology* **43**(17), 6717-6723.

Xu, B. & Noel, M. (1993), 'On the completeness of data sets with multielectrode systems for electrical resistivity survey', *Geophysical Prospecting* **41**(6), 791-801.

Xu, G.; Wu, H.; Yang, S.; Liu, S.; Li, Y.; Yang, Q.; Yan, W. & Wang, M. (2005), '3-D electrical impedance tomography forward problem with finite element method.', *IEEE Transactions on Magnetics* **41 No 5**, 1832-1835.

Yerworth, R.; Bayford, R.; Brown, B.; Milnes, P.; Conway, M. & Holder, D. S. (2003), 'Electrical impedance tomography spectroscopy (EITS) for human head imaging', *Physiol. Meas.* **24**, 477-489.

Yorkey, T. J.; Webster, J. G. & Tompkins, W. J. (1987), 'Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography.', *IEEE transactions on bio-medical engineering* **34**(11), 843-52.

Zhang, M. I. N. & Willison, J. H. M. (1992), 'Electrical impedance analysis in plant tissues: The effect of freeze-thaw injury on the electrical properties of potato tuber and carrot root tissues', *Can. J. Plant. Sci.* **72**, 543-553.

Zimmermann, E.; Kemna, A.; Berwix, J.; Glaas, W.; Münch, H. M. & Huisman, J. A. (2008), 'High accuracy impedance spectrometer for measuring sediments with low polarizability', *Meas. Sci. Technol.* **19**, 105603 (9pp).

Zimmermann, E.; Kemna, A.; Berwix, J.; Glaas, W. & Vereecken, H. (2008A), 'EIT measurement system with high phase accuracy for the imaging of spectral induced polarization properties of soils and sediments', *Meas. Sci. Technol.* **19**, 094010 (9pp).

Anhang A: Berechnung der Abtastrate

Zur exakten Phasenbestimmung werden eine ganzzahlige Anzahl N_m von Perioden $T_m = 1/f_m$ gemessen. Die gesamte Zeit der Zeitreihe ist folglich

$$T_g = N_m T_m = N_m \frac{1}{f_m}. \quad (\text{A.1})$$

Weiterhin wird für eine einfache Auswertung eine konstante Anzahl von Abtastwerten N_a pro Zeitreihe für alle Messfrequenzen f_m festgelegt. Da die Abtastraten der ADCs nur in einem beschränkten Bereich von $f_{a,min}$ bis $f_{a,max}$ eingestellt werden können, ist es speziell bei den tiefen Frequenzen notwendig eine höhere Anzahl von Daten zu messen und diese später auf die Anzahl N_a zu reduzieren. Hierfür wird wieder aus praktischen Gründen ein ganzzahliges Vielfaches N_o von N_a gemessen. Die effektive Abtastrate ist damit

$$f_{ae} = \frac{f_a}{N_o}. \quad (\text{A.2})$$

Für diese Bedingungen wird die einzustellende Abtastrate f_a der ADCs berechnet. Es gilt somit

$$T_g = N_m \frac{1}{f_m} = N_a \frac{N_o}{f_a} \quad (\text{A.3})$$

bzw.

$$f_a = f_m \frac{N_a N_o}{N_m}. \quad (\text{A.4})$$

Es wird mindestens eine Periode $N_m = 1$ gemessen. Bei den tiefen Frequenzen wird N_o so vorgegeben, dass f_a größer als $f_{a,min}$ ist und bei den hohen Frequenzen wird N_m so eingestellt, dass f_a kleiner als $f_{a,max}$ ist.

Anhang B: Berechnung der Cole-Cole-Parameter

Für die Impedanz der Schaltung in Abbildung B1 folgt:

$$\begin{aligned} Z_{cc} &= R_s + \sum_n \frac{Z_n R_n}{Z_n + R_n} \\ &= R_s + \sum_n \frac{R_n}{1 + \frac{R_n}{Z_n}} \\ &= \left(R_s + \sum_n R_n \right) - \sum_n R_n + \sum_n \frac{R_n}{1 + \frac{R_n}{Z_n}} \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

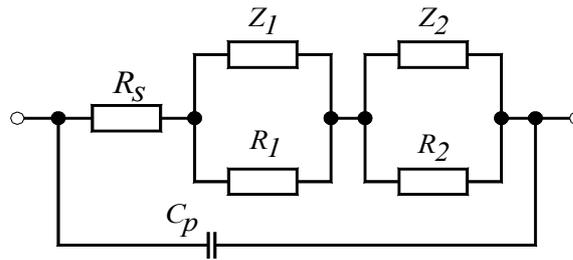


Abbildung B1: Elektrisches Netzwerk des Cole-Cole-Modells.

