Kippmoduln über deriviert speziell biseriellen Algebren

Dissertation

zur
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Daniel Rohleder
aus
Bonn

Bonn 2011

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Jan Schröer
2. Gutachter: PD Dr. Igor Burban

Tag der Promotion: 20.04.2012

Erscheinungsjahr: 2012

Zusammenfassung

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra K. Ein (klassischer) partieller Kippmodul über A ist ein endlich-dimensionaler A-Modul T der projektiven Dimension ≤ 1, der keine Selbsterweiterungen besitzt. Ein partieller Kippmodul T heißt (klassischer) Kippmodul, falls die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer direkter Summanden von T gleich der Anzahl der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln ist.
Wir definieren den Köcher der Kippmoduln $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ über A wie folgt. Die Punkte von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ seien die Isomorphieklassen basischer Kippmoduln über A. Seien T, T' Kippmoduln über A. Dann gibt es einen Pfeil von der Isomorphieklasse von T in die Isomorphieklasse von T' in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ genau dann, wenn es eine Austauschfolge von T nach T' gibt. Für einen partiellen Kippmodul M sei $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ der volle Unterköcher von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ aller Kippmoduln T mit $M \in \mathrm{add}(T)$.

Resultat A. Wir nennen eine endlich-dimensionale K-Algebra A deriviert speziell biseriell, falls die repetitive Algebra $\hat{A}$ von A speziell biseriell ist. Die Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren ist eine Unterklasse der Fadenalgebren. Sei nun A deriviert speziell biseriell, sei M ein treuer partieller Kippmodul über A. Wir zeigen:

$$\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M) \text{ ist zusammenhängend.}$$

Resultat B. Zu einer endlich-dimensionalen Algebra A betrachten wir die duplizierte Algebra

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathrm{D}({}_AA) & A \end{pmatrix}$$

mit $\mathrm{D}(A) = \mathrm{Hom}_K({}_AA, K)$. Sei nun $A = KQ/I$ eine deriviert speziell biserielle Algebra, so dass Q keine orientierten Kreise hat. Sei M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul über $\bar{A}$. Dann ist $\bar{A}$ speziell biseriell und es gilt:

$$\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(M) \text{ ist zusammenhängend.}$$

Resultat C. Sei $B = KQ'/I'$ eine endlich-dimensionale Algebra über K. Zu einer endlichen Folge

$$\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in Q_0^r$$

konstruieren wir Moduln $V_1, \ldots, V_r \in \mathrm{mod}(B)$. Sei

$$V_{\mathbf{i}} = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i.$$

Wir setzen $A = \mathrm{End}_B(V_{\mathbf{i}})^{\mathrm{op}}$. Dann ist A stark quasi-erblich. Wir betrachten die volle Unterkategorie $\mathcal{F}(\Delta)$ von $\mathrm{mod}(A)$ aller A-Moduln, die eine Δ-Filtration besitzen. Sei $T_{\min} \in \mathrm{mod}(A)$ der kanonische Kippmodul. Dann gibt es einen gerichteten Weg von ${}_AA$ nach $T_{\min}$ in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$, so dass alle Kippmoduln, die auf diesem Weg liegen, schon in $\mathcal{F}(\Delta)$ sind.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1.1. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Wir betrachten die Kategorie $\mathrm{mod}(A)$ der endlich-dimensionalen A-Linksmoduln. Sei n die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln. Für einen A-Modul M sei $\delta(M)$ die Anzahl der Isomorphieklassen unzerlegbarer direkter Summanden von M. Wir nennen M *basisch*, falls in einer direkten Summenzerlegung von M in unzerlegbare Summanden die vorkommenden unzerlegbaren direkten Summanden paarweise nicht isomorph sind. Wir nennen eine Algebra A *basisch*, falls der A-Modul ${}_AA$ basisch ist. Mit $\mathrm{pd}_A(M)$ bezeichnen wir die projektive Dimension eines A-Moduls M. Sei $\mathrm{Gen}(M)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller von M erzeugten Moduln, sei $\mathrm{Cogen}(M)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller von M koerzeugten Moduln. Wir nennen M *treu*, falls ${}_AA \in \mathrm{Cogen}(M)$.

Definition 1.1. Ein A-Modul M heißt *(klassischer) partieller Kippmodul*, falls $\mathrm{pd}_A(M) \leq 1$ und M keine Selbsterweiterungen besitzt. Ein partieller Kippmodul T heißt *(klassischer) Kippmodul*, falls $\delta(T) = n$.

Für einen Kippmodul $T \in \mathrm{mod}(A)$ sei

$$T^{\perp} = \{X \in \mathrm{mod}(A) \,|\, \mathrm{Ext}^1_A(T, X) = 0\}.$$

Seien T, T' Kippmoduln über A. Wir setzen $T \preceq T'$, falls $T^{\perp} \subset T'^{\perp}$. Dann definiert $\preceq$ eine Halbordnung auf den Isomorphieklassen basischer Kippmoduln über A (siehe [39, 2.2, Remark (b)], auch [28, Einleitung]).

Wir nennen einen partiellen Kippmodul M *fast vollständig*, falls $\delta(M) = n-1$. Sei nun M ein fast vollständiger Kippmodul über A. Wir nennen einen unzerlegbaren A-Modul X ein *Komplement* zu M, falls $M \oplus X$ ein Kippmodul ist. In [21] zeigt Happel folgendes

Lemma 1.2. *Sei M ein fast vollständiger Kippmodul über A.*

(a) *Falls M nicht treu ist, so gibt es bis auf Isomorphie ein eindeutiges Komplement X zu M.*
(b) *Falls M treu ist, so gibt es bis auf Isomorphie genau zwei Komplemente X, Y zu M. Es gilt ohne Beschränkung der Allgemeinheit, dass $X \notin \mathrm{Gen}(M), Y \in \mathrm{Gen}(M)$. In diesem Fall gibt es eine nicht zerfallende kurze exakte Folge*

$$0 \to X \to \tilde{M} \to Y \to 0$$

mit $\tilde{M} \in \mathrm{add}(M)$. Wir nennen diese Folge eine Austauschfolge von $M \oplus X$ nach $M \oplus Y$.

Wir können nun den *Köcher der Kippmoduln* $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ über A definieren. Der Köcher der Kippmoduln wird das Hauptobjekt unserer Untersuchungen sein. Die Punkte von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ sind die Isomorphieklassen basischer Kippmoduln über A. Es gibt einen Pfeil von der Isomorphieklasse von T in die Isomorphieklasse von T' in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$, falls es eine Austauschfolge von T nach T' gibt. In diesem Fall sprechen wir auch von einer *Mutation zwischen T und T'*. Happel und Unger zeigten folgenden Zusammenhang zwischen $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ und $\preceq$ (siehe [28, Theorem 2.1]):

Satz 1.3. *Der Köcher $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ ist das Hasse-Diagramm von $\preceq$.*

Für einen partiellen Kippmodul M betrachten wir den vollen Unterköcher $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ aller Kippmoduln T mit $M \in \mathrm{add}(T)$. Es ist im allgemeinen nicht wahr, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ ein zusammenhängender Köcher ist. Es gibt jedoch folgende

Vermutung 1.4 (Happel-Schröer)**.** *Falls M ein treuer partieller Kippmodul ist, so ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Die Vermutung wurde bisher nur für erbliche und darstellungsendliche Algebren bewiesen. Wir zeigen folgenden

Satz 1.5. *Sei A eine deriviert speziell biserielle Algebra über K, sei M ein treuer partieller Kippmodul über A. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Dieser Satz ist das Hauptresultat dieser Arbeit.

1.2. Wir nennen zwei Algebren A, B *Morita-äquivalent*, wenn ihre Modulkategorien äquivalent sind. In jeder Morita-Äquivalenzklasse von Algebren gibt es einen Repräsentanten, der basisch ist. Da Vermutung 1.4 nur von der Modulkategorie einer Algebra abhängt, können wir uns auf basische Algebren zurückziehen.

Eine spezielle Klasse von Algebren sind Wegealgebren über Köchern. Ein *Köcher* Q ist ein 4-Tupel (Q_0, Q_1, s, t), wobei Q_0, Q_1 Mengen sind und $s, t : Q_1 \to Q_0$ Abbildungen. Die Elemente von Q_0 heißen *Punkte*, die Elemente von Q_1 heißen *Pfeile*. Ein *Weg* in Q ist eine endliche Folge $a_1 \dots a_r$ von Pfeilen mit $s(a_i) = t(a_{i+1})$ für alle $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Zusätzlich ordnen wir jedem Punkt $i \in Q_0$ einen *trivialen Weg* zu. Die *Wegealgebra* KQ von Q über K besitze als Vektorraum die Wege in Q als Basis. Multiplikation von zwei Wegen p, q entspricht der Hintereinanderschaltung pq der Wege, falls möglich. Diese Multiplikation wird linear auf beliebige Elemente von KQ erweitert. Für jede basische Algebra A gibt es einen Köcher Q und ein zulässiges Ideal $I \subset KQ$, so dass $A \cong KQ/I$. Solange wir uns also nur für Morita-Äquivalenzklassen von Algebren interessieren, können wir uns auf Wegealgebren modulo einem zulässigen Ideal zurückziehen. Jedem Paar (Q, I) können wir die Kategorie $\mathrm{rep}_K(Q, I)$ der *Darstellungen* von (Q, I) zuordnen. Es gilt dann $\mathrm{mod}(KQ/I) \simeq \mathrm{rep}_K(Q, I)$.

Derivierte Kategorien wurden von Grothendieck und Verdier in den 1960er Jahren eingeführt. Sei $\mathcal{C}$ eine abelsche Kategorie. Wir definieren die *beschränkte derivierte Kategorie* $D^b(\mathcal{C})$ von $\mathcal{C}$ folgendermaßen. Die Objekte von $D^b(\mathcal{C})$ sind die beschränkten Kettenkomplexe über $\mathcal{C}$. Um die Morphismen in $D^b(\mathcal{C})$ zu erhalten, gehen wir zunächst zur Homotopiekategorie $K^b(\mathcal{C})$ über und lokalisieren dann an der Menge der Quasi-Isomorphismen. Die derivierte Kategorie $D^b(\mathcal{C})$ ist trianguliert. Wir nennen zwei Algebren A, B zueinander *deriviert äquivalent*, falls es eine Äquivalenz triangulierter Kategorien $D^b(\mathrm{mod}(A)) \simeq D^b(\mathrm{mod}(B))$ gibt. Im allgemeinen ist es nicht leicht zu sehen, ob zwei Algebren zueinander deriviert äquivalent sind.

Kippmoduln wurden Anfang der 1980er Jahre von Brenner und Butler eingeführt (siehe [10]). Eine Verallgemeinerung der Definition von Kippmoduln wurde 1986 von Miyashita ([35]) gegeben. Falls T ein (klassischer oder verallgemeinerter) Kippmodul über A ist, so sind die Algebren A und $\mathrm{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$ zueinander deriviert äquivalent. Für eine endlich-dimensionale Algebra A sei $(\mathcal{T}_\mathrm{A})_0$ die Menge aller Isomorphieklassen basischer Kippmoduln über A. Laut [50] merkte Ringel auf einer Konferenz in Antwerpen im Jahr 1987 an, dass $(\mathcal{T}_\mathrm{A})_0$ die Struktur eines simplizialen Komplexes trägt. Er schlug vor, die kombinatorischen Eigenschaften von $(\mathcal{T}_\mathrm{A})_0$ genauer zu studieren. Der erste Artikel, der sich weiter mit dieser Frage beschäftigt, kommt von Riedtmann und Schofield ([39]). Dort wurden erstmals die Halbordnung $\preceq$ und der Köcher der Kippmoduln $\mathcal{T}_\mathrm{A}$ betrachtet.

1.3. Wir nennen eine endlich-dimensionale Algebra A *Fadenalgebra*, falls es einen Köcher Q und ein zulässiges Ideal $I \subset KQ$ gibt, so dass $A \cong KQ/I$ und Q und I bestimmten kombinatorischen Bedingungen genügen (so wird I z.B. von Wegen in KQ erzeugt). Fadenalgebren wurden von Butler und Ringel sowie von Wald und Waschbüsch eingeführt. Fadenalgebren sind im allgemeinen weder darstellungsendlich noch homologisch beschränkt. Jedoch gibt es eine Klassifikation der unzerlegbaren Moduln über einer Fadenalgebra (siehe [12, 53]). Jeder unzerlegbare Modul über einer Fadenalgebra ist entweder ein Fadenmodul oder ein Bandmodul. Insbesondere sind Fadenalgebren zahm. Die Klasse der Fadenalgebren ist eine häufig verwendete Testklasse für allgemeine Vermutungen über Algebren.

Eine Algebra A heißt *speziell biseriell*, falls es einen Köcher Q und ein zulässiges Ideal $I \subset KQ$ gibt, so dass $A \cong KQ/I$ und Q und I bestimmten Bedingungen genügen (so starten und enden z.B. in jedem Punkt von Q höchstens zwei Pfeile). Die *repetitive Algebra* $\hat{A}$ einer Algebra A ist die unendliche Matrixalgebra mit Einträgen A auf der Diagonalen und $\mathrm{D}({}_AA)$ auf der Subdiagonalen und der Konvention

$$\mathrm{D}({}_AA) \cdot \mathrm{D}({}_AA) = 0.$$

Nach Happel ([23]) gibt es eine volltreue Einbettung triangulierter Kategorien

$$D^b(A) \hookrightarrow \underline{\mathrm{mod}}(\hat{A}),$$

die eine Äquivalenz ist, falls A endliche globale Dimension besitzt. Dies motiviert folgende Definition. Wir nennen eine Algebra A *deriviert speziell biseriell*, falls die repetitive Algebra $\hat{A}$ speziell biseriell ist. Ringel zeigt in [44], dass die Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren eine Unterklasse der Fadenalgebren ist (siehe auch [47]).

So ist zum Beispiel folgende Algebra deriviert speziell biseriell. Sei Q der folgende Köcher

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, shift left, "c"] \arrow[r, shift right, "d"'] & 3 \end{tikzcd}$$

und sei $I = \langle da, cb \rangle$. Dann ist KQ/I deriviert speziell biseriell.

Nach [46] ist die Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren abgeschlossen unter Kippen und nach [48] ist sie abgeschlossen unter derivierter Äquivalenz. Dies macht sie zu einer hervorragenden Testklasse für unsere Vermutung. In der Tat können wir folgendes zeigen:

Satz. *Sei A eine deriviert speziell biserielle Algebra über K, sei M ein treuer partieller klassischer Kippmodul. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

1.4. Duplizierte Algebren wurden in [2] eingeführt, um Cluster-Algebren besser studieren zu können. Zu einer Algebra A sei die duplizierte Algebra $\bar{A}$ die Matrixalgebra

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathrm{D}({}_A A) & A \end{pmatrix}.$$

Sei nun A eine deriviert speziell biserielle Algebra. Dann gibt es einen Köcher $\bar{Q}$ sowie ein zulässiges Ideal $\bar{I} \subset K\bar{Q}$, so dass $\bar{A} = K\bar{Q}/\bar{I}$. Darüber hinaus können wir $\bar{Q}$ und $\bar{I}$ explizit beschreiben.

Beispiel 1.6. *Wir betrachten die Beispielalgebra A aus Abschnitt 1.3. Sei $\bar{Q}$ folgender Köcher*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, shift left, "c"] \arrow[r, shift right, "d"'] & 3 \arrow[d, shift right, "q"'] \arrow[d, shift left, "p"] & & \\
 & & 1' \arrow[r, shift left, "a'"] \arrow[r, shift right, "b'"'] & 2' \arrow[r, shift left, "c'"] \arrow[r, shift right, "d'"'] & 3
\end{tikzcd}$$

und sei $\bar{I} = \langle da, cb, d'a', c'b', pd, qc, a'q, b'p, b'qdb, db'qd, a'pca, c'a'pc, pca-qdb, a'pc-b'qd, c'a'p-d'b'q\rangle$. Dann ist $\bar{A} = K\bar{Q}/\bar{I}$.

Nach [47] ist $\bar{A}$ speziell biseriell. Falls $|Q_0| = n$, so gilt $|\bar{Q}_0| = 2n$ und es gibt genau n Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiv-injektiver $\bar{A}$-Moduln. Seien $I_1, \dots, I_n$ Repräsentanten dieser Klassen und sei $\mathcal{I} = I_1 \oplus \cdots \oplus I_n$. Dann ist $\mathcal{I}$ treu und $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}} = \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathcal{I})$. Es gilt folgender

Satz 1.7. *Sei $A = KQ/I$ deriviert speziell biseriell, so dass Q keine orientierten Kreise enthält. Dann ist $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}} = \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathcal{I})$ zusammenhängend.*

Somit haben wir einen weiteren Spezialfall der Vermutung 1.4 bewiesen.

1.5. Für eine Algebra $A = KQ/I$ seien $S_1, \dots, S_n$ Repräsentanten der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln, seien $P_1, \dots, P_n$ die projektiven Decken von $S_1 \dots, S_n$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei Δ_i der größte Faktormodul von P_i, der keine Kompositionsfaktoren S_j für $j > i$ besitzt. Sei $\mathcal{F}(\Delta)$ die volle Unterkategorie aller A-Moduln, die eine Filtrierung in den Δ_i besitzen. Dann nennen wir A *quasi-erblich*, falls ${}_A A \in \mathcal{F}(\Delta)$ und falls für alle $i \in \{1, \dots n\}$ gilt, dass $\mathrm{End}_A(\Delta_i) = K$. Wir nennen A *stark quasi-erblich*, falls für jedes $k \in \{1, \dots, n\}$ ein $D_k \in \mathrm{mod}(A)$ sowie eine kurze exakte Folge

$$0 \to R_k \to P_k \to D_k \to 0$$

existiert mit $R_k \in \mathrm{add}(P_{k+1} \oplus \cdots \oplus P_n)$ und $\mathrm{Hom}_A(P_j, D_k) = 0$ für $j > k$. Quasi-erbliche Algebren wurden erstmals in [13] eingeführt, stark quasi-erbliche Algebren in [40]. Eine stark quasi-erbliche Algebra ist quasi-erblich mit $\Delta_k = D_k$. Die Begriffe quasi-erblich und stark quasi-erblich hängen von der Wahl einer Ordnung der einfachen Moduln ab. Falls A stark quasi-erblich ist und $M \in \mathcal{F}(\Delta)$, so gilt $\mathrm{pd}_A(M) \leq 1$.

Zu einer quasi-erblichen Algebra A existiert ein sogenannter *kanonischer (verallgemeinerter) Kippmodul* $T_{\min}$, der minimal in $\mathcal{F}(\Delta)$ bezüglich $\preceq$ ist.

In [17] und [18] haben Geiß, Leclerc und Schröer im Zusammenhang mit der Kategorifizierung von Cluster-Algebren folgende Konstruktion durchgeführt. Sei $\Lambda = \Lambda_Q$ die präprojektive Algebra zu einem Köcher Q, sei $W = W_Q$ die Weyl-Gruppe von Q. Sei $w \in W$. Dann gibt es (siehe auch [11]) eine zu w assoziierte Unterkategorie $\mathcal{C}_w$ von $\mathrm{nil}(\Lambda)$, so dass $\mathcal{C}_w$ eine Frobeniuskategorie ist und $\underline{\mathcal{C}}_w$ eine 2-Calabi-Yau Kategorie. Darüber hinaus gibt es zu jedem reduzierten Ausdruck $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r)$ einen maximal rigiden Λ-Modul $V_{\mathbf{i}}$. Sei $A = \mathrm{End}_\Lambda(V_{\mathbf{i}})^{\mathrm{op}}$. Dann ist die Algebra A stark quasi-erblich und $\mathcal{C}_w$ ist äquivalent zu $\mathcal{F}(\Delta) \subset \mathrm{mod}(A)$. Die Mutation von maximal rigiden Λ-Moduln entspricht der Mutation von Kippmoduln über A, die in $\mathcal{F}(\Delta)$ liegen. Darüber hinaus wird gezeigt, dass es einen Pfad zwischen ${}_AA$ und dem kanonischen Kippmodul $T_{\min}$ gibt, der ganz in $\mathcal{F}(\Delta)$ liegt. Dieses Ergebnis wollen wir verallgemeinern.

Sei dazu nun $B = KQ'/I'$ eine endlich-dimensionale Algebra über K, sei $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r$. Analog zu [17] definieren wir uns Moduln $V_1, \dots, V_r$ und setzen $V_{\mathbf{i}} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$.

Satz 1.8. $A = \mathrm{End}_B(V_{\mathbf{i}})^{\mathrm{op}}$ *ist stark quasi-erblich.*

Sei $T_{\min}$ der kanonische Kippmodul. Sei $\mathcal{T}_{\mathcal{F}(\Delta)}$ der volle Unterköcher von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ aller Kippmoduln, die in $\mathcal{F}(\Delta)$ liegen. Dann gilt folgender

Satz 1.9. *Es gibt einen Weg von* ${}_AA$ *nach* $T_{\min}$ *in* $\mathcal{T}_{\mathcal{F}(\Delta)}$.

Somit haben wir das Resultat von Geiß, Leclerc und Schröer verallgemeinert. Es gibt folgende

Vermutung 1.10. $\mathcal{T}_{\mathcal{F}(\Delta)}$ *ist zusammenhängend.*

Satz 1.9 ist ein erster Schritt zum Beweis dieser Vermutung.

1.6. Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Teil 1 gibt eine kurze Einführung in die Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren. Die wichtigsten Sätze und Definitionen zu endlich-dimensionalen Algebren werden in Abschnitt 2 gegeben. Abschnitt 3 beschäftigt sich mit Köchern und ihren Darstellungen, Abschnitt 4 stellt die Auslander-Reiten Theorie vor und in Abschnitt 5 geben wir einen kurzen Überblick über derivierte Kategorien.

Teil 2 stellt die wichtigsten Definitionen und Resultate der Kipptheorie bereit. Nach einer kurzen Einführung in Rechts- und Linksapproximationen in Abschnitt 6 werden klassische und verallgemeinerte Kippmoduln in den Abschnitten 7 und 8 diskutiert. Die wichtigsten Resultate sowie Unterschiede zwischen klassischen und verallgemeinerten Kippmoduln werden besprochen. Schließlich stellen wir in Abschnitt 9 das Hauptobjekt unserer Untersuchungen vor, den Köcher der Kippmoduln. Darüber hinaus diskutieren wir die Halbordnung auf Kippmoduln. Die Hauptvermutung wird vorgestellt und schon bewiesene Fälle dieser Vermutung werden erwähnt.

In Abschnitt 10 wird die Hauptvermutung auf den projektiven Fall zurückgeführt, was einen ersten Beweisschritt in Richtung von Satz 1.5 darstellt.

In Teil 3 wird Satz 1.5 formuliert und bewiesen. In den Abschnitten 11 und 12 werden Fadenalgebren und Fadenmoduln sowie deren Kombinatorik besprochen. In Abschnitt 13 werden repetitive Algebren eingeführt und Abschnitt 14 beschäftigt sich mit der Definition von deriviert speziell biseriellen Algebren. In Abschnitt 15 betrachten wir Austauschfolgen über diesen Algebren. Die Abschnitte 16-20 markieren den Beweis von Satz 1.5. Teil 3 schließt mit einigen Beispielen in Abschnitt 21.

Teil 4 beschäftigt sich mit dem Beweis von Satz 1.7. Die wichtigsten Definitionen zu duplizierten Algebren werden in Abschnitt 22 gegeben. Die Formulierung von Satz 1.7 findet in Abschnitt 23 statt. Abschnitte 24 und 25 dienen dem Beweis von Satz 1.7. Schließlich beenden wir Teil 4 mit einigen Beispielen in Abschnitt 26.

Unser letztes Resultat Satz 1.9 wird in Teil 5 bewiesen. Die Moduln V_i werden in Abschnitt 27 konstruiert, quasi-erbliche und stark quasi-erbliche Algebren werden in Abschnitt 28 besprochen. Abschnitt 29 beschäftigt sich mit der Konstruktion des kanonischen Kippmoduls. Der Beweis von Satz 1.9 findet sich schließlich in Abschnitt 30.

1.7. Danksagung. Mein aufrichtiger und herzlicher Dank geht an meinem Betreuer Prof. Dr. Jan Schröer für die Bereitstellung des Dissertationsthemas sowie für seine vielfältige Unterstützung beim Anfertigen dieser Dissertation. Des weiteren geht mein besonderer Dank an Matthias Warkentin für zahlreiche mathematische Diskussionen und Verbesserungsvorschläge. Außerdem danke ich der Bonn International Graduate School (BIGS) sowie dem Sonderforschungsbereich / Transregio 45 (SFB/TR 45) für finanzielle Unterstützung.

Teil 1. Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren

In diesem Abschnitt werden wir die grundlegenden Definitionen und Sätze der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren vorstellen. Für unerklärte Begriffe und Notationen verweisen wir auf die Standardwerke der Darstellungstheorie wie [6, 3, 41].

2. Endlich-dimensionale Algebren

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Definition 2.1. Eine *K-Algebra* ist ein K-Vektorraum A zusammen mit einer Abbildung $\cdot : A \times A \to A$, so dass folgende Regeln gelten:

(1) Für alle $a, b, c \in A$ ist
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

(2) Für alle $a, b, c \in A$ ist
$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,$$
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

(3) Für alle $a, b \in A, \lambda \in K$ ist
$$\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b).$$

(4) Es gibt ein Element $1 \in A$, so dass für alle $a \in A$ gilt
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$

Eine K-Algebra A heißt *endlich-dimensional*, falls A endlich-dimensional als K-Vektorraum ist.

Im folgenden schreiben wir auch ab für $a \cdot b$.

Bemerkung 2.2. Manchmal werden wir auch von Algebren sprechen, wenn die Bedingung (4) nicht erfüllt ist.

In der Darstellungstheorie endlich-dimensionaler Algebren interessieren wir uns für die Kategorie der Moduln $\mathrm{Mod}(A)$ über einer endlich-dimensionalen Algebra A (bzw. für die Kategorie $\mathrm{mod}(A)$ der endlich-dimensionalen Moduln über einer endlich-dimensionalen Algebra A). Sei im folgenden immer A eine endlich-dimensionale K-Algebra.

Definition 2.3. Ein *A-Linksmodul* ist ein K-Vektorraum M zusammen mit einer Abbildung $\cdot : A \times M \to M$, so dass folgendes gilt:

(1) Für alle $a, b \in A, m \in M$ ist
$$(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m).$$

(2) Für alle $m \in M$ ist
$$1 \cdot m = m.$$

(3) Für alle $a, b \in A, m \in M$ ist
$$(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m.$$

(4) Für alle $a \in A, m, n \in M$ ist

$$a \cdot (m + n) = a \cdot m + a \cdot n.$$

(5) Für alle $a \in A, m \in M, \lambda \in K$ ist

$$(\lambda a) \cdot m = \lambda(a \cdot m) = a \cdot (\lambda m).$$

Wir nennen M einen endlich-dimensionalen A-Linksmodul, falls M als K-Vektorraum endlich-dimensional ist.

Analog kann man A-Rechtsmoduln definieren. Wenn wir von einem A-Modul sprechen, ist immer ein A-Linksmodul gemeint.

Im folgenden schreiben wir auch am für $a \cdot m$. Die Algebra A ist auf natürliche Weise ein Linksmodul (beziehungsweise Rechtsmodul) über sich selbst. Wenn wir die Algebra A als Linksmodul (Rechtsmodul) betrachten wollen, so schreiben wir auch ${}_AA$ (beziehungsweise A_A).

Definition 2.4. Seien M, N A-Moduln. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *Morphismus von A-Moduln*, falls gilt:

(1) Für alle $m, m' \in M$ ist

$$f(m + m') = f(m) + f(m').$$

(2) Für alle $a \in A, m \in M$ ist

$$f(am) = af(m).$$

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Mod}(A)$ die Kategorie aller A-Linksmoduln zusammen mit ihren Morphismen und mit $\mathrm{mod}(A)$ die Kategorie aller endlich-dimensionalen A-Linksmoduln mit ihren Morphismen. Ein Hauptaugenmerk der Darstellungstheorie liegt darauf, diese Kategorien zu studieren.

Bemerkung 2.5. Die Kategorien $\mathrm{Mod}(A)$ und $\mathrm{mod}(A)$ sind abelsche Kategorien. Insbesondere existieren endliche direkte Summen sowie Kerne und Cokerne.

Seien $M, N \in \mathrm{Mod}(A)$ (beziehungsweise in $\mathrm{mod}(A)$). Wir bezeichnen mit $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ den K-Vektorraum aller Morphismen von M nach N. Des weiteren bezeichnen wir mit $\mathrm{End}_A(M)$ die Algebra aller Endomorphismen von M. Für eine Algebra A, sei A^{op} die *entgegengesetzte Algebra* mit dem gleichen zugrundeliegenden Vektorraum wie A und der Multiplikation

$$a \cdot_{A^{\mathrm{op}}} b = b \cdot_A a.$$

Definition 2.6. Ein A-Modul $S \ncong 0$ heißt *einfach*, falls 0 und S die einzigen Untermoduln von S sind.

Lemma 2.7 (Schurs Lemma)**.** *Seien $S, S' \in \mathrm{Mod}(A)$, sei $f : S \to S'$ ein nichttrivialer Morphismus.*

(a) *Falls S einfach ist, so ist f ein Monomorphismus.*
(b) *Falls S' einfach ist, so ist f ein Epimorphismus.*
(c) *Falls S, S' einfach sind, so ist f ein Isomorphismus.*
(d) *Falls S einfach ist, so existiert ein K-Algebren-Isomorphismus $K \cong \mathrm{End}_A(S)$.*

Beweis. Siehe [3, I.3.1, I.3.2], [49]. □

Definition 2.8. Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$. Sei

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$$

eine Kette von Untermoduln von M, so dass für alle $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt, dass M_{j+1}/M_j ein einfacher A-Modul ist. Dann nennen wir diese Kette *Kompositionsreihe von M*. Die vorkommenden einfachen Moduln M_{j+1}/M_j heißen *Kompositionsfaktoren von M*.

Bemerkung 2.9. Zu jedem $M \in \mathrm{mod}(A)$ existiert eine Kompositionsreihe.

Satz 2.10 (Satz von Jordan-Hölder)**.** *Sei A eine endlich-dimensionale K-Algebra, sei $M \in \mathrm{mod}(A)$, seien*

$$\begin{aligned} 0 = \quad & M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m & = M, \\ 0 = \quad & N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_n & = M \end{aligned}$$

Kompositionsreihen von M. Dann ist $m = n$ und es existiert eine Permutation $\pi \in S_n$, so dass für $j \in \{0, \ldots, m-1\}$ gilt, dass

$$M_{j+1}/M_j \cong N_{\pi(j+1)}/N_{\pi(j+1)-1}.$$

Beweis. Siehe [1, Theorem 11.3],[16, Theorem 1.5.1]. □

Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ und

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_m = M$$

eine Kompositionsreihe. Aus dem Satz von Jordan-Hölder folgt, dass m eindeutig bestimmt ist. Wir nennen m die *Länge von M* und schreiben $m = \mathrm{Länge}(M)$.

Definition 2.11. Wir nennen einen A-Modul $M \ncong 0$ *unzerlegbar*, falls aus $M \cong M_1 \oplus M_2$ folgt, dass entweder $M_1 \cong 0$ oder $M_2 \cong 0$.

Definition 2.12. Sei R ein Ring. Wir nennen R *lokal*, falls die nichtinvertierbaren Elemente von R ein beidseitiges Ideal bilden.

Lemma 2.13. *Sei A eine K-Algebra, sei $M \in \mathrm{Mod}(A)$.*

(a) *Falls $\mathrm{End}_A(M)$ lokal ist, so ist M unzerlegbar.*
(b) *Falls M unzerlegbar ist und $M \in \mathrm{mod}(A)$, so ist $\mathrm{End}_A(M)$ lokal.*

Beweis. Siehe [3, Lemma I.4.8]. □

Satz 2.14 (Satz von Krull-Remak-Schmidt)**.** *Sei A eine endlich-dimensionale K-Algebra.*

(a) *Jedes $M \in \mathrm{mod}(A)$ besitzt eine Zerlegung*

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i,$$

so dass für alle $j \in \{1, \ldots, m\}$ gilt, dass M_i unzerlegbar ist.

(b) *Falls es Zerlegungen*

$$M \cong \bigoplus_{i=1}^{m} M_i \cong \bigoplus_{j=1}^{n} N_j$$

gibt, mit M_i, N_j *unzerlegbar für alle* $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, *dann ist* $m = n$ *und es existiert eine Permutation* $\pi \in S_n$, *so dass* $M_i \cong N_{\pi(i)}$ *für alle* $i \in \{1, \dots, m\}$.

Beweis. Siehe [3, Satz I.4.10], auch [34, Fundamentalsatz §6], [37, Hauptsatz §2]. □

Satz 2.15 (Lemma von Harada und Sai)**.** *Sei* $b \in \mathbb{N}$, *seien* $M_1, \dots M_{2^b}$ *unzerlegbar in* $\operatorname{mod}(A)$. *Sei Länge*$(M_i) \leq b$ *für alle* $i \in \{1, \dots, 2^b\}$. *Sei für* $i \in \{1, \dots, 2^b - 1\}$

$$f_i : M_i \to M_{i+1}$$

ein Morphismus, der kein Isomorphismus ist. Dann ist

$$f_{2^b-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 = 0.$$

Beweis. Siehe [3, Lemma IV.5.2], auch [31]. □

Da wir uns hauptsächlich für die Modulkategorie einer Algebra interessieren, machen wir folgende

Definition 2.16. Seien A, B endlich-dimensionale K-Algebren. Wir sagen, dass A und B *Morita-äquivalent* sind, falls es eine Äquivalenz von K-Kategorien zwischen den Modulkategorien $\operatorname{mod}(A)$ und $\operatorname{mod}(B)$ gibt.

Definition 2.17. Sei $M \in \operatorname{mod} A$. Sei

$$M \cong {M_1}^{r_1} \oplus \cdots \oplus {M_s}^{r_s}$$

eine Zerlegung von M in unzerlegbare, direkte Summanden M_i, so dass $M_i \ncong M_j$ für $i \neq j$ und $r_i > 0$ für alle i. Wir setzen

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= s, \\ \delta(M) &= r_1 + \cdots + r_s. \end{aligned}$$

Falls $r_i = 1$ für alle $i \in \{1, \dots, s\}$, so nennen wir M *basisch*. Wir setzen

$$\operatorname{bas}(M) = M_1 \oplus \cdots \oplus M_s.$$

Für jedes $M \in \operatorname{mod}(A)$ ist $\operatorname{bas}(M)$ basisch. Der Modul $\operatorname{bas}(M)$ ist bis auf Isomorphie eindeutig durch M bestimmt.

Wir nennen die Algebra A *basisch*, falls der A-Modul ${}_AA$ basisch ist.

Lemma 2.18. *Sei* A *eine endlich-dimensionale* K*-Algebra. Dann gibt es eine basische endlich-dimensionale* K*-Algebra* A^{bas}, *so dass* A *und* A^{bas} *Morita-äquivalent sind.*

Beweis. Siehe [3, I.6.10]. □

Für viele Fragestellungen über $\operatorname{mod}(A)$ kann man also ohne Einschränkung annehmen, dass A basisch ist.

3. Köcher und ihre Darstellungen

Definition 3.1. Ein *Köcher* Q ist ein 4-Tupel $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$, wobei Q_0 und Q_1 Mengen sind und $s, t : Q_1 \to Q_0$ Abbildungen. Wir nennen die Elemente aus Q_0 *Ecken* oder *Punkte* und die Elemente aus Q_1 *Pfeile*.

Falls Q_0, Q_1 endliche Mengen sind, so nennen wir Q *endlich*. Für einen Pfeil $a \in Q_1$ sei $s(a)$ der *Startpunkt* von a, $t(a)$ der *Endpunkt* von a. Ein *Weg* ρ in Q ist eine endliche Folge $\alpha_1 \dots \alpha_r$ von Pfeilen mit $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$ für $i \in \{1, \dots, r-1\}$. Wir nennen r die Länge von ρ. Zusätzlich ordnen wir jedem Punkt $i \in Q_0$ einen *trivialen Weg* e_i der Länge 0 zu. Wir erweitern den Definitionsbereich der Abbildungen s und t auf Wege: Falls $\rho = \alpha_1 \dots \alpha_r$ ein Weg ist, so setzen wir $s(\rho) = s(\alpha_r)$ und $t(\rho) = t(\alpha_1)$. Für $i \in Q_0$ setzen wir $s(e_i) = t(e_i) = i$.

Definition 3.2. Sei Q ein Köcher. Wir definieren die *Wegealgebra* KQ folgendermaßen: Als K-Vektorraum habe KQ als Basis die Menge aller Wege in Q. Für zwei nichttriviale Wege $\rho_1 = \alpha_1, \dots \alpha_r, \rho_2 = \beta_1 \dots \beta_s$ definieren wir die Multiplikation

$$\rho_1\rho_2 = \begin{cases} \alpha_1 \dots \alpha_s \beta_1 \dots \beta_s & \text{falls } s(\alpha_s) = t(\beta_1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Falls $s(\rho) = i$, $t(\rho) = j$, so setzen wir für $k \in Q_0$

$$\rho e_k = \delta_{k,i}\rho,$$
$$e_k \rho = \delta_{k,j}\rho.$$

Wir erweitern die Multiplikation linear auf alle Elemente aus KQ.

Beispiel 3.3. *Wir betrachten folgende Köcher Q und S:*

$$Q: \quad 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4 \qquad\qquad S: \quad 1' \underset{b'}{\overset{a'}{\rightleftarrows}} 2'$$

Die Wege in Q sind

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, a, b, c, ba, cb, cba\},$$

die Wege in S sind

$$\{e_1, e_2, a', b', (a'b')^l, (a'b')^l a', (b'a')^l, (b'a')^l b'\}_{l \geq 1}.$$

Die Algebra KQ ist somit 10-dimensional, wohingegen die Algebra KS nicht endlich-dimensional ist.

Lemma 3.4. *Sei Q ein endlicher Köcher. Dann ist*

$$1 = \sum_{i \in Q_0} e_i$$

das Einselement in KQ.

Beweis. Siehe [3, Lemma II.1.4, Korollar II.1.5]. □

Bemerkung 3.5. Sei Q ein Köcher. Falls Q_0 nicht endlich ist, so besitzt die Wegealgebra KQ kein Einselement.

Lemma 3.6. *Sei Q ein endlicher Köcher. Die Wegealgebra KQ ist endlich-dimensional genau dann, wenn Q keine orientierten Kreise besitzt.*

Beweis. Siehe [3, Lemma II.1.4.(c)]. □

Definition 3.7. Sei Q ein endlicher Köcher. Sei das *Pfeilideal* $R_Q \subset KQ$ das beidseitige Ideal, welches von allen Elementen von Q_1 erzeugt wird. Wir nennen ein beidseitiges Ideal $I \subset KQ$ *zulässig*, falls es ein $n \geq 2$ gibt, so dass

$$R_Q^n \subseteq I \subseteq R_Q^2.$$

Bemerkung 3.8. Sei Q ein endlicher Köcher. Dann ist das Nullideal genau dann zulässig in KQ, wenn Q keine orientierten Kreise besitzt.

Definition 3.9. Sei Q ein Köcher. Seien $i, j \in Q_0$. Sei $m \geq 1$. Für $k \in \{1, \dots, m\}$ seien ρ_k Wege der Länge ≥ 2 mit $s(\rho_k) = i$, $t(\rho_k) = j$ und seien $\lambda_k \in K^\star$. Dann nennen wir ein Element $r \in KQ$ der Form

$$r = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k$$

Relation in Q. Falls $m = 1$, so nennen wir r *Nullrelation.* Falls $r = w_1 - w_2$ für Wege w_1, w_2, so nennen wir r *Kommutativitätsrelation.*

Lemma 3.10. *Sei Q ein endlicher Köcher und $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal. Dann gibt es eine endliche Menge von Relationen $\{r_1, \dots, r_m\}$, so dass $I = \langle r_1, \dots, r_m \rangle$.*

Beweis. Siehe [3, Korollar II.2.9]. □

Lemma 3.11. *Sei Q ein endlicher Köcher und $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal. Dann ist die Algebra KQ/I endlich-dimensional und basisch.*

Beweis. Siehe [3, Proposition II.2.6, Lemma II.2.10]. □

Satz 3.12. *Sei A eine endlich-dimensionale, basische K-Algebra. Dann existiert ein eindeutig bestimmter endlicher Köcher Q und ein zulässiges Ideal $I \subset KQ$, so dass*

$$A \cong KQ/I.$$

Wir nennen Q den Köcher von A.

Beweis. Siehe [3, Theorem II.3.7]. □

Definition 3.13. Sei Q ein endlicher Köcher. Eine *Darstellung* M von Q über K besteht aus folgenden Daten:

- Einem K-Vektorraum M_i für jeden Punkt $i \in Q_0$,
- einer K-linearen Abbildung $f_a : M_{s(a)} \to M_{t(a)}$ für jeden Pfeil $a \in Q_1$.

Wir nennen die Darstellung $M = (M_i, f_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ *endlich-dimensional*, falls M_i endlich-dimensional ist für alle $i \in Q_0$.

Definition 3.14. Sei Q ein endlicher Köcher. Seien $M = (M_i, f_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$, $N = (N_i, g_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ Darstellungen von Q. Ein *Morphismus $\varphi : M \to N$ von Darstellungen* ist eine Familie $(\varphi_i)_{i \in Q_0}$ von K-linearen Abbildungen, so dass für alle $a \in Q_1$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M_{s(a)} \arrow[r, "f_a"] \arrow[d, "\varphi_i"] & M_{t(a)} \arrow[d, "\varphi_j"] \\
N_{s(a)} \arrow[r, "g_a"] & N_{t(a)}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Seien L, M, N Darstellungen von Q und $\varphi : L \to M$, $\psi : M \to N$ Morphismen, wobei $\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0}$, $\psi = (\psi_i)_{i \in Q_0}$. Dann definieren wir die Komposition als die Familie $\psi \circ \varphi = (\psi_i \circ \varphi_i)_{i \in Q_0}$.

Sei $\mathrm{Rep}_K(Q)$ die Kategorie aller Darstellungen von Q über K, sei $\mathrm{rep}_K(Q)$ die volle Unterkategorie aller endlich-dimensionalen Darstellungen.

