

Energieskalierung, Gebietsverzweigung und $SO(2)$ -Invarianz in einem fest-fest Phasenübergangsproblem

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Allan Yuk-Kin Chan

aus

Dinslaken

Bonn (2013)

Angefertigt mit der Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter Prof. Dr. Sergio Conti
2. Gutachter Prof. Dr. Stefan Müller

Tag der Promotion: 19.07.2013

Erscheinungsjahr: 2013

Zusammenfassung

In den frühen 90er Jahren haben Robert Kohn und Stefan Müller ein Modell entwickelt, das Musterbildung in martensitischen Formgedächtnismetallen erklären konnte. In dieser Arbeit wird eine vektorwertige Verallgemeinerung ihres Modells für fest-fest Phasenübergänge mit $SO(2)$ -Invarianz untersucht. Für ein vektorwertiges Modell mit Skalensparameter ε , Phasenparameter α und Gebietsgrößen h und l werden in dieser Arbeit zu dem Funktional

$$\int_{\Omega} \text{dist}^2(Du, K) d\mathcal{L}^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |D^2u|$$

mit

$$u \in \mathcal{M} = \{v \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2) : Dv \in BV(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2}), v(x, y) = (x, y)^T \forall (x, y) \in \partial\Omega\}$$

und $K = SO(2)A \cup SO(2)B \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für den Fall, dass A und B zwei Rang-1 Verbindungen haben,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

vier Infimum-Energieskalierungen für verschiedene Wertebereiche von ε und verschiedene Rechtecke Ω mit $SO(2)$ -Invarianz hergeleitet. Für den Fall, dass A und B eine Rang-1 Verbindung haben,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix},$$

wird eine $\alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5}$ -Infimum-Energieskalierung für verschiedene Rechtecke Ω mit $SO(2)$ -Invarianz gezeigt. Mit der Methode der Gebietsverzweigung werden die entsprechenden oberen Schranken für die Infimumenergie hergeleitet.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Herrn Prof. Dr. Sergio Conti für die vielen strategischen Diskussionen an der Tafel und hilfreichen Was-Wäre-Wenn Szenarien, die zum Gelingen dieser Arbeit geführt haben. Er war immer für ein Treffen mit mir bereit, um die neuesten Entwicklungen und Rettungsmaßnahmen von Fehlversuchen der Arbeit zu besprechen. Für seinen Einsatz, seine Geduld und sein Interesse danke ich ihm von ganzem Herzen. Auch möchte ich mich bei ihm für die vielen Lehrerfahrungen bedanken.

Diese Arbeit wurde zum Teil von der DFG Forschergruppe 797 Microplast, dem DFG Sonderforschungsbereich 611 (Singuläre Phänomene und Skalierung in mathematischen Modellen) und der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn gefördert.

Mein Dank gilt ferner Frau Dr. Barbara Zwicknagl und Frau Dipl.Math. Angkana Rüland für ihre hilfreichen Korrekturvorschläge zu einer Vorversion dieser Arbeit.

Meiner Freundin Ruth möchte ich für ihre Unterstützung und ihr Verständnis danken, und dafür, dass sie in kritischen Situationen immer für mich da war.

Zum Schluss danke ich meiner Familie für ihre ebenso wichtigen nicht-fachlichen Beiträge, die notwendig sind, um eine solche Dissertation zu erstellen.

Bonn, im Februar 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Nichtlineare Elastizitätsmodellierung	4
1.1.1	Elastische Energieminimierung	5
1.1.2	Weiterentwicklungen des elastischen Energieminimierungsmodells	9
1.2	Ergebnisse und Methoden	11
2	Emergente Effekte durch Beispiele entdecken	17
2.1	Beispiel 1: Eine Randkonstruktion	20
2.2	Beispiel 2: Füllen mit Laminaten	22
2.3	Beispiel 3: Periodisch oszillierende Strukturen - zwei-parametrische Optimierung	24
2.4	Beispiel 4: Gebietsverzweigung - drei-parametrische Optimierung	27
2.5	Diskussion: Unterschied zwischen K_1 und K_2	36
3	Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise	39
3.1	Vorbereitungen	39
3.2	Randkonstruktionen	45
3.3	Die Grenzfunktion γ	47
3.4	Energieabschätzungen auf dem Referenzgebiet	49
3.5	Energiefreie Verklebungen	53
3.6	Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise	55
3.6.1	Gemeinsamer Beweisbeginn für die Fälle K_1 und K_2	55
3.6.2	Beweisfortsetzung - Fall K_1	56
3.6.3	Beweisfortsetzung - Fall K_2	61
4	Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$	67
4.1	Der Fall $h = l$	67
4.1.1	Energiepartitionierung	69
4.1.2	Energetische Interaktion	76
4.1.3	Rigidität der ersten Komponente des Vektors u	79
4.1.4	Einige Hilfsabschätzungen	81
4.1.5	Struktur von K_1 und Strategie	89
4.1.6	Beweis der unteren Schranke	104

4.2	Der Fall $h < l$	108
4.2.1	Energiepartitionierung	108
4.2.2	Energetische Interaktion	110
4.2.3	Rigidität der ersten Komponente des Vektors u	111
4.2.4	Einige Hilfsabschätzungen	111
4.2.5	Struktur von K_1 und Strategie	114
4.2.6	Beweis der unteren Schranke	125
5	Der Fall $h > l$ in Theorem 1	127
5.1	Die unteren Schranken und ihre Beweise	127
5.1.1	Einige Hilfsabschätzungen	129
5.1.2	Untere Schranke für kleine ε	131
5.1.3	Untere Schranke für große ε	134
5.2	Die oberen Schranken und ihre Beweise	137
6	Beweis der unteren Schranke von Theorem 2	139
6.1	Der Fall $h = l$	139
6.1.1	Energiepartitionierung	141
6.1.2	Energetische Interaktion	142
6.1.3	Rigidität der ersten Komponente des Vektors u	143
6.1.4	Die $\varepsilon^{4/5}$ -Skalierung	143
6.1.5	Die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung	148
6.1.6	Die untere Schranke von Theorem 2	156
6.2	Der Fall $h < l$	165
6.2.1	Energiepartitionierung	165
6.2.2	Energetische Interaktion	166
6.2.3	Rigidität der ersten Komponente des Vektors u	167
6.2.4	Die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung	168
6.2.5	Die untere Schranke von Theorem 2	173
7	Der Fall $h > l$ in Theorem 2	181
	Literaturverzeichnis	183

1 Einführung

Es gibt Materialien, die sich nach einer pseudo-plastischen Verformung durch thermische Manipulation an ihre Ausgangsform vor der Verformung erinnern können. In Abbildung 1.1 ist ein Beispiel gegeben. Es gibt spezielle gewundene Drähte, die beliebig elastisch verformt werden können. Nach Erwärmung des verformten Drahtes kehrt er bis auf Raumrotationen und Translationen immer zu der gleichen Ausgangsform zurück. Dieses Experiment kann beliebig oft wiederholt werden. Entdeckt wurde dieser sogenannte Formgedächtniseffekt vom schwedischen Physiker Arne Ölander im Jahre 1932 bei einer Legierung aus Gold und Cadmium. Da jedoch Gold teuer und Cadmium giftig ist, gab es keine industrielle Verwendung für den Formgedächtniseffekt. In den darauf folgenden Jahren wurden weitere Legierungen wie CuZn, CuSn, AuCd und CuAlNi entdeckt, die auch unter den Formgedächtnismetallen einzuordnen sind. Erst durch die Entdeckung von NiTi im Jahre 1962 fand der Formgedächtniseffekt über die militärische Anwendung Zugang zur Industrie. Die Legierung NiTi wurde favorisiert, da sie dem rostverursachenden Meerwasser standhalten kann als auch schwer zu orten ist [33].

Die besonderen Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen wie NiTi bieten sehr viele Anwendungsmöglichkeiten. Formgedächtnislegierungen haben z.B. ihre Anwendung in der Mikrosystemtechnik [23], um sowohl die Anzahl von Bauteilen zu verringern als auch die Baugrößen möglichst klein zu halten. In der Robotik werden bei der Herstellung von Greifern für Handhabungseinrichtungen auch Formgedächtnislegierungen eingesetzt, siehe [23] und [32]. Auch in der chemischen Labortechnik werden Formgedächtnislegierungen verwendet, um Analyseinstrumente auch auf kleineren Messskalen einsetzen zu können. In der heutigen Medizintechnik werden viele Implantate und Werkzeuge aus speziellen Formgedächtnislegierungen hergestellt, da diese nicht nur eine hohe physiologische Kompatibilität zum menschlichen Organismus, sondern auch eine hohe Biofunktionalität haben. Für weitere interessante Anwendungsgebiete und historische Bemerkungen siehe auch [29] und [34].

Verantwortlich für den Formgedächtniseffekt, beispielsweise bei NiTi, sind entweder thermisch verursachte oder spannungsinduzierte oder thermomechanische reversible martensitische Phasenumwandlungen vom Austenit in das Martensit, siehe [10]. Adolf Martens entdeckte im Jahre 1890 Martensite im Stahl. Ihm zu Ehren wurde der Begriff Martensit geschaffen. Abbildung 1.2 zeigt eine schematische Darstellung einer martensitischen Phasenumwandlung durch mechanische Einwirkungen bei konstanter Temperatur.

1 Einführung

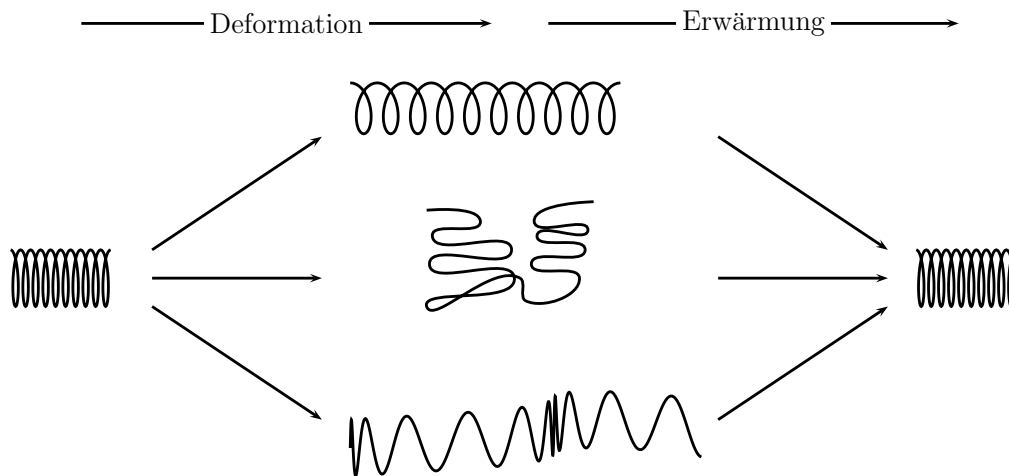


Abbildung 1.1: Demonstration des Formgedächtniseffekts anhand eines Nitinoldrahtes. Nach jeder elastischen Verformung kehrt der Nitinoldraht bei Erwärmung bis auf Raumrotationen und Translationen zu seiner Ausgangsform zurück.

Phasenumwandlungen dieser Art sind spezielle fest-fest Phasenübergänge eines elastischen Kristalls. Ähnlich wie in Abbildung 1.2 würde eine thermisch verursachte Umwandlung wie folgt verlaufen: Bei einer Erwärmung über die Austenit-Starttemperatur beginnt die Phasenumwandlung des martensitischen Materials in die Hochtemperaturphase Austenit. Nach Erreichen der Austenit-Endtemperatur ist die Phasenumwandlung vollendet und der Kristall ist austenitisch. Erreicht die Temperatur während der Abkühlung die Martensit-Starttemperatur, beginnt die Rückumwandlung. Ist die Martensit-Endtemperatur erreicht, dann ist die Rückumwandlung vollendet und der Kristall ist martensitisch. Da keine kristallographischen Defekte im Kristall zurückbleiben ist dieser Prozess reversibel. Im Allgemeinen kann man thermisch verursachte und spannungsinduzierte martensitische Phasenumwandlungen mischen. Abbildung 1.3 zeigt einen solchen thermomechanischen reversiblen Prozess.

Kristalline Festkörper weisen sowohl auf kleinen, wie auch auf großen Skalen geordnete Gitterstrukturen auf, die bei Flüssigkeiten und Gasen nicht vorhanden sind, denn die einzelnen Atome oder Moleküle sind dort in einem ungeordneten Zustand. Hier haben Mikrostrukturen einen so großen Einfluss auf das makroskopische Verhalten einzelner Teile oder gar des gesamten Materials, dass spezifische Strukturen entstehen, die gewisse Materialeigenschaften optimieren. Dabei wird jede beobachtete Struktur auf irgendeiner Beobachtungsebene zwischen der makroskopischen und der atomaren Ebene als Mikrostruktur bezeichnet. In den Materialwissenschaften möchte man u.a. die mikroskopischen Eigenschaften eines Materials ermitteln. Diese sind z.B. die feinen Strukturen und das dazuge-

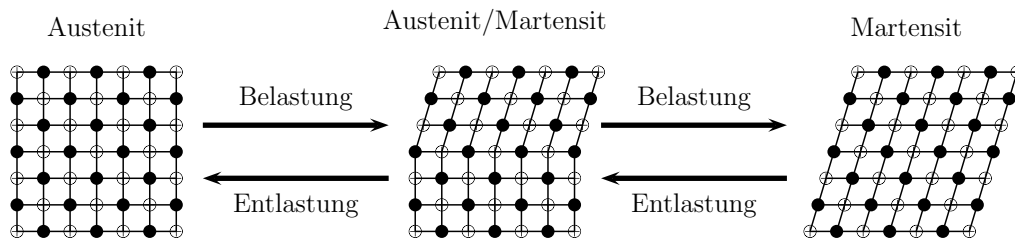


Abbildung 1.2: Beispiel einer spannungsinduzierten reversiblen martensitischen Phasenumwandlung vom Austenit in Martensit und ihre Rückumwandlung in einer Gitterebene bei konstanter Temperatur. Dabei wird das Austenit als ein elastisches Kristall modelliert. Steht das Austenit unter mechanischer Spannung, so wird sein Gitter verformt. Nach einer mechanischen Entlastung kehrt das Martensit in das vorherige Austenit ohne kristallographische Defekte zurück.

hörige Gitter, auf dem die feinen Strukturen verteilt sind.

Gut 40 Jahre lang wurde nach einem mathematischen Modell gesucht, um die phänomenologische Theorie der Martensite, die auf Bowles & MacKenzie [11], [31], und Wechsler Lieberman & Read [36], [30] zurückgeht, vorherzusagen. Es sind u.a. die Arbeiten von Khachaturyan, Roitburd & Shatalov [24], von Ericksen [21], von Ball & James [4], [5] und von Kohn & Müller [26], [27], die zum mathematischen Modell, wie es in der heutigen Form gebräuchlich ist, geführt haben. Lange Zeit war nur eine geometrisch lineare Theorie bekannt. Erst Anfang der 80er wurde durch Ericksen der Grundstein für eine geometrisch nichtlineare Theorie gelegt, die durch die Arbeiten von Ball & James [4],[5] weiterentwickelt wurde. Außerdem konnten Ball und James zeigen, dass die bis dahin bekannte lineare Theorie als die linearisierte Version ihrer geometrisch nichtlinearen Theorie verstanden werden konnte. Für weitere Gegenüberstellungen der beiden Theorien siehe [25] und [9].

1 Einführung

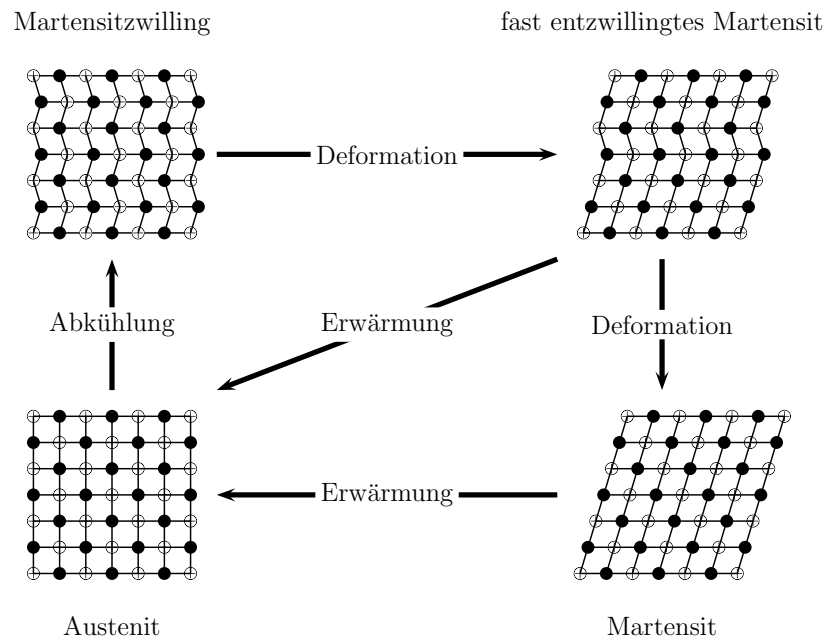


Abbildung 1.3: Beispiel einer thermomechanischen reversiblen martensitischen Phasenumwandlung. Im Allgemeinen gibt es mehrere Martensitphasen und nach einer Deformation des Austenits (links unten) kommt es häufig zu einer Phasemischung. Laminare Strukturen, kurz Laminare, werden auf der Oberfläche von Martensitzwillingen häufig beobachtet (links oben). Weitere Deformationen des verzwilligten Martensits können zur teilweisen (rechts oben) oder vollständigen Entzwilligung (rechts unten) führen.

1.1 Nichtlineare Elastizitätsmodellierung

Bei der mathematischen Modellierung von Mikrostrukturen wird üblicherweise von einem kontinuierlichen Modell für kristalline Festkörper ausgegangen, deren Gitterstrukturen Phasenübergängen ausgesetzt sind. Dabei werden atomare Phänomene vernachlässigt. Variationelle Modelle fassen die spontane Bildung von Mikrostrukturen als einen Optimierungsprozess gewisser materieller Eigenschaften auf. Der Grund, warum es zur plötzlichen Bildung von Mikrostrukturen kommt, ist die fehlende Existenz eines exakten Optimums, wodurch die feine Oszillation optimierender Folgen immer größer wird und das Anwachsen der feinen Oszillation nur durch Effekte aufgehalten wird, die aus der atomaren Skala kommen und vom bisher beschriebenen Modell nicht berücksichtigt wurden. Die mathematische List hierbei ist nun, die wesentlichen Eigenschaften optimierender Folgen zu extrahieren.

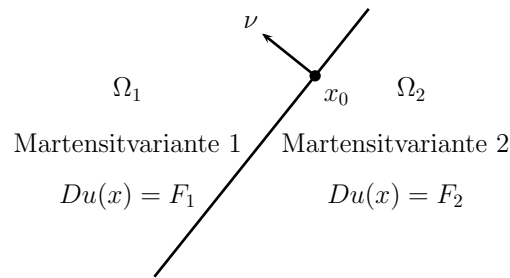


Abbildung 1.4: Eine Deformation mit zwei Martensitvarianten. Wegen der Stetigkeit von u können Gradientensprünge von u nicht beliebig sein (Hadamardsche Sprungbedingung).

1.1.1 Elastische Energieminimierung

Die grundlegende Idee der variationellen Modellierung ist die Annahme, dass der elastische Kristall ein nichtlineares Kontinuum ist. Dabei werden kristalline Strukturen durch Symmetrieeigenschaften einer Funktion wie folgt berücksichtigt. Befindet sich der Kristall in Ruhe und werden auf ihn keine Kräfte ausgeübt, dann wird er mit einer beschränkten, offenen und zusammenhängenden Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\mathcal{L}^3(\partial\Omega) = 0$, identifiziert. Jede Deformation $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ des Kristalls Ω erfordert einen Aufwand an elastischer Energie E von der Form

$$E(u) = \int_{\Omega} W(Du(x), T) d\mathcal{L}^3(x), \quad (1.1)$$

wobei $W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist, die den Kristall beschreibt. Üblicherweise ist $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $1 \leq p < \infty$. Einerseits werden nur solche Deformationen betrachtet, die den Kristall nicht zerstören. Andererseits wird die Bildung einer Mikrostruktur erwünscht. Ersteres ist eine Stetigkeitsvoraussetzung an u . Letzteres lässt Sprünge in Du zu. Ein geeigneter Raum für u ist z.B. $W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, aber auch Räume wie $\{u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^3), Du \in X\}$, wobei X Gradientensprünge zulässt, sind geeignet. Wenn u stetig ist, dann sind die Gradientensprünge aber nicht beliebig. Wenn u z.B. eine stückweise affine Deformation ist wie

$$u(x) = \begin{cases} F_1 x + a_1 & x \in \Omega_1, \\ F_2 x + a_2 & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

1 Einführung

wobei $F_1, F_2 \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ konstante Matrizen und $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$ konstante Vektoren sind, dann gibt es zwei Vektoren $\nu, b \in \mathbb{R}^3$, so dass

$$F_1 - F_2 = b \otimes \nu, \quad \text{wobei } (b \otimes \nu)_{i,j} = (b_i \nu_j).$$

Das ist die sogenannte Rang-1 Bedingung, auch als Hadamardsche Sprungbedingung bekannt (Abbildung 1.4).

Die Energiedichtefunktion W hat zwei wichtige Invarianzeigenschaften. Sie ist invariant unter Rotation des Koordinatensystems und invariant unter jeder Wirkung der Isotropiegruppe \mathcal{P} des Kristallgitters. So eine Isotropiegruppe ist üblicherweise eine diskrete Untergruppe von $SO(3)$. Mathematisch ausgedrückt lauten diese Invarianzeigenschaften:

$$\begin{aligned} W(QF, T) &= W(F, T) \quad \forall Q \in SO(3) \quad \forall F \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \forall T \in \mathbb{R}_+, \\ W(FP, T) &= W(F, T) \quad \forall P \in \mathcal{P} \subset SO(3) \quad \forall F \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad \forall T \in \mathbb{R}_+, \end{aligned}$$

wobei $F = Du$ die Deformationsmatrix von u ist. Die erste Invarianz garantiert, dass starre Körperrotationen die Energie nicht verändern. Die zweite Invarianz bedeutet in der Sprache der martensitischen Transformationen, dass das Austenitgitter kristallographisch gleichberechtigte Verformungsrichtungen hat. Eigentlich hängt W noch von der Temperatur T ab. Jedoch werden wir Temperaturabhängigkeiten vernachlässigen, indem wir eine konstante Temperatur annehmen. Üblicherweise wird W so gewählt, dass $\min(W) = 0$ gilt. Die Menge $K = W^{-1}(0) = \{F \in \mathbb{R}^{3 \times 3} : W(F) = 0\}$ entspricht dann den energiefreien affinen Deformationen des Kristallgitters. In den Anwendungen mathematischer Modelle mit konstanter Temperatur ist K üblicherweise von der Form $\bigcup_{j=1}^N SO(3)F_j$. In der Sprache der martensitischen Transformationen heißt das, dass es $N = N(\mathcal{P}_A, \mathcal{P}_M)$ martensitische Varianten, auch Phasen genannt, $F_1(T), \dots, F_N(T)$ gibt. Hierbei ist \mathcal{P}_A die Isotropiegruppe des Austenitgitters und \mathcal{P}_M die des Martensitgitters. Wenn T_A die Austenit-Endtemperatur und T_M die Martensit-Endtemperatur sind und die Einheitsmatrix das Austenit beschreibt, dann hat K die Form

$$K(T) = \begin{cases} SO(3) & T > T_A, \\ SO(3) \cup \bigcup_{j=1}^N SO(3)F_j(T) & T \in [T_M, T_A], \\ \bigcup_{j=1}^N SO(3)F_j(T) & T < T_M. \end{cases}$$

Beispielsweise ist bei kubisch-tetragonalen Transformationen $N = 3$ (siehe Abbildung 1.5). Man sieht, dass eine stetige Deformation das Energiefunktional in (1.1) genau dann minimiert, wenn $Du(x) \in K$ für fast alle $x \in \Omega$ ist. Gesucht sind daher stetige Deformationen, wo die verschiedenen Phasen zu gegebenen Randbedingungen koexistieren. Es gibt zwei Arten der Koexistenz. Eine martensitische Variante $R_1 F_1$ trifft entweder auf eine andere martensitische Variante $R_2 F_2$ oder auf das Austenit. Im ersten Fall ergibt sich aus der Hadamardschen Sprungbedingung, dass, falls eine Deformation u in einem Punkt x sowohl

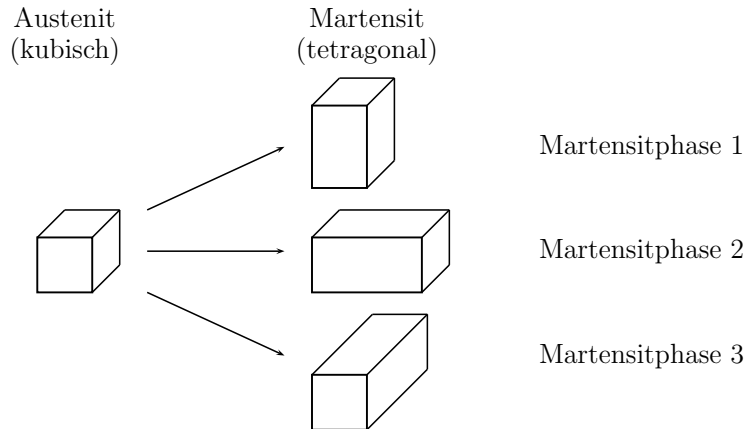


Abbildung 1.5: Beispiel eines Austenits mit drei martensitischen Phasen.

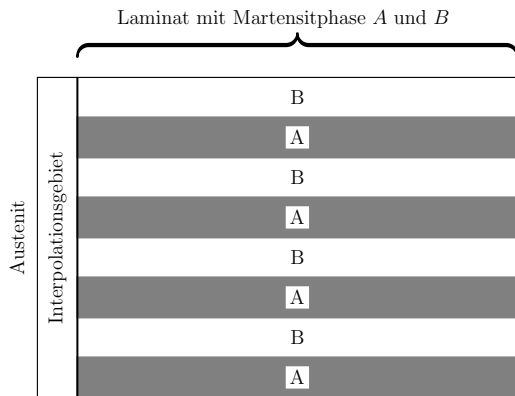
$[Du(x)]^+ = R_1 F_1$ als auch $[Du(x)]^- = R_2 F_2$ erfüllt, u in der Nähe von x ein Laminat ist. Dazu müssen zwei Vektoren $c, \nu \in \mathbb{R}^3$ gefunden werden, so dass $R_1 F_1 - R_2 F_2 = c \otimes \nu$ erfüllt ist. Trifft eine martensitische Variante auf das Austenit, so sagt die Hadamardsche Sprungbedingung eigentlich aus, dass es nicht zur Bildung einer gemeinsamen Oberfläche kommen kann. Jedoch zeigen Experimente, dass es zur gemeinsamen Oberflächenschichtbildung von Austenit und Laminat kommt. Dieses Phänomen kann Dank der Arbeit von Ball & James [4] mit Hilfe von minimierenden Folgen erklärt werden. Eine solche Folge $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ besteht aus stetigen Deformationen, von denen jede aus einem Austenit und einem Laminat besteht, die beide durch eine Interpolation auf einem kleinen Interpolationsgebiet verbunden sind. In Abbildung 1.6a und 1.6b ist die Situation schematisch dargestellt. Die Folge $(u_j)_j$ konvergiert für immer größer werdendes j gegen das Austenit, das in Abbildung 1.6c und 1.6d angedeutet wird.

Im Allgemeinen ist die Funktion W weder konvex noch quasikonvex, so dass es schwer zu sehen ist, ob das Infimum von E bzgl. Randdaten angenommen wird. Aber gerade das ist der Punkt bei der elastischen Energieminimierungsmethode. Die Nichtexistenz eines Minimums ist eng mit der Bildung von Mikrostrukturen verbunden. Weil kein exaktes Minimum existiert, müssen minimierende Folgen $(u_j)_j$ zu immer feineren Oszillationen von Du übergehen.

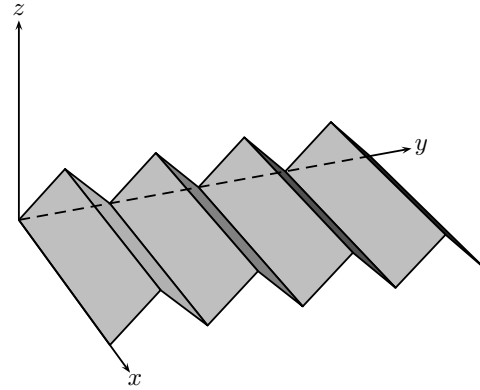
Nicht immer ist der Rand der gemeinsamen Oberflächenschicht von Austenit und Martensit eine Ebene wie in den Abbildungen 1.6a und 1.6c angedeutet. Diese Art von Grenzschichten wird als klassisch bezeichnet. Nicht-klassische Grenzschichten können z.B. gekrümmt sein oder spitz in das Austenit hineinlaufen. Mehr zu nicht-klassischen Grenzschichten kann man in [35], [10], [3] und [6] finden. Barbara Zwirnagl untersuchte in [37] u.a. periodische, sich nicht verzweigende Grenzschichten.

Die elastische Energieminimierung hat ihre Grenzen, denn bei einem als Kontinuum angenommenen Kristall ist sie eine enorme Vereinfachung der Situation. Häufig werden feine

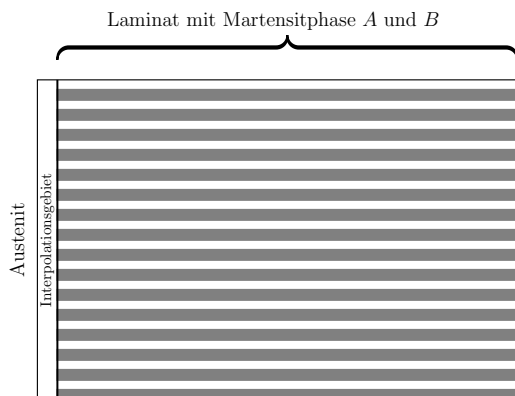
1 Einführung



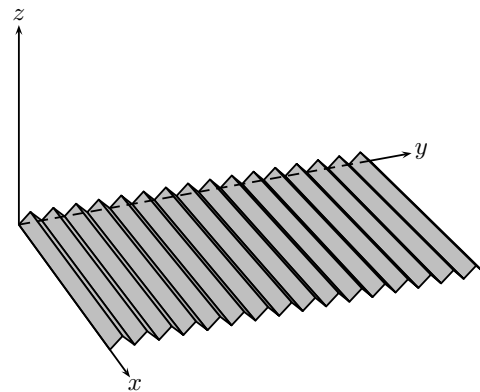
(a) Austenit trifft auf ein verzwilligtes Martensit mit Phasen A und B bei einer kleinen Oszillationsfrequenz von Du .



(b) Eine Deformation mit Martensitphase A und B bei einer kleinen Oszillationsfrequenz von Du .



(c) Austenit trifft auf einen verzwilligten Martensit mit Phasen A und B bei einer größeren Oszillationsfrequenz von Du .



(d) Eine Deformation mit Martensitphase A und B bei einer größeren Oszillationsfrequenz von Du .

Abbildung 1.6: Die Hadamardsche Sprungbedingung erlaubt eine gemeinsame Oberfläche zweier Martensitvarianten. Eine gemeinsame Oberfläche zwischen Austenit und Martensitzwillingen ist nicht möglich. Zwischen Austenit und Martensitzwillingen gibt es eine Schicht, die mathematisch mit Hilfe einer Interpolation modelliert werden kann. Je größer die Oszillationsfrequenz desto kleiner das Interpolationsgebiet.

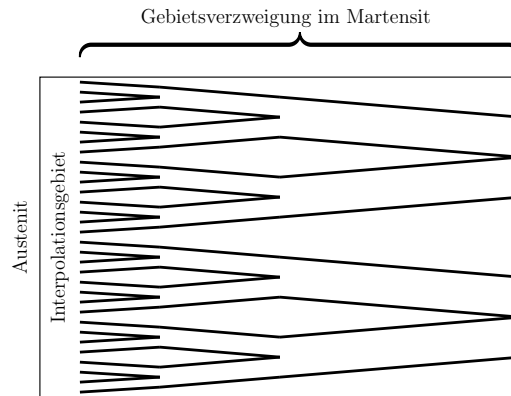


Abbildung 1.7: Kohn und Müller haben Gebietsverzweigungen in der Nähe einer Austenit-Martensitzwilling-Schicht vorhergesagt. Es sind drei Generationen einer Gebietsverzweigung zu sehen.

Phasemischungen beobachtet, die das Modell nicht vorhersagt. Außerdem wurden noch zwei wichtige Materialeigenschaften vernachlässigt. Zum Einen fehlt im bisher Beschriebenen die Einbindung eines Energieterms, der die Oberflächenenergie repräsentiert, und zum Anderen fehlt eine Beschreibung von diskreten Effekten, die von der atomaren Welt kommen. Die reine elastische Energieminimierung lässt also unendlich feine Phasemischungen zu, wo doch in der realen Welt Mikrostrukturen beschränkt sind. Selbst wenn die bisherige Modellierung noch weit entfernt von der Realität scheint, gibt es wesentliche Aussagen, die eben von dieser Art der Modellierung über die Mikrostruktur getroffen werden können. Das Verhältnis der Phasenverteilung kann vorhergesagt werden; die Orientierungsrichtung der Phasenoberflächen kann in der Sprache der Rang-1 Verbindung bestimmt werden; die kristallographische Theorie über Martensite ist wiederzuerkennen. Trotz Vereinfachungen konnten durch die elastische Energieminimierung Erfolge erzielt werden. Das zeigt, wie stark die Methoden der Variationsrechnungen sind.

1.1.2 Weiterentwicklungen des elastischen Energieminimierungsmodells

Um zu einem realistischeren Modell zu gelangen, z.B. die Bestimmung der Längenskala oder die genauere Bestimmung der Geometrie einer Mikrostruktur, müssen zusätzliche Energieterme eingeführt werden. Eine Verbesserung von (1.1) besteht beispielsweise darin, unendlich feine Phasemischungen zu verbieten. Der allgemeine Ansatz hierzu ist von der

1 Einführung

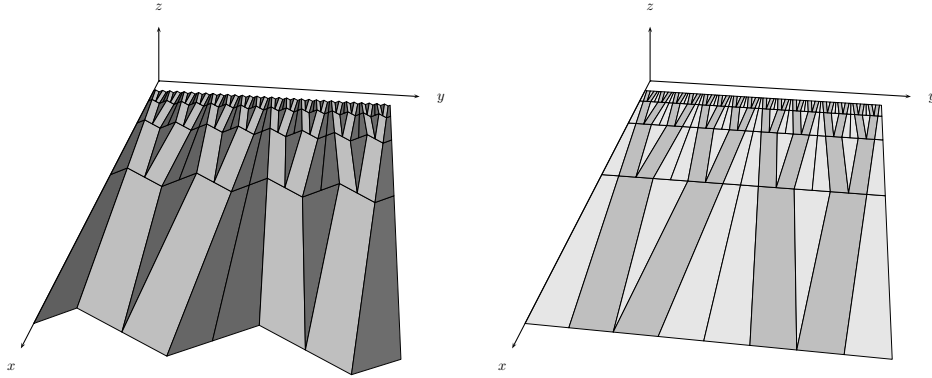


Abbildung 1.8: Beispiel eines verzweigten Martensits mit seiner Gebietsverzweigung.

Form

$$E_\varepsilon = \text{elastische Energie} + \varepsilon \text{ Oberflächenenergie.}$$

In dieser Arbeit wird E_ε von der folgenden Form sein:

$$\int_{\Omega} W(Du) d\mathcal{L}^3(x) + \varepsilon \int_{\Omega} |D^2u|.$$

Dieses Funktional erlaubt Sprünge in den Gradienten und $|D^2u|$ ist die totale Variation eines Radonmaßes. Der zusätzliche Parameter $\varepsilon > 0$ erlaubt die Behandlung einer Längenskala. Für $\varepsilon \rightarrow 0$ konvergiert das Modell formal gegen die reine elastische Energieminimierung. Weiteres zur mathematischen Modellierung von Mikrostrukturen ist in [8], [17], [20], [2] zu finden.

Energiefunktionale E_ε möchte man gerne in der Form

$$E_\varepsilon = E_0 + c\varepsilon^\sigma + O(\varepsilon^{\sigma+\delta}), \delta > 0,$$

schreiben, wobei man primär nicht an der Konstanten $c \in \mathbb{R}$, sondern an dem Wert des Exponenten σ interessiert ist. Es reicht daher, eine Ungleichung der Art

$$c_1\varepsilon^\sigma < E_\varepsilon - E_0 < c_2\varepsilon^\sigma$$

herzuleiten. Man möchte also die Skalierung von dem Längenparameter ε wissen.