Definiert man nun die Parameter

$$R_0 = \left(R_s + \sum_n R_n \right), \quad (\text{B.2})$$

$$(j\omega\tau_n)^{c_n} = \frac{R_n}{Z_n} \quad (\text{B.3})$$

und

$$m_n = \frac{R_n}{R_0}, \quad (\text{B.4})$$

so folgt aus Gleichung (B.1)

$$\begin{aligned} Z_{cc} &= R_0 - \sum_n R_n \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n}} \right) \\ &= R_0 \left(1 - \sum_n m_n \left(1 - \frac{1}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n}} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Dies ist die typische Gleichung des Cole-Cole-Modells. Einsetzen von Gleichung (B.3) und (B.4) in (B.1) liefert den Zusammenhang zwischen den Cole-Cole-Parametern und den Impedanzen der Parallelschaltungen aus R_n und Z_n

$$\sum_n \frac{Z_n R_n}{Z_n + R_n} = \sum_n \frac{R_n}{1 + \frac{R_n}{Z_n}} = R_0 \sum_n \frac{m_n}{1 + (j\omega\tau_n)^{c_n}}. \quad (\text{B.6})$$

Für den Sonderfall, dass elektrische Kondensatoren verwendet werden, ist

$$Z_n = \frac{1}{j\omega C_n} \quad (\text{B.7})$$

und somit

$$(j\omega\tau_n)^{c_n} = j\omega C_n R_n . \quad (\text{B.8})$$

Dies liefert schließlich

$$\begin{aligned} \tau_n &= R_n C_n \\ c_n &= 1 \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Anhang C: Symbole und Abkürzungen

A	Querschnittsfläche
A	Inzidenzmatrix
A_e	Element-Inzidenzmatrix
c	Formexponenten, Symbol des Cole-Cole-Modells
CPE	Abkürzung für Constant Phase Element
C	elektrische Kapazität
CC	Abkürzung für Cole-Cole-Modell
DAQ	Abkürzung für Data-Acquisition
DC	Abkürzung für Direct Current, Gleichstrom
D	Verschiebungsstromdichte (komplexe Amplitude)
D	Übertragungsfaktor der Spannungsteiler
D	Durchmesser
E	elektrische Feldstärke
E	Einheitsmatrix
f	Frequenz
$\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho})$	Residuenvektor
F	Formationsfaktor
$F\{u\}$	Fouriertransformierte von u
G	elektrischer Leitwert
G	Verstärkung
h	Abstand
H	Basisfunktionen
I	elektrischer Strom
I	Vektor der Knotenströme
I_e	Vektor der Element-Knotenströme
I_{ze}	Vektor der Zweigströme

$Im\{\}$	Imaginärteil
J	elektrische Stromdichte
J	Jacobi-Matrix
JFET	Sperrschicht-Feldeffekttransistor
K_e	Elementmatrix
k_{ze}	Elementvektor der Zweige
l	Abstand, Länge
$l(\rho)$	Regularisierungsfunktion
L	Induktivität
L	Regularisierungsmatrix
m	Aufladbarkeit, Symbol des Cole-Cole-Modells
N_i	Anzahl der Stromelektroden
N_u	Anzahl der Spannungselektroden
M	Gegeninduktivität
OP	Operationsverstärker
P	Geometrie-Matrix
r	Ortsvektor
r	Radius
r	Residuenvektor
$Re\{\}$	Realteil
S_N	Anzahl der unabhängigen Messdaten
R	elektrischer Widerstand
t	Zeit
T	Periodendauer
U	elektrische Spannung
U	Vektor der Knotenspannungen
U_e	Vektor der Element-Knotenspannungen