Lemma 3.15. *Die Kategorien* $\mathrm{Rep}_K(Q)$ *und* $\mathrm{rep}_K(Q)$ *sind abelsche* K*-Kategorien.*

Beweis. Siehe [3, Lemma III.1.3]. □

Beispiel 3.16. *Sei* Q *der Köcher*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3. \end{tikzcd}$$

Wir betrachten die Darstellung M*, die gegeben ist durch*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "(0)"] \arrow[r, shift right, "(0)"'] & K \arrow[r, "\binom{1}{0}"] & K^2 \end{tikzcd}$$

und die Darstellung M'*, die gegeben ist durch*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "\binom{1}{0}"] \arrow[r, shift right, "\binom{0}{1}"'] & K^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)"] & K^2. \end{tikzcd}$$

Dann haben wir einen Morphismus $\varphi : M \to M'$*, gegeben durch*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "(0)"] \arrow[r, shift right, "(0)"'] \arrow[d, "(0)"'] & K \arrow[r, "\binom{1}{0}"] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & K^2 \arrow[d, "\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)"] \\ K \arrow[r, shift left, "\binom{1}{0}"] \arrow[r, shift right, "\binom{0}{1}"'] & K^2 \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)"'] & K^2. \end{tikzcd}$$

Sei $M = (M_i, f_a)_{i \in Q_0, a \in Q_1}$ eine Darstellung von Q. Sei $\rho = a_1 \dots a_r$ ein Weg in Q der Länge $r \geq 1$. Sei $s(\rho) = i$, $t(\rho) = j$. Dann setzen wir

$$f_\rho = f_{a_1} \circ \cdots \circ f_{a_r} : M_i \to M_j.$$

Sei nun

$$r = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \rho_k$$

eine Relation in Q. Wir sagen, *die Darstellung* M *erfüllt die Relation* r, falls

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_{\rho_k} = 0.$$

Sei nun $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal, $I = \langle r_1, \dots r_m \rangle$, wobei die $r_1, \dots, r_m$ Relationen sind, und sei M eine Darstellung von Q. Dann nennen wir M eine Darstellung von (Q, I), falls M die Relationen $r_1, \dots, r_m$ erfüllt. Wir bezeichnen mit $\mathrm{Rep}_K(Q, I)$ (beziehungsweise $\mathrm{rep}_K(Q, I)$) die volle Unterkategorie von $\mathrm{Rep}_K(Q)$ (beziehungsweise $\mathrm{rep}_K(Q)$) aller Darstellungen von (Q, I). Es gilt folgender

Satz 3.17. *Sei Q ein endlicher Köcher, sei $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal, sei $A = KQ/I$. Dann gibt es eine K-lineare Äquivalenz von Kategorien*

$$F : \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Rep}_K(Q, I),$$

die sich einschränkt zu einer K-linearen Äquivalenz

$$F : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{rep}_K(Q, I).$$

Beweis. Siehe [3, Thm. III.1.6]. □

Wir fassen die Ergebnisse kurz zusammen. Für die von uns behandelten Fragestellungen über Modulkategorien $\mathrm{mod}(A)$ von endlich-dimensionalen K-Algebren A reicht es aus, sich auf die Klasse der basischen K-Algebren einzuschränken. Zu jeder basischen endlich-dimensionalen Algebra A können wir einen Köcher Q und ein zulässiges Ideal I finden, so dass $A \cong KQ/I$. Schließlich gilt in diesem Fall, dass $\mathrm{mod}(A) \simeq \mathrm{rep}_K(Q, I)$, so dass wir uns darauf beschränken können, die endlich-dimensionalen Darstellungen von (Q, I) zu untersuchen. Wir werden im folgenden oftmals nicht mehr zwischen der Kategorie $\mathrm{mod}(A)$ und der Kategorie $\mathrm{rep}_K(Q, I)$ unterscheiden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir eine kurze Beschreibung der einfachen, projektiven und injektiven Moduln über $A = KQ/I$ als Darstellungen von (Q, I).

Sei $i \in Q_0$. Wir ordnen i Moduln

$$\begin{aligned} S_i &= ((S_i)_j, f_a)_{j \in Q_0, a \in Q_1}, \\ P_i &= ((P_i)_j, g_a)_{j \in Q_0, a \in Q_1}, \\ I_i &= ((I_i)_j, h_a)_{j \in Q_0, a \in Q_1} \end{aligned}$$

wie folgt zu:

$$(S_i)_j = \begin{cases} K & \text{falls } i = j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir setzen $f_a = 0$ für alle $a \in Q_1$.

Sei $(P_i)_j$ der K-Vektorraum, der als Erzeugendensystem alle Nebenklassen $\bar{\rho} = \rho + I$ hat, wobei ρ alle Wege von i nach j durchläuft. Sei $a \in Q_1$ mit $s(a) = j, t(a) = k$. Dann entspricht die Abbildung $g_a : (P_i)_j \to (P_i)_k$ der Linksmultiplikation mit $\bar{a} = a + I$.

Sei $(I_i)_j$ das Dual des K-Vektorraums, der als Erzeugendensystem alle Nebenklassen $\bar{\rho} = \rho + I$ hat, wobei ρ alle Wege von j nach i durchläuft. Sei $a \in Q_1$ mit $s(a) = j, t(a) = k$. Dann entspricht die Abbildung $g_a : (I_i)_j \to (I_i)_k$ dem dualen der Linksmultiplikation mit $\bar{a} = a + I$.

Lemma 3.18. *Sei $A = KQ/I$ eine endlich-dimensionale K-Algebra.*

(a) *Die Moduln S_i ($i \in Q_0$) stellen eine vollständige Liste der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln dar.*
(b) *Die Moduln P_i ($i \in Q_0$) stellen eine vollständige Liste der Isomorphieklassen unzerlegbarer, projektiver A-Moduln dar.*

(c) *Die Moduln I_i ($i \in Q_0$) stellen eine vollständige Liste der Isomorphieklassen unzerlegbarer, injektiver A-Moduln dar.*
(d) *Für $i \in Q_0$ ist P_i die projektive Decke von S_i und I_i die injektive Hülle von S_i.*

Beweis. Siehe [3, Lemma III.2.1, Lemma III.2.4 und Lemma III.2.6]. □

Beispiel 3.19. *Sei Q der Köcher*

$$Q: \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3 \end{tikzcd}$$

und sei $I = \langle ca \rangle$. Sei $A = KQ/I$. Dann erhalten wir die folgenden projektiven und injektiven Moduln in $\mathrm{mod}(A)$*:*

$$P_1: \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "\binom{1}{0}"] \arrow[r, shift right, "\binom{0}{1}"'] & K^2 \arrow[r, "(0\ 1)"] & K \end{tikzcd} \qquad\qquad P_2: \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "0"'] & K \arrow[r, "1"] & K \end{tikzcd}$$

$$P_3 \cong S_3: \qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"] & K \end{tikzcd} \qquad\qquad I_1 \cong S_1: \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "0"'] & 0 \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd}$$

$$I_2: \qquad \begin{tikzcd} K^2 \arrow[r, shift left, "(1\ 0)"] \arrow[r, shift right, "(0\ 1)"'] & K \arrow[r, "0"] & 0 \end{tikzcd} \qquad\qquad I_3: \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "1"'] & K \arrow[r, "1"] & K \end{tikzcd}$$

Beispiel 3.20. *Sei S der Köcher*

$$S: \qquad \begin{tikzcd} & 2' \arrow[dr, "c'"] & \\ 1' \arrow[ur, "a'"] \arrow[dr, "b'"'] & & 4' \\ & 3' \arrow[ur, "d'"'] & \end{tikzcd}$$

und sei $I' = \langle c'a' - d'b' \rangle$. Sei $A' = KS/I'$. Dann erhalten wir die folgenden projektiven und injektiven Moduln in $\mathrm{mod}(A')$*:*

$$P_{1'} \cong I_{4'}: \quad \begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "1"] & \\ K \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "1"'] & & K \\ & K \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd} \qquad P_{2'}: \quad \begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "1"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$P_{3'}: \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & K \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd} \qquad P_{4'}: \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ 0 \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & K \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$I_{1'}: \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd} \qquad I_{2'}: \quad \begin{tikzcd} & K \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "0"'] & & 0 \\ & 0 \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

$$I_{3'}: \quad \begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0"] & \\ K \arrow[ur, "0"] \arrow[dr, "1"'] & & 0 \\ & K \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

4. Auslander-Reiten Theorie

In diesem Abschnitt geben wir einen kurzen Überblick über die Auslander-Reiten Theorie einer endlich-dimensionalen K-Algebra. Zunächst führen wir die Auslander-Reiten Verschiebung τ ein. Anschließend betrachten wir fast zerfallende Folgen und schließlich betrachten wir den Auslander-Reiten Köcher Γ_A einer endlich-dimensionalen Algebra A. Wir beenden diesen Abschnitt mit einem Beispiel.

Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Für einen A-Linksmodul M sei

$$\mathrm{D}(M) = \mathrm{Hom}_K(M, K).$$

Dann ist $\mathrm{D}(M)$ ein A-Rechtsmodul vermöge

$$f \cdot a = f'$$

für alle $a \in A$ sowie alle $f \in \mathrm{D}(M)$, wobei $f' : M \to K$ die Abbildung ist mit

$$f'(x) = f(ax).$$

Für einen Morphismus $f : M \to N$ zwischen A-Linksmoduln M, N, sei $D(f) : D(N) \to D(M)$ die Abbildung, die eine K-lineare Abbildung $\varphi : N \to K$ auf $\varphi \circ f : M \to K$ schickt. Dann ist $D(f)$ ein Morphismus von A-Rechtmoduln. D definiert auf diese Weise eine Dualität zwischen den Kategorien

$$\mathrm{D} : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}}),$$

wobei wir $\mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}})$ mit der Kategorie der endlich-dimensionalen A-Rechtsmoduln identifizieren. Wir nennen D die *Standard-K-Dualität* zwischen A und A^{op}. Auf ähnliche Weise definieren wir für einen A-Rechtsmodul N den A-Linksmodul

$$\mathrm{D}(N) = \mathrm{Hom}_K(M, K),$$

wobei die A-Linksmodulstruktur gegeben ist durch

$$a \cdot f = f'$$

für alle $a \in A$ sowie alle $f \in \mathrm{D}(N)$, wobei $f' : N \to K$ die Abbildung ist mit

$$f'(x) = f(xa).$$

Dies definiert auf ähnliche Weise wie oben einen Funktor

$$D : \mathrm{mod}(A^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{mod}(A),$$

den wir ebenfalls mit D bezeichnen und der quasi-invers zur Standard-Dualität ist.

Bemerkung 4.1. Falls M ein A-A-Bimodul ist, so ist $D(M)$ auf natürliche Weise ein A-A-Bimodul.

Für einen A-Modul M sei

$$P_1 \overset{f_1}{\to} P_0 \overset{f_0}{\to} M \to 0$$

eine minimale projektive Präsentierung von M. Durch Anwenden des Funktors $\mathrm{Hom}_A(\cdot, {}_AA)$ erhalten wir eine exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, {}_AA) &\xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f_0, A)} \mathrm{Hom}_A(P_0, {}_AA) \xrightarrow{\mathrm{Hom}_A(f_1, {}_AA)} \mathrm{Hom}_A(P_1, {}_AA) \\ &\longrightarrow \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(f_1, {}_AA)) \to 0. \end{aligned}$$

Wir setzen $\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Coker}(\mathrm{Hom}_A(f_1, {}_AA))$ und nennen $\mathrm{Tr}(M)$ den *transponierten Modul von M*.

Seien $M, N \in \mathrm{mod}(A)$. Wir setzen

$$\mathcal{P}(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) |\ f \text{ faktorisiert durch einen projektiven Modul}\},$$
$$\mathcal{I}(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M, N) |\ f \text{ faktorisiert durch einen injektiven Modul}\}.$$

Dann sind $\mathcal{P}, \mathcal{I}$ beidseitige Ideale in $\mathrm{mod}(A)$. Die zugehörigen Quotientenkategorien bezeichnen wir mit $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ beziehungsweise mit $\overline{\mathrm{mod}}(A)$. Die Kategorien $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ und $\overline{\mathrm{mod}}(A)$ haben dieselben Objekte wie $\mathrm{mod}(A)$. Für $M, N \in \underline{\mathrm{mod}}(A)$ beziehungsweise $\overline{\mathrm{mod}}(A)$ ist

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{mod}}(A)}(M, N) = \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/\mathcal{P}(M, N),$$
$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{mod}}(A)}(M, N) = \overline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) = \mathrm{Hom}_A(M, N)/\mathcal{I}(M, N).$$

Wir nennen $\underline{\mathrm{mod}}(A)$ die *stabile Modulkategorie von* A und $\overline{\mathrm{mod}}(A)$ die *kostabile Modulkategorie von* A. Es gilt folgende

Proposition 4.2. *Die Zuordnung* $M \to \mathrm{Tr}(M)$ *induziert einen* K*-linearen Dualitätsfunktor*

$$\mathrm{Tr} : \underline{\mathrm{mod}}(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(A^{op}).$$

Beweis. Siehe [3, IV.2.2]. □

Wir definieren nun die *Auslander-Reiten Verschiebung* τ sowie die *inverse Auslander-Reiten Verschiebung* τ^{-1} wie folgt:

$$\tau = \mathrm{D} \circ \mathrm{Tr},$$
$$\tau^{-1} = \mathrm{Tr} \circ \mathrm{D}\,.$$

Proposition 4.3. *Die Auslander-Reiten Verschiebung und die inverse Auslander-Reiten Verschiebung induzieren zueinander quasi-inverse Äquivalenzen*

$$\begin{tikzcd} \underline{\mathrm{mod}}(A) \arrow[r, shift left, "\tau"] & \overline{\mathrm{mod}}(A). \arrow[l, shift left, "\tau^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Beweis. Siehe [3, Korollar IV.2.11]. □

Satz 4.4 (Auslander-Reiten Formel)**.** *Sei* A *eine endlich-dimensionale* K*-Algebra, seien* $M, N \in \mathrm{mod}(A)$*. Dann existieren Isomorphismen*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathrm{D}(\underline{\mathrm{Hom}}_A(\tau^{-1}(N), M)) \cong \mathrm{D}(\overline{\mathrm{Hom}}_A(N, \tau(M))),$$

die funktoriell in beiden Variablen sind.

Beweis. Siehe [3, Theorem IV.2.13], auch [6, Propositionen 4.5, 4.6]. □

Wir benötigen folgendes

Korollar 4.5. *Sei* A *eine endlich-dimensionale* K*-Algebra, seien* $M, N \in \mathrm{mod}(A)$*. Falls* $\mathrm{pd}_A(M) \leq 1$*, so gibt es einen* K*-linearen Isomorphismus*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M,N) \cong \mathrm{D}(\mathrm{Hom}_A(N, \tau(M))).$$

Beweis. Siehe [3, Korollar IV.2.14]. □

Definition 4.6.
(a) Wir nennen einen Morphismus $f : M \to N$ von A-Moduln einen *zerfallenden Monomorphismus*, falls es einen A-Modul L und einen Isomorphismus $\varphi : N \to M \oplus L$ gibt, so dass $\varphi \circ f$ dem kanonischen Monomorphismus

$$M \to M \oplus L$$

entspricht.

(b) Wir nennen einen Morphismus $f : M \to N$ von A-Moduln einen *zerfallenden Epimorphismus*, falls es einen A-Modul L und einen Isomorphismus $\varphi : N \oplus L \to M$ gibt, so dass $f \circ \varphi$ dem kanonischen Epimorphismus

$$N \oplus L \to N$$

entspricht.

Definition 4.7. Seien $M, N \in \operatorname{mod}(A)$. Ein Morphismus $f : M \to N$ von A-Moduln heißt

(a) *links minimal*, falls aus $h \in \operatorname{End}_A(N)$ mit $hf = f$ folgt, dass h ein Automorphismus ist.
(b) *rechts minimal*, falls aus $h \in \operatorname{End}_A(M)$ mit $fh = f$ folgt, dass h ein Automorphismus ist.
(c) *links fast zerfallend*, falls f kein zerfallender Monomorphismus ist, und für jeden Morphismus $g : M \to L$, der kein zerfallender Monomorphismus ist, ein $h : N \to L$ existiert mit $hf = g$.
(d) *rechts fast zerfallend*, falls f kein zerfallender Epimorphismus ist, und für jeden Morphismus $g : L \to N$, der kein zerfallender Epimorphismus ist, ein $h : L \to M$ existiert mit $fh = g$.
(e) *links minimal fast zerfallend*, falls f links minimal und links fast zerfallend ist.
(f) *rechts minimal fast zerfallend*, falls f rechts minimal und rechts fast zerfallend ist.
(g) *irreduzibel*, falls f weder ein zerfallender Monomorphismus noch ein zerfallender Epimorphismus ist und falls aus $f = gh$ folgt, dass entweder g ein zerfallender Epimorphismus oder h ein zerfallender Monomorphismus ist.

Für $M, N \in \operatorname{mod}(A)$ setzen wir

$$\operatorname{rad}_A(M, N) = \{f \in \operatorname{Hom}_A(M, N) \mid \forall g \in \operatorname{Hom}_A(N, M) \text{ ist } \operatorname{id}_M - gf \text{ invertierbar}\}.$$

Für $M, N \in \operatorname{mod}(A)$ unzerlegbar ist $\operatorname{rad}_A(M, N)$ genau die Menge aller nichtinvertierbaren Morphismen. Wir definieren $\operatorname{rad}_A^2(M, N)$ als die Menge aller Morphismen $f \in \operatorname{Hom}_A(M, N)$, für die es ein $X \in \operatorname{mod}(A)$ gibt sowie Morphismen $g \in \operatorname{rad}_A(M, X), h \in \operatorname{rad}_A(X, N)$ mit $f = hg$. Es gilt folgendes

Lemma 4.8. *Seien $M, N \in \operatorname{mod}(A)$ unzerlegbar; dann ist ein Morphismus $f : M \to N$ irreduzibel genau dann, wenn $f \in \operatorname{rad}_A(M, N) \setminus \operatorname{rad}_A^2(M, N)$.*

Beweis. Siehe [3, Lemma IV.1.6]. □

Dieses Lemma motiviert folgende Definition. Wir definieren den *Raum der irreduziblen Morphismen* von M nach N als

$$\operatorname{Irr}_A(M, N) = \operatorname{rad}_A(M, N) / \operatorname{rad}_A^2(M, N).$$

Definition 4.9. Seien $L, M, N \in \operatorname{mod}(A)$. Wir nennen eine kurze exakte Folge

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

fast zerfallend, falls f links minimal fast zerfallend und g rechts minimal fast zerfallend ist.

Folgender Satz liefert den Zusammenhang zwischen fast zerfallenden Folgen und der Auslander-Reiten Verschiebung:

Satz 4.10. (a) *Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$ unzerlegbar und nicht projektiv. Dann existiert eine fast zerfallende Folge*

$$0 \to \tau(M) \to E \to M \to 0.$$

(b) *Sei* $M \in \mathrm{mod}(A)$ *unzerlegbar und nicht injektiv. Dann existiert eine fast zerfallende Folge*

$$0 \to M \to E \to \tau^{-1}(M) \to 0.$$

Beweis. Siehe [3, Thm. IV.3.1]. □

Bemerkung 4.11. Seien $M \in \mathrm{mod}(A)$. Falls eine fast zerfallende Folge

$$0 \to M \to E \to F \to 0$$

mit Startterm M oder eine fast zerfallende Folge

$$0 \to X \to Y \to M \to 0$$

mit Endterm M existiert, so ist diese eindeutig bis auf Isomorphie von kurzen exakten Folgen.

Folgende Proposition liefert den Zusammenhang zwischen irreduziblen Abbildungen und fast zerfallenden Folgen.

Proposition 4.12. *Sei*

$$0 \to L \xrightarrow{f} \bigoplus_{i=1}^{r} M_i^{n_i} \xrightarrow{g} N \to 0$$

eine kurze exakte Folge in $\mathrm{mod}(A)$. *Seien* L, N, M_i *unzerlegbar für* $i \in \{1, \dots r\}$ *und sei* $M_i \ncong M_j$ *für* $i \neq j$. *Wir schreiben*

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_r \end{pmatrix} \text{ mit } f_i = \begin{pmatrix} f_{i,1} \\ \vdots \\ f_{i,n_i} \end{pmatrix} : L \to M_i^{n_i}$$

und

$$g = (g_1, \dots, g_r) \text{ mit } g_i = (g_{i,1}, \dots, g_{i,n_i}) : M_i^{n_i} \to N.$$

Dann sind äquivalent:

(1) *Die Folge ist fast zerfallend.*
(2) *Für* $i \in \{1, \dots r\}$ *und* $j \in \{1, \dots n_i\}$ *formen die Restklassen* $\overline{f}_{i,j}$ *der* $f_{i,j}$ *modulo* $\mathrm{rad}_A^2(L, M_i)$ *eine* K*-Basis von* $\mathrm{Irr}_A(L, M_i)$. *Falls ein unzerlegbarer Modul* M' *existiert mit* $\mathrm{Irr}_A(L, M') \ncong 0$, *so ist* $M' \cong M_i$ *für ein* $i \in \{1, \dots r\}$.
(3) *Für* $i \in \{1, \dots r\}$ *und* $j \in \{1, \dots n_i\}$ *formen die Restklassen* $\overline{g}_{i,j}$ *der* $g_{i,j}$ *modulo* $\mathrm{rad}_A^2(M_i, N)$ *eine* K*-Basis von* $\mathrm{Irr}_A(M_i, N)$. *Falls ein unzerlegbarer Modul* M' *existiert mit* $\mathrm{Irr}_A(M', N) \ncong 0$, *so ist* $M' \cong M_i$ *für ein* $i \in \{1, \dots r\}$.

Beweis. Siehe [3, Korollar IV.4.4]. □

Wir definieren den *Auslander-Reiten Köcher* Γ_A von $\mathrm{mod}(A)$ wie folgt. Die Punkte entsprechen den Isomorphieklassen unzerlegbarer A-Moduln. Wir bezeichnen hier die Isomorphieklasse eines Moduls M ebenfalls mit M. Für zwei Punkte M, N von Γ_A setzen wir

$$\#\{\text{Pfeile von } M \text{ nach } N \text{ in } \Gamma(\mathrm{mod}(A))\} = \dim_K \mathrm{Irr}_A(M, N).$$

Zusätzlich definieren wir eine zweite Art von Pfeilen in Γ_A (wir nennen diese Pfeile *gepunktete Pfeile*). Für einen nichtprojektiven Punkt M von Γ_A fügen wir einen gepunkteten Pfeil von M nach $\tau(M)$ hinzu. Mit dieser zusätzlichen Art von Pfeilen erhält Γ_A die Struktur eines *Translationsköchers*.

Beispiel 4.13. *Sei Q der Köcher*

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4$$

Sei $A = KQ$. Für $k, k' \in \{1, \dots, 4\}$ mit $k < k'$ erhalten wir einen kanonischen Monomorphismus $P_{k'} \to P_k$. Wir setzen $M_{k,k'} = P_k/P_{k'}$. Die $M_{k,k'}$ und die P_k liefern uns eine vollständige Liste der Isomorphieklassen unzerlegbarer A-Moduln. Der Auslander-Reiten Köcher von A sieht wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P_1 \arrow[dr] & & & \\
 & & P_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{1,4} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & & \\
 & P_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{2,4} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_{1,3} \arrow[ll, dotted] \arrow[dr] & \\
P_4 \arrow[ur] & & M_{3,4} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & M_{2,3} \arrow[ll, dotted] \arrow[ur] & & M_{1,2} \arrow[ll, dotted]
\end{tikzcd}$$

5. Derivierte Kategorien

Sei A eine K-Algebra. Ein *Komplex* $(M, d) = (M_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ von A-Moduln ist eine Folge von A-Moduln und Morphismen der Form

$$\cdots \stackrel{d_{i-3}}{\to} M_{i-2} \stackrel{d_{i-2}}{\to} M_{i-1} \stackrel{d_{i-1}}{\to} M_i \stackrel{d_i}{\to} M_{i+1} \stackrel{d_{i+1}}{\to} M_{i+2} \stackrel{d_{i+2}}{\to} \cdots,$$

so dass für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt: $d_j \circ d_{j-1} = 0$.

Ein Komplex (M, d) heißt *nach oben beschränkt*, falls es eine ganze Zahl $t \in \mathbb{Z}$ gibt mit $M_i = 0$ für $i > t$ und *nach unten beschränkt*, falls es eine ganze Zahl $s \in \mathbb{Z}$ gibt mit $M_i = 0$ für $i < s$. Ein Komplex heißt *beschränkt*, falls er nach oben und nach unten beschränkt ist.

Ein Morphismus $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}} : (M, d) \to (N, d')$ von Komplexen besteht aus A-Modul-Morphismen $f_i : M_i \to N_i$ für alle $i \in \mathbb{Z}$, so dass für alle $j \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f_{j+1} \circ d_j = d'_j \circ f_j.$$

Wir bezeichnen die *Kategorie der Komplexe von A-Moduln* mit $\mathcal{C}(A)$. Seien $\mathcal{C}^+(A)$, $\mathcal{C}^-(A)$, $\mathcal{C}(A)^b$ die vollen Unterkategorien von $\mathcal{C}(A)$ aller nach unten beschränkten, beziehungsweise nach oben beschränkten, beziehungsweise beschränkten Komplexe.

Für einen Komplex $(M, d) = (M_i, d_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ setzen wir $(M, d)[1] = (M_{i+1}, d_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Für einen Morphismus von Komplexen $f = (f_i)_{i \in \mathbb{Z}} : (M, d) \to (N, d')$ setzen wir $f[1] = (f_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}} : (M, d)[1] \to (N, d')[1]$. Wir nennen $[1]$ den *Translations-Funktor* der Kategorie $\mathcal{C}(A)$. Analog definieren wir die Funktoren $[z]$ für $z \in \mathbb{Z}$.

Zwei Morphismen $f, g : (M, d) \to (N, d')$ heißen zueinander *homotop*, falls für alle $i \in \mathbb{Z}$ Morphismen $k_i : M_i \to N_{i-1}$ existieren, so dass für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$f_i - g_i = k_{i+1} d_i + d'_{i-1} k_i.$$

Seien $(M, d), (N, d')$ Komplexe von A-Moduln. Wir setzen

$$\mathcal{K}((M, d), (N, d')) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}((M, d), (N, d)) | f \text{ ist homotop zu } 0\}.$$

Wir definieren die *Homotopiekategorie* $\mathcal{K}(A)$ wie folgt. Objekte in $\mathcal{K}(A)$ seien Komplexe von A-Moduln. Seien $(M, d), (N, d') \in \mathrm{Ob}(\mathcal{K}(A))$. Dann sei

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}(A)}((M, d), (N, d')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(A)}((M, d), (N, d')) \big/ \mathcal{K}((M, d), (N, d')).$$

Seien $\mathcal{K}^+(A), \mathcal{K}^-(A), \mathcal{K}(A)^b$ die vollen Unterkategorien von $\mathcal{K}(A)$ aller nach unten beschränkten, beziehungsweise nach oben beschränkten, beziehungsweise beschränkten Komplexe.

Sei (M, d) ein Komplex von A-Moduln. Wir definieren die *n-te Kohomologie* von (M, d) als den A-Modul $H^n(M, d) = \mathrm{Ker}(d_n) \big/ \mathrm{Im}(d_{n-1})$ und setzen $H(M_n) = H^n(M, d)$. Wir erhalten so einen neuen Komplex $(H(M), 0) = ((H(M_i))_{i \in \mathbb{Z}}, 0)$.

Sei $f : (M, d) \to (N, d')$. Dann induziert $f_i : M_i \to N_i$ auf natürliche Weise einen Morphismus $H(f_i) : H(M_i) \to H(N_i)$ und damit einen Morphismus von Komplexen $H(f) : H((M, d)) \to H((N, d))$.

Seien $f, g : (M, d) \to (N, d')$. Falls $g - f$ nullhomotop ist, so gilt $H(f) = H(g)$.

Ein Morphismus von Komplexen $u : (M, d) \to (N, d')$ heißt *Quasi-Isomorphismus*, falls für alle $i \in \mathbb{Z}$ der Morphismus $H(u_i) : H(M_i) \to H(N_i)$ ein Isomorphismus von A-Moduln ist.

Definition 5.1. Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, sei Q ein multiplikatives System (siehe ([32, I.3])) von Morphismen von $\mathcal{C}$. Die Lokalisierung von $\mathcal{C}$ an Q ist eine Kategorie $\mathcal{C}[Q^{-1}]$ zusammen mit einem Funktor $P : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[Q^{-1}]$, so dass die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $P(q)$ ist ein Isomorphismus für alle $q \in Q$.
(ii) Sei $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ein Funktor, so dass für alle $q \in Q$ gilt: $F(q)$ ist ein Isomorphismus. Dann faktorisiert F über $\mathcal{C}[Q^{-1}]$.

Satz 5.2. *Lokalisierungen existieren.*

Beweis. Siehe ([32, I.3.1]). □

Lemma 5.3. *Die Menge aller Quasi-Isomorphismen ist ein multiplikatives System von Morphismen in $\mathcal{K}^b(A)$.*

Beweis. Siehe ([32, I.4.1]). □

Definition 5.4. Die *beschränkte derivierte Kategorie $D^b(A)$ aller A-Moduln* ist die Lokalisierung von $\mathcal{K}^b(A)$ an der Menge der Quasi-Isomorphismen:

$$D^b(A) = \mathcal{K}^b(A)[Q^{-1}],$$

wobei Q die Menge aller Quasi-Isomorphismen ist. Zur Definition der derivierten Kategorie siehe auch ([51, 2.1]).

Bemerkung 5.5. Die Kategorien $\mathcal{K}(A), \mathcal{K}^+(A), \mathcal{K}^-(A)$, $\mathcal{K}^b(A)$, $\mathcal{D}^b(A)$ sind triangulierte Kategorien mit dem Translations-Funktor [1].

Wir definieren nun (neben der Morita-Äquivalenz) eine weitere Äquivalenz von Algebren. Seien dazu A, B endlich-dimensionale Algebren über K. Wir sagen, A und B sind *deriviert äquivalent*, falls es eine Äquivalenz triangulierter Kategorien

$$F : \mathcal{D}^b(A) \overset{\cong}{\to} \mathcal{D}^b(B)$$

gibt. Offensichtlich ist die derivierte Äquivalenz eine schwächere Äquivalenz als die Morita-Äquivalenz. Es ergeben sich folgende Fragen:

Frage 5.6. Sei $A = KQ/I$ eine endlich-dimensionale Algebra. Wie sieht die derivierte Äquivalenzklasse von A aus?

Frage 5.7. Seien $A = KQ/I, B = KQ'/I'$ endlich-dimensionale Algebren. Ist A deriviert äquivalent zu B?

Teil 2. Der Köcher der Kippmoduln

6. Approximationen

Sei $\mathcal{C}$ eine additive Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$, die abgeschlossen unter direkten Summanden ist. Die folgenden Definitionen stammen von Auslander und Smalø (siehe [8, 7], auch [5]):

Definition 6.1. Sei $M \in \mathcal{C}$, sei $N \in \mathrm{mod}(A)$.

(1) Ein Morphismus $f : M \to N$ heißt *rechts minimal*, falls jedes $g \in \mathrm{End}_A(M)$ mit $fg = f$ schon ein Isomorphismus ist.
(2) Ein Morphismus $f : N \to M$ heißt *links minimal*, falls jedes $g \in \mathrm{End}_A(M)$ mit $gf = f$ schon ein Isomorphismus ist.
(3) Ein Morphismus $f : M \to N$ heißt *$\mathcal{C}$-Rechtsapproximation* von N, falls für alle $X \in \mathcal{C}$ der induzierte Morphismus
$$\mathrm{Hom}_A(X, f) : \mathrm{Hom}_A(X, M) \to \mathrm{Hom}_A(X, N)$$
surjektiv ist.
(4) Ein Morphismus $f : N \to M$ heißt *$\mathcal{C}$-Linksapproximation* von N, falls für alle $X \in \mathcal{C}$ der induzierte Morphismus
$$\mathrm{Hom}_A(f, X) : \mathrm{Hom}_A(M, X) \to \mathrm{Hom}_A(N, X)$$
surjektiv ist.
(5) Ein Morphismus $f : M \to N$ heißt *minimale $\mathcal{C}$-Rechtsapproximation* von N, falls f rechts minimal und eine $\mathcal{C}$-Rechtsapproximation von N ist.
(6) Ein Morphismus $f : N \to M$ heißt *minimale $\mathcal{C}$-Linksapproximation* von N, falls f links minimal und eine $\mathcal{C}$-Linksapproximation von N ist.

Minimale Rechts- oder Linksapproximationen sind eindeutig in folgendem Sinne:

Proposition 6.2. *Seien $M, M' \in \mathcal{C}$, sei $N \in \mathrm{mod}(A)$.*

(a) *Seien $f : M \to N$, $f' : M' \to N$ minimale $\mathcal{C}$-Rechtsapproximationen von N. Dann existiert ein Isomorphismus $h : M \to M'$ mit $f = f'h$.*
(b) *Seien $f : N \to M$, $f' : N \to M'$ minimale $\mathcal{C}$-Linksapproximationen von N. Dann existiert ein Isomorphismus $h : M \to M'$ mit $hf = f'$.*

Beweis. Siehe [8, Proposition 3.9]. □

Definition 6.3. Sei $\mathcal{C}$ eine additive Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$, die abgeschlossen unter direkten Summanden ist.

(a) Wir nennen $\mathcal{C}$ *kontravariant endlich*, falls jedes $X \in \mathrm{mod}(A)$ eine $\mathcal{C}$-Rechtsapproximation besitzt.
(b) Wir nennen $\mathcal{C}$ *kovariant endlich*, falls jedes $X \in \mathrm{mod}(A)$ eine $\mathcal{C}$-Linksapproximation besitzt.
(c) Wir sagen, $\mathcal{C}$ ist *abgeschlossen unter Erweiterungen*, falls folgendes gilt: Sei
$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$
eine kurze exakte Folge von A-Moduln. Seien $X, Z \in \mathcal{C}$. Dann ist auch $Y \in \mathcal{C}$.

Bemerkung 6.4. Für einen Modul $M \in \mathrm{mod}(A)$ sei $\mathrm{add}(M)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller direkten Summanden von endlichen direkten Summen von M. Dann ist $\mathrm{add}(M)$ sowohl kontravariant endlich als auch kovariant endlich.

Wir benötigen später folgendes

Lemma 6.5 (Wakamatsus Lemma)**.** *Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von* $\operatorname{mod}(A)$*, die abgeschlossen unter Erweiterungen ist. Sei* $X \in \operatorname{mod}(A)$*. Dann gilt folgendes:*

(a) *Sei $f : C \to X$ eine minimale $\mathcal{C}$-Rechtsapproximation von X, sei*

$$0 \to D \to C \xrightarrow{f} X$$

exakt. Dann ist

$$\operatorname{Ext}^1_A(C', D) = 0$$

für alle $C' \in \mathcal{C}$.

(b) *Sei $g : X \to C$ eine minimale $\mathcal{C}$-Linksapproximation von X, sei*

$$X \xrightarrow{g} C \to D \to 0$$

exakt. Dann ist

$$\operatorname{Ext}^1_A(D, C') = 0$$

für alle $C' \in \mathcal{C}$.

Beweis. Siehe [54, Lemma 2.1.1, Lemma 2.2.1], auch [5, Lemma 1.3], [52]. □

7. Klassische Kippmoduln

Klassische Kippmoduln wurden 1979 von Brenner und Butler eingeführt (siehe [10, Definition 1]). Zur Definition von Kippmoduln siehe auch [24]. Sei von nun an A immer eine endlich-dimensionale K-Algebra, sei n die Anzahl der Isomorphieklassen einfacher A-Moduln.

Definition 7.1. $T \in \operatorname{mod}(A)$ heißt *partieller (klassischer) Kippmodul*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(T1) $\operatorname{pd}_A(T) \leq 1$.
(T2) $\operatorname{Ext}^1_A(T, T) = 0$.

Lemma 7.2. *Sei* $T \in \operatorname{mod}(A)$ *ein partieller Kippmodul. Dann sind äquivalent:*

(T3) *Es existieren Moduln* $T^0, T^1 \in \operatorname{add}(T)$*, sowie eine kurze exakte Folge*

$$0 \to {}_AA \to T^0 \to T^1 \to 0.$$

(T3') $\lambda(T) = n$.

Beweis. Siehe [3, Korollar VI.4.4]. □

Definition 7.3. Ein partieller Kippmodul T heißt *(klassischer) Kippmodul*, falls T eine der äquivalenten Bedingungen aus Lemma 7.2 erfüllt.

Bemerkung 7.4. (a) Im folgenden Abschnitt werden wir eine Verallgemeinerung der Definition klassischer Kippmoduln vorstellen. Da wir uns jedoch hauptsächlich mit klassischen Kippmoduln beschäftigen, ist mit dem Begriff Kippmodul in dieser Arbeit immer klassischer Kippmodul gemeint.

(b) Wenn wir im weiteren Verlauf von einem (partiellen) Kippmodul T reden, werden wir immer stillschweigend davon ausgehen, dass T basisch ist.

Lemma 7.5. *Sei* $T \in \operatorname{mod}(A)$ *ein Kippmodul, sei* $X \in \operatorname{mod}(A)$ *mit* $\operatorname{pd}_A(X) \leq 1$. *Falls gilt* $\operatorname{Ext}^1_A(T \oplus X, T \oplus X) = 0$, *so ist schon* $X \in \operatorname{add}(T)$.

Beweis. Folgt sofort aus der Definition von Kippmodul. □

Definition 7.6. Ein Paar $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ voller Unterkategorien von $\operatorname{mod}(A)$ heißt *Torsionspaar*, falls folgendes gilt:

(i) $\operatorname{Hom}_A(M, N) = 0$ für alle $M \in \mathcal{T}, N \in \mathcal{F}$.
(ii) Aus $\operatorname{Hom}_A(M, \cdot)|_{\mathcal{F}} = 0$ folgt, dass $M \in \mathcal{T}$.
(iii) Aus $\operatorname{Hom}_A(\cdot, N)|_{\mathcal{T}} = 0$ folgt, dass $N \in \mathcal{F}$.

Definition 7.7. Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$.

(a) Wir sagen $N \in \operatorname{mod}(A)$ ist *von M erzeugt*, falls es einen Epimorphismus
$$M^n \twoheadrightarrow N$$
gibt für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Gen}(M)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}(A)$ aller von M erzeugten Moduln.
(b) Wir sagen $N \in \operatorname{mod}(A)$ ist *von M koerzeugt*, falls es einen Monomorphismus
$$N \hookrightarrow M^n$$
gibt für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit $\operatorname{Cogen}(M)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}(A)$ aller von M koerzeugten Moduln.
(c) Wir nennen M *treu*, falls ${}_AA$ von M koerzeugt wird.

Lemma 7.8. *Sei* $M \in \operatorname{mod}(A)$ *ein partieller Kippmodul. Sei* $\mathcal{F}(M)$ *die volle Unterkategorie von* $\operatorname{mod}(A)$ *aller Moduln* N *mit*
$$\operatorname{Hom}_A(M, N) = 0.$$
Sei $\mathcal{T}(M)$ *die volle Unterkategorie von* $\operatorname{mod}(A)$ *aller Moduln* N *mit*
$$\operatorname{Ext}^1_A(M, N) = 0.$$
Dann gelten folgende Aussagen:

(a) $(\operatorname{Gen}(M), \mathcal{F}(M))$ *ist ein Torsionspaar.*
(b) $(\mathcal{T}(M), \operatorname{Cogen}(M))$ *ist ein Torsionspaar.*
(c) *Falls* M *ein Kippmodul ist, so ist* $\operatorname{Gen}(M) = \mathcal{T}(M)$ *und* $\operatorname{Cogen}(M) = \mathcal{F}(M)$.

Beweis. Siehe [3, Lemma VI.2.3, Theorem VI.2.5]. □

Bemerkung 7.9. Sei $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ ein Torsionspaar, sei $S \in \operatorname{mod}(A)$ ein einfacher A-Modul. Dann gelten
$$\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = 0,$$
$$S \in \mathcal{T} \cup \mathcal{F}.$$

Sei nun $T \in \operatorname{mod}(A)$ ein Kippmodul, S ein einfacher A-Modul. Dann haben wir folgende Dichotomie: Entweder ist
$$\operatorname{Hom}_A(T, S) = 0,$$
$$\operatorname{Ext}^1_A(T, S) \neq 0;$$

oder es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_A(T,S) &\neq 0,\\ \operatorname{Ext}^1_A(T,S) &= 0.\end{aligned}$$

Lemma 7.10 (Bongartz-Lemma)**.** *Sei M ein partieller Kippmodul. Dann gibt es eine kurze exakte Folge*

$$0 \to {}_AA \to E \to M^s \to 0,$$

so dass $\operatorname{bas}(E \oplus M)$ *ein Kippmodul ist. Wir nennen diese Folge die* Bongartz-Folge *zu M und* $\operatorname{bas}(E \oplus M)$ *die* Bongartz-Vervollständigung *von M.*

Beweis. Siehe [9, 2.1], auch [3, Lemma VI.2.4.]. □

Bemerkung 7.11. Sei M ein partieller Kippmodul. Wir sagen, X ist ein *Komplement* zu M, falls $X \oplus M$ ein Kippmodul ist. Insbesondere folgt aus dem Bongartz-Lemma, dass jeder partielle Kippmodul ein Komplement besitzt.

Lemma 7.12. *Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul. Sei*

$$f : {}_AA \to \tilde{M}$$

eine minimale $\operatorname{add}(M)$*-Linksapproximation von ${}_AA$. Wir betrachten die resultierende kurze exakte Folge*

$$0 \to {}_AA \xrightarrow{f} \tilde{M} \to C \to 0.$$

Dann ist $\operatorname{bas}(\tilde{M} \oplus C)$ *ein Kippmodul über A. Wir nennen* $\operatorname{bas}(\tilde{M} \oplus C)$ *die Bongartz-Kovervollständigung von M.*

Beweis. Aus $\operatorname{pd}_A({}_AA) = 0$ und $\operatorname{pd}_A(\tilde{M}) \leq 1$ folgt $\operatorname{pd}_A(C) \leq 1$ mittels der langen exakten Homologiefolge. Des weiteren genügt $\operatorname{bas}(\tilde{M} \oplus C)$ offensichtlich der Bedingung (T3). Wir müssen also

$$\operatorname{Ext}^1_A(\tilde{M} \oplus C, \tilde{M} \oplus C) = 0$$

zeigen. Aus Lemma 7.8.(c) folgt, dass $\operatorname{Ext}^1_A(\tilde{M}, C) = 0$. Aus Wakamatsus Lemma (Lemma 6.5) folgt, dass $\operatorname{Ext}^1_A(C, \tilde{M}) = 0$. Anwenden des Funktors $\operatorname{Hom}_A(C, \cdot)$ liefert uns

$$0 = \operatorname{Ext}^1_A(C, \tilde{M}) \to \operatorname{Ext}^1_A(C, C) \to \operatorname{Ext}^2_A({}_AA, C) = 0,$$

woraus schließlich die Behauptung folgt. □

Sei $A = KQ/I$ eine endlich-dimensionale Algebra. Sei $T \in \operatorname{mod}(A)$ ein Kippmodul. Dann erhalten wir auf folgende Weise eine zu A deriviert äquivalente Algebra.

Satz 7.13 (Happels Satz für klassische Kippmoduln)**.** *Sei $T \in \operatorname{mod}(A)$ ein Kippmodul. Dann sind die Algebren A und* $\operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$ *deriviert äquivalent.*

Beweis. Siehe [23, Theorem III.2.10]. □

Der Satz von Brenner-Butler vergleicht für einen Kippmodul T bestimmte Unterkategorien der Kategorien $\operatorname{mod}(A)$ und $\operatorname{mod}(\operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}})$. Sei $B = \operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$. Mittels

$$(f, t) \mapsto f(t)$$

ist T auf natürliche Weise ein $\operatorname{End}_A(T)$-Linksmodul (und damit ein $\operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$-Rechtsmodul). Um das Ergebnis zu formulieren, benötigen wir folgende

Definition 7.14. Wir definieren folgende Unterkategorien von $\operatorname{mod}(B)$:

(a) $\mathcal{X}(T) = \{X \in \operatorname{mod}(B) | T_B \otimes_B X = 0\}$,

(b) $\mathcal{Y}(T) = \{X \in \operatorname{mod}(B) | \operatorname{Tor}_1^B(T_B, X) = 0\}$.