Kohn und Müller [26], [27] haben 1992-94 Oberflächenenergie in ihrem Modell eingeführt und konnten Gebietsverzweigungen in der Nähe einer Austenit-Martensit Grenze vorher-sagen (siehe Abbildung 1.7 und Abbildung 1.8). Die Annahmen in ihrem Modell sind $\Omega = [0, L] \times [0, 1]$ und $\{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}) : u(L, y) = 0 \forall y \in [0, 1], |u_y| = 1 \text{ f.ü.}\}$. Sie haben

eine $\varepsilon^{2/3}L^{1/3}$ Skalierung für das Energiefunktional

$$J_{KM}^\varepsilon = \int_{\Omega} u_x^2 + \varepsilon|u_{yy}| dx dy$$

vorhergesagt.

Bei der Auswahl von minimierenden Folgen werden solche Folgenglieder bevorzugt, die aus selbstähnlichen Mikrostrukturen aufgebaut sind. Dass der Minimierer ebenfalls eine zumindest asymptotisch selbstähnliche Struktur trägt, wurde von Conti für das Kohn & Müller Modell in [15] gezeigt.

Seit den Arbeiten von Kohn & Müller [26], [27] konnten weitere Aussagen zu Energieskalierungen verschiedener Modelle mit Gebietsverzweigungen getroffen werden, siehe z.B. Kohn & Otto [28], Choksi, Kohn & Otto [14] und Choksi, Conti, Kohn & Otto [13], Conti [16] und Chan [12]. In diesen Arbeiten wurden jeweils u.a. eine $\varepsilon^{2/3}$ -Energieskalierung gezeigt. In [12] wurde die $\varepsilon^{2/3}$ -Energieskalierung für ein vektorwertiges Modell mit $SO(2)$ -Invarianz unter Anwendung des Rigiditätstheorems von Friesecke, James & Müller [22] und dessen von Conti & Schweizer [18] gezeigt.

1.2 Ergebnisse und Methoden

Für ein vektorwertiges Modell mit Skalenparameter ε , Phasenparameter α und Gebietsgrößen h und l werden in dieser Arbeit zu dem Funktional

$$\int_{\Omega} \text{dist}^2(Du, K) d\mathcal{L}^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |D^2u|$$

für

$$u \in \mathcal{M} = \{v \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2) : Dv \in BV(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2}), v(x, y) = (x, y)^T \forall (x, y) \in \partial\Omega\}$$

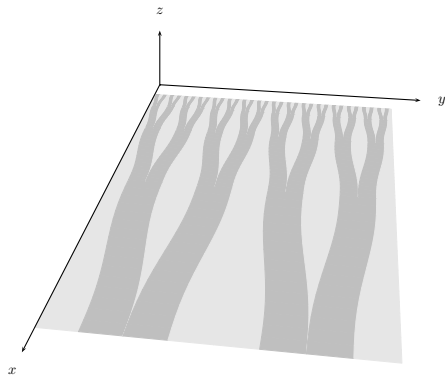
und mit $K = SO(2)A \cup SO(2)B \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ für den Fall, dass A und B zwei Rang-1 Verbindungen haben,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

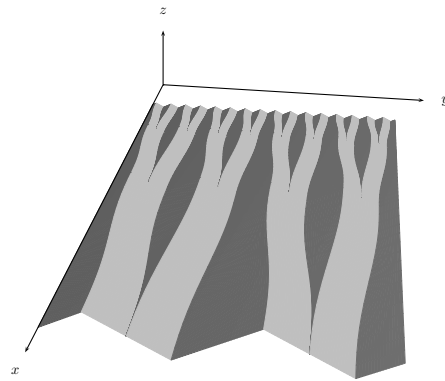
vier Infimum-Energieskalierungen für verschiedene Wertebereiche von ε und verschiedene Rechtecke Ω mit $SO(2)$ -Invarianz und Gebietsverzweigung hergeleitet. Für den Fall, dass A und B eine Rang-1 Verbindung haben,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix},$$

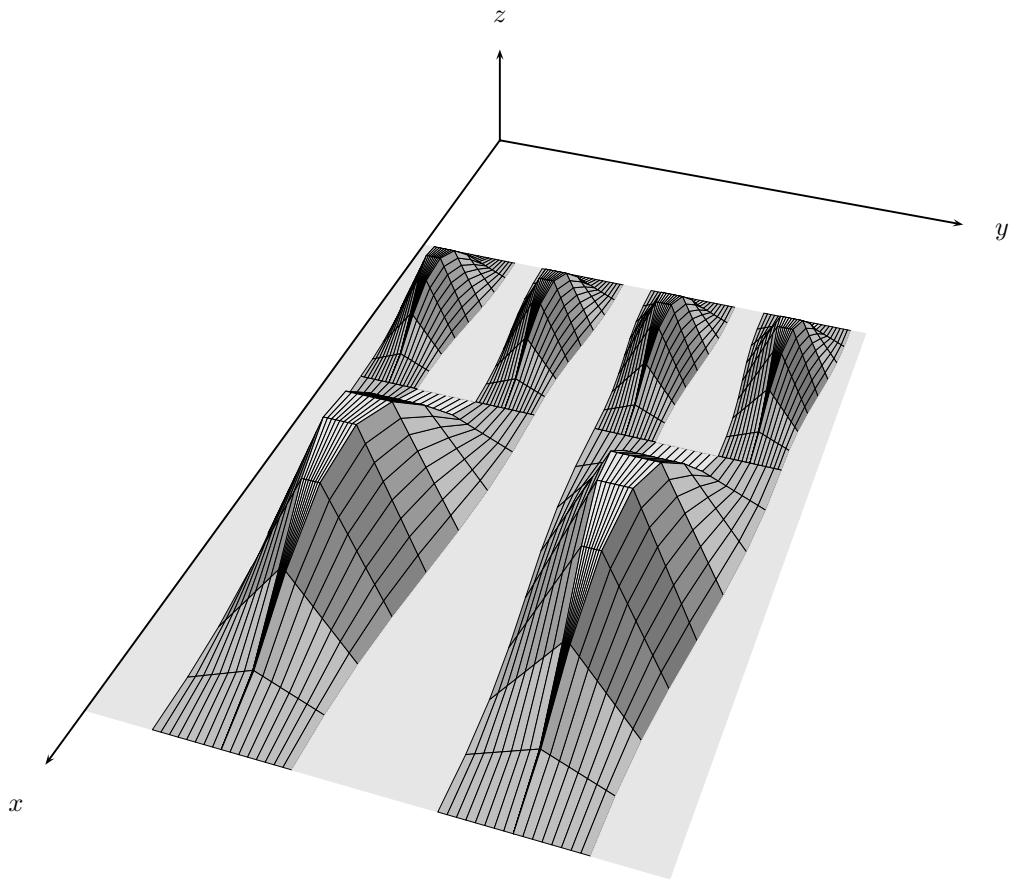
1 Einführung



(a) Gebietsverzweigung mit gekrümmten Grenzlinien zwischen zwei Phasen.



(b) Lokales $u_2(x, y) - y$.



(c) Lokales $u_1(x, y) - x$.

Abbildung 1.9: Geometrie und Testfunktion im Beweis von Theorem 2.

wird eine $\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}hl^{1/5}$ -Infimum-Energieskalierung für verschiedene Rechtecke Ω mit $\text{SO}(2)$ -Invarianz und Gebietsverzweigung gezeigt. Die Hauptergebnisse sind:

Theorem 1 (Energieskalierung bei zwei Rang-1 Verbindungen). *Seien $\Omega = (0, l) \times (0, h)$, $0 < h$, $0 < l$, $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 := \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K_1 := \text{SO}(2)A_1 \cup \text{SO}(2)B_1$$

und

$$\mathcal{E}_1 := \int_{\Omega} \text{dist}^2(Du, K_1) d\mathcal{L}^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |D^2u|.$$

Sei $\mathcal{M} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2) : Du \in BV(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2}), u(x, y) = (x, y)^T \forall (x, y) \in \partial\Omega\}$. Sei $E_1 := \inf\{\mathcal{E}_1(u) : u \in \mathcal{M}\}$. Dann gibt es Konstanten $\alpha_0, \varepsilon_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_1 < c_2$, die nicht von $\alpha, \varepsilon, h, l$ abhängen, so dass Folgendes gilt:

Fall $h \leq l$:

$$c_1\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \leq E_1 \leq c_2\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha\frac{h^3}{l^2}).$$

Fall $h > l$:

$$\begin{aligned} c_1\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3} &\leq E_1 \leq c_2\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3} && \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (\varepsilon_0\alpha^4h, \varepsilon_0\alpha\frac{l^3}{h^2}), \\ c_1\alpha^4hl &\leq E_1 \leq c_2\alpha^4hl && \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_0\alpha^4l, \varepsilon_0\alpha^4h], \\ c_1\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} &\leq E_1 \leq c_2\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} && \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha^4l). \end{aligned}$$

In [12] wurde eine schwächere Abschätzung bewiesen. Neuerungen sind die Fälle $h < l$ und $h > l$. Beweistechnisch gesehen gibt es in dem Beweis von Theorem 1 zwei große Hauptfälle. Diese sind $h \leq l$ und $h > l$. Die große Herausforderung liegt in der Anwendung der Randdaten in e_2 -Richtung.

Der Fall $h \leq l$: Um eine obere Schranke herzuleiten, genügt es, eine geeignete Funktion u zu konstruieren. Der Beweis der unteren Schranke von Theorem 1 basiert auf fünf strategischen Eckfeilern:

- Separation von ε aus der Oberflächenenergie.
- Erzeugung von vielen künstlichen Interaktionen zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie via Poincarésche Ungleichungen, um das herausseparierte ε wieder ins Spiel zu bringen.
- Umwandlung der Randdaten in L^∞ -Rigiditätsabschätzungen.
- Synergie zwischen Punkt zwei und drei.

1 Einführung

- Optimierungsschritt: Suche nach der bestmöglichen künstlichen Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie aus Punkt zwei.

Im Vergleich zu [12] ist der zweite Punkt der neue Weg. Sowohl die $\varepsilon^{2/3}$ -Skalierung der unteren Schranke, als auch die $\alpha^{4/3}$ -Skalierung der unteren Schranke können simultan hergeleitet werden. Einerseits liefern die Randdaten eine Rigiditätsabschätzung der Form

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Andererseits sind solche Abschätzungen wegen den Anwendungen von Poincaréschen Ungleichungen eher auf quadratischen Gebieten Q zu betrachten. Benötigt wird daher

$$\int_Q |u_1(x, y) - x| dydx \leq \int_Q \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds dy dx \quad \forall Q \subset \Omega. \quad (1.2)$$

Die rechte Seite kann mit der Hölderschen Ungleichung in elastische Energieanteile umgewandelt werden und induziert aus dieser Sicht eine Partitionierung der Energie E_1 . Ist Q ein kleines Quadrat der Form $Q = (q_1, q_2) + (0, \lambda h)^2$ und S ein kleiner Streifen der Form $S = (0, q_2) + ((0, l) \times (0, \lambda h))$, dann können wir (1.2) auch umschreiben zu

$$\int_Q |u_1(x, y) - x| dydx \leq \lambda h \int_S \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds dy \leq \lambda^2 h^{3/2} l^{1/2} E_1^{1/2} \quad \forall Q \subset \Omega.$$

Die nächste Aufgabe besteht nun darin, für geeignete Q dieses Ungleichungsfragment in eine vollständige Ungleichung für E_1 umzuwandeln und daraus eine optimale untere Schranke für E_1 herzuleiten.

Der Fall $h > l$: Um die untere Schranke zu zeigen, werden zum Einen die Methoden aus dem Fall $h \leq l$ verwendet, und zum Anderen die untere Schranke aus dem Fall $h < l$ mit einem Transformationstrick angewendet. Um die oberen Schranken zu zeigen, wird die obere Schranke aus dem Fall $h < l$ mit dem selben Transformationstrick angewendet.

Das zweite Resultat dieser Dissertation ist das folgende Theorem:

Theorem 2 (Energieskalierung bei einer Rang-1 Verbindung). *Seien $\Omega = (0, l) \times (0, h)$, $0 < h$, $0 < l$, $\alpha \in (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, 1)$, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$,*

$$A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \quad B_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix}, \quad K_2 := \text{SO}(2)A_2 \cup \text{SO}(2)B_2$$

und

$$\mathcal{E}_2 := \int_{\Omega} \text{dist}^2(Du, K_2) d\mathcal{L}^2 + \varepsilon \int_{\Omega} |D^2u|.$$

Sei $\mathcal{M} = \{u \in W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^2) : Du \in BV(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2}), u(x, y) = (x, y)^T \forall (x, y) \in \partial\Omega\}$. Sei $E_2 := \inf\{\mathcal{E}_2(u) : u \in \mathcal{M}\}$. Dann gibt es Konstanten $\alpha_0, \varepsilon_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $0 < c_1 < c_2$, die nicht von $\alpha, \varepsilon, h, l$ abhängen, so dass Folgendes gilt:

$$c_1 \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \leq E_2 \leq c_2 \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha^{h^5/l^4}).$$

Im Vergleich zu [12] werden für den Beweis von Theorem 2 zwei neue Methoden angewendet. Wir werden den Beweis in zwei Hauptfälle unterteilen. Der Fall $h \leq l$ wird rigoros behandelt. Der Fall $h > l$ ist eine Anwendung des Falles $h < l$.

Sowohl bei der Konstruktion der oberen Schranke als auch bei der Herleitung der unteren Schranke wird das folgende Schema immer die Leitidee sein:

$$Du = \begin{pmatrix} \partial_1 u_1 & \leftarrow & \partial_2 u_1 \\ & \nearrow & \\ \partial_1 u_2 & \leftarrow & \partial_2 u_2 \end{pmatrix}$$

In Kapitel 2 wird dieses Schema genauer erklärt und in Kapitel 3 wird der Beweis für die obere Schranke geführt. Die grobe Idee dieses Schemas ist die Folgende. Um bei der oberen Schranke die bessere $\varepsilon^{4/5}$ -Energieskalierung zu bekommen, müssen zuerst solche Terme eliminiert werden, die eine schlechtere Energieskalierung, etwa $\varepsilon^{2/3}$, verursachen würden. Das wird erreicht, indem ein u so konstruiert wird, dass die antisymmetrischen Anteile von Du sich nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Die Hauptterme für die Energie werden in den symmetrischen Anteilen von Du sein. Dort sitzt der Hauptanteil der Energie im 1-1 Eintrag von Du . Bei der Konstruktion werden zuerst $|\partial_2 u_2|$, $|\partial_1 u_2|$ und $|\partial_2 u_1|$ in dieser Reihenfolge kontrolliert klein gehalten. Terme, die in $\partial_2 u_2$ entstanden sind, werden nach $\partial_1 u_1$ transportiert und quadratisch verbessert, da auf dem Konstruktionsweg

$$\partial_2 u_2 \rightarrow \partial_1 u_2 \rightarrow \partial_2 u_1 \rightarrow \partial_1 u_1$$

zwei Integrationen und zwei Differentiationen benötigt wurden. In Abbildung 1.9 wird die Gebietsverzweigung und eine lokale Testfunktion im Beweis gezeigt.

In Kapitel 4 wird der Beweis der unteren Schranke geführt. Auch dort wird das obige Schema wegweisend sein. Bei der unteren Schranke wird ein ähnlicher Weg eingeschlagen, um Ungleichungen, die eigentlich eine untere $\varepsilon^{2/3}$ -Energieskalierung liefern würden, gegen Ungleichungen, die zu einer unteren $\varepsilon^{4/5}$ -Energieskalierung führen, auszutauschen.

1 Einführung

Dabei werden im Vergleich zu [12] hier keine Rigiditätstheoreme aus [22] und [18] zu Hilfe genommen.

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

In diesem Kapitel stellen wir die Leitideen der Beweise der oberen Schranken vor. Für martensitische Mikrostrukturen haben Kohn und Müller ein Modell gefunden, das stark genug ist, um auch die feine Geometrie von Mikrostrukturen vorherzusagen. Die Stärke des Kohn-Müller-Modells liegt darin, dass sowohl elastische Energie als auch Oberflächenenergie betrachtet werden. Auf der einen Seite gibt es eine Konkurrenz zwischen beiden Energien. Aus der Sicht der elastischen Energie werden bestimmte Strukturen bevorzugt. Jedoch können diese nicht beliebig gebildet werden, da zum Beispiel sehr feine Oszillationen zu einer starken Erhöhung der Oberflächenenergie führen. Andererseits induziert die Betrachtung von elastischer Energie und Oberflächenenergie auch eine synergetische Interaktion lokaler Strukturen, um die Gesamtenergie möglichst klein zu halten. Derartige Effekte werden auch emergente Effekte genannt. Die Suche nach emergenten Effekten ist grundlegend für das Verständnis im Globalen. Mehr zur Emergenz siehe [19]. Im Folgenden werden wir stets die zwei wichtigen Begriffe verwenden:

Definition (Elastische Energie und Oberflächenenergie). *Der Energieanteil*

$$\int \text{dist}^2(Du, K) d\mathcal{L}^2$$

wird elastische Energie genannt. Der Energieanteil

$$\int |D^2u|$$

wird Oberflächenenergie genannt.

Durch eine Reihe von Beispielen werden wir die nötigen Interaktionen in unserem Modell kennenlernen. In Abbildung 2.1 sind noch einmal die Grunddaten der globalen Konstruktion zu sehen.

Es gibt bei der Suche nach der optimalen oberen Schranke im Fall K_1 und K_2 Gemeinsamkeiten. Aus geometrischer Sicht werden in beiden Fällen Verzweigungen des Gebietes

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

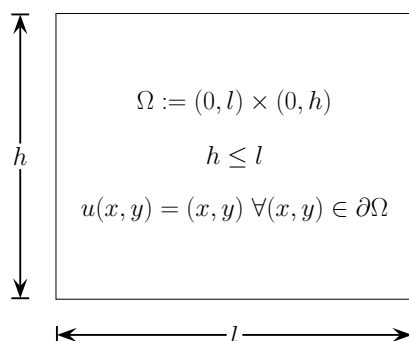


Abbildung 2.1: Grunddaten der Konstruktion. (Außerdem seien α und ε , je nach Fall, wie in Theorem 1 bzw. Theorem 2.)

bevorzugt. Aus analytischer Sicht werden in der Konstruktion Funktionen bevorzugt, die aus selbstähnlichen Funktionen bestehen. Dabei wird jeweils eine besondere Art von Selbstähnlichkeit und eine besondere Anzahl von solchen selbstähnlichen Funktionen bevorzugt. Letztendlich bedeutet die Aufgabe, die globale Energie möglichst klein zu halten, nichts anderes als nach einer optimalen Zusammensetzung der lokalen, selbstähnlichen Funktionen zu suchen.

Diese Gemeinsamkeiten führen im Fall K_1 zu einer oberen Schranke, die wie $\varepsilon^{2/3}$ skaliert. Im Fall K_2 werden wir eine andere Art von Interaktionen kennenlernen, die der Grund für die $\varepsilon^{4/5}$ -Energieskalierung im Fall K_2 ist. Im Gegensatz zum Fall K_1 , wo die Konstruktion nur auf der ersten Komponente des Vektors u stattfindet, wird im Fall K_2 eine Konstruktion auf dem vollen Vektor u benötigt.

Wird die Identität $u(x, y) = (x, y)^T$ als Kandidat für eine Konstruktion gewählt, so gibt es keine Oberflächenenergie. Daher ist die Energie \mathcal{E} bis auf eine Konstante von der Ordnung $\alpha^2 hl$. Im Folgenden werden durch Beispiele Ideen und Strategien entwickelt, um eine optimale obere Schranke herzuleiten. Das Beispiel $u(x, y) = (x, y)^T$ und deren obere Schranke werden dadurch geschlagen, dass Interaktionen zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie erzeugt werden. Zunächst müssen beide Energieanteile lokal interagieren. Das wird erreicht, indem lokal die Energie durch die Summe von beiden abgeschätzt wird. Durch Einführung geeigneter Hilfsvariablen kann später in einem Optimierungsschritt global entschieden werden, wie eine Interaktion beider Energien aussehen muss, um eine optimale globale obere Schranke zu erzeugen.

Wir werden in diesem Abschnitt Lamine auf Rechtecken betrachten. Dabei bezeichnen wir eine nichtleere Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ als ein Rechteck, falls es einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$ und zwei Zahlen $b, c \in \mathbb{R}$ mit $b, c > 0$ gibt, so dass $M = a + (0, b) \times (0, c)$. Unter einem Laminat verstehen wir in dieser Arbeit Folgendes:

Definition (Laminat). Sei $M = a + (0, b) \times (0, c) \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck. Eine stetige, stückweise affin-lineare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird Laminat genannt, falls es eine Zerlegung

von M in Rechtecke $M_k := a + (0, b) \times (\frac{c}{N}(k-1), \frac{c}{N}k)$, $k \in [1, N] \cap \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $\overline{M} = \bigcup_{k=1}^N \overline{M}_k$, $\chi_{M_k} Df \in C^1(M_k)$ für alle $k \in [1, N]$ und es zwei Matrizen $P, Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gibt, so dass $Df \chi_{M_k} \in \{P, Q\}$ für alle $k \in [1, N]$. Gibt es eine solche Zerlegung, so nennen wir die Familie $\{M_k : k \in [1, N]\}$ die zu (f, M) zugehörige laminelle Zerlegung. Ist $N = 2$, so wird f einfaches Laminat genannt.

Laminat haben im folgenden Sinne ein Oszillationsmuster.

Definition (Oszillationsmuster). Sei M ein Rechteck, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Laminat. Weiter sei $\{M_k : k \in [1, N]\}$ die zu (f, M) zugehörige laminelle Zerlegung. Die Liste

$$(Df \chi_{M_1}, \dots, Df \chi_{M_N})$$

nennen wir das Oszillationsmuster von f .

Notation. Wir werden in diesem Kapitel wichtige Demonstrationsbeispiele für die Fälle K_1 und K_2 kennenlernen. Um mit weniger Indizes auszukommen, werden wir - wenn der Kontext klar ist - auf den Fallindex $j \in \{1, 2\}$ bei K_j , A_j , B_j und \mathcal{E}_j verzichten.

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

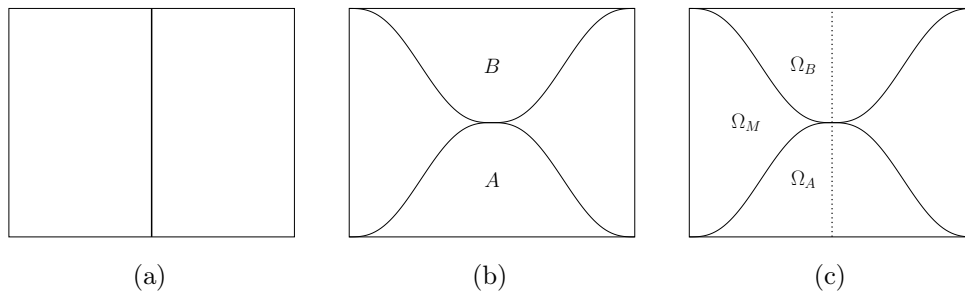


Abbildung 2.2: Beispiel 1 legt die Geometrie der späteren Konstruktion am Rand fest. In (a) wird mit einem Segment eines einfachen Laminats mit Oszillationsmuster (A, B) begonnen. In (b) und (c) wird dieses Muster auf große Teile des Gebietes, Ω_A bzw. Ω_B , fortgesetzt. Von dort werden keine Energieanteile kommen. Nur auf Ω_M werden Energiebeiträge erwartet.

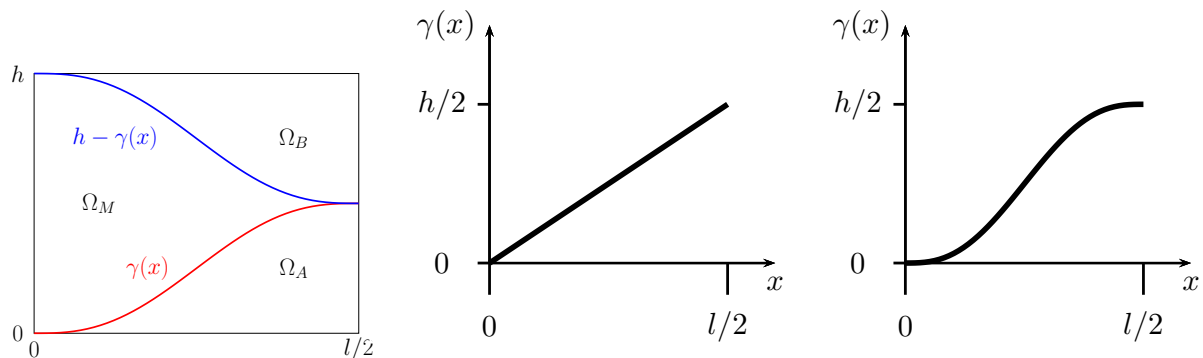


Abbildung 2.3: Zwei Möglichkeiten für die Grenzfunktion γ in Beispiel 1, die Ω_M von Ω_A trennt.

2.1 Beispiel 1: Eine Randkonstruktion

Konstruktionsplan: Die elastische Energie bevorzugt auf großen Teilrechtecken Laminaten, deren Oszillationsmuster aus Matrizen aus K bestehen. Wir beginnen mit einem einfachen Laminat. Entlang des Segments $\{l/2\} \times (0, h)$ sei u ein einfaches Laminat mit Oszillationsmuster (A, B) , d.h.,

$$\text{im Fall } K_1: \quad Du(x, y) \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \forall (x, y) \in \{l/2\} \times (0, h);$$

$$\text{im Fall } K_2: \quad Du(x, y) \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} \right\} \quad \forall (x, y) \in \{l/2\} \times (0, h).$$

2.1 Beispiel 1: Eine Randkonstruktion

Außerdem benötigen wir noch $u(l/2, 0) = (l/2, 0)^T$ und $u(l/2, h) = (l/2, h)^T$. Am linken und rechten Rand von Ω sind $u(0, y) = (0, y)^T \forall y \in [0, h]$ und $u(l, y) = (l, y)^T \forall y \in [0, h]$ vorgegeben. Eine mögliche Konstruktion könnte wie in Abbildung 2.2 angedeutet aussehen: Es gibt ein Gebiet, wo $Du \equiv A$ und ein anderes Gebiet, wo $Du \equiv B$ ist. Auf dem restlichen Gebiet wird zum Beispiel interpoliert. Um die Energie \mathcal{E} zu bestimmen, reicht es, wenn die Konstruktion auf $(0, l/2) \times (0, h)$ bekannt ist. Dort würde eine einfache Konstruktion wie folgt aussehen: Sei $\gamma \in C^\infty([0, l/2], [0, h/2])$ mit $\gamma(0) = 0$, $\gamma(l/2) = h/2$ und monoton steigend, siehe Abbildung 2.3. Seien

$$\begin{aligned}\Omega_A &:= \{(x, y) \in \Omega : x \in (0, l/2), 0 < y < \gamma(x)\}, \\ \Omega_M &:= \{(x, y) \in \Omega : x \in (0, l/2), \gamma(x) < y < h - \gamma(x)\}, \\ \Omega_B &:= \{(x, y) \in \Omega : x \in (0, l/2), h - \gamma(x) < y < h\}.\end{aligned}$$

Eine Funktion, die im Fall K_1 die Randbedingungen erfüllt, ist:

$$u(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_A, \\ \begin{pmatrix} x + \alpha \gamma(x) \\ y \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_M, \\ \begin{pmatrix} x - \alpha y + \alpha h \\ y \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_B.\end{cases}$$

Im Fall K_2 nehmen wir:

$$u(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y + \alpha y \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_A, \\ \begin{pmatrix} x \\ y + \alpha \gamma(x) \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_M, \\ \begin{pmatrix} x \\ y - \alpha y + \alpha h \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_B.\end{cases}$$

Energetische Untersuchung: Um die Energie \mathcal{E} zu berechnen, benötigen wir die Ab-

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

leitungen. Im Fall K_1 :

$$Du(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_A, \\ \begin{pmatrix} 1 + \alpha\gamma'(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_M, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_B. \end{cases}$$

Im Fall K_2 :

$$Du(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_A, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha\gamma'(x) & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_M, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix} & (x, y) \in \Omega_B. \end{cases}$$

In beiden Fällen würde \mathcal{E} bis auf Konstanten von der Ordnung $\varepsilon\alpha l + \alpha^2 hl$ sein. Wegen $\varepsilon \lesssim \alpha l$ ist \mathcal{E} wieder nur von Ordnung $\alpha^2 hl$.

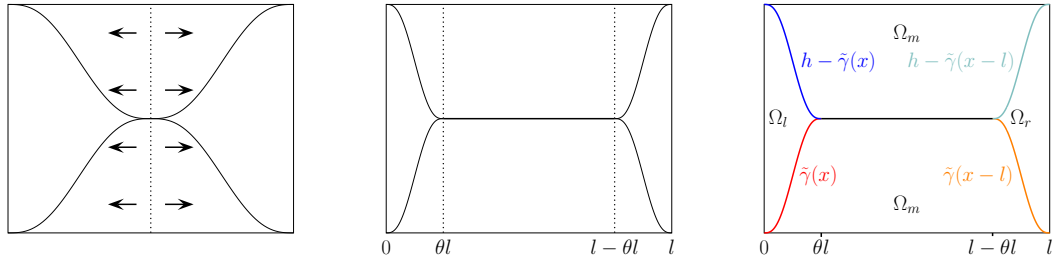
Fazit: Zwar haben wir eine bessere Konstruktion als $u(x, y) = (x, y)^T$ gefunden, weil ein ε -Term hinzugekommen ist, doch er spielt in der Gesamtenergie keine Rolle. Der Grund dafür ist, dass in diesem Beispiel keine Interaktionen zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie stattgefunden hat. Diese Konstruktion werden wir dennoch später als Randkonstruktion wieder verwenden.

2.2 Beispiel 2: Füllen mit Laminaten

Konstruktionsplan: Wie in Abbildung 2.4 angedeutet nehmen wir die Konstruktion aus Beispiel 1, scheiden sie entlang $\{l/2\} \times (0, h)$ auf und füllen die Lücke nach einer Skalierung der Teilstücke in e_1 -Richtung mit einem einfachen Laminat auf. Genauer: Diesmal würden wir Ω zerlegen zu $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_l} \cup \overline{\Omega_m} \cup \overline{\Omega_r}$, wobei

$$\begin{aligned} \Omega_l &:= \{x \in (0, \theta l), \tilde{\gamma}(x) < y < h - \tilde{\gamma}(x)\}, \\ \Omega_r &:= \{x \in ((1 - \theta)l, l), \tilde{\gamma}(x - l) < y < h - \tilde{\gamma}(x - l)\}, \\ \Omega_m &:= \Omega \setminus (\Omega_l \cup \Omega_r); \end{aligned}$$

2.2 Beispiel 2: Füllen mit Laminaten



(a) Alte Konstruktion wird aufgeschnitten. Beide Teile werden in e_1 -Richtung skaliert, so dass in der Mitte eine Lücke entsteht.

(b) Die Lücke wird mit einem einfachen Laminat gefüllt.

(c) Die Geometrie des Gebietes in Beispiel 2.

Abbildung 2.4: Beispiel 2 führt einen Hilfsparameter θ ein. Lokal gesehen ist dieses θ optimal, falls θl im Wesentlichen genau so groß ist wie $h/2$.

dabei $\theta \in (0, 1/2)$ und $\tilde{\gamma} : [0, \theta l] \rightarrow [0, h/2]$ mit $\tilde{\gamma}(x) := \gamma(x/(2\theta))$ und γ wie in Beispiel 1. Auf Ω_l bzw. Ω_r wenden wir Beispiel 1 an. Auf Ω_m wird u ein einfaches Laminat sein.

Energetische Untersuchung: Aus der Sicht von \mathcal{E} hat sich bis auf Konstanten nichts geändert, d.h., es gibt eine Konstante $c_j > 0$, so dass $\mathcal{E}(u, \Omega, K_j) \leq c_j \alpha^2 h l$ für $j \in \{1, 2\}$.

Fazit: Der Hilfsparameter würde nur einen Einfluss auf die Konstanten c_j nehmen. Wir werden aber noch auf diesen Hilfsparameter zurückkommen.

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

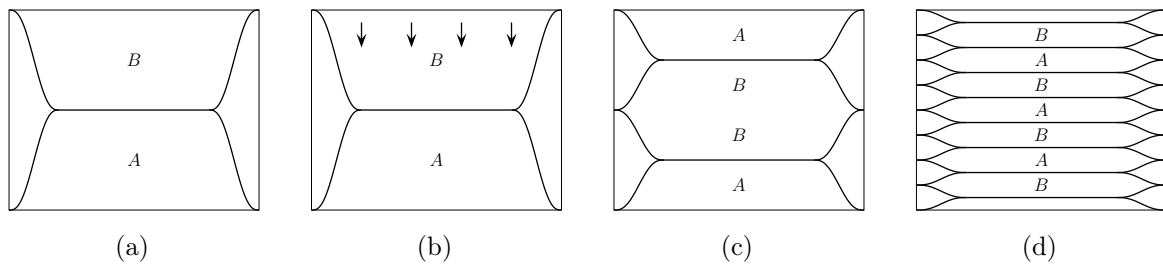


Abbildung 2.5: Beispiel 3 führt einen weiteren Hilfsparameter N ein. Erst die Einführung beider Hilfsparameter erzeugt eine Konkurrenz zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie. Diese wird aber über einen Optimierungsprozess in eine Synergie umgewandelt. In (a) wird die Konstruktion aus Beispiel 2 genommen. In (b) wird diesmal in e_2 -Richtung eine Lücke erzeugt. In (c) wird die Lücke mit einer skalierten, gespiegelten Version von (a) gefüllt. In (d) wird diese Prozedur insgesamt N -fach wiederholt.

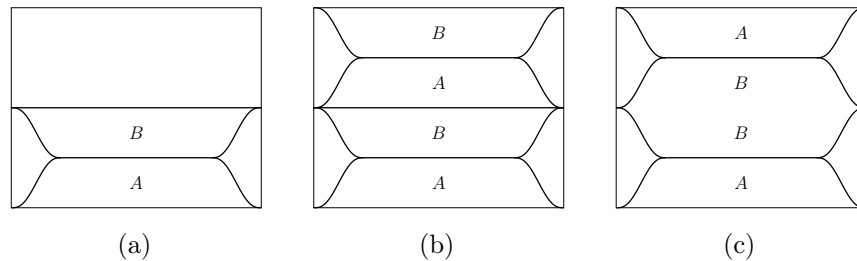


Abbildung 2.6: Energiefreie Verklebung. Es gibt in (a) zwei einfache Möglichkeiten die Lücke zu füllen. Die Variante in (b) ist ungünstig, da in der Mitte ein zusätzliches $\alpha \varepsilon l$ an Oberflächenenergie in der Gesamtenergie berücksichtigt werden müsste. Die Variante in (c) ist dagegen energetisch günstiger.

2.3 Beispiel 3: Periodisch oszillierende Strukturen - zwei-parametrig Optimierung

Konstruktionsplan: Wie in Abbildung 2.5 angedeutet, nehmen wir die Konstruktion aus Beispiel 2. Diesmal skalieren wir die alte Konstruktion in e_2 -Richtung herunter, kopieren sie und füllen die Lücke mit einer in e_2 -Richtung gespiegelten Kopie auf. Auf $(\theta l, (1 - \theta)l) \times (0, h)$ ist u diesmal ein Laminat mit Oszillationsmuster (A, B, B, A) . Das Oszillationsmuster (A, B, A, B) ist ungünstig, da wir zusätzlich Oberflächenenergie aufwenden müssten, vgl. Abbildung 2.6. Wir betrachten nun die Situation, wo u auf $(\theta l, (1 - \theta)l) \times (0, h)$ ein Laminat ist, dessen Oszillationsmuster aus N (A, B) Blöcken und N (B, A) Blöcken besteht. Da wir für die Verklebungen keine zusätzlichen Ober-

2.3 Beispiel 3: Periodisch oszillierende Strukturen - zwei-parametrische Optimierung

flächenenergien verursachen wollen, betrachten wir das Oszillationsmuster, das aus N (A, B, B, A) Blöcken besteht. Wir zerlegen wieder Ω zu $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_l \cup \bar{\Omega}_r \cup \bar{\Omega}_m$, wobei

$$\begin{aligned}\Omega_l &:= \bigcup_{k=0}^{4N-1} \left\{ x \in (0, \theta l), \frac{kh}{4N} + \frac{1}{N} \tilde{\gamma}(x) < y < \frac{(k+1)h}{4N} + \frac{1}{N} (h - \tilde{\gamma}(x)) \right\}, \\ \Omega_r &:= \bigcup_{k=0}^{4N-1} \left\{ x \in (0, \theta l), \frac{kh}{4N} + \frac{1}{N} \tilde{\gamma}(x-l) < y < \frac{(k+1)h}{4N} + \frac{1}{N} (h - \tilde{\gamma}(x-l)) \right\}, \\ \Omega_m &:= \Omega \setminus (\Omega_l \cup \Omega_r); \end{aligned}$$

dabei sind $\theta \in (0, 1/2)$ und $\tilde{\gamma}(x) := \gamma(x/(2\theta))$, wobei γ wie in Beispiel 1 genommen wird.