\mathbf{I}_{ze}	Vektor der Element-Zweigspannungen
w	Wichtungsfunktion
\mathbf{W}	Datenwichtungsmatrix
x	Koordinate
y	Koordinate
Y	elektrische Admittanz
\mathbf{Y}	Admittanzmatrix des Systems
\mathbf{Y}_a	Admittanzmatrix der Eingangsimpedanzen
\mathbf{Y}_e	Admittanzmatrizen des Elementes
\mathbf{Y}_z	Admittanzmatrizen der Zweigdarstellung
\mathbf{Y}_{ze}	Admittanzmatrizen des Elementes der Zweigdarstellung
z	Koordinate
Z	elektrische Impedanz, Transferimpedanz
Z_{CPE}	elektrische Impedanz des Constant Phase Elementes
Γ_e	Oberfläche des Elementes
δ	Delta-Distribution
$\nabla \mathbf{H}$	Operator der angewendet auf U die Feldstärke bestimmt
ε	Permittivität, komplexe dielektrische Leitfähigkeit
ε_{el}	Permittivitätszahl des Porenraumes
ε_s	Permittivität des Festmaterials
ε_w	Permittivität der Elektrolytlösung
ε_1	Maß für die Fehlanpassung der Daten
ε_2	Maß für die Fehlanpassung des Regularisierungsterms
λ	Regularisierungsfaktor
μ	magnetische Permeabilität
ρ	komplexer spezifischer Widerstand

ρ_0	Start-Verteilung des komplexen spezifischen Widerstandes
σ	elektrische Leitfähigkeit
σ'	Realteil der elektrischen Leitfähigkeit
σ''	Imaginärteil der elektrischen Leitfähigkeit
σ_e	elektrische Leitfähigkeit des Elementes
σ_{el}	elektrische Leitfähigkeit des Porenraumes
$\underline{\sigma}_{int}$	elektrische Leitfähigkeit der Grenzfläche
σ_w	elektrische Leitfähigkeit der Elektrolytlösung
τ	Relaxationszeit, Symbol des Cole-Cole-Modells
φ	Phase
φ	elektrisches Potential
Φ	Porosität des Gesteins
ω	Kreisfrequenz
Ω	Volumen des Mediums
Ω_e	Volumen des Elementes

Danksagung

Vielen Dank an alle, die mich bei der Anfertigung der Arbeit wissenschaftlich, technisch, mental oder in einer anderen Form unterstützt haben. Ohne die Unterstützung wäre die Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Andreas Kemna für die Betreuung, Förderung und die Durchsicht der Arbeit, für die vielen wertvollen Gespräche und für die mit der Übernahme des Referates verbundenen Mühen. Die vielen Diskussionen haben mich für das interessante Gebiet der Impedanzspektroskopie und -tomographie begeistert.

Herrn Prof. Dr. Karl Ziemons danke ich für die Möglichkeit in seinem Institut die Arbeit anfertigen zu können. Die technische Laborausstattung war eine wesentliche Voraussetzung.

Herrn Prof. Dr. Harry Vereecken danke ich für das Interesse an meiner Arbeit, für die Bereitschaft die Arbeit zu begutachten und vor allem dafür, die in der Arbeit beschriebenen Messsysteme für die wissenschaftlich interessanten Anwendungen in seinem Institut bauen zu dürfen.

Herrn Prof. Dr. Jan van der Kruk und Herrn Prof. Dr. Clemens Simmer danke ich für die Bereitschaft die Arbeit zu begutachten.

Meine Kollegen und Freunde vom ZEL, insbesondere Herrn Joachim Berwix, Herrn Walter Glaas, Herrn Heinrich Meier und Herrn Bernd Wolters danke ich für die stete Hilfsbereitschaft, die technische Unterstützung und die motivierenden Gespräche die wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat.

Meinen Kollegen und Freunden vom ICG-4, insbesondere Herrn Dr. Sander Huisman, Frau Odilia Esser, Frau Katrin Breede und Herrn Dr. Franz-Hubert Hägel danke ich für die anwendungsbezogenen Diskussionen und die konstruktiven Kritiken die geholfen haben die Schwachstellen der Messsysteme zu erkennen und zu beheben.

Besonders herzlich Danke ich meiner Frau Bettina und meinen Kindern, Markus und Christoph, ohne Ihre Unterstützung und Rücksicht wäre diese Arbeit nie zu diesem Ergebnis gekommen.