Nun können wir den Satz von Brenner-Butler formulieren:

Satz 7.15 (Satz von Brenner-Butler für klassische Kippmoduln)**.** *Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K, sei T ein Kippmodul über A, sei $B = \operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$. Seien $\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T), \mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T)$ wie oben. Dann gilt:*

(a) *T_B ist ein Kipprechtsmodul über B und der kanonische Morphismus*

$$\begin{aligned} A &\to \operatorname{End}_B(T_B) \\ a &\mapsto (t \mapsto at) \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus von K-Algebren.

(b) *Die Funktoren $\operatorname{Hom}_A(T, \cdot)$ und $T_B \otimes_B \cdot$ induzieren quasi-inverse Äquivalenzen zwischen $\mathcal{T}(T)$ und $\mathcal{Y}(T)$.*

(c) *Die Funktoren $\operatorname{Ext}_A^1(T, \cdot)$ und $\operatorname{Tor}_1^B(T_B, \cdot)$ induzieren quasi-inverse Äquivalenzen zwischen $\mathcal{F}(T)$ und $\mathcal{X}(T)$.*

Beweis. Siehe [10, Theorem I-III], auch [3, Theorem VI.3.8], [24, Abschnitt 2]. □

Wir nennen einen partiellen Kippmodul M *fast vollständig*, falls gilt

$$\lambda(M) = n - 1.$$

Wir interessieren uns für die Struktur der Komplemente eines fast vollständigen Kippmoduls. Es gilt folgendes

Lemma 7.16. (a) *Sei M ein treuer fast vollständiger Kippmodul. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau zwei unzerlegbare Komplemente X, Y zu M.*

(b) *Sei M ein fast vollständiger Kippmodul, der nicht treu ist. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau ein unzerlegbares Komplement X zu M.*

(c) *In der Notation von (a) gilt entweder $X \in \operatorname{Gen}(M)$ oder $Y \in \operatorname{Gen}(M)$, aber nicht $X \oplus Y \in \operatorname{Gen}(M)$.*

(d) *In obiger Notation sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $Y \in \operatorname{Gen}(M)$. Dann gibt es eine kurze exakte Folge*

$$0 \to X \xrightarrow{f} \tilde{M} \xrightarrow{g} Y \to 0,$$

wobei $\tilde{M} \in \operatorname{add}(M)$. Hierbei ist f eine minimale $\operatorname{add}(M)$-Linksapproximation von X und g eine minimale $\operatorname{add}(M)$-Rechtsapproximation von Y.

Beweis. Siehe [21, 2.3-2.6], auch [39, 1.3]. Außerdem [25, 1.3, 2.3] für erbliche Algebren. □

8. Verallgemeinerte Kippmoduln

Als Verallgemeinerung der klassischen Kippmoduln wurden in [35] verallgemeinerte Kippmoduln eingeführt. Wir betrachten die wichtigsten Sätze über verallgemeinerte Kippmoduln sowie die Unterschiede zwischen klassischen und verallgemeinerten Kippmoduln.

Definition 8.1. Wir nennen einen A-Modul M *exzeptionell*, falls gilt

(i) $\mathrm{pd}_A(T) < \infty$.
(ii) Für alle $i \geq 1$ gilt $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$.

Definition 8.2. Ein Modul T heißt *verallgemeinerter Kippmodul*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) T ist exzeptionell.
(ii) Es gibt eine exakte Folge
$$0 \to {}_AA \to T^0 \to T^1 \to \cdots \to T^d \to 0$$
mit $T^i \in \mathrm{add}(T)$ für alle $0 \leq i \leq d$.

Es gilt folgendes

Lemma 8.3. *Sei T ein verallgemeinerter Kippmodul über A.*

(a) $\lambda(T) = n$.
(b) *Sei $X \in \mathrm{mod}(A)$ exzeptionell. Dann gilt*
$$\mathrm{Ext}^i_A(T \oplus X, T \oplus X) = 0 \textit{ für alle } i \geq 1 \Rightarrow X \in \mathrm{add}(T).$$

Beweis. (a) Siehe [35, Thm 1.19].
(b) Folgt aus (a).

□

Bemerkung 8.4. Sei $T \in \mathrm{mod}(A)$ ein klassischer Kippmodul. Dann ist T offensichtlich auch ein verallgemeinerter Kippmodul.

Wir nennen einen Modul M *partiellen verallgemeinerten Kippmodul*, falls M direkter Summand eines verallgemeinerten Kippmoduls T ist.

Bemerkung 8.5. Wir gehen stillschweigend davon aus, dass unsere exzeptionellen und (partiellen) verallgemeinerten Kippmoduln basisch sind.

Bemerkung 8.6. Im klassischen Fall folgt aus dem Bongartz-Lemma, dass ein exzeptioneller Modul der projektiven Dimension ≤ 1 immer ein direkter Summand eines Kippmoduls ist. Dies gilt jedoch nicht für verallgemeinerte Kippmoduln: In [38] haben Rickard und Schofield ein Beispiel für einen exzeptionellen Modul angegeben, der kein partieller verallgemeinerter Kippmodul ist.

Es stellt sich die Frage, wann ein exzeptioneller Modul ein partieller Kippmodul oder ein Kippmodul ist.

Zur Beantwortung dieser Fragen benötigen wir folgende

Definition 8.7. (a) Für einen Modul $M \in \mathrm{mod}(A)$ definieren wir die *rechtsorthogonale Kategorie* $M^{\perp}$ als die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller Moduln X mit
$$\mathrm{Ext}^i_A(M,X) = 0 \text{ für alle } i \geq 1.$$
(b) Für eine volle Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathrm{mod}(A)$ definieren wir die Kategorie $\check{\mathcal{C}}$ als die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller Objekte Z, die eine endliche Koauflösung
$$0 \to Z \to C_0 \to C_1 \to \cdots \to C_r \to 0$$
mit $C_i \in \mathcal{C}$ für alle $i \in \{0, \ldots, r\}$ besitzen.

(c) Wir nennen eine volle Unterkategorie $\mathcal{C}$ von $\mathrm{mod}(A)$ *koauflösend*, falls $\mathcal{C}$ alle injektiven Moduln enthält und abgeschlossen unter Erweiterungen und Cokernen von Injektionen ist.

Proposition 8.8. *Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ exzeptionell. Dann sind äquivalent*

(a) *M ist ein partieller verallgemeinerter Kippmodul.*
(b) *$M^{\perp}$ enthält eine Unterkategorie $\mathcal{C}$, die kovariant endlich und koauflösend ist und M enthält, so dass gilt $\check{\mathcal{C}} = \mathrm{mod}(A)$.*

Beweis. Siehe [30, Abschnitt 2]. □

Proposition 8.9. *Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ exzeptionell. Dann sind äquivalent*

(a) *M ist ein verallgemeinerter Kippmodul.*
(b) *$M^{\perp} \subset \mathrm{Gen}(M)$.*

Beweis. Siehe [22, Abschnitt 3]. □

Definition 8.10. (a) Sei M ein partieller verallgemeinerter Kippmodul. Wir nennen $X \in \mathrm{mod}(A)$ *Komplement* zu M, falls $M \oplus X$ ein verallgemeinerter Kippmodul ist.
(b) Wir nennen einen partiellen verallgemeinerten Kippmodul M *fast vollständig*, falls gilt

$$\lambda(M) = n - 1.$$

Bemerkung 8.11. Ein exzeptioneller Modul M mit $\lambda(M) = n - 1$ ist ein fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul genau dann, wenn $M^{\perp}$ kovariant endlich ist (siehe [30, Korollar 1, Korollar 2]).

Wir interessieren uns für die Struktur der Komplemente eines fast vollständigen verallgemeinerten Kippmoduls M. Wir benötigen folgende

Definition 8.12. Sei M ein fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul. Sei X ein Komplement zu M.

(a) Wir nennen X *Quellkomplement* oder *Bongartz-Komplement* zu M, falls $X \notin \mathrm{Gen}(M)$.
(b) Wir nennen X *Senkenkomplement* zu M, falls $X \notin \mathrm{Cogen}(M)$.

Proposition 8.13. *Sei M ein fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul über A. Sei M nicht treu. Dann gibt es bis auf Isomorphie genau ein Komplement X zu M.*

Beweis. Siehe [26, Proposition 1.4], [22, Abschnitt 5], [14, Theorem 1]. □

Proposition 8.14. *Sei M ein fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul über A. Sei M treu.*

(a) *Es existiert ein Quellkomplement X_0 zu M.*
(b) *Es existiert ein Komplement $Y \ncong X_0$ zu M. Es gilt $Y \in \mathrm{Gen}(M)$.*
(c) *Sei $Y \in \mathrm{Gen}(M)$ ein Komplement zu M. Dann existiert eine exakte Folge*

$$0 \to X_0 \to M^1 \xrightarrow{f_1} M^2 \xrightarrow{f_2} \cdots \to M^{r-1} \xrightarrow{f_{r-1}} M^r \xrightarrow{f_r} X_r = Y \to 0,$$

so dass $\mathrm{Ker}(f_i) = X_{i-1}$ *und* $M^i \in \mathrm{add}(M)$ *für* $i \in \{1, \dots, r\}$ *und* $X_0, \dots, X_r$ *Komplemente zu* M *mit* $r \leq \mathrm{pd}_A Y$. *In den entstehenden kurzen exakten Folgen*

$$0 \to X_i \xrightarrow{\iota_i} M^{i+1} \xrightarrow{\pi_i} X_{i+1} \to 0$$

für $i \in \{0, \dots r-1\}$ *ist* ι_i *eine minimale* $\mathrm{add}(M)$*-Linksapproximation von* X_i *und* π_i *eine minimale* $\mathrm{add}(M)$*-Rechtsapproximation von* X_{i+1}.

(d) *M hat genau dann nur endlich viele nicht isomorphe Komplemente, wenn M ein Senkenkomplement besitzt. Falls M genau $r+1$ nicht isomorphe Komplemente $X_0, \dots, X_r$ besitzt, dann ist $r \leq \mathrm{fd}(A)$ und es existiert eine exakte Folge wie in (c). Hierbei bezeichnet $\mathrm{fd}(A)$ die finitistische Dimension von A.*

(e) *Falls $\mathrm{fd}(A) < \infty$, so besitzt M nur endlich viele nicht isomorphe Komplemente.*

Beweis. Siehe [26, Proposition 1.5, Korollar 1.6, Theorem 1.7], [22, Abschnitt 5], [14, Theorem 2, Theorem 3, Proposition 1.3]. □

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir verallgemeinerte Versionen des Satzes von Happel über derivierte Äquivalenzen und des Satzes von Brenner-Butler an.

Satz 8.15 (Happels Satz für verallgemeinerte Kippmoduln)**.** *Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Sei $T \in \mathrm{mod}(A)$ ein verallgemeinerter Kippmodul. Dann sind die Kategorien $\mathrm{mod}(A)$ und $\mathrm{mod}(\mathrm{End}_A(T)^{\mathrm{op}})$ deriviert äquivalent.*

Beweis. Siehe [23, Theorem III.2.10], [20, Theorem 1.6]. □

Sei $B = \mathrm{End}_A(T)^{\mathrm{op}}$.

Definition 8.16. Wir definieren folgende Unterkategorien von $\mathrm{mod}(B)$:

(a) $\mathcal{E}_i(T) = \{X \in \mathrm{mod}(B) | \mathrm{Ext}^j_A(T, X) = 0 \text{ für alle } j \geq 0, j \neq i\}$,
(b) $\mathcal{F}_i(T) = \{X \in \mathrm{mod}(B) | \mathrm{Tor}^B_j(T_B, X) = 0 \text{ für alle } j \geq 0, j \neq i\}$.

Satz 8.17 (Satz von Brenner-Butler für verallgemeinerte Kippmoduln)**.** *Die Funktoren*

$$F_i(\cdot) = \mathrm{Ext}^i_A(T, \cdot) : \mathrm{mod}(A) \to \mathrm{mod}(B)$$

und

$$F_i(\cdot) = \mathrm{Tor}^A_i(T_B, \cdot) : \mathrm{mod}(B) \to \mathrm{mod}(A)$$

induzieren quasi-inverse Äquivalenzen zwischen $\mathcal{E}_i$ und $\mathcal{F}_i$.

Beweis. Siehe [23, Theorem III.3.2]. □

9. Eine Halbordnung auf Kippmoduln

In diesem Abschnitt führen wir eine Halbordnung auf der Menge der Isomorphieklassen verallgemeinerter Kippmoduln über einer endlich-dimensionalen Algebra A ein und erklären den Zusammenhang zum Köcher der Kippmoduln über A, der im weiteren Verlauf das Hauptobjekt unserer Untersuchungen sein wird. Für einen Überblick über das Thema verweisen wir auf [50]. Die folgenden Definitionen stammen von [39].

Definition 9.1. Seien T, T' verallgemeinerte Kippmoduln über A. Wir setzen

$$T \preceq T' \Leftrightarrow T^{\perp} \subseteq T'^{\perp}.$$

Lemma 9.2. *Die Relation $\preceq$ induziert eine Halbordnung auf der Menge der Isomorphieklassen verallgemeinerter Kippmoduln.*

Beweis. Siehe [39, 2.2, Remark (b)], auch [28, Introduction]. □

Bemerkung 9.3. Die Halbordnung $\preceq$ induziert auf natürliche Weise eine Halbordnung auf der Menge der Isomorphieklassen klassischer Kippmoduln, die wir ebenfalls mit $\preceq$ bezeichnen. Wir werden oftmals nicht zwischen einem Kippmodul und seiner Isomorphieklasse unterscheiden, wenn wir über $\preceq$ sprechen.

Offensichtlich ist der Kippmodul ${}_AA$ ein maximales Element bezüglich der Halbordnung $\preceq$. Falls der injektive Cogenerator $\mathrm{D}(A_A)$ endliche projektive Dimension besitzt und die reguläre Darstellung ${}_AA$ endliche injektive Dimension besitzt, so ist $\mathrm{D}(A_A)$ ein minimales Element bezüglich $\preceq$. Allgemein gilt folgender

Satz 9.4. *Es existiert ein minimales Element bezüglich $\preceq$ genau dann, wenn die volle Unterkategorie von* $\mathrm{mod}(A)$ *aller Moduln mit endlicher projektiver Dimension kontravariant endlich ist.*

Beweis. Siehe [28, Theorem 3.3]. □

Lemma 9.5. *Es existiert höchstens ein minimales Element bezüglich $\preceq$.*

Beweis. Siehe [28, Corollary 3.4]. □

Definition 9.6. Seien T, T' verallgemeinerte Kippmoduln über A. Sei M ein fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul mit $T = M \oplus X, T' = M \oplus Y$. Falls eine kurze exakte Folge

$$\eta : 0 \to X \xrightarrow{f} \tilde{M} \xrightarrow{g} Y \to 0$$

existiert mit $\tilde{M} \in \mathrm{add}(M)$, so dass f eine minimale $\mathrm{add}(M)$-Linksapproximation von X und g eine minimale $\mathrm{add}(M)$-Rechtsapproximation von Y ist, so nennen wir η eine *Austauschfolge* von T nach T'.

Definition 9.7. Wir definieren den Köcher der Kippmoduln $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ von A folgendermaßen: Die Ecken von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ seien die Isomorphieklassen der basischen verallgemeinerten Kippmoduln über A. Es gibt einen Pfeil von der Klasse von T in die Klasse von T' in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ genau dann, wenn eine Austauschfolge von T nach T' existiert. Wir bezeichnen mit $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ den vollen Unterköcher von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ aller Isomorphieklassen von klassischen Kippmoduln. Wir werden die Punktmenge von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ beziehungsweise $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ ebenfalls mit $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ beziehungsweise $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ bezeichnen. Darüber hinaus werden wir die Isomorphieklasse eines Kippmoduls T manchmal ebenfalls mit T bezeichnen.

Falls wir eine Austauschfolge zwischen zwei Kippmoduln T, T' haben und nichts über die Richtung der Austauschfolge aussagen können, so schreiben wir $T \leftrightarrow T'$.

Definition 9.8.

(a) Sei M ein partieller verallgemeinerter Kippmodul. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ der volle Unterköcher von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$, der als Ecken genau die Isomorphieklassen basischer verallgemeinerter Kippmoduln T hat mit $M \in \mathrm{add}(T)$.

(b) Sei M ein partieller Kippmodul. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ der volle Unterköcher von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$, der als Ecken genau die Isomorphieklassen basischer Kippmoduln T hat mit $M \in \mathrm{add}(T)$.

Es gibt folgenden Zusammenhang zwischen $\preceq$ und $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$:

Satz 9.9. *Der Köcher $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ ist das Hasse-Diagramm von $\preceq$.*

Beweis. Siehe [28, Theorem 2.1], auch [29, Theorem 2.2]. □

Korollar 9.10. *$\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}, \mathcal{T}_{\mathrm{A}}, \mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M), \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ haben keine orientierten Kreise.*

Korollar 9.11. *Falls $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ eine endliche Zusammenhangskomponente $\mathcal{C}$ besitzt, so gilt*

$$\mathcal{C} = \mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}.$$

Beweis. Siehe [28, Corollary 2.2]. □

Bemerkung 9.12.
(a) Sei M ein partieller klassischer Kippmodul. Dann besitzt $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ ein maximales Element, nämlich die Bongartz-Vervollständigung von M.
(b) Sei M ein treuer partieller klassischer Kippmodul. Dann besitzt $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ ein minimales Element, nämlich die Bongartz-Kovervollständigung von M.
(c) Sei M ein partieller verallgemeinerter Kippmodul. Dann ist im allgemeinen nicht klar, ob ein maximales oder minimales Element in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ existiert.

Beispiel 9.13.
(a) *Sei M ein fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul, der nicht treu ist. Dann besteht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ aus genau einem Punkt.*
(b) *Sei M ein treuer fast vollständiger klassischer Kippmodul. Dann sieht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ wie folgt aus:*

$$\bullet \longrightarrow \bullet$$

(c) *Sei M ein treuer fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul, der kein Senkenkomplement besitzt. Dann sieht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ wie folgt aus:*

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots$$

(d) *Sei M ein treuer fast vollständiger verallgemeinerter Kippmodul, der ein Senkenkomplement besitzt. Sei r die Anzahl der Komplemente (bis auf Isomorphie) von M. Dann besteht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ aus r Punkten und sieht wie folgt aus:*

$$\bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \dots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet$$

Definition 9.14. Sei Q ein Köcher, so dass kein $a \in Q_1$ existiert mit $s(a) = t(a)$, sei $l \in \mathbb{N}$. Dann sagen wir, Q ist *l-regulär* , falls für alle $i \in Q_0$ gilt

$$\#\{a \in Q_1 \mid s(a) = i\} + \#\{a \in Q_1 \mid t(a) = i\} = l.$$

Bemerkung 9.15. Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ ein treuer partieller klassischer Kippmodul. Sei $\lambda(M) = n - l$. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ l-regulär.

Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ ein treuer partieller verallgemeinerter Kippmodul. Sei N ein treuer partieller Kippmodul. Dann gibt es die folgende

Vermutung 9.16 (Happel-Schröer)**.**
(a) *$\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ ist zusammenhängend.*
(b) *$\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N)$ ist zusammenhängend.*

Diese Vermutung wurde schon für die Klasse der erblichen Algebren bewiesen:

Satz 9.17. *Sei A erblich. Sei M treuer partieller Kippmodul über A. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Siehe [27, Theorem 4.1]. □

Lemma 9.18. *Sei A darstellungsendlich.*

(a) *Sei M ein treuer partieller verallgemeinerter Kippmodul über A. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ zusammenhängend.*
(b) *Sei N treuer partieller klassischer Kippmodul über A. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N)$ zusammenhängend.*

Beweis. (a) Sei $\mathcal{C}$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$, die nicht die Bongartz-Vervollständigung B von M enthält. Da $\mathcal{C}$ endlich ist und es keine orientierten Kreise in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ gibt, besitzt $\mathcal{C}$ eine Quelle T. Nach Annahme ist $T \ncong B$. Nach [28, Theorem 2.1] gibt es einen Pfeil $B \to X_1$ in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ mit $\mathrm{Gen}(T) \subset \mathrm{Gen}(X_1)$. Nach demselben Satz gibt es sukzessive Pfeile $X_i \to X_{i+1}$ mit $\mathrm{Gen}(T) \subset \mathrm{Gen}(X_{i+1})$, solange $X_i \ncong T$. Da A darstellungsendlich ist und $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$ keine orientierten Kreise haben kann, muss die Folge der X_i abbrechen und schließlich gelten, dass $X_i \cong T$ für ein i. Dann kann aber T keine Quelle in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ sein. Widerspruch. Also muss B in jeder Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ liegen. Somit ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}(M)$ zusammenhängend.
(b) Wie (a) mit $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ statt $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{gen}}$.

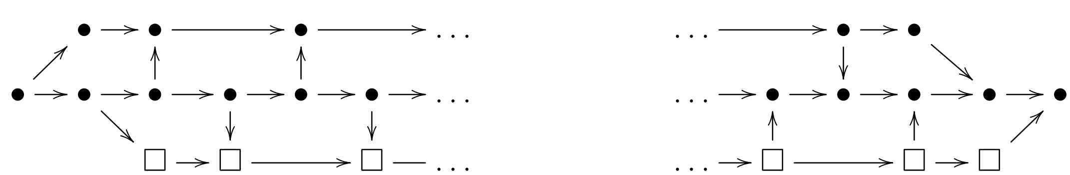
□

Von nun an ziehen wir uns auf den Fall klassischer Kippmoduln zurück. Wir wollen Vermutung 9.16.(b) für eine bestimmte Klasse von Algebren zeigen.

Bemerkung 9.19. Die Vermutung ist falsch, wenn wir die Voraussetzung, dass M treu ist, fallen lassen. Sei zum Beispiel Q der folgende Köcher

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[dr] & 2 \arrow[d] \\ & 3 \end{tikzcd}$$

und sei $M = S_2$ der einfache Modul über KQ, der dem Punkt 2 zugeordnet ist. Dann ist M ein partieller Kippmodul, welcher nicht treu ist. $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ sieht in diesem Fall wie folgt aus:



Die Kippmoduln in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ entsprechen in diesem Fall den Quadraten in obiger Skizze. Somit ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ nicht zusammenhängend.

10. Reduktion auf den projektiven Fall

Sei A eine endlich-dimensionale K-Algebra. In diesem Abschnitt werden wir Vermutung 9.16.(b) auf den Fall zurückführen, dass M ein projektiver, treuer A-Modul ist.

Lemma 10.1. *Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul; sei B die Bongartz-Vervollständigung von M. Sei $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$. Dann ist $\operatorname{Ext}^1_A(B,T) = 0$. Insbesondere ist nach 7.8.(c) $T \in \operatorname{Gen}(B)$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus der Bongartz-Folge $0 \to {}_AA \to E \to M^s \to 0$ durch Anwenden des Funktors $\operatorname{Hom}_A(\cdot, T)$. □

Lemma 10.2. *Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul; sei B die Bongartz-Vervollständigung von M. Sei $B \cong M \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_l$ mit T_i unzerlegbar für $i \in \{1, \ldots, l\}$. Dann ist $T_i \in \operatorname{Cogen}(B/T_i)$ für $i \in \{1, \ldots, l\}$.*

Beweis. Sei $B_i = B/T_i$. Da M treu ist, ist auch B_i treu. Ferner ist B_i fast vollständig. Es existieren also nach 7.16 zwei Komplemente X und Y mit $X \ncong Y$ zu B_i. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $X = T_i$. Falls $X \notin \operatorname{Cogen}(B_i)$, so existiert nach 7.16 eine kurze exakte Folge

$$0 \to Y \to \tilde{T} \to X \to 0$$

mit $B_i \oplus Y \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$. Wegen $\operatorname{Ext}^1_A(X,Y) \neq 0$ folgt aber auch $\operatorname{Ext}^1_A(B, B_i \oplus Y) \neq 0$. Widerspruch zu Lemma 10.1. □

Für das nächste Lemma benötigen wir folgende

Definition 10.3. Sei $f : Y \to Z$ eine Morphismus von A-Moduln. Seien

$$Y = \bigoplus_{i=1}^{r} Y_i,$$
$$Z = \bigoplus_{j=1}^{s} Z_j$$

Zerlegungen in direkte, unzerlegbare Summanden von Y beziehungsweise Z. Für $i \in \{1, \ldots, r\}$ sei $\iota_i : Y_i \to Y$ die kanonische Injektion, sei $\pi_j : Z \to Z_j$ die kanonische Surjektion für $j \in \{1, \ldots, s\}$. Wir nennen für

$$i \in \{1, \ldots, r\},$$
$$j \in \{1, \ldots, s\}$$

die Morphismen

$$\pi_j \circ f \circ \iota_i$$

Komponentenabbildungen von f. Durch den Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_A(Y,Z) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} \bigoplus_{j=1}^{s} \operatorname{Hom}_A(Y_i, Z_j)$$

ist f durch seine Komponentenabbildungen eindeutig bestimmt. Wir sagen, dass *f keinen Isomorphismus als Komponentenabbildung besitzt*, falls keine Komponentenabbildung von f ein Isomorphismus ist.

Lemma 10.4. *Seien $X_1, \ldots, X_m \in \operatorname{mod}(A)$, sei*

$$b = \max\{\mathit{Länge}(X) \mid X \in \operatorname{add}(\bigoplus_{i=1}^{m} X_i) \ \mathit{unzerlegbar}\}.$$

Sei $m > 2^b$. Seien für $i \in \{1, \dots, m-1\}$

$$f_i : X_i \to X_{i+1}$$

Morphismen von A-Moduln, welche keinen Isomorphismus als Komponentenabbildung besitzen. Dann ist die Verkettung

$$f = f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1 = 0.$$

Beweis. Wir wählen uns für $X_1, \dots, X_m$ direkte Summenzerlegungen in unzerlegbare Summanden und betrachten die zugehörigen Komponentenabbildungen. Sei φ eine Komponentenabbildung von f. Dann ist φ eine Summe von Abbildungen der Form

$$\psi = \varphi_{m-1} \circ \dots \circ \varphi_1,$$

wobei φ_i eine Komponentenabbildung von f_i ist. Nach dem Lemma von Harada und Sai (Lemma 2.15) ist $\psi = 0$. Somit ist auch $\varphi = 0$. Da wir so zeigen können, dass alle Komponentenabbildungen von f trivial sind, folgt auch $f = 0$. □

Lemma 10.5. *Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul; sei B die Bongartz-Vervollständigung von M. Sei $B \cong M \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_l$ mit T_i unzerlegbar für alle $i \in \{1, \dots, l\}$. Dann ist $T_1 \oplus \dots \oplus T_l \in \mathrm{Cogen}(M)$.*

Beweis. Sei $i \in \{1, \dots, l\}$. Dann gibt es nach Lemma 10.2 eine injektive Abbildung

$$\varphi_i : T_i \hookrightarrow X_i$$

mit $X_i \in \mathrm{add}(B/T_i)$. Sei

$$X_i \cong X_i^M \oplus \bar{X}_i$$

mit $X_i^M \in \mathrm{add}(M)$ und $\bar{X}_i \in \mathrm{add}(B/(M \oplus T_i))$. Dann besitzt φ_i offensichtlich keinen Isomorphismus als Komponentenabbildung.

Sei nun $N \in \mathrm{add}(B/M)$, $N = \bigoplus_{i=1}^{l} T_i^{a_i}$. Wir betrachten die injektive Abbildung

$$\varphi_N = \bigoplus_{i=1}^{l} \varphi_i^{a_i} : N \to \bigoplus_{i=1}^{l} X_i^{a_i} \cong \bigoplus_{i=1}^{l} X_i^{M^{a_i}} \oplus \bigoplus_{i=1}^{l} \bar{X}_i^{a_i}.$$

Dann besitzt φ_N keinen Isomorphismus als Komponentenabbildung. Wir setzen

$$N_M = \bigoplus_{i=1}^{l} X_i^{M^{a_i}},$$

$$N' = \bigoplus_{i=1}^{l} \bar{X}_i^{a_i}.$$

Sei nun wieder $i \in \{1, \dots, l\}$. Sei $N = T_i$. Wir erhalten eine Kette von Injektionen

$$N \xrightarrow{\varphi_N} N_M \oplus N' \xrightarrow{\mathrm{id}_{N_M} \oplus \varphi_{N'}} N_M \oplus (N')_M \oplus N'' \to \dots \to \bigoplus_{j=1}^{m} (N^{(j)})_M \oplus N^{(m+1)}$$

mit $\bigoplus_{j=1}^{m} (N^{(i)})_M \in \mathrm{add}(M)$. Hierbei sei $N^{(1)} = N'$ und $N^{(j)} = (N^{(j-1)})'$ für $j > 1$.

Sei Φ_m die Verkettung dieser Abbildungen. Sei $b = \max_{i=1}^{l} \text{Länge}(T_i)$. Sei $m \geq 2^{b-1}$. Sei

$$\pi : \bigoplus_{j=1}^{m} (N^{(j)})_M \oplus N^{(m+1)} \to N^{(m+1)}$$

die kanonische Projektion. Dann ist nach Lemma 10.4

$$\pi \circ \Phi_m = 0.$$

Da aber Φ_m als Verkettung von injektiven Abbildungen wieder injektiv ist, folgt, dass

$$N \in \text{Cogen}(\bigoplus_{j=1}^{m} (N^{(j)})_M)$$

und somit auch $N \in \text{Cogen}(M)$. □

Lemma 10.6. *Sei $T \in \text{mod}(A)$ ein Kippmodul, sei $X \in \text{Gen}(T)$ mit $\text{pd}_A(X) \leq 1$. Dann gibt es eine kurze exakte Folge*

$$0 \to T_1 \to T_0 \to X \to 0$$

mit $T_0, T_1 \in \text{add}(T)$.

Beweis. Sei $X \in \text{Gen}(T)$ mit $\text{pd}_A(X) \leq 1$. Sei $f : T_0 \to X$ eine minimale $\text{add}(T)$-Rechtsapproximation von X, sei $T_1 = \ker(f)$. f ist surjektiv, da $X \in \text{Gen}(T)$. Wir haben also eine kurze exakte Folge

$$0 \to T_1 \to T_0 \to X \to 0.$$

Wir müssen noch zeigen, dass $T_1 \in \text{add}(T)$. Aus $\text{pd}_A(X) \leq 1$, $\text{pd}_A(T_0) \leq 1$ folgt $\text{pd}_A(T_1) \leq 1$. Nach Wakamatsus Lemma (Lemma 6.5) ist
$\text{Ext}_A^1(T, T_1) = 0$. Anwenden des Funktors $\text{Hom}_A(\cdot, T)$ liefert uns eine exakte Folge

$$0 = \text{Ext}_A^1(T_0, T) \to \text{Ext}_A^1(T_1, T) \to \text{Ext}_A^2(X, T) = 0.$$

Somit ist $\text{Ext}_A^1(T_1, T) = 0$. Anwenden des Funktors $\text{Hom}_A(\cdot, T_1)$ liefert uns eine exakte Folge

$$0 = \text{Ext}_A^1(T_0, T_1) \to \text{Ext}_A^1(T_1, T_1) \to \text{Ext}_A^2(X, T_1) = 0.$$

Somit ist auch $\text{Ext}_A^1(T_1, T_1) = 0$. Mit Lemma 7.5 folgt $T_1 \in \text{add}(T)$. □

Lemma 10.7. *Sei $M \in \text{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul. Sei B die Bongartz-Vervollständigung von M. Sei $C = \text{End}_A(B)^{\text{op}}$. Sei*

$$F(\cdot) = \text{Hom}_A(B, \cdot) : \text{Gen}(B) \to \text{mod}(C).$$

Dann gilt für $X, Y \in \text{Gen}(B)$:

(a) $\text{Hom}_A(X, Y) = \text{Hom}_C(F(X), F(Y))$.
(b) $\text{Ext}_A^1(X, Y) = \text{Ext}_C^1(F(X), F(Y))$.
(c) *$F(M)$ ist treu und projektiv in $\text{mod}(C)$.*
(d) *Falls $\text{pd}_A(X) \leq 1$, so ist $\text{pd}_C(F(X)) \leq 1$.*

Beweis. (ad a) Siehe [3, Lemma VI.3.2.].

(ad b) Siehe [3, Lemma VI.3.2.].

(ad c) Sei $B = M \oplus T$. Da nach Lemma 10.5 gilt, dass $T \in \operatorname{Cogen}(M)$, gibt es eine exakte Folge

$$0 \to T \to M^s.$$

Durch Anwenden von F erhalten wir eine exakte Folge

$$0 \to F(T) \to F(M)^s.$$

Wegen $C = F(T) \oplus F(M)$, folgt die Behauptung.

(ad d) Da $X \in \operatorname{Gen}(B)$, $\operatorname{pd}_A(X) \leq 1$, gibt es nach Lemma 10.6 eine kurze exakte Folge

$$0 \to B_1 \to B_0 \to X \to 0$$

mit $B_0, B_1 \in \operatorname{add}(B)$. Durch Anwenden von F erhalten wir

$$0 \to F(B_1) \to F(B_0) \to F(X) \to 0$$

und haben somit eine projektive Auflösung von $F(X)$ der Länge 1 erhalten. □

Proposition 10.8. *Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul. Sei B die Bongartz-Vervollständigung von M. Sei $C = \operatorname{End}_A(B)^{\mathrm{op}}$. Sei*

$$F(\cdot) = \operatorname{Hom}_A(B, \cdot) : \operatorname{Gen}(B) \to \operatorname{mod}(C).$$

Sei $P_M = F(M) \in \operatorname{mod}(C)$. Dann gibt es einen Unterköcher Λ von $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}(P_M)$, der abgeschlossen unter Vorgänger und Nachfolger in $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}(P_M)$ ist, so dass gilt:

$$\Lambda \cong \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$$

als Köcher.

Beweis. Sei $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ ein Kippmodul über A. Nach Lemma 10.1 ist $T \in \operatorname{Gen}(B)$. Nach Lemma 10.7 ist $F(T)$ ein Kippmodul über C. Des weiteren gilt $F(T) \in \mathcal{T}_{\mathrm{C}}(P_M)$. Sei

$$0 \to T_i \to \tilde{T} \to T_i' \to 0$$

eine Austauschfolge, die zu einem Pfeil zwischen T und T' in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ korrespondiert. Anwenden von F liefert uns eine Austauschfolge zwischen $F(T)$ und $F(T')$ und somit einen Pfeil zwischen $F(T)$ und $F(T')$ in $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}(P_M)$. Da aber M und P_M treu sind, sind $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ und $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}(P_M)$ l-regulär. Somit folgt die Behauptung. □

Korollar 10.9. *Sei $M \in \operatorname{mod}(A)$ ein treuer partieller Kippmodul. Sei B die Bongartz-Vervollständigung von M. Sei $C = \operatorname{End}_A(B)^{\mathrm{op}}$. Sei*

$$F(\cdot) = \operatorname{Hom}_A(B, \cdot) : \operatorname{Gen}(B) \to \operatorname{mod}(C).$$

Sei $P_M = F(M) \in \operatorname{mod}(C)$. Sei $\mathcal{T}_{\mathrm{C}}(P_M)$ zusammenhängend. Dann ist auch $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.

Sei $\mathcal{A}$ eine Klasse von endlich-dimensionalen, basischen Algebren über K. Wir sagen $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter Kippen, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ und für jeden Kippmodul $T \in \operatorname{mod}(A)$ gilt, dass $\operatorname{End}_A(T)^{\mathrm{op}} \in \mathcal{A}$. Wir sagen, $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen unter derivierter Äquivalenz, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ und für jede basische, endlich-dimensionale Algebra B über K, die deriviert äquivalent zu A ist, gilt, dass $B \in \mathcal{A}$.

Es gilt folgender

Satz 10.10. *Falls $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter derivierter Äquivalenz ist, so ist $\mathcal{A}$ auch abgeschlossen unter Kippen.*

Beweis. Folgt aus Satz 7.13. □

Für eine Klasse $\mathcal{A}$ von endlich-dimensionalen, basischen Algebren über K stellen wir die folgenden Vermutungen auf:

Vermutung 10.11 ($\mathcal{TA}$)**.** *Sei $A \in \mathcal{A}$. Sei M ein treuer partieller Kippmodul über A. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Vermutung 10.12 ($\mathcal{TAP}$)**.** *Sei $A \in \mathcal{A}$. Sei M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul über A. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Wir erhalten folgendes

Korollar 10.13. *Sei $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter Kippen. Dann gilt*

$$(\mathcal{TAP}) \Rightarrow (\mathcal{TA}).$$

Beweis. Folgt aus Korollar 10.9. □

Korollar 10.14. *Sei $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter derivierter Äquivalenz. Dann gilt*

$$(\mathcal{TAP}) \Rightarrow (\mathcal{TA}).$$

Beweis. Folgt aus Korollar 10.13 und Satz 10.10. □

Teil 3. Kippmoduln über deriviert speziell biseriellen Algebren

11. Fadenalgebren und Fadenmoduln

Im folgenden Abschnitt definieren wir Fadenalgebren und Fadenmoduln und geben eine Einführung in die Kombinatorik von Fadenmoduln. Der Abschnitt orientiert sich teilweise stark an [46], siehe auch [12, 15, 53].

Definition 11.1. (a) Sei Q ein endlicher Köcher, sei $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal. Wir nennen das Paar (Q, I) ein *Fadenpaar*, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für jedes $i \in Q_0$ gibt es höchstens zwei $\alpha \in Q_1$ mit $s(\alpha) = i$ und höchstens zwei $\beta \in Q_1$ mit $t(\beta) = i$.
(2) I wird von Nullrelationen erzeugt.
(3) Für jedes $a \in Q_1$ gibt es höchstens ein $b \in Q_1$ mit $ab \notin I$ und höchstens ein $c \in Q_1$ mit $ca \notin I$.

(b) Sei A eine endlich-dimensionale K-Algebra. Wir nennen A *Fadenalgebra*, falls es ein Fadenpaar (Q, I) gibt mit

$$A \cong KQ/I.$$

Bemerkung 11.2. Wenn wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit von einer Fadenalgebra $A = KQ/I$ reden, gehen wir davon aus, dass das Paar (Q, I) ein Fadenpaar ist.

Beispiel 11.3. *Sei Q der Köcher*

$$\begin{tikzcd} & 4 \arrow[dl, "e"'] \arrow[d, "d"] & \\ 1 \arrow[r, "a"'] & 2 \arrow[r, shift left, "b"] \arrow[r, shift right, "c"'] & 3 \end{tikzcd}$$

und sei $I = \langle ca, bd \rangle$. Dann ist $A = KQ/I$ eine Fadenalgebra.

Beispiel 11.4. *Sei S der Köcher*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend right, "d"'] & 3 \arrow[r, "c"] & 4 \end{tikzcd}$$

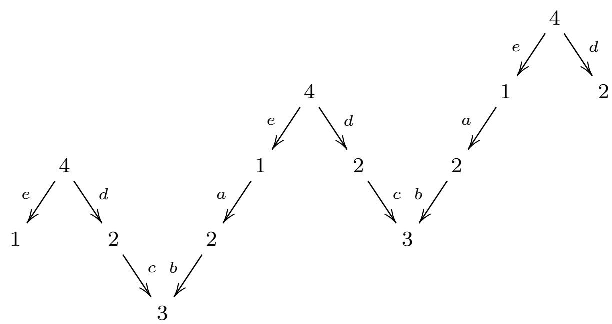
und sei $J = \langle da, cba \rangle$. Dann ist $B = KS/J$ eine Fadenalgebra.

Sei für diesen Abschnitt im folgenden immer $A = KQ/I$ eine Fadenalgebra. Zu $a \in Q_1$ sei a^- der *formale inverse Pfeil* mit $s(a^-) = t(a)$ und $t(a^-) = s(a)$. Wir setzen des weiteren $(a^-)^- = a$. Sei Q_1^- die Menge aller inversen Pfeile.

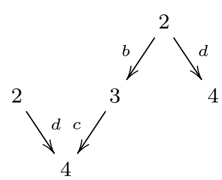
Definition 11.5. Ein Wort $W = w_1 \dots w_r$ mit $w_i \in Q_1 \cup Q_1^-$ für $i \in \{1, \dots, r\}$ heißt *Faden*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $s(w_i) = t(w_{i+1})$ für alle $1 \leq i \leq r-1$.
(ii) $w_i \neq w_{i+1}^-$ für alle $1 \leq i \leq r-1$.
(iii) Weder $w_i w_{i+1} \dots w_{i+s}$ noch $w_{i+s}^- \dots w_{i+1}^- w_i^-$ liegen in I für alle $1 \leq i < i+s \leq r$.

Beispiel 11.6. *Seien Q und I wie in Beispiel 11.3. Sei*
$$W = ed^{-}c^{-}baed^{-}c^{-}baed^{-}.$$
Dann ist W ein Faden über A. Wir visualisieren W folgendermaßen:



Beispiel 11.7. *Seien S und J wie in Beispiel 11.4. Sei*
$$V = d^{-}cbd^{-}.$$
Dann ist V ein Faden über B. Wir visualisieren V folgendermaßen:



Für einen Faden $W = w_1 \dots w_r$ setzen wir $s(W) = s(w_r)$ und $t(W) = t(w_1)$. Des weiteren sei r die Länge von W. Wenn $W = w_1 \dots w_r$ ein Faden der Länge $r \geq 1$ ist, so setzen wir $W^{-} = w_r^{-} \dots w_1^{-}$.

Zusätzlich definieren wir für jedes $i \in Q_0$ zwei Fäden $1_{(i,1)}$ und $1_{(i,-1)}$ der Länge 0. Wir setzen $s(1_{(i,t)}) = t(1_{(i,t)}) = i$ für $t \in \{1, -1\}$. Weiter setzen wir $1_{(i,t)}{}^{-} = 1_{(i,-t)}$. Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller Fäden über A. Für zwei Fäden $C, D \in \mathcal{S}$ schreiben wir $C \sim D$, falls $C = D$ oder $C = D^{-}$.

Seien nun $\sigma, \epsilon : Q_1 \to \{1, -1\}$ zwei Abbildungen, so dass folgendes gilt:

(1) Falls $a_1 \neq a_2 \in Q_1$ mit $t(a_1) = t(a_2)$, dann ist $\epsilon(a_1) \neq \epsilon(a_2)$.
(2) Falls $b_1 \neq b_2 \in Q_1$ mit $s(b_1) = s(b_2)$, dann ist $\sigma(b_1) \neq \sigma(b_2)$.
(3) Falls $a, b \in Q_1$ mit $s(b) = t(a)$ und $ba \notin I$, so ist $\sigma(b) \neq \epsilon(a)$.
(4) Sei $i \in Q_0$, so dass es eindeutige Pfeile $a, b \in Q_1$ gibt mit $t(a) = i, s(b) = i$. Falls $ba \in I$, so ist $\sigma(b) = \epsilon(a)$.

Solche Abbildungen existieren (siehe z.B. [12]). Für $a \in Q_1$ setzen wir $\sigma(a^{-}) = \epsilon(a)$ und $\epsilon(a^{-}) = \sigma(a)$. Für einen Faden $W = w_1 \dots w_r$ setzen wir $\sigma(W) = \sigma(w_r)$ und $\epsilon(W) = \epsilon(w_1)$. Außerdem setzen wir $\sigma(1_{(i,t)}) = -t$ und $\epsilon(1_{(i,t)}) = t$.