Energetische Untersuchung: Auf Ω_m haben wir nur ein Laminat. Dort ist

$$\mathcal{E}(u, \Omega_m, K_j) = N \cdot \varepsilon \alpha l (1 - 2\theta), \quad j \in \{1, 2\},$$

da nur Oberflächenenergie vorhanden ist. Dabei ist N die Anzahl der (A, B, B, A) -Blöcke. Auf Ω_l und Ω_r wenden wir die Randkonstruktion aus Beispiel 1 an. Dort ist die elastische Energie von der Ordnung

$$\int_{\Omega_l \cup \Omega_r} \text{dist}^2(Du(x, y), K_j) \, dx dy \lesssim N \cdot \alpha^2 \frac{h}{N} \theta l, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Die Oberflächenenergie setzt sich aus zwei Komponenten zusammen zu

$$\varepsilon \int_{\Omega_l \cup \Omega_r} |D^2 u| \lesssim N \cdot \varepsilon \alpha \sqrt{\theta^2 l^2 + \frac{h^2}{N^2}} + N \cdot \frac{\varepsilon \alpha h^2}{N^2 \theta^2 l^2} \theta l, \quad j \in \{1, 2\},$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite der Energiebeitrag ist, der von den Sprüngen im Gradienten kommt; der zweite Term ist der Beitrag, der von dem absolut stetigen Anteil der Oberflächenenergie kommt. Diesmal erhalten wir

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_j) \lesssim N \left(\varepsilon \alpha l (1 - 2\theta) + \varepsilon \alpha \sqrt{\theta^2 l^2 + \frac{h^2}{N^2}} + \frac{\varepsilon \alpha h^2}{N^2 \theta^2 l^2} \theta l + \alpha^2 \frac{h}{N} \theta l \right), \quad j \in \{1, 2\}.$$

In dieser Rechnung sind wir allgemein davon ausgegangen, dass γ'' , die Krümmung der Grenzkurve aus Beispiel 1, nicht überall verschwindet, sonst könnten wir den dritten ε -Term streichen. Auf die genaue Geometrie von γ werden wir erst in Kapitel 3 eingehen. Im Moment ist es nur wichtig zu wissen, dass erste und zweite Ableitungen von γ bei der Berechnung der Gesamtenergie berücksichtigt werden müssen.

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

Die Aufgabe von θ : Für die drei ε -Terme ist θ optimal, falls

$$\theta l \sim \frac{h}{N}$$

gewählt wurde. Dann lässt sich die Abschätzung vereinfachen zu:

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_j) \lesssim N \left(\varepsilon \alpha l + \frac{\alpha^2 h^2}{N^2} \right) + \varepsilon \alpha h, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Die Aufgabe von N : Für die N -Terme ist es optimal, falls

$$N \sim \frac{\alpha^{1/2} h}{\varepsilon^{1/2} l^{1/2}}$$

gewählt wurde. Dann ist

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_j) \lesssim \alpha^{3/2} \varepsilon^{1/2} h l^{1/2} + \varepsilon \alpha h, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Insgesamt: Wegen $\varepsilon \lesssim \alpha l$ liefert Beispiel 3:

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_j) \lesssim \alpha^{3/2} \varepsilon^{1/2} h l^{1/2}, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Fazit: Dieses Beispiel hat gezeigt, dass periodisch oszillierende Strukturen eine Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie erzeugen. Die nächste Frage ist nun: Gibt es andere Arten von Strukturen, die eine bessere Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie so induzieren, dass die derzeitige obere Schranke von $\alpha^{3/2} \varepsilon^{1/2} h l^{1/2}$ geschlagen werden kann? Diese Frage wird im nächsten Beispiel positiv beantwortet.

In diesem Beispiel hat der Parameter θ nur die Aufgabe gehabt, die ε -Terme zu koordinieren und die interne Konkurrenz bei den Oberflächenenergieanteilen zu kontrollieren. Die Koordination zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie hat der Parameter N übernommen. Der Parameter θ wird sich im nächsten Beispiel auch bei der Koordination zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie beteiligen.

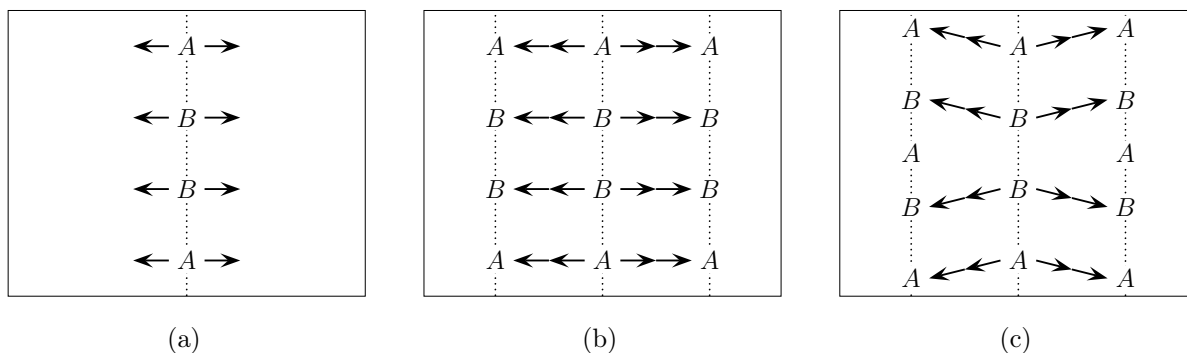


Abbildung 2.7: In Beispiel 4 wird das Oszillationsmuster verfeinert, je mehr u sich dem Rand nähert. In (a) beginnen wir in der Mitte mit einem Laminat mit Oszillationsmuster (A, B, B, A) . In (b) wollen wir in der Nähe des linken bzw. rechten Randes nicht mehr mit einem Laminat mit Oszillationsmuster (A, B, B, A) beginnen, sondern wie in (c) das Oszillationsmuster von (A, B, B, A) zu (A, B, B, A, A, B, B, A) verfeinern.

2.4 Beispiel 4: Gebietsverzweigung - drei-parametrische Optimierung

Konstruktionsplan: Wie in Abbildung 2.7 angedeutet gehen wir nun wie folgt vor. Zuerst geben wir uns auf $\{l/2\} \times (0, h)$ das Oszillationsmuster (A, B, B, A) vor. Auf $\{\theta l\} \times (0, h)$ und $\{(1-\theta)l\} \times (0, h)$ legen wir ein Oszillationsmuster (A, B, B, A, A, B, B, A) fest. Diesen Prozess können wir immer weiter verfeinern, je näher wir uns zum linken bzw. rechten Rand hin bewegen. Das wird uns zu der in Abbildung 2.8 angedeuteten lokalen und globalen Geometrie führen. Auf speziellen Segmenten $\{x_0\} \times (0, h) \subset \Omega$ gibt es eine Zahl $N = N(x_0) \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$u_j(x_0, y) = y(j-1) + \sum_{k=0}^{N-1} f_{h/N}(y - kh/N), \quad j \in \{1, 2\}, \quad (2.1)$$

erfüllt ist, wobei

$$f_{h_0}(y) := \alpha y \chi_{[0, h_0/4]}(y) + \left(-\alpha y + \frac{\alpha h_0}{2} \right) \chi_{[h_0/4, 3h_0/4]}(y) + (\alpha y - \alpha h_0) \chi_{[3h_0/4, h_0]}.$$

Wie u_2 im Fall K_2 aussehen könnte ist in Abbildung 2.9 zu sehen. Man kann die in Abbildung 2.9 dargestellten Situationen auch als Transportproblem verstehen und sich die Evolution von $u_2(x_0, \cdot)$ anschauen. Zum Beispiel kann es sein, dass u_2 zu einem Zeitpunkt

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

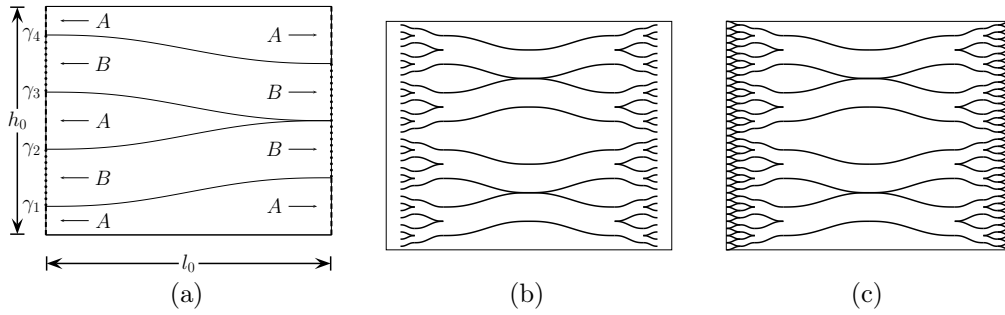


Abbildung 2.8: Das Verfahren in Abbildung 2.7 führt zu einer lokalen Geometrie des Gebietes wie in (a) angedeutet. Die globale Geometrie des Gebietes könnte wie in (b) aussehen. Je mehr sich das Gebiet verzweigt, desto mehr Oberflächenenergie ist notwendig. Daher ist es energetisch günstiger, wie in (c) angedeutet, die Konstruktion im Inneren mit einer sich nicht mehr verzweigenden Randkonstruktion abzuschließen.

$x = x_0$, $0 < x_0 \ll l$, wie

$$y \mapsto y + \sum_{k=0}^{2N-1} f_{h/2N}(y - kh/2N)$$

und zu einem späteren Zeitpunkt $x = x_0 + t$, $x_0 < x_0 + t \ll l$ wie

$$y \mapsto y + \sum_{k=0}^{N-1} f_{h/N}(y - kh/N)$$

um $y \mapsto y$ oszilliert, also nach einer Zeit t seine Oszillationsperiode halbiert hat. Wie in Abbildung 2.8 angedeutet führt dieser Prozess zu einer Diskretisierung und Verzweigung des Gebietes. Moralisch gesehen wäre ohne Oberflächenenergie

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0} N(x_0) = \lim_{x_0 \rightarrow l} N(x_0) = \infty. \quad (2.2)$$

Da das aber von der Oberflächenenergie verhindert wird, setzt sich die globale Konstruktion aus vier Teilen zusammen. Dazu zerlegen wir Ω in vier Teilgebiete zu

$$\overline{\Omega} = \overline{\Omega_{l,l}} \cup \overline{\Omega_{l,r}} \cup \overline{\Omega_{r,l}} \cup \overline{\Omega_{r,r}},$$

wobei

$$\begin{aligned} \Omega_{l,l} &= (0, x_\tau) \times (0, h), & \Omega_{l,r} &= (x_\tau, l/2) \times (0, h), \\ \Omega_{r,l} &= (l/2, l - x_\tau) \times (0, h), & \Omega_{r,r} &= (l - x_\tau, l) \times (0, h) \end{aligned}$$

2.4 Beispiel 4: Gebietsverzweigung - drei-parametrische Optimierung

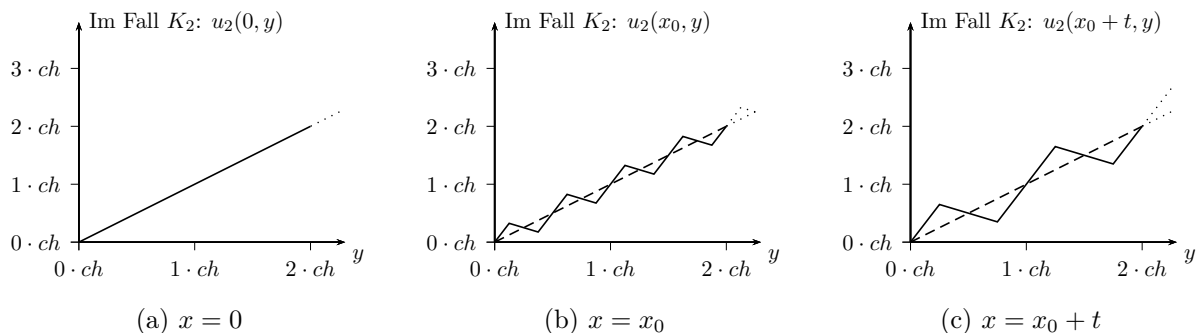


Abbildung 2.9: Evolution bei $u_2(x, y)$ in e_1 -Richtung im Fall K_2 : Oszillation um die identische Abbildung $y \mapsto y$. Bei $x = 0$ trifft u_2 auf seine Randwerte (a). Geht man etwas weiter nach innen, d.h., wenn $x > 0$ mit $x \ll l/2$, dann gibt es ein $x_0 \ll l/2$, so dass $u_2(x_0, y)$ affin-linear um $(x_0, y) \mapsto y$ oszilliert (b). Geht man noch etwas weiter nach innen, dann gibt es ein kleines $t > 0$, so dass die Oszillationsperiode um $y \mapsto y$ sich nun halbiert hat (c).

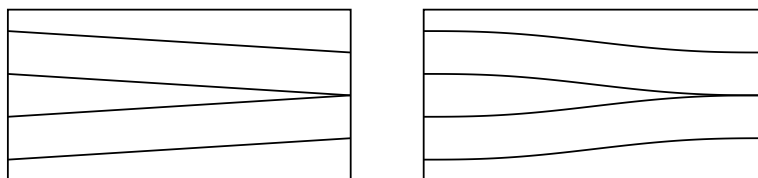


Abbildung 2.10: Varianten einer Verzweigung eines Gebietes.

sein werden und x_τ noch so zu bestimmen ist, dass die Streifen $(x_0, x_0 + t) \times (0, h)$ in $\Omega_{l,r}$ oder in $\Omega_{r,l}$ liegen. Auf $\Omega_{l,r}$ und $\Omega_{r,r}$ wird jeweils eine geeignete Diskretisierung nötig sein und auf dem Restgebiet $\Omega_{l,l}$ und $\Omega_{r,l}$ wenden wir im Wesentlichen Beispiel 1 an.

Diskretisierung: Wir betrachten nun den Streifen $[x_0, x_0 + t] \times [0, h]$, wo die Situationen aus Abbildung 2.9b und Abbildung 2.9c zutreffen. Die in Abbildung 2.9b und 2.9c dargestellten Situationen führen dazu, dass z.B. der Streifen $[x_0, x_0 + t] \times [0, h]$, auf dem im Fall K_1 die Komponente u_1 und im Fall K_2 die Komponente u_2 des Vektors u konstruiert werden soll, sich verzweigt. In Abbildung 2.10 sind zwei Möglichkeiten einer Verzweigung eines Gebietes $[x_0, x_0 + t] \times [0, h/N]$ dargestellt. Der gesamte Streifen $[x_0, x_0 + t] \times [0, h]$ besteht also aus N vertikal verklebten Kopien des gezeigten Teilgebietes $[x_0, x_0 + t] \times [0, h/N]$, welches daher als Referenzgebiet für den Streifen $[x_0, x_0 + t] \times [0, h]$ anzusehen ist.

Wir wollen jetzt viele solche Streifen $[x_0, x_0 + t] \times [0, h]$ verkleben. Das erfordert eine Diskretisierung der Gebiete $\Omega_{l,r}$ und $\Omega_{r,l}$. Kennen wir die Konstruktion auf $\Omega_{l,r}$, dann kennen wir im Grunde genommen auch die Konstruktion auf $\Omega_{r,l}$. Wie dieser Schritt aussieht wird in Abbildung 2.11 angedeutet.

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

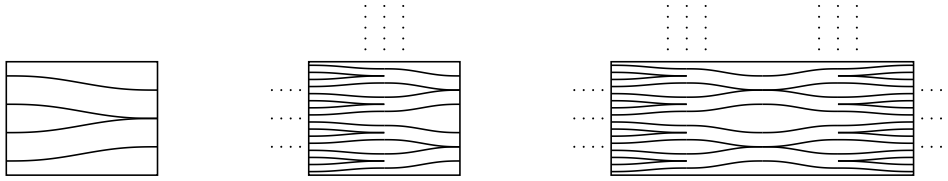


Abbildung 2.11: Zuerst wird eine Richtung zum Rand hin ausgewählt und ein passendes Referenzgebiet bestimmt (links). Danach wird die Konstruktion horizontal und vertikal ergänzt (Mitte). Anschließend wird die Konstruktion zum anderen Rand hin ergänzt.

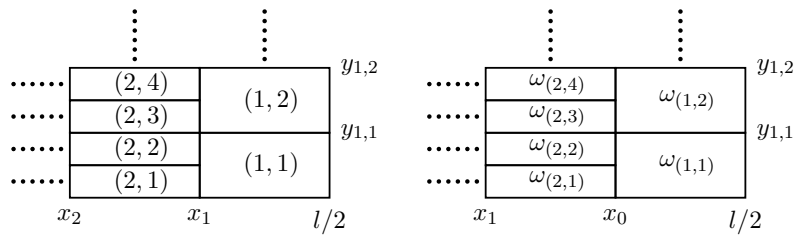


Abbildung 2.12: Zuordnung in der Diskretisierung. Jedem Paar (i, j) wird ein Rechteck $\omega_{i,j}$ zugeordnet.

Wir werden jetzt nur noch $\Omega_{l,r}$ behandeln. Wir wissen, dass $\Omega_{l,r}$ aus Rechtecken $\omega_{i,j}$ bestehen wird, also die Struktur $\overline{\Omega_{l,r}} = \bigcup_{i,j} \overline{\omega_{i,j}}$ haben wird. Ein genauerer Zugriff auf die Rechtecke $\omega_{i,j}$ erfordert eine Diskretisierung des Gebietes $\Omega_{l,r}$. Wir diskretisieren $\Omega_{l,r}$ durch folgende Vorschrift: Seien $i \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}$ Diskretisierungsparameter. Einem Paar (i, j) ordnen wir ein Rechteck $\omega_{i,j}$ zu, wobei i die Generation der Verzweigung und j die j -te Kopie des Rechtecks angibt. In Abbildung 2.12 ist die Diskretisierung anschaulich dargestellt. Sei $\theta \in (0, 1)$ die Längenverkleinerung und $N \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Kopien am Anfang. Jedem Rechteck $\omega_{i,j}$ wird noch seine Länge l_i und Höhe h_i übermittelt. Damit können wir nun die Diskretisierung formalisieren. Wir betrachten die Diskretisierung als eine Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit $(i, j) \mapsto (l_i, h_i, x_i, y_{i,j})$. Dabei gibt $(x_i, y_{i,j})$ die Position der linken unteren Ecke eines Rechtecks der Länge l_i und Höhe h_i an. Dabei könnte für $i \in [1, \tau] \cap \mathbb{N}$ und $j \in [1, 2^i N]$ sein:

$$l_i := \theta^{i-1} \frac{l}{2} (1 - \theta), \quad h_i := \frac{h}{2^{i-1} N}, \quad x_0 := \frac{l}{2}, \quad x_i := \frac{l}{2} \theta^i, \quad y_{i,0} := 0, \quad y_{i,j} := j \frac{h}{2^{i-1} N}.$$

Einerseits kann der Diskretisierungsparameter i nur bis zu einem Abbruchindex τ laufen. Andererseits wird die Randkonstruktion ein bestimmtes Verhältnis zwischen Abbruchstelle x_τ und Abbruchhöhe h_τ bevorzugen. Eine drei-parametrische Optimierung wird dieses Problem lösen.

2.4 Beispiel 4: Gebietsverzweigung - drei-parametrische Optimierung

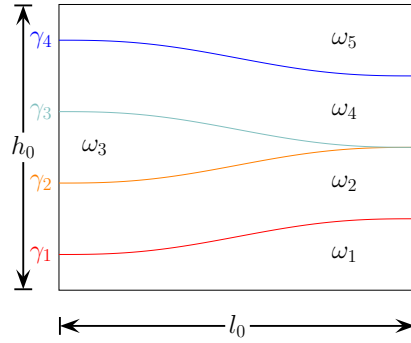


Abbildung 2.13: Die Geometrie auf dem Referenzgebiet.

Konstruktion auf dem Referenzgebiet: Falls $\omega := (0, l_0) \times (0, h_0)$ das Referenzgebiet ist, dann wird ω via

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \{(x, y) \in \omega : 0 \leq y \leq \gamma_1(x)\}, & \omega_2 &:= \{(x, y) \in \omega : \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x)\}, \\ \omega_3 &:= \{(x, y) \in \omega : \gamma_2(x) \leq y \leq \gamma_3(x)\}, & \omega_4 &:= \{(x, y) \in \omega : \gamma_3(x) \leq y \leq \gamma_4(x)\}, \\ \omega_5 &:= \{(x, y) \in \omega : \gamma_4(x) \leq y \leq h_0\} \end{aligned}$$

zerlegt, wobei $\gamma \in C^\infty([0, l_0], [0, h_0/8])$ monoton steigend mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(l_0) = h_0/8$, und

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &:= \frac{h_0}{8} + \gamma(x), & \gamma_2(x) &:= \frac{3h_0}{8} + \gamma(x), \\ \gamma_3(x) &:= \frac{5h_0}{8} - \gamma(x), & \gamma_4(x) &:= \frac{7h_0}{8} - \gamma(x). \end{aligned}$$

In Abbildung 2.13 wird die Zerlegung von ω gezeigt. Im Fall K_1 sieht u dann zum Beispiel so aus:

$$u(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x + \alpha y \\ y \end{pmatrix} & \omega_1, \\ \begin{pmatrix} x - \alpha y + 2\alpha \left(\frac{h_0}{8} + \gamma(x)\right) \\ y \end{pmatrix} & \omega_2, \\ \begin{pmatrix} x + \alpha y - \frac{\alpha h_0}{2} \\ y \end{pmatrix} & \omega_3, \\ \begin{pmatrix} x - \alpha y + \alpha h_0 \frac{6}{8} - 2\alpha \gamma(x) \\ y \end{pmatrix} & \omega_4, \\ \begin{pmatrix} x + \alpha y - \alpha h_0 \\ y \end{pmatrix} & \omega_5. \end{cases}$$

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

Im Fall K_2 könnte u so aussehen:

$$u(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ (1 + \alpha)y \end{pmatrix} & \omega_1, \\ \begin{pmatrix} x \\ (1 - \alpha)y + 2\alpha \left(\frac{h_0}{8} + \gamma(x)\right) \end{pmatrix} & \omega_2, \\ \begin{pmatrix} x \\ (1 + \alpha)y - \frac{\alpha h_0}{2} \end{pmatrix} & \omega_3, \\ \begin{pmatrix} x \\ (1 - \alpha)y + \alpha h_0 \frac{6}{8} - 2\alpha\gamma(x) \end{pmatrix} & \omega_4, \\ \begin{pmatrix} x \\ (1 + \alpha)y - \alpha h_0 \end{pmatrix} & \omega_5. \end{cases} \quad (2.3)$$

Wir werden noch sehen, dass die Konstruktion im Fall K_2 komplexer ist.

Energetische Untersuchung: Um die Energie \mathcal{E} zu bestimmen, reicht es, die Energie auf einem Referenzgebiet zu kennen. Im Fall K_1 benötigen wir

$$Du(x, y) = \begin{cases} B & \omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha\gamma'(x) & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \omega_2, \\ B & \omega_3, \\ \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha\gamma'(x) & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \omega_4, \\ B & \omega_5. \end{cases}$$

Im Fall K_2 hätten wir:

$$Du(x, y) = \begin{cases} B & \omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\alpha\gamma'(x) & 1 - \alpha \end{pmatrix} & \omega_2, \\ B & \omega_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\alpha\gamma'(x) & 1 - \alpha \end{pmatrix} & \omega_4, \\ B & \omega_5. \end{cases}$$

Wurde γ sogar zusätzlich so gewählt, dass $\gamma'(0) = \gamma'(l_0) = 0$, dann gibt es zwischen

2.4 Beispiel 4: Gebietsverzweigung - drei-parametrische Optimierung

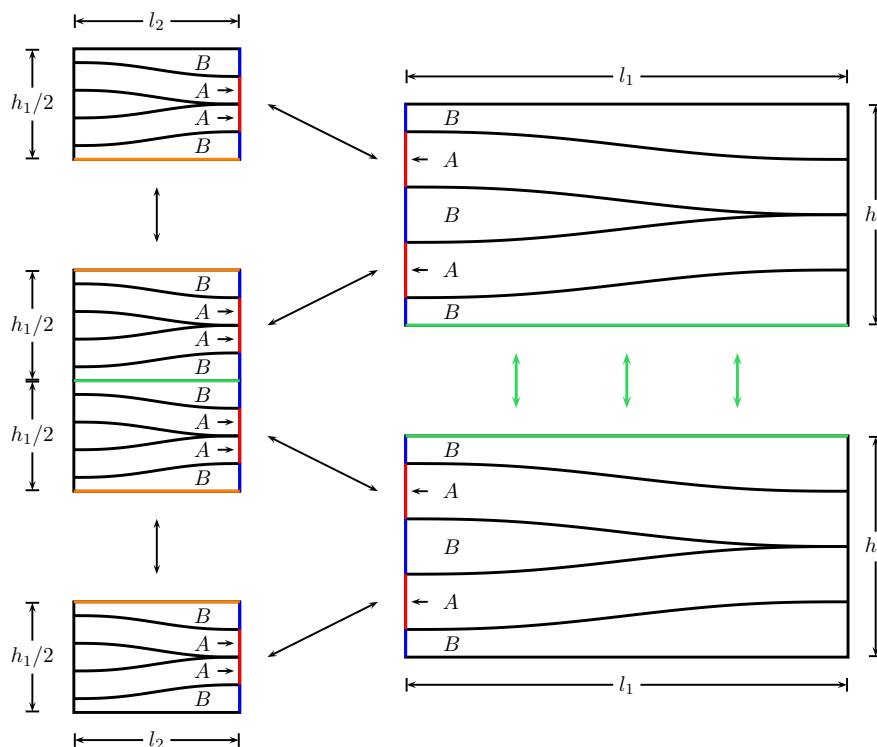


Abbildung 2.14: Nach einer speziellen Wahl der Grenzfunktionen können verschiedene Generationen energiefrei verklebt werden. An den roten Stellen entsteht so bei jeder Verklebung keine Oberflächenenergie. Wird das Oszillationsmuster von u auf $[x_0, x_1] \times [y_{1,0}, y_{1,1}]$ auf alle anderen $[x_0, x_1] \times [y_{0,j}, y_{0,j+1}]$, $j \in [1, N-1]$, periodisch fortgesetzt, dann können auch die grünen Stellen energiefrei verklebt werden.

den Diskretisierungsgenerationen keine Oberflächenenergie, siehe Abbildung 2.14. Um die folgende Rechnung übersichtlich und einfach zu halten, nehmen wir diese Wahl von γ an. Diesmal erhalten wir

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_k) \lesssim \sum_{j=1}^{\tau} 2^{j-1} N \left(\varepsilon \alpha l_j + \varepsilon \alpha h_j l_j \frac{h_j}{l_j^2} + \alpha^2 h_j l_j \frac{h_j^2}{l_j^2} \right) + 2^{\tau-1} N \left(\varepsilon \alpha \sqrt{x_\tau^2 + h_\tau^2} + \alpha^2 h_\tau x_\tau \right), \quad k \in \{1, 2\}.$$

Wir wollen nun die verschiedenen Interaktionen der Terme verstehen. Von der Randkonstruktion sehen wir, dass die Abbruchstelle x_τ optimal ist, falls $x_\tau \sim h_\tau$. Das würde

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

via

$$x_\tau = \frac{l}{2} \theta^\tau = \frac{h}{2^{\tau-1} N} = h_\tau$$

zu dem Abbruchkriterium

$$(2\theta)^\tau = \frac{4h}{lN}$$

führen. Von den Energiebeiträgen aus der Diskretisierung sehen wir, dass $h_i \leq l_i$ für alle $i \in [1, \tau]$ eine optimierende Bedingung ist, da wir dann $h_i/l_i \leq 1$ für solche i 's ausnutzen können. Wir würden zunächst erhalten:

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_k) \lesssim \sum_{j=1}^{\tau} 2^{j-1} N \left(\varepsilon \alpha l_j + \alpha^2 \frac{h_j^3}{l_j} \right) + \alpha \varepsilon h + \frac{\alpha^2 h^2}{2^{\tau-1} N}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Wir mussten also vorher schon N , θ und τ , so gewählt haben, dass $h_i \leq l_i$ für alle $i \in [1, \tau]$.

Die Aufgabe von θ : Dazu betrachten wir

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_k) \lesssim \sum_{j=1}^{\tau} 2^{j-1} N \left(\varepsilon \alpha l \theta^j + \alpha^2 \frac{h^3}{2^{3j-3} l \theta^j} \right) + \alpha \varepsilon h + \frac{\alpha^2 h^2}{2^{\tau-1} N}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Da die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \left((2\theta)^j + \frac{1}{(4\theta)^j} \right)$ nur für $\theta \in (1/4, 1/2)$ konvergiert, wird das optimale θ_0 im Intervall $(1/4, 1/2)$ sein.

Die Aufgabe von N : Ähnlich zu Beispiel 3 liefert diesmal eine Optimierung nach N , dass aus Sicht der Energiebeiträge aus der Diskretisierung $N \sim \frac{\alpha^{1/3} h}{\varepsilon^{1/3} l^{2/3}}$ optimal ist. Wegen $N \geq 1$ benötigen wir $\varepsilon \leq \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2$, wobei $\varepsilon_0 > 0$ eine Konstante ist, die nicht von α , ε , h und l abhängt. Dann bleiben noch übrig:

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_k) \lesssim \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} + \varepsilon \alpha h + \frac{\alpha^{5/3} \varepsilon^{1/3} h l^{2/3}}{2^{\tau-1}}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Die Aufgabe von τ : Wähle nun τ so groß, dass

$$\frac{\alpha^{5/3} \varepsilon^{1/3} h l^{2/3}}{2^{\tau-1}} \lesssim \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}.$$

Insgesamt: Da wir $\varepsilon \lesssim \alpha l$ vorgegeben haben, gilt

$$\varepsilon \alpha h \leq \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}.$$

Insgesamt haben wir

$$\mathcal{E}(u, \Omega, K_k) \lesssim \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}, \quad k \in \{1, 2\}.$$

2.4 Beispiel 4: Gebietsverzweigung - drei-parametrische Optimierung

Fazit: Anders als in Beispiel 3 wirkt nun auch θ bei der Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie mit. Die Diskretisierung entlastet θ von der Aufgabe aus Beispiel 3. Die Koordination der Oberflächenenergieanteile in der inneren Konstruktion übernimmt nun die Diskretisierung. Wir fassen weitere wichtige Punkte zusammen:

- Gebietsverzweigungen im Inneren von Ω transportieren erste Ableitungen der Grenzfunktionen in die Ableitungen von u hinein. In Du wird somit ein für die $\varepsilon^{2/3}$ -Skalierung wichtiger $\frac{h}{l}$ -Faktor gewonnen.
- Der Hilfsparameter N wandelt über ein Optimierungsargument die gewonnenen $\frac{h}{l}$ -Faktoren in bessere Exponenten von ε um.
- Um schlechtere, übrig gebliebene Skalierungen zu eliminieren muss der Hilfsparameter τ groß genug gewählt werden.
- Der dritte Hilfsparameter θ ist dazu da, um einerseits eine Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie herzustellen, und andererseits, um die Konkurrenz zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie zu kontrollieren. Ist θ zu klein, so ist zu viel elastische Energie vorhanden, ist θ zu groß, so ist zu viel Oberflächenenergie nötig gewesen. Das haben wir bei der Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} \left((2\theta)^j + \frac{1}{(4\theta)^j} \right)$ gesehen.

2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

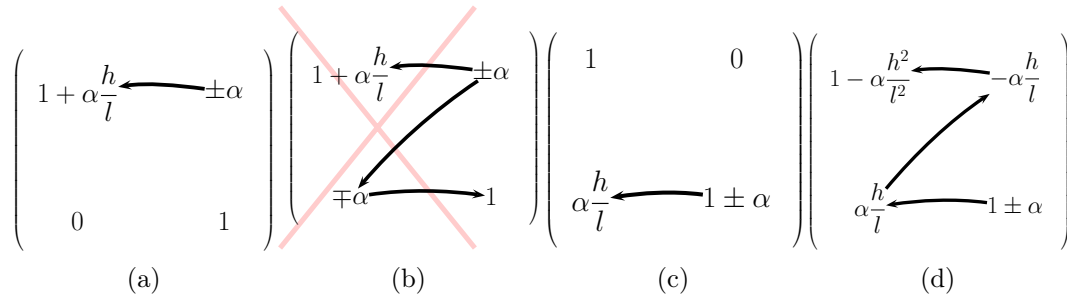


Abbildung 2.15: Gegenüberstellungen der Strategien für die Fälle K_1 und K_2 . Durch Gebietsverzweigungen werden $\frac{h}{l}$ -Terme, die von den Ableitungen der Grenzfunktionen kommen, nach Du transportiert. Das ist schematisch in (a) und (c) dargestellt. Bei K_2 erhalten wir noch einmal die Chance, einen weiteren $\frac{h}{l}$ -Term nach Du hineinzutransportieren, siehe (d). Diese Strategie funktioniert bei K_1 nicht mehr, siehe (b).

2.5 Diskussion: Unterschied zwischen K_1 und K_2

Gemeinsamkeiten: Unabhängig von der genauen Anzahl der Ableitungen, die γ mitbringt, erzeugt die Oberflächenenergie global gesehen immer einen Term der Ordnung $\varepsilon\alpha l$. Auch hat bisher unabhängig von der Anzahl der Ableitungen die elastische Energie global gesehen immer einen Term der Ordnung $\alpha^2 \frac{h^2}{l^2} hl$ erzeugt. Hier sind wir der groben Abschätzung gefolgt:

$$\text{lokale elastische Energie} \sim \alpha^2 \cdot (\text{lokales } \|\gamma'\|_{L^\infty})^2 \cdot \text{lokale Gebietsgröße.}$$

Diskretisierung und Optimierung nach den drei Hilfsvariablen θ , τ und N haben bisher in beiden Fällen eine obere Schranke geliefert, die wie $\varepsilon^{2/3}$ skaliert. Um diese Skalierung zu schlagen, muss der Term $\alpha^2 \frac{h^3}{l}$ geschlagen werden.