Seien $V = v_1 \dots v_r, W = w_1 \dots w_s$ Fäden der Länge ≥ 1. Falls $v_1 \dots v_r w_1 \dots w_r$ wieder ein Faden ist, so bezeichnen wir ihn mit VW und nennen ihn die *Hintereinanderschaltung* von V und W. Für einen beliebigen Faden W setzen wir

$W1_{(s(W),t)} = W$, falls $\sigma(W) = -t$. Wir setzen $1_{(t(W),t)}W = W$, falls $\epsilon(W) = t$. Dieses sind die einzigen Fälle, in denen die Hintereinanderschaltung mit einem Faden der Länge 0 definiert ist.

Sei nun $W = w_1 \dots w_r$ ein Faden über A. Wir ordnen W einen A-Modul $\mathcal{M}(W)$ in der folgenden Weise zu: Für $i \in \{1, \dots, r\}$ setzen wir

$$b_i = \begin{cases} t(w_i), & \text{falls } w_i \in Q_1; \\ s(w_i), & \text{falls } w_i \in Q_1^-. \end{cases}$$

Außerdem setzen wir

$$b_{r+1} = \begin{cases} s(w_{r+1}), & \text{falls } w_i \in Q_1; \\ t(w_{r+1}), & \text{falls } w_i \in Q_1^-. \end{cases}$$

Sei nun $\{\hat{b}_1, \dots, \hat{b}_{r+1}\}$ eine K-Basis von $\mathcal{M}(W)$. Sei $a \in Q_1$. Sei

$$x = \sum_{i=1}^{r+1} \lambda_i \hat{b}_i.$$

Dann setzen wir

$$ax = \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,r\} \\ w_i = a}} \lambda_{i+1} \hat{b}_i + \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,r\} \\ w_i = a^-}} \lambda_i \hat{b}_{i+1}.$$

Ferner sei für $j \in Q_0$

$$e_j x = \sum_{\substack{i \in \{1,\dots,r+1\} \\ b_i = e_j}} \lambda_i \hat{b}_i.$$

Dies definiert uns eine A-Modul-Struktur auf $\mathcal{M}(W)$. Für einen Faden $W = 1_{(i,t)}$ der Länge 0 setzen wir $\mathcal{M}(W) = S_i$. Falls W das leere Wort ist, setzen wir $\mathcal{M}(W) = 0$. Wir nennen $\mathcal{M}(W)$ einen *Fadenmodul*, falls W nicht das leere Wort ist.

Beispiel 11.8. *Seien S und J wie in Beispiel 11.4, sei $W = d^- bc$. Dann ist $\mathcal{M}(W) \cong P_2$. Die zugehörige Skizze sieht wie folgt aus:*

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "d"'] \arrow[dr, "b"] & & \\ 4 & & 3 \arrow[dr, "c"] & \\ & & & 4 \end{tikzcd}$$

Bemerkung 11.9. (a) Wir nennen ein Wort W in $Q_1 \cup {Q_1}^-$ *zyklisch*, falls $s(W) = t(W)$.

(b) Wir nennen ein Wort W in $Q_1 \cup {Q_1}^-$ *periodisch*, falls es ein Wort V in $Q_1 \cup {Q_1}^-$ und ein $n \geq 2$ gibt mit

$$W = V^n.$$

Hierbei bezeichnet V^n die n-fache Hintereinanderschaltung des Wortes V.

(c) Sei B ein zyklischer, nicht-periodischer Faden über A. Dann kann man B eine Familie

$$\{\mathcal{M}(B, \lambda, n) | \lambda \in K^\star, n \in \mathbb{N}\}$$

von unzerlegbaren Moduln zuordnen, welche Bandmoduln genannt werden. Wir werden in dieser Arbeit nicht weiter auf Bandmoduln eigehen.

Es gilt folgender

Satz 11.10. *Sei A eine Fadenalgebra.*

(a) *Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ ein Fadenmodul oder ein Bandmodul. Dann ist M unzerlegbar.*
(b) *Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ unzerlegbar. Dann ist M entweder ein Fadenmodul oder ein Bandmodul.*

Beweis. Siehe [12, Theorem in Abschnitt 3], [53, Proposition 2.3]. □

Lemma 11.11. *Sei A eine Fadenalgebra. Sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ unzerlegbar mit*

$$\mathrm{Ext}^1_A(M, M) = 0.$$

Dann ist M ein Fadenmodul.

Beweis. Siehe [12, Abschnitt 3]. □

Korollar 11.12. *Jeder unzerlegbare direkte Summand eines (partiellen) Kippmoduls über einer Fadenalgebra ist ein Fadenmodul.*

Beweis. Siehe [12, Abschnitt 3]. □

Bemerkung 11.13. Seien $X, Y \in \mathrm{mod}(A)$, $X = \mathcal{M}(W), Y = \mathcal{M}(W')$ für Fäden W, W'. Dann gilt:

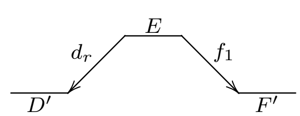
$$X \cong Y \Leftrightarrow W = W' \text{ oder } W = W'^-.$$

Definition 11.14. (a) Für einen Faden W setzen wir

$$\mathcal{P}(W) = \{(D, E, F) \mid D, E, F \in \mathcal{S} \text{ und } DEF = W\}.$$

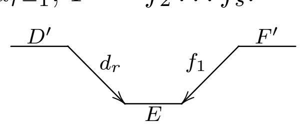
(b) Wir nennen $(D, E, F) \in \mathcal{P}(W)$ einen *Faktor* von W, wenn folgendes gilt:
   (1) D hat Länge 0 oder $D = d_1 \dots d_r$ mit $d_r \in Q_1$.
   (2) F hat Länge 0 oder $F = f_1 \dots f_s$ mit $f_1 \in Q_1^-$.

   Das zugehörige Bild, das man vor Augen haben sollte, sieht folgendermaßen aus. Sei hierbei $D' = d_1 \dots d_{r-1}$, $F' = f_2 \dots f_s$.



(c) Wir nennen (D, E, F) einen *Subfaktor* von W, wenn folgendes gilt:
   (1) D hat Länge 0 oder $D = d_1 \dots d_r$ mit $d_r \in Q_1^-$.
   (2) F hat Länge 0 oder $F = f_1 \dots f_s$ mit $f_1 \in Q_1$.

   Die entsprechende Skizze für einen Subfaktor sieht folgendermaßen aus. Hierbei sei $D' = d_1 \dots d_{r-1}$, $F' = f_2 \dots f_s$.



Sei $\mathcal{F}(W)$ die Menge aller Faktoren von W, $\mathcal{S}(W)$ die Menge aller Subfaktoren von W. Setze $(D,E,F)^- = (F^-,E^-,D^-)$. Falls $(D,E,F) \in \mathcal{P}(W)$, so ist $(D,E,F)^- \in \mathcal{P}(W^-)$.

Beispiel 11.15. *Seien Q und I wie in Beispiel 11.3, sei $W = ed^-c^-baed^-c^-baed^-$ wie in 11.6. Dann ist*

$$(ed^-c^-b, aed^-c^-bae, d^-) \in \mathcal{F}(W),$$
$$(ed^-, c^-ba, ed^-c^-baed^-) \in \mathcal{S}(W).$$

Bemerkung 11.16. (a) Sei W ein Faden, sei $(D,E,F) \in \mathcal{F}(W)$. Dann gibt es einen kanonischen Epimorphismus von A-Moduln

$$\mathcal{M}(W) \twoheadrightarrow \mathcal{M}(E).$$

(b) Sei W ein Faden, sei $(D,E,F) \in \mathcal{S}(W)$. Dann gibt es einen kanonischen Monomorphismus von A-Moduln

$$\mathcal{M}(E) \hookrightarrow \mathcal{M}(W).$$

Beweis. Siehe [15]. □

Definition 11.17. (a) Wir nennen $(D,E,F) \in \mathcal{P}(W)$ *linksseitig*, falls D die Länge 0 hat.

(b) Wir nennen $(D,E,F) \in \mathcal{P}(W)$ *rechtsseitig*, falls F die Länge 0 hat.

(c) Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{S}$. Wir nennen ein Paar

$$(a_1,a_2) = ((D_1,E_1,F_1),(D_2,E_2,F_2)) \in \mathcal{F}(W_1) \times \mathcal{S}(W_2)$$

zulässig, falls $E_1 \sim E_2$.

(d) Wir nennen ein zulässiges Paar $((D_1,E_1,F_1),(D_2,E_2,F_2))$ *perfekt*, falls $E_1 = E_2$.

(e) Wir nennen ein zulässiges Paar (a_1,a_2) *linksseitig* (beziehungsweise *rechtsseitig*), falls es perfekt ist und a_1, a_2 linksseitig (beziehungsweise rechtsseitig) sind.

(f) Wir nennen ein zulässiges Paar (a_1,a_2) *einseitig*, falls es linksseitig oder rechtsseitig ist.

(g) Wir nennen ein zulässiges Paar (a_1,a_2) *schwach einseitig*, falls (a_1,a_2) oder (a_1,a_2^-) einseitig ist.

Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{S}$, sei

$$\mathcal{A}(W_1,W_2) \subset \mathcal{F}(W_1) \times \mathcal{S}(W_2)$$

die Menge aller zulässigen Paare. Sei $a = (a_1,a_2) \in \mathcal{A}(W_1,W_2)$. Wir setzen $a(l) = a$, falls a perfekt ist, und $a(l) = (a_1^-, a_2)$ sonst. Wir setzen $a(r) = a$, falls a perfekt ist, und $a(r) = (a_1, a_2^-)$ sonst. Die Paare $a(l), a(r)$ sind perfekt. Es gilt

$$a(l) \text{ einseitig} \Leftrightarrow a(r) \text{ einseitig} \Leftrightarrow a \text{ schwach einseitig}.$$

Bemerkung 11.18. Zu jedem $a \in \mathcal{A}(W_1,W_2)$ gibt es einen kanonischen Modulhomomorphismus $f_a : \mathcal{M}(W_1) \to \mathcal{M}(W_2)$ (nämlich die Verkettung der beiden kanonischen Morphismen aus Bemerkung 11.16, siehe auch [15]). Wir nennen diese Morphismen f_a *kanonische Abbildungen*. Wir nennen f_a *perfekt* (beziehungsweise *linksseitig, rechtsseitig, einseitig, schwach einseitig*), falls a die entsprechende Eigenschaft besitzt. Falls $f_a : \mathcal{M}(W_1) \to \mathcal{M}(W_2)$ und $f_b : \mathcal{M}(W_2) \to \mathcal{M}(W_3)$ kanonische Abbildungen sind, dann ist entweder $f_b \circ f_a : \mathcal{M}(W_1) \to \mathcal{M}(W_3)$ eine kanonische Abbildung oder $f_b \circ f_a = 0$.

Beispiel 11.19. *Seien Q und I wie in Beispiel 11.3. Seien*

$$W = cb^-,$$
$$V = e^-a^-d.$$

Dann ist $\mathcal{M}(W) \cong P_2$, $\mathcal{M}(V) \cong I_2$. Sei für geeignete Vorzeichen

$$\tilde{a} = ((c, 1_{(2,\pm 1)}, b^-), (e^-a^-, 1_{(2,\pm 1)}, d)) \in \mathcal{F}(W) \times \mathcal{S}(V).$$

Dann entspricht $f_{\tilde{a}} : P_2 \to I_2$ der Verkettung der projektiven Decke

$$P_2 \twoheadrightarrow S_2$$

mit der injektiven Hülle

$$S_2 \hookrightarrow I_2.$$

Die Wichtigkeit kanonischer Abbildungen unterstreicht folgender

Satz 11.20. *Seien $W_1, W_2 \in \mathcal{S}$. Dann ist $\{f_a \mid a \in \mathcal{A}(W_1, W_2)\}$ eine K-Basis von* $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{M}(W_1), \mathcal{M}(W_2))$.

Beweis. Siehe [15, Theorem in Abschnitt 2]. □

12. Die Auslander-Reiten Verschiebung von Fadenmoduln

Sei $A = KQ/I$ eine Fadenalgebra. Sei $W = w_1 \dots w_r \in \mathcal{S}$. Sei $M = \mathcal{M}(W) \in \mathrm{mod}(A)$.

Definition 12.1. (a) *W startet in einem Tal*, falls es kein $a \in Q_1^-$ gibt, so dass Wa ein Faden ist.
(b) *W endet in einem Tal*, falls es kein $a \in Q_1$ gibt, so dass aW ein Faden ist.

Falls W in einem Tal startet, sei

$$r' = \max(\{1 \le i \le r \mid w_i \in Q_1\} \cup \{0\}).$$

Wir setzen

$$M_{\text{rechts}} = \begin{cases} \mathcal{M}(w_1 \dots w_{r'-1}), & \text{falls } r' \ge 2, \\ S_{t(w_1)}, & \text{falls } r' = 1, \\ 0, & \text{falls } r' = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist M_{rechts} ein Untermodul von M via eines kanonischen Monomorphismus

$$f_{\text{rechts}} : M_{\text{rechts}} \hookrightarrow M.$$

Falls W nicht in einem Tal startet, gibt es ein eindeutiges $a \in Q_1^-$, so dass Wa ein Faden ist. Sei $i = s(Wa) = s(a)$. Dann gibt es einen eindeutigen (möglicherweise leeren) maximalen Faden $P = p_1 \dots p_q$, so dass alle $p_j \in Q_1$ und so dass WaP wieder ein Faden ist. Setze

$$M_{\text{rechts}} = \mathcal{M}(WaP).$$

Offensichtlich ist M ein Faktormodul von M_{rechts} via eines kanonischen Epimorphismus

$$f_{\text{rechts}} : M_{\text{rechts}} \twoheadrightarrow M.$$

Dual dazu definieren wir einen Modul M_{links} mit einem Morphismus

$$f_{\text{links}} : M_{\text{links}} \to M.$$

Es gilt folgendes

Lemma 12.2. *Sei $\tau : \operatorname{mod}(A) \to \operatorname{mod}(A)$ die Auslander-Reiten Verschiebung. Sei $M = \mathcal{M}(W)$ wie oben. Dann gilt*

$$\tau(M) \cong \ker((f_{\text{links}}, f_{\text{rechts}}) : M_{\text{links}} \oplus M_{\text{rechts}} \to M).$$

Falls M nicht projektiv ist, so ist die kurze exakte Folge

$$0 \to \tau(M) \to M_{\text{links}} \oplus M_{\text{rechts}} \to M \to 0$$

die Auslander-Reiten Folge mit Endterm M. Insbesondere ist $\tau(M)$ wieder ein Fadenmodul.

Beweis. Siehe [12, Proposition in Abschnitt 3]. □

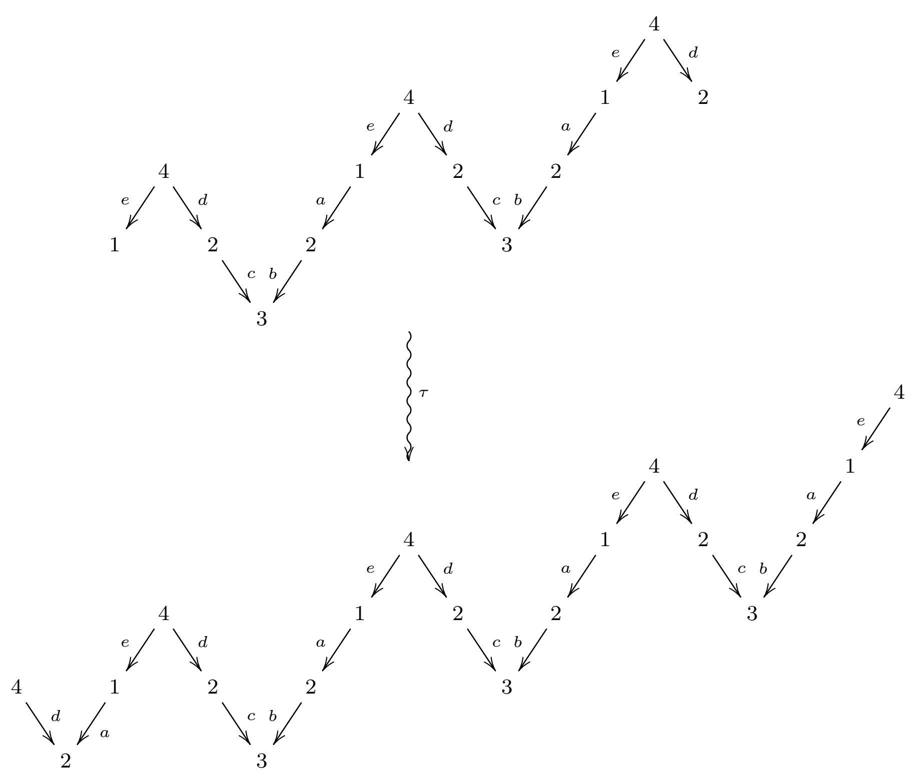
Beispiel 12.3. *Seien Q und I wie in Beispiel 11.3. Sei*

$$W = ed^{-}c^{-}baed^{-}c^{-}baed^{-}.$$

wie in Beispiel 11.6. Sei

$$W' = d^{-}aed^{-}c^{-}baed^{-}c^{-}baed^{-}c^{-}bae.$$

Dann ist $\mathcal{M}(W') \cong \tau(\mathcal{M}(W))$:



Beispiel 12.4. *Seien S und J wie in Beispiel 11.4. Sei*

$$V = d^- cbd^-$$

wie in Beispiel 11.7. Sei

$$V' = bd^- c.$$

Dann ist $\mathcal{M}(V') \cong \tau(\mathcal{M}(V))$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & 2 \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "d"] & & & & & & & \\
2 \arrow[dr, "d"] & & 3 \arrow[dl, "c"'] & & 4 & {} \arrow[r, rightsquigarrow, "\tau"] & {} & & 2 \arrow[dl, "b"'] \arrow[dr, "d"] & & 3 \arrow[dl, "c"'] \\
 & 4 & & & & & & 3 & & 4 &
\end{tikzcd}$$

13. Repetitive Algebren

Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Dann trägt $\mathrm{D}({}_AA) = \mathrm{Hom}_K({}_AA, K)$ eine A-A-Bimodulstruktur mittels

$$a \cdot f \cdot b = f'$$

für alle $a, b \in A$ sowie alle $f \in \mathrm{D}({}_AA)$, wobei f' die Abbildung ist mit

$$f'(x) = f(bxa).$$

Definition 13.1. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Wir definieren die *repetitive Algebra* $\hat{A}$ von A wie folgt. Als K-Vektorraum ist $\hat{A}$ isomorph zu

$$\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A \oplus \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{D}({}_AA).$$

Für $i \in \mathbb{Z}$ bezeichnen wir die i-te Kopie von A mit A_i und die i-te Kopie von $\mathrm{D}({}_AA)$ mit $\mathrm{D}({}_AA)_i$. Für ein Element $a \in A$ (beziehungsweise ein Element $f \in \mathrm{D}({}_AA)$) bezeichnen wir mit a_i (beziehungsweise f_i) das zugehörige Element in A_i (beziehungsweise in $\mathrm{D}({}_AA)_i$). Wir schreiben die Elemente von $\hat{A}$ als

$$(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}},$$

wobei fast alle $a_i = 0$ und fast alle $f_i = 0$. Die Multiplikation in $\hat{A}$ ist gegeben durch

$$(a_i, f_i)_{i \in \mathbb{Z}} \cdot (b_i, g_i)_{i \in \mathbb{Z}} = (a_i b_i, a_i g_i + f_i b_{i-1})_{i \in \mathbb{Z}}.$$

Bemerkung 13.2. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Wir können $\hat{A}$ auffassen als die (unendliche) Matrixalgebra

$$\begin{pmatrix}
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & A & 0 & 0 & \dots \\
\dots & D({}_AA) & A & 0 & \dots \\
\dots & 0 & D({}_AA) & A & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}$$

mit Einträgen A auf der Diagonalen und Einträgen $D({}_AA)$ auf der Subdiagonalen und der Konvention

$$\mathrm{D}({}_AA) \cdot \mathrm{D}({}_AA) = 0.$$

Sei nun $A = KQ/I$ eine Algebra, die durch einen Köcher mit Relationen gegeben ist, so dass das zulässige Ideal I durch Nullrelationen und Kommutativitätsrelationen erzeugt wird. Dann ist auch $\hat{A} = K\hat{Q}/\hat{I}$ durch einen Köcher mit Relationen gegeben und wir können $\hat{Q}$ und $\hat{I}$ explizit beschreiben (nach [47]):

Sei $Q_0 = \{1, \dots, n\}$ und $Q_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}$. Wir nennen einen Weg w in Q *maximal* in (Q, I), falls jeder Weg in Q, der w als echten Unterweg enthält, schon in I liegt. Seien $m_1, \dots, m_r$ die maximalen Wege in (Q, I). Seien

$$\begin{aligned} I &= \langle r_1, \dots, r_t \rangle, \\ r_i &= \sum_{k=1}^{l_i} \rho_{i,k}, \\ \rho_{i,k} &= \alpha_{i,k}^{s(i,k)} \dots \alpha_{i,k}^1 \end{aligned}$$

mit $\alpha_{i,k}^u \in Q_1$ für alle

$$\begin{aligned} &i \in \{1, \dots, t\}, \\ &k \in \{1, \dots, l_i\}, \\ &u \in \{1, \dots, s(i,k)\}. \end{aligned}$$

Sei $\hat{Q}_0 = \mathbb{Z} \times Q_0$. Für jeden Pfeil $\alpha \in Q_1$ und jedes $j \in \mathbb{Z}$ fügen wir zunächst einen Pfeil

$$\alpha^j : (j, s(\alpha)) \to (j, t(\alpha))$$

hinzu. Außerdem fügen wir für jedes $j \in \mathbb{Z}$ und jeden maximalen Weg m in (Q, I) einen Pfeil

$$m^j : (j, t(m)) \to (j-1, s(m))$$

zu $\hat{Q}$ hinzu.

Wir setzen

$$\hat{Q}_1 = \{\alpha_i^j \mid i \in \{1, \dots, s\}, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{m_i^j \mid i \in \{1, \dots, r\}, j \in \mathbb{Z}\}.$$

Um $\hat{I}$ zu definieren, brauchen wir noch einige Definitionen:

Für $j \in \mathbb{Z}$ seien

$$\begin{aligned} \rho_{i,k}^j &= \alpha_{i,k}^{s(i,k)\,j} \dots \alpha_{i,k}^{1\ j}, \\ r_i^j &= \sum_{k=1}^{l_i} \rho_{i,k}^j, \\ \tilde{I} &= \langle r_i^j \mid j \in \mathbb{Z}, i \in \{1, \dots, t\} \rangle. \end{aligned}$$

Für einen Weg $q = \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_u}$ in (Q, I) definieren wir einen Weg q^j in $(\hat{Q}, \hat{I})$ folgendermaßen:

$$q^j = \alpha_{i_1}^j \dots \alpha_{i_u}^j.$$

Seien nun q_1, q_2 Wege in (Q, I) und sei $m = q_1 q_2$ ein maximaler Weg in (Q, I). Dann nennen wir für alle $j \in \mathbb{Z}$ den Weg

$$q_2^{j-1} m^j q_1^j$$

einen *vollen Weg* in $(\hat{Q}, \hat{I})$.

Nun können wir endlich $\hat{I}$ definieren. $\hat{I}$ wird von folgenden Relationen erzeugt:

(I_1) $\tilde{I} \subset \hat{I}$.
(I_2) Sei q ein Weg in $(Q, \tilde{I})$, der einen Pfeil m^j enthält. Falls q kein Unterweg eines vollen Weges ist, so ist $q \in \hat{I}$.
(I_3) Seien $p = p_1 p_2 p_3$, $q = q_1 q_2 q_3$ maximale Wege in (Q, I) mit $p_2 = q_2$. Dann ist $p_3^{j-1} p^j p_1^j - q_3^{j-1} q^j q_1^j \in \hat{I}$.

Satz 13.3. *$\hat{A} \cong K\hat{Q}/\hat{I}$.*

Beweis. Siehe [47, Theorem in Abschnitt 3]. □

Beispiel 13.4. *Sei Q der Köcher*

$$1 \xrightarrow{a} 2$$

und sei $I \subset KQ$ das Nullideal. Dann hat $\hat{Q}$ die Form

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\dots & (-1,1) \arrow[d, "a^{-1}"] & & (0,1) \arrow[d, "a^{0}"] & & (1,1) \arrow[d, "a^{1}"] & & (2,1) \arrow[d, "a^{2}"] & & \dots \\
\dots & (-1,2) \arrow[ul, "m^{-1}"'] & & (0,2) \arrow[ull, "m^{0}"'] & & (1,2) \arrow[ull, "m^{1}"'] & & (2,2) \arrow[ull, "m^{2}"'] & & \dots \arrow[ull, "m^{3}"']
\end{tikzcd}$$

und $\hat{I} = \langle a^{j-1} m^j a^j, m^j a^j m^{j+1} \mid j \in \mathbb{Z} \rangle$.

Proposition 13.5. (a) *Die repetitive Algebra $\hat{A}$ ist selbstinjektiv.*
(b) *Sei $(j, i) \in \hat{Q}_0$. Dann gilt*

$$P_{(j,i)} = I_{(j-1,i)}.$$

Beweis. (a) Siehe [23, Lemma II.2.2].
(b) Folgt aus [23, Beweis von Lemma II.2.2] und [47, Abschnitt 3].

□

Bemerkung 13.6. Wir erinnern noch einmal an die Definition der stabilen Modulkategorie aus Abschnitt 4.

(a) Seien $X, Y \in \operatorname{mod}(\hat{A})$. Dann setzen wir

$$\mathcal{I}(X,Y) = \{f \in \operatorname{Hom}_{\hat{A}}(X,Y) \mid f \text{ faktorisiert durch ein projektiv-injektives Objekt}\}.$$

Ferner setzen wir

$$\underline{\operatorname{Hom}}_{\hat{A}}(X,Y) = \operatorname{Hom}_{\hat{A}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y).$$

(b) Für eine Algebra A sei $\underline{\operatorname{mod}}(A)$ die Kategorie mit denselben Objekten wie $\operatorname{mod}(A)$ und den Morphismen

$$\operatorname{Hom}_{\underline{\operatorname{mod}}(A)}(X,Y) = \underline{\operatorname{Hom}}_A(X,Y).$$

Dann besteht folgender Zusammenhang zwischen der repetitiven Algebra einer endlich-dimensionalen Algebra A und der derivierten Kategorie $\mathrm{D}^b(A)$

(siehe [23, Theorem II.4.9]):

Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Dann gibt es einen volltreuen Funktor triangulierter Kategorien

$$F : D^b(A) \to \underline{\mathrm{mod}}(\hat{A}).$$

Falls $\mathrm{gldim}(A) < \infty$, so ist F dicht und

$$D^b(A) \simeq \underline{\mathrm{mod}}(\hat{A}).$$

14. Deriviert Speziell Biserielle Algebren

Definition 14.1. (a) Sei Q ein Köcher, sei $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal. Wir nennen das Paar (Q, I) *speziell biseriell*, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(G1) Für alle $i \in Q_0$ gibt es höchstens zwei $\alpha \in Q_1$ mit $s(\alpha) = i$ und höchstens zwei $\beta \in Q_1$ mit $t(\beta) = i$.
(G2) Für alle $\alpha \in Q_1$ gibt es höchstens ein $\beta \in Q_1$ mit $\alpha\beta \notin I$ und höchstens ein $\gamma \in Q_1$ mit $\gamma\alpha \notin I$.

(b) Eine Algebra A heißt *speziell biseriell*, falls es ein speziell biserielles Paar (Q, I) gibt mit

$$A \cong KQ/I.$$

Bemerkung 14.2. Wenn wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit von einer speziell biseriellen Algebra $A = KQ/I$ reden, gehen wir davon aus, dass das Paar (Q, I) speziell biseriell ist.

Bemerkung 13.6.(b) motiviert folgende

Definition 14.3. Eine endlich-dimensionale Algebra A heißt *deriviert speziell biseriell*, falls die repetitive Algebra $\hat{A}$ von A speziell biseriell ist.

Um eine genauere Beschreibung der Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren zu erhalten benötigen wir folgendes

Lemma 14.4. *Sei A deriviert speziell biseriell. Dann gibt es ein speziell biserielles Paar (Q, I), so dass $A \cong KQ/I$ und die folgenden Bedingungen gelten:*
(G3) *I wird erzeugt von Nullrelationen der Länge* 2.
(G4) *Für alle $\alpha \in Q_1$ gibt es höchstens ein $\beta \in Q_1$ mit $\alpha\beta \in I$ und höchstens ein $\gamma \in Q_1$ mit $\gamma\alpha \in I$.*

Insbesondere ist A speziell biseriell.

Beweis. Siehe [44], auch [4], [36]. □

Insbesondere ist die Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren eine Unterklasse der Fadenalgebren. Wir können also die in den Abschnitten 11 und 12 dargestellte Theorie auf die Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren anwenden. Es gilt sogar folgender

Satz 14.5. *Eine endlich-dimensionale K-Algebra A ist genau dann deriviert speziell biseriell, wenn es einen endlichen Köcher Q sowie ein zulässiges Ideal $I \subset KQ$ gibt, so dass das Paar (Q,I) die Bedingungen* (G1)-(G4) erfüllt und $A \cong KQ/I$. Wir nennen solch ein Paar (Q, I) auch ein *deriviert speziell biserielles* Paar.

Beweis. Siehe [47, Abschnitt 4], [44], [4], [36]. □

Bemerkung 14.6. Wenn wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit von einer deriviert speziell biseriellen Algebra $A = KQ/I$ reden, gehen wir davon aus, dass das Paar (Q, I) deriviert speziell biseriell ist.

Bemerkung 14.7. Sei A eine Fadenalgebra (beziehungsweise eine (deriviert) speziell biserielle Algebra). Dann ist auch A^{op} eine Fadenalgebra (beziehungsweise eine (deriviert) speziell biserielle Algebra).

Beispiel 14.8. *Die Fadenalgebra A aus Beispiel 11.3 ist deriviert speziell biseriell, die Fadenalgebra B aus 11.4 hingegen nicht.*

Beispiel 14.9. *Sei Q der Köcher*

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ 2 \arrow[dr, "c"'] & & 3 \arrow[dl, "d"] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

und sei $I = \langle ca - db \rangle$. Sei $A = KQ/I$. Dann ist A speziell biseriell, aber nicht deriviert speziell biseriell.

Beispiel 14.10. *Sei S der Köcher*

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ 2 \arrow[dr, "c"'] & & 3 \arrow[dl, "d"] \\ & 4 & \end{tikzcd}$$

und sei $J = \langle ca, db \rangle$. Sei $B = KS/J$. Dann ist A deriviert speziell biseriell.

Sei von nun an bis zum Ende von Teil 3 immer $A = KQ/I$ eine deriviert speziell biserielle K-Algebra, sei $Q_0 = \{1, \dots, n\}$. In diesem Fall können wir die Beschreibung von $\hat{I}$ aus Abschnitt 13 leicht vereinfachen:

$$\begin{aligned} \hat{I} = \tilde{I} &\cup \{p - p' \mid p, p' \text{ volle Wege mit } s(p) = s(p'), t(p) = t(p')\} \\ &\cup \{q \mid q \text{ enthält einen vollen Weg als echten Unterweg}\}. \end{aligned}$$

Proposition 14.11. *Sei X ein A-Modul mit* $\mathrm{Ext}^1_A(X, X) = 0$. *Dann ist* $\mathrm{End}_A(X)$ *deriviert speziell biseriell.*

Beweis. Siehe [46, Theorem 1.1]. □

Satz 14.12. *Sei $\hat{M}$ ein $\hat{A}$-Modul mit*

$$\operatorname{Ext}^1_{\hat{A}}(\hat{M}, \hat{M}) = 0.$$

Dann ist die Algebra $\underline{\operatorname{End}}_{\hat{A}}(\hat{M})$ deriviert speziell biseriell.

Beweis. Siehe [48, Theorem 1.1]. □

Sei $\mathcal{G}$ die Klasse der deriviert speziell biseriellen Algebren.

Korollar 14.13. *$\mathcal{G}$ ist abgeschlossen unter Kippen.*

Es gilt auch folgender

Satz 14.14. *$\mathcal{G}$ ist abgeschlossen unter derivierter Äquivalenz.*

Beweis. Siehe [48, Corollary 1.2]. □

Korollar 14.15. $(\mathcal{TGP}) \Rightarrow (\mathcal{TG})$.

Korollar 14.16. *Sei $T \in \operatorname{mod}(A)$ ein basischer Kippmodul. Sei $T_i \in \operatorname{add}(T)$ unzerlegbar. Sei $f : T_i \to \widetilde{T}$ eine minimale $\operatorname{add}(T/T_i)$-Linksapproximation von T_i; sei $g : \widehat{T} \to T_i$ eine minimale $\operatorname{add}(T/T_i)$-Rechtsapproximation von T_i; dann gilt*

$$\delta(\widehat{T}), \delta(\widetilde{T}) \leq 2.$$

Beweis. Sei Γ der Köcher von $\operatorname{End}_A(T)$. Sei i' der Punkt in Γ, der T_i entspricht (siehe z.B. [19, Abschnitt 2.4]). Nach [19, 3.2] entspricht $\delta(\widetilde{T})$ (beziehungsweise $\delta(\widehat{T})$) der Anzahl der Pfeile in Γ, die im Punkt i' starten (beziehungsweise enden). Da $\operatorname{End}_A(T)$ nach Lemma 14.11 deriviert speziell biseriell ist, folgt die Behauptung. □

Korollar 14.17. *Sei*

$$0 \to X \to M \to Y \to 0$$

eine Austauschfolge in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$. Dann ist $\delta(M) \leq 2$.

Wir werden folgenden Satz zeigen:

Satz 14.18. *Die Vermutung $(\mathcal{TGP})$ gilt.*

Korollar 14.19. *Die Vermutung $(\mathcal{TG})$ gilt.*

15. Austauschfolgen über deriviert speziell biseriellen Algebren

Proposition 15.1. *Seien $X_1 = \mathcal{M}(W_1), X_2 = \mathcal{M}(W_2) \in \operatorname{mod}(A)$ unzerlegbar mit $\operatorname{pd}_A(X_1), \operatorname{pd}_A(X_2) \leq 1$ und*

$$\operatorname{Ext}^1_A(X_1 \oplus X_2, X_1 \oplus X_2) = 0.$$

Dann ist jedes $a \in \mathcal{A}(W_1, W_2)$ schwach einseitig.

Beweis. Siehe [46, Prop. 4.9.]. □

Bemerkung 15.2. Die folgende Bemerkung findet sich auch in [46, Abschnitt 4]. Sei

$$T = \bigoplus_{i=1}^{n} T_i \in \operatorname{mod}(A)$$

ein Kippmodul. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei $T_i = \mathcal{M}(W_i)$ für einen Faden W_i. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ sei

$$f : T_i \to T_j$$

ein Morphismus von A-Moduln. Dann können wir f unter dem kanonischen Morphismus

$$\mathrm{Hom}_A(T_i, T_j) \hookrightarrow \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{h=1}^{n} \mathrm{Hom}_A(T_k, T_h) \cong \mathrm{End}_A(T)$$

als Element von $\mathrm{End}_A(T)$ auffassen, welches wir ebenfalls mit f bezeichnen werden. Unter dieser Identifikation betrachten wir die folgende Basis von $\mathrm{End}_A(T)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{b_1, \ldots, b_m, e_1, \ldots, e_n\} \\ &= \{f_a \mid a \in \mathcal{A}(W_i, W_j); i, j \in \{1, \ldots, n\}\}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, dass e_i der Identität auf T_i entspricht. Sei nun

$$\mathcal{B}' = \{b_l \in \mathcal{B} \mid \text{es existieren keine } i, j \in \{1, \ldots, m\} \text{ mit } b_l = b_i b_j\}.$$

Dann wird die Algebra $\mathrm{End}_A(T)$ von den Elementen aus

$$\mathcal{B}' \ \cup \ \{e_1, \ldots, e_n\}$$

erzeugt. Des weiteren gibt es einen Köcher Q' und ein Ideal J mit $\mathrm{End}_A(T) \cong KQ'/J$, so dass die Elemente aus Q'_0 den e_i und die Elemente aus Q'_1 den Elementen aus $\mathcal{B}'$ entsprechen. Insbesondere können wir annehmen, dass für $i \in Q_0$ alle $\mathrm{add}(T/T_i)$-Rechtsapproximationen von T_i (beziehungsweise alle $\mathrm{add}(T/T_i)$-Linksapproximationen von T_i) aus kanonischen Abbildungen bestehen.

Lemma 15.3. *Sei $T \in \mathrm{mod}(A)$ ein Kippmodul.*

(a) *Seien $T_i, T_x, T_y \in \mathrm{add}(T)$ unzerlegbar, sei $T_x = \mathcal{M}(W_x), T_y = \mathcal{M}(W_y), T_i = \mathcal{M}(W)$. Sei*

$$T_x \oplus T_y \overset{(f_a, f_b)}{\to} T_i$$

eine $\mathrm{add}(T/T_i)$-Rechtsapproximation von T_i. Dann ist entweder $f_{a(l)}$ linksseitig und $f_{b(l)}$ rechtsseitig oder umgekehrt.

(b) *Seien $T_i, T_x, T_y \in \mathrm{add}(T)$ unzerlegbar, sei $T_x = \mathcal{M}(W_x), T_y = \mathcal{M}(T_y), T_i = \mathcal{M}(W)$. Sei*

$$T_i \overset{(f_a, f_b)}{\to} T_x \oplus T_y$$

eine $\mathrm{add}(T/T_i)$-Linkssapproximation von T_i. Dann ist entweder $f_{a(r)}$ linksseitig und $f_{b(r)}$ rechtsseitig oder umgekehrt.

Beweis. Siehe [46, Lemmata 4.1, 4.2]. □

Für eine kurze exakte Folge

$$\eta : 0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

setzen wir $\mathrm{mid}(\eta) = Y$.

Korollar 15.4. *Sei*

$$\eta : 0 \to T_i \to T_x \to T_i' \to 0$$

eine Austauschfolge in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ *mit* $\delta(\mathrm{mid}(\eta)) = 1$. *Dann gibt es Fäden* $W_i, W_i' \in \mathcal{S}$ *und* $a \in Q_1$, *so dass*

$$T_x = \mathcal{M}(W_i a W_i'),$$
$$T_i = \mathcal{M}(W_i),$$
$$T_i' = \mathcal{M}(W_i')$$

und η *(bis auf Isomorphie von kurzen exakten Folgen) die folgende Form hat (hierbei ist* $W = W_i a W_i'$*):*

$$0 \to \mathcal{M}(W_i) \to \mathcal{M}(W) \to \mathcal{M}(W_i') \to 0.$$

Hierbei ist für geeignete Vorzeichen

$$(1_{t(W_i),\pm 1}, W_i, aW_i') \in \mathcal{S}(W),$$
$$(W_i a, W_i', 1_{s(W_i'),\pm 1}) \in \mathcal{F}(W).$$

Beweis. Folgt aus Proposition 15.1. □

Korollar 15.5. *Sei*

$$\eta : 0 \to T_i \to T_x \oplus T_y \to T_i' \to 0$$

eine Austauschfolge in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ *mit* $\delta(\mathrm{mid}(\eta)) = 2$. *Dann gibt es Fäden* $D, D', E, F, F' \in \mathcal{S}$ *und Fäden* $a_D, a_F, a_{D'}, a_{F'}$ *der Länge* ≤ 1 *(wobei* a_X *nur dann die Länge* 0 *haben kann, falls* X *das leere Wort ist), so dass*

$$T_x = \mathcal{M}(Da_D E a_{F'} F'),$$
$$T_y = \mathcal{M}(D' a_{D'} E a_F F),$$
$$T_i = \mathcal{M}(Da_D E a_F F),$$
$$T_i' = \mathcal{M}(D' a_{D'} E a_{F'} F')$$

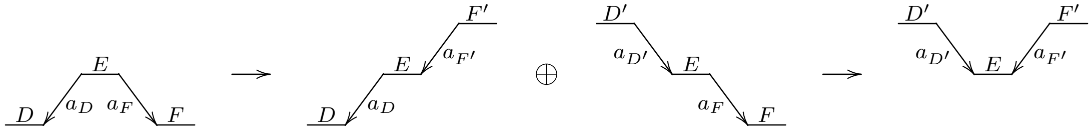
und η *(bis auf Isomorphie von kurzen exakten Folgen) die folgende Form hat:*

$$0 \to \mathcal{M}(Da_D E a_F F) \to \mathcal{M}(Da_D E a_{F'} F') \oplus \mathcal{M}(D' a_{D'} E a_F F) \to \mathcal{M}(D' a_{D'} E a_{F'} F') \to 0.$$

Hierbei ist für geeignete Vorzeichen (falls der Ausdruck definiert ist)

- $(1_{t(D),\pm 1}, D, a_D E a_F F)$ *ein Subfaktor von* $Da_D E a_F F$,
- $(Da_D, E, a_F F)$ *ein Faktor von* $Da_D E a_F F$,
- $(Da_D E a_F, F, 1_{s(F),\pm 1})$ *ein Subfaktor von* $Da_D E a_F F$,
- $(1_{t(D'),\pm 1}, D', a_{D'} E a_{F'} F')$ *ein Faktor von* $D' a_{D'} E a_{F'} F'$,
- $(D' a D', E, a_{F'} F')$ *ein Subfaktor von* $D' a_{D'} E a_{F'} F'$,
- $(D' a_{D'} E a_{F'}, F', 1_{s(F'),\pm 1})$ *ein Faktor von* $D' a_{D'} E a_{F'} F'$.

Wir veranschaulichen die Situation aus Korollar 15.5 durch eine Skizze:



Beweis. Folgt aus Lemma 15.3. □

16. Induktionsannahme

Sei M ein treuer partieller Kippmodul über A. Wir möchten Satz 14.18 über Induktion nach

$$l(M) = n - \delta(M)$$

beweisen. Dazu stellen wir zunächst eine Reihe von Behauptungen auf:

Vermutung 16.1 $(\mathcal{TG}, l)$**.** *Sei M ein treuer partieller Kippmodul über A mit $l(M) \leq l$. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Vermutung 16.2 $(\mathcal{TGP}, l)$**.** *Sei M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul über A mit $l(M) \leq l$. Dann ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ zusammenhängend.*

Bemerkung 16.3 (Induktionsanfang)**.** Offensichtlich gelten $(\mathcal{TG}, 0)$ und $(\mathcal{TGP}, 0)$. Des weiteren gelten $(\mathcal{TG}, 1)$ und $(\mathcal{TGP}, 1)$ nach Lemma 7.16.