Unterschiede: Benötigt wird irgendeine Form von Interaktion, die den nun großen Term $\alpha^2 \frac{h^3}{l}$ durch etwas Kleineres ersetzen kann. In Abbildung 2.15 ist eine schematische Darstellung der folgenden Idee. Wie im Fall K_1 wird im Fall K_2 zuerst nur in der zweiten Komponente des Vektors u konstruiert. Ausgehend von dem konstruierten u_2 wird über den Ansatz $\partial_1 u_2 = -\partial_2 u_1$ jetzt die erste Komponente des Vektors u konstruiert. Mit diesem Ansatz haben wir die in $\partial_1 u_2$ lokal gespeicherten $\alpha h/l$ -Terme nach $\partial_2 u_1$ kopiert. Um von hier nach $\partial_1 u_1$ zu kommen, müssen wir einmal nach der zweiten Variablen integrieren und dann nach der ersten Variablen differenzieren. Genauso wie wir von dem zweiten Eintrag des Gradienten von u_2 zu seinem ersten Eintrag gesprungen sind und eine Ordnung von h/l gewonnen haben, haben wir durch einen erneuten Sprung von dem

2.5 Diskussion: Unterschied zwischen K_1 und K_2

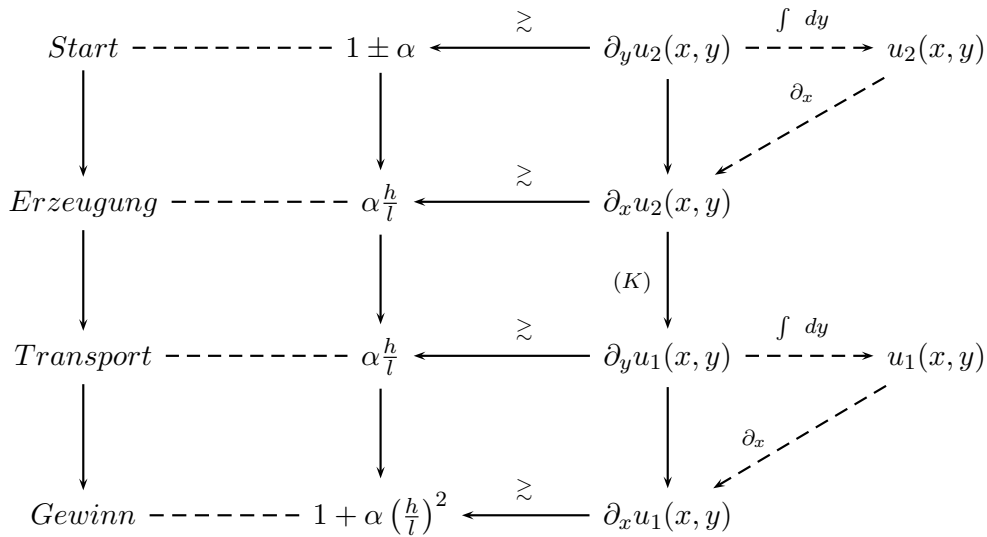
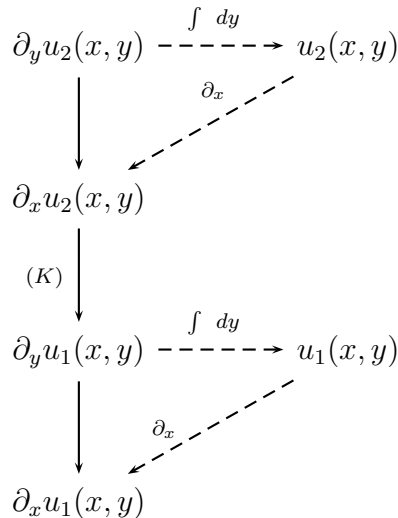


Abbildung 2.16: Hier wird angedeutet, dass im Fall K_2 ein zusätzlicher Gewinn eines h/l -Terms zu erwarten ist.

zweiten Eintrag des Gradienten von u_1 zu seinem ersten Eintrag eine weitere Ordnung h/l gewonnen. Dass diese Überlegung auch wirklich zum Erfolg führt, ist der Inhalt der folgenden Abschätzung: In jedem Punkt $(x, y) \in \Omega$, wo $Du(x, y)$ stetig ist, gilt

$$\text{dist}(Du, K) \lesssim \min_{J \in \{A, B\}} (|(Du(x, y) \cdot J^{-1})_{\text{sym}} - \text{id}| + |Du(x, y) \cdot J^{-1} - \text{id}|^2).$$

Den gesamten formalen Konstruktionsprozess können wir mit einem Konstruktionsschema wie



2 Emergente Effekte durch Beispiele entdecken

anschaulich zusammenfassen. Dabei werden über

$$\frac{1}{2} (\partial_y u_1(x, y) + \partial_x u_2(x, y)) = 0 \quad (K)$$

die Komponenten des Vektors u gekoppelt. Anders als im Fall K_1 ist es diesmal energetisch günstiger, wenn die andere Komponente des Vektors von der identischen Abbildung abweicht. Diese Abweichung kann jedoch nicht beliebig sein. Es muss eine Interaktion zwischen beiden Komponenten des Vektors u stattfinden. Wir erwarten im Fall K_2 die in Abbildung 2.16 gezeigte Gewinnprognose.

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Bevor wir in die Beweise einsteigen, präzisieren wir zuerst die in Kapitel 2 gesammelten Erfahrungen und Beobachtungen. Wir werden hier und im nächsten Kapitel mit der folgenden Matrixnorm arbeiten: Sei $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann definieren wir die Norm von F durch

$$|F| := \|F\|_{\mathbb{R}^{2 \times 2}} := \sqrt{\sum_{j,k=1}^2 F_{ij}^2}.$$

Als Abstand in $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ nehmen wir Folgendes: Seien $X, Y \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann definieren wir den Abstand der Matrizen X und Y durch

$$\text{dist}(X, Y) := |X - Y| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^2 (X_{ij} - Y_{ij})^2}.$$

Falls $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$ sind, dann definieren wir den Abstand von F zu der Menge \mathcal{Y} durch

$$\text{dist}(F, \mathcal{Y}) := \inf_{X \in \mathcal{Y}} \text{dist}(F, X).$$

3.1 Vorbereitungen

Die Diskretisierung des Gebietes $\Omega = (0, l) \times (0, h)$ wird ein wichtiger Schritt sein, um $\frac{h}{l}$ -Terme in Du hinein zu transportieren. Einerseits benötigen wir Sprünge im Gradienten von u , um genug Oberflächenenergie zu erzeugen. Andererseits dürfen solche Sprünge von Du nicht beliebig sein, da sonst zu viel Oberflächenenergie vorhanden wäre. Die Klasse der Funktionen, auf denen die Konstruktion lebt, ist die Klasse der auf Ω Lipschitz-stetigen Funktionen, die stetig auf $\bar{\Omega}$ sind. Dem Funktional \mathcal{E}_j , $j \in \{1, 2\}$, werden wir daher bei der Konstruktion folgende Argumente übergeben.

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Definition 3.1 (Die Funktionale \mathcal{E}_1 und \mathcal{E}_2 und ihre Argumente). Seien Ω , h , l , α , ε , und K_j , $j \in \{1, 2\}$, wie in Theorem 1 bzw. Theorem 2. Wir definieren für $j \in \{1, 2\}$:

$$\mathcal{E}_j : C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2) \times \{\omega \subset \Omega : \omega \text{ offen, } \mathcal{L}^2(\partial\omega) = 0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{E}_j(u, \omega) := \int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_j) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2 u|.$$

Nach einer geeigneten Diskretisierung des Gebietes Ω müssen lokale Konstruktionen verklebt werden. Dabei kann zusätzliche Oberflächenenergie entstehen. Um diese Art von Aufwand in Oberflächenenergie getrennt zu behandeln, benötigen wir die folgende Definition:

Definition 3.2. Seien $X, Y, Z \in \{\omega \subset \Omega : \omega \text{ offen, } \mathcal{L}^2(\partial\omega) = 0\}$ so, dass $X = Y \cup Z$ und $\mathcal{L}^2(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = 0$. Dann wird das Funktional \mathcal{F} definiert durch

$$\mathcal{F} : C^{0,1}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2) \times \{(Y, Z) : Y, Z \subset \Omega \text{ offen, } \mathcal{L}^2(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = 0\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}(u, Y, Z) := \mathcal{H}^1(\overline{Y} \cap \overline{Z}) \|\|Du \cdot \chi_{\overline{Y}} - Du \cdot \chi_{\overline{Z}}\|\|_{L^\infty(\overline{Y} \cap \overline{Z})}.$$

Bei der Verklebung zweier lokaler Konstruktionen müssen wir als lokale Gesamtenergie daher das folgende Lemma betrachten:

Lemma 3.1 (Rechentechnische Abschätzung von \mathcal{E}_1 bzw. \mathcal{E}_2). Seien X, Y und Z drei Mengen in $\{\omega \subset \Omega : \omega \text{ offen, } \mathcal{L}^2(\partial\omega) = 0\}$ so, dass $X = Y \cup Z$ und $\mathcal{L}^2(\overline{Y} \cap \overline{Z}) = 0$. Sei $u \in C^{0,1}(\overline{X}, \mathbb{R}^2)$. Dann gilt

$$\mathcal{E}_j(u, X) \leq \mathcal{E}_j(u, Y) + \mathcal{E}_j(u, Z) + \mathcal{F}(u, Y, Z), \quad j \in \{1, 2\}.$$

Optimal sind die Teilkonstruktionen auf Y und Z , falls $\mathcal{F}(u, Y, Z) = 0$, wenn also $u\chi_Y$ und $u\chi_Z$ energiefrei verklebt werden können:

Definition 3.3 (\mathcal{E}_2 -energiefreie Verklebung). Seien $X, Y, Z \subset \mathbb{R}^2$ offen, beschränkt und zusammenhängend, $\mathcal{L}^2(\partial X) = \mathcal{L}^2(\partial Y) = \mathcal{L}^2(\partial Z) = 0$, $\mathcal{L}^2(Y \cap Z) = 0$, $\mathcal{L}^2(Y) \neq 0$, $\mathcal{L}^2(Z) \neq 0$, $\overline{X} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$, $u \in C^{0,1}(\overline{Y}, \mathbb{R}^2)$, $v \in C^{0,1}(\overline{Z}, \mathbb{R}^2)$. Für $j \in \{1, 2\}$ sagen wir, dass u und v \mathcal{E}_j -energiefrei verklebt werden können, falls

$$u\chi_{\overline{Y}} + v\chi_{\overline{Z}} - u\chi_{(\partial Y) \cap \partial Z} \in C^0(\overline{X}, \mathbb{R}^2)$$

und

$$\mathcal{E}_2(z + u\chi_{\overline{Y}} + v\chi_{\overline{Z}} - u\chi_{(\partial Y) \cap \partial Z}, X) = \mathcal{E}_2(u, Y) + \mathcal{E}_2(v, Z).$$

Beweis. Das Funktional \mathcal{F} misst die Oberflächenenergie, die benötigt wird, um die lokalen Konstruktionen auf Y und Z miteinander zu verkleben. \square

In Abschnitt 2.5 sind wir auf die Unterschiede zwischen K_1 und K_2 eingegangen. Die Garantie für die Strategie in Abschnitt 2.5 ist Lemma 3.2. Wir verwenden folgende Bezeichnungen: Der Raum aller symmetrischen 2×2 -Matrizen wird bezeichnet mit

$$\text{Sym}(2) := \{F \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : F = F^T\}.$$

Der Raum aller antisymmetrischen 2×2 Matrizen wird bezeichnet mit

$$\text{Skew}(2) := \{F \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : F = -F^T\}.$$

Sei $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann werden die Operatoren sym und skew definiert durch

$$F_{\text{sym}} := \frac{1}{2}(F + F^T), \quad F_{\text{skew}} := \frac{1}{2}(F - F^T).$$

In dem Beweis des nächsten Lemmas werden wir hauptsächlich von der folgenden orthogonalen Zerlegung Gebrauch machen: Es gilt

$$\dim(\text{Sym}(2)) = 3, \quad \dim(\text{Skew}(2)) = 1, \quad \mathbb{R}^{2 \times 2} = \text{Sym}(2) \oplus \text{Skew}(2).$$

Lemma 3.2. *Sei $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann gilt*

$$\text{dist}(F, \text{SO}(2)) \leq \sqrt{1 + \sqrt{2}} (|F_{\text{sym}} - 1| + |F - 1|^2).$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in zwei Teile. Entweder ist $|F| \geq \sqrt{2}$ oder $|F| < \sqrt{2}$.

Teil 1: $|F| \geq \sqrt{2}$. **Fall 1:** Sei $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zunächst in dem zweidimensionalen Unterraum $\text{span}(\text{SO}(2))$. Sei $R \in \text{SO}(2)$ so gewählt, dass $|F - R| = \text{dist}(F, \text{SO}(2))$. Einerseits gilt $|F|^2 = |F_{\text{skew}}|^2 + |F_{\text{sym}}|^2$, andererseits ist

$$|F|^2 = |(F - R) + R|^2 = |F - R|^2 + 2\sqrt{2}|F - R| + 2,$$

da $|R| = \sqrt{2}$. Außerdem ist $|F - R|^2 \geq |F_{\text{sym}} - 1|^2$. Daher gilt

$$|F_{\text{sym}} - 1|^2 + 2\sqrt{2}|F - R| + 2 \leq |F|^2 = |F_{\text{skew}}|^2 + |F_{\text{sym}}|^2.$$

Wegen $|F_{\text{sym}} - 1|^2 = |F_{\text{sym}}|^2 + 2 - 2F_{11} - 2F_{22}$ erhalten wir

$$2\sqrt{2}|F - R| \leq |F_{\text{skew}}|^2 + 2F_{11} + 2F_{22} - 4.$$

Außerdem gilt

$$|F'_{\text{sym}} - 1|^2 = |F_{\text{sym}} - 1|^2 + |F - F'|^2, \quad |F' - 1|^2 = |F - 1|^2 + |F - F'|^2. \quad (3.3)$$

Wegen (3.1) und (3.2) haben wir zunächst

$$\text{dist}^2(F', \text{SO}(2)) \leq |F - F'|^2 + \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} |F' - 1|^2 + |F'_{\text{sym}} - 1| \right)^2. \quad (3.4)$$

Die Auswertung der rechten Seite von (3.4) ergibt wegen (3.3)

$$\text{dist}^2(F', \text{SO}(2)) \leq |F - F'|^2 + |F'_{\text{sym}} - 1|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} |F'_{\text{sym}} - 1| |F' - 1|^2 + |F' - 1|^4. \quad (3.5)$$

Eine erneute Anwendung von (3.3) liefert $|F - F'|^2 \leq |F'_{\text{sym}} - 1|^2$. Wir benötigen noch

$$\frac{1}{\sqrt{2}} |F'_{\text{sym}} - 1| |F' - 1|^2 \leq \sqrt{2} |F'_{\text{sym}} - 1|^2 + \sqrt{2} |F' - 1|^4.$$

Also gilt

$$\text{dist}^2(F', \text{SO}(2)) \leq (1 + \sqrt{2}) (|F'_{\text{sym}} - 1|^2 + |F' - 1|^4).$$

und somit

$$\text{dist}(F', \text{SO}(2)) \leq \sqrt{1 + \sqrt{2}} (|F'_{\text{sym}} - 1| + |F' - 1|^2).$$

Teil 2: $|F| < \sqrt{2}$. **Fall 1:** Sei $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ zunächst in dem zweidimensionalen Unterraum $\text{span}(\text{SO}(2))$. Sei $R \in \text{SO}(2)$ so gewählt, dass $|F - R| = \text{dist}(F, \text{SO}(2))$. Dann ist

$$|F - R| \leq |F_{\text{sym}} - 1| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |F - 1|^2 + |F_{\text{sym}} - 1|.$$

Fall 2: Sind F und $\text{SO}(2)$ nicht in derselben zweidimensionalen Ebene, dann sind wir wieder im Fall 2 von Teil 1. \square

Korollar 3.6. Seien $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und $A \in \text{GL}(2)$, dann gilt

$$\text{dist}(F, \text{SO}(2)A) \leq |A| \sqrt{1 + \sqrt{2}} \left(|(FA^{-1})_{\text{sym}} - 1| + |FA^{-1} - 1|^2 \right).$$

Ferner gilt

$$\text{dist}^2(F, \text{SO}(2)A) \leq 2|A|^2 \left(1 + \sqrt{2} \right) \left(|(FA^{-1})_{\text{sym}} - 1|^2 + |FA^{-1} - 1|^4 \right).$$

Beweis. Fall 1: Sei $F \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass $FA^{-1} \in \text{span}(\text{SO}(2))$. Sei $R \in \text{SO}(2)$, so dass

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

$|F - RA| = \text{dist}(F, \text{SO}(2)A)$. Sei $R_0 \in \text{SO}(2)$, so dass $|FA^{-1} - R_0| = \text{dist}(FA^{-1}, \text{SO}(2))$. Dann gilt

$$\text{dist}(F, \text{SO}(2)A) = |F - RA| \leq |F - R_0A| \leq |A||FA^{-1} - R_0| = |A| \text{dist}(FA^{-1}, \text{SO}(2)).$$

Hiernach wird wie im Fall 1 des Beweises vom Lemma 3.2 verfahren.

Fall 2: Wir bewegen jetzt FA^{-1} aus der Ebene $\text{span}(\text{SO}(2))$ heraus. Sei $R \in \text{SO}(2)$, so dass $|F - RA| = \text{dist}(F, \text{SO}(2)A)$. Sei $R_0 \in \text{SO}(2)$, so dass $|FA^{-1} - R_0| = \text{dist}(FA^{-1}, \text{SO}(2))$. Insbesondere gilt dann

$$\text{dist}^2(F, \text{SO}(2)A) \leq |A|^2 \text{dist}^2(FA^{-1}, \text{SO}(2)).$$

Hiernach wird wie im Fall 2 des Beweises vom Lemma 3.2 verfahren und somit folgt

$$\text{dist}(F, \text{SO}(2)A) \leq |A| \sqrt{1 + \sqrt{2}} \left(|(FA^{-1})_{\text{sym}} - 1| + |FA^{-1} - 1|^2 \right)$$

bzw.

$$\text{dist}^2(F, \text{SO}(2)A) \leq 2|A|^2 \left(1 + \sqrt{2} \right) \left(|(FA^{-1})_{\text{sym}} - 1|^2 + |FA^{-1} - 1|^4 \right).$$

□

Wir werden deshalb die elastische Energie in zwei Komponenten zerlegen.

Definition 3.4 (Rechentechische Zerlegung des elastischen Anteils von \mathcal{E}_2). *Seien Ω , A und B wie in Theorem 2. Wir definieren das Funktional \mathcal{J}_1 durch*

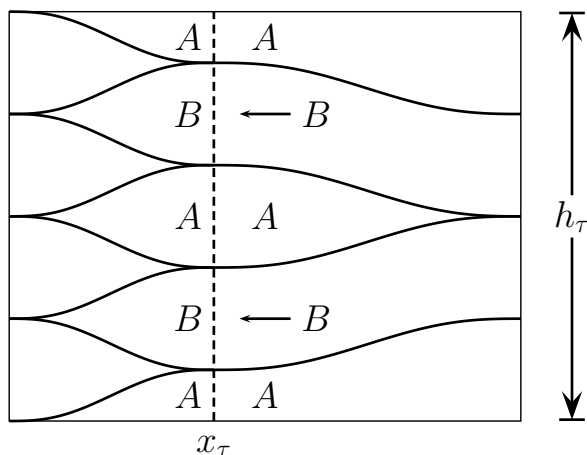
$$\mathcal{J}_1 : C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times \{ \omega \subset \Omega : \omega \text{ offen, } \mathcal{L}^2(\partial\omega) = 0 \} \times \{A, B\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}_1(u, X, J) := \int_X |(Du(x, y) \cdot J^{-1})_{\text{sym}} - 1|^2 dx dy$$

und das Funktional \mathcal{J}_2 durch

$$\mathcal{J}_2 : C^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \times \{ \omega \subset \Omega : \omega \text{ offen, } \mathcal{L}^2(\partial\omega) = 0 \} \times \{A, B\} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}_2(u, X, J) := \int_X |(Du(x, y) \cdot J^{-1}) - 1|^4 dx dy.$$


 Abbildung 3.2: Die Geometrie bei der Randkonstruktion auf $[0, x_\tau] \times [0, h_\tau]$.

3.2 Randkonstruktionen

Wir geben hier die Randkonstruktionen für die Fälle K_1 und K_2 an. Rechentechnisch geschieht hier noch nichts besonderes. Für spezielle Randkonstruktionen u_j , $j \in \{1, 2\}$, auf einem Randstück $\omega = (0, l) \times (0, h)$ zeigen wir, dass es Konstanten $c_{j,1}, c_{j,2} > 0$ gibt, so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du_j(x, y), K_j) dydx + \varepsilon \int_{\omega} |D^2u_j| \leq c_{j,1}\alpha\varepsilon l + c_{j,2}\alpha^2hl, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Lemma 3.3 (Referenzkonstruktion am Rand und ihre Skalierung - Fall K_1). *Seien $h \leq l$ und $\omega := (0, l) \times (0, h)$. Sei $\gamma \in C^0([0, l], [0, h/2])$ monoton steigend mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(l) = h/2$. Seien α, ε, K_1 wie in Theorem 1, $\sigma \in \{-1, 1\}$ ein Vorzeichen und*

$$b_0^\sigma(x, y) := \begin{cases} x + \sigma\alpha y & \text{auf } \omega_1 := \{(x, y) \in \omega : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \gamma(x)\}, \\ x + \sigma\alpha\gamma(x) & \text{auf } \omega_2 := \{(x, y) \in \omega : 0 \leq x \leq l, \gamma(x) \leq y \leq h - \gamma(x)\}, \\ x - \sigma\alpha y + \sigma\alpha h & \text{auf } \omega_3 := \{(x, y) \in \omega : 0 \leq x \leq l, h - \gamma(x) \leq y \leq h\}. \end{cases}$$

Sei $u^\sigma : \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $u^\sigma(x, y) = (b_0^\sigma(x, y), y)^T$. Dann gibt es zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die nicht von $\alpha, \varepsilon, h, l$ und σ abhängen, so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du^\sigma(x, y), K_1) dydx + \varepsilon \int_{\omega} |D^2u^\sigma| \leq c_1\alpha\varepsilon l + c_2\alpha^2hl.$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Beweis. Es ist

$$Du^\sigma(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & \sigma\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & \sigma\alpha\gamma'(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \omega_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & -\sigma\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \omega_3. \end{cases}$$

Elastische Energie: Die Voraussetzungen an die Funktion γ liefern folgende Abschätzungen: Es gibt eine von $\alpha, \varepsilon, h, l$ unabhängige Konstante $c > 0$, so dass $\|\gamma'\|_{L^\infty([0, l])} \leq c\frac{h}{l}$ und $\|\gamma''\|_{L^\infty([0, l])} \leq c\frac{h}{l^2}$. Es gibt eine Konstante $c_2 > 0$, unabhängig von $\alpha, \varepsilon, h, l$ und σ , so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du^\sigma(x, y), K_1) dy dx \leq c_2\alpha^2 hl.$$

Oberflächenenergie: Wir rechnen nun weiter mit

$$\varepsilon \int_{\omega} |D^2 u^\sigma| = 2\varepsilon\alpha \int_0^l (1 + (\gamma'(x))^2) dx + \alpha \int_0^l |\gamma''(x)| (h - 2\gamma(x)) dx.$$

Wegen den Voraussetzungen an die Funktion γ gibt es eine von $\alpha, \varepsilon, h, l$ und σ unabhängige Konstante $c_1 > 0$, so dass

$$\varepsilon \int_{\omega} |D^2 u^\sigma| \leq c_1 \varepsilon hl.$$

□

Lemma 3.4 (Referenzkonstruktion am Rand und ihre Skalierung - Fall K_2). *Seien $h \leq l$ und $\omega := (0, l) \times (0, h)$. Sei $\gamma \in C^0([0, l], [0, h/2])$ monoton steigend mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(l) = h/2$. Seien α, ε, K_2 wie in Theorem 2, $\sigma \in \{-1, 1\}$ ein Vorzeichen und*

$$b_0^\sigma(x, y) := \begin{cases} (1 + \sigma\alpha)y & \text{auf } \omega_1 := \{(x, y) \in \omega : 0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq \gamma(x)\}, \\ (1 + \sigma\alpha)\gamma(x) & \text{auf } \omega_2 := \{(x, y) \in \omega : 0 \leq x \leq l, \gamma(x) \leq y \leq h - \gamma(x)\}, \\ (1 - \sigma\alpha)y + \sigma\alpha h & \text{auf } \omega_3 := \{(x, y) \in \omega : 0 \leq x \leq l, h - \gamma(x) \leq y \leq h\}. \end{cases}$$

Sei $u^\sigma : \omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $u^\sigma(x, y) = (x, b_0^\sigma(x, y))^T$. Dann gibt es zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die nicht von $\alpha, \varepsilon, h, l$ und σ abhängen, so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du^\sigma(x, y), K_2) dy dx + \varepsilon \int_{\omega} |D^2 u^\sigma| \leq c_1 \alpha \varepsilon l + c_2 \alpha^2 hl.$$

Beweis. Es ist

$$Du^\sigma(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \sigma\alpha \end{pmatrix} & (x, y) \in \omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sigma\alpha\gamma'(x) & 1 \end{pmatrix} & (x, y) \in \omega_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \sigma\alpha \end{pmatrix} & (x, y) \in \omega_3. \end{cases}$$

Elastische Energie: Die Voraussetzungen an die Funktion γ liefern folgende Abschätzungen: Es gibt eine von $\alpha, \varepsilon, h, l$ unabhängige Konstante $c > 0$, so dass $\|\gamma'\|_{L^\infty((0,l))} \leq c\frac{h}{l}$ und $\|\gamma''\|_{L^\infty((0,l))} \leq c\frac{h}{l^2}$. Es gibt eine Konstante $c_2 > 0$, unabhängig von $\alpha, \varepsilon, h, l$ und σ , so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du^\sigma(x, y), K_2) dy dx \leq c_2\alpha^2 hl.$$

Oberflächenenergie: Wir rechnen nun weiter mit

$$\varepsilon \int_{\omega} |D^2 u^\sigma| = 2\varepsilon\alpha \int_0^l (1 + (\gamma'(x))^2) dx + \alpha \int_0^l |\gamma''(x)| (h - 2\gamma(x)) dx.$$

Wegen den Voraussetzungen an die Funktion γ gibt es eine von $\alpha, \varepsilon, h, l$ und σ unabhängige Konstante $c_1 > 0$, so dass

$$\varepsilon \int_{\omega} |D^2 u^\sigma| \leq c_1 \varepsilon hl.$$

□

Bemerkung. Da die Geometrie des Gebietes $[0, x_\tau] \times [0, h_\tau]$, auf dem später die eigentliche Referenzkonstruktion des Randes lebt, wie in Abbildung 3.2 sein wird, wird Lemma 3.4 mit einer Reskalierung $h \mapsto h/4$ angewendet und die Abschätzung wird noch mit einem Faktor vier versehen.

3.3 Die Grenzfunktion γ

Ist man im Fall K_1 nur an der $\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3}$ -Skalierung und im Fall K_2 nur an der $\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}hl^{1/5}$ -Skalierung interessiert, so reicht immer eine Umskalierung folgender Art für die Grenzfunktion γ aus.

Lemma 3.5. Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 10x^3 - 15x^4 + 6x^5$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1([0,1])} &= \frac{1}{2}, & \|f\|_{L^\infty([0,1])} &= 1, & \|f'\|_{L^\infty([0,1])} &= \frac{15}{8}, \\ \|f''\|_{L^\infty([0,1])} &= \frac{10}{3}\sqrt{3}, & \|f'''\|_{L^\infty([0,1])} &= 60, & \mathcal{H}^1(\{(x, f(x)) : x \in [0, 1]\}) &\leq \frac{79}{64}. \end{aligned}$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Die umskalierte Version lautet:

Lemma 3.6. Sei $f : [0, l] \rightarrow [0, h]$, $x \mapsto h \left(10 \left(\frac{x}{l} \right)^3 - 15 \left(\frac{x}{l} \right)^4 + 6 \left(\frac{x}{l} \right)^5 \right)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1([0,1])} &= \frac{h}{2}, & \|f\|_{L^\infty([0,1])} &= h, & \|f'\|_{L^\infty([0,1])} &= \frac{15}{8} \frac{h}{l}, \\ \|f''\|_{L^\infty([0,1])} &= \frac{10}{3} \sqrt{3} \frac{h}{l^2}, & \|f'''\|_{L^\infty([0,1])} &= 60 \frac{h}{l^3}, & \mathcal{H}^1(\{(x, f(x)) : x \in [0, l]\}) &\leq \frac{79}{64} l. \end{aligned}$$

Bemerkung. Es gibt natürlich viele Möglichkeiten f bzw. γ zu wählen. Dieser Aspekt ist interessant, falls man z.B. die Konstante c bei $c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \leq E_1$ verbessern möchte. Das hätte den Rahmen dieser Arbeit gesprengt.

3.4 Energieabschätzungen auf dem Referenzgebiet

Wir geben hier die Energieabschätzungen für die Fälle K_1 und K_2 auf dem Referenzgebiet ω an. Wie in Beispiel 4 aus Kapitel 2 erwähnt, ist die lokale Geometrie des Gebietes ω gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &:= \left\{ (x, y) \in \omega \mid 0 \leq y \leq \frac{h}{8} + \gamma(x) \right\}, \\
 \omega_2 &:= \left\{ (x, y) \in \omega \mid \frac{h}{8} + \gamma(x) < y < \frac{3h}{8} + \gamma(x) \right\}, \\
 \omega_3 &:= \left\{ (x, y) \in \omega \mid \frac{3h}{8} + \gamma(x) < y < \frac{5h}{8} - \gamma(x) \right\}, \\
 \omega_4 &:= \left\{ (x, y) \in \omega \mid \frac{5h}{8} - \gamma(x) < y < \frac{7h}{8} - \gamma(x) \right\}, \\
 \omega_5 &:= \left\{ (x, y) \in \omega \mid \frac{7h}{8} - \gamma(x) < y < h \right\},
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

wobei $\gamma : [0, h] \rightarrow [0, \frac{h}{8}]$ durch $\gamma(x) := \frac{h}{8}f(x/l)$ definiert ist, und f wie in Lemma 3.5 gewählt wird.

Lemma 3.7 (Energieabschätzung auf dem Referenzgebiet - Fall K_1). *Sei $\omega := (0, l) \times (0, h)$ mit $0 < h \leq l$ und α und ε wie in Theorem 1. Dann gibt es eine Funktion $(v, w) \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften:*

Randverhalten: $w(x, y) = y \forall (x, y) \in \partial\omega$ und $v(x, h) - v(x, 0) = h \forall x \in [0, l]$,

Periodizität: $v(0, y) = v(0, y + \frac{h}{2}) - \frac{h}{2} \forall y \in [0, \frac{h}{2}]$ und $v(0, y) = \frac{1}{2}v(l, 2y) \forall y \in [0, \frac{h}{2}]$.

Außerdem gilt die folgende Energieabschätzung: Man kann $u = (v, w)^T$ so wählen, dass es zwei von $\alpha, \varepsilon, h, l$ unabhängige Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, für die

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2u| \leq C_1 \alpha \varepsilon l + C_2 \alpha^2 \frac{h^3}{l}. \tag{3.8}$$

Beweis. Schritt 1: Konstruktion eines passenden $u := (v, w)^T \in C^0(\omega, \mathbb{R}^2)$. Sei u wie in (2.3) aus Kapitel 2 auf (3.7) definiert. Dieses u erfüllt alle geforderten Randbedingungen.

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Schritt 2: Energieabschätzungen. Um (3.8) zu zeigen, benötigen wir zuerst

$$Du(x, y) = \begin{cases} B & \omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha\gamma'(x) & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \omega_2, \\ B & \omega_3, \\ \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha\gamma'(x) & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \omega_4, \\ B & \omega_5. \end{cases}$$

Da die elastische Energie auf ω_1 , ω_3 und ω_5 verschwindet, und da sie auf ω_2 und ω_4 wegen Lemma 3.6 wie $\alpha^2 \frac{h^3}{l}$ skaliert, erhalten wir

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy \lesssim \alpha^2 \frac{h^3}{l}.$$

Die Oberflächenenergie liefert nur einen Beitrag, der wegen Lemma 3.6 wie $\varepsilon \alpha l$ skaliert. Eigentlich besteht die Oberflächenenergie aus zwei Komponenten. Sprünge im Gradienten erzeugen einen Energieanteil, der wie $\alpha \varepsilon l$ skaliert, wobei wir die Länge der Grenzfunktion einfach durch $2l$ abschätzen können. Der absolut-stetige Anteil der Energie liefert einen Beitrag, der wie $\alpha \varepsilon \cdot hl \cdot \frac{h}{l^2}$ skaliert. Wegen $h \leq l$ können wir diesen Term durch $\varepsilon \alpha l$ abschätzen. Das beendet den Beweis für die $\alpha^{4/3} \varepsilon^{4/3} h l^{1/3}$ -Skalierung der oberen Schranke auf dem Referenzgebiet. \square

Lemma 3.8 (Energieabschätzung auf dem Referenzgebiet - Fall K_2). *Sei $\omega := (0, l) \times (0, h)$ mit $0 < h \leq l$ und α und ε wie in Theorem 2. Dann gibt es eine Funktion $(v, w) \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften:*

Randverhalten: $v(x, y) = x \forall (x, y) \in \partial\omega$ und $w(x, h) - w(x, 0) = h \forall x \in [0, l]$,

Periodizität: $w(0, y) = w(0, y + \frac{h}{2}) - \frac{h}{2} \forall y \in [0, \frac{h}{2}]$ und $w(0, y) = \frac{1}{2}w(l, 2y) \forall y \in [0, \frac{h}{2}]$.

Außerdem gilt die folgende Energieabschätzung: Man kann $u = (v, w)^T$ so wählen, dass es zwei von $\alpha, \varepsilon, h, l$ unabhängige Konstanten $C_1, C_2 > 0$ gibt, für die

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2 u| \leq C_1 \alpha \varepsilon l + C_2 \alpha^2 \frac{h^5}{l^3}. \quad (3.9)$$

3.4 Energieabschätzungen auf dem Referenzgebiet

Beweis. Schritt 1: Konstruktion eines passenden $u := (v, w)^T \in C^0(\omega, \mathbb{R}^2)$. Sei

$$u(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ (1 + \alpha)y \end{pmatrix} & (x, y) \in \overline{\omega_1}, \\ \begin{pmatrix} x - 2\alpha(1 - \alpha)\gamma'(x)y + 2\alpha(1 - \alpha)\gamma'(x)\left(\frac{h}{8} + \gamma(x)\right) \\ (1 - \alpha)y + 2\alpha\left(\frac{h}{8} + \gamma(x)\right) \end{pmatrix} & (x, y) \in \overline{\omega_2}, \\ \begin{pmatrix} x - \alpha(1 - \alpha)\gamma'(x)h\frac{1}{2} \\ (1 + \alpha)y - \frac{\alpha h}{2} \end{pmatrix} & (x, y) \in \overline{\omega_3}, \\ \begin{pmatrix} x + 2\alpha(1 - \alpha)\gamma'(x)y - 2\alpha(1 - \alpha)\gamma'(x)\left(\frac{7}{8}h - \gamma(x)\right) \\ (1 - \alpha)y + \alpha h\frac{6}{8} - 2\alpha\gamma(x) \end{pmatrix} & (x, y) \in \overline{\omega_4}, \\ \begin{pmatrix} x \\ (1 + \alpha)y - \alpha h \end{pmatrix} & (x, y) \in \overline{\omega_5}, \end{cases}$$

wobei ω_1 bis ω_5 wie in (3.7) definiert sind. Den zusätzlichen Faktor $(1 - \alpha)$ benötigen wir um Terme niedriger Ordnung via Symmetrisierung zu eliminieren. Dieses u erfüllt alle geforderten Randbedingungen.

Schritt 2: Energieabschätzungen. Um (3.9) zu zeigen, benötigen wir zuerst

$$Du(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} & \omega_1, \\ \begin{pmatrix} 1 + 2\alpha(1 - \alpha)\gamma''(x)\left(\frac{h}{8} + \gamma(x) - y\right) + 2\alpha(1 - \alpha)(\gamma'(x))^2 & -2\alpha(1 - \alpha)\gamma'(x) \\ 2\alpha\gamma'(x) & 1 - \alpha \end{pmatrix} & \omega_2, \\ \begin{pmatrix} 1 - \alpha(1 - \alpha)\gamma''(x)\frac{h}{2} & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} & \omega_3, \\ \begin{pmatrix} 1 - 2\alpha(1 - \alpha)\gamma''(x)\left(\frac{7h}{8} - \gamma(x) - y\right) + 2\alpha(1 - \alpha)(\gamma'(x))^2 & 2\alpha(1 - \alpha)\gamma'(x) \\ -2\alpha\gamma'(x) & 1 - \alpha \end{pmatrix} & \omega_4, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha \end{pmatrix} & \omega_5. \end{cases}$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Nach Lemma 3.2 ist

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^5 \int_{\omega_j} \text{dist}(Du(x, y), K_2) \, dx dy \\ & \lesssim \sum_{j=1}^5 \int_{\omega_j} \min_{J \in \{A, B\}} \left(|J|^2 |(Du(x, y) \cdot J^{-1})_{\text{sym}} - 1|^2 + |J|^2 |Du(x, y) \cdot J^{-1}|^4 \right) \, dx dy. \end{aligned}$$

Da die obigen Integrale für $j \in \{1, 5\}$ verschwinden, müssen wir nur noch $j \in \{2, 3, 4\}$ untersuchen. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^5 \int_{\omega_j} \text{dist}(Du(x, y), K_2) \, dx dy \\ & \lesssim \sum_{j=2}^4 \mathcal{L}^2(\omega_j) \left\| \min_{J \in \{A, B\}} \left(|J|^2 |(Du(x, y) \cdot J^{-1})_{\text{sym}} - 1|^2 + |J|^2 |Du(x, y) \cdot J^{-1}|^4 \right) \right\|_{L^\infty(\omega_j)}. \end{aligned}$$

Um die behaupteten Skalierungen der oberen Schranke zu beweisen, genügen $\|\cdot\|_{L^\infty}$ -Abschätzungen. Wegen $\alpha \in (0, 1)$ erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(u, \omega_2, A) & \leq 4\alpha^2 \cdot \mathcal{L}^2(\omega_2) \cdot \left\| \left(\gamma''(x) \left(\frac{h}{8} + \gamma(x) - y \right) + (\gamma'(x))^2 \right)^2 \right\|_{L^\infty(\omega_2)}, \\ \mathcal{J}_1(u, \omega_3, B) & \leq \frac{\alpha^2}{4} \cdot \mathcal{L}^2(\omega_3) \cdot \left\| (\gamma''(x)h)^2 \right\|_{L^\infty(\omega_3)}, \\ \mathcal{J}_1(u, \omega_4, A) & \leq 4\alpha^2 \cdot \mathcal{L}^2(\omega_4) \cdot \left\| \left(\gamma''(x) \left(\frac{7h}{8} - \gamma(x) - y \right) + (\gamma'(x))^2 \right)^2 \right\|_{L^\infty(\omega_4)}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wird \mathcal{J}_2 abgeschätzt. Bei allen dort vorkommenden Termen der Form $\alpha^t h^s l^{-(s-2)}$ mit $s > 5$ und $t > 2$ werden diese wegen $h < l$ mit $\alpha^2 h^5 l^{-3}$ abgeschätzt. Wegen $\mathcal{L}^2(\omega_2) = \mathcal{L}^2(\omega_3) = \mathcal{L}^2(\omega_4) = \frac{h}{4l}$, $\alpha \in (0, 1)$, $|A|^2 \leq 2$, $|B|^2 \leq 10$, $h \leq l$ und Korollar 3.6 gibt es also eine Konstante c , die nicht von $\alpha, \varepsilon, h, l$ abhängt, so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) \, dx dy < c\alpha^2 \frac{h^5}{l^3}.$$

Bei den Sprüngen benötigen wir nur eine $\|\cdot\|_{L^\infty}$ -Abschätzung von

$$\varepsilon \left((1 - \alpha) \|\gamma'\|_{L^\infty([0, l])}^2 + (2 - \alpha) \|\gamma'\|_{L^\infty([0, l])} + 1 \right) 2\alpha \mathcal{H}^1(\gamma).$$

Bei den zweiten Ableitungen gehen wir so vor:

$$\int_{\omega} |\nabla Du(x, y)| dy dx \leq \mathcal{L}^2(\omega) \|\nabla Du(x, y)\|_{L^\infty(\omega)}.$$

Wegen $\mathcal{L}^2(\omega_2) = \mathcal{L}^2(\omega_3) = \mathcal{L}^2(\omega_4) = \frac{h}{4l}$ und $h \leq l$ gibt es eine andere Konstante C , die nicht von $\alpha, \varepsilon, h, l$ abhängt, so dass

$$\varepsilon \int_{\omega} |\nabla Du(x, y)| dx dy < C\varepsilon\alpha l.$$

Das beendet den Beweis für die $\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}hl^{1/5}$ -Skalierung der oberen Schranke auf dem Referenzgebiet. \square

3.5 Energiefreie Verklebungen

Im Fall K_1 haben wir:

Lemma 3.9 (Verklebung in e_2 -Richtung). *Seien $\omega := (0, l) \times (0, h)$ mit $0 < h \leq l$ und $\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$. Dann gibt es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Funktion $(v, w) \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften:*

Randverhalten: $w(x, y) = y \forall (x, y) \in \partial\omega$ und $v(x, h) - v(x, 0) = h \forall x \in [0, l]$,

Periodizität: $v(0, y) = v(0, y + j\frac{h}{2N}) - j\frac{h}{2N} \forall (y, j) \in [0, \frac{h}{2N}] \times [1, N] \cap \mathbb{N}$ und $v(0, y) = \frac{1}{2}v(l, 2y) \forall y \in [0, \frac{h}{2N}]$.

Außerdem kann man $u = (v, w)^T$ so wählen, dass folgende Energieabschätzung gilt:

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2u| \leq C_1\alpha\varepsilon Nl + C_2\alpha^2 \frac{h^5}{N^4l^3},$$

wobei C_1 und C_2 die Konstanten aus Lemma 3.7 sind.

Beweis. Sei u wie im Beweis von Lemma 3.7. Dann ist

$$\mathcal{F}(u \cdot \chi_{(0,l) \times (0,h)}(x, y) + (u(x, y - h) + h)\chi_{(0,l) \times (h,2h)}(x, y), (0, l) \times (0, h), (0, l) \times (h, 2h)) = 0.$$

Dieses Argument wenden wir N -fach an. Dann erfüllt die Funktion

$$\tilde{u}(x, y) := \sum_{j=1}^N (u \cdot \chi_{[0,l] \times [(j-1)h, jh]}(x, y) + (0, jh)^T)$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

die Behauptungen des Lemmas. □

Lemma 3.10 (Verklebung in e_1 -Richtung). *Seien $\omega_1 := (0, l) \times (0, h)$ und $\omega_2 := (l, 2l) \times (0, h)$. Wird Lemma 3.9 mit $N = 2N_0$ auf ω_1 und mit $N = N_0$ auf ω_2 angewendet und wird u wie im Beweis von Lemma 3.7 gewählt, dann können $u\chi_{\omega_1}$ und $u\chi_{\omega_2}$ so gewählt werden, dass gilt*

$$\mathcal{F}(u\chi_{\omega_1} + u\chi_{\omega_2}, \omega_1, \omega_2) = 0.$$

Beweis. Sei f wie in Lemma 3.5. Die spezielle Wahl von $\gamma(x) := \frac{h}{16N_0}f(x/l)$ bei ω_1 und $\gamma(x) := \frac{h}{8N_0}f(x/l)$ bei ω_2 ermöglicht eine energiefreie Verklebung. □

Im Fall K_2 haben wir:

Lemma 3.11 (Verklebung in e_2 -Richtung). *Seien $\omega := (0, l) \times (0, h)$ mit $0 < h \leq l$ und $\alpha, \varepsilon \in (0, 1)$. Dann gibt es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ eine Funktion $(v, w) \in C^0(\bar{\omega}, \mathbb{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften:*

Randverhalten: $v(x, y) = x \forall (x, y) \in \partial\omega$ und $w(x, h) - w(x, 0) = h \forall x \in [0, l]$,

Periodizität: $w(0, y) = w(0, y + j\frac{h}{2N}) - j\frac{h}{2N} \forall (y, j) \in [0, \frac{h}{2N}] \times [1, N] \cap \mathbb{N}$ und $w(0, y) = \frac{1}{2}w(l, 2y) \forall y \in [0, \frac{h}{2N}]$.

Außerdem kann man $u = (v, w)^T$ so wählen, dass folgende Energieabschätzung gilt:

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2u| \leq C_1\alpha\varepsilon Nl + C_2\alpha^2 \frac{h^5}{N^4l^3},$$

wobei C_1 und C_2 die Konstanten aus Lemma 3.8 sind.

Beweis. Sei u wie im Beweis von Lemma 3.8. Dann ist

$$\mathcal{F}(u\chi_{(0,l)\times(0,h)}(x, y) + (u(x, y - h) + h)\chi_{(0,l)\times(h,2h)}(x, y), (0, l) \times (0, h), (0, l) \times (h, 2h)) = 0.$$

Dieses Argument wenden wir N -fach an. Dann erfüllt die Funktion

$$\tilde{u}(x, y) := \sum_{j=1}^N (u \cdot \chi_{[0,l]\times[(j-1)h, jh]}(x, y) + (0, jh)^T)$$

die Behauptungen des Lemmas. □

Lemma 3.12 (Verklebung in e_1 -Richtung). *Seien $\omega_1 := (0, l) \times (0, h)$ und $\omega_2 := (l, 2l) \times (0, h)$. Wird Lemma 3.11 mit $N = 2N_0$ auf ω_1 und mit $N = N_0$ auf ω_2 angewendet und wird u wie im Beweis von Lemma 3.8 gewählt, dann können $u\chi_{\omega_1}$ und $u\chi_{\omega_2}$ so gewählt werden, dass gilt*

$$\mathcal{F}(u\chi_{\omega_1} + u\chi_{\omega_2}, \omega_1, \omega_2) = 0.$$

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

Beweis. Sei f wie in Lemma 3.5. Die spezielle Wahl von $\gamma(x) := \frac{h}{16N_0}f(x/l)$ bei ω_1 und $\gamma(x) := \frac{h}{8N_0}f(x/l)$ bei ω_2 ermöglicht eine energiefreie Verklebung. \square

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

Die ersten fünf Beweisschritte sind für die Fälle K_1 und K_2 identisch. Die eigentliche Argumentation beginnt mit der optimalen Wahl dreier Parameter: N , θ und τ . Diese müssen erst einmal identifiziert werden.

Wir geben nun die ersten fünf Schritte an.

3.6.1 Gemeinsamer Beweisanfang für die Fälle K_1 und K_2

Wir lassen hier den Fallindex $j \in \{1, 2\}$ weg.

Beweis.

Schritt 1: Zerlegung von Ω . Wir zerlegen Ω in

$$\Omega = \Omega_{\tau,l} \cup (\{x_\tau\} \times (0, h)) \cup \Omega_l \cup \left(\left\{\frac{l}{2}\right\} \times (0, h)\right) \cup \Omega_r \cup (\{l - x_\tau\} \times (0, h)) \cup \Omega_{\tau,r},$$

wobei

$$\begin{aligned} \Omega_{\tau,l} &:= (0, x_\tau) \times (0, h), & \Omega_l &:= \left(x_\tau, \frac{l}{2}\right) \times (0, h), \\ \Omega_r &:= \left(\frac{l}{2}, l - x_\tau\right) \times (0, h), & \Omega_{\tau,r} &:= (l - x_\tau, l) \times (0, h). \end{aligned}$$

Schritt 2: Globale energiefreie Verklebung. Sei u die globale \mathcal{E} -energiefreie Verklebung mit $u(x, y) = (x, y)^T$ für alle $(x, y) \in \partial\Omega$. Das bedeutet: Seien $u\chi_{\Omega_{\tau,l}}$, $u\chi_{\Omega_l}$, $u\chi_{\Omega_r}$ und $u\chi_{\Omega_{\tau,r}}$ die jeweiligen Teilkonstruktionen. Da es mehrere Möglichkeiten gibt, nehmen wir solche $u\chi_{\Omega_{\tau,l}}$, $u\chi_{\Omega_l}$, $u\chi_{\Omega_r}$ und $u\chi_{\Omega_{\tau,r}}$, so dass für das globale u gilt:

$$\mathcal{F}(u, \Omega_{\tau,l}, \Omega_l) = \mathcal{F}(u, \Omega_l, \Omega_r) = \mathcal{F}(u, \Omega_r, \Omega_{\tau,r}) = 0.$$

Außerdem nehmen wir solche $u\chi_{\Omega_{\tau,l}}$, $u\chi_{\Omega_l}$, $u\chi_{\Omega_r}$ und $u\chi_{\Omega_{\tau,r}}$, dass gilt

$$E \leq 2\mathcal{E}(u, \Omega_{\tau,l}) + 2\mathcal{E}(u, \Omega_l).$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Schritt 3: Diskretisierung von Ω_l . Seien $N, \tau \in \mathbb{N}$ und $\theta \in (0, 1/2)$. Für $i \in [1, \tau] \cap \mathbb{N}$ und $j = j(i) \in [1, 2^{i-1}N] \cap \mathbb{N}$ seien

$$l_i := \theta^{i-1}(1 - \theta)\frac{l}{2}, \quad h_i := \frac{h}{2^{i-1}N}, \quad x_0 := \frac{l}{2}, \quad x_i := \frac{l}{2}\theta^i, \quad y_{i,0} := 0, \quad y_{i,j} := \frac{jh}{2^{i-1}N}.$$

Die genaue Argumentation wird sein, dass wir vorher optimale θ_0, N_0, τ_0 gewählt haben. Wir müssen im Folgenden diese drei Werte ausfindig machen.

Schritt 4: Erstes Kriterium für den Abbruchindex τ : Nach Lemma 3.3 wissen wir, dass $x_\tau = h_\tau$ optimal ist. Das liefert die folgende Gleichung:

$$\frac{h}{2^{\tau-1}N} \stackrel{\text{Def}}{=} h_\tau \stackrel{\text{Lemma 3.3}}{=} x_\tau \stackrel{\text{Def}}{=} \frac{l}{2}\theta^\tau.$$

Daher ist

$$\tau \leq \frac{\ln\left(\frac{4h}{lN}\right)}{\ln(2\theta)} \quad (3.10)$$

ein Abbruchkriterium und eine obere Schranke für τ . D.h., erreicht der Generationsindex i den Wert $\lfloor \tau \rfloor$, dann beginnt ab $i = \lfloor \tau \rfloor + 1$ die Randkonstruktion.

Schritt 5: Lokale energiefreie Verklebung. Sei u wie in Lemma 3.8. Auf jede Funktion $u(x - l_i, y - y_{i,j-1}) \chi_{(x_i, x_{i-1}) \times (y_{i,j-1}, y_{i,j})}$ wenden wir Lemma 3.8 an. Dann verschwinden die \mathcal{F} 's zwischen zwei Generationen und es gilt auch

$$\mathcal{F}(u, (x_i, x_{i-1}) \times (y_{i,j-1}, y_{i,j}), (x_i, x_{i-1}) \times (y_{i,j1}, y_{i,j-1})) = 0.$$

3.6.2 Beweisfortsetzung - Fall K_1

Beweis. Schritt 6: Abschätzung auf Ω_l . Seien C_1, C_2 wie im Lemma 3.7. Dann gilt

$$\mathcal{E}_2(u, \Omega_l) \leq \sum_{i=1}^{\tau} \left(C_2 \frac{\alpha^2 h^3 2^3}{2^{2i} N^2 \theta^i l (1 - \theta)} + C_1 \alpha \varepsilon 2^{i-1} N \theta^{i-1} (1 - \theta) \frac{l}{2} \right).$$

Wähle $N_{\theta, \tau} \in \mathbb{R}$, so dass

$$C_2 \frac{\alpha^2 h^3 2^3}{N_{\theta, \tau}^2 l (1 - \theta)} \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta)^i} = C_1 \alpha \varepsilon N_{\theta, \tau} \frac{l}{2} \frac{1 - \theta}{2\theta} \sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i,$$

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

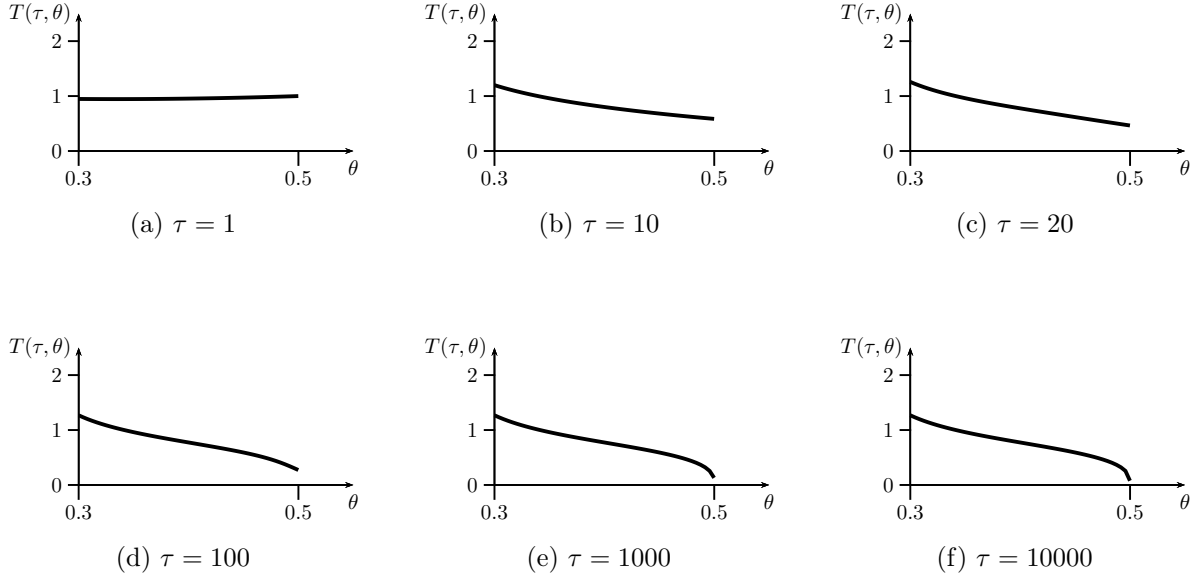


Abbildung 3.3: Die Funktion in (3.11).

d.h.

$$N_{\theta, \tau} = 2^{5/3} \frac{C_2^{1/5}}{C_1^{1/5}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i} \right)^{1/3} \frac{\theta^{1/3}}{(1-\theta)^{2/3}} \frac{\alpha^{1/3} h}{\varepsilon^{1/3} l^{2/3}}.$$

Die Reihen $\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta)^i}$ und $\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i$ konvergieren beide zugleich, falls $\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})$. Dort wird auch das optimale θ_0 liegen. Die Abbildung

$$T : \tau \mapsto \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i} \right)^{1/3} \frac{\theta^{1/3}}{(1-\theta)^{2/3}} \quad (3.11)$$

hat für $\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})$ verschiedenes Konvexitätsverhalten, siehe Abbildung 3.3. Insbesondere ist es bei $\theta = 1/2$ kritisch. Das optimale θ_0 wird aber weg von $1/2$ liegen.

Bei der Konstruktion ist $N := \lfloor N_{\theta, \tau} \rfloor$ die letzte Generation. Für

$$\varepsilon_0 := 2^{2/3} \frac{C_2^{1/3}}{C_1^{1/3}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i} \right)^{1/3} \frac{\theta^{1/3}}{(1-\theta)^{2/3}}$$

gilt $N_{\theta, \tau} \geq 2$ für alle $\alpha \in (0, 1)$, alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^2})$, alle $\tau \geq 1$ und alle $\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})$. Mit dieser Einschränkung gilt

$$\frac{1}{N} \leq \frac{2}{N_{\theta, \tau}}. \quad (3.12)$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

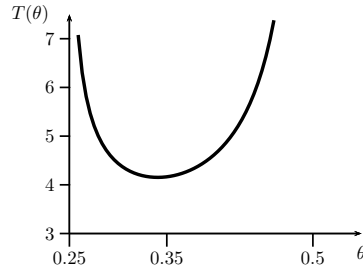


Abbildung 3.4: Das optimale θ_0 wird in der Nähe von 0,35 liegen.

Daher

$$\mathcal{E}_1(u, \Omega_l) \leq C_1^{2/3} C_2^{1/3} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \frac{2 + 2^2}{2^{1/3}} \left(\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta)^i} \left(\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i \right)^2 \right)^{1/3} \frac{(1 - \theta)^{1/3}}{\theta^{2/3}}.$$

Das optimale θ_0 ist dasjenige $\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})$, bei dem das Infimum in

$$\inf_{\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4\theta)^i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2\theta)^i \right)^2 \right)^{1/3} \frac{(1 - \theta)^{1/3}}{\theta^{2/3}}$$

angenommen wird. Bei

$$\begin{aligned} & \inf_{\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4\theta)^i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2\theta)^i \right)^2 \right)^{1/3} \frac{(1 - \theta)^{1/3}}{\theta^{2/3}} \\ &= \inf_{\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4\theta}\right)^{1/3}} \frac{1}{(1 - 2\theta)^{2/3}} \frac{(1 - \theta)^{1/3}}{\theta^{2/3}} =: T(\theta) \end{aligned}$$

führt die Optimierung der rechten Seite zu einem optimalen $\theta_0 \approx 0,35$ (Abbildung 3.4), woraus dann folgt

$$\inf_{\theta \in (4^{-1}, 2^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(4\theta)^i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2\theta)^i \right)^2 \right)^{1/3} \frac{(1 - \theta)^{1/3}}{\theta^{2/3}} < 5.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{E}_1(u, \Omega_l) \leq C_3 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}, \quad (3.13)$$

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

wobei

$$C_3 := (2 + 2^2) \frac{5}{2^{1/3}} C_1^{2/3} C_2^{1/3}.$$

Wir benötigen nur eine Eingrenzung der Form $\theta_0 \in (4^{-1}, 2^{-3/2})$. Damit werden wir eine weitere Bedingung für τ herleiten.

Schritt 7: Abschätzung auf $\Omega_{\tau,l}$. Wegen Lemma 3.3 und Bemerkung 3.2 ist

$$\int_{(0,x_\tau) \times (0,h_\tau)} \text{dist}^2(Du(x,y), K_1) dydx + \varepsilon \int_{(0,x_\tau) \times (0,h_\tau)} |D^2u| \leq c_1 \alpha \varepsilon h_\tau + \frac{1}{4} c_2 \alpha^2 h_\tau^2.$$

Dann ist

$$\int_{\Omega_{\tau,l}} \text{dist}^2(Du(x,y), K_1) dydx + \varepsilon \int_{\Omega_{\tau,l}} |D^2u| \leq c_1 \alpha \varepsilon h + \frac{1}{4} c_2 \alpha^2 \frac{h}{2^{\tau-1} N}.$$

Wegen (3.10) gilt

$$\int_{\Omega_{\tau,l}} \text{dist}^2(Du(x,y), K_1) dydx + \varepsilon \int_{\Omega_{\tau,l}} |D^2u| \leq c_1 \alpha \varepsilon h + \frac{2}{4} c_2 \alpha^2 \frac{h^2}{2^{\tau-1} N_{\theta_0, \tau}}. \quad (3.14)$$

Schritt 8: Bedingungen an τ . Sei

$$N_\tau := 2^{5/3} \frac{C_2^{1/3}}{C_1^{1/3}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(4\theta_0^3)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta_0)^i} \right)^{1/3} \frac{\theta_0^{1/3}}{(1-\theta_0)^{2/3}}. \quad (3.15)$$

Wir benötigen im Folgenden

$$N_- := \inf_{\tau \geq 1} N_\tau, \quad N_+ := \sup_{\tau \geq 1} N_\tau.$$

Für

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{N_-}{2}, \left(\frac{C_3}{c_1} \right)^3 \right\} \quad (3.16)$$

gilt für alle $\alpha \in (0, 1)$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^3}{l^2})$

$$c_1 \alpha \varepsilon h \leq C_3 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}. \quad (3.17)$$

Mit (3.16) kann ein Term in (3.14) durch (3.17) abgeschätzt werden. Damit in (3.14) auch der zweite Term durch (3.13) abgeschätzt werden kann, benötigen wir ein Kriterium an

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

τ . Für

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{N_-}{2}, \left(\frac{C_3}{c_1} \right)^3, \left(\frac{C_3 N_+}{c_2} \right)^3 \right\}$$

ist

$$\ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_\tau} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right) \geq \ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_+} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right) \geq \ln(2).$$

Damit für alle $\alpha \in (0, 1)$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha^{h^3})$

$$c_2 \alpha^2 \frac{h^2}{2^\tau N_{\theta_0, \tau}} \leq C_3 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}$$

gilt, benötigen wir die folgende zweite Bedingung an τ :

$$\tau \ln(2) \geq \ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_\tau} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right). \quad (3.18)$$

Einerseits benötigen wir wegen (3.12)

$$\tau \geq \frac{\ln \left(\frac{4h}{lN} \right)}{\ln(2\theta_0)} \geq \frac{2 \ln \left(\frac{lN_{\theta_0} \tau}{4h} \right)}{\ln(2)} = \frac{2 \ln \left(\frac{N_\tau}{4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right)}{\ln(2)} \geq \frac{2 \ln \left(\frac{N_-}{4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right)}{\ln(2)},$$

andererseits wegen (3.18) auch

$$\tau \ln(2) \geq \ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_\tau} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right) \geq \ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_+} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right).$$

Für

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{N_-}{2}, \left(\frac{C_3}{c_1} \right)^3, \left(\frac{C_3 N_+}{c_2} \right)^3, \left(\frac{N_-^2 N_+ C_3}{2^5 c_2} \right)^3 \right\}$$

ist

$$\frac{N_-^2}{2^4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{2/3} \geq \frac{2c_2}{C_3 N_+} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3}.$$

Wähle nun

$$\tau_0 = \frac{2 \ln \left(\frac{N_-}{4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{1/3} \right)}{\ln(2)}.$$

□

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

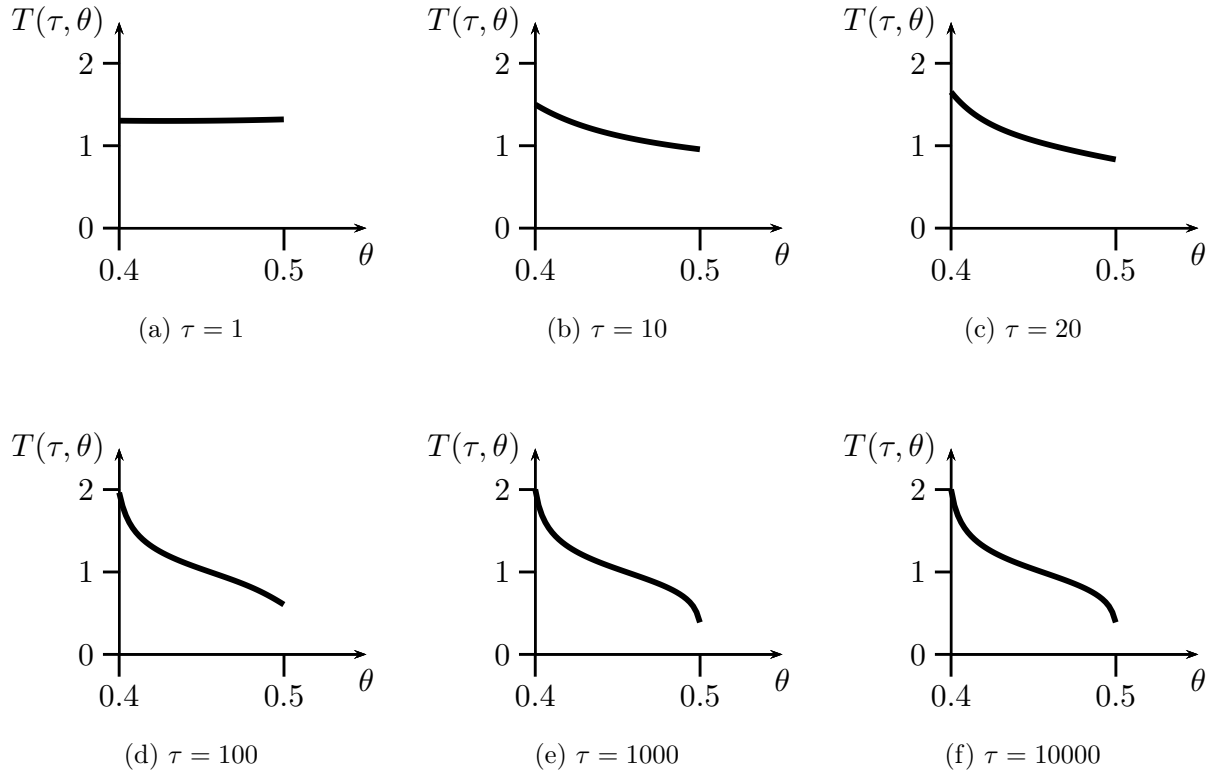


Abbildung 3.5: Die Funktion in (3.19).

3.6.3 Beweisfortsetzung - Fall K_2

Beweis. Schritt 6: Abschätzung auf Ω_l . Seien C_1, C_2 wie im Lemma 3.8. Dann gilt

$$\mathcal{E}_2(u, \Omega_l) \leq \sum_{i=1}^{\tau} \left(C_2 \frac{\alpha^2 h^5 2^7}{2^{4i} N^4 \theta^{3i} l^3 (1-\theta)^3} + C_1 \alpha \varepsilon 2^{i-1} N \theta^{i-1} (1-\theta) \frac{l}{2} \right).$$

Wähle $N_{\theta, \tau} \in \mathbb{R}$, so dass

$$C_2 \frac{\alpha^2 h^5 2^7}{N_{\theta, \tau}^4 l^3 (1-\theta)^3} \sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4 \theta^3)^i} = C_1 \alpha \varepsilon N_{\theta, \tau} \frac{l}{2} \frac{1-\theta}{2\theta} \sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i,$$

d.h.

$$N_{\theta, \tau} = 2^{9/5} \frac{C_2^{1/5}}{C_1^{1/5}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4 \theta^3)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i} \right)^{1/5} \frac{\theta^{1/5}}{(1-\theta)^{4/5}} \frac{\alpha^{1/5} h}{\varepsilon^{1/5} l^{4/5}}.$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Die Reihen $\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4\theta^3)^i}$ und $\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i$ konvergieren beide zugleich, falls $\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})$. Dort wird auch das optimale θ_0 liegen. Die Abbildung

$$T : \tau \mapsto \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4\theta^3)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i} \right)^{1/5} \frac{\theta^{1/5}}{(1-\theta)^{4/5}} \quad (3.19)$$

hat für $\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})$ verschiedenes Monotonieverhalten, siehe Abbildung 3.5. Insbesondere ist es bei $\theta = 1/2$ kritisch. Das optimale θ_0 wird aber weg von $1/2$ liegen.

Bei der Konstruktion ist $N := \lfloor N_{\theta,\tau} \rfloor$ die letzte Generation. Für

$$\varepsilon_0 := 2^{4/5} \frac{C_2^{1/5}}{C_1^{1/5}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4\theta^3)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i} \right)^{1/5} \frac{\theta^{1/5}}{(1-\theta)^{4/5}}$$

gilt $N_{\theta,\tau} \geq 2$ für alle $\alpha \in (0, 1)$, alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha^{h^5/l^4})$, alle $\tau \geq 1$ und alle $\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})$. Mit dieser Einschränkung gilt

$$\frac{1}{N} \leq \frac{2}{N_{\theta,\tau}}. \quad (3.20)$$

Daher

$$\mathcal{E}_2(u, \Omega_l) \leq C_1^{4/5} C_2^{1/5} \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \frac{2 + 2^4}{2^{1/5}} \left(\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4\theta^3)^i} \left(\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta)^i \right)^4 \right)^{1/5} \frac{(1-\theta)^{1/5}}{\theta^{4/5}}.$$

Das optimale θ_0 ist dasjenige $\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})$, bei dem das Infimum in

$$\inf_{\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2^4\theta^3)^i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2\theta)^i \right)^4 \right)^{1/5} \frac{(1-\theta)^{1/5}}{\theta^{4/5}}$$

angenommen wird. Bei

$$\begin{aligned} & \inf_{\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2^4\theta^3)^i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2\theta)^i \right)^4 \right)^{1/5} \frac{(1-\theta)^{1/5}}{\theta^{4/5}} \\ &= \inf_{\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^4\theta^3}\right)^{1/5}} \frac{1}{(1-2\theta)^{4/5}} \frac{(1-\theta)^{1/5}}{\theta^{4/5}} =: T(\theta) \end{aligned}$$

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

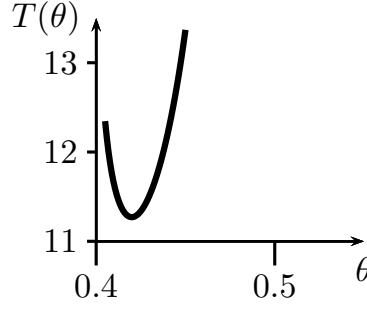


Abbildung 3.6: Das optimale θ_0 wird in der Nähe von 0,42 liegen.

führt die Optimierung der rechten Seite zu einem optimalen $\theta_0 \approx 0,42$ (Abbildung 3.6), woraus dann folgt

$$\inf_{\theta \in (2^{-4/3}, 2^{-1})} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2^4 \theta^3)^i} \left(\sum_{i=1}^{\infty} (2\theta)^i \right)^4 \right)^{1/5} \frac{(1-\theta)^{1/5}}{\theta^{4/5}} < 12.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathcal{E}_2(u, \Omega_l) \leq C_3 \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5}, \quad (3.21)$$

wobei

$$C_3 := (2 + 2^4) \frac{12}{2^{1/5}} C_1^{4/5} C_2^{1/5}.$$

Wir benötigen nur eine Eingrenzung der Form $\theta_0 \in (2^{-4/3}, 2^{-5/4})$. Damit werden wir eine weitere Bedingung für τ herleiten.

Schritt 7: Abschätzung auf $\Omega_{\tau,l}$. Wegen Lemma 3.3 und Bemerkung 3.2 ist

$$\int_{(0, x_\tau) \times (0, h_\tau)} \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) dy dx + \varepsilon \int_{(0, x_\tau) \times (0, h_\tau)} |D^2 u| \leq c_1 \alpha \varepsilon h_\tau + \frac{1}{4} c_2 \alpha^2 h_\tau^2.$$

Dann ist

$$\int_{\Omega_{\tau,l}} \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) dy dx + \varepsilon \int_{\Omega_{\tau,l}} |D^2 u| \leq c_1 \alpha \varepsilon h + \frac{1}{4} c_2 \alpha^2 \frac{h}{2^{\tau-1} N}.$$

Wegen (3.10) gilt

$$\int_{\Omega_{\tau,l}} \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) dy dx + \varepsilon \int_{\Omega_{\tau,l}} |D^2 u| \leq c_1 \alpha \varepsilon h + \frac{2}{4} c_2 \alpha^2 \frac{h^2}{2^{\tau-1} N_{\theta_0, \tau}}. \quad (3.22)$$

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

Schritt 8: Bedingungen an τ . Sei

$$N_\tau := 2^{9/5} \frac{C_2^{1/5}}{C_1^{1/5}} \left(\frac{\sum_{i=1}^{\tau} \frac{1}{(2^4 \theta_0^3)^i}}{\sum_{i=1}^{\tau} (2\theta_0)^i} \right)^{1/5} \frac{\theta_0^{1/5}}{(1-\theta_0)^{4/5}}. \quad (3.23)$$

Wir benötigen im Folgenden

$$N_- := \inf_{\tau \geq 1} N_\tau, \quad N_+ := \sup_{\tau \geq 1} N_\tau.$$

Für

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{N_-}{2}, \left(\frac{C_3}{c_1} \right)^5 \right\} \quad (3.24)$$

gilt für alle $\alpha \in (0, 1)$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4})$

$$c_1 \alpha \varepsilon h \leq C_3 \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5}. \quad (3.25)$$

Mit (3.24) kann der erste Term auf der rechten Seite von (3.22) durch (3.25) abgeschätzt werden. Damit in (3.22) auch der zweite Term durch (3.21) abgeschätzt werden kann, benötigen wir ein Kriterium an τ . Für

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{N_-}{2}, \left(\frac{C_3}{c_1} \right)^5, \left(\frac{C_3 N_+}{c_2} \right)^{5/3} \right\}$$

ist

$$\ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_\tau} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{3/5} \right) \geq \ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_+} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{3/5} \right) \geq \ln(2).$$

Damit für alle $\alpha \in (0, 1)$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4})$

$$c_2 \alpha^2 \frac{h^2}{2^\tau N_{\theta_0, \tau}} \leq C_3 \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5}$$

gilt, benötigen wir die folgende zweite Bedingung an τ :

$$\tau \ln(2) \geq \ln \left(\frac{2c_2}{C_3 N_\tau} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon} \right)^{3/5} \right). \quad (3.26)$$

3.6 Die oberen Schranken in den Theoremen 1 und 2 und ihre Beweise

Einerseits benötigen wir wegen (3.20)

$$\tau \geq \frac{\ln\left(\frac{4h}{lN}\right)}{\ln(2\theta_0)} \geq \frac{4 \ln\left(\frac{lN\theta_0\tau}{4h}\right)}{\ln(2)} = \frac{4 \ln\left(\frac{N_-}{4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{1/5}\right)}{\ln(2)} \geq \frac{4 \ln\left(\frac{N_-}{4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{1/5}\right)}{\ln(2)},$$

andererseits wegen (3.26) auch

$$\tau \ln(2) \geq \ln\left(\frac{2c_2}{C_3 N_\tau} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{3/5}\right) \geq \ln\left(\frac{2c_2}{C_3 N_+} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{3/5}\right).$$

Für

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ \frac{N_-}{2}, \left(\frac{C_3}{c_1}\right)^5, \left(\frac{C_3 N_+}{c_2}\right)^{5/3}, \left(\frac{N_-^4 N_+ C_3}{2^9 c_2}\right)^5 \right\}$$

gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha^{h^5})$

$$\frac{N_-^4}{2^8} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{4/5} \geq \frac{2c_2}{N_+ C_3} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{3/5}.$$

Wähle nun

$$\tau_0 = \frac{4 \ln\left(\frac{N_-}{4} \left(\frac{\alpha l}{\varepsilon}\right)^{1/5}\right)}{\ln(2)}.$$

□

3 Die oberen Schranken im Fall $h \leq l$ und ihre Beweise

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Wir teilen den Beweis der unteren Schranke von Theorem 1 in zwei Teile auf. Zuerst geben wir in Abschnitt 4.1 für den Fall $h = l$ den Beweis detailliert an. In Abschnitt 4.2 behandeln wir den Fall $h < l$. Dort können viele der Aussagen ähnlich wie im Fall $h = l$ bewiesen werden. Der Hauptunterschied zwischen Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.2 wird die Wahl einer geeigneten Abschätzung für den Ausdruck $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy$ sein. In Kapitel 5 untersuchen wir den Fall $h > l$.

Notation. Um die Notation übersichtlich zu halten, werden wir die vielen Nullmengen, auf denen die Beweise in diesem Kapitel nicht mehr gültig wären, nicht erwähnen. Die Beweise und Ideen in diesem Kapitel sind bis auf Nullmengen richtig.