Außerdem haben wir (Korollar 14.15)

$$(\mathcal{TGP}) \Rightarrow (\mathcal{TG})$$

sowie (Folgerung aus Korollar 10.9)

$$(\mathcal{TGP}, l) \Rightarrow (\mathcal{TG}, l).$$

Es reicht nun, folgende Proposition zu zeigen:

Proposition 16.4.

$$(\mathcal{TG}, l-1) \Rightarrow (\mathcal{TGP}, l).$$

Wir nehmen im weiteren Verlauf also folgendes an:

$A = KQ/I$ sei eine deriviert speziell biserielle K-Algebra, sei

$$Q_0 = \{1, \ldots, n\}.$$

Sei M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul mit $l(M) = l \geq 2$. Für jedes $X \notin \mathrm{add}(M)$, so dass $M \oplus X$ partieller Kippmodul über A ist, sei $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M \oplus X)$ zusammenhängend. Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$. Wir werden die $\mathcal{C}$ zugrunde liegende Punktmenge ebenfalls mit $\mathcal{C}$ bezeichnen. Des weiteren sei $L = \{1, \ldots, l\}$.

Lemma 16.5. *Sei P unzerlegbar projektiv über A mit $P \notin \mathrm{add}(M)$. Falls es ein $T \in \mathcal{C}$ gibt mit $\mathrm{Ext}^1_A(T, P) = 0$, so ist die reguläre Darstellung ${}_AA \in \mathcal{C}$.*

Beweis. Aus $\mathrm{Ext}^1_A(T, P) = 0$ folgt $P \in \mathrm{add}(T)$. Nun ist aber $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M \oplus P)$ ein Unterköcher von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$. Da nach Voraussetzung $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M \oplus P)$ zusammenhängend ist, folgt, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M \oplus P)$ ein Unterköcher von $\mathcal{C}$ ist. Es ist aber ${}_AA \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M \oplus P)$. □

Korollar 16.6. *Sei P unzerlegbar projektiv über A mit $P \notin \mathrm{add}(M)$. Falls es ein $T \in \mathcal{C}$ gibt mit $T = M \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_l$ und falls ein $i \in L$ existiert mit $\mathrm{Ext}^1_A(T_i, P) = 0$, so ist die reguläre Darstellung ${}_AA \in \mathcal{C}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M \oplus T_i)$ zusammenhängend. Sei B die Bongartz-Vervollständigung von $M \oplus T_i$. Aus der kurzen exakten Folge

$$0 \to A \to E \to (M \oplus T_i)^s \to 0$$

folgt sofort, dass $\mathrm{Ext}^1_A(B, P) = 0$. Der Rest folgt mit Lemma 16.5. □

Sollte nun $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ nicht zusammenhängend sein, so muss es mindestens eine Zusammenhangskomponente $\mathcal{C}$ geben mit ${}_AA \notin \mathcal{C}$. Wir wählen uns für den Rest des Beweises ein solches $\mathcal{C}$. Somit können wir annehmen, dass für alle

$$T = M \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_l \in \mathcal{C}$$

und für alle projektiven P mit $P \notin \mathrm{add}(M)$ gilt, dass

$$\mathrm{Ext}_A^1(T_i, P) \neq 0$$

für alle $i \in L$. Wir werden diese Annahme zum Widerspruch führen.

17. Additive Funktionen auf $\mathcal{C}$

Sei $A = KQ/I$ deriviert speziell biseriell, sei $Q_0 = \{1, \dots, n\}$; sei $M \in \mathrm{mod}(A)$ ein treuer, projektiver partieller Kippmodul. Wir können annehmen, dass nach eventueller Umnummerierung gilt, dass

$$M \cong P_{l+1} \oplus \cdots \oplus P_n.$$

Sei $L = \{1, \dots, l\}$. Sei $L' = \{l+1, \dots, n\}$. Sei $\mathrm{Exc}(A)$ die additive Hülle der vollen Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller Moduln X mit $\mathrm{pd}_A(X) \leq 1$ und $\mathrm{Ext}_A^1(X, X) = 0$.

Definition 17.1. Wir nennen eine Abbildung $f : \mathrm{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$, falls f die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) f respektiert Isomorphismen, d.h. für alle $X, Y \in \mathrm{Exc}(A)$ mit $X \cong Y$ gilt

$$f(X) = f(Y).$$

(b) f respektiert direkte Summen, d.h. für alle $X, Y \in \mathrm{Exc}(A)$ gilt

$$f(X \oplus Y) = f(X) + f(Y).$$

(c) Für jede Austauschfolge

$$\eta : 0 \to T_i \to \hat{T} \to T_i' \to 0$$

in $\mathcal{C}$ gilt, dass

$$f(T_i) + f(T_i') = f(\hat{T}).$$

Bemerkung 17.2. Sei $f : \mathrm{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ eine additive Funktion auf $\mathcal{C}$. Aus Definition 17.1.(a) und 17.1.(b) folgt sofort, dass $f(0) = 0$.

Beispiel 17.3. Sei $Y \in \mathrm{mod}(A)$ beliebig. Sei

$$\chi(X, Y) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(X, Y) - \dim_K \mathrm{Ext}_A^1(X, Y).$$

Dann ist $\chi(\cdot, Y)$ eine additive Funktion auf $\mathcal{C}$. Dies folgt sofort aus der langen exakten Homologiefolge.

Beispiel 17.4. Sei $Y \in \mathrm{Gen}(M)$. Dann gilt nach Lemma 7.8.(c) für alle $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$, dass

$$\mathrm{Ext}_A^1(T, Y) = 0.$$

Somit ist $\dim_K \mathrm{Hom}_A(\cdot, Y)$ additiv auf $\mathcal{C}$.

Definition 17.5. Sei N ein partieller Kippmodul mit $M \in \operatorname{add}(N)$, so dass es einen Kippmodul $T \in \mathcal{C}$ gibt mit $N \in \operatorname{add}(T)$. Wir setzen

$$\mathcal{C}(N) = \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N) \cap \mathcal{C}.$$

Bemerkung 17.6. Sei Q ein (nicht notwendigerweise endlicher) Köcher, sei Q' ein zusammenhängender Unterköcher von Q, sei $\hat{Q}$ eine Zusammenhangskomponente von Q. Dann ist $Q' \cap \hat{Q}$ (der volle Unterköcher von Q, dessen Ecken in dem Durchschnitt der Eckenmenge von Q' und $\hat{Q}$ liegen), ebenfalls zusammenhängend. Falls $Q' \cap \hat{Q}$ nicht der leere Köcher ist, gilt $Q' \cap \hat{Q} = Q'$.

Wir wenden diesen einfachen Fakt auf unsere Situation an. Sei $N \ncong M$. Wir nehmen nach Induktion an, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N)$ zusammenhängend ist. Da $\mathcal{C}$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ ist, und da wir N so gewählt haben, dass $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N) \cap \mathcal{C}$ nicht leer ist, folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(N) &= \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N) \cap \mathcal{C} \\ &= \mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N). \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\mathcal{C}(N)$ zusammenhängend. Falls $N \cong M$, so ist $\mathcal{C}(N) = \mathcal{C}$ ebenfalls zusammenhängend.

Definition 17.7. Wir nennen eine Austauschfolge η in $\mathcal{C}(N)$ *N-regulär*, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(A) $\delta(\operatorname{mid}(\eta)) = 2$.
(B) $\operatorname{add}(\operatorname{mid}(\eta)) \cap \operatorname{add}(N) = 0$.

Wir nennen $\mathcal{C}$ *N-regulär*, falls $\mathcal{C}(N)$ kein einpunktiger Köcher ist und falls jede Austauschfolge in $\mathcal{C}(N)$ N-regulär ist.

Lemma 17.8. *Sei $f : \operatorname{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ additiv auf $\mathcal{C}$. Sei*

$$T = P_{l+1} \oplus \cdots \oplus P_n \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_l \in \mathcal{C}.$$

Wir setzen $\max_f(T) = \max\{f(T_1), \ldots, f(T_l)\} \in \mathbb{Z}$. *Sei*

$$N = M \oplus \bigoplus_{\{j \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j.$$

Wir nehmen an, dass entweder

$$\max_f(T) > \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\} \geq 0,$$

oder dass $\mathcal{C}$ M-regulär ist. Sei $\eta : T \leftrightarrow T'$ eine Austauschfolge in $\mathcal{C}(N)$, so dass $T_i \in \operatorname{add}(T)$ gegen $T'_i \in \operatorname{add}(T')$ ausgetauscht wird.

(a) *Falls η N-regulär ist, so ist $f(T'_i) = f(T_i)$ und somit auch $f(T') = f(T)$.*
(b) *Falls η nicht N-regulär ist, so ist $f(T'_i) < f(T_i)$ und somit auch $f(T') < f(T)$.*

Beweis. (a) Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T \xrightarrow{\eta} T'$ in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$. Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \oplus T_b \to T'_i \to 0.$$

Wegen der N-Regularität von η gilt

$$f(T_a) = f(T_b) = f(T_i) = \max_f(T).$$

Aus der Additivität von f folgt nun

$$\begin{aligned} f(T_i') &= f(T_a) + f(T_b) - f(T_i) \\ &= 2f(T_i) - f(T_i) \\ &= f(T_i). \end{aligned}$$

Da $T' \cong T/T_i \oplus T_i'$, folgt $f(T) = f(T')$.

(b) Sei wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T \xrightarrow{\eta} T'$ in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$. Da η nicht N-regulär ist, muss η gegen eine der beiden N-Regularitätsbedingungen (A) oder (B) verstoßen.

Wir nehmen zunächst an, dass η gegen (A) verstößt. Es gilt

$$\delta(\mathrm{mid}(\eta)) = 1.$$

Dies kann nicht passieren, wenn $\mathcal{C}$ M-regulär ist. Es gelte also die Annahme, dass

$$\max_f(T) > \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\} \geq 0.$$

Insbesondere ist $f(T_i) > 0$. Wir betrachten

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \to T_i' \to 0.$$

Es gilt

$$f(T_i) = \max_f(T) \geq f(T_a).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} f(T_i') &= f(T_a) - f(T_i) \\ &\leq f(T_i) - f(T_i) \\ &= 0 \\ &< f(T_i). \end{aligned}$$

Somit folgt auch $f(T') < f(T)$.

Wir untersuchen nun den Fall, in dem η die N-Regularitätsbedingung (A) erfüllt, aber gegen die N-Regularitätsbedingung (B) verstößt. Wir betrachten

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \oplus T_b \to T_i' \to 0.$$

Da η gegen die N-Regularitätsbedingung (B) verstößt, gilt entweder $T_a \in \mathrm{add}(N)$ oder $T_b \in \mathrm{add}(N)$. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T_a \in \mathrm{add}(N)$. Falls $T_a \notin \mathrm{add}(M)$, so gilt $f(T_a) < f(T_i)$. Falls $T_a \in \mathrm{add}(M)$, so kann $\mathcal{C}$ nicht M-regulär sein. Es gelte also

$$f(T_i) > \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\}$$

und es folgt ebenso $f(T_a) < f(T_i)$. Des weiteren ist $f(T_b) \leq f(T_i)$. Somit folgt

$$\begin{aligned} f(T_i') &= f(T_a) + f(T_b) - f(T_i) \\ &< 2f(T_i) - f(T_i) \\ &= f(T_i). \end{aligned}$$

Somit gilt auch $f(T') < f(T)$.

$\square$

Lemma 17.9. *Sei* $f : \mathrm{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Sei*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}.$$

Seien

$$\begin{aligned} \max_f(T) &= \max\{f(T_1), \dots, f(T_l)\}, \\ N(T) &= M \oplus \bigoplus_{\{j \in L \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{C}$ *nicht* $N(T)$*-regulär. Außerdem gelte eine der beiden folgenden Annahmen: Entweder sei* $\mathcal{C}$ M*-regulär oder es gelte*

$$\max_f(T) > \max\{f(P_{l+1}), \dots, f(P_n)\} \geq 0.$$

Dann gibt es einen Kippmodul $T' \in \mathcal{C}$ *mit der folgenden Eigenschaft: Entweder ist* $\max_f(T') < \max_f(T)$ *oder es gilt* $\max_f(T') = \max_f(T)$ *und* $\delta(N(T')) > \delta(N(T))$.

Beweis. Nach Bemerkung 17.6 ist $\mathcal{C}(N(T))$ zusammenhängend. Des weiteren ist $\mathcal{C}$ nach Voraussetzung nicht $(N(T))$-regulär. Wir finden also eine Folge von Kippmoduln $T = T^0, T^1, \dots, T^s$ und Austauschfolgen

$$T^0 \xleftrightarrow{\eta_1} T^1 \xleftrightarrow{\eta_2} T^2 \xleftrightarrow{\eta_3} \dots \xleftrightarrow{\eta_{s-1}} T^{s-1} \xleftrightarrow{\eta_s} T^s$$

in $\mathcal{C}(N)$, so dass $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ N-regulär sind, η_s hingegen nicht. Nach Lemma 17.8.(a) gilt, dass

$$\begin{aligned} f(T) &= f(T^1) = \dots = f(T^{s-1}), \\ N(T) &\cong N(T^1) \cong \dots \cong N(T^{s-1}), \\ \max_f(T) &= \max_f(T^1) = \dots = \max_f(T^{s-1}), \\ \delta(N(T)) &= \delta(N(T^1)) = \dots = \delta(N(T^{s-1})). \end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T^{s-1} \to T^s$ in $\mathcal{C}$. Wir betrachten nun die Austauschfolge

$$\eta_s : 0 \to T_i^{s-1} \to T_a^{s-1} \oplus T_b^{s-1} \to T_i^s \to 0.$$

Nach 17.8.(b) folgt, dass $f(T_i^s) < f(T_i^{s-1})$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Falls $N(T^{s-1}) \cong T^{s-1}/T_i^{s-1}$ (d.h., dass T_i^{s-1} der eindeutige unzerlegbare, direkte Summand von T^{s-1} ist, auf dem f einen maximalen Wert annimmt), so gilt

$$\max_f(T^s) < \max_f(T^{s-1}) = \max_f(T).$$

Sonst gilt wegen $f(T_i^s) < f(T_i^{s-1})$, dass

$$N(T^s) \cong N(T^{s-1}) \oplus T_i^s.$$

Insbesondere ist

$$\delta(N(T^s)) > \delta(N(T^{s-1})) = \delta(N(T)).$$

Somit ist T^s unser gesuchtes T'. $\square$

Lemma 17.10. *Sei $N \in \operatorname{mod}(A)$ ein partieller Kippmodul mit $M \in \operatorname{add}(N)$, so dass $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. Wir nehmen an, dass $\mathcal{C}(N)$ eine Quelle hat. Dann ist $\mathcal{C}$ nicht N-regulär.*

Beweis. Durch Widerspruch. Sei T Quelle in $\mathcal{C}(N)$, $T = N \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$. Wir betrachten für $i \in \{1, \ldots, r\}$ minimale $\operatorname{add}(T/T_i)$-Linksapproximationen von T_i. Da $\mathcal{C}$ N-regulär ist, haben diese die Form

$$0 \to T_i \to T_{a(i)} \oplus T_{b(i)},$$

wobei $a, b : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$ Funktionen ohne Fixpunkt sind. Durch Hintereinanderschalten dieser Linksapproximationen erhalten wir eine Kette von Monomorphismen der Form

$$0 \to T_i \xrightarrow{f_1} T_{a(i)} \oplus T_{b(i)} \xrightarrow{f_2} T_{a(a(i))} \oplus T_{b(a(i))} \oplus T_{a(b(i))} \oplus T_{b(b(i))} \xrightarrow{f_3} \cdots.$$

Sei

$$b = \max\{\text{Länge}(T_1), \ldots, \text{Länge}(T_r)\}.$$

Nach Lemma 10.4 wird die Verkettung

$$f_{m-1} \circ f_{m-2} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$$

dieser Abbildungen 0, sobald $m > 2^b$, was einen Widerspruch dazu ergibt, dass alle f_i Monomorphismen sind. □

Korollar 17.11. *Sei $N \in \operatorname{mod}(A), N \not\cong M$ ein partieller Kippmodul mit $M \in \operatorname{add}(N)$, so dass $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{C}$ nicht N-regulär.*

Beweis. Sei B die Bongartz-Vervollständigung von N. Da $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(N)$ zusammenhängend ist, folgt, dass $B \in \mathcal{C}(N)$. Nach Bemerkung 9.12.(a) ist B eine Quelle in $\mathcal{C}(N)$. Der Rest ist Lemma 17.10. □

Lemma 17.12. *Sei $\mathcal{C}$ M-regulär. Sei $F : \operatorname{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ additiv auf $\mathcal{C}$. Sei*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i.$$

Seien $j, k \in L$ mit $F(T_j) \neq F(T_k)$. Sei $T' \in \mathcal{C}$ beliebig,

$$T' = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T'_i.$$

Dann gibt es $j', k' \in L$ mit $F(T_{j'}) \neq F(T_{k'})$.

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass es ein

$$T' = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T'_i \in \mathcal{C}$$

gibt, so dass $F(T'_i) = \lambda$ für alle $i \in L$. Sei

$$T'' = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T''_i$$

ein Nachbar von T' in $\mathcal{C}$. Wegen der M-Regularität von $\mathcal{C}$ gilt nach Lemma 17.8.(a) $F(T''_i) = \lambda$ für alle $i \in L$. Da $\mathcal{C}$ zusammenhängend ist, gilt dasselbe für alle Punkte von $\mathcal{C}$, insbesondere also auch für T. Widerspruch. □

Proposition 17.13. *Sei* $f : \operatorname{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Für*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}$$

seien

$$\begin{aligned} \max_f(T) &= \max\{f(T_1), \ldots, f(T_l)\}, \\ N(T) &= M \oplus \bigoplus_{\{j \in L \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j. \end{aligned}$$

Für alle $T \in \mathcal{C}$ *sei* $\mathcal{C}$ *nicht* $N(T)$*-regulär.*

(a) *Sei* $\mathcal{C}$ M*-regulär. Insbesondere ist*

$$N(T) \ncong M$$

für alle $T \in \mathcal{C}$. *Dann ist* $\max_f(\cdot)$ *auf* $\mathcal{C}$ *nicht nach unten beschränkt.*

(b) *Für alle* $j \in L'$ *sei*

$$0 \leq f(P_j).$$

Dann gibt es ein $T \in \mathcal{C}$ *mit*

$$\max_f(T) \leq \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\} \geq 0.$$

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass $\max_f(\cdot)$ auf $\mathcal{C}$ nach unten beschränkt ist. Sei

$$\lambda' = \min\{\max_f(T) \mid T \in \mathcal{C}\}.$$

Für Teil (b) können wir annehmen, dass

$$\lambda' > \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\}.$$

Wir betrachten die Menge

$$\mathcal{M} = \{T \in \mathcal{C} \mid \max_f(T) = \lambda'\}.$$

Des weiteren seien

$$\begin{aligned} \delta' &= \max\{\delta(N(T)) \mid T \in \mathcal{M}\}, \\ \mathcal{N} &= \{T \in \mathcal{M} \mid \delta(N(T)) = \delta'\} \subset \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind die Mengen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ nichtleer. Wir wählen uns nun ein $T \in \mathcal{N}$. Nach Lemma 17.9 gibt es einen Kippmodul $\hat{T} \in \mathcal{C}$ mit $\max_f(\hat{T}) < \max_f(T)$ oder $\max_f(\hat{T}) = \max_f(T)$ und $\delta(N(\hat{T})) > \delta(N(T))$. In beiden Fällen ergibt sich ein Widerspruch zu $T \in \mathcal{N}$. □

Korollar 17.14. $\mathcal{C}$ *ist nicht* M*-regulär.*

Beweis. Sei $\mathcal{C}$ M-regulär. Falls $\mathcal{C}$ endlich ist, so hat $\mathcal{C}$ eine Quelle. Dann kann $\mathcal{C}$ nach Lemma 17.10 nicht M-regulär sein. Wir können also annehmen, dass $\mathcal{C}$ nicht endlich ist. Dann gibt es ein $t \in Q_0$ und ein

$$T' = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T'_i \in \mathcal{C},$$

so dass $j, k \in L$ existieren mit $\dim \mathrm{Hom}_A(P_t, T'_j) \neq \dim \mathrm{Hom}_A(P_t, T'_k)$ (siehe [22, Kapitel 3]). Für einen A-Modul X setzen wir $F(X) = \dim \mathrm{Hom}_A(P_t, X)$. F ist eine additive Funktion auf $\mathcal{C}$. Sei

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}$$

beliebig. Nach Lemma 17.12 gibt es $j', k' \in L$ mit $F(T_{j'}) \neq F(T_{k'})$. Insbesondere gilt für alle $T \in \mathcal{C}$, dass

$$M \ncong N(T).$$

Aus Korollar 17.11 folgt, dass $\mathcal{C}$ nicht $N(T)$-regulär ist für alle $T \in \mathcal{C}$. Nach Proposition 17.13.(a) ist $\max_F(\cdot)$ nicht nach unten beschränkt, was zum Widerspruch führt, da der Wertebereich von F in $\mathbb{N}$ liegt und somit nach unten beschränkt ist. □

Satz 17.15. *Sei* $f : \mathrm{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Sei*

$$M = \bigoplus_{j \in L'} P_j.$$

Sei für alle $j \in L'$

$$0 \leq f(P_j) \leq \lambda.$$

Dann gibt es ein $T \in \mathcal{C}$ *mit*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i$$

und für alle $i \in L$ *gilt* $f(T_i) \leq \lambda$.

Beweis. Nach Lemma 17.11 und Korollar 17.14 ist $\mathcal{C}$ N-regulär ist für alle partiellen Kippmoduln N mit $M \in \mathrm{add}(M)$ und $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. Insbesondere ist für alle $T \in \mathcal{C}$ $\mathcal{C}$ $N(T)$-regulär. Nach 17.13.(b) erhalten wir ein

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i$$

mit

$$\max_f(T) \leq \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\} \geq 0.$$

Insbesondere ist $f(T_i) \leq \lambda$ für alle $i \in L$. □

18. Exzeptionelle Austauschfolgen

Sei $X \in \mathrm{mod}(A)$. Für $j \in Q_0$ setzen wir

$$F_j(X) = \dim_K \mathrm{Hom}_A(X, S_j),$$
$$G_j(X) = \dim_K \mathrm{Ext}^1_A(X, S_j).$$

Bemerkung 18.1. Sei $j \in L$. Dann ist

$$F_j(M) = G_j(M) = 0.$$

Definition 18.2. Sei nun $T \in \mathcal{T}_\mathrm{A}$ und $j \in Q_0$.

(a) Wir nennen T *j-positiv*, falls gilt

$$F_j(T) \neq 0,$$
$$G_j(T) = 0.$$

(b) Wir nennen T *j-negativ*, falls gilt

$$F_j(T) = 0,$$
$$G_j(T) \neq 0.$$

Nach Bemerkung 7.9 ist jeder Kippmodul $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ entweder j-positiv oder j-negativ. Offensichtlich kann ein Kippmodul nicht j-positiv und j-negativ zugleich sein. Sei nun $T \xrightarrow{\eta} T'$ ein Pfeil in $\mathcal{C}$, der einer kurzen exakten Folge

$$0 \to T_i \to \tilde{T} \to T'_i \to 0$$

entspricht, die wir ebenfalls mit η bezeichnen. Aus der langen exakten Homologiefolge zu $F_j(\cdot)$ folgen die (zueinander äquivalenten) Implikationen

$$T' \text{ ist } j\text{-positiv} \Rightarrow T \text{ ist } j\text{-positiv},$$
$$T \text{ ist } j\text{-negativ} \Rightarrow T' \text{ ist } j\text{-negativ}.$$

Wir nennen η *exzeptionell* für i, falls gilt:

$$T \text{ ist } j\text{-positiv},$$
$$T' \text{ ist } j\text{-negativ}.$$

Lemma 18.3. *Sei $j \in L$. Dann gibt es eine exzeptionelle Austauschfolge η für j.*

Beweis. Falls es kein solches η geben würde, wäre entweder $F_j(T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{C}$ oder $G_j(T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{C}$.

- Nehmen wir den ersten Fall an. Dann ist
$$G_j(\cdot) = -\chi(\cdot, S_j)$$
auf $\mathcal{C}$ und somit additiv. Des weiteren gilt nach Bemerkung 18.1, dass $G_j(M) = 0$. Somit gibt es nach Satz 17.15 ein $T \in \mathcal{C}$ mit $G_j(T) \leq 0$. Widerspruch.
- Falls $G_j(T) = 0$ für alle $T \in \mathcal{C}$, so ist
$$F_j(\cdot) = \chi(\cdot, S_j)$$
auf $\mathcal{C}$ und somit additiv. Des weiteren gilt nach Bemerkung 18.1, dass $F_j(M) = 0$. Somit gibt es nach Satz 17.15 ein $T \in \mathcal{C}$ mit $F_j(T) \leq 0$. Widerspruch.

$\square$

Definition 18.4. Sei $W = a_1 \dots a_s \in \mathcal{S}$. Sei $i \in Q_0$.

(a) Wir sagen *i liegt auf W*, falls es ein $k \in \{1, \dots, s\}$ gibt mit $s(a_k) = i$ oder $t(a_k) = i$.

(b) Wir sagen *i kommt an Stelle* 0 *in W vor*, falls

$$t(a_1) = i.$$

(c) Wir sagen *i kommt an Stelle s in W vor*, falls

$$s(a_s) = i.$$

(d) Sei $k \in \{1, \dots, s-1\}$. Wir sagen i *kommt an Stelle* k *in* W *vor*, falls

$$s(a_k) = t(a_{k+1}) = i.$$

(e) Falls $W = 1_{(i,t)}$ für ein $t \in \{1, -1\}$, so sagen wir i *liegt auf* W *und kommt an Stelle* 0 *auf* W *vor.*

Bemerkung 18.5. Sei $W = a_1 \dots a_s \in \mathcal{S}$. Sei $i \in Q_0$. Sei u die Anzahl der Stellen, an denen i in W vorkommt. Dann ist

$$u = \dim_K \operatorname{Hom}_A(P_i, \mathcal{M}(W)).$$

Bemerkung 18.6. Sei $W = a_1 \dots a_s \in \mathcal{S}$, sei $X = \mathcal{M}(W) \in \operatorname{mod}(A)$ ein Fadenmodul, sei $i \in Q_0$. Nach Satz 11.20 ist

$$\{f_a \mid a \in \mathcal{A}(W, 1_{(i,1)})\}$$

eine Basis von $\operatorname{Hom}_A(X, S_i)$. Jedes dieser f_a ist ein Epimorphismus und entspricht einem Faktor (D, E, F) von W mit

$$\mathcal{M}(E) \cong S_i.$$

Jeder solche Faktor entspricht der Anzahl der Stellen, in denen i in W auftritt, so dass i an dieser Stelle kein Endpunkt eines direkten oder inversen Pfeiles von W ist. Diese Anzahl enspricht aber genau der Anzahl des Auftretens von i als obere Spitze in einer Visualisierung von W. Wir können also $\dim_K(\operatorname{Hom}_A(X, S_i))$ an einer Visualisierung von W sofort ablesen. Analog dazu entspricht $\dim_K(\operatorname{Hom}_A(S_i, X))$ der Anzahl des Auftretens von i als untere Spitze in einer Visualisierung.

Bemerkung 18.7. Sei

$$0 \to X \xrightarrow{\iota} Y \xrightarrow{\pi} Z \to 0$$

eine kurze exakte Folge von A-Moduln. Wir betrachten für einen A-Modul U die induzierte Folge

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(Z, U) \xrightarrow{\pi_U^*} \operatorname{Hom}_A(Y, U) \xrightarrow{\iota_U^*} \operatorname{Hom}_A(X, U) \to \operatorname{Ext}_A^1(Z, U).$$

Dann gilt

$$\operatorname{Hom}_A(Y, U) \cong \operatorname{Hom}_A(Z, U) \oplus \operatorname{Im}(\iota_U^*)$$

als K-Vektorraum.

Wir benutzen diese triviale Beobachtung in folgendem

Lemma 18.8. *Sei* $T \xrightarrow{\eta} T'$ *exzeptionell für* j. *Dann gilt*

$$F_j(T) = 1,$$
$$G_j(T') = 1.$$

Beweis. η entspricht nun einer Austauschfolge

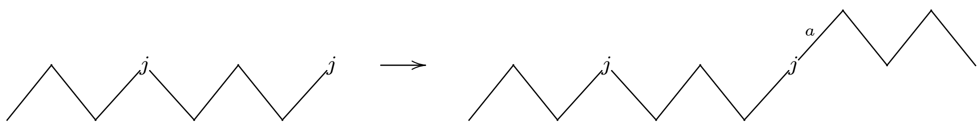
$$0 \to T_i \to \tilde{T} \to T_i' \to 0.$$

Es gilt $T/T_i \cong T'/T_i'$. Da T j-positiv und T' j-negativ ist, muss gelten $F_j(T/T_i) = G_j(T/T_i) = 0$. Somit folgt $F_j(T) = F_j(T_i)$ und $G_j(T') = G_j(T_i')$. Außerdem gilt $F_j(\tilde{T}) = G_j(\tilde{T}) = 0$. Aus der langen exakten Homologiefolge folgt, dass

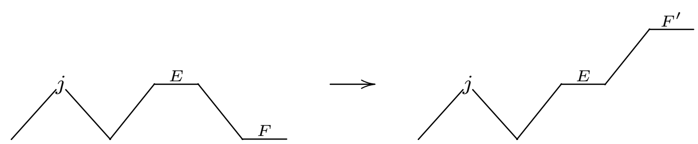
$$F_j(T_i) = G_j(T_i') \neq 0.$$

Wir beweisen die Aussage durch Widerspruch. Sei also $F_j(T_i) \geq 2$.

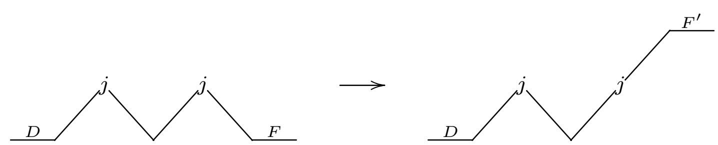
- Sei zunächst $\delta(\tilde{T}) = 1$. Wir wählen uns Fäden W_i, W_i' wie in Korollar 15.4. Wäre
$$F_j(T_i) = F_j(\mathcal{M}(W_i)) > 1,$$
so wäre $F_j(\mathcal{M}(W_i a W_i')) > 0$ (siehe Skizze). Widerspruch.



- Wir können also annehmen, dass $\delta(\tilde{T}) = 2$. Sei $\tilde{T} = T_a \oplus T_b$ mit T_a, T_b unzerlegbar. Wir wählen uns Fäden D, D', E, F, F', $a_D, a_F, a_{D'}, a_{F'}$ wie in Korollar 15.5. Sei
$$\iota : \mathcal{M}(D) \oplus \mathcal{M}(F) \to \mathcal{M}(D a_D E a_F F)$$
und sei
$$\pi : T_i \to Z \cong \mathcal{M}(E)$$
der Kokern von ι. Nach Bemerkung 18.7 gilt
$$F_j(T_i) = F_j(\mathcal{M}(D a_D E a_F F)) = F_j(Z) + \dim_K \operatorname{Im}(\iota^*_{S_j}).$$
Wäre $\operatorname{Im}(\iota^*_{S_j}) \neq 0$, so wäre nach Konstruktion auch $F_j(T_a \oplus T_b) \neq 0$, was einen Widerspruch ergäbe:



Also muss gelten $F_j(Z) \geq 2$. Daraus folgt aber ebenfalls sofort, dass $F_j(T_a), F_j(T_b) \neq 0$. Widerspruch.



□

Mit den gleichen Überlegungen folgt sofort folgendes

Korollar 18.9. *Sei $\eta : T \to T'$ exzeptionell für j. Sei $\delta(\mathrm{mid}(\eta)) = 2$. Seien D, D', E, F, F', $a_D, a_{D'}, a_F, a_{F'}$ so gewählt wie in Korollar 15.5. Dann gilt*
$$\mathcal{M}(E) \cong S_j.$$

19. Der Köcher Q_L

Sei
$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}.$$
Nach unseren getroffenen Annahmen und nach Korollar 4.5 gilt für jedes $i \in L$:

(i) $\mathrm{D}\operatorname{Hom}_A(M, \tau(T_i)) = \operatorname{Ext}^1_A(T_i, M) = 0$.
(ii) $\mathrm{D}\operatorname{Hom}_A(P_j, \tau(T_i)) = \operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_j) \neq 0$ für alle $j \in L$.

Bemerkung 19.1. Sei $i \in L$. Der Modul $\tau(T_i)$ ist nach Lemma 12.2 ein Fadenmodul.

(a) Da für alle $j \in L'$ gelten muss, dass $\mathrm{Hom}_A(P_j, \tau(T_i)) = 0$, kann kein Punkt $j \in L'$ auf dem zugehörigen Faden von $\tau(T_i)$ liegen.
(b) Da für alle $j \in L$ gelten muss, dass $\mathrm{Hom}_A(P_j, \tau(T_i)) \neq 0$, muss jeder Punkt $j \in L$ auf dem zugehörigen Faden von $\tau(T_i)$ liegen.

Dies kann aber nur funktionieren, wenn Q_L, der volle Unterköcher von Q, der genau die Punkte aus L enthält, zusammenhängend ist. Wir erhalten also

Korollar 19.2. *Q_L ist zusammenhängend.*

Sei I_L das Ideal, welches von allen Relationen in I erzeugt wird, die schon vollständig in Q_L liegen. Die Algebra KQ_L/I_L ist deriviert speziell biseriell und endlich-dimensional, da A deriviert speziell biseriell und endlich-dimensional ist.

Lemma 19.3. *Es gibt einen Punkt $d \in L$, der folgender Bedingung genügt:*

- *Entweder gibt es in Q_L genau einen Pfeil a mit $s(a) = d$ und einen Pfeil b mit $t(b) = d$. Es gilt $ab \in I$.*
- *Oder die Anzahl der Pfeile mit Endpunkt d in Q_L ist echt größer als die Anzahl der Pfeile mit Anfangspunkt d in Q_L.*

Beweis. Nehmen wir an, es gibt keinen Punkt in L, welcher der Oder-Bedingung genügt. Für alle $i \in L$ gelte also

$$\#\{a \in (Q_L)_1 \mid s(a) = i\} \geq \#\{b \in (Q_L)_1 \mid t(b) = i\}.$$

Wegen

$$\begin{aligned}\#Q_1 &= \sum_{i \in L} \#\{a \in (Q_L)_1 \,|s(a) = i\} \\ &\geq \sum_{i \in L} \#\{b \in (Q_L)_1 \,|s(b) = i\} \\ &= \#Q_1\end{aligned}$$

gilt dann aber schon für alle $i \in L$, dass

$$\#\{a \in (Q_L)_1 \mid s(a) = i\} = \#\{b \in (Q_L)_1 \mid t(b) = i\}.$$

Da Q_L nach Korollar 19.2 zusammenhängend ist und da $l \geq 2$, kann es nicht passieren, dass

$$\#\{a \in (Q_L)_1 \mid s(a) = i\} = \#\{b \in (Q_L)_1 \mid s(b) = i\} = 0$$

für ein $i \in L$. Es gilt also für alle $i \in L$, dass

$$\#\{a \in (Q_L)_1 \mid s(a) = i\} = \#\{b \in (Q_L)_1 \mid s(b) = i\} \in \{1, 2\}.$$

Falls nun kein $i \in L$ der Entweder-Bedingung genügt, so kann man leicht unendlich lange Wege in (Q_L, I_L) konstruieren (jeder Weg, der in einem Punkt $i \in L$ startet oder endet, kann um einen Pfeil verlängert werden und liegt dann immer noch nicht in I_L). Dann ist aber A nicht endlich-dimensional. Widerspruch. $\square$

Wir wählen uns von nun an ein solches d aus und fixieren es für den Rest des Beweises. Wir führen eine Fallunterscheidung durch:

(A) d ist eine Senke in Q_L, also $\#\{a \in Q_1 \mid s(a) = d, t(a) \in L\} = 0$.
(B) $\#\{a \in Q_1 \mid s(a) = d, t(a) \in L\} = 1$.

Fall (A) können wir als erstes abhandeln:
Sei d eine Senke in Q_L. Nach Lemma 18.3 gibt es eine exzeptionelle Austauschfolge

$$\eta : T \to T'$$

für d. Sei

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i.$$

Insbesondere gibt es ein $i \in L$ mit $\mathrm{Hom}_A(T_i, S_d) \neq 0$. Sei W_i der zu T_i gehörige Faden (d.h. ein Faden mit $\mathcal{M}(W_i) \cong T_i$). W_i muss lokal folgendermaßen aussehen:

$$\begin{tikzcd}
 & & d \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
\cdots & l'_1 & & l'_2 & \cdots
\end{tikzcd}$$

mit $l'_i \in L'$ (es kann natürlich auch vorkommen, dass in W_i nur ein Pfeil (oder gar keiner) von d ausgeht). Da $T \in \mathcal{C}$, gilt insbesondere

$$\mathrm{Hom}_A(P_{l'_1} \oplus P_{l'_2}, \tau(T_i)) = \mathrm{D}\,\mathrm{Ext}^1_A(T_i, P_{l'_1} \oplus P_{l'_2}) = 0.$$

Nach Bemerkung 19.1.(a) können die Punkte $l'_i (i = 1, 2)$ also beide nicht in dem zu $\tau(T_i)$ zugehörigen Faden vorkommen. Inbesondere sieht man, dass W_i sowohl in einem Tal starten als auch enden muss. Die einzigen verbleibenden Möglichkeiten für $\tau(T_i)$ sind $\tau(T_i) \cong 0$ oder $\tau(T_i) \cong S_d$. Im ersten Fall ist T_i schon projektiv, was einen Widerspruch zu unseren Annahmen aus Abschnitt 16 ergibt. Im zweiten Fall gilt

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_i, S_d) = \mathrm{Hom}_A(S_d, \tau(T_i)) \neq 0,$$

und das wäre ein Widerspruch zu Bemerkung 7.9.

Wir nehmen also für den Rest des Beweises an, dass

$$\#\{a \in Q_1 \mid s(a) = d, t(a) \in L\} = 1.$$

20. Abschluss des Beweises

Zum Abschluss des Beweises benötigen wir zunächst die folgenden einfachen Lemmata:

Lemma 20.1. *Sei $X \in \mathrm{Gen}(M)$, sei $T \in \mathcal{C}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Ext}^1_A(T, X) = 0.$$

Beweis. Aus $X \in \mathrm{Gen}(M)$ folgt natürlich auch $X \in \mathrm{Gen}(T)$. Der Rest ist Lemma 7.8. □

Korollar 20.2. *Sei $X \in \mathrm{Gen}(M)$. Dann ist $\mathrm{Hom}_A(\cdot, X)$ eine additive Funktion auf $\mathcal{C}$.*

Beweis. Auf $\mathcal{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(\cdot, X) &= \mathrm{Hom}_A(\cdot, X) - 0 \\ &= \mathrm{Hom}_A(\cdot, X) - \mathrm{Ext}^1_A(\cdot, X) \\ &= \chi(\cdot, X).\end{aligned}$$

□

Korollar 20.3. *Sei* $X \in \mathrm{Gen}(M)$, *sei*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C},$$

sei

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

eine kurze exakte Folge von A*-Moduln. Dann gilt für alle* $i \in L$

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_i, Y) \cong Ext^1_A(T_i, Z).$$

Beweis. Benutze die lange exakte Homologiefolge. □

Lemma 20.4. *Sei* $Y \in \mathrm{mod}(A)$, *sei* $\Phi : M^r \to Y$ *ein Morphismus von* A*-Moduln. Dann ist* $\mathrm{Im}(\Phi) \in \mathrm{Gen}(M)$.

Beweis. Offensichtlich. □

Lemma 20.5. *Sei* $i \in L$. *Sei* $\rho = a_1 \dots a_s$ *ein Weg in* (Q, I) *mit* $s(\rho) = i$. *Dann gibt es einen Weg* $\rho' = a_1 \dots a_s b_1 \dots b_r$ *in* (Q, I) *mit* $s(\rho') = s(b_r) \in L'$.

Beweis. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass ρ ein maximaler Weg mit der Eigenschaft $s(\rho) = i$ ist, d.h. wir nehmen an, dass es keinen Pfeil $a \in Q_1$ gibt mit $a\rho \notin I$. Wir betrachten den Modul P_i. Der zu P_i gehörige Faden W_i sieht folgendermaßen aus (eventuell ohne die Pfeile a'_k):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & i \arrow[dl, "a_s"'] \arrow[dr, "a'_1"] & & \\
 & \cdots \arrow[dl, "a_1"'] & & \cdots \arrow[dr, "a'_t"] & \\
j & & & & j'
\end{tikzcd}$$

Das Auftreten von j an der Stelle 0 in W_i induziert einen Monomorphismus

$$\iota : S_j \hookrightarrow P_i.$$

Da M ein treuer A-Modul ist, gibt es insbesondere einen Monomorphismus

$$\psi : P_i \hookrightarrow M'$$

mit $M' \in \mathrm{add}(M)$. Sei

$$M' \cong X_1 \oplus \dots \oplus X_r$$

eine Zerlegung von M' in unterlegbare direkte Summanden von M', sei $\pi_k : M' \to X_k$ die kanonische Projektion. Dann gibt es ein $k \in \{1, \dots, r\}$, so dass $\pi_k \circ \psi \circ \iota \neq 0$. Wir wählen uns ein solches k. Es gilt $X_k = P_c$ für ein $c \in L'$. Wir können

$$\pi_k \circ \psi = \sum_{i=1}^{u} \lambda_u f_u : P_i \to P_c$$

als Linearkombination von kanonischen Abbildungen $f_u : P_i \to P_c$ schreiben. Insbesondere gilt für ein f_u, dass $0 \neq f_u \circ \iota : S_j \to P_c$. Wir wählen uns solch ein $f_u : P_i \to P_c$ und betrachten dies. Der Morphismus f_u kann nicht surjektiv sein, da er sonst spalten würde. Zu einem Faktor (D, E, F) von W_i sei $\pi_E : P_i \to \mathcal{M}(E)$ der kanonische Epimorphismus. Die möglichen Faktoren (D, E, F) von W_i mit $\pi_E \circ \iota \neq 0$ haben die Form

$$(1_{(j,v)}, a_1 \dots a_s, a_1'^{-} \dots a_t'^{-}),$$
$$(1_{(j,v)}, a_1 \dots a_s a_1'^{-} \dots a_t'^{-}, 1_{(j',v')})$$

für $v, v' \in \{1, -1\}$. Sei $\mathcal{M}(W_c) = P_c$. Es muss also (bis auf die Wahl einer Orientierung von W_c) einen Subfaktor der Form

$$(D', a_1 \dots a_s, F')$$
$$\text{bzw. } (D', a_1 \dots a_s a_1'^{-} \dots a_t'^{-}, F')$$

von W_c geben. Der zweite Fall kann nicht eintreten. Im ersten Fall muss W_c die folgende Form haben:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & & c \arrow[dl, "b_r"'] \arrow[dr, "b"] & \\
& & & \cdots \arrow[dl, "b_1"'] & & \cdots \\
& & i \arrow[dl, "a_s"'] & & & \\
& \cdots \arrow[dl, "a_1"'] & & & & \\
j & & & & &
\end{tikzcd}$$

Somit haben wir den gewünschten Weg gefunden. □

Wir betrachten nun den Modul P_d. Sei $W_d \in \mathcal{S}$ mit $\mathcal{M}(W_d) = P_d$. Dann sieht W_d folgendermaßen aus (eventuell ohne die Pfeile b_k):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & & d \arrow[dl, "a_s"'] \arrow[dr, "b_1"] & & \\
& & d_s \arrow[dl, "a_{s-1}"'] & & c' \arrow[dr, "b_2"] & \\
& \cdots \arrow[dl, "a_1"'] & & & & \cdots \\
d_1 & & & & &
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $d_s \in L, c' \in L'$. Sei

$$u = \max(\{k \in \{1, \dots, s\} \mid d_k \in L'\} \cup \{0\}).$$

Das Auftreten von c' an der Stelle $s+1$ induziert einen Morphismus $\Phi_1 : P_{c'} \to P_d$. Falls $u \neq 0$, setzen wir $c'' = d_u$. In diesem Fall induziert das Auftreten von c'' an der Stelle $u - 1$ einen Morphismus $\Phi_2 : P_{c''} \to P_d$. Wir setzen

$$\Phi = \begin{cases} (\Phi_1, \Phi_2) : P_{c'} \oplus P_{c''} \to P_d, & \text{falls } u \neq 0; \\ \Phi_1 : P_{c'} \to P_d, & \text{falls } u = 0. \end{cases}$$

Sei $P'_d = \mathrm{Coker}(\Phi)$. Sei $W'_d \in \mathcal{S}$ mit $\mathcal{M}(W'_d) = P'_d$. Dann hat W'_d (bis auf Orientierung) die folgende Form:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & d \arrow[dl, "a_s"'] \\
 & & d_s \arrow[dl, "a_{s-1}"'] & \\
 & \cdots \arrow[dl, "a_{u+1}"'] & & \\
d_{u+1} & & &
\end{tikzcd}$$

und es gilt

$$\mathrm{Hom}_A(M, P'_d) = 0.$$

Nach Lemma 20.5 existiert ein Pfad

$$\rho' = a_{u+1} \dots a_s b_1 \dots b_r$$

mit $c = s(\rho') \in L'$. Wir nehmen an, dass ρ' minimal mit dieser Eigenschaft gewählt wurde. Dann ist ρ' eindeutig bestimmt und sieht folgendermaßen aus:

$$c \xrightarrow{b_r} w_r \xrightarrow{b_{r-1}} \dots \xrightarrow{b_1} w_1 = d \xrightarrow{a_s} d_s \xrightarrow{a_{s-1}} \dots \xrightarrow{a_{u+1}} d_{u+1}$$

Hierbei ist $w_i \in L$ für $i \in \{1, \dots, r\}$.

Sei $C'_d = \mathcal{M}(\rho')$. Es gibt einen kanonischen Monomorphismus $P'_d \xrightarrow{\iota} C'_d$. Sei $C_d = \mathrm{Coker}(\iota)$. Wir fassen die Situation in folgendem Diagramm zusammen:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & \\
 & \mathrm{Im}(\Phi) \arrow[d] & & & \\
 & P_d \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & P'_d \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & C'_d \arrow[r] & C_d \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Sei nun

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}.$$

Aus Korollar 20.3 folgt, dass

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_i, P_d) \cong \mathrm{Ext}^1_A(T_i, P'_d)$$

für alle $i \in L$. Weiterhin folgt aus Lemma 20.1, dass

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_i, C'_d) = \mathrm{Ext}^1_A(T_i, C_d) = 0$$

für alle $i \in L$. Nun wenden wir den Funktor $\operatorname{Hom}_A(T_i, \cdot)$ auf die horizontale kurze exakte Folge an und erhalten (indem wir $\operatorname{Ext}^1_A(T_i, P'_d)$ durch $\operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_d)$ ersetzen)

$$0 \to \operatorname{Hom}_A(T_i, P'_d) \to \operatorname{Hom}_A(T_i, C'_d) \to \operatorname{Hom}_A(T_i, C_d) \to \operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_d) \to 0.$$

Wegen $C_d \in \operatorname{Gen}(M)$ ist nach Korollar 20.2 $H(\cdot) = \operatorname{Hom}_A(\cdot, C_d)$ eine additive Funktion auf $\mathcal{C}$. Des weiteren gilt

$$H(M) = H(P_c) = 1,$$
$$H(M/P_c) = 0.$$

Nach Satz 17.15 finden wir nun ein $T \in \mathcal{C}$ mit $T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i$ und

$$H(T_i) \leq 1 \text{ für alle } i \in L.$$

Falls nun für ein $i \in L$ gelten würde, dass

$$H(T_i) = 0,$$

so würde sofort folgen, dass $\operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_d) = 0$ und wir wären fertig. Somit können wir annehmen, dass

$$H(T_i) = 1 \text{ für alle } i \in L$$

gilt.

Wir betrachten nun die folgende Menge $\mathcal{X} \subset \mathcal{C}$:

$$\mathcal{X} = \{T' = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T'_i \in \mathcal{C} \mid H(T'_i) \leq 1 \text{ für alle } i \in L\}.$$

Mit derselben Überlegung wie oben können wir annehmen, dass

$$\mathcal{X} = \{T' = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T'_i \in \mathcal{C} \mid H(T'_i) = 1 \text{ für alle } i \in L\}.$$

Lemma 20.6. *$\mathcal{X} = \mathcal{C}$.*

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, dass $\mathcal{X} \neq \mathcal{C}$. Wir wissen schon, dass $\mathcal{X} \neq \emptyset$, da ja $T \in \mathcal{X}$. Da $\mathcal{C}$ zusammenhängend ist, muss es zwei in $\mathcal{C}$ benachbarte Kippmoduln T^x, T^y geben mit $T^x \in \mathcal{X}$, $T^y \notin \mathcal{X}$. Sei ohne Einschränkung

$$\eta : T^x \to T^y$$

(der andere Fall funktioniert analog). Wir haben also eine kurze exakte Folge

$$0 \to T^x_i \to T^x_a \oplus T^x_b \to T^y_i \to 0,$$

wobei einer der Mittelterme auch 0 sein kann. Da H additiv ist, gilt:

$$3 \leq H(T^x_i) + H(T^y_i) = H(T^x_a) + H(T^x_b) \leq 2.$$

Widerspruch. $\square$

Korollar 20.7. *Für alle Austauschfolgen η in $\mathcal{C}$ gilt folgendes:*

(a) $\delta(\operatorname{mid}(\eta)) = 2$.
(b) $\operatorname{add}(\operatorname{mid}(\eta)) \cap \operatorname{add}(M/P_c) = 0$.

Beweis. Benutze die Additivität von H. $\square$

Wir haben unter unseren Annahmen insbesondere gezeigt:

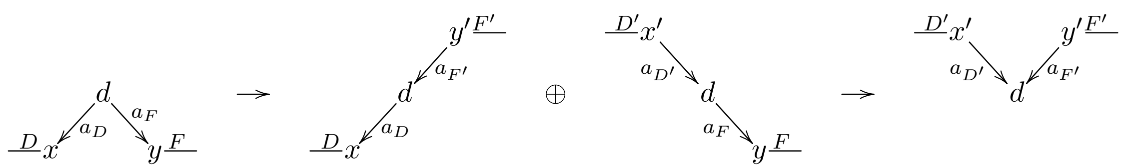
Proposition 20.8. *Sei $T \in \mathcal{C}$, sei $T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i$. Dann ist für alle $i \in L$*

$$\dim_K \operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_d) = 1.$$

Wir wählen uns nun für den Rest des Beweises eine Austauschfolge η, die exzeptionell für d ist. Nach Korollar 20.7 können wir annehmen, dass $\delta(\operatorname{mid}(\eta)) = 2$. Wir wählen uns nun Fäden D, D', E, F, F', $a_D, a_{D'}, a_F, a_{F'}$ wie in Korollar 15.5. Des weiteren orientieren wir die Fäden so, dass gilt:

(i) $t(a_F) \in L'$, falls a_F die Länge 1 hat.
(ii) $t(a_D) \in L$, falls a_D die Länge 1 hat.

Die Situation sieht folgendermaßen aus:



Wir führen eine Fallunterscheidung durch und zeigen, dass in jedem Fall ein Widerspruch entsteht. Wenn wir dies gezeigt haben, ist unser Resultat bewiesen.

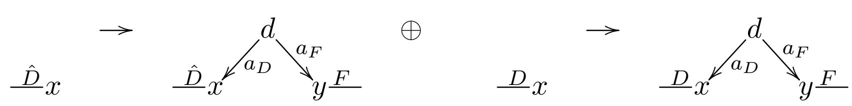
(Fall 1) Wir nehmen an, dass a_F die Länge 1 hat. Insbesondere gibt es ein $y \in L'$ und einen Pfeil $a \in Q_1$ mit $s(a) = d$, $t(a) = y$. Sei u die Stelle, an der d in $Da_D 1_{(d,v)} a_F F$ in der Skizze vorkommt. Es ist $x \in L$. Es ist $T_i = \mathcal{M}(Da_D 1_{(d,v)} a_F F)$ für ein $v \in \{1, -1\}$. Da $P_y \in \operatorname{add}(M)$ und

$$\operatorname{Hom}_A(M, \tau(T_i)) = \operatorname{D} \operatorname{Ext}^1_A(T_i, M) = 0,$$

kann y nicht als Punkt auf einem zu $\tau(T_i)$ gehörenden Faden vorkommen. Dies kann nur passieren, wenn $Da_D 1_{(d,v)} a_F F$ in einem Tal startet. Wir nehmen also an, dass $Da_D 1_{(d,v)} a_F F$ in einem Tal startet und zwar so, dass bei Bildung von $(T_i)_{\text{rechts}}$ der Punkt y an der Stelle $u+1$ wegfällt. Dann fällt aber auch der Punkt d an der Stelle u weg und es gilt $(T_i)_{\text{rechts}} = \mathcal{M}(D)$. Würde nun bei Bildung von $(T_i)_{\text{links}}$ der Punkt x an der Stelle $u - 1$ wegfallen, so wäre $\tau(T_i) = 0$ und damit T_i schon projektiv. Wir können also annehmen, dass x nicht wegfällt. In diesem Fall hat $(T_i)_{\text{links}}$ die Form

$$(T_i)_{\text{links}} = \mathcal{M}(\hat{D} a_D 1_{(d,v)} a_F F)$$

für ein $\hat{D} \in \mathcal{S}$. Wir betrachten die Auslander-Reiten Folge für T_i:



Es gilt somit $\tau(T_i) \cong \mathcal{M}(\hat{D})$. Nach Proposition 20.8 gilt

$$\dim_K \operatorname{Hom}_A(P_d, \tau(T_i)) = \dim_K \operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_d) = 1,$$

und somit liegt d an genau einer Stelle auf $\hat{D}$. Wir betrachten nun

$$T_a = \mathcal{M}(Da_D 1_{(d,v)} a_{F'} F').$$

Falls $a_{F'}F'$ die Länge 0 hat, so ist $T_a = \mathcal{M}(Da_D 1_{(d,v)})$. Da $Da_D 1_{(d,v)}$ nicht in einem Tal startet, liegt y aber auf den zu $(T_a)_{\text{rechts}}$ und $\tau(T_a)$ gehörenden Fäden und es gilt

$$\dim_K \operatorname{Ext}^1_A(T_a, P_y) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(P_y, \tau(T_a)) \neq 0$$

im Widerspruch zu unseren Annahmen.
Wir nehmen also an, dass $a_{F'}F'$ Länge ≥ 1 hat. Dann fällt aber d an der Stelle u bei Bildung von $(T_a)_{\text{rechts}}$ nicht weg und es gilt

$$\tau(T_a) \cong \mathcal{M}(\hat{D}a_D 1_{(d,v)}\hat{F})$$

für ein $\hat{F} \in \mathcal{S}$. Insbesondere liegt d an mindestens zwei verschiedenen Stellen auf $\hat{D}a_D 1_{(d,v)}\hat{F}$ und es gilt

$$\dim_K \operatorname{Ext}^1_A(T_a, P_d) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(P_d, \tau(T_a)) \geq 2$$

im Widerspruch zu Proposition 20.8.

(Fall 2) Wir nehmen an, dass a_F die Länge 0 hat und dass es ein $y \in L'$ und ein $a \in Q_1$ gibt mit $s(a) = d$, $t(a) = y$. Es ist

$$T_i \cong \mathcal{M}(Da_D 1_{(d,v)}).$$

In diesem Fall startet jedoch $Da_D 1_{(d,v)}$ nicht in einem Tal und y liegt auf den zu $(T_i)_{\text{rechts}}$ und $\tau(T_i)$ gehörenden Fäden. Es gilt somit

$$\dim_K \operatorname{Ext}^1_A(T_i, P_y) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(P_y, \tau(T_i)) \neq 0$$

im Widerspruch zu unseren Annahmen.

(Fall 3) Wir nehmen an, dass a_F die Länge 0 hat und dass es kein $a \in Q_1$ gibt mit $s(a) = d$, $t(a) \in L'$. Es ist $T_i = \mathcal{M}(Da_D 1_{(d,v)})$. Unter unseren Voraussetzungen startet $\mathcal{M}(Da_D 1_{(d,v)})$ in einem Tal. Dann erhalten wir mit denselben Argumenten wie in Fall 1 einen Widerspruch zu Proposition 20.8.

21. Beispiele

Beispiel 21.1. *Sei Q der Köcher*

$$1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2 \underset{d}{\overset{c}{\rightrightarrows}} 3$$

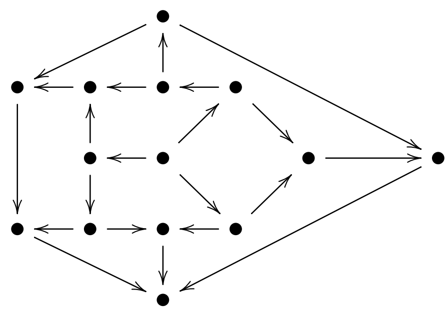
und sei $I = \langle ca, db \rangle$. Sei $A = KQ/I$. Sei $M = P_1$. Dann ist M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul. In diesem Fall sieht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ folgendermaßen aus:

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

Beispiel 21.2. *Sei Q der Köcher*

$$1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 3 \xrightarrow{c} 4$$

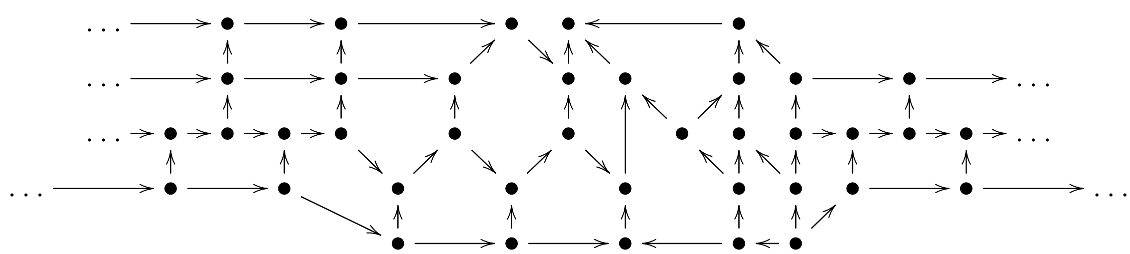
und sei $A = KQ$. Sei $M = P_1$. Dann ist M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul. In diesem Fall sieht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ folgendermaßen aus:



Beispiel 21.3. *Sei Q der Köcher*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "c"] & 2 \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[d, shift left, "b"] & 4 \arrow[l, "d"'] \\ & 3 \arrow[ur, "e"'] & \end{tikzcd}$$

und sei $I = \langle ea, bd, ac\rangle$. Sei $A = KQ/I$. Sei $M = P_1$. Dann ist M ein treuer, projektiver partieller Kippmodul. In diesem Fall sieht $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}(M)$ folgendermaßen aus:



Teil 4. Kippmoduln über der duplizierten Algebra

22. Duplizierte Algebren

Definition 22.1. Sei A eine endlich-dimensionale Algebra über K. Die *duplizierte Algebra* $\bar{A}$ von A ist die Matrixalgebra

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ \mathrm{D}({}_AA) & A \end{pmatrix}.$$

Sei nun $A = KQ/I$ gegeben durch einen Köcher mit Relationen, sei

$$Q_0 = \{1, \dots, n\}.$$

Sei $\bar{Q}$ der volle Unterköcher von $\hat{Q}$ auf den Punkten in $Q_0 \times \{0,1\}$. Sei $\bar{I}$ das Ideal, welches von allen Relationen in $\hat{I}$ erzeugt wird, die schon in $\bar{Q}$ liegen. Dann gilt folgendes

Lemma 22.2.

$$\bar{A} = K\bar{Q}/\bar{I}.$$

Beweis. Siehe [47, Beweis zum Theorem in Abschnitt 3]. □

Lemma 22.3. *Sei $i \in Q_0$. Dann gilt*

$$P_{(1,i)} = I_{(0,i)}.$$

Dies sind die einzigen projektiv-injektiven Objekte in $\mathrm{mod}(\bar{A})$.

Beweis. Folgt aus Lemma 13.5. □

Sei von nun an $A = KQ/I$ eine deriviert speziell biserielle Algebra.

Definition 22.4. Seien $X, Y \in \mathrm{mod}(\bar{A})$. Dann setzen wir

$$\mathcal{J}(X,Y) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\hat{A}}(X,Y) |\ f \text{ faktorisiert durch ein projektiv-injektives Objekt}\}.$$

Ferner setzen wir

$$\underset{\sim}{\mathrm{Hom}}_{\bar{A}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\bar{A}}(X,Y)/\mathcal{J}(X,Y).$$

Es gilt folgendes

Lemma 22.5. *Sei $\bar{M} \in \mathrm{mod}(\bar{A})$ mit $\mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M}) = 0$. Dann ist $\underset{\sim}{\mathrm{End}}_{\bar{A}}(\bar{M})$ deriviert speziell biseriell.*

Beweis. Wir können $\bar{M}$ als Modul über $\hat{A}$ auffassen. Es gilt, dass

$$\mathrm{Ext}^1_{\hat{A}}(\bar{M},\bar{M}) = \mathrm{Ext}^1_{\bar{A}}(\bar{M},\bar{M}) = 0.$$

Des weiteren gilt

$$\underset{\sim}{\mathrm{End}}_{\bar{A}}(\bar{M}) = \underline{\mathrm{End}}_{\hat{A}}(\bar{M}).$$

Der Rest folgt mit Satz 14.12. □

Beispiel 22.6. *Sei Q der Köcher $1 \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} 2$ und I das Nullideal. Dann sieht $\bar{Q}$ folgendermaßen aus*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[d, shift right, "q"'] \arrow[d, shift left, "p"] & \\
& 1' \arrow[r, shift left, "a'"] \arrow[r, shift right, "b'"'] & 2'
\end{tikzcd}$$

und $\bar{I} = \langle qa, a'q, pb, b'p, pa - qb, a'p - b'q \rangle$.

Beispiel 22.7. *Sei* Q *der Köcher* $1 \underset{b}{\overset{a}{\rightrightarrows}} 2 \xrightarrow{c} 3$ *und* I *das Ideal, das von* ca *erzeugt wird. Dann sieht* $\bar{Q}$ *folgendermaßen aus*

$$\begin{tikzcd}
1' \arrow[r, shift left, "a'"] \arrow[r, shift right, "b'"'] & 2' \arrow[r, "c'"] \arrow[d, "p"'] & 3' \arrow[dl, "q"'] & \\
& 1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3
\end{tikzcd}$$

und $\bar{I} = \langle ca, c'a', apa', pb', aq, bp, cbqc', bqc'b', pa' - qc'b', bqc' - ap \rangle$.

Beispiel 22.8. *Sei* Q *der Köcher*

$$\begin{tikzcd}
3 & 1 \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "a"] \\
& 2 \arrow[ul, "b"]
\end{tikzcd}$$

und I *das Nullideal. Dann sieht* $\bar{Q}$ *folgendermaßen aus*

$$\begin{tikzcd}
3 & 1 \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "a"] & 3' \arrow[l, shift right, "q"'] \arrow[l, shift left, "p"] & 1' \arrow[l, "c'"'] \arrow[d, "a'"] \\
& 2 \arrow[ul, "b"] & & 2' \arrow[ul, "b'"]
\end{tikzcd}$$

und $\bar{I} = \langle qb', aq, cp, pc', cqc', bapb', apb'a', qc' - pb'a', bap - cq \rangle$.

Definition 22.9. Wir definieren eine Fadenalgebra $\bar{A}^{str}$ folgendermaßen. Sei I^{str} das Ideal in $\bar{A}$, das von den Restklassen aller vollen Pfade erzeugt wird. Dann setzen wir

$$\bar{A}^{str} = \bar{A}/I^{str}.$$

Die Modulkategorien von $\bar{A}$ und $\bar{A}^{str}$ unterscheiden sich nur um die projektiv-injektiven Objekte. Insbedondere sieht für fast alle unzerlegbaren Moduln X über $\bar{A}$ die Auslander-Reiten Folge genauso aus wie über der Fadenalgebra $\bar{A}^{str}$. Wir erhalten folgende Lemmata:

Lemma 22.10. *Es gibt ein* $N' \in \mathbb{N}$*, so dass folgendes gilt:*
Für alle Fadenmoduln X *über* $\bar{A}$ *und alle* $i \in \bar{Q}_0$ *ist*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(P_i, X) \leq \dim_K \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(P_i, \tau(X)) + N'.$$

Hierbei nennen wir X *einen Fadenmodul über* $\bar{A}$*, falls wir* X *als Fadenmodul über* $\bar{A}^{str}$ *auffassen können.*

Beweis. Wir können die endlich vielen Fälle vernachlässigen, in denen die Auslander-Reiten Folgen von X über $\bar{A}$ und $\bar{A}^{str}$ sich unterscheiden. In den anderen Fällen wird $\tau^{-1}(X)$ nach der Regel in Lemma 12.2 gebildet und es gilt

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(P_i, X) \leq \dim_K \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(P_i, \tau(X)) + 4.$$

□

Korollar 22.11. *Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, so dass folgendes gilt: Für alle unzerlegebaren $X \in \operatorname{mod}(\bar{A})$ mit $\operatorname{Ext}^1_{\bar{A}}(X, X) = 0$ und $\operatorname{pd}_{\bar{A}}(X) \leq 1$ und alle $i \in Q_0$ ist*

$$\dim_K \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(I_{(0,i)}, X) \leq N.$$

Beweis. Falls X nicht projektiv-injektiv ist, so muss X ein Fadenmodul sein. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} 0 &= \dim_K \operatorname{Ext}^1_{\bar{A}}(I_{0,i}, X) \\ &= \dim_K \operatorname{D} \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(I_{0,i}, \tau(X)) \\ &\geq \dim_K \operatorname{Hom}_{\bar{A}}(I_{0,i}, X) - N'. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet N' die Konstante aus Lemma 22.10. □

23. Formulierung des Ergebnisses

Sei $A = KQ/I$ eine deriviert speziell biserielle Algebra, so dass Q keine orientierten Kreise enthält. Sei $\bar{A}$ die duplizierte Algebra von A. Sei

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1}^{n} I_{(0,i)}.$$

Lemma 23.1. *Sei $T \in \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}$. Dann ist $\mathcal{I} \in \operatorname{add}(T)$.*

Beweis. Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$0 \to {}_{\bar{A}}\bar{A} \to T^0 \to T^1 \to 0.$$

Da $\mathcal{I}$ projektiv ist, ist $\mathcal{I}$ ein direkter Summand von ${}_{\bar{A}}\bar{A}$. Somit gibt es einen Monomorphismus

$$\iota : \mathcal{I} \hookrightarrow T^0.$$

Da $\mathcal{I}$ injektiv ist, spaltet ι, und somit gilt

$$\mathcal{I} \in \operatorname{add}(T^0) \subset \operatorname{add}(T).$$

□

Korollar 23.2. $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}} = \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathcal{I})$.

Lemma 23.3. *Sei $M \in \operatorname{mod}(\bar{A})$ projektiv. Dann gilt*

$$M \text{ ist treu } \Leftrightarrow \mathcal{I} \in \operatorname{add}(M).$$

Beweis. (⇒) Da $\mathcal{I} \in \operatorname{add}(M)$ und $\mathcal{I}$ treu ist, ist auch M treu.

(⇐) Da M treu ist, gibt es einen Monomorphismus

$$_{\bar{A}}\bar{A} \hookrightarrow M^s.$$

Insbesondere gibt es auch einen Monomorphismus $\iota : \mathcal{I} \hookrightarrow M^s$. Da $\mathcal{I}$ injektiv ist, muss ι spalten, und es gilt

$$\mathcal{I} \in \mathrm{add}(M^s) = \mathrm{add}(M).$$

□

Wir werden folgenden Satz beweisen:

Satz 23.4. *Sei $M \in \mathrm{mod}(\bar{A})$ projektiv und treu. Dann ist $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(M)$ zusammenhängend.*

Insbesondere gilt

Korollar 23.5. *$\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}} = \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(\mathcal{I})$ ist zusammenhängend.*

Wir werden Satz 23.4 Über Induktion nach $l(M) = 2n - \delta(M)$ beweisen. Für $l(M) = 0$ besteht $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(M)$ nur aus einem Punkt und die Behauptung ist trivial. Für $l(M) = 1$ folgt die Behauptung aus Lemma 7.16. Wir nehmen also an, dass $l(M) \geq 2$ und dass die Behauptung für alle M' mit $l(M') < l(M)$ schon bewiesen ist. Wir setzen $L = \{1, \dots l(M)\}$ und $L' = \{l(M), \dots, n\}$. Ferner benennen wir die Punkte aus $\bar{Q}_0$ so um, dass

$$\bar{Q}_0 = \{1, \dots, 2n\}$$

und dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ die Punkte $(0, i)$ und i sowie die Punkte $(1, i)$ und $i + n$ sich entsprechen. Es gilt

$$\mathcal{I} = \bigoplus_{i=1}^{n} I_i = \bigoplus_{i=n+1}^{2n} P_i.$$

Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass gilt

$$M \cong \mathcal{I} \oplus \bigoplus_{i \in L'} P_i.$$

Wir betrachten von nun an eine feste Zusammenhangskomponente $\mathcal{C}$ von $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(M)$. Wir werden zeigen, dass $\mathcal{C} = \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(M)$.

24. Additive Funktionen auf Kippmoduln der duplizierten Algebra

Definition 24.1. Wir nennen eine Abbildung $f : \mathrm{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ *fast additive Funktion auf $\mathcal{C}$*, falls f die folgenden Bedingungen erfüllt:

(a) f respektiert Isomorphismen, d.h. für alle $X, Y \in \mathrm{Exc}(\bar{A})$ mit $X \cong Y$ gilt

$$f(X) = f(Y).$$

(b) f respektiert direkte Summen, d.h. für alle $X, Y \in \mathrm{mod}(\bar{A})$ gilt

$$f(X \oplus Y) = f(X) + f(Y).$$

(c) Für jede Austauschfolge

$$\eta : 0 \to T_i \to \hat{T} \to T_i' \to 0$$

in $\mathcal{C}$ gilt, dass

$$f(T_i) + f(T_i') = f(\hat{T}).$$

Wir nennen eine fast additive Funktion $f : \operatorname{Exc}(A) \to \mathbb{Z}$ *additive Funktion auf* $\mathcal{C}$, falls f zusätzlich der folgenden Bedingung genügt:

(d) Für jeden projektiv-injektiven Modul $I \in \operatorname{mod}(\bar{A})$ gilt, dass

$$f(I) = 0.$$

Definition 24.2. Sei N ein partieller Kippmodul mit $M \in \operatorname{add}(N)$, so dass es einen Kippmodul $T \in \mathcal{C}$ gibt mit $N \in \operatorname{add}(T)$. Wir setzen wie in 17.5

$$\mathcal{C}(N) = \mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(N) \cap \mathcal{C}.$$

Definition 24.3. Sei $N = N' \oplus \mathcal{I}$. Sei

$$\eta : 0 \to T_i \to \hat{T} \to T_i' \to 0$$

eine Austauschfolge in $\mathcal{C}(N)$. Sei

$$\hat{T} = I \oplus \tilde{T}$$

mit $I \in \operatorname{add}(\mathcal{I})$, so dass $\tilde{T}$ keinen projektiv-injektiven, direkten Summanden enthält. Dann nennen wir η *N-regulär*, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(A) $\delta(\tilde{T}) = 2$.
(B) $\operatorname{add}(\tilde{T}) \cap \operatorname{add}(N') = 0$.

Wir nennen $\mathcal{C}$ *N-regulär*, falls $\mathcal{C}(N)$ kein einpunktiger Köcher ist und falls es eine Zusammenhangskomponente $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}(N)$ gibt, so dass jede Austauschfolge η in $\mathcal{C}'$ N-regulär ist.

Lemma 24.4. *Sei* $f : \operatorname{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Sei*

$$T = \mathcal{I} \oplus P_{l+1} \oplus \cdots \oplus P_n \oplus T_1 \oplus \cdots \oplus T_l \in \mathcal{C}.$$

Sei

$$\max\nolimits_f(T) = \max\{f(T_1), \ldots, f(T_l)\} > \max\{f(P_{l+1}), \ldots, f(P_n)\} \geq 0.$$

Sei

$$N = M \oplus \bigoplus_{\{j \in L \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j.$$

(a) *Sei* $\eta : T \leftrightarrow T'$ *eine Austauschfolge in* $\mathcal{C}(N)$, *so dass* $T_i \in \operatorname{add}(T)$ *gegen* $T_i' \in \operatorname{add}(T')$ *ausgetauscht wird. Falls* η *N-regulär ist, so ist* $f(T_i') = f(T_i)$ *und somit auch* $f(T') = f(T)$.
(b) *Sei* $\eta : T \leftrightarrow T'$ *eine Austauschfolge in* $\mathcal{C}(N)$, *so dass* $T_i \in \operatorname{add}(T)$ *gegen* $T_i' \in \operatorname{add}(T')$ *ausgetauscht wird. Falls* η *nicht N-regulär ist, so ist* $f(T_i') < f(T_i)$ *und somit auch* $f(T') < f(T)$.

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 17.8. □

Lemma 24.5. *Sei* $f : \mathrm{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Sei*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}.$$

Seien

$$\begin{aligned} \max\nolimits_f(T) &= \max\{f(T_1), \dots, f(T_l)\} > \max\{f(P_{l+1}), \dots, f(P_n)\} \geq 0, \\ N(T) &= M \oplus \bigoplus_{\{j \in L \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j. \end{aligned}$$

Sei $\mathcal{C}$ *nicht* $N(T)$*-regulär. Dann gibt es einen Kippmodul* $T' \in \mathcal{C}$ *mit der folgenden Eigenschaft: Entweder ist* $\max_f(T') < \max_f(T)$ *oder es gilt* $\max_f(T') = \max_f(T)$ *und* $\delta(N(T')) > \delta(N(T))$.

Beweis. Analog zum Beweis von Lemma 17.9. □

Proposition 24.6. *Sei* $f : \mathrm{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Für*

$$T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}$$

seien

$$\begin{aligned} \max\nolimits_f(T) &= \max\{f(T_1), \dots, f(T_l)\}, \\ N(T) &= M \oplus \bigoplus_{\{j \in L \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j. \end{aligned}$$

Für alle $T \in \mathcal{C}$ *sei* $\mathcal{C}$ *nicht* $N(T)$*-regulär.*

(a) *Sei* $\mathcal{C}$ M*-regulär. Insbesondere ist*

$$N(T) \ncong M$$

für alle $T \in \mathcal{C}$. *Dann ist* $\max_f(\cdot)$ *auf* $\mathcal{C}$ *nicht nach unten beschränkt.*

(b) *Für alle* $j \in L'$ *sei*

$$0 \leq f(P_j).$$

Dann gibt es ein $T \in \mathcal{C}$ *mit*

$$\max\nolimits_f(T) \leq \max\{f(P_{l+1}), \dots, f(P_n)\} \geq 0.$$

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 17.13. □

Korollar 24.7. *Sei* $f : \mathrm{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ *additiv auf* $\mathcal{C}$. *Sei* $0 \leq f(P_j) \leq \lambda$ *für alle* $j \in L'$. *Für alle partiellen Kippmoduln* N *mit* $M \in \mathrm{add}(N)$ *und* $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$ *sei* $\mathcal{C}$ *nicht* N*-regulär. Dann gibt es ein* $T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}$ *mit* $f(T_i) \leq \lambda$ *für alle* $i \in L$.

Beweis. Folgt sofort aus 24.6.(b). □

Wir möchten nun folgendes Lemma zeigen:

Lemma 24.8. *Sei* $N \in \mathrm{mod}(\bar{A})$ *ein partieller Kippmodul mit* $M \in \mathrm{add}(N)$ *und* $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. *Dann ist* $\mathcal{C}$ *nicht* N*-regulär.*

Wir möchten Lemma 24.8 per Induktion nach $l(N)$ beweisen. Für $l(N) = 1$ ist die Aussage trivial. Sei also $l(N) > 1$ und die Behauptung stimme für alle $\tilde{N}$ mit

$$M \in \mathrm{add}(N) \subsetneq \mathrm{add}(\tilde{N}).$$

Sei $\mathcal{C}'$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{C}(N)$. Wir zeigen, dass $\mathcal{C}'$ Austauschfolgen enthalten muss, die nicht N-regulär sind. Wir setzen $L'' = \{1, \ldots, l(N)\}$.

Lemma 24.9. *Falls $\mathcal{C}'$ eine Quelle oder eine Senke besitzt, so enthält $\mathcal{C}'$ Austauschfolgen, die nicht N-regulär sind.*

Beweis. Wir betrachten den Fall, dass $\mathcal{C}'$ eine Quelle besitzt. Der andere Fall läuft analog. Wir nehmen an, dass alle Austauschfolgen in $\mathcal{C}'$ N-regulär sind. Sei

$$T = N \oplus \bigoplus_{i \in L''} T_i \in \mathcal{C}'$$

eine Quelle. Sei η_i die Austauschfolge zu T_i. Dann hat η_i die Form

$$\eta_i : 0 \to T_i \to T_{a(i)} \oplus T_{b(i)} \oplus I \to T_i' \to 0.$$

Hierbei sind

$$a, b : \{1, \ldots, l(N)\} \to \{1, \ldots, l(N)\}$$

Funktionen ohne Fixpunkt und $I \in \mathrm{add}(\mathcal{I})$ (I kann auch 0 sein). Wir betrachten nun die Algebra $B = \underset{\sim}{\underline{\mathrm{End}}}_{\tilde{A}}(T)$. Nach Lemma 22.11 ist B deriviert speziell biseriell und endlich-dimensional. Wir schreiben $B = kQ'/I'$ als Köcher mit Relationen. Sei

$$N = \mathcal{I} \oplus \bigoplus_{i=1}^{n-l(N)} N_i$$

für unzerlegbare N_i. Dann schreiben wir $Q_0' = \{x_{T_1}, \ldots x_{T_{l(N)}}, x_{N_1}, \ldots x_{N_{n-l(N)}}\}$, so dass die Punkte in Q_0' den direkten Summanden von $N/\mathcal{I}$ entsprechen. Für einen Punkt $x_Y \in Q_0'$ entsprechen dann die Pfeile, die in x_Y enden, den nicht-projektiv-injektiven direkten Summanden einer minimalen $\mathrm{add}(N/Y)$-Linksapproximation von Y.

Dann wissen wir aber, dass in jeden Punkt der Form x_{T_i} genau zwei Pfeile hineingehen, nämlich

$$\begin{tikzcd}
x_{T_{a(i)}} \arrow[dr] & \\
& x_{T_i} \\
x_{T_{b(i)}} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Da B deriviert speziell biseriell ist, müssen dann aber auch aus jedem Punkt x_{T_i} zwei Pfeile hinausgehen, so dass x_{T_i} lokal wie folgt aussieht:

$$\begin{tikzcd}
x_{T_{a(i)}} \arrow[dr] & & x_{T_{a'(i)}} \\
& x_{T_i} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
x_{T_{b(i)}} \arrow[ur] & & x_{T_{b'(i)}}
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind wiederum

$$a', b' : \{1, \ldots, l(N)\} \to \{1, \ldots, l(N)\}$$

Funktionen ohne Fixpunkt. Dann ist es aber nicht mehr möglich, ein zulässiges Ideal $I' \subset KQ'$ zu wählen, so dass KQ'/I' deriviert speziell biseriell und endlichdimensional ist. Widerspruch. $\square$

Korollar 24.10. *Falls $\mathcal{C}'$ endlich ist, so enthält $\mathcal{C}'$ Austauschfolgen, die nicht N-regulär sind.*

Beweis. Da $\mathcal{T}_{\bar{A}}$ keine orientierten Kreise besitzt, besitzt auch $\mathcal{C}'$ keine orientierten Kreise. Falls $\mathcal{C}'$ nun endlich ist, so muss $\mathcal{C}'$ eine Quelle und eine Senke besitzen. Der Rest folgt mit Lemma 24.9. $\square$

Definition 24.11. Sei nun $i \in \{1, \ldots, 2n\}$. Für einen A-Modul X setzen wir

$$F_i(X) = \dim_K \operatorname{Hom}_A(P_i, X).$$

$F_i(\cdot)$ ist eine fast additive Funktion auf $\mathcal{C}$. Sei

$$\underline{\dim}(X) = (F_1(X), \ldots, F_{2n}(X)) \in \mathbb{Z}^{2n}$$

der *Dimensionsvektor zu* X. Des weiteren sei

$$\underline{\dim}^{\text{oben}}(X) = (F_{n+1}(X), \ldots, F_{2n}(X)) \in \mathbb{Z}^{n}$$

der *obere Dimensionsvektor* zu X.

Definition 24.12. Sei $\mathcal{C}'$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{C}(N)$. Wir sagen, dass $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star)$ erfüllt, falls folgendes gilt:

$(\star)$ Sei $T = N \oplus \bigoplus_{j \in L''} T_j \in \mathcal{C}'$ und seien $k, k' \in L''$. Dann ist

$$\underline{\dim}(T_k) = \underline{\dim}(T_{k'}).$$

Definition 24.13. Wir sagen, dass $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star\star)$ erfüllt, falls folgendes gilt:

$(\star\star)$ Sei $T = N \oplus \bigoplus_{j \in L''} T_j \in \mathcal{C}'$ und seien $k, k' \in L''$. Dann ist

$$\underline{\dim}^{\text{oben}}(T_k) = \underline{\dim}^{\text{oben}}(T_{k'}).$$

Lemma 24.14. *Sei $M = P_{l+1} \oplus \cdots \oplus P_n \oplus \mathcal{I}$ ein treuer, projektiver $\bar{A}$-Modul. Sei N ein partieller Kippmodul mit $M \in \mathrm{add}(M)$ und $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{C}'$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(N)$. Wir nehmen an, dass alle Kippmoduln in $\mathcal{C}'$ denselben Dimensionsvektor haben. Dann ist $\mathcal{C}'$ nicht N-regulär.*

Beweis. Nach [22, Kapitel 3] gibt es nur endlich viele Kippmoduln mit gleichem Dimensionsvektor. Somit muss $\mathcal{C}'$ endlich sein. Der Rest folgt mit 24.10. □

Lemma 24.15. *Sei $M = P_{l+1} \oplus \cdots \oplus P_n \oplus \mathcal{I}$ ein treuer, projektiver $\bar{A}$-Modul. Sei N ein partieller Kippmodul mit $M \in \mathrm{add}(N)$ und $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{C}'$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\bar{\mathrm{A}}}(N)$.*

(a) *Wir nehmen an, dass $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star)$ erfüllt. Des weiteren nehmen wir an, dass $\mathcal{C}$ N-regulär ist. Dann kann kein projektiv-injektiver Modul in einer Austauschfolge in $\mathcal{C}'$ vorkommen.*

(b) *Wir nehmen an, dass $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star\star)$ erfüllt. Des weiteren nehmen wir an, dass $\mathcal{C}$ N-regulär ist. Dann kann kein projektiv-injektiver Modul in einer Austauschfolge in $\mathcal{C}'$ vorkommen.*

Beweis. (a) Sei $\eta : T \leftrightarrow T'$ eine Austauschfolge in $\mathcal{C}'$. Diese entspricht einer kurzen exakten Folge

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \oplus T_b \oplus I \to T_i' \to 0$$

mit $T_a, T_b \notin \mathrm{add}(N)$ und $I \in \mathrm{add}(\mathcal{I})$. Wir wollen zeigen, dass $I = 0$. Aus $(\star)$ folgt, dass

$$\underline{\dim}(T_i) = \underline{\dim}(T_a) = \underline{\dim}(T_b) = \underline{\dim}(T_i').$$

Wegen der Fastadditivität der F_i folgt sofort, dass $\underline{\dim}(I) = 0$ und somit $I = 0$.

(b) Der Beweis läuft analog zu (a).

□

Korollar 24.16. (a) *Unter den Annahmen von 24.15.(a) haben alle Kippmoduln in $\mathcal{C}'$ denselben Dimensionsvektor. Insbesondere ist $\mathcal{C}'$ endlich.*

(b) *Unter den Annahmen von 24.15.(b) haben alle Kippmoduln in $\mathcal{C}'$ denselben oberen Dimensionsvektor.*

Lemma 24.17. *Sei $\mathcal{C}$ N-regulär. Sei $\mathcal{C}'$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{C}(N)$, die $(\star\star)$ erfüllt. Sei*

$$T = N \oplus \bigoplus_{j \in L''} T_i$$

ein beliebiger Kippmodul in $\mathcal{C}'$, für den folgendes gilt:
Für alle $k, k' \in L''$ ist

$$\underline{\dim}(T_k) = \underline{\dim}(T_{k'}).$$

Dann erfüllt $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star)$.

Beweis. Sei T' ein Nachbar von T in $\mathcal{C}'$. Wir betrachten die zugehörige Austauschfolge

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \oplus T_b \to T_i' \to 0.$$

Aus der Fastadditivität der F_i folgt, dass $\underline{\dim}(T_i') = \underline{\dim}(T_i)$. Insbesondere erfüllt T' dieselbe Bedingung wie T. Da $\mathcal{C}'$ zusammenhängend ist, erfüllen alle Kippmoduln in $\mathcal{C}'$ diese Bedingung. Somit erfüllt $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star)$. $\square$

Lemma 24.18. *Sei $\mathcal{C}$ N-regulär. Sei $\mathcal{C}'$ eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{C}(N)$, die $(\star\star)$ erfüllt. Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Sei*

$$T = N \oplus \bigoplus_{j \in L''} T_j$$

ein beliebiger Kippmodul in $\mathcal{C}'$, für den folgendes gilt:
Es gibt $k, k' \in L''$ mit

$$F_i(T_k) \neq F_i(T_{k'}).$$

Dann gilt Selbiges für alle $T'' \in \mathcal{C}'$.