4.1 Der Fall $h = l$

In Abschnitt 4.1.1 werden wir für spätere Zwecke geeignete Teilmengen ω von Ω identifizieren, so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2 u| \leq c \frac{\mathcal{L}^2(\omega)}{\mathcal{L}^2(\Omega)} E_1$$

gilt, wobei $c > 0$ eine von α , ε und l unabhängige Konstante ist. Die Hauptidee hierbei ist, solche λ -Anteile von Ω zu identifizieren, wo die Energie durch den selben λ -Anteil abgeschätzt wird. Diese Art von Aufteilung nennen wir Energiepartitionierung. Wir werden überwiegend mit Quadraten Q arbeiten, die drei Energiepartitionierungseigenschaften haben werden. In Abbildung 4.1 wird angedeutet, dass die Wahl von ω entweder ein horizontaler oder vertikaler Streifen oder ein Quadrat sein wird.

Um eine untere Schranke für E_1 herzuleiten, werden wir zunächst die elastische Energie und die Oberflächenenergie bei dem Ausdruck

$$\int_Q \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_Q |D^2 u| \leq c \lambda^2 E_1$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

trennen. Anschließend wird eine neue energetische Interaktion mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung, der Poincaréschen Ungleichung und Projektionen erzeugt. Das wird in Abschnitt 4.1.2 genauer erläutert. Auf jedem Q werden wir dort den Ausdruck

$$\int_Q |Du(x, y) - F| dx dy$$

untersuchen, wobei $F \in K_1$ eine feste Matrix ist. Wegen der Poincaréschen Ungleichung werden wir

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| dx dy$$

untersuchen, wobei $a \in \mathbb{R}^2$.

Wegen

$$\left| \left((1 - F) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) e_j \right| \leq \left| \left(u(x, y) - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) e_j \right| + \left| \left(u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) e_j \right|$$

für $j \in \{1, 2\}$ werden wir in Abschnitt 4.1.3 eine Rigiditätsabschätzung für $|u_1(x, y) - x|$ herleiten und die Untersuchung von $|u_2(x, y) - y|$ erst in Abschnitt 4.1.4 durchführen. In Abschnitt 4.1.4 werden wir noch einige Hilfsabschätzungen kennenlernen, die für Optimierungszwecke von Konstanten wichtig sind.

In Abschnitt 4.1.5 werden wir eine untere Abschätzung von

$$\int_Q \left| \left((1 - F) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) e_j \right| dx dy$$

für $j \in \{1, 2\}$ herleiten.

In Abschnitt 4.1.6 bringen wir den Beweis der unteren Schranke.

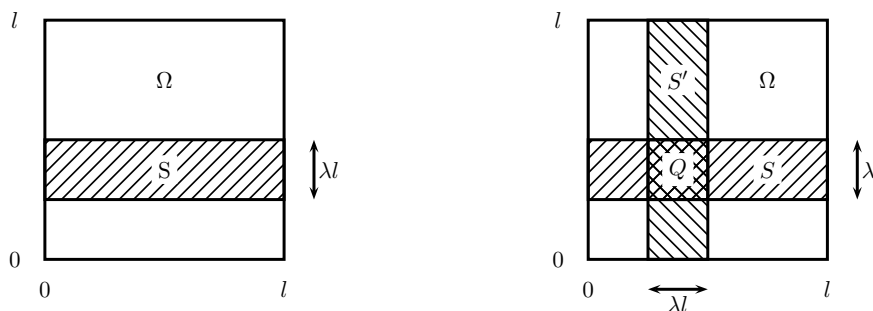


Abbildung 4.1: Energiepartitionierung: Der Hilfsparameter λ kann als $\lambda \sim \mathcal{L}^2(S)/\mathcal{L}^2(\Omega)$ verstanden werden. Gesucht wird ein vertikaler Streifen S , auf dem die elastische Energie und die Oberflächenenergie in etwa durch den λ -Anteil der Gesamtenergie abgeschätzt werden können. Dieselbe Argumentation kann angewendet werden, um einen entsprechenden horizontalen Streifen S' zu finden. Das eigentliche Ziel der Energiepartitionierung im Fall K_1 ist es, zusätzlich ein Quadrat $Q = S \cap S'$ mit $\lambda^2 \sim \mathcal{L}^2(Q)/\mathcal{L}^2(\Omega)$ zu finden, auf dem die elastische Energie und die Oberflächenenergie sogar in etwa durch den λ^2 -Anteil der Gesamtenergie abgeschätzt werden können.

4.1.1 Energiepartitionierung

Die Hauptaussage in diesem Abschnitt ist das Korollar 4.2, das aus dem Beweis des nächsten Hilfssatzes folgt.

Sei $\lambda \in (0, 1)$ ausgewählt, dann kann immer ein $\omega \subset \Omega$ mit $\lambda = \mathcal{L}^2(\omega)/\mathcal{L}^2(\Omega) \in (0, 1)$ und eine von α , ε und l unabhängige Konstante $c > 0$ gefunden werden, so dass

$$\int_{\omega} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\omega} |D^2 u| \leq c \lambda E_1$$

gilt. Es gibt viele horizontale Streifen S und vertikale Streifen S' , die wir für ω wählen könnten. Würden wir einfach zu dem Schnitt $Q' = S \cap S'$ übergehen und nehmen wir einmal an, dass Q' ein Quadrat der Größe $\mathcal{L}^2(Q') = \lambda^2 l^2$ ist, dann gilt im Allgemeinen nur

$$\int_{Q'} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q'} |D^2 u| \leq c \lambda E_1.$$

Wir wissen aber, dass es mindestens in S ein Quadrat Q'' gibt, so dass

$$\int_{Q''} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q''} |D^2 u| \leq c \lambda^2 E_1.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Wir werden jetzt zeigen, dass es zu einem gefundenen horizontalen Streifen S mindestens einen vertikalen Streifen S' so gibt, dass $Q' = Q''$ gilt. Diese Situation wird in Abbildung 4.1 gezeigt. Der Beweis für diese Existenz zeigt aber mehr. Das werden wir nach dem Lemma als Korollar festhalten.

Lemma 4.1 (Energiepartitionierung - Existenz). *Seien u , Ω , K_1 , ε und E_1 wie in Theorem 1. Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es zwei offene Streifen $S = (0, l) \times (s, s + \lambda) \subset \Omega$ und $S' = (s', s' + \lambda) \times (0, l) \subset \Omega$ mit den energetischen Eigenschaften*

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_S |D^2u| \leq 2\lambda E_1, \quad (4.1)$$

und

$$\int_{S \cap S'} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S \cap S'} |D^2u| \leq 12\lambda^2 E_1. \quad (4.2)$$

und

$$\int_{S'} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'} |D^2u| \leq 3\lambda E_1, \quad (4.3)$$

Beweis. Wir zeigen zunächst drei Behauptungen. Diese sind:

Behauptung 1: Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es einen offenen Streifen $S := (0, l) \times (s, s + \lambda) \subset \Omega$ mit $s \in (0, l(1 - \lambda))$, so dass

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S_1} |D^2u| \leq 2\lambda E_1.$$

Behauptung 2: Seien λ und S wie in Behauptung 1. Zu jedem $p_1 \in (1/2, 1)$ gibt es $\lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor p_1 \rfloor + 1$ offene Quadrate

$$Q_j \in \{((i-1)\lambda, i\lambda) \times (s, s + \lambda) : i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N}\},$$

so dass

$$\int_{Q_j} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q_j} |D^2u| \leq \frac{1}{1 - p_1} \cdot 4\lambda^2 E_1 \quad \forall j \in [1, \lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor p_1 \rfloor + 1] \cap \mathbb{N}.$$

Behauptung 3: Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ und jedem $p_2 \in (1/2, 1)$ gibt es $\lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor p_2 \rfloor + 1$ Streifen

$$S'_k \in \{((i-1)\lambda, i\lambda) \times (0, l) : i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N}\},$$

so dass

$$\int_{S'_k} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_k} |D^2u| \leq \frac{1}{1 - p_2} \cdot 2\lambda E_1 \quad \forall k \in [1, \lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor p_2 \rfloor + 1] \cap \mathbb{N}.$$

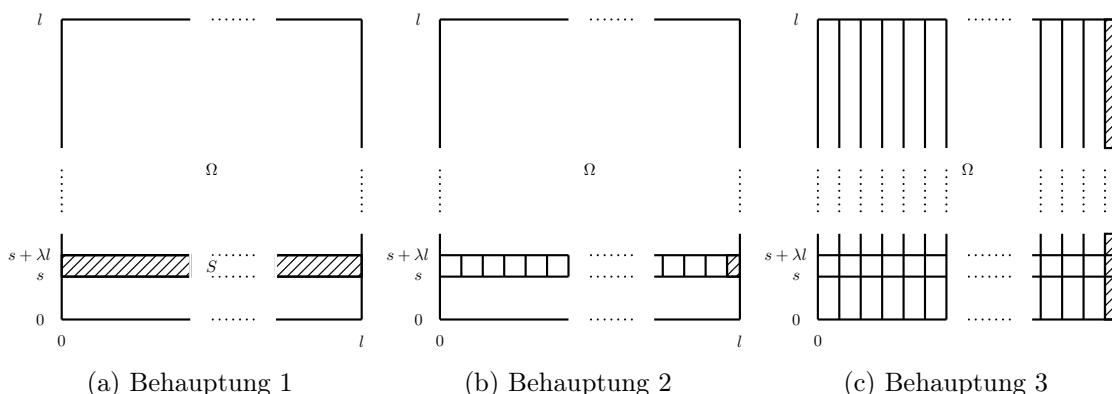


Abbildung 4.2: Die Aussage des Lemmas wird zunächst in drei Teilaussagen zerlegt. In den drei Behauptungen wird vom selben Gitter ausgegangen. Die schraffierten Gebiete in (b) und (c) sind der Bereich, der vom Gitter vernachlässigt wird.

In den Abbildungen 4.2a, 4.2b und 4.2c sind die Gebiete der drei Behauptungen zu sehen. Wir kommen nun zu den Beweisen der drei Behauptungen.

Beweis zur Behauptung 1: Wenn Behauptung 1 falsch wäre, dann gäbe es $\lfloor \lambda^{-1} \rfloor$ Streifen

$$S_j := (0, l) \times ((j - 1)\lambda, j\lambda),$$

so dass

$$\int_{S_j} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S_j} |D^2u| > 2\lambda E_1 \quad \forall j \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N}.$$

Dann wäre

$$E_1 \geq \sum_{j=1}^{\lfloor \lambda^{-1} \rfloor} \left(\int_{S_j} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S_j} |D^2u| \right) > \lfloor \lambda^{-1} \rfloor \cdot 2\lambda E_1 > E_1$$

ein Widerspruch. Hier wurde die Ungleichung

$$x \cdot \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor > \frac{n}{n+1} \quad \forall x \in (0, n^{-1}), \quad n \in \mathbb{N}$$

angewendet. Das beendet den Beweis der Behauptung 1.

Beweis zur Behauptung 2: Sei S wie in Behauptung 1. Wir benötigen die folgende

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Indexmenge. Sei

$$\mathcal{Q} := \left\{ i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{es gibt ein } Q_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (s, s + \lambda l) \subset S, \right. \\ \left. \text{so dass } \int_{Q_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_1} \cdot 4\lambda^2 E_1. \right\}.$$

Außerdem benötigen wir noch die folgende Auswahl von Quadraten. Sei

$$\mathcal{Q} := \{Q_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (s, s + \lambda l) \subset S : i \in \mathcal{Q}\}.$$

Wenn Behauptung 2 falsch wäre, dann hätte die Menge \mathcal{Q} höchstens $\lfloor \lambda^{-1} \rfloor p_1$ Elemente. Dann wäre

$$2\lambda E_1 \geq \int_{S \setminus \cup \mathcal{Q}} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S \setminus \cup \mathcal{Q}} |D^2 u| \\ > \lfloor \lambda^{-1} \rfloor (1-p_1) \cdot \frac{1}{1-p_1} \cdot 4\lambda^2 E_1 > 2\lambda E_1$$

ein Widerspruch. Daher ist Behauptung 2 wahr.

Beweis zur Behauptung 3: Wir benötigen erneut eine spezielle Indexmenge. Sei

$$\mathcal{S} := \left\{ i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{es gibt ein } S'_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (0, l), \text{ so dass} \right. \\ \left. \int_{S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_2} \cdot 2\lambda E_1. \right\}.$$

Wir benötigen noch eine spezielle Auswahl von Streifen. Sei

$$\mathcal{S} := \{S'_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (0, l) : i \in \mathcal{S}\}.$$

Wenn Behauptung 3 falsch wäre, dann hätte die Menge \mathcal{S} höchstens $\lfloor \lambda^{-1} \rfloor p_2$ Elemente. Dann wäre

$$E_1 \geq \int_{\Omega \setminus \cup \mathcal{S}} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\Omega \setminus \cup \mathcal{S}} |D^2 u| \\ > \lfloor \lambda^{-1} \rfloor (1-p_2) \cdot \frac{1}{1-p_2} \cdot 2\lambda E_1 > \lambda E_1$$

ein Widerspruch. Daher ist Behauptung 3 wahr.

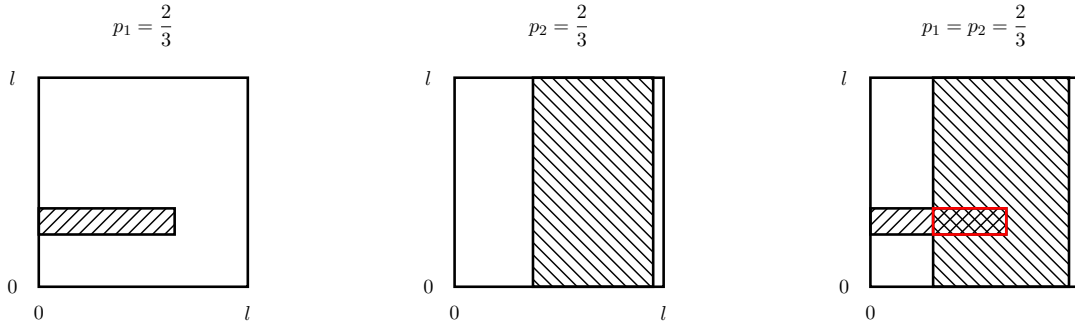


Abbildung 4.3: In Behauptung 2 und 3 wurde nicht ausgeschlossen, dass die Quadrate und Streifen jeweils alle auf einer Seite liegen können. Wenn $p_1 = p_2 = \frac{2}{3}$ gewählt werden, dann überdecken die Quadrate aus $\mathcal{Q} \cap \mathcal{S}$ mindestens ein Drittel von S .

Anwendung von Behauptung 1, 2 und 3: Wir wählen p_1 und p_2 so, dass $\mathcal{Q} \cap \mathcal{S} \neq \emptyset$. Der Parameter p_1 in Behauptung 2 bedeutet

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^2 \left(\bigcup \mathcal{Q} \right) \\ &= \mathcal{L}^2 \left(\bigcup \left\{ Q_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (s, s + \lambda l) : \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \int_{Q_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_1} \cdot 4\lambda^2 E_1, i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N} \right\} \right) \\ &> p_1 \mathcal{L}^2(S). \end{aligned}$$

Der Parameter p_2 in Behauptung 3 bedeutet

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^2 \left(\bigcup \mathcal{S} \right) \\ &= \mathcal{L}^2 \left(\bigcup \left\{ S'_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (0, l) : \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \int_{S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_2} \cdot 2\lambda E_1, i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N} \right\} \right) \\ &> p_2 \mathcal{L}^2(\Omega). \end{aligned}$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Zum Beispiel reicht die Wahl $p_1 = p_2 = \frac{2}{3}$ aus, um

$$\mathcal{L}^2 \left(\bigcup \{Q \in \mathcal{Q} : \text{es gibt ein } S' \in \mathcal{S}, \text{ so dass } Q \subset S'\} \right) \geq \frac{1}{3} \mathcal{L}^2(S)$$

zu sichern, siehe Abbildung 4.3. □

Notation. Der Beweis hat mehr gezeigt. Zu einem gefundenen horizontalen Streifen S mit der Eigenschaft (4.1) gibt es viele vertikale Streifen S' mit der Eigenschaft (4.3), so dass jedes Quadrat $S \cap S'$ auch die Eigenschaft (4.2) hat. Wir können auch die Anzahl von solchen Quadraten vorher festlegen. Geben wir $p_1, p_2 \in (1/2, 1)$ vor, so seien $\mathcal{P}(\lambda) := \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}$ und $p(\lambda) := \text{card } \mathcal{P}(\lambda)$. Die Parameter p_1 und p_2 können nicht beliebig klein gewählt werden, da wir $\mathcal{P}(\lambda) = \emptyset$ vermeiden müssen. Es ist $p = \lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor (p_1 + p_2 - 1) \rfloor$. Wir werden diese Größen häufiger benötigen. Wir wollen die Abhängigkeiten hier noch einmal hervorheben. Seien

$$\mathcal{Q}(\lambda, p_1) := \left\{ i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{es gibt ein } Q_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (s, s + \lambda l) \subset S(\lambda), \right. \\ \left. \text{so dass } \int_{Q_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_1} \cdot 4\lambda^2 E_1 \right\}$$

und

$$\mathcal{Q}(\lambda, p_1) := \{Q_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (s, s + \lambda l) \subset S(\lambda) : i \in \mathcal{Q}(\lambda)\}.$$

Seien außerdem

$$\mathcal{S}(\lambda, p_2) := \left\{ i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{Für } S'_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (0, l) \text{ gilt} \right. \\ \left. \int_{S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_2} \cdot 2\lambda E_1 \right\}.$$

Die zugehörige Auswahl von Streifen ist

$$\mathcal{S}(\lambda, p_2) := \{S'_i := ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (0, l) : i \in \mathcal{S}(\lambda, p_2)\}.$$

Dann seien

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in (0, 1), \quad p_1, p_2 \in (1/2, 1), \\ \mathcal{P}(\lambda, p_1, p_2) := \mathcal{Q}(\lambda, p_1) \cap \mathcal{S}(\lambda, p_2), \\ p(\lambda, p_1, p_2) := \text{card } \mathcal{P}(\lambda, p_1, p_2), \\ \mathcal{G}(\lambda, p_1, p_2) := \{Q \in \mathcal{Q} : \text{es gibt ein } S' \in \mathcal{S}, \text{ so dass } Q \subset S'\} \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

Der Beweis von Lemma 4.1 hat Folgendes gezeigt.

Korollar 4.2 (Energiepartitionierung - geometrische und quantitative Version). *Seien $u, \Omega, K_1, \varepsilon$ und E_1 wie in Theorem 1. Seien p_1, p_2, \mathcal{P} und p wie in (4.4). Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es einen offenen Streifen $S = (0, l) \times (s, s + \lambda l) \subset \Omega$ und p offene Streifen $S'_i = ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \times (0, l) \subset \Omega, i \in \mathcal{P}$, mit den energetischen Eigenschaften*

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_S |D^2u| \leq 2\lambda E_1 \quad (4.5)$$

und

$$\int_{S \cap S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S \cap S'_i} |D^2u| \leq \frac{4}{1-p_1} \lambda^2 E_1 \quad \forall i \in \mathcal{P}(\lambda) \quad (4.6)$$

und

$$\int_{S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_i} |D^2u| \leq \frac{2}{1-p_2} \lambda E_1 \quad \forall i \in \mathcal{P}(\lambda), \quad (4.7)$$

Notation. Die $S \cap S'_i, i \in \mathcal{P}$, sind spezielle Quadrate aus \mathcal{Q} , nämlich solche, die auch in \mathcal{G} sind. Wir werden ab jetzt $Q_i := S \cap S'_i$ schreiben.

4.1.2 Energetische Interaktion

Sei $Q \in \mathcal{G}$ wie in (4.6) aus Korollar 4.2. Mit Hilfe von Korollar 4.2 können wir die elastische Energie und die Oberflächenenergie wie folgt getrennt behandeln. Einerseits liefert die Höldersche Ungleichung die Abschätzung

$$\int_Q \text{dist}(Du(x, y), K_1) \, dx dy \leq c\lambda^2 l E_1^{1/2}.$$

Andererseits gibt es wegen der Poincaréschen Ungleichung ein $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, so dass

$$\int_Q |Du(x, y) - M| \, dx dy \leq c \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1.$$

Das nächste Lemma sagt aus, dass wir M mit einem geeigneten $F \in K_1$ austauschen können und dabei einen Fehler verursachen, der in etwa die Summe der beiden Abschätzungen ist.

Lemma 4.3 (BV-Poincarésche Lokalisierung einer festen K_1 -Matrix). *Seien u , Ω , l , ε und E_1 wie in Theorem 1. Seien λ , p_1 , \mathcal{P} , p und $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.6). Dann gibt es zu jedem $i \in \mathcal{P}$ ein $F_i \in K_1$ und eine von α , ε , l , λ , p und p_1 unabhängige Konstante c_P , so dass*

$$\int_{Q_i} |Du(x, y) - F_i| \, dx dy \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (4.8)$$

Beweis. Seien $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.6). Wir suchen uns ein festes Q_i aus und setzen $Q := Q_i$. Sei

$$M := \frac{1}{\mathcal{L}^2(Q)} \int_Q Du(x, y) \, dx dy,$$

dann gibt es wegen der Poincaréschen Ungleichung eine Konstante c_P , so dass

$$\int_Q |Du(x, y) - M| \, dx dy \leq c_P \lambda l \int_Q |D^2 u|.$$

Mit (4.6) folgt

$$\int_Q |Du(x, y) - M| \, dx dy \leq \frac{4}{1-p_1} c_P \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1. \quad (4.9)$$

Bisher haben wir nur die Oberflächenenergie betrachtet. Jetzt bringen wir auch die elas-

tische Energie ins Spiel. Zunächst ist

$$\text{dist}(M, K_1) \leq |M - Du(x, y)| + \text{dist}(Du(x, y), K_1) \quad \forall (x, y) \in Q.$$

Dann gilt auch

$$\mathcal{L}^2(Q) \cdot \text{dist}(M, K_1) \leq \int_Q |M - Du(x, y)| \, dx dy + \int_Q \text{dist}(Du(x, y), K_1) \, dx dy. \quad (4.10)$$

Das erste Integral auf der rechten Seite von (4.10) haben wir schon in (4.9) durch die Oberflächenenergie abgeschätzt. Das letzte Integral in (4.10) kann mit Hilfe der Hölder'schen Ungleichung in elastische Energie umgewandelt werden. Daher können wir (4.10) verbessern zu

$$\text{dist}(M, K_1) \leq \frac{4}{1-p_1} c_P \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon \mathcal{L}^2(Q)} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1} \frac{\sqrt{\lambda^2 l^2 \lambda^2}}{\mathcal{L}^2(Q)}} E_1^{1/2}. \quad (4.11)$$

Da die Menge K_1 kompakt ist, gibt es ein $F \in K_1$, so dass $|M - F| = \text{dist}(M, K_1)$. Insgesamt erhalten wir aus den Ungleichungen (4.9) und (4.11)

$$\int_Q |Du(x, y) - F| \, dx dy \leq \frac{4}{1-p_1} c_P \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E + \frac{4}{1-p_1} c_P \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l E_1^{1/2},$$

Eine Zusammenfassung der Summanden ergibt schließlich die Behauptung für das am Anfang fest gewählte Q . Da der Beweis für alle anderen Q_i analog geführt werden kann, folgt die Behauptung des Lemmas. \square

Eine weitere Anwendung der Poincaréschen Ungleichung liefert das folgende Lemma.

Lemma 4.4 ($W^{1,1}$ -Poincarésche Lokalisierung). *Seien u , Ω , l , ε und E_1 wie in Theorem 1. Seien λ , p_1 , \mathcal{P} , p und $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$ wie in der Energiepartitionierung (4.6). Seien F_i und c_P wie in Lemma 4.3. Dann gibt es eine von α , ε , λ , l , p und p_1 unabhängige Konstante $c'_P > 0$ und Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^2$, so dass*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_i} \left| u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right| \, dx dy \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 l^2 E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Beweis. Seien p_1 , \mathcal{P} , p , $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.6) und F_i wie in Lemma 4.3. Wir suchen uns ein fest gewähltes Q_i aus und setzen $Q := Q_i$. Wegen

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

der Poincaréschen Ungleichung gibt es eine Konstante $c_{P'} > 0$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| dx dy \leq 2c_{P'} \lambda l \int_Q |Du(x, y) - F| dx dy. \quad (4.13)$$

Auf der rechten Seite von (4.13) wenden wir Lemma 4.3 an. Das beendet den Beweis für das am Anfang fest gewählte Q . Da der Beweis für alle anderen Q_i analog geführt werden kann, folgt die Behauptung des Lemmas. \square

Bemerkung. Die Konstanten c_P und $c_{P'}$ können mit Hilfe von [7] und [1] bestimmt werden. Wir benötigen später die schärfere Aussage

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \int_{Q_i} \left| \left(u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right) e_1 \right| dx dy, \int_{Q_i} \left| \left(u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right) e_2 \right| dx dy \right\} \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 l^2 E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

da wir verschiedene Argumentationen verwenden werden, abhängig davon, welche Komponente von u benötigt wird.

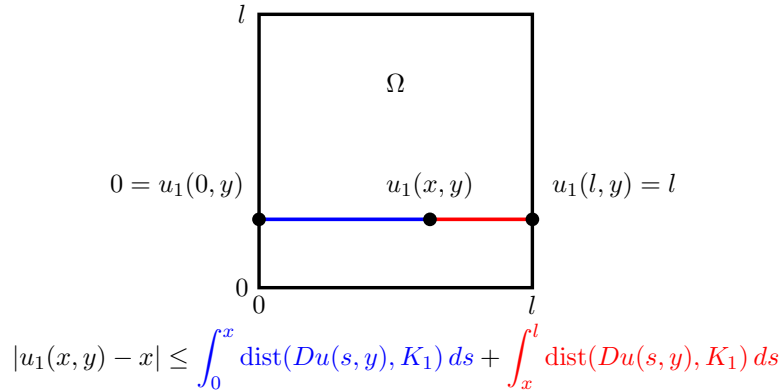


Abbildung 4.4: Aussage von Lemma 4.5.

4.1.3 Rigidität der ersten Komponente des Vektors u

Das nächste Lemma sagt aus, dass $|u_1(x, y) - x|$ punktweise durch elastische Energieanteile kontrolliert wird, siehe Abbildung 4.4. Die Aussage aus Lemma 4.5 werden wir in dieser Arbeit noch in verschiedenen Versionen wiederfinden. Nach dem Beweis von Lemma 4.5 gehen wir auf diesen Punkt kurz ein.

Lemma 4.5 (Punktweise Rigidität). *Seien u , Ω , K_1 wie in Theorem 1. Dann gilt*

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Beweis. Mit Hilfe der Randdaten wird $u_1(x, y) - x$ in elastische Energieanteile umgewandelt. Wegen $|(Du) \cdot e_1| \leq 1 + \text{dist}(Du, K_1)$ gilt einerseits

$$u_1(x, y) = u_1(0, y) + \int_0^x \partial_1 u_1(s, y) ds \leq \int_0^x |\partial_1 u_1(s, y)| ds \leq x + \int_0^x \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds,$$

da $u_1(0, y) = 0$; andererseits gilt auch

$$u_1(x, y) = u_1(l, y) - \int_x^l \partial_1 u_1(s, y) ds \geq l - (l - x) - \int_x^l \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds,$$

da $u_1(l, y) = l$. Daher gilt

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

□

Bemerkung. Solange die Werte der Randdaten $u_1(0, y) = 0$ und $u_1(l, y) = l$ sich nicht ändern, ist die Aussage von Lemma 4.5 auch für $\Omega = (0, l) \times (0, h)$ mit beliebigem $h > 0$ richtig. Diese Version werden wir in Abschnitt 4.2.3 verwenden.

Die Aussage von Lemma 4.5 ist auch für K_2 richtig, weil wir mit $|(Du) \cdot e_1| \leq 1 + \text{dist}(Du, K_2)$ den selben Beweis führen können. Diese Version werden wir in Abschnitt 6.1 benötigen.

In Abschnitt 6.2 werden wir die Version auf dem Rechteck $\Omega = (0, l) \times (0, h)$, $h > 0$, gebrauchen.

4.1.4 Einige Hilfsabschätzungen

Seien S , S' und $Q := S \cap S'$ wie in Korollar 4.2. Wir listen hier einige Abschätzungen auf; dabei ist $c > 0$ eine Konstante, die nicht von α , ε und l abhängt und von Zeile zu Zeile verschieden sein kann:

- $\int_S |u_1(x, y) - x| dx dy \leq c\lambda^2 E_1^{1/2}$ (Lemma 4.6).
- $\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \leq c\lambda E_1^{1/2}$ (Lemma 4.7).
- $\int_{S'} |\partial_2 u_2(x, y) - 1| dx dy \leq c\lambda E_1^{1/2} + c\alpha^2 \lambda^2$ (Lemma 4.8).
- $\int_Q |u_2(x, y) - y| dx dy \leq c\lambda^2 l^2 E_1^{1/2} + c\alpha^2 \lambda^2 l^3$ (Lemma 4.9).
- $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq c\lambda^{3/2} E_1^{1/4} + c\lambda^{1/2} E_1^{3/4}$ (Lemma 4.10 - optional).
- $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq c\lambda^{3/2} E_1^{1/4} + c\tau^{-1} \lambda^{1/2} E_1^{1/2}$ (Lemma 4.11).
- $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq c\tau^{1/2} \lambda^2 + c\tau^{-3/2} \lambda E_1$ (Lemma 4.12 - wegweisend).

Für den Beweis der unteren Schranke von Theorem 1 in Abschnitt 4.1.6 würden Lemma 4.10, Lemma 4.11 und Lemma 4.12 zur selben Skalierung der unteren Schranke führen. Der Vorteil von Lemma 4.11 gegenüber von Lemma 4.10 ist der, dass die Konstanten in der Aussage besser sind. Der leichtere Weg über Lemma 4.10 verursacht schlechtere Konstanten, weil dort zu häufig die Höldersche Ungleichung zum Einsatz kommt. Der mehr geometrische Weg über Lemma 4.11 führt einen frei wählbaren Parameter $\tau \in (0, 1)$ ein. Im Wesentlichen ist das der Grund für die Verbesserung. Lemma 4.12 bietet viel mehr Möglichkeiten, die Konstante C in $C\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}l^{4/3} \leq E_1$ zu verbessern. Wir werden in Abschnitt 4.2 auf Lemma 4.11 zurückgreifen und dort von dem zusätzlichen Hilfsparameter τ Gebrauch machen müssen.

Lemma 4.6. *Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.5). Dann gilt*

$$\int_S |u_1(x, y) - x| dx dy \leq \sqrt{2}\lambda^2 E_1^{1/2}.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

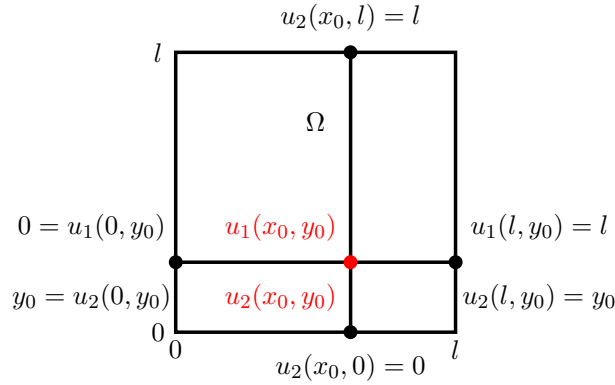


Abbildung 4.5: In einem Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ gibt es acht Möglichkeiten den Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung anzuwenden. Benötigt werden nur sechs Möglichkeiten.

Beweis. Zuerst wenden wir Lemma 4.5 an. Dann bilden wir das Integral über S . Danach folgt die Behauptung mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 4.5. \square

Lemma 4.7. Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.5). Dann gilt

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2^{3/2} \lambda E_1^{1/2}.$$

Beweis. Wir betrachten zuerst die Zerlegung

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 = (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ - (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^-, \quad (4.14)$$

wobei

$$\begin{aligned} (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ &:= \max \{ \partial_1 u_1(x, y) - 1, 0 \}, \\ (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^- &:= \max \{ -(\partial_1 u_1(x, y) - 1), 0 \}. \end{aligned}$$

Wegen $u_1(0, y) = 0 \, \forall y \in [0, l]$ und $u_1(l, y) = l \, \forall y \in [0, l]$ ist

$$\int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ \, dx = \int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^- \, dx \quad \forall y \in [0, l]. \quad (4.15)$$

Aus (4.14) und (4.15) folgt

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx = 2 \int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ \, dx \quad \forall y \in [0, l]. \quad (4.16)$$

Da $|Fe_1| = 1$ für alle $F \in K_1$, gilt

$$|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Hieraus folgt

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 \leq |\partial_1 u_1(x, y)| - 1 \leq \text{dist}(Du(x, y), K_1) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Dann gilt

$$(\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ = \max\{\partial_1 u_1(x, y) - 1, 0\} \leq \text{dist}(Du(x, y), K_1) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Diese Abschätzung verbessert (4.16) zu

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx \leq 2 \int_0^l \text{dist}(Du(x, y), K_1) dx. \quad (4.17)$$

Wegen der Hölderschen Ungleichung und (4.5) erhalten wir

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \leq 2\sqrt{2}\lambda l E_1^{1/2}.$$

□

Lemma 4.8. Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$, p_2 , \mathcal{P} und S'_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.7). Dann gilt

$$\int_{S'_i} |\partial_2 u_2(x, y) - 1| dx dy \leq 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda l E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda^2 \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Seien \mathcal{P} , p_2 , S'_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.7). Wir wählen ein beliebiges, aber festes S'_i aus und setzen $S' := S'_i$. Zu jedem $(x, y) \in S'$ wählen wir ein $F(x, y) \in K_1$ so aus, dass $|Du(x, y) - F(x, y)| = \text{dist}(Du(x, y), K_1)$. Zunächst gilt $|Fe_2| = \sqrt{1 + \alpha^2} \forall F \in K_1$. Außerdem gilt $\sqrt{1 + \alpha^2} \leq 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 \forall \alpha \geq 0$. Dann ist

$$\partial_2 u_2(x, y) - 1 \leq \text{dist}(Du(x, y), K_1) + \frac{1}{2}\alpha^2.$$

Mit (4.7) aus Korollar 4.2 folgt dann wie in dem Beweis von Lemma 4.7

$$\int_{S'} |\partial_2 u_2(x, y) - 1| dy dx \leq 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda l E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda^2.$$

Das beendet den Beweis für den am Anfang fest gewählten Streifen S' . Da der Beweis für

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

alle anderen S'_i analog geführt werden kann, folgt die Behauptung des Lemmas. \square

Lemma 4.9. *Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$, p_2 , \mathcal{P} , p und $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$ wie in der Energiepartitionierung (4.6). Dann gilt*

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dx dy \leq 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda^2 l^2 E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda^2 l^3 \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Seien $Q_i \in \mathcal{G}$ und S'_i wie in Korollar 4.2. Für alle $i \in \mathcal{P}$ ist

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dy dx \leq \lambda \int_{S'_i} |\partial_2 u_2(x, t) - 1| \, dt dx.$$

Mit Lemma 4.8 folgt

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dy dx \leq \lambda \left(2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda l E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda l^2 \right) \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Das beendet den Beweis. \square

Abschätzungen für $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| \, dx dy$

Der Beweis des nächsten Hilfssatzes ist elementar. Dort wird der Term $|\partial_1 u_1(x, y) - 1|$ über Lemma 4.8 abgearbeitet.