Beweis. Sei

$$T' = N \oplus \bigoplus_{j \in L''} T_j'$$

ein Nachbar von T in $\mathcal{C}'$. Wir nehmen an, dass T' nicht obiger Bedingung genügt. Somit gilt für alle $k, k' \in L''$, dass

$$F_i(T_k') = F_i(T_{k'}').$$

Wir betrachten die zugehörige Austauschfolge

$$\eta : 0 \to T_j \to T_a \oplus T_b \to T_j' \to 0.$$

Aus der Fastadditivität der F_i folgt, dass

$$F_i(T_j) = F_i(T_j').$$

Dann erfüllt T aber nicht obige Bedingung. Widerspruch.
Wir haben gezeigt, dass die Aussage für alle Nachbarn von T in $\mathcal{C}'$ gilt. Da $\mathcal{C}'$ zusammenhängend ist, gilt die Aussage somit für alle $T'' \in \mathcal{C}'$. $\square$

Wir formulieren nun die entsprechenden Versionen von Lemma 24.4, Lemma 24.5 und Proposition 24.6, die auf unsere Situation zugeschnitten sind:

Lemma 24.19. *Sei $f : \mathrm{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ fast additiv auf $\mathcal{C}$. Sei*

$$T = N \oplus T_1 \oplus \dots \oplus T_{l(N)} \in \mathcal{C}'.$$

Wir nehmen an, dass $\mathcal{C}$ N-regulär ist. Seien

$$\begin{aligned}
\max\nolimits_f(T) &= \max\{f(T_1), \dots, f(T_{l(N)})\},\\
\min\nolimits_f(T) &= \min\{f(T_1), \dots, f(T_{l(N)})\},\\
R &= N \oplus \bigoplus_{\{j \in L'' \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j,\\
S &= N \oplus \bigoplus_{\{j \in L'' \mid f(T_j) \neq \min_f(T)\}} T_j.
\end{aligned}$$

(a) *Sei $\eta : T \leftrightarrow T'$ eine Austauschfolge in $\mathcal{C}(R)$ (beziehungsweise in $\mathcal{C}(S)$), so dass $T_i \in \mathrm{add}(T)$ gegen $T_i' \in \mathrm{add}(T')$ ausgetauscht wird. Wir nehmen an, dass kein projektiv-injektiver Modul in η vorkommt. Falls η R-regulär (bzw. S-regulär) ist, so ist $f(T_i') = f(T_i)$ und somit auch $f(T') = f(T)$.*

(b) *Sei* $\eta : T \leftrightarrow T'$ *eine Austauschfolge in* $\mathcal{C}(R)$, *so dass* $T_i \in \operatorname{add}(T)$ *gegen* $T'_i \in \operatorname{add}(T')$ *ausgetauscht wird. Wir nehmen an, dass kein projektiv-injektiver Modul in* η *vorkommt. Falls* η *nicht* R*-regulär ist, so ist* $f(T'_i) < f(T_i)$ *und somit auch* $f(T') < f(T)$.

(c) *Sei* $\eta : T \leftrightarrow T'$ *in* $\mathcal{C}(S)$ S*-regulär, so dass* $T_i \in \operatorname{add}(T)$ *gegen* $T'_i \in \operatorname{add}(T')$ *ausgetauscht wird. Wir nehmen an, dass* η *die Form*

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \oplus T_b \oplus I \to T'_i \to 0$$

hat. Hierbei sei $I \in \operatorname{add}(\mathcal{I})$ *mit* $f(I) > 0$ *(bzw.* $f(I) = 0$*). Dann ist* $f(T'_i) > f(T_i)$ *(bzw.* $f(T'_i) = f(T_i)$*) und somit auch* $f(T') > f(T)$ *(bzw.* $f(T') = f(T)$*).*

(d) *Sei für jeden projektiv-injektiven Modul* $f(I) \geq 0$. *Sei* $\eta : T \leftrightarrow T'$ *eine Austauschfolge in* $\mathcal{C}(S)$, *so dass* $T_i \in \operatorname{add}(T)$ *gegen* $T'_i \in \operatorname{add}(T')$ *ausgetauscht wird. Falls* η *nicht* S*-regulär ist, so ist* $f(T'_i) > f(T_i)$ *und somit auch* $f(T') > f(T)$.

Beweis. (a),(b) Analog zum Beweis von Lemma 17.8.

(c) Es gelten $f(T_a), f(T_b) = f(T_i)$ sowie $f(I) > 0$ (bzw. $f(I) = 0$). Aus der Fastadditivität von f folgt

$$\begin{aligned} f(T'_i) &= f(T_a) + f(T_b) + f(I) - f(T_i) \\ &= 2f(T_i) + f(I) - f(T_i) \\ &= f(T_i) + f(I) \\ &> f(T_i) \\ \text{(bzw. } &= f(T_i)). \end{aligned}$$

(d) Die Austauschfolge η hat die Form

$$\eta : 0 \to T_i \to T_a \oplus T_b \oplus I \to T'_i \to 0$$

mit $I \in \operatorname{add}(\mathcal{I})$. Aus der Fastadditivität von f folgt

$$\begin{aligned} f(T'_i) &= f(T_a) + f(T_b) + f(I) - f(T_i) \\ &> 2f(T_i) + f(I) - f(T_i) \\ &= f(T_i) + f(I) \\ &\geq f(T_i). \end{aligned}$$

$\square$

Lemma 24.20. *Sei* $f : \operatorname{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ *fast additiv auf* $\mathcal{C}$. *Sei*

$$T = N \oplus \bigoplus_{i \in L''} T_i \in \mathcal{C}'.$$

Seien

$$\begin{aligned}\max_f(T) &= \max\{f(T_1), \dots, f(T_{l(N)})\},\\ \min_f(T) &= \min\{f(T_1), \dots, f(T_{l(N)})\},\\ R(T) &= N \oplus \bigoplus_{\{j\in L''\mid f(T_j)\neq \max_f(T)\}} T_j,\\ S(T) &= N \oplus \bigoplus_{\{j\in L''\mid f(T_j)\neq \min_f(T)\}} T_j.\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{C}$ N-regulär.

(a) *Sei $\mathcal{C}$ nicht $R(T)$-regulär. Wir nehmen an, dass kein projektiv-injektiver Modul in einer Austauschfolge in $\mathcal{C}'$ vorkommt. Dann gibt es einen Kippmodul $T' \in \mathcal{C}'$ mit der folgenden Eigenschaft: Entweder ist $\max_f(T') < \max_f(T)$ oder es gilt $\max_f(T') = \max_f(T)$ und $\delta(R(T')) > \delta(R(T))$.*

(b) *Für jeden projektiv-injektiven Modul I sei $f(I) \geq 0$. Sei $\mathcal{C}$ nicht $S(T)$-regulär. Insbesondere ist $S(T) \ncong N$. Dann gibt es einen Kippmodul $T' \in \mathcal{C}'$ mit der folgenden Eigenschaft: Entweder ist $\min_f(T') > \min_f(T)$ oder es gilt $\min_f(T') = \min_f(T)$ und $\delta(S(T')) > \delta(S(T))$. Des weiteren ist $S(T') \ncong N$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog zum Beweis von Lemma 17.9. Wir zeigen noch einmal Aussage (b). Wir finden eine Folge von Kippmoduln $T = T^0, T^1, \dots, T^s$ und Austauschfolgen

$$T^0 \xleftrightarrow{\eta_1} T^1 \xleftrightarrow{\eta_2} T^2 \xleftrightarrow{\eta_3} \dots \xleftrightarrow{\eta_{s-1}} T^{s-1} \xleftrightarrow{\eta_s} T^s$$

in $\mathcal{C}'$, so dass $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ $S(T)$-regulär sind und dass für jedem projektiv-injektiver Modul I, der in einem Mittelterm von $\eta_1, \dots, \eta_{s-1}$ vorkommt, gilt, dass $f(I) = 0$. Die Austauschfolge η_s sei so gewählt, dass entweder ein projektiv-injektiver Modul I im Mittelterm von η_s vorkommt mit $f(I) > 0$ oder dass η_s nicht $S(T)$-regulär ist. Nach Lemma 24.19.(a) und 24.19.(c) gilt, dass

$$\begin{aligned}f(T) &= f(T^1) = \dots = f(T^{s-1}),\\ N(T) &\cong N(T^1) \cong \dots \cong N(T^{s-1}),\\ \max_f(T) &= \max_f(T^1) = \dots = \max_f(T^{s-1}),\\ \delta(N(T)) &= \delta(N(T^1)) = \dots = \delta(N(T^{s-1})).\end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $T^{s-1} \to T^s$ in $\mathcal{C}'$. Wir betrachten nun die Austauschfolge

$$\eta_s : 0 \to T_i^{s-1} \to T_a^{s-1} \oplus T_b^{s-1} \oplus I \to T_i^s \to 0.$$

Nach Lemma 24.19.(c) (bzw. Lemma 24.19.(d)) folgt, dass $f(T_i^s) > f(T_i^{s-1})$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Falls $S(T^{s-1}) \cong T^{s-1}/T_i^{s-1}$ (d.h., dass T_i^{s-1} der eindeutige unzerlegbare, direkte Summand von T^{s-1} ist, auf dem f einen minimalen Wert annimmt), so gilt

$$\min_f(T^s) > \min_f(T^{s-1}) = \min_f(T).$$

Wäre nun $S(T^s) \cong N$, so wäre insbesondere

$$f(T_i^s) = f(T_a^{s-1}) = f(T_b^{s-1})$$

und somit

$$\begin{aligned} f(T_i^s) &> f(T_i^{s-1}) \\ &= f(T_a^{s-1}) + f(T_b^{s-1}) + f(I) - f(T_i^s) \\ &= f(T_I^s) + f(I), \end{aligned}$$

was absurd ist.

- Sonst gilt wegen $f(T_i^s) > f(T_i^{s-1})$, dass

  $$S(T^s) \cong S(T^{s-1}) \oplus T_i^s.$$

  Insbesondere ist

  $$\delta(S(T^s)) > \delta(S(T^{s-1})) = \delta(S(T)).$$

  Auch in diesem Fall gilt offensichtlich, dass $S(T^s) \not\cong N$.

Somit ist T^s unser gesuchtes T'. □

Proposition 24.21. *Sei $f : \mathrm{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ fast additiv auf $\mathcal{C}$. Für*

$$T = N \oplus \bigoplus_{i \in L''} T_i \in \mathcal{C}'$$

seien

$$\begin{aligned} \max\nolimits_f(T) &= \max\{f(T_1), \dots, f(T_{l(N)})\}, \\ \min\nolimits_f(T) &= \min\{f(T_1), \dots, f(T_{l(N)})\}, \\ R(T) &= N \oplus \bigoplus_{\{j \in L'' \mid f(T_j) \neq \max_f(T)\}} T_j, \\ S(T) &= N \oplus \bigoplus_{\{j \in L'' \mid f(T_j) \neq \min_f(T)\}} T_j. \end{aligned}$$

(a) *Für alle $T \in \mathcal{C}'$ sei $\mathcal{C}$ nicht $R(T)$-regulär. Wir nehmen an, dass kein projektiv-injektiver Modul in einer Austauschfolge in $\mathcal{C}'$ vorkommt. Des weiteren nehmen wir an, dass $\mathcal{C}$ N-regulär ist. Dann ist $\max_f(\cdot)$ auf $\mathcal{C}'$ nicht nach unten beschränkt.*

(b) *Für jeden projektiv-injektiven Modul I sei $f(I) \geq 0$. Es existiere ein $T \in \mathcal{C}'$, so dass $\mathcal{C}$ nicht $S(T)$-regulär. Des weiteren nehmen wir an, dass $\mathcal{C}$ N-regulär ist. Dann ist $\min_f(\cdot)$ auf $\mathcal{C}'$ nicht nach oben beschränkt.*

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 17.13. □

Proposition 24.22. *Falls $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star\star)$ erfüllt, so ist $\mathcal{C}'$ nicht N-regulär.*

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, $\mathcal{C}'$ sei N-regulär. Falls $\mathcal{C}'$ zusätzlich die Bedingung $(\star)$ erfüllt, so ist $\mathcal{C}'$ endlich und somit nach Korollar 24.10 nicht N-regulär. Sei also $(\star)$ nicht erfüllt für $\mathcal{C}'$. Es gibt also ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und einen Kippmodul

$$T = N \oplus \bigoplus_{k \in L''} T_k \in \mathcal{C}',$$

sowie $k, k' \in L''$ mit
$$F_i(T_k) \neq F_i(T_{k'}).$$
Nach Lemma 24.18 gibt es solche k, k' sogar für alle $T \in \mathcal{C}'$.
Insbesondere ist nach unserer Induktionsvoraussetzung $\mathcal{C}$ nicht $R(T)$-regulär für alle $T \in \mathcal{C}'$. F_i ist eine fast additive Funktion auf $\mathcal{C}$. Nach Lemma 24.15 kommt kein projektiv-injektiver Modul in einer Austauschfolge in $\mathcal{C}'$ vor. Nach Proposition 24.21.(a) ist $\max_{F_i}(\cdot)$ auf $\mathcal{C}'$ nicht nach unten beschränkt. Dies ergibt einen Widerspruch, da der Wertebereich von F_i nach unten beschränkt ist. $\square$

Somit bleibt noch folgende Proposition zu zeigen:

Proposition 24.23. *Falls $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star\star)$ nicht erfüllt, so ist $\mathcal{C}'$ nicht N-regulär.*

Beweis. Durch Widerspruch. Wir nehmen an, $\mathcal{C}$ wäre N-regulär. Da $\mathcal{C}'$ die Bedingung $(\star\star)$ nicht erfüllt, gibt es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ und ein $T = N \oplus \bigoplus_{k \in L''} T_k$ sowie $k, k' \in L''$ mit
$$F_i(T_k) \neq F_i(T_{k'}).$$
Insbesondere ist $S(T) \ncong N$. Nach unserer Induktionsvoraussetzung ist $\mathcal{C}$ nicht $S(T)$-regulär. Nach Proposition 24.21.(b) ist $\min_{F_i}(\cdot)$ auf $\mathcal{C}'$ nicht nach oben beschränkt. Das liefert uns aber einen Widerspruch zu Lemma 22.11. $\square$

Korollar 24.24. *Sei N ein partieller Kippmodul mit $M \in \operatorname{add}(N)$ und $\mathcal{C}(N) \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{C}$ nicht N-regulär.*

Satz 24.25. *Sei $f : \operatorname{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$ additiv auf $\mathcal{C}$. Sei $0 \leq f(P_j) \leq \lambda$ für alle $j \in L'$. Dann gibt es ein $T = M \oplus \bigoplus_{i \in L} T_i \in \mathcal{C}$ mit $f(T_i) \leq \lambda$ für alle $i \in L$.*

Beweis. Folgt sofort aus Korollar 24.24 und Korollar 24.7. $\square$

25. Der Köcher der Kippmoduln über der duplizierten Algebra

Wir beweisen in diesem Abschnitt Satz 23.4. Dazu benutzen wir Satz 24.25.

Für einen Köcher $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ und eine Teilmenge $M \subset Q_0$ sei $Q \backslash M$ der volle Unterköcher auf den Punkten in $Q_0 \backslash M$. Sei nun $A = KQ/I$ deriviert speziell biseriell, so dass Q keine orientierten Kreise enthält. Wir fixieren eine Ordnung $\preceq$ auf Q_0, so dass $i_1 \preceq i_2 \preceq \cdots \preceq i_n$ und i_j Senke in $Q/\{i_1, \ldots, i_{j-1}\}$ ist.

Lemma 25.1. *Sei T Kippmodul über $\bar{A}$. Falls $S_{i_1}, \ldots, S_{i_j} \in \mathcal{T}(T)$, so gilt*
$$P_{i_1} \oplus \cdots \oplus P_{i_j} \in \operatorname{add}(T).$$

Beweis. Sei $k \in \{1, \ldots, j\}$. Da P_{i_k} nur Kompositionsfaktoren $S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k-1}}$ hat und $\mathcal{T}(T)$ abgeschlossen unter Erweiterungen ist, gilt
$$P_{i_k} \in \mathcal{T}(T) = \operatorname{Gen}(T).$$
Sei nun
$$\psi : T^s \twoheadrightarrow P_{i_k}$$
ein Epimorphismus. Da P_{i_k} projektiv ist, spaltet ψ und es gilt somit $P_{i_k} \in \operatorname{add}(T)$. $\square$

Sei $M \ncong {}_{\bar{A}}\bar{A}$ ein treuer, projektiver partieller Kippmodul über $\hat{A}$. Sei

$$i' = \min_{\preceq}\{j \in \{i_1, \dots, i_n\} | P_{i_j} \notin \operatorname{add}(M)\}.$$

Sei nun $T \in \mathcal{T}_{\bar{A}}(M)$ beliebig. Sei $\mathcal{C}'$ die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\bar{A}}(M)$, in der T liegt. Wir zeigen folgendes

Lemma 25.2. *Es gibt einen Kippmodul $T' \in \mathcal{C}'$ mit*

$$P_{i'} \in \operatorname{add}(T').$$

Beweis. Falls es einen Kippmodul $S \in \mathcal{C}'$ gibt mit $\operatorname{Hom}_A(S, S_{i'}) \neq 0$, so folgt $S_{i'} \in \mathcal{T}(S)$ und somit nach der obigen Vorbemerkung auch, dass $P_i' \in \operatorname{add}(S)$. In diesem Fall wäre S unser gesuchtes T'.
Wir nehmen also an, dass für alle $S \in \mathcal{C}'$ gilt, dass

$$\operatorname{Hom}_A(S, S_{i'}) = 0.$$

Wir betrachten nun die Funktion $F : \operatorname{Exc}(\bar{A}) \to \mathbb{Z}$, die gegeben ist durch

$$F(\cdot) = \dim_K \operatorname{Ext}^1_{\bar{A}}(\cdot, S_{i'}).$$

Dann ist F eine additive Funktion auf $\mathcal{C}'$. Wir finden also nach Satz 24.25 ein $S \in \mathcal{C}'$ mit

$$\operatorname{Ext}^1_{\bar{A}}(S, S_{i'}) = 0.$$

Somit ist $S_{i'} \in \mathcal{T}(S) = \operatorname{Gen}(S)$. Insbesondere gilt, dass

$$\operatorname{Hom}_A(S, S_{i'}) \neq 0,$$

was einen Widerspruch ergibt. $\square$

Wir kommen nun zum Beweis von Satz 23.4.

Beweis. Wir beweisen Satz 23.4 per Induktion über $l(M) = 2n - \delta(M)$. Für $l \in \{0, 1\}$ ist die Behauptung trivial bzw. folgt aus Lemma 7.16. Sei also die Behauptung für alle M' mit $l(M') < l(M)$ schon bewiesen.

Sei $T \in \mathcal{T}_{\bar{A}}(M)$ beliebig. Sei $\mathcal{C}$ die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\bar{A}}(M)$, die T enthält. Wir zeigen, dass die reguläre Darstellung ${}_{\bar{A}}\bar{A} \in \mathcal{C}$.

Sei i' wie oben definiert und sei $M' = M \oplus P_{i'}$. Es gilt, dass $l(M') < l(M)$. Nach Lemma 25.2 gibt es ein $T' \in \mathcal{C}$ mit $M' \in \operatorname{add}(T')$. Sei $\mathcal{C}'$ die Zusammenhangskomponente von $\mathcal{T}_{\bar{A}}(M')$, die T' enthält. Es gilt, dass $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$. Da $\mathcal{T}_{\bar{A}}(M')$ nach Induktion zusammenhängend ist, folgt, dass $\mathcal{C}' = \mathcal{T}_{\bar{A}}(M')$. Insbesondere ist

$${}_{\bar{A}}\bar{A} \in \mathcal{C}' \subset \mathcal{C}.$$

$\square$

26. Beispiele

Beispiel 26.1. *Sei Q der Köcher* $1 \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} 2$ *und I das Nullideal. Dann sieht $\bar{Q}$ folgendermaßen aus*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[d, shift right, "q"'] \arrow[d, shift left, "p"] & \\
& 1' \arrow[r, shift left, "a'"] \arrow[r, shift right, "b'"'] & 2'
\end{tikzcd}$$

und $\bar{I} = \langle qa, a'q, pb, b'p, pa - qb, a'p - b'q \rangle$.
Dann hat $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$ die folgende Form:

$$\cdots \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \cdots$$

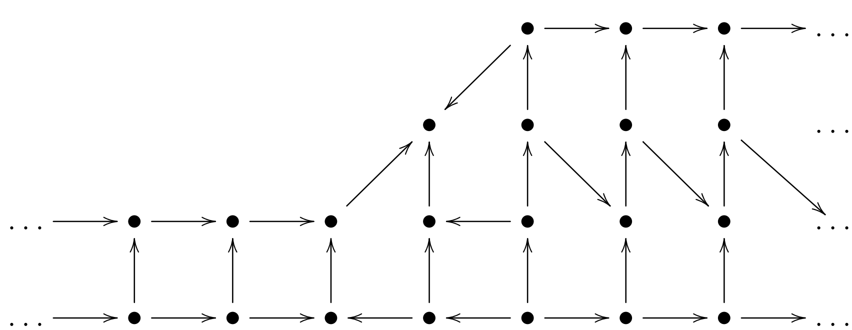
Beispiel 26.2. *Sei Q der Köcher*

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] & 3
\end{tikzcd}$$

und sei I das Ideal, welches von ca ereugt wird. Dann hat $\bar{A} = K\bar{Q}/\bar{I}$ die Form

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, shift left, "a"] \arrow[r, shift right, "b"'] & 2 \arrow[r, "c"] \arrow[d, "p"'] & 3 \arrow[dl, "q"'] & \\
& 1' \arrow[r, shift left, "a'"] \arrow[r, shift right, "b'"'] & 2' \arrow[r, "c'"] & 3'
\end{tikzcd}$$

und $\bar{I} = \langle ca, c'a', a'pa, pb, a'q, b'p, c'b'qc, pa - qcb, b'qc - a'p \rangle$. *In diesem Fall sieht $\mathcal{T}_{\bar{A}}$ folgendermaßen aus:*



Beispiel 26.3. *Sei Q der Köcher*

$$\begin{tikzcd}
3 & 1 \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "a"] \\
& 2 \arrow[ul, "b"]
\end{tikzcd}$$

und I das Nullideal. Dann sieht $\bar{Q}$ folgendermaßen aus

$$\begin{tikzcd}
3 & 1 \arrow[l, "c"'] \arrow[d, "a"] & 3' \arrow[l, shift right, "q"'] \arrow[l, shift left, "p"] & 1' \arrow[l, "c'"'] \arrow[d, "a'"] \\
 & 2 \arrow[ul, "b"] & & 2' \arrow[ul, "b'"]
\end{tikzcd}$$

und $\bar{I} = \langle qb', aq, cp, pc', cqc', bapb', apb'a', qc' - pb'a', bap - cq \rangle$.
Dann hat $\mathcal{T}_A$ *die folgende Form:*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[rr] & & \bullet \arrow[rr] \arrow[d] & & \bullet \arrow[rr] \arrow[d] & & \bullet \arrow[d] & & \bullet \arrow[ll] & & \bullet \arrow[ll] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[rr] & & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet & \bullet \arrow[l] & \bullet \arrow[l] \arrow[u] & \bullet \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[u] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[u] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[rr] \arrow[u] & & \bullet \arrow[rr] \arrow[u] & & \bullet \arrow[u] & & \bullet \arrow[ll] \arrow[u] & & \bullet \arrow[ll] \arrow[rr] & & \bullet \arrow[rr] & & \bullet \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Teil 5. Kippmoduln über Quasi-erblichen Algebren

27. Der i-Sockel eines Moduls

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Sei $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ ein endlicher Köcher, sei $I' \subset KQ'$ ein zulässiges Ideal. Sei $B = KQ'/I'$ eine endlich-dimensionale K-Algebra. Sei $Q'_0 = \{1, \dots, n\}$. Für einen B-Modul M sei $\mathrm{soc}(M)$ die Summe aller einfachen Untermoduln von M. Wir nennen $\mathrm{soc}(M)$ den *Sockel von* M. Für einen B-Modul M und einen einfachen B-Modul S definieren wir $\mathrm{soc}_S(M)$ als die Summe aller Untermoduln U von M mit $U \cong S$. Die Moduln $\mathrm{soc}(M), \mathrm{soc}_S(M)$ sind halbeinfache Untermoduln von M.

Lemma 27.1. *Sei*

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r.$$

Sei $M \in \mathrm{mod}(B)$. *Dann existiert eine eindeutige Kette*

$$(0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_r \subseteq M)$$

von Untermoduln M_k *von* M*, so dass gilt*

$$M_k/M_{k-1} = \mathrm{soc}_{S_{i_k}}(M/M_{k-1})$$

für alle $k \in \{1, \dots, r\}$.

Beweis. Siehe [17, Abschnitt 3.2]. □

Definition 27.2. Sei

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r.$$

Sei $M \in \mathrm{mod}(B)$. Wir definieren den $\mathbf{i}$-*Sockel* $\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M)$ von M als

$$\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M) = \mathrm{soc}_{(i_1,\dots,i_r)}(M) = M_r.$$

Bemerkung 27.3. (a) Sei $M \in \mathrm{mod}(B)$. Sei

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r.$$

Dann gilt

$$\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M) = \mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M)).$$

(b) Sei $M \in \mathrm{mod}(B)$. Sei

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r.$$

Sei $U \in \mathrm{mod}(B)$ ein Untermodul von M mit $\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M) \subseteq U$. Dann ist

$$\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M) = \mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(U).$$

(c) Seien $M \in \mathrm{mod}(B)$ und

$$\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r$$

so gewählt, dass

$$\mathrm{soc}_{\mathbf{i}}(M) = M.$$

Sei

$$(0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_r = M)$$

die zugehörige Kette von Untermoduln. Dann ist für $k \in \{1, \dots, r-1\}$

$$\mathrm{soc}_{(i_{k+1},\dots,i_r)}(M/M_k) = M/M_k.$$

(d) Sei $l \in Q'_0$. Sei $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r$. Sei
$$k_l = \min\{j \in \{1, \dots, r\} \mid i_j = l\}.$$
Dann ist
$$\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(I_l) = \operatorname{soc}_{(i_{k_l}, i_{k_l+1}, \dots, i_r)}(I_l).$$

Definition 27.4. (a) Für $i \in Q'_0$ sei e_i der i zugeordnete Weg der Länge 0 in KQ'. Sei J_i das maximale Ideal in B, welches von allen Restklassen der Form
$$\overline{p} = p + I$$
aufgespannt wird, wobei p alle Wege in KQ' außer dem Weg e_i durchläuft.

(b) Für $k, s \in \{1, \dots r\}$ setzen wir
$$J_{k,s} = \begin{cases} J_{i_k} \cdots J_{i_s} & \text{falls } k \geq s, \\ B & \text{sonst.} \end{cases}$$

(c) Wir setzen $B_{\mathbf{i}} = B/J_{r,1}$.

Sei $\mathcal{D}_{\mathbf{i}}$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}(B)$ aller Moduln $M \in \operatorname{mod}(B)$ mit $\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M) = M$. Wir identifizieren die Kategorie $\operatorname{mod}(B_{\mathbf{i}})$ mit der vollen Unterkategorie von $\operatorname{mod}(B)$ aller $M \in \operatorname{mod}(B)$ mit $J_{r,1}M = 0$.

Unter dieser Identifikation erhalten wir folgendes Lemma:

Lemma 27.5. *$\mathcal{D}_{\mathbf{i}} = \operatorname{mod}(B_{\mathbf{i}})$.*

Beweis. Siehe [17, Lemma 3.6]. □

Korollar 27.6. *Sei $M \in \operatorname{mod}(B)$, sei $\mathbf{i} \in {Q'_0}^r$. Dann gilt*
$$\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M) = M \Leftrightarrow J_{r,1}M = 0.$$

Sei $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r)$. Wir nehmen an, dass es für jedes $j \in Q'_0$ ein $k \in \{1, \dots, r\}$ gibt mit $i_k = j$. Für $k \in \{1, \dots, r\}$ und $j \in \{1, \dots, n\}$ setzen wir
$$\begin{aligned} k^+ &= \min\{l > k \mid i_l = i_k\} \cup \{r+1\}, \\ k^- &= \max\{l < k \mid i_l = i_k\} \cup \{0\}, \\ k^{\min} &= \min\{1 \leq l \leq r \mid i_l = i_k\}, \\ k^{\max} &= \max\{1 \leq l \leq r \mid i_l = i_k\}, \\ k_j &= \min\{1 \leq l \leq r \mid i_l = j\}. \end{aligned}$$

Des weiteren setzen wir
$$V_k = \operatorname{soc}_{(i_k, \dots, i_r)}(I_{i_k})$$
und
$$V_{\mathbf{i}} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r.$$

Wir erhalten folgende Lemmata:

Lemma 27.7. *Sei* $M \in \operatorname{mod}(B)$. *Seien*

$$\begin{aligned}\mathbf{i} &= (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r, \\ \mathbf{i}' &= (i'_1, \dots, i'_{r-1}) \\ &= (i_1, \dots, i_{j-1}, \hat{i_j}, i_{j+1}, \dots, i_r) \in {Q'_0}^{r-1}.\end{aligned}$$

(a) *Es gilt* $\operatorname{soc}_{\mathbf{i}'}(M) \subseteq \operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M)$.
(b) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\operatorname{soc}_{\mathbf{i}'}(M) = \operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M) &\Leftrightarrow \operatorname{soc}_{\mathbf{i}'}(\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M)) = \operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M) \\ &\Leftrightarrow J'_{r-1,1} \operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M) = 0.\end{aligned}$$

Hierbei sei $J'_{r-1,1} = J_{i_r} \dots J_{i_{j+1}} J_{i_{j-1}} \dots J_{i_1}$.

Beweis. Offensichtlich folgt (a) sofort aus der Definition des $\mathbf{i}$-Sockels. Wir zeigen (b). Wegen (a) und Bemerkung 27.3.(b) gilt

$$\operatorname{soc}_{\mathbf{i}'}(M) = \operatorname{soc}_{\mathbf{i}'}(\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M))$$

und die erste Äquivalenz folgt. Die zweite Äquivalenz ist nun Korollar 27.6. □

Lemma 27.8. *Seien* $X, Y \in \operatorname{mod}(B)$, *sei* $f : X \to Y$. *Sei* $\mathbf{i} \in {Q'_0}^r$.

(a) *Es gilt* $f(\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(X)) \subseteq \operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(Y)$.
(b) *Falls* f *ein Monomorphismus (beziehungsweise ein Epimorphismus) ist, so ist der induzierte Morphismus*

$$X/\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(X) \to Y/\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(Y)$$

ebenfalls ein Monomorphismus (beziehungsweise ein Epimorphismus).

Beweis. Siehe [17, Lemma 3.2]. □

Lemma 27.9. *Sei* $M \in \operatorname{mod}(B)$, *sei* $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_r) \in {Q'_0}^r$. *Es gelte* $\operatorname{soc}(M) \cong S_{i_1}$. *Sei* $X = \operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(M)$. *Sei*

$$\operatorname{soc}(X/\operatorname{soc}(X)) \cong \bigoplus_{j=1}^{n} S_j^{r_j}.$$

Wir setzen für $j \in \{1, \dots, r\}$

$$k'_j = \min\{2 \le l \le r \mid i_l = j\}.$$

Dann gibt es einen Monomorphismus

$$X/\operatorname{soc}(X) \hookrightarrow \bigoplus_{j=1}^{n} V_{k_j}^{r_j}.$$

Beweis. Es gilt $\operatorname{soc}(X) = S_{i_1}$. Nach 27.3.(a) ist

$$\operatorname{soc}_{\mathbf{i}}(X) = X.$$

Wir betrachten die zugehörige Kette

$$0 = X_0 \subseteq X_1 \cong S_{i_1} \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_r = X \subseteq M$$

von Untermoduln von X. Dies induziert eine Kette

$$0 = X_1/X_1 \subseteq X_2/X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_r/X_1 = X/X_1 = X/\operatorname{soc}(X) \subseteq M/\operatorname{soc}(M)$$

von Untermoduln von $X/\operatorname{soc}(X)$ mit

$$ {(X_k/X_1)}\big/{(X_{k-1}/X_1)} \cong X_k/X_{k-1} \cong \operatorname{soc}_{S_{i_k}}(X/X_{i_{k-1}}) \cong \operatorname{soc}_{S_{i_k}}\big({(X/X_1)}\big/{(X_{i_{k-1}}/X_1)}\big) $$

für $k \in \{2, \ldots, r\}$. Insbesondere ist

$$ \begin{aligned} X/\operatorname{soc}(X) &\cong \operatorname{soc}_{(i_2,\ldots,i_r)}(X/\operatorname{soc}(X)) \\ &\cong \operatorname{soc}_{(i_2,\ldots,i_r)}(M/\operatorname{soc}(X)). \end{aligned} $$

Wir betrachten nun die injektive Hülle ι von $X/\operatorname{soc}(X)$. Nach unseren Voraussetzungen ist

$$ \iota : X/\operatorname{soc}(X) \hookrightarrow \bigoplus_{i=1}^{n} I_j^{r_j}. $$

Nach Lemma 27.8.(a) und Bemerkung 27.3.(d) erhalten wir

$$ \begin{aligned} X/\operatorname{soc}(X) &\cong \operatorname{soc}_{(i_2,\ldots,i_r)}(X/\operatorname{soc}(X)) \\ &\hookrightarrow \operatorname{soc}_{(i_2,\ldots,i_r)}(\bigoplus_{i=1}^{n} I_j^{r_j}) \\ &\cong \bigoplus_{j=1}^{n} V_{k_j}^{r_j}. \end{aligned} $$

$\square$

Lemma 27.10. *Sei* $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in {Q'}^r$. *Sei* $V_{\mathbf{i}}$ *nicht basisch. Seien*

$$ \begin{aligned} j &= \max\{1, \ldots, r \mid \exists j' < j : V_j \cong V_{j'}\}, \\ j' &= \min\{1, \ldots, j-1 \mid V_j \cong V_{j'}\}. \end{aligned} $$

Sei

$$ \mathbf{i}' = (i'_1, \ldots, i'_{r-1}) = (i_1, \ldots, i_{j'-1}, \hat{i_{j'}}, i_{j'+1}, \ldots, i_r) \in Q_0^{r-1}. $$

Seien

$$ \begin{aligned} V'_k &= \operatorname{soc}_{(i'_k,\ldots,i'_{r-1})}(I_{i'_k}), \\ V_{\mathbf{i}'} &= \bigoplus_{k=1}^{r-1} V'_k. \end{aligned} $$

Dann ist

$$ V'_k \cong \begin{cases} V_k, & \textit{falls } k < j'; \\ V_{k+1}, & \textit{falls } k \geq j'. \end{cases} $$

Insbesondere gelten

$$ \begin{aligned} V_{\mathbf{i}'} &\cong V_{\mathbf{i}}/V_{j'}, \\ \operatorname{bas}(V_{\mathbf{i}'}) &\cong \operatorname{bas}(V_{\mathbf{i}}). \end{aligned} $$

Beweis. Für $k \geq j'$ gilt

$$\begin{aligned} V'_k &= \mathrm{soc}_{(i'_k,\dots,i'_{r-1})}(I_{i'_k}) \\ &= \mathrm{soc}_{(i_{k+1},\dots,i_r)}(I_{i_{k+1}}) \\ &= V_{k+1}. \end{aligned}$$

Sei $k < j'$, so dass die Behauptung schon für alle $l > k$ gezeigt wurde. Nach Lemma 27.7.(a) gilt $V'_k \subseteq V_k$. Nach Lemma 27.8.(b) erhalten wir $V'_k/\operatorname{soc}(V'_k) \subseteq V_k/\operatorname{soc}(V_k)$. Wegen $\operatorname{soc}(V'_k) = \operatorname{soc}(V_k)$ reicht es nun,

$$V'_k/\operatorname{soc}(V'_k) \cong V_k/\operatorname{soc}(V_k)$$

zu zeigen. Wie im Beweis von Lemma 27.9 gilt aber

$$\begin{aligned} V_k/\operatorname{soc}(V_k) &= \mathrm{soc}_{(i_{k+1},\dots,i_r)}(V_k/\operatorname{soc}(V_k)), \\ V'_k/\operatorname{soc}(V'_k) &= \mathrm{soc}_{(i'_{k+1},\dots,i'_{r-1})}(V'_k/\operatorname{soc}(V'_k)) \\ &= \mathrm{soc}_{(i'_{k+1},\dots,i'_{r-1})}(V_k/\operatorname{soc}(V_k)). \end{aligned}$$

Nach Lemma 27.7.(b) reicht es nun zu zeigen, dass

$$J_{i_r} \cdots J_{i_{j'+1}} J_{i_{j'-1}} \cdots J_{i_{k'+1}}(V_k/\operatorname{soc}(V_k)) = 0.$$

Nach Lemma 27.9 gibt es aber einen Monomorphismus

$$V_k/\operatorname{soc}(V_k) \hookrightarrow V$$

mit $V \in \operatorname{add}(V_{k+1} \oplus \cdots \oplus V_r)$ und es gilt

$$J_{i_r} \cdots J_{i_{j'+1}} J_{i_{j'-1}} \cdots J_{i_{k'+1}} V_l = 0$$

für $l > k$, da die Behauptung für alle $l > k$ schon bewiesen war. □

Nach Lemma 27.10 können wir ab jetzt ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $V_{\mathbf{i}}$ basisch ist (andernfalls können wir zu einer kürzeren Folge $\mathbf{i}'$ übergehen). Sei $A = A_{\mathbf{i}} = \operatorname{End}_B(V_{\mathbf{i}})^{\mathrm{op}}$. Für $j \in Q'_0$ sei $I_{\mathbf{i},j} = V_{k_j}$. Wir setzen

$$I_{\mathbf{i}} = \bigoplus_{j=1}^{n} I_{\mathbf{i},j}.$$

Sei $F : \operatorname{mod}(B) \to \operatorname{mod}(A)$ der Funktor $\operatorname{Hom}_B(V_{\mathbf{i}}, \cdot)$. F induziert eine Äquivalenz von Kategorien

$$\operatorname{add}(V_{\mathbf{i}}) \xrightarrow{F} \operatorname{proj}(A).$$

Hierbei ist $\operatorname{proj}(A)$ die volle Unterkategorie von $\operatorname{mod}(A)$ aller projektiven Moduln. Wir schreiben $A = KQ/I$ als Wegealgebra modulo einem zulässigen Ideal. Hierbei sei

$$Q_0 = \{1, \dots, r\}$$

so gewählt, dass für $k \in \{1, \dots, r\}$ gilt, dass

$$F(V_k) \cong P_k.$$

Lemma 27.11. $I_{\mathbf{i}}$ *ist injektiv in* $\operatorname{mod}(B_{\mathbf{i}})$.

Beweis. Siehe [17, Lemma 3.13]. □

Bemerkung 27.12. Der Fall, in dem B die (nicht notwendigerweise endlich-dimensionale) präprojektive Algebra eines Köchers $\hat{Q}$ ohne orientierte Kreise ist und $\mathbf{i}$ ein reduzierter Ausdruck eines Elementes aus der Weylgruppe von $\hat{Q}$, wurde in [18] betrachtet.

Beispiel 27.13. Sei Q' der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "a"] \end{tikzcd}$$

und I' das Ideal, welches von allen Wegen der Länge 3 erzeugt wird. Sei $\mathbf{i} = (1, 1, 1)$. Wir erhalten $A_\mathbf{i} = KQ/I$ mit folgendem Köcher Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] & 2 \arrow[l, shift left, "b"] \arrow[r, shift left, "c"] & 3 \arrow[l, shift left, "d"] \end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist $I = \langle ab - dc, cd \rangle$.

Beispiel 27.14. Sei Q' der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, shift left, "b"] & 2 \arrow[l, shift left, "c"] \end{tikzcd}$$

und $I' = \langle a^3 - cb, ac \rangle$. Sei $\mathbf{i} = (1, 1, 1, 2, 1)$. Wir erhalten $A_\mathbf{i} = KQ/I$ mit folgendem Köcher Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "a"] & 2 \arrow[l, shift left, "b"] \arrow[r, shift left, "c"] & 3 \arrow[l, shift left, "d"] \arrow[r, shift left, "e"] & 5 \arrow[l, shift left, "f"] \arrow[dl, "g"] \\ & & 4 \arrow[ull, bend left, "h"] & \end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist $I = \langle hg - bdf, ef, fe - cd, ab - dc, ecah \rangle$.

Beispiel 27.15. Sei Q' der folgende Köcher:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"] & 2 \arrow[r, shift left, "b"] & 3 \arrow[l, shift left, "c"] \end{tikzcd}$$

und $I' = \langle ba, cb \rangle$. Sei $\mathbf{i} = (2, 3, 1, 2, 3)$. Wir erhalten $A_\mathbf{i} = KQ/I$ mit folgendem Köcher Q:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "a"'] & 4 \arrow[d, "c"] & \\ & 2 \arrow[r, "b"] & 5 \arrow[ull, bend right, "e"'] \\ 3 \arrow[uu, "d"] & & \end{tikzcd}$$

In diesem Fall ist $I = \langle bc, ad \rangle$.

Wir benötigen folgende Lemmata:

Lemma 27.16. *Sei $k \in \{1, \ldots, r\}$. Dann gibt es einen kanonischen Monomorphismus*

$$\iota_k : V_{k^+} \hookrightarrow V_k.$$

Beweis. V_{k^+}, V_k sind beides Untermoduln von I_{i_k}, die ineinander enthalten sind. $\square$

Lemma 27.17. *Sei $f : V_k \to V_k$ ein Morphismus, der kein Isomorphismus ist. Dann gibt es ein $g : V_k \to V_{k^+}$ mit $f = \iota_k \circ g$.*

Beweis. Wir betrachten die Konstruktion von V_k. Sei $M = I_{i_k}$. Dann ist $V_k = \mathrm{soc}_{(i_k,\ldots,i_{k^+},\ldots,i_r)}(M)$. Wir erhalten eine Kette von Untermoduln

$$(0 \subset S_{i_k} = M_k \subseteq \cdots \subseteq M_{k^+} \subseteq \cdots \subseteq M_r = V_k \subset M)$$

mit $\mathrm{soc}_{S_{i_j}}(M_j/M_{j-1}) = \mathrm{soc}_{S_{i_j}}(M/M_{j-1})$. Genauso ist $V_{k^+} = \mathrm{soc}_{(i_{k^+},\ldots,i_r)}(I_{i_{k^+}})$. Sei $M' = I_{i_{k^+}} = M$. Wir erhalten eine Kette von Untermoduln

$$(0 \subset S_{i_{k^+}} = M'_{k^+} \subseteq \ldots \cdots \subseteq M'_r = V_{k^+} \subset M')$$

mit $\mathrm{soc}_{S_{i_j}}(M'_j/M'_{j-1}) = \mathrm{soc}_{S_{i_j}}(M'/M'_{j-1})$. Sei nun $f \in \mathrm{End}_B(V_k)$ kein Isomorphismus. Das ist genau dann der Fall, wenn $f|_{M_k} = 0$. Da $\mathrm{soc}(V_k) \cong S_{i_k}$ und da S_{i_k} nicht als Kompositionsfaktor von M_{k^+-1}/M_k vorkommt, gilt

$$f|_{M_{k^+-1}} = 0,$$

und somit können wir f als Morphismus

$$f : V_k/M_{k^+-1} \to V_k$$

auffassen. Sei nun $\mathbf{i}' = (i_{k^+}, \ldots, i_r)$. Nach Bemerkung 27.3.(c) gilt, dass

$$\mathrm{soc}_{\mathbf{i}'}(V_k/M_{k^+-1}) = V_k/M_{k^+-1}$$

und nach Bemerkung 27.3.(b) gilt, dass

$$\mathrm{soc}_{\mathbf{i}'}(V_k) = V_{k^+}.$$

Somit folgt nach 27.8.(a), dass $f(V_k) \subseteq V_{k^+}$. $\square$

Lemma 27.18. *Sei $j > k$ und sei $f : V_j \to V_k$ ein Morphismus. Dann gibt es ein $g : V_j \to V_{k^+}$ mit $f = \iota_k \circ g$.*

Beweis. Wie im Beweis von Lemma 27.17 betrachten wir die Kontruktion von V_j. Sei $k' = \min\{l \in Q_0 \mid l \geq j, i_l = i_k\}$. Wir haben

$$V_j = \mathrm{soc}_{(i_j,\ldots,i_r)}(I_{i_j}).$$

Sei $M = I_{i_j}$. Dann gibt es eine Kette von Untermoduln von M

$$(0 \subset S_{i_j} = M_k \subseteq \cdots \subseteq M_{k'} \subseteq \cdots \subseteq M_r = V_j \subset M).$$

Sei $f : V_j \to V_k$ ein Morphismus. Offensichtlich gilt, dass

$$f|_{M_{k'-1}} = 0,$$

wir können also f als Morphismus

$$f : V_j/M_{k'-1} \to V_k$$

auffassen. Sei $\mathbf{i}' = (i_{k'} \dots i_r)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathrm{soc}_{\mathbf{i}'}(V_j/M_{k'-1}) &= V_j/M_{k'-1}, \\ \mathrm{soc}_{\mathbf{i}'}(V_k) &= V_{k'}. \end{aligned}$$

Mit Lemma 27.8.(a) folgt, dass $\mathrm{Im}(f) \subseteq V_{k'} \subset V_{k^+}$. □

28. Stark quasi-erbliche Algebren

Definition 28.1. Sei $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ ein endlicher Köcher. Sei $Q_0 = \{1, \dots, r\}$. Sei $I \subset KQ$ ein zulässiges Ideal. Sei $A = KQ/I$ eine basische endlich-dimensionale K-Algebra. Wir definieren für $i \in Q_0$ den i-ten Standardmodul Δ_i als den größten Faktormodul von P_i, der keine Kompositionsfaktoren S_j für $j > i$ enthält. Analog dazu definieren wir den i-ten Kostandardmodul ∇_i als den größten Untermodul von I_i, der keine Kompositionsfaktoren S_j für $j > i$ enthält. Sei $\Delta = \Delta_1 \oplus \dots \oplus \Delta_n$, sei $\nabla = \nabla_1 \oplus \dots \oplus \nabla_n$.