Lemma 4.10 (Qualitative L^1 -Abschätzung für $\partial_1 u_2$). *Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.5). Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| \, dx dy \leq (2^{3/4} + 2^{5/4}) \lambda^{3/2} E_1^{1/4} + (2^{1/4} + 2^{3/4}) \lambda^{1/2} E_1^{3/4}.$$

Beweis. Sei hier $W := \text{dist}(Du(x, y), K_1)$. Zunächst gilt für jedes $(x, y) \in \Omega$

$$|\partial_1 u_2(x, y)| = (|\partial_1 u(x, y)| + |\partial_1 u_1(x, y)|)^{1/2} (|\partial_1 u(x, y)| - |\partial_1 u_1(x, y)|)^{1/2}.$$

Wegen $|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + W$ und $|\partial_1 u_1(x, y)| \geq 1 - |\partial_1 u_1(x, y) - 1|$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt sogar

$$|\partial_1 u_2(x, y)| \leq \sqrt{2} |\partial_1 u(x, y)|^{1/2} (W + |\partial_1 u_1(x, y) - 1|)^{1/2} \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Wegen $|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + W$ und $|\partial_1 u(x, y)|^{1/2} \leq 1 + \frac{1}{2}W$ für alle $(x, y) \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}|\partial_1 u_2(x, y)| &\leq (1 + \frac{1}{2}W) (W^{1/2} + |\partial_1 u_1(x, y) - 1|^{1/2}) \\ &= W^{1/2} + \frac{1}{2}W^{3/2} + |\partial_1 u_1(x, y) - 1|^{1/2} + \frac{1}{2}|\partial_1 u_1(x, y) - 1|^{1/2}W. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Wegen Lemma 4.7, (4.5) und der Hölderschen Ungleichung sind

$$\begin{aligned} \int_S W^{1/2} dx dy &\leq (\mathcal{L}^2(S))^{3/4} 2^{1/4} \lambda^{1/4} E_1^{1/4} = 2^{1/4} \lambda^{3/2} E_1^{1/4}, \\ \int_S W^{3/2} dx dy &\leq (\mathcal{L}^2(S))^{1/4} 2^{3/4} \lambda^{3/4} E_1^{3/4} = 2^{3/4} \lambda^{1/2} E_1^{3/4}, \\ \int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1|^{1/2} dx dy &\leq (\mathcal{L}^2(S))^{1/2} \left(\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{3/4} \lambda^{3/2} E_1^{1/4}, \\ \int_S W |\partial_1 u_1(x, y) - 1|^{1/2} dx dy &\leq \left(\int_S W^2 dx dy \right)^{1/2} \left(\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{5/4} \lambda^{1/2} E_1^{3/4}. \end{aligned}$$

Also haben wir insgesamt

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq (2^{3/4} + 2^{5/4}) \lambda^{3/2} E_1^{1/4} + (2^{1/4} + 2^{3/4}) \lambda^{1/2} E_1^{3/4}.$$

□

Im Beweis von Lemma 4.10 haben wir gesehen, dass der Term $|\partial_1 u_1(x, y) - 1|$ nicht wirklich von Vorteil war. Zwar kann $\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy$ über Lemma 4.8 in elastische Energieanteile umgewandelt werden, jedoch ist es wegen der Randdaten angenehmer mit $0 = \int_S (\partial_1 u_1(x, y) - 1) dx dy$ zu arbeiten. Außerdem ist in der Aussage von Lemma 4.10 der unangenehme Term $E_1^{3/4}$ entstanden. Die Randdaten kommen nun in dem Beweis des nächsten Hilfssatzes zum Einsatz.

Lemma 4.11 (Qualitative L^1 - und quantitativ bessere Abschätzung für $\partial_1 u_2$). *Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.5). Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq 2^{3/4} (1 + \tau)^{1/2} \lambda^{3/2} E_1^{1/4} + 2^{1/2} \frac{1 + \tau}{\tau} \lambda E_1^{1/2}.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Beweis. Nach Pythagoras gilt

$$|\partial_1 u_1(x, y)| = \sqrt{|\partial_1 u(x, y)|^2 - |\partial_1 u_2(x, y)|^2}.$$

Wegen $|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1)$ ist

$$|\partial_1 u_1(x, y)| \leq (1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1)) \sqrt{1 - \left(\frac{|\partial_1 u_2(x, y)|}{1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1)} \right)^2}.$$

Wegen $1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1) \geq |\partial_1 u(x, y)| \geq |\partial_1 u_2(x, y)|$ und $\sqrt{1 - t^2} \leq 1 - \frac{1}{2}t^2 \forall t \in [0, 1]$ ist

$$|\partial_1 u_2(x, y)|^2 \leq 2(1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1))(1 - \partial_1 u_1(x, y) + \text{dist}(Du(x, y), K_1)).$$

Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann ist für jedes solche τ ist

$$|\partial_1 u_2(x, y)|^2 = |\partial_1 u_2(x, y)|^2 \chi_{\{\text{dist}(Du(x, y), K_1) \leq \tau\}} + |\partial_1 u_2(x, y)|^2 \chi_{\{\text{dist}(Du(x, y), K_1) > \tau\}}.$$

Daher ist

$$\begin{aligned} |\partial_1 u_2(x, y)|^2 &\leq 2(1 + \tau)(1 - \partial_1 u_1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1)) \chi_{\{\text{dist}(Du(x, y), K_1) \leq \tau\}} \\ &\quad + \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) \left(\frac{1 + \tau}{\tau} \right)^2 \chi_{\{\text{dist}(Du(x, y), K_1) > \tau\}}. \end{aligned}$$

Da die Summanden auf der rechten Seite positiv sind, gilt

$$|\partial_1 u_2(x, y)|^2 \leq 2(1 + \tau)(1 - \partial_1 u_1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1)) + \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) \left(\frac{1 + \tau}{\tau} \right)^2.$$

Wegen

$$0 = \int_S (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy$$

gilt

$$\begin{aligned} \int_S |\partial_1 u_2(x, y)|^2 \, dx dy &\leq 2(1 + \tau) \int_S \text{dist}(Du(x, y), K_1) \, dx dy \\ &\quad + \left(\frac{1 + \tau}{\tau} \right)^2 \int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) \, dx dy. \end{aligned}$$

Aus der Hölderschen Ungleichung und mit Korollar 4.2 erhalten wir

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq 2^{3/4} (1 + \tau)^{1/2} \lambda^{3/2} E_1^{1/4} + \sqrt{2} \frac{1 + \tau}{\tau} \lambda E_1^{1/2}.$$

□

Die Aussage des nächsten Hilfssatzes ist hier optional. Dennoch ist er an dieser Stelle höchst interessant und zeigt uns im frühen Stadium schon, dass wir mit der Voraussetzung $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$ vorsichtiger umgehen müssen. Wir formulieren zunächst die Aussage:

Lemma 4.12 (E_1 -affin lineare Abschätzung für $\partial_1 u_2$). *Seien u , Ω , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.5). Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq \sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_1.$$

Beweis. Wie in dem Beweis von Lemma 4.11 leiten wir zunächst die folgende Ungleichung her:

$$|\partial_1 u_2(x, y)|^2 \leq 2(1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1))(1 - \partial_1 u_1(x, y) + \text{dist}(Du(x, y), K_1)).$$

Diesmal arbeiten wir mit der folgenden Behandlung der rechten Seite weiter:

$$\begin{aligned} |\partial_1 u_2(x, y)|^2 &\leq 2(1 - \partial_1 u_1(x, y)) + 2 \text{dist}(Du(x, y), K_1)(1 - \partial_1 u_1(x, y)) \\ &\quad + 2 \text{dist}(Du(x, y), K_1)(1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1)) \\ &\leq 2(1 - \partial_1 u_1(x, y)) + 6 \text{dist}(Du(x, y), K_1) + 4 \text{dist}^2(Du(x, y), K_1). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Für $\tau \in (0, \infty)$ betrachten wir auf der rechten Seite die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} &6 \text{dist}(Du(x, y), K_1) + 4 \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) \\ &= (6 \text{dist}(Du(x, y), K_1) + 4 \text{dist}^2(Du(x, y), K_1)) \chi_{\{\text{dist}(Du(x, y), K_1) \geq \tau\}} \\ &\quad + (6 \text{dist}(Du(x, y), K_1) + 4 \text{dist}^2(Du(x, y), K_1)) \chi_{\{\text{dist}(Du(x, y), K_1) < \tau\}} \\ &\leq 6\tau + \frac{6 + 8\tau}{\tau} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Wegen

$$0 = \int_S (1 - \partial_1 u_1(x, y)) dx dy \quad (4.21)$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

folgt mit (4.19), (4.20), (4.21) und (4.5)

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)|^2 dx dy \leq 6\tau \lambda l^2 + \frac{16\tau + 12}{\tau} \lambda E_1. \quad (4.22)$$

Mit $\sqrt{1+t} \leq 1 + \frac{t}{2} \forall t \geq 0$ und mit der Hölderschen Ungleichung folgt aus (4.22)

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq \sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_1.$$

□

Um zu entscheiden, wie nahe Du an K_1 ist, kann man z.B. die Fallunterscheidung in $|\partial_1 u_2| \leq \alpha/2$ und $|\partial_1 u_2| > \alpha/2$ vornehmen. Interessant ist jetzt der letzte Fall. Es gibt zwei naheliegende Wahlen von τ . Die erste Möglichkeit $\tau^{1/2} \lesssim \alpha$ zu wählen, führt zu $\alpha^4 l^2 \lesssim E_1$. Die zweite Möglichkeit über die Wahl $\alpha \tau^{3/2} l^2 \sim \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$ führt zu $\varepsilon \lesssim \alpha^4 l$, weil wir $\tau^{1/2} \lesssim \alpha$ benötigen.

Wir werden in der Tat im nächsten Abschnitt sehen, dass eine Fallunterscheidung bei ε geben wird. Tatsächlich müssen wir zwischen $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l)$ und $\varepsilon \in [\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l, \varepsilon \alpha l]$ unterscheiden.

4.1.5 Struktur von K_1 und Strategie

Wie schon in der Bemerkung nach Lemma 4.4 angemerkt, werden wir in dem Beweis der unteren Schranke von Theorem 1 verschiedene Argumentationen verwenden, abhängig davon, auf welche Komponente von u wir uns fokussieren sollten. Das wird in Lemma 4.13 erläutert.

Durch Lemma 4.15 werden wir erfahren, dass $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ die richtige Wahl für λ sein wird, wobei $\Lambda > 0$ eine von α , ε und l unabhängige Konstante ist. In Lemma 4.15 wird mit u_1 argumentiert, was der leichtere Teil im Beweis der unteren Schranke von Theorem 1 ist. Der schwierige Teil ist die Argumentation über u_2 . Versucht man bei u_2 für das selbe λ genauso zu argumentieren wie bei u_1 , so stellt man fest, dass die Argumente nur für nicht allzu kleine ε funktionieren. Das ist die Aussage in Lemma 4.19. Die Herleitung der unteren Schranke für die restlichen Fälle ist in Lemma 4.18 zu finden.

Während die Skalierung bei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ in Lemma 4.15 und Lemma 4.19 durch Optimierung nach λ explizit berechnet werden kann, geht diese Art von Bestimmung der Skalierung von λ in Lemma 4.18 verloren. Dort wird im Wesentlichen $\alpha^4 l^2$ in $\alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$ umgewandelt.

Wir können die Aufgabe der vier genannten Hilfssätze wie folgt zusammenfassen:

- Lemma 4.13 (Struktur von K_1): Vervollständigung der Ungleichungskette aus Lemma 4.4. Eine Fallunterscheidung in dem Beweis der unteren Schranke wird nötig sein.
- Lemma 4.15 (Argumentation über u_1): Die Skalierung bei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ für den einfacheren Teil des Beweises der unteren Schranke wird hergeleitet. Für alle anderen Fälle muss diese Wahl von λ noch bestätigt werden.
- Lemma 4.18 (Argumentation über u_2 - Teil 1): Eine weitere Fallunterscheidung wird nötig sein. Die Herleitung der unteren Schranke wird für kleine ε durch Umwandlung geschehen.
- Lemma 4.19 (Argumentation über u_2 - Teil 2): Bestätigung der Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ für nicht allzu kleine ε .

Lemma 4.13 (Struktur von K_1). *Für jedes $\lambda \in (0, 1)$, jedes $\theta \in (0, (\sqrt{5}-1)/2)$ und jedes Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{L}^2(Q) = \lambda^2 l^2$ gilt Folgendes: Falls $|F_{21}| < \theta \alpha$, dann gilt*

$$\frac{5}{16}(1 - \theta - \theta^2)\alpha\lambda^3 l^3 \leq \min_{F \in K_1, a \in \mathbb{R}^2} \int_Q \left| \left((1-F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) e_1 \right| dx dy. \quad (4.23)$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Falls $|F_{21}| \geq \theta\alpha$, dann gilt

$$\frac{5}{16}\theta\alpha\lambda^3l^3 \leq \min_{F \in K_1, a \in \mathbb{R}^2} \int_Q \left| \left((1-F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) \cdot e_2 \right| dx dy. \quad (4.24)$$

Beweis. Sei $F \in K_1$, dann hat die Matrix $1-F$ die Form

$$1-F = \begin{pmatrix} 1 - \cos(\phi) & \pm\alpha \cos(\phi) + \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & 1 - \cos(\phi) \pm \alpha \sin(\phi) \end{pmatrix},$$

wobei $\phi = \phi(F) \in [-\pi, \pi]$. Wir teilen den Beweis in zwei Teile auf. Entweder ist $|F_{21}| \geq \theta\alpha$ oder $|F_{21}| < \theta\alpha$.

Fall 1: $|F_{21}| \geq \theta\alpha$. Wir beginnen mit

$$\int_{(0,1)^2} |x+ty| dy dx = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}t^2 & t \in [-1, 0], \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t & t \in (0, \infty), \\ -\frac{1}{6} \frac{3t+3t^2+2}{t} & t \leq -1. \end{cases}$$

Dann ist

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \int_{(0,1)^2} |x+ty| dy dx = \frac{5}{16}.$$

Daher

$$\inf_{\substack{t \in \mathbb{R} \\ s \in \mathbb{R}}} \int_{(0,1)^2} |x+ty+s| dy dx = \frac{5}{16}. \quad (4.25)$$

Nun betrachten wir

$$\int_Q \left| -F_{21}x + (1-F_{22})y - a_2 \right| dy dx = |F_{21}| \int_Q \left| -x + \frac{1-F_{22}}{F_{21}}y - \frac{a_2}{F_{21}} \right| dy dx.$$

Wegen (4.25) ist

$$\min_{\substack{F \in K_1 \\ |F_{21}| \geq \theta\alpha \\ a \in \mathbb{R}^2}} \int_Q \left| \left((1-F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) \cdot e_2 \right| dx dy \geq \frac{5}{16}\theta\alpha\lambda^3l^3.$$

Fall 2: $|F_{21}| < \theta\alpha$. Dann gilt $1-F_{11} < \theta^2\alpha^2$. Damit bei

$$\alpha \cos(\phi) \pm \sin(\phi) > \alpha - \alpha + \alpha \cos(\phi) - |\sin(\phi)| > \alpha(1 - \theta - \theta^2)$$

die rechte Seite positiv ist, mussten wir $\theta \in (0, (\sqrt{5}-1)/2)$ voraussetzen. Dann gilt die

Implikation

$$|F_{21}| < \theta\alpha \implies |F_{12}| > \alpha(1 - \theta - \theta^2).$$

Nun betrachten wir

$$\int_Q |(1 - F_{11})x - F_{12}y - a_1| dydx = |F_{12}| \int_Q \left| \frac{1 - F_{11}}{F_{12}}x - y - \frac{a_1}{F_{12}} \right| dydx.$$

Wegen (4.25) ist

$$\frac{5}{16} (1 - \theta - \theta^2) \alpha \lambda^3 l^3 \leq \min_{F \in K_{1,a} \in \mathbb{R}^2} \int_Q \left| \left((1 - F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) \cdot e_1 \right| dx dy.$$

□

Jetzt wollen wir die Aussage dieses Lemmas mit den Aussagen aus Lemma 4.4 verknüpfen und eine Strategie entwickeln.

Bemerkung 4.14 (Teil 1). Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in [1, \lfloor \lambda^{-1} \rfloor p] \cap \mathbb{N}$ wie in Lemma 4.4. Jede Komponente $(F_i)_{21}$ von F_i wird im Sinne von Lemma 4.13 untersucht. Wir bilden zwei Fälle:

- Fall 1: Es gibt ein $i_0 \in \mathcal{P}$, so dass $|(F_{i_0})_{21}| < \theta\alpha$.
- Fall 2: Es gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.

Im ersten Fall liefert (4.23) aus Lemma 4.13 und eine Dreiecksungleichung

$$\frac{5}{16} (1 - \theta - \theta^2) \alpha \lambda^3 l^3 \leq \int_{Q_{i_0}} |u_1(x, y) - x| dx dy + \int_{Q_{i_0}} |u_1(x, y) - xF_{11} - yF_{12} - (a_{i_0})_1| dy dx.$$

Im zweiten Fall erhalten wir wegen (4.24) aus Lemma 4.13 analog

$$\begin{aligned} \frac{5}{16} \theta \alpha \lambda^3 l^3 \left\lfloor \left\lfloor \frac{1}{\lambda} \right\rfloor p \right\rfloor &\leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dx dy \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - xF_{21} - yF_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 4.4, Korollar 4.2 und Lemma 4.5 lässt sich der erste Fall vollständig bearbeiten. Das wollen wir zunächst im nächsten Lemma festhalten.

Lemma 4.15 (Argumentation über u_1). Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$ wie in Lemma 4.4. Seien $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\alpha_0 \in (0, 1)$,

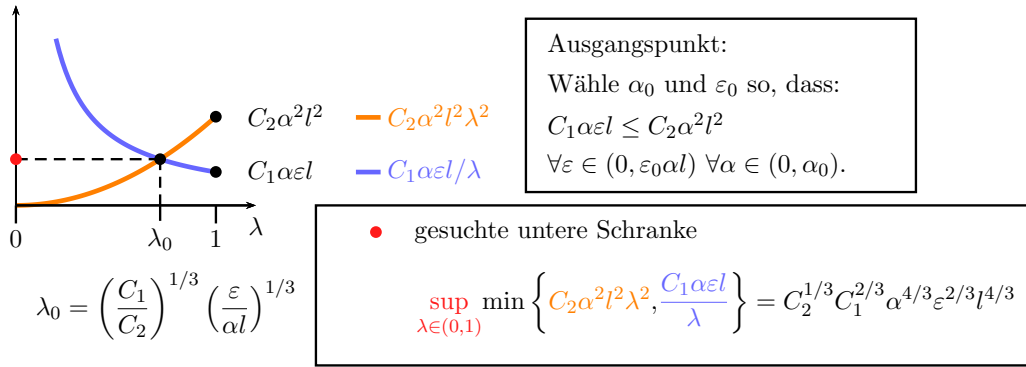


Abbildung 4.7: Situation in Schritt 4.

Schritt 3: Umwandlung des restlichen Energieanteils in elastische Energie. Mit der Hölderschen Ungleichung, Korollar 4.2 und Lemma 4.5 folgt

$$\int_Q |u_1(x, y) - x| dy dx \leq \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l^2 E_1^{1/2}, \quad (4.28)$$

siehe Abbildung 4.6.

Schritt 4: Lokale Optimierung nach λ . Aus (4.26), (4.27), (4.28) und $\lambda < 1$ erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} \frac{5}{16} (1 - \theta - \theta^2) \alpha \lambda^3 l^3 &\leq \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l^2 E_1^{1/2} + c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^2 E_1}{\varepsilon} + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 l^2 E_1^{1/2} \\ &\leq c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} (c'_{PCP} + c_P) \lambda^2 l^2 E_1^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Auf der rechten Seite von (4.29) ist einer der zwei Terme der Größte. Wir erhalten zwei Ungleichungen für E_1 . Insbesondere gilt:

$$\min \left\{ \frac{5}{16} \frac{1 - \theta - \theta^2}{2c'_{PCP}} \frac{1-p_1}{8} \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, \frac{25}{256} \frac{(1 - \theta - \theta^2)^2}{4(c'_P(c_P + 1))^2} \frac{1-p_1}{4} \alpha^2 \lambda^2 l^2 \right\} \leq E_1. \quad (4.30)$$

Seien

$$C_{11} := \frac{5}{16} \frac{1 - \theta - \theta^2}{2c'_{PCP}} \frac{1-p_1}{8}, \quad C_{12} := \frac{25}{256} \frac{(1 - \theta - \theta^2)^2}{4(c'_P(c_P + 1))^2} \frac{1-p_1}{4}.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Für

$$\varepsilon_0 \leq \frac{C_{12}}{C_{11}} \quad (4.31)$$

gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$ und alle $\alpha \in (0, 1)$

$$C_{11} \alpha \varepsilon l \leq C_{12} \alpha^2 l^2.$$

Wir wollen nun via

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ C_{11} \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_{12} \alpha^2 \lambda^2 l^2 \right\} \quad (4.32)$$

das beste λ auswählen, siehe Abbildung 4.7. Das Supremum in (4.32) wird für

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ 1, \frac{C_{12}}{C_{11}} \right\} \quad (4.33)$$

bei

$$\lambda = \left(\frac{C_{11}}{C_{12}} \frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3} \quad (4.34)$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$ und alle $\alpha \in (0, 1)$ angenommen. Daher ist

$$C_{12}^{1/3} C_{11}^{2/3} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Schritt 5: Globale Optimierung nach λ . Da wir Fall 2 noch berücksichtigen müssen, ist eher

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$$

die Wahl gewesen, wobei Λ eine von ε , α und l unabhängige Konstante ist, die noch zu bestimmen ist. Da (4.33) nur den hier betrachteten Spezialfall abdeckt, wird sich auch ε_0 noch ändern. Wir haben hier nur $\alpha \in (0, \alpha_0)$ mit $\alpha_0 = 1$ benötigt. Im Allgemeinen wird $\alpha_0 < 1$ sein. Dann ist

$$\min \left\{ \frac{C_{11}}{\Lambda}, C_{12} \Lambda^2 \right\} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Mit

$$C_1 := \min \left\{ \frac{C_{11}}{\Lambda}, C_{12} \Lambda^2 \right\}$$

folgt die Aussage des Lemmas. □

Bemerkung 4.16 (Teil 2). *In Fall 1 haben wir das Problem von F_{21} nach F_{12} übertragen. In Fall 2 könnte man von F_{21} nach F_{11} gehen. Das würde zwar zur richtigen Energies-*

skalierung führen, jedoch würde die Skalierung von λ nicht mehr stimmen, wie man in der folgenden Beispielrechnung sieht. Dieses Beispiel funktioniert nur mit der Annahme $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l$.

Schritt 1: Verwendung der Randdaten in e_1 -Richtung. Wegen den Randwerten $u_1(x, y) = y \ \forall y \in [0, l]$ ist

$$0 = \int_S (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy.$$

Dies schreiben wir um zu

$$0 = \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy + \int_{S \setminus \bigcup_{i \in \mathcal{P}} Q_i} (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy.$$

Die rechte Seite wird abgeschätzt mit

$$0 \leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy + \int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx dy.$$

Wegen Lemma 4.7 kann die rechte Seite abgeschätzt werden zu

$$0 \leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy + 2^{3/2} \lambda E_1^{1/2}. \quad (4.35)$$

Schritt 2: Zu jedem $i \in \mathcal{P}$ betrachten wir auf Q_i die Matrix F_i wie in Lemma 4.3. Dann gilt

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 = (F_i)_{11} - 1 + (\partial_1 u_1(x, y) - (F_i)_{11}) \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Wegen $\cos(\phi) \leq 1 - \frac{1}{2} \sin^2(\phi) \ \forall \phi \in \mathbb{R}$ und $|(F_i)_{21}| > \theta \alpha \ \forall i \in \mathcal{P}$ gilt

$$|(F_i)_{11}| \leq 1 - \frac{1}{2} \theta^2 \alpha^2 \quad \forall \alpha \in (0, 1) \ \forall i \in \mathcal{P}.$$

Dann gilt

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 \leq -\frac{1}{2} \theta^2 \alpha^2 + |Du(x, y) - F_i| \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Daher

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} (\partial_1 u_1(x, y) - 1) \, dx dy \leq -\frac{1}{2} \theta^2 \alpha^2 p \lambda + \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |Du(x, y) - F_i| \, dx dy. \quad (4.36)$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Schritt 3: Optimierung nach λ . Aus (4.35) und (4.36) und mit Hilfe von Lemma 4.3 erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 + p_2 - 1}{2} \frac{1}{2} \theta^2 \alpha^2 \lambda l^2 \\ & \leq \left\lfloor \left\lfloor \frac{1}{\lambda} \right\rfloor (p_1 + p_2 - 1) \right\rfloor \left(c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l E_1^{1/2} \right) + 2^{3/2} \lambda l E_1^{1/2}, \end{aligned}$$

dabei haben wir $p = \lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor (p_1 + p_2 - 1) \rfloor$ verwendet. Wegen $\lfloor \lfloor \lambda^{-1} \rfloor (p_1 + p_2 - 1) \rfloor \leq (p_1 + p_2 - 1)/\lambda$ erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 + p_2 - 1}{4} \theta^2 \alpha^2 \lambda l^2 \\ & \leq (p_1 + p_2 - 1) c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^2 l}{\varepsilon} E_1 + \left((p_1 + p_2 - 1) c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} + 2^{3/2} \right) \lambda l E_1^{1/2}. \end{aligned}$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Mit

$$\widetilde{C}_{21} := \frac{\theta^2}{8c'_{PCP}} \frac{1-p_1}{8} \quad \text{und} \quad \widetilde{C}_{22} := \frac{(p_1 + p_2 - 1)^2 \theta^4}{4 \left((p_1 + p_2 - 1) c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} + 2^{3/2} \right)^2}$$

ist insbesondere

$$\min \left\{ \widetilde{C}_{21} \frac{\alpha^2 \varepsilon l}{\lambda}, \widetilde{C}_{22} \alpha^4 l^2 \right\} \leq E_1.$$

Das optimale λ ist hier

$$\lambda = \frac{\widetilde{C}_{21}}{\widetilde{C}_{22}} \frac{\varepsilon}{\alpha^2 l}. \quad (4.37)$$

Eine untere Schranke für E_1 ist somit

$$\widetilde{C}_{22} \alpha^4 l^2 \leq E_1.$$

Wegen $\alpha^4 l \widetilde{\varepsilon}_0 \geq \varepsilon$ ist $\alpha^4 l^2 = (\alpha^4 l)^{2/3} (\alpha^4 l)^{1/3} l \geq \widetilde{\varepsilon}_0 \varepsilon^{-2/3} \alpha^{4/3} l^{4/3}$. Somit ist

$$\widetilde{C}_{22} \widetilde{\varepsilon}_0^{-2/3} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1.$$

Fazit: Zwar konnte die passende Energieskalierung hergeleitet werden, jedoch musste eine andere Skalierung bei λ angenommen werden. Die Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$ hätte zu einer um einen Faktor α kleineren unteren Schranke geführt. Um eine untere Schranke von $\alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$ zu bekommen, wurde durch die Fallunterscheidung $\varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l$ der Term $\widetilde{C}_{22} \alpha^4 l^2$ in $\widetilde{C}_{22} \widetilde{\varepsilon}_0^{-2/3} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$ umgewandelt.

Bemerkung 4.17 (Teil 3). Die Umwandlung von $\widetilde{C}_{22}\alpha^4l^2$ in $\widetilde{C}_{22}\widetilde{\varepsilon}_0^{-2/3}\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}l^{4/3}$ war eine wichtige Technik in einem falschen Ansatz. Mit dieser Technik wird das nächste Lemma gezeigt.

Lemma 4.18 (Argumentation über u_2 - Teil 1). Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.4. Seien $\varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}_0\alpha^4l)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\varepsilon_0 > 0$, $\widetilde{\varepsilon}_0 > 0$ und θ vier von α, ε und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α, ε und l unabhängige Konstante ist. Gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$, dann gilt

$$C_2\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}_0\alpha^4l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_2 > 0$ eine von α, ε und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Schritt 1: Ansatz. Bei $|(F_i)_{21}| > \theta\alpha \quad \forall i \in \mathcal{P}$ betrachten wir den folgenden Ansatz: Zu jedem $i \in \mathcal{P}$ betrachten wir auf $Q_i \in \mathcal{G}$ den folgenden Mittelwert:

$$M_i := \frac{1}{\lambda^2 l^2} \int_{Q_i} Du(x, y) \, dx dy.$$

Sei $\widetilde{\theta} \in (0, \theta)$ eine von α, ε und l unabhängige Konstante. Diese Wahl von $\widetilde{\theta}$ wird in (4.40) ersichtlich. Es gibt nun zwei Fälle.

- Fall 1: $|(M_i)_{21}| > \widetilde{\theta}\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.
- Fall 2: $|(M_{i_0})_{21}| \leq \widetilde{\theta}\alpha$ für ein $i_0 \in \mathcal{P}$.

Fall 1

Schritt 2: Abschätzung. Nach Lemma 4.11 ist

$$\widetilde{\theta}\alpha\lambda^2 < \int_S |\partial_1 u_2| \, dx dy \leq 2^{3/4}(1 + \tau)^{1/2} \lambda l^{3/2} E_1^{1/4} + 2^{1/2} \frac{1 + \tau}{\tau} \lambda E_1^{1/2}. \quad (4.38)$$

Schritt 3: Optimierung. Sei $\tau > 0$ eine von α, ε und l unabhängige Konstante. Einer der zwei Terme auf der rechten Seite von (4.38) ist der Größte. Mit

$$C_{21} := \frac{\widetilde{\theta}^4}{2^7(1 + \tau)^2} \quad \text{und} \quad C_{22} := \frac{\widetilde{\theta}^2 \tau^2}{2^3(1 + \tau)^2}$$

gilt insbesondere

$$\min \{C_{21}\alpha^4l^2, C_{22}\alpha^2l^2\} \leq E_1.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Falls

$$\alpha_0 = \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{C_{22}}{C_{21}}} \right\}, \quad (4.39)$$

dann ist $C_{21}\alpha^4 l^2 \leq C_{22}\alpha^2 l^2 \forall \alpha \in (0, \alpha_0)$. Wegen $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l$ gilt

$$C_{21}\tilde{\varepsilon}_0^{-2/3}\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l).$$

Fall 2

Schritt 2: Abschätzung. Hier betrachten wir zuerst

$$\theta\alpha \leq |F_{i_0}| \leq |F_{i_0} - \partial_1 u_2(x, y)| + |\partial_1 u_2(x, y)|.$$

Die anschließende Integration über Q_{i_0} liefert

$$\theta\alpha\lambda^2 l^2 \leq \int_{Q_{i_0}} |Du(x, y) - F_{i_0}| dx dy + \int_{Q_{i_0}} |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy.$$

Das erste Integral wird mit Hilfe von Lemma 4.3 abgeschätzt. Bei dem zweiten Integral nutzen wir aus, dass hier $|(F_{i_0})_{21}| \leq \tilde{\theta}\alpha$ ist. Dann gilt

$$\theta\alpha\lambda^2 l^2 \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l E_1^{1/2} + \tilde{\theta}\alpha\lambda^2 l^2. \quad (4.40)$$

Wegen $\theta - \tilde{\theta} > 0$ gehen wir über zu

$$(\theta - \tilde{\theta})\alpha\lambda^2 l^2 \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 l E_1^{1/2} \quad (4.41)$$

Schritt 3: Optimierung. Einer der zwei Terme auf der rechten Seite von (4.41) ist der Größte. Mit

$$C_{31} := \frac{(\theta - \tilde{\theta})(1-p_1)}{16c_P} \quad \text{und} \quad C_{32} := \frac{(\theta - \tilde{\theta})^2(1-p_1)}{16}$$

gilt insbesondere

$$\min \left\{ C_{31} \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, C_{32} \alpha^2 l^2 \right\} \leq E_1.$$

Wenn $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$, dann müssen wir

$$\min \left\{ \frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}, C_{32} \alpha^2 l^2 \right\} \leq E_1$$

betrachten. Wegen

$$\frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq C_{32} \alpha^2 l^2 \iff \varepsilon \leq \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \alpha l$$

benötigen wir

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \right\}. \quad (4.42)$$

Erst dann gilt

$$\frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l).$$

Das beendet den zweiten Fall.

Schritt 4: Bestimmung der Parameter. In diesem Beweis haben wir Folgendes benötigt:

- $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$ war schon vor dem Beweis vorgegeben.
- $\tilde{\theta} \in (0, \theta)$ wegen (4.40).
- $\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \right\}$ wegen (4.42).
- $\alpha_0 = \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{C_{22}}{C_{21}}} \right\}$ wegen (4.39).

Die optimale Wahl von $\tilde{\varepsilon}_0$ wird erst später ermittelt, siehe (4.46).

Schritt 5: Zusammenfassung. Unter den Voraussetzungen aus Schritt 4 erhalten wir insgesamt

$$\min \left\{ C_{21} \tilde{\varepsilon}_0^{-2/3}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l).$$

Mit

$$C_2 := \min \left\{ C_{21} \tilde{\varepsilon}_0^{-2/3}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\}$$

folgt die Behauptung des Lemmas. □

Wir müssen nur noch für den restlichen Fall zeigen, dass eine untere Schranke von $\alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$ mit der Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$ hergeleitet werden kann. Das ist die Aussage des nächsten

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Lemmas.

Lemma 4.19 (Argumentation über u_2 - Teil 2). Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.4. Seien $\varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l, \varepsilon_0 \alpha l)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, \min \{1, (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_0)^{1/3}\})$ und θ vier von α, ε und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α, ε und l unabhängige Konstante ist. Gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta \alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$, dann gilt

$$C_3 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_3 > 0$ eine von α, ε und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Schritt 1: Wie in der Bemerkung nach Lemma 4.13 diskutiert, beginnen wir mit

$$\begin{aligned} \frac{5}{16} \theta \alpha \lambda^3 l^3 p &\leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dx dy \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - x F_{21} - y F_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Schritt 2: Nach Lemma 4.9 ist

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dy dx \leq \alpha^2 \lambda^2 l^3 + 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda^2 l^2 E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (4.44)$$

Lemma 4.4 liefert

$$\begin{aligned} &\int_{Q_i} |u_2(x, y) - x F_{21} - y F_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx \\ &\leq c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 l^2 E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Schritt 3: Mit (4.43), (4.44) und (4.45) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{5}{16} \theta \alpha \lambda^3 l^3 p &\leq p \left(c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 l^2 E_1^{1/2} \right) \\ &+ p \left(\alpha^2 \lambda^2 l^3 + 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda^2 l^2 E_1^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Wegen $\lfloor t^{-1} \rfloor \geq (2t)^{-1} \forall t \in (0, 1)$ ist

$$p = \left\lfloor \left\lfloor \frac{1}{\lambda} \right\rfloor (p_1 + p_2 - 1) \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{1}{\lambda} \right\rfloor (p_1 + p_2 - 1) \geq \frac{p_1 + p_2 - 1}{2\lambda}.$$

Daher ist

$$\frac{5}{32} \theta \alpha \lambda^2 l^3 \left(1 - \frac{32 \alpha}{5 \theta \lambda} \right) \leq c'_P c_P \frac{8}{1 - p_1} \frac{\lambda^3 l^2}{\varepsilon} E_1 + \left(c'_P \sqrt{\frac{4}{1 - p_1}} + 2 \sqrt{\frac{2}{1 - p_2}} \right) \lambda l^2 E_1^{1/2}.$$

In unserem Fall $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l$ muss das gesuchte optimale λ_0 zusätzlich noch für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$

$$1 - \frac{32 \alpha}{5 \theta \lambda} \geq \vartheta > 0$$

erfüllen, wobei ϑ eine von α , ε und l unabhängige Konstante ist. Wenn $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$ ist, dann gilt

$$1 - \frac{32 \alpha^{4/3} l^{1/3}}{5 \theta \Lambda \varepsilon^{1/3}} \geq \vartheta \iff \varepsilon \geq \left(\frac{32}{5 \theta \Lambda (1 - \vartheta)} \right)^3 \alpha^4 l.$$

Wir benötigen daher

$$\tilde{\varepsilon}_0 \geq \left(\frac{32}{5 \theta \Lambda (1 - \vartheta)} \right)^3. \quad (4.46)$$

Wir bestimmen nun das optimale λ über die Ungleichung

$$\frac{5}{32} \theta \vartheta \alpha \lambda^2 l^3 \leq c'_P c_P \frac{8}{1 - p_1} \frac{\lambda^3 l^2}{\varepsilon} E_1 + \left(c'_P \sqrt{\frac{4}{1 - p_1}} + 2 \sqrt{\frac{2}{1 - p_2}} \right) \lambda l^2 E_1^{1/2}.$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Mit

$$C_{41} := \frac{5}{64} \theta \vartheta \frac{1 - p_1}{8 c'_P c_P} \quad \text{und} \quad C_{42} := \frac{\left(\frac{5}{32} \theta \vartheta \right)^2}{\left(c'_P \sqrt{\frac{4}{1 - p_1}} + 2 \sqrt{\frac{2}{1 - p_2}} \right)^2}$$

gilt insbesondere

$$\min \left\{ C_{41} \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_{42} \alpha^2 \lambda^2 l^2 \right\} \leq E_1.$$

Das optimale λ_0 ist hier

$$\lambda_0 = \left(\frac{C_{41}}{C_{42}} \right)^{1/3} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}. \quad (4.47)$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Da wir jedoch mehr Fälle betrachten werden müssen, wird die Wahl eher

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$$

sein. Wenn ε_0 klein genug ist, dann ist

$$\min \left\{ \frac{C_{41}}{\Lambda}, C_{42} \Lambda^2 \right\} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \forall \varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l, \varepsilon_0 \alpha l)$$

eine untere Schranke. Mit

$$C_3 := \min \left\{ \frac{C_{41}}{\Lambda}, C_{42} \right\}$$

folgt die Behauptung des Lemmas. □

Fazit: Durch eine kombinierte Anwendung der Hilfssätze Korollar 4.2, Lemma 4.4 und Lemma 4.13 konnten wir eine Argumentation aufbauen, die für jeden kleinen Parameter λ funktioniert. Bei der Suche nach einer unteren Schranke für E_1 haben wir durch Lemma 4.15 in einem Spezialfall die passende Skalierung der unteren Schranke gefunden. Lemma 4.19 konnte die vermutete Skalierung in einem anderen Spezialfall bestätigen. Lemma 4.18 hat gezeigt, dass in den restlichen Fällen die Skalierung erzwungen werden kann. In Abbildung 4.8 ist eine schematische Einordnung der letzten drei Lemmata in die bisherige Argumentationsstruktur zu sehen.