Definition 28.2. Sei U eine volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$. Sei $\mathcal{F}(U)$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller Objekte X, so dass X eine Filtration mit Kompositionsfaktoren in U hat. Für einen A-Modul M sei $\mathcal{F}(M) = \mathcal{F}(\mathrm{add}(M))$.

Definition 28.3. A heißt *quasi-erblich*, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) Für alle $i \in \{1, \dots, r\}$ ist $\mathrm{End}_A(\Delta_i) = K$.
(ii) ${}_AA \in \mathcal{F}(\Delta)$.

Der Begriff quasi-erblich hängt von der Wahl einer Ordnung der einfachen Moduln ab.

Definition 28.4. A heißt *stark quasi-erblich*, falls es für alle $k \in \{1, \dots, r\}$ eine kurze exakte Folge

$$0 \to R_k \to P_k \to D_k \to 0$$

gibt mit $R_k \in \mathrm{add}(P_{k+1} \oplus \dots \oplus P_r)$ und $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_j, D_k) = 0$ für $j > k$, $\dim_K \mathrm{Hom}_A(P_k, D_k) = 1$. Wir nennen diese Folge die *kanonische Folge für D_k*.

Quasi-erbliche Algebren wurden erstmals in [13] betrachtet. Stark quasi-erbliche Algebren wurden in [40] eingeführt.

Lemma 28.5. *Sei A stark quasi-erblich. Dann ist $D_k = \Delta_k$ und A ist quasi-erblich.*

Beweis. Siehe [40, Proposition in Abschnitt 4]. □

Lemma 28.6. *Sei A stark quasi-erblich. Sei $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. Dann ist $\mathrm{pd}_A(X) \leq 1$.*

Beweis. Falls $X = \Delta_k$ für ein k, so folgt $\mathrm{pd}_A(X) \leq 1$ sofort aus der Definition von stark quasi-erblich. Die Behauptung für allgemeines $X \in \mathcal{F}(\Delta)$ folgt aus der Tatsache, dass die volle Unterkategorie von $\mathrm{mod}(A)$ aller Moduln der projektiven Dimension ≤ 1 abgeschlossen unter Erweiterungen ist. □

Lemma 28.7. *Sei A quasi-erblich.*

(i) *Es existiert ein bis auf Isomorphie eindeutiger basischer Kippmodul $T_{\min} \in \mathrm{mod}(A)$ mit $\mathrm{add}(T_{\min}) = \mathcal{F}(\Delta) \cap \mathcal{F}(\nabla)$. Wir nennen $T_{\min}$ den* kanonischen Kippmodul.
(ii) $\mathrm{Hom}_A(\Delta_i, \Delta_j) = 0$*, falls $i > j$.*

(iii) $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta_i, \Delta_j) = 0$, *falls* $i \geq j$.
(iv) *Die projektiven Moduln in* $\mathcal{F}(\Delta)$ *sind genau die projektiven* A*-Moduln. Die injektiven Moduln in* $\mathcal{F}(\nabla)$ *sind genau die injektiven* A*-Moduln.*
(v) *Die injektiven Moduln in* $\mathcal{F}(\Delta)$ *sind genau die Moduln in* $\mathrm{add}(T)$. *Die projektiven Moduln in* $\mathcal{F}(\nabla)$ *sind genau die Moduln in* $\mathrm{add}(T)$.
(vi) *Falls für alle* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *gilt* $\mathrm{Ext}^1_A(X, \nabla_i) = 0$, *so gilt* $X \in \mathcal{F}(\Delta)$.
(vii) *Falls für alle* $i \in \{1, \ldots, r\}$ *gilt* $\mathrm{Ext}^1_A(\Delta_i, Y) = 0$, *so gilt* $Y \in \mathcal{F}(\nabla)$.

Beweis. Siehe [18, 11.1], auch [43, Theorem 5], [42], [16, Lemma A.1.3, Theorem A.2.6, Theorem A.2.8]. □

Im Zusammenhang mit quasi-erbliche Algebren ist folgender interessanter Satz zu erwähnen:

Satz 28.8. *Sei* B *eine endlich-dimensionale* K*-Algebra, sei* $M \in \mathrm{mod}(B)$. *Dann gibt es ein* $N \in \mathrm{mod}(B)$, *so dass*

$$\mathrm{End}_B(M \oplus N)$$

quasi-erblich ist.

Beweis. Siehe [33, 1.1]. □

Das folgende Lemma wurde schon in [45] bewiesen.

Lemma 28.9. *Sei* $A = A_{\mathbf{i}} = KQ/I$. *Setze* $P_0 = P_{r+1} = 0$. *Dann ist* A *stark quasi-erblich und* $R_k = P_{k^+}$. *Mit anderen Worten gibt es für* $k \in Q_0$ *eine kurze exakte Folge*

$$0 \to P_{k^+} \to P_k \to D_k \to 0.$$

Beweis. Wir betrachten die Abbildung $\iota_k : V_{k^+} \to V_k$. Anwenden von F liefert uns eine kurze exakte Folge

$$0 \to P_{k^+} \xrightarrow{F(\iota_k)} P_k \xrightarrow{\pi} D_k \to 0.$$

Hierbei sei $D_k = \mathrm{Coker}(F(\iota_k))$. Wir zeigen, dass D_k die Bedingungen für stark quasi-erblich erfüllt. Sei also $k' \geq k$ und sei $\theta : P_{k'} \to D_k$. Da $P_{k'}$ projektiv ist, gibt es ein $\phi : P_{k'} \to P_k$ mit

$$\pi \circ \phi = \theta.$$

Die Situation sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{tikzcd}
 & & & P_{k'} \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[d, "\theta"] & \\
0 \arrow[r] & P_{k^+} \arrow[r, "F(\iota_k)"] & P_k \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{D}_k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sei nun $\varphi : V_{k'} \to V_k$ mit $F(\varphi) = \phi$. Nach Lemma 27.17 und Lemma 27.18 faktorisiert φ über ι_k, falls φ kein Isomorphismus ist. Dann faktorisiert aber auch ϕ über $F(\iota_k)$ und somit wäre $\theta = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & V_{k'} \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "\varphi"] \\
V_{k^+} \arrow[r, "\iota_k"'] & V_k
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
 & P_{k'} \arrow[dl, dotted] \arrow[d, "\phi = F(\varphi)"] \\
P_{k^+} \arrow[r, "F(\iota_k)"'] & P_k
\end{tikzcd}$$

□

Sei im folgenden immer $A = A_{\mathbf{i}} = KQ/I$.

Beispiel 28.10. Sei A wie in Beispiel 1.1. Die unzerlegbar-projektiven Moduln haben folgende Form.

$$\begin{array}{ccc} P_1 & P_2 & P_3 \\ \begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \\ & 1 & \end{array} & \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \\ & 1 & \\ & & \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ 1 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Die kurzen exakten Folgen sehen wie folgt aus.

$$0 \to P_2 \to P_1 \to \Delta_1 \cong S_1 \to 0,$$

$$0 \to P_3 \to P_2 \to \Delta_2 \cong \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 0,$$

$$0 \to 0 \to P_3 \to \Delta_3 \cong P_3 \to 0.$$

Beispiel 28.11. Sei A wie in Beispiel 1.2. Die unzerlegbar-projektiven Moduln haben folgende Form.

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \begin{array}{ccccc} & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ & 2 & & 5 & \\ & & 3 & & 4 \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \end{array} & \begin{array}{ccccc} & 2 & & & \\ 1 & & 3 & & \\ & 2 & & 5 & \\ & & 3 & & 4 \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \end{array} & \begin{array}{cccc} & 3 & & \\ 2 & & 5 & \\ & 3 & & 4 \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ & & & \\ & & & \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{ccc} & 5 & \\ 3 & & 4 \\ 2 & & \\ & 1 & \\ & & \\ & & \\ & & \end{array} \end{array}$$

Die kurzen exakten Folgen sehen wie folgt aus.

$$0 \to P_2 \to P_1 \to \Delta_1 \cong S_1 \to 0,$$

$$0 \to P_3 \to P_2 \to \Delta_2 \cong \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \to 0,$$

$$0 \to P_5 \to P_3 \to \Delta_3 \cong \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \to 0,$$

$$0 \to 0 \to P_4 \to \Delta_4 \cong P_4 \to 0,$$

$$0 \to 0 \to P_5 \to \Delta_5 \cong P_5 \to 0.$$

Beispiel 28.12. Sei A wie in Beispiel 1.3. Die unzerlegbar-projektiven Moduln haben folgende Form.

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \begin{array}{c} 1 \\ 4 \\ 2 \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{array} & \begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 2 \\ \\ \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} 5 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Die kurzen exakten Folgen sehen wie folgt aus.

$$0 \to P_4 \to P_1 \to \Delta_1 \cong S_1 \to 0,$$

$$0 \to P_5 \to P_2 \to \Delta_2 \cong S_2 \to 0,$$

$$0 \to 0 \to P_3 \to \Delta_3 \cong P_3 \to 0,$$

$$0 \to 0 \to P_4 \to \Delta_4 \cong P_4 \to 0,$$

$$0 \to 0 \to P_5 \to \Delta_5 \cong P_5 \to 0.$$

29. Der kanonische Kippmodul

Sei $k \in Q_0$. Durch die kanonische Folge für Δ_k bekommen wir eine kanonische Injektion

$$\varphi_k : P_{k^+} \hookrightarrow P_k.$$

Insbesondere bekommen wir durch sukzessives Anwenden dieser Injektionen eine Injektion

$$P_{k^+} \hookrightarrow P_{k^{\min}}.$$

Wir setzen für $k \in Q_0$

$$T_k = P_{k^{\min}}/P_{k^+}.$$

Wir erhalten kanonische Surjektionen

$$T_k \twoheadrightarrow T_{k^-}.$$

Es gilt $T_{k^{\max}} = P_{k^{\min}}$.

Wir benötigen folgendes Lemma aus [17]:

Lemma 29.1. *Sei $X \in \mathcal{D}_{\mathbf{i}}$. Dann ist*

$$\operatorname{Hom}_B(X, V_{\mathbf{i}}) = \operatorname{Hom}_{B_{\mathbf{i}}}(X, V_{\mathbf{i}}).$$

Beweis. Siehe [17, Lemma 3.3, Lemma 3.5, Lemma 3.16]. □

Korollar 29.2. *Für $k, k' \in \{1, \dots, r\}$ gilt*

$$\operatorname{Hom}_B(V_k, V_{k'}) = \operatorname{Hom}_{B_{\mathbf{i}}}(V_k, V_{k'}).$$

Proposition 29.3. *Sei $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. Sei $k \in Q_0$. Dann ist*

$$\operatorname{Ext}^1_A(X, T_{k^{\max}}) = 0.$$

Beweis. Sei $i \in \{1, \dots, r\}$. Wir betrachten die kurze exakte Folge

$$\eta : 0 \to P_{i^+} \xrightarrow{\varphi_i} P_i \to \Delta_i \to 0.$$

Sei $f' : P_i \to T_{k^{\max}}$ ein Morphismus von A-Moduln. Es gelten

$$\begin{aligned} P_{i^+} &= \mathrm{Hom}_B(V_{\mathbf{i}}, V_{i^+}), \\ P_i &= \mathrm{Hom}_B(V_{\mathbf{i}}, V_i), \\ T_{k^{\max}} &= \mathrm{Hom}_B(V_{\mathbf{i}}, V_{k^{\min}}). \end{aligned}$$

Die Abbildung $\varphi_i : P_{i^+} \to P_i$ entspricht mittels F einer Abbildung

$$\iota_i : V_{i^+} \hookrightarrow V_i,$$

es gilt also $\varphi_i = \mathrm{Hom}_B(V_{\mathbf{i}}, \iota_i)$. Sei

$$f : V_{i^+} \to I_{\mathbf{i},k} = V_{k^{\min}}$$

der Morphismus von B-Moduln mit $f' = \mathrm{Hom}_B(V_{\mathbf{i}}, f)$. Wir können ι_i, f nach Korollar 29.2 als Morphismen von $B_{\mathbf{i}}$-Moduln betrachten. Da $I_{\mathbf{i},k}$ nach Lemma 27.11 injektiv in $B_{\mathbf{i}}$ ist, gibt es ein $g : V_i \to I_{\mathbf{i},k}$ mit $f = g \circ \iota_i$. Wieder nach Korollar 29.2 können wir g als Morphismus von B-Moduln auffassen. Wir haben folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} V_{i^+} \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[d, "g"'] & V_i \arrow[dl, "f"] \\ I_{\mathbf{i},k} & \end{tikzcd}$$

Durch Anwenden des Funktors F erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} P_{i^+} \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "F(g)"'] & P_i \arrow[dl, "f'"] \\ T_{k^{\max}} & \end{tikzcd}$$

Insbesondere ist $\mathrm{Hom}_A(\varphi_i, T_{k^{\max}}) : \mathrm{Hom}_A(P_i, T_{k^{\max}}) \to \mathrm{Hom}_A(P_{i^+}, T_{k^{\max}})$ surjektiv. Anwenden von $\mathrm{Hom}_A(\cdot, T_{k^{\max}})$ auf η liefert die exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_A(\Delta_i, T_{k^{\max}}) &\to \mathrm{Hom}_A(P_i, T_{k^{\max}}) \overset{\mathrm{Hom}_A(\varphi_i, T_{k^{\max}})}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Hom}_A(P_{i^+}, T_{k^{\max}}) \\ \to \mathrm{Ext}^1_A(\Delta_i, T_{k^{\max}}) &\to \mathrm{Ext}^1_A(P_i, T_{k^{\max}}) \cong 0, \end{aligned}$$

aus welcher die Behauptung folgt. □

Korollar 29.4. *Sei $X \in \mathcal{F}(\Delta)$. Sei $k \in Q_0$. Dann ist*

$$\mathrm{Ext}^1_A(X, T_k) = 0.$$

Beweis. Wir betrachten die kanonische Surjektion $T_{k^{\max}} \twoheadrightarrow T_k$ und die zugehörige kurze exakte Folge

$$0 \to P_{k^+} \to T_{k^{\max}} \to T_k \to 0.$$

Da $X \in \mathcal{F}(\Delta)$, gilt $\mathrm{pd}_A(X) \leq 1$ und somit

$$0 = \mathrm{Ext}^1_A(X, T_{k^{\max}}) \twoheadrightarrow \mathrm{Ext}^1_A(X, T_k).$$

□

Korollar 29.5. *Der kanonische Kippmodul $T_{\min}$ hat eine direkte Summenzerlegung*

$$T_{\min} = \bigoplus_{k=1}^{r} T_k.$$

Beweis. Wir betrachten

$$T = \bigoplus_{k=1}^{r} T_k.$$

Zunächst zeigen wir, dass T ein Kippmodul ist. Wegen $T_i \in \mathcal{F}(\Delta)$ gilt $\mathrm{pd}_A(T_i) \leq 1$ für alle $i \in Q_0$ und somit auch $\mathrm{pd}_A(T) \leq 1$. Aus Korollar 29.4 folgt, dass für $i, j \in Q_0$ gilt, dass

$$\mathrm{Ext}^1_A(T_i, T_j) = 0;$$

somit gilt auch

$$\mathrm{Ext}^1_A(T, T) = 0.$$

Schließlich gilt offenbar, dass

$$\delta(T) = r.$$

Somit ist T ein Kippmodul. Sei nun X ein unzerlegbarer, direkter Summand von $T_{\min}$ mit

$$X \notin \mathrm{add}(T).$$

Wegen $X \in \mathcal{F}(\nabla) \cap \mathcal{F}(\Delta)$ gilt nach Korollar 29.4 und Lemma 28.7.(v), dass

$$\mathrm{Ext}^1_A(T, X) = \mathrm{Ext}^1_A(X, T) = 0.$$

Da T aber schon ein Kippmodul ist, muss nach Lemma 7.5 gelten, dass $X \in \mathrm{add}(T)$. $\square$

Korollar 29.6. *Sei $i \in Q_0$. Dann existiert für jede kurze exakte Folge*

$$0 \to X \xrightarrow{\varphi} Y \to Z \to 0$$

in $\mathcal{F}(\Delta)$ und jeden Morphismus $f : X \to T_i$ ein Morphismus $g : Y \to T_i$ mit $f = g \circ \varphi$.

30. Das Ergebnis

Wir möchten folgenden Satz beweisen:

Satz 30.1. *Sei $A = A_{\mathbf{i}} = KQ/I$. Dann gibt es einen gerichteten Weg von ${}_AA$ nach $T_{\min}$ in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$. Alle Punkte auf diesem Weg liegen in $\mathcal{F}(\Delta)$.*

Zunächst benötigen wir noch etwas Notation. Sei

$$\rho : Q_0 \to Q'_0$$

die Abbildung mit $\rho(j) = i_j$. Seien nun $k, k' \in Q_0$ mit $\rho(k) = \rho(k')$ und $k' \geq k$. Wir definieren den Modul $M_{k,k'} \in \mathcal{F}(\Delta)$ als

$$M_{k,k'} = P_k / P_{k'^+}.$$

Sei für $l \in Q'_0$

$$\mu(l) = \#\{k \in Q_0 \mid \rho(k) = l\}.$$

Ferner sei für $l \in Q'_0$ und $i \in Q_0$

$$\mu_i(l) = \#\{k \in Q_0 \mid k \leq i, \rho(k) = l\}.$$

Sei außerdem

$$\{k \in Q_0 \mid \rho(k) = l\} = \{l[1] < l[2] < \cdots < l[\mu(l)]\}.$$

Mit dieser Notation ist

$$\begin{aligned} P_k &= M_{k,k^{\max}} = M_{k,k[\mu(k)]}, \\ T_k &= M_{k^{\min},k} = M_{k[1],k}, \\ \Delta_k &= M_{k,k}. \end{aligned}$$

Wir benötigen folgende Lemmata:

Lemma 30.2. *Seien $k' \leq k \leq m$ mit $\rho(k) = \rho(k') = \rho(m)$. Sei $\varphi : M_{k,m} \to M_{k',m}$ ein Morphismus. Falls $\varphi|_{\Delta_m} \neq 0$, so ist φ injektiv.*

Beweis. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Delta_m \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M_{k,m} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & M_{k,m^-} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Delta_m \arrow[r, "\iota'"] & M_{k',m} \arrow[r, "\pi'"] & M_{k',m^-} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Die Abbildungen π, π', ι, ι' sind jeweils die kanonische Injektionen bzw. Surjektionen. Nach Lemma 28.7.(ii) ist

$$\mathrm{Hom}_A(\Delta_m, {}^{M_{k',m}}\!/\!_{\Delta_m}) = 0.$$

Insbesondere existiert der linke vertikale Morphismus. Wegen $\varphi|_{\Delta_m} \neq 0$ und

$$\mathrm{End}_A(\Delta_m) \cong K$$

können wir nach Skalieren mit einem geeigneten Vielfachen annehmen, dass dieser Morphismus der Identität

$$\mathrm{id} : \Delta_m \to \Delta_m$$

entspricht. Die Existenz von φ' folgt aus $\pi' \circ \varphi|_{\Delta_m} = 0$.
Aus $\varphi|_{\Delta_m} \neq 0$ folgt, dass $\varphi|_{\Delta_{m^-}} \neq 0$, da Δ_{m^-} über Δ_m in der Δ-Filtration von $M_{k,m}$ liegt. Somit folgt per Induktion, dass φ' injektiv ist und damit auch (z.B. nach dem Schlangenlemma) die Injektivität von φ. $\square$

Lemma 30.3. *Seien $k' \leq k \leq m$ mit $\rho(k) = \rho(k') = \rho(m)$. Sei $\varphi : M_{k,m} \to M_{k',m}$ ein injektiver Morphismus. Dann ist $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, so dass folgendes gilt:*

- $\varphi_1|_{\Delta_m} = 0$,
- *φ_2 ist ein skalares Vielfaches der kanonischen Injektion.*

Beweis. Wir betrachten folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \Delta_m \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M_{k,m} \arrow[d, "\varphi"] \\ \Delta_m \arrow[r, "\iota'"] & M_{k',m} \end{tikzcd}$$

Wie in Lemma 30.2 können wir nach Skalierung annehmen, dass links im Diagramm die Identität steht. Sei $\varphi_2 : M_{k,m} \to M_{k',m}$ die kanonische Injektion. Dann ist $\varphi - \varphi_2|_{\Delta_m} = 0$. $\square$

Unser Weg von ${}_AA$ nach $T_{\min}$ wird ausschließlich aus Kippmoduln bestehen, die nur direkte Summanden der Form $M_{k,k'}$ für geeignete $k \leq k' \in Q_0$ mit $\rho(k) = \rho(k')$ haben. Wir starten im Punkt ${}_AA$. Wir gehen in r Schrittfolgen vor. Die i-te Schrittfolge wird aus

$$(\mu_{r+1-i}(\rho(r+1-i)) - 1) \text{ Mutationen}$$

bestehen. Sei R^i derjenige Kippmodul, der am Anfang der i-ten Schrittfolge ist. Sei S^i derjenige Kippmodul am Ende der i-ten Schrittfolge. Es ist $R^1 = {}_AA$. Sei nun i fest. Seien

$$\begin{aligned} l &= \rho(r+1-i) \in Q_0', \\ x &= \mu_{r+1-i}(l). \end{aligned}$$

Mit dieser Notation ist

$$l[x] = r+1-i \in Q_0.$$

Wir betrachten R^i und S^i. Es gilt

$$\begin{aligned} R^i &= R^i_l \oplus R^i_{\neq l}, \\ S^i &= S^i_l \oplus S^i_{\neq l}. \end{aligned}$$

Hierbei ist R^i_l (bzw. S^i_l) die direkte Summen aller direkten Summanden von R^i (bzw. S^i), welche eine Δ-Filtration besitzen, in der ein Filtrationsfaktor Δ_u vorkommt mit $\rho(u) = r+1-i$. Des weiteren seien

$$\begin{aligned} R^i_{\neq l} &\cong R^i / R^i_l, \\ S^i_{\neq l} &\cong S^i / S^i_l. \end{aligned}$$

(A_i) Am Anfang der i-ten Schrittfolge werden wir folgende Situation haben: Es gilt

$$R^i_l = \bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[x]} M_{k,r+1-i} \oplus \bigoplus_{\substack{k=l[x+1] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu_l]} M_{l[1],k}.$$

Falls $r+1-i = l[1]$, so ist $x = 1$, und es ist schon

$$\bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} T_k = \bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} M_{l[1],k} = R^i_l.$$

In diesem Fall gehen wir zur nächsten Schrittfolge über. Falls $r+1-i \neq l[1]$, so benötigen wir $x-1$ Mutationen, um von R^i nach S^i zu gelangen. Wir mutieren dazu nacheinander an den Stellen

$$M_{r+1-i,r+1-i}, M_{l[x-1],r+1-i}, \ldots, M_{l[2],r+1-i}.$$

(B_i) Diese Mutationen liefern uns einen Weg von R^i nach S^i in $\mathcal{T}_{\mathrm{A}}$. Wir erhalten als neue direkte Summanden von S^i nacheinander

$$M_{l[x-1],l[x-1]}, M_{l[x-2],l[x-1]}, \ldots, M_{l[1],l[x-1]}.$$

(C_i) Am Ende der i-ten Schrittfolge haben wir folgende Situation: Es gilt

$$\bigoplus_{\substack{k=l[1]\\ \rho(k)=l}}^{l[x-1]} M_{k,l[x-1]} \oplus \bigoplus_{\substack{k=l[x]\\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} M_{l[1],k} = S_l^i.$$

Des weiteren ist

$$S^i = S_l^i \oplus S_{\neq l}^i = S_l^i \oplus R_{\neq l}^i.$$

Außerdem gilt während der i-ten Schrittfolge folgendes:

(D_i) Sei Y ein unzerlegbarer direkter Summand von $R_{\neq l}^i$. Sei $h \geq r+1-i$. Falls Δ_h in der Δ-Filtration von Y vorkommt, so ist Y bereits ein direkter Summand des kanonischen Kippmoduls.

Wenn wir die Behauptungen (A_i, B_i, C_i, D_i) bewiesen haben, so haben wir einen Weg von ${}_AA$ nach $T_{\min}$ erhalten. Satz 30.1 ist dann bewiesen.

Beweis. Wir beweisen die obigen Behauptungen per Induktion nach i. Offenbar folgt (C_i) aus (A_i) und (B_i).

Schrittfolge 1: Es sind

$$l = \rho(r),$$
$$x = \mu(l).$$

Wir haben

$$\bigoplus_{\substack{k=l[1]\\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} M_{k,r} = \bigoplus_{\substack{k=l[1]\\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} P_k = R_{\rho(r)}^1.$$

Insbesondere gilt (A_1). Falls $Y = P_k$ mit $\rho(k) \neq \rho(r)$, so taucht Δ_r nicht in der Δ-Filtration von P_k auf. Somit gilt auch (D_1). Wir zeigen (B_1) per Induktion nach der Anzahl der schon in dieser Schrittfolge getätigten Mutationen.

Erste Mutation: Wir mutieren an der Stelle

$$M_{r,r} = P_r = \Delta_r.$$

Wir konstruieren eine minimale $\mathrm{add}(R^1/\Delta_r)$-Linksapproximation von Δ_r. Wegen Lemma 28.7.(ii) und $\mathrm{End}_A(\Delta_r) = K$ folgt, dass

$$\mathrm{Hom}_A(\Delta_r, P_k) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \rho(k) \neq \rho(r), \\ K, & \text{falls } \rho(k) = \rho(r). \end{cases}$$

Außerdem ist für beliebiges $k \in Q_0$ mit $k \neq r$ und $\rho(k) = \rho(r)$ folgendes Diagramm kommutativ (die Pfeile entsprechen hier den kanonischen Abbildungen):

$$\begin{tikzcd} P_r \arrow[r] \arrow[d] & P_{r^-} \arrow[dl] \\ P_k & \end{tikzcd}$$

Somit haben wir eine minimale add(R^1/Δ_r)-Linksapproximation von Δ_r gefunden, nämlich

$$0 \to \Delta_r \to P_{r^-} \to \Delta_{r^-} \to 0.$$

Wegen $r^- = l[x-1]$ ist

$$\Delta_{r^-} = M_{l[x-1],l[x-1]}$$

und es folgt das Gewünschte.

j-te Mutation: Wir mutieren an der Stelle

$$M_{l[x-j+1],r} = P_{l[x-j+1]}.$$

Der Kippmodul U, von dem aus wir mutieren, hat mittlerweile folgende Form:

$$\begin{aligned} U &= R^1 \Big/ \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[x-j+2]}}^{l[x]} M_{k,r} \oplus \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[x-j+1]}}^{l[x-1]} M_{k,l[x-1]} \\ &= R^1_{\neq l} \oplus \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[1]}}^{l[x-j+1]} M_{k,r} \oplus \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[x-j+1]}}^{l[x-1]} M_{k,l[x-1]} \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass folgende kurze exakte Folge eine Austauschfolge für $M_{l[x-j+1],r}$ ist (die Abbildungen sind hierbei die kanonischen Abbildungen):

$$0 \to M_{l[x-j+1],r} \xrightarrow{\iota} M_{l[x-j],r} \oplus M_{l[x-j+1],r^-} \to M_{l[x-j+1],r^-} \to 0.$$

Sei nämlich $X \in \operatorname{add}(U/M_{l[x-j+1],r})$ unzerlegbar und $\varphi : M_{l[x-j+1],r} \to X$ ein Morphismus. Wir zeigen, dass φ über ι faktorisiert. Dazu unterscheiden wir zwei Fälle für X:

Sei Δ_r kein Filtrationsfaktor von X in der Δ-Filtration von X. Da X nur aus Filtrationsfaktoren Δ_k mit $k < r$ besteht, folgt nach Lemma 28.7.(ii), dass

$$\operatorname{Hom}_A(\Delta_r, X) = 0.$$

Somit wird der Untermodul $\Delta_r \subset M_{l[x-j+1],r}$ unter φ auf 0 geschickt und damit faktorisiert φ schon über

$$M_{l[x-j+1],r} \twoheadrightarrow M_{l[x-j+1],r^-}.$$

Wir nehmen also an, dass Δ_r ein Filtrationsfaktor von X ist, es gilt also $X \cong M_{k,r}$ für ein $k \in Q_0$ mit $\rho(k) = \rho(r)$ und $k < l[x-j+1]$. Dann ist aber φ nach Lemma 30.3 nach Abzug von Morphismen, die wir schon abgehandelt haben, ein skalares Vielfaches der kanonischen Injektion und faktorisiert über

$$M_{l[x-j+1],r} \hookrightarrow M_{l[x-j],r}.$$

Somit haben wir auch (B_1) gezeigt.

Schrittfolge i: Sei $l = \rho(r+1-i)$, $x = \mu_{r+1-i}(l)$. Wir möchten zunächst (A_i) zeigen. Falls

$$i = \min\{k \in Q_0 \mid \rho(r+1-k) = l\},$$

so gilt wegen

$$(C_1), \ldots, (C_{i-1})$$

und da wir noch keinen direkten Summanden der Form P_k mit $\rho(k) = l$ ausgetauscht haben, dass

$$\bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} M_{k,r+1-i} = \bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} P_k = R_l^i.$$

Insbesondere gilt in diesem Fall (A_i). Ansonsten seien

$$\begin{aligned} i' &= \max\{k \in Q_0 \mid \rho(r+1-k) = l, k < i\}, \\ l' &= \rho(r+1-i') = \rho(r+1-i), \\ x' &= \mu_{r+1-i'}(l) = x+1. \end{aligned}$$

Wegen

$$(C_{i'}), \ldots, (C_{i-1})$$

haben wir

$$\begin{aligned} R_l^i = S_{l'}^{i'} &= \bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[x'-1]} M_{k,l[x'-1]} \oplus \bigoplus_{\substack{k=l[x'] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} M_{l[1],k} \\ &= \bigoplus_{\substack{k=l[1] \\ \rho(k)=l}}^{l[x]} M_{k,l[x]} \oplus \bigoplus_{\substack{k=l[x+1] \\ \rho(k)=l}}^{l[\mu(l)]} M_{l[1],k} \end{aligned}$$

und es folgt (A_i). Sei nun Y ein unzerlegbarer direkter Summand von $R_{\neq l}^i$, sei $h \geq r+1-i$. Der Modul Y hat die Form

$$Y = M_{k,k'}$$

für geeignete k, k' mit $\rho(k) = \rho(k') = \rho(h)$. Sei nun

$$i' = \max\{k \in Q_0 \mid \rho(r+1-k) = \rho(h), k < i\}.$$

Dann ist Y schon in $S_{\rho(h)}^{i'}$ und es gilt $h \geq r+1-i'$. Aus $C_{i'}$ können wir ablesen, dass Y schon die Form $T_{k'}$ haben muss. Somit gilt auch (D_i). Wir zeigen (B_i) per Induktion über die Anzahl der schon getätigten Mutationen.

Erste Mutation: Wir mutieren an der Stelle $M_{r-1+i,r-1+i} = \Delta_{r-1+i}$. Wir konstruieren eine minimale $\mathrm{add}(R^i/M_{r-1+i,r-1+i})$-Linksapproximation von $M_{r-1+i,r-1+i}$. Dazu betrachten wir die folgende kurze exakte Folge:

$$0 \to \Delta_{r-1+i} \xrightarrow{\iota} M_{(r-1+i)^-,r-1+i} \to \Delta_{(r-1+i)^-} \to 0.$$

Wir werden zeigen, dass ι eine $\mathrm{add}(R^i/\Delta_{r+i-1})$-Linksapproximation von Δ_{r+i-1} ist. Sei $X \in \mathrm{add}(R^i/\Delta_{r+i-1})$ und $\varphi : \Delta_{r+i-1} \to X$. Falls X keinen Filtrationsfaktor Δ_s besitzt mit $s \geq r+i-1$, so ist $\varphi = 0$ nach Lemma 28.7.(ii).

Falls $X \cong M_{k,r+i-1}$ für ein $k \leq r+i-1$ mit $\rho(k) = \rho(r+i-1)$, so faktorisiert φ nach Lemma 30.3 über ι.

Ansonsten gilt wegen (D_i) und (A_i), dass $X \cong T_k$ für ein $k \in Q_0$; somit faktorisiert φ nach Lemma 29.6 über ι. Es folgt, dass ι eine $\mathrm{add}(R^i/\Delta_{r+i-1})$-Linksapproximation von Δ_{r+i-1} ist.

j-te Mutation: Wir mutieren an der Stelle $M_{l[x-j],r+i-1} = M_{l[x-j],l[x]}$. Der Kippmodul U, von dem aus wir mutieren, hat mittlerweile folgende Form:

$$\begin{aligned} U &= R^i \Big/ \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[x-j+2]}}^{l[x]} M_{k,l[x]} \oplus \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[x-j+1]}}^{l[x-1]} M_{k,l[x-1]} \\ &= R^1_{\neq l} \oplus \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[1]}}^{l[x-j+1]} M_{k,l[x]} \oplus \bigoplus_{\substack{\rho(k)=l \\ k=l[x-j+1]}}^{l[x-1]} M_{k,l[x-1]} \end{aligned}$$

Wir betrachten folgende kurze exakte Folge

$$\begin{aligned} 0 \to M_{l[x-j],l[x]} &\xrightarrow{\iota} M_{l[x-j],l[x-1]} \oplus M_{l[x-j-1],l[x]} \\ &\to M_{l[x-j-1],l[x-1]} \to 0. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass ι eine $\mathrm{add}(U/M_{l[x-j],l[x]})$-Linksapproximation von $M_{l[x-j],l[x]}$ ist. Sei dazu $X \in \mathrm{add}(U/M_{l[x-j],l[x]}$ unzerlegbar und

$$\varphi : M_{l[x-j],l[x]} \to X$$

ein Morphismus. Falls

$$\varphi|_{\Delta_{r+i-1}} = 0,$$

so faktorisiert φ über $M_{l[x-j],l[x-1]}$.
Falls

$$\varphi|_{\Delta_{r+i-1}} \neq 0,$$

so muss nach Lemma 28.7.(ii) ein Filtrationsfaktor Δ_s mit $s \geq r+i-1$ in X vorkommen. Dann hat X wegen (A_i), (D_i) und den bisher bewiesenen Mutationen von (B_i) entweder die Form T_k für ein $k \in Q_0$ oder die Form $M_{k,r+i-1}$ für ein $k < r+i-1$ mit $\rho(k) = \rho(r+i-1)$. In beiden Fällen faktorisiert φ nach denselben Argumenten wie im ersten Schritt über ι und wir sind fertig.

$\square$

Literatur

[1] F. W. Anderson, K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Second Edition, Graduate Texts in Mathematics 13, Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1991).

[2] I. Assem, T. Brüstle, R. Schiffler, G. Todorov, *Cluster categories and duplicated algebras*, J. Algebra 305 (2006), no. 1, 548-561.

[3] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński, *Elements of the representation theory of associative algebras*, Vol. 1, Techniques of representation theory, London Mathematical Society Student Texts 65, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.

[4] I. Assem, A. Skowroński, *Iterated tilted algebras of type* $\tilde{A}_n$, Math Z. 195 (1987), no. 2, 269-290.

[5] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. in Math. 86 (1991), no. 1, 111-152.

[6] M. Auslander, I. Reiten, S. O. Smalø, *Representation theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 36, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[7] M. Auslander, S.O. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, J. Algebra 69 (1981), no. 2, 426-454.

[8] M. Auslander, S.O. Smalø, *Preprojective modules over artin algebras*, J. Algebra 66 (1980), no. 1, 61-122.

[9] K. Bongartz, *Tilted algebras*, Representations of algebras (Puebla, 1980), 26-38, Lecture Notes in Math. 903, Springer, Berlin-New York, 1981.

[10] S. Brenner, M. C. R. Butler, *Generalizations of the Berstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*, Representation theory II, Lecture Notes in Math. 832, Springer, Berlin-New York, 1980.

[11] A. Buan, O. Iyama, I.Reiten. J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. 145 (2009), no. 4, 1035-1079.

[12] M. C. R. Butler, C. M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Algebra 15 (1987), no. 1-2, 145-179.

[13] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, *Finite dimensional algebras and highest weight categories*, J. Reine Angew. Math. 391 (1988), 85-99.

[14] F. Coelho, D. Happel, L. Unger, *Complements to partial tilting modules*, J. Algebra 170 (1994), no. 1, 184-205.

[15] W. W. Crawley-Boevey, *Maps between representations of zero-relation algebras*, J. Algebra 126 (1989), no. 2, 259-263.

[16] Y.A. Drozd, V.V. Kirichenko, *Finite-dimensional Algebras*, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[17] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Generic bases for cluster algebras and the Chamber Ansatz*, Journal of the American Mathematical Society 25 (2012), 21-76.

[18] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Kac-Moody groups and cluster algebras*, Adv. in Math. 228 (2011), 329-433.

[19] C. Geiss, B. Leclerc, J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math 165 (2006), no. 3, 589-632.

[20] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. 62 (1987), no. 3, 339-389.

[21] D. Happel, *Partial tilting modules and recollement*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2 (Novosibirsk, 1989), 345-362, Contemp. Math. 131, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.

[22] D. Happel, *Selforthogonal modules*, Abelian Groups and Modules (Padova, 1994), Math. Appl. 343, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, 257-276.

[23] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series 119, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[24] D. Happel, C. M. Ringel, *Tilted Algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), no. 2, 399-443.

[25] D. Happel, L. Unger, *Almost complete tilting modules*, Proc. Amer. Math. Soc 107 (1989), no. 3, 603-610 .

[26] D. Happel, L. Unger, *Complements and the generalized Nakayama conjecture*, Algebras and modules II (Geiranger, 1996), 293-310, CMS Conf. Proc. 24, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[27] D. Happel, L. Unger, *Links of faithful partial tilting modules*, Algebr. and Repr. Theory 13 (2010), no. 6, 637-652.

[28] D. Happel, L. Unger, *On a partial order of tilting modules*, Algebr. and Repr. Theory 8 (2005), no. 2, 147-156.

[29] D. Happel, L. Unger, *On the quiver of tilting modules*, J. Algebra 284 (2005), no. 2, 857-868.

[30] D. Happel, L. Unger, *Partial tilting modules and covariantly finite subcategories*, Comm. Algebra 22 (1994), no. 5, 1723-1727.

[31] M. Harada, Y. Sai, *On categories of indecomposable modules I*, Osaka J. Math. 7 (1970), 323-344.

[32] R. Hartshorne, *Residues and Duality*, Lecture Notes in Mathematics 20, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.

[33] O. Iyama, *Finiteness of representation dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 4, 1011-1014.

[34] W. Krull *Über verallgemeinerte endliche Abelsche Gruppen*, Math. Z. 23 (1925), no. 1, 161-196.

[35] Y. Miyashita, *Tilting modules of finite projective dimension*, Math. Z. 193 (1986), no. 1, 113-146.

[36] Z. Pogorzaly, A. Skowroński, *Self-injective biserial standard algebras*, J. Algebra 138 (1991), no. 2, 491-504.

[37] R. Remak, *Über die Zerlegung der endlichen Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren*, J. Reine Angew. Math (1911), 293-308.

[38] J. Rickard, A. Schofield, *Cocovers and tilting modules*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 106 (1989), no. 1, 1-5.

[39] C. Riedtmann, A. Schofield, *On a simplicial complex associated with tilting modules*, Comment. Math. Helv. **66** (1991), no. 1, 70-78.

[40] C. M. Ringel, *Iyama's finiteness theorem via strongly quasi-hereditary algebras*, J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 9, 1687-1692.

[41] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[42] C. M. Ringel, *The category of good modules over a quasi-hereditary algebra*, Proceedings of the Sixth International Conference on Representations of Algebras (Ottawa, ON, 1992), 17 pp., Carleton-Ottawa Math. Lecture Note Ser. 14, Carleton Univ., Ottawa, ON, 1992.

[43] C. M. Ringel, *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*, Math. Z. 208 (1991), no. 2, 209-233.

[44] C. M. Ringel, *The repetitive algebra of a gentle algebra*, Bol. Soc. Mat. Mexicana 3 (1997), no. 2, 235-253.

[45] J. Schröer, *A new class of quasi-hereditary algebras*, Seminar talk in Bonn, 2009.

[46] J. Schröer, *Modules without self-extensions over gentle algebras*, J. Algebra 216 (1999), no. 1, 178-189.

[47] J. Schröer, *On the quiver with relations of a repetitive algebra*, Archiv der Mathematik (Basel) 72 (1999), no. 6, 426-432.

[48] J. Schröer, A.Zimmermann, *Stable endomorphism algebras of modules over special biserial algebras*, Math. Z. 244 (2003), no.3, 515-530.

[49] I. Schur, *Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1905), 406-432.

[50] L. Unger, *Combinatorial aspects of the set of tilting modules*, Handbook of Tilting Theory, 259-277, London Mathematical Society Lecture Note Series 332, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[51] J.-L. Verdier, *Catégories dérivée*, état 0, in SGA 4.5., 1977, Lecture Notes 569, Springer-Verlag, 1977, 262-308.

[52] T. Wakamatsu *Stable equivalence for self-injective algebras and a generalization of tilting modules*, J. Algebra 134 (1990), no. 2, 289-325.

[53] B. Wald, J.Waschbüsch, *Tame biserial algebras*, J. Algebra 95 (1985), no. 2, 480-500.
[54] J. Xu, *Flat covers of modules*, Lecture Notes in Mathematics 1634, Springer-Verlag, Berlin, 1996.