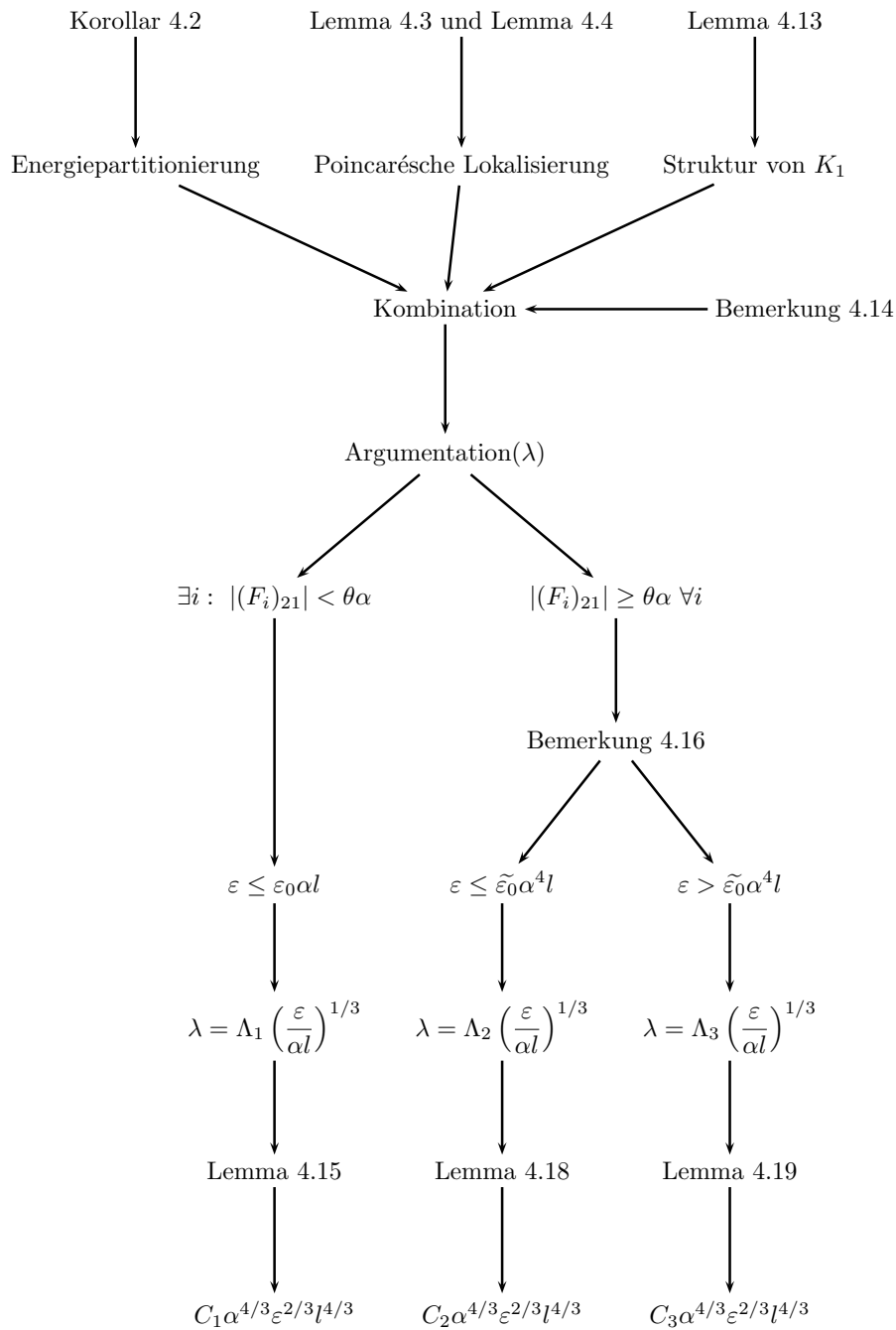


Abbildung 4.8: Die bisherige Beweisführung muss nun umsortiert werden, da die λ 's nicht identisch sind.

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

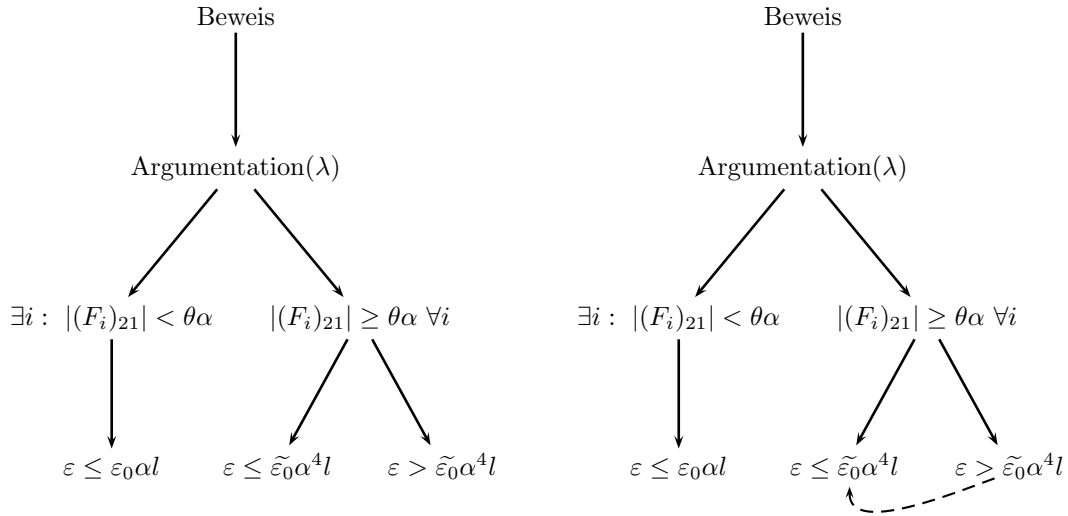


Abbildung 4.9: Wir entwickeln den Beweis wie folgt: Zu jedem Parameter λ wenden wir eine Argumentation, basierend auf Korollar 4.2 und Lemma 4.4, an. Eigentlich muss vor der Maschinerie ein λ_0 gewählt werden. Dieser Wert wird im Laufe des Beweises noch ermittelt. Im nächsten Schritt wird auf die Bemerkung nach Lemma 4.13 eingegangen. In dem zweiten Zweig wird später eine Fallunterscheidung in ε benötigt. Welcher Wert bei $\tilde{\varepsilon}_0$ benötigt wird, wird erst im zweiten Fall des zweiten Zweiges ersichtlich.

4.1.6 Beweis der unteren Schranke

In diesem Abschnitt wollen wir die folgende Teilaussage von Theorem 1 beweisen:

Theorem (Die untere Schranke in Theorem 1 auf einem Quadrat). *Seien $\Omega := (0, l)^2$ und K_1, \mathcal{E}_1 wie in Theorem 1. Dann gibt es drei Konstanten $c > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und $\varepsilon_0 > 0$, die alle nicht von α , ε und l abhängen, so dass gilt:*

$$c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}l^{4/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l).$$

Beweis. Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.4. Wie in Bemerkung 4.14 diskutiert, teilen wir den Beweis in zwei Hauptfälle auf. Für $\theta \in (0, (\sqrt{5}-1)/2)$ sind diese:

- Fall 1: Es gibt ein $i_0 \in \mathcal{P}$, so dass $|(F_{i_0})_{21}| < \theta\alpha$.
- Fall 2: Es gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.

Den ersten Fall haben wir schon in Lemma 4.15 behandelt. Die Aussage, die wir dort entnehmen, ist, dass der gesamte Beweis mit der Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ geführt werden sollte. Die genaue Strukturierung des Beweises geben wir später noch an. Die Struktur des folgenden Beweisabschnitts ist in Abbildung 4.9 abgebildet. Durch Lemma 4.18 und Lemma 4.19 haben wir gesehen, dass innerhalb von Fall 2 eine weitere Fallunterscheidung getroffen werden musste. Wir benötigen hier:

- Fall 2a: Es gilt $\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l \geq \varepsilon$.
- Fall 2b: Es gilt $\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l < \varepsilon$.

Die optimale Wahl von $\tilde{\varepsilon}_0$ wurde durch (4.46) ermittelt. Der Fall 2a wurde in Lemma 4.18 untersucht. Dort wurden die Beweise ohne die Methoden aus Bemerkung 4.14 geführt. Der Fall 2b wurde in Lemma 4.19 analysiert. Dort wurde mit dem Ansatz aus Bemerkung 4.14 gearbeitet. Dieser war:

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{2} \alpha \lambda^3 l^3 \left[\left\lfloor \frac{1}{\lambda} \right\rfloor p \right] &\leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dx dy \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - xF_{21} - yF_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx. \end{aligned}$$

Jeder Fall einzeln betrachtet liefert eine Skalierung der unteren Schranke von $\alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$. Einen Überblick über die verschiedenen Fallunterscheidungen ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Die Wege vom Typ I identifizieren die Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda > 0$ eine Konstante ist, die nicht von α , ε und l abhängt. Der Weg von Typ II schränkt die Wahl von α_0 ein. Der Weg von Typ III schränkt die Wahl von ε_0 ein. Wir müssen nun den Beweis so umsortieren, dass alle Fälle mit dem selben, festen $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ geführt werden kann. Das ist in Abbildung 4.11 zu sehen.

Umstrukturierung des Beweis. Zuerst wird entschieden, in welchem Hauptfall ε liegt. Diese sind

- Fall 1: $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l$.
- Fall 2: $\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \alpha l$.

Im nächsten Schritt wird $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ gewählt. Jetzt beginnt die Maschinerie über Korollar 4.2 und Lemma 4.4. Am Ende bekommt man drei alternative untere Schranken für E_1 . Das gesuchte c ist dann

$$\min \left\{ \min \left\{ \frac{C_{11}}{\Lambda}, C_{12} \Lambda^2 \right\}, \min \left\{ \frac{C_{21}}{\tilde{\varepsilon}_0^{2/3}}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\}, \min \left\{ \frac{C_{41}}{\Lambda}, C_{42} \Lambda^2 \right\} \right\}.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

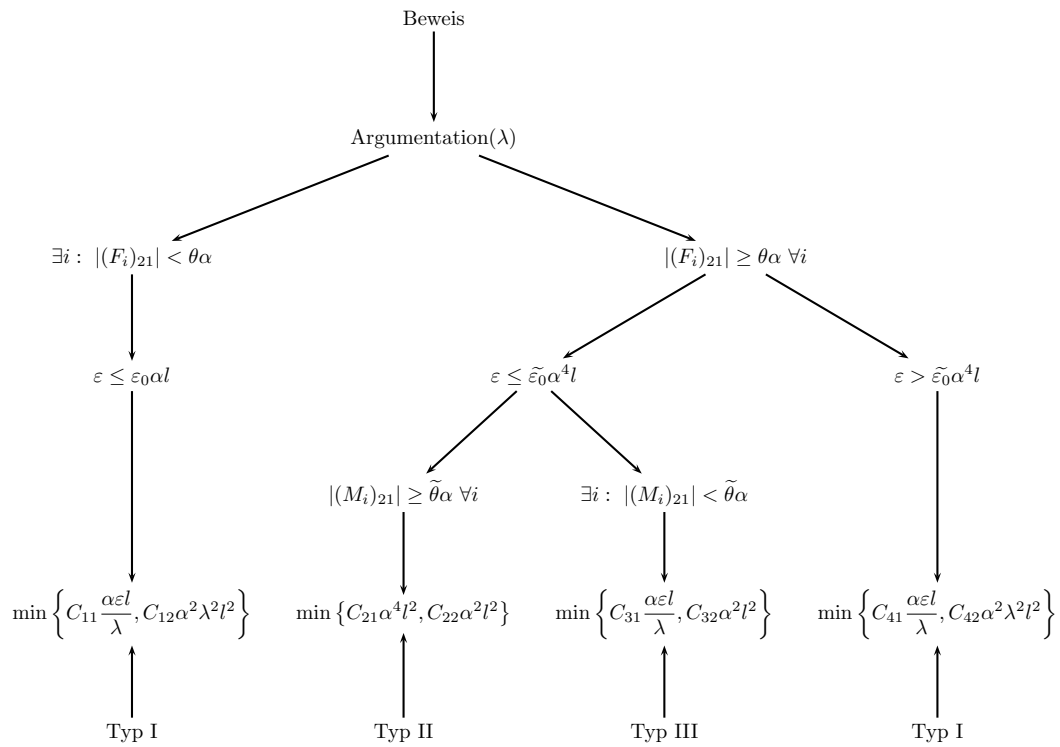


Abbildung 4.10: Jede der vier Fallunterscheidung führt mit einer Wahl $\lambda = \Lambda_j \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ zu einer unteren Schranke der Form $C_j \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \leq E_1$. Die $\alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3}$ -Skalierung der unteren Schranke wurde hauptsächlich durch Lemma 4.15 und Lemma 4.19 identifiziert. Dort konnte die Skalierung explizit durch Optimierung nach λ bestimmt werden. Nur das Lemma 4.19 allein betrachtet hätte nicht sofort zu der Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ geführt. Der Beweis muss nun in die richtige Reihenfolge umsortiert werden.

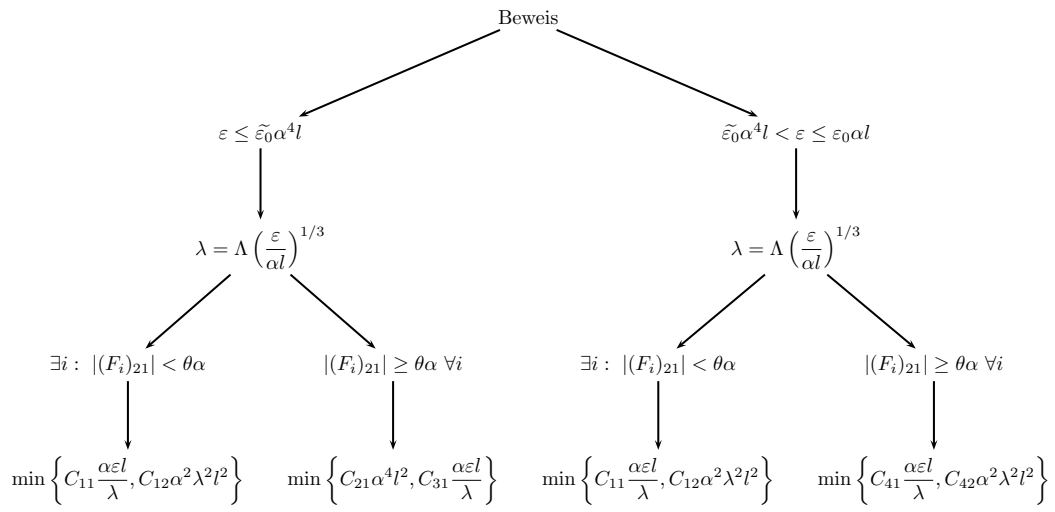


Abbildung 4.11: Die vollständige Beweisstruktur.

□

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

4.2 Der Fall $h < l$

Viele der hier aufgeführten Aussagen können analog zu den Versionen aus Abschnitt 4.1 geführt werden. Wir verfolgen den gleichen Aufbau wie in dem Fall $h = l$.

4.2.1 Energiepartitionierung

Im Fall $h < l$ werden wir mit Quadraten Q der Größe $\mathcal{L}^2(Q) = \lambda^2 h^2$ arbeiten.

Lemma 4.20 (Energiepartitionierung - Existenz). *Seien u , Ω , K_1 , ε und E_1 wie in Theorem 1. Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es zwei offene Streifen $S = (0, l) \times (s, s + \lambda h) \subset \Omega$ und $S' = (s', s' + \lambda h) \times (0, h) \subset \Omega$ mit den energetischen Eigenschaften*

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_S |D^2 u| \leq 2\lambda E_1, \quad (4.48)$$

und

$$\int_{S \cap S'} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S \cap S'} |D^2 u| \leq 12 \frac{h}{l} \lambda^2 E_1. \quad (4.49)$$

und

$$\int_{S'} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'} |D^2 u| \leq 3 \frac{h}{l} \lambda E_1, \quad (4.50)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.1. In Behauptung 2 und 3 müssen wir nur darauf achten, dass wir in S diesmal $\lfloor l/(h\lambda) \rfloor$ Quadrate haben. Da wir dann die Abschätzung

$$\lambda \frac{h}{l} \cdot \left\lfloor \frac{l}{h\lambda} \right\rfloor \geq \frac{1}{2}$$

anwenden wollen, benötigen wir in Behauptung 2 und 3 den zusätzlichen Faktor h/l . Das erklärt auch, warum in (4.49) und (4.50) im Vergleich zu (4.2) und (4.3) jeweils ein zusätzlicher Faktor h/l vorkommt. Der Rest wird wie im Beweis von Lemma 4.1 geführt. \square

Notation. Wir werden häufiger auf folgende Mengen zurückgreifen. Seien

$$\mathcal{Q}(\lambda, p_1) := \left\{ i \in [1, \lfloor \frac{l}{h\lambda} \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{es gibt ein } Q_i := ((i-1)\lambda h, i\lambda h) \times (s, s + \lambda h) \subset S(\lambda), \right. \\ \left. \text{so dass } \int_{Q_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_1} \cdot 4 \frac{h}{l} \lambda^2 E_1. \right\}.$$

und

$$\mathcal{Q}(\lambda, p_1) := \{Q_i := ((i-1)\lambda h, i\lambda h) \times (s, s + \lambda h) \subset S(\lambda) : i \in \mathcal{Q}(\lambda)\}.$$

Seien außerdem

$$\mathcal{S}(\lambda, p_2) := \left\{ i \in [1, \lfloor l/(h\lambda) \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{Für } S'_i := ((i-1)\lambda h, i\lambda h) \times (0, h) \text{ gilt} \right. \\ \left. \int_{S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_i} |D^2u| \leq \frac{1}{1-p_2} \cdot 2 \frac{h}{l} \lambda E_1 \right\}.$$

Die zugehörige Auswahl von Streifen ist

$$\mathcal{S}(\lambda, p_2) := \{S'_i := ((i-1)\lambda h, i\lambda h) \times (0, h) : i \in \mathcal{S}(\lambda, p_2)\}.$$

Dann seien

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \in (0, 1), \quad p_1, p_2 \in (1/2, 1), \\ \mathcal{P}(\lambda, p_1, p_2) := \mathcal{Q}(\lambda, p_1) \cap \mathcal{S}(\lambda, p_2), \\ p(\lambda, p_1, p_2) := \text{card } \mathcal{P}(\lambda, p_1, p_2), \\ \mathcal{G}(\lambda, p_1, p_2) := \{Q \in \mathcal{Q} : \text{es gibt ein } S' \in \mathcal{S}, \text{ so dass } Q \subset S'\} \end{array} \right\} \quad (4.51)$$

Korollar 4.21 (Energiepartitionierung - geometrische und quantitative Version). *Seien $u, \Omega, K_1, \varepsilon$ und E_1 wie in Theorem 1. Seien p_1, p_2, \mathcal{P} und p wie in (4.51). Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es einen offenen Streifen $S = (0, l) \times (s, s + \lambda h) \subset \Omega$ und p offene Streifen $S'_i = ((i-1)\lambda h, i\lambda h) \times (0, h) \subset \Omega, i \in \mathcal{P}$, mit den energetischen Eigenschaften*

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_S |D^2u| \leq 2\lambda E_1 \quad (4.52)$$

und

$$\int_{S \cap S_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S \cap S_i} |D^2u| \leq \frac{4}{1-p_1} \frac{h}{l} \lambda^2 E_1 \quad \forall i \in \mathcal{P} \quad (4.53)$$

und

$$\int_{S'_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'_i} |D^2u| \leq \frac{2}{1-p_2} \frac{h}{l} \lambda E_1 \quad \forall i \in \mathcal{P}, \quad (4.54)$$

Notation. Die $S \cap S'_i, i \in \mathcal{P}$, sind spezielle Quadrate aus \mathcal{Q} , nämlich solche, die auch in \mathcal{G} sind. Wir werden ab jetzt $Q_i := S \cap S'_i$ schreiben.

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

4.2.2 Energetische Interaktion

Lemma 4.22 (BV-Poincarésche Lokalisierung einer festen K_1 -Matrix). *Seien $u, \Omega, h, l, \varepsilon$ und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda, \mathcal{P}, p_1, p$ und $Q_i \in \mathcal{G}, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.53). Dann gibt es zu jedem $i \in \mathcal{P}$ ein $F_i \in K_1$ und eine von $\alpha, \varepsilon, h, l, \lambda, p_1$ und p unabhängige Konstante c_P , so dass*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_i} |Du(x, y) - F_i| dx dy \\ & \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 h^2}{\varepsilon l} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 \frac{h^{3/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.3. Wir müssen nur auf den zusätzlichen Faktor h/l in (4.53) achten. \square

Lemma 4.23 ($W^{1,1}$ -Poincarésche Lokalisierung). *Seien $u, \Omega, h, l, \varepsilon$ und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda, p_1, \mathcal{P}, p$ und $Q_i \in \mathcal{G}, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.53). Seien F_i und c_P wie in Lemma 4.22. Dann gibt es eine von $\alpha, \varepsilon, \lambda, h, l, p_1$ und p unabhängige Konstante $c'_P > 0$ und Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^2$, so dass*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_i} \left| u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right| dx dy \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 h^3}{\varepsilon l} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Beweis. Seien $p_1, p_2, \mathcal{P}, p, Q_i \in \mathcal{G}, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.53) und F_i wie in Lemma 4.22. Wir suchen uns einen fest gewählten Q_i aus und setzen $Q := Q_i$. Wegen der Poincaréschen Ungleichung gibt es eine Konstante $c_{P'} > 0$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| dx dy \leq 2c_{P'} \lambda h \int_Q |Du(x, y) - F| dx dy. \quad (4.57)$$

Auf der rechten Seite von (4.57) wenden wir Lemma 4.22 an. Das beendet den Beweis für das am Anfang fest gewählte Q . Da der Beweis für alle anderen Q_i analog geführt werden kann, folgt die Behauptung des Lemmas. \square

Bemerkung. Die Konstanten c_P und $c_{P'}$ können mit Hilfe von [7] und [1] bestimmt

werden. Wir benötigen später die schärfere Aussage

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \int_{Q_i} \left| \left(u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right) e_1 \right| dx dy, \int_{Q_i} \left| \left(u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right) e_2 \right| dx dy \right\} \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 h^3}{\varepsilon l} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}, \end{aligned}$$

da wir verschiedene Argumentationen verwenden werden, abhängig davon, welche Komponente von u benötigt wird.

4.2.3 Rigidity of the first component of the vector u

Das nächste Lemma sagt aus, dass $|u_1(x, y) - x|$ punktweise durch elastische Energieanteile kontrolliert wird.

Lemma 4.24 (Punktweise Rigidity). *Seien u , Ω und K_1 wie in Theorem 1. Dann gilt*

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_1) ds \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu Beweis von Lemma 4.5. □

4.2.4 Einige Hilfsabschätzungen

Lemma 4.25. *Seien u , Ω , h , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.52). Dann gilt*

$$\int_S |u_1(x, y) - x| dx dy \leq \sqrt{2} \lambda h^{1/2} l^{3/2} E_1^{1/2}.$$

Beweis. Zuerst wenden wir Lemma 4.24 an. Dann bilden wir das Integral über S . Danach folgt die Behauptung mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 4.52. □

Lemma 4.26. *Seien u , Ω , h , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.52). Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \leq 2^{3/2} \lambda h^{1/2} l^{1/2} E_1^{1/2}.$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.7. Der Faktor $h^{1/2}l^{1/2}$ entsteht nach einer Anwendung der Hölderschen Ungleichung. \square

Lemma 4.27. Seien u, Ω, h, l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$, p_2, \mathcal{P} und $S'_i, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.54). Dann gilt

$$\int_{S'_i} |\partial_2 u_2(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda \frac{h^{3/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda h^2 \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma 4.8. Sei $i \in \mathcal{P}$ fest gewählt. Zuerst leiten wir wieder

$$\partial_2 u_2(x, y) - 1 \leq \text{dist}(Du(x, y), K_1) + \frac{1}{2} \alpha^2$$

her. Durch Zerlegung von $\partial_2 u_2(x, y) - 1$ in positiven und negativen Anteil wird anschließend

$$\int_{S'_i} |\partial_2 u_2(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda^{1/2} h \lambda^{1/2} E_1^{1/2} \left(\frac{h}{l}\right)^{1/2} + \alpha^2 \lambda h^2.$$

gefolgt. Das beendet den Beweis für ein festes $i \in \mathcal{P}$. Da der Beweis für alle anderen $i \in \mathcal{P}$ genau so verläuft, ist das Lemma bewiesen. \square

Lemma 4.28. Seien u, Ω, h, l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$, p_2, \mathcal{P} und $Q_i \in \mathcal{G}, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.53). Dann gilt

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dx dy \leq 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda^2 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda^2 h^3 \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Seien $Q_i \in \mathcal{G}$ und $S'_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Korollar 4.21. Für alle $i \in \mathcal{P}$ ist

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dy dx \leq \lambda h \int_{S'_i} |\partial_2 u_2(x, t) - 1| \, dt dx.$$

Mit Lemma 4.27 folgt

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dy dx \leq \lambda h \left(2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda \frac{h^{3/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda h^2 \right) \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Das beendet den Beweis. \square

Bei der Abschätzung von $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| \, dx dy$ entscheiden wir uns für die folgende Variante:

Lemma 4.29. *Seien u , Ω , h , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (4.52). Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| \, dx dy \leq 2^{3/4} (1 + \tau)^{1/2} \lambda h^{3/4} l^{3/4} E_1^{1/4} + 2^{1/2} \frac{1 + \tau}{\tau} \lambda h^{1/2} l^{1/2} E_1^{1/2}.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma 4.11. □

4.2.5 Struktur von K_1 und Strategie

Wir verfolgen hier dieselbe Herangehensweise wie in Abschnitt 4.1.5 aus dem Fall $h = l$. Neu ist nun der Weg von Lemma 4.33 über Lemma 4.35 nach Lemma 4.34. In diesem Abschnitt haben die Hilfssätze folgende Aufgaben:

- Lemma 4.30 (Struktur von K_1): Vervollständigung der Ungleichungskette aus Lemma 4.23. Eine Fallunterscheidung im Beweis der unteren Schranke wird nötig sein.
- Lemma 4.32 (Argumentation über u_1): Für den leichteren Teil des Beweises der unteren Schranke wird die Skalierung bei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$ hergeleitet.
- Lemma 4.33 (Argumentation über u_2 - ein erster Versuch): Hier ist Vorsicht geboten. Im Wesentlichen ist es wie in Lemma 4.18. Eine Fallunterscheidung in ε ist nötig. Die Teilintervalle für ε sind noch unklar.
- Lemma 4.34 (Argumentation über u_2 - Teil 1): Diese Version von Lemma 4.33 ist wegen Lemma 4.35 die richtige. Hier werden die Unterschiede der verschiedenen Abschätzungen für $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy$ noch einmal aufgegriffen.
- Lemma 4.35 (Argumentation über u_2 - Teil 2): Bestätigung der Skalierung bei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$ in allen anderen Fällen.

Lemma 4.30 (Struktur von K_1). *Für jedes $\lambda \in (0, 1)$, jedes $\theta \in (0, (\sqrt{5}-1)/2)$ und jedes Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{L}^2(Q) = \lambda^2 h^2$ gilt Folgendes: Falls $|F_{21}| < \theta \alpha$, dann gilt*

$$\frac{5}{16}(1 - \theta - \theta^2)\alpha\lambda^3 h^3 \leq \min_{F \in K_1, a \in \mathbb{R}^2} \int_Q \left| \left((1 - F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) e_1 \right| dx dy. \quad (4.58)$$

Falls $|F_{21}| \geq \theta \alpha$, dann gilt

$$\frac{5}{16}\theta\alpha\lambda^3 h^3 \leq \min_{F \in K_1, a \in \mathbb{R}^2} \int_Q \left| \left((1 - F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) e_2 \right| dx dy. \quad (4.59)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma 4.13. □

Jetzt wollen wir die Aussage dieses Lemmas mit den Aussagen aus Lemma 4.23 verknüpfen und eine Strategie entwickeln.

Bemerkung 4.31. *Seien u , λ , \mathcal{P} , $Q_i \in \mathcal{G}$ und F_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.23. Die Komponente $(F_i)_{21}$ von F_i wird im Sinne von Lemma 4.30 untersucht. Wir bilden zwei*

Fälle:

- Fall 1: Es gibt ein $i_0 \in \mathcal{P}$, so dass $|(F_{i_0})_{21}| < \theta\alpha$.
- Fall 2: Es gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.

Im ersten Fall liefert Lemma 4.30 und eine Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} & \frac{5}{12}(1 - \theta - \theta^2)\alpha\lambda^3h^3 \\ & \leq \int_{Q_{i_0}} |u_1(x, y) - x| dx dy + \int_{Q_{i_0}} |u_1(x, y) - xF_{11} - yF_{12} - (a_{i_0})_1| dy dx. \end{aligned}$$

Im zweiten Fall erhalten wir analog

$$\begin{aligned} \frac{5}{12}\theta\alpha\lambda^3h^3p & \leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dx dy \\ & \quad + \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - xF_{21} - yF_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von Lemma 4.23, Korollar 4.21 und Lemma 4.24 lässt sich der erste Fall vollständig bearbeiten. Das wollen wir zunächst im nächsten Lemma festhalten.

Lemma 4.32 (Argumentation über u_1). Seien u , λ , \mathcal{P} , $Q_i \in \mathcal{G}$ und F_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.23. Seien $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha h^3/l^2)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und θ drei von α , ε , h und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist. Gibt es ein $i_0 \in \mathcal{P}$, so dass $|(F_{i_0})_{21}| < \theta\alpha$, dann gilt

$$C_1\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha h^3/l^2) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_1 > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Schritt 1: Struktur von K_1 und Strategie. Sei $Q := Q_{i_0}$. Wie in der Bemerkung nach Lemma 4.30 diskutiert, beginnen wir mit

$$\begin{aligned} & \frac{5}{12}(1 - \theta - \theta^2)\alpha\lambda^3h^3 \\ & \leq \int_Q |u_1(x, y) - x| dx dy + \int_Q |u_1(x, y) - xF_{11} - yF_{12} - (a_{i_0})_1| dy dx. \end{aligned} \tag{4.60}$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Schritt 2: Poincarésche Ungleichungen. Lemma 4.23 liefert schon einmal die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \int_Q |u_1(x, y) - xF_{11} - yF_{12} - (a_{i_0})_1| dydx \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 h^3 E_1}{\varepsilon l} + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Schritt 3: Umwandlung des restlichen Energieanteils in elastische Energie. Mit der Hölderschen Ungleichung und Korollar 4.21 und Lemma 4.24 folgt

$$\int_Q |u_1(x, y) - x| dydx \leq \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 h^{3/2} l^{1/2} E_1^{1/2}. \quad (4.62)$$

Schritt 4: Lokale Optimierung nach λ . Aus (4.60), (4.61), (4.62) und $\lambda < 1$ erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} & \frac{5}{16} (1 - \theta - \theta^2) \alpha \lambda^3 h^3 \\ & \leq \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} + c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 h^3 E_1}{\varepsilon l} + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 h^{3/2} l^{1/2} E_1^{1/2} \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 h^3}{\varepsilon l} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} (c'_P c_P + c_P) \lambda^2 h^{3/2} l^{1/2} E_1^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Auf der rechten Seite von (4.63) ist einer der zwei Terme der Größte. Wir erhalten zwei Ungleichungen für E_1 . Insbesondere gilt:

$$\min \left\{ \frac{5}{16} \frac{1 - \theta - \theta^2}{2c'_P c_P} \frac{1-p_1}{8} \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, \frac{25}{256} \frac{(1 - \theta - \theta^2)^2}{4(c'_P(c_P + 1))^2} \frac{1-p_1}{4} \alpha^2 \lambda^2 \frac{h^3}{l} \right\} \leq E_1. \quad (4.64)$$

Seien

$$C_{11} := \frac{5}{16} \frac{1 - \theta - \theta^2}{2c'_P c_P} \frac{1-p_1}{8}, \quad C_{12} := \frac{25}{256} \frac{(1 - \theta - \theta^2)^2}{4(c'_P(c_P + 1))^2} \frac{1-p_1}{4}.$$

Für

$$\varepsilon_0 \leq \frac{C_{12}}{C_{11}}$$

gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2)$ und alle $\alpha \in (0, 1)$

$$C_{11} \alpha \varepsilon l \leq C_{12} \alpha^2 \frac{h^3}{l}.$$

Wir wollen nun via

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ C_{11} \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_{12} \alpha^2 \lambda^2 \frac{h^3}{l} \right\} \quad (4.65)$$

das beste λ auswählen. Das Supremum in (4.65) wird für

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ 1, \frac{C_{12}}{C_{11}} \right\} \quad (4.66)$$

bei

$$\lambda = \left(\frac{C_{11}}{C_{12}} \frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3} \quad (4.67)$$

für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2)$ und alle $\alpha \in (0, 1)$ angenommen. Daher ist

$$C_{12}^{1/3} C_{11}^{2/3} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2) \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Schritt 5: Globale Optimierung nach λ . Da wir Fall 2 noch berücksichtigen müssen, ist eher

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$$

die Wahl gewesen, wobei Λ eine von ε , α , h und l unabhängige Konstante ist, die noch zu bestimmen ist. Die Wahl von ε_0 in (4.66) deckt nur den hier behandelten Spezialfall ab. ε_0 wird sich noch ändern. Auch wird sich α_0 noch ändern. Hier haben wir nur $\alpha \in (0, 1)$ mit $\alpha_0 = 1$ benötigt. Dann ist

$$\min \left\{ \frac{C_{11}}{\Lambda}, C_{12} \Lambda^2 \right\} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2) \quad \forall \alpha \in (0, 1).$$

Mit

$$C_1 := \min \left\{ \frac{C_{11}}{\Lambda}, C_{12} \Lambda^2 \right\}$$

folgt die Aussage des Lemmas. □

Lemma 4.33 (Argumentation über u_2 - ein erster Versuch). *Seien u , λ , \mathcal{P} , $Q_i \in \mathcal{G}$ und F_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.23. Seien $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und θ drei von α , ε , h und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist. Gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta \alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$, dann gilt*

$$\tilde{C}_2 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

wobei $\widetilde{C}_2 > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Schritt 1: Ansatz. Bei $|(F_i)_{21}| > \theta\alpha \forall i \in \mathcal{P}$ betrachten wir den folgenden Ansatz: Zu jedem $i \in \mathcal{P}$ betrachten wir auf $Q_i \in \mathcal{G}$ den folgenden Mittelwert:

$$M_i := \frac{1}{\lambda^2 h^2} \int_{Q_i} Du(x, y) dx dy.$$

Sei $\widetilde{\theta} \in (0, \theta)$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante. Warum wir diese Wahl von $\widetilde{\theta}$ benötigen wird in (4.69) ersichtlich. Es gibt nun zwei Fälle.

- Fall 1: $|(M_i)_{21}| > \widetilde{\theta}\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.
- Fall 2: $|(M_{i_0})_{21}| \leq \widetilde{\theta}\alpha$ für ein $i_0 \in \mathcal{P}$.

Fall 1

Schritt 2: Abschätzung. Nach Lemma 4.29 ist

$$\widetilde{\theta}\alpha\lambda hl < \int_S |\partial_1 u_2| dx dy \leq 2^{3/4}(1+\tau)^{1/2}\lambda h^{3/4}l^{3/4}E_1^{1/4} + 2^{1/2}\frac{1+\tau}{\tau}\lambda h^{1/2}l^{1/2}E_1^{1/2}.$$

Schritt 3: Optimierung. Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Mit

$$C_{21} := \frac{\widetilde{\theta}^4}{2^7(1+\tau)^2} \quad \text{und} \quad \widetilde{C}_{22} := \frac{\widetilde{\theta}^2\tau^2}{2^3(1+\tau)^2}$$

gilt insbesondere

$$\min \left\{ C_{21}\alpha^4 hl, \widetilde{C}_{22}\alpha^2 hl \right\} \leq E_1.$$

Falls

$$\alpha_0 = \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{\widetilde{C}_{22}}{C_{21}}} \right\}, \tag{4.68}$$

dann ist $C_{21}\alpha^4 hl \leq \widetilde{C}_{22}\alpha^2 hl \forall \alpha \in (0, \alpha_0)$. Wegen $\varepsilon \leq \widetilde{\varepsilon}_0\alpha^4 l$ gilt

$$C_{21}\widetilde{\varepsilon}_0^{-2/3}\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \widetilde{\varepsilon}_0\alpha^4 l).$$

Fall 2

Schritt 2: Abschätzung. Hier betrachten wir zuerst

$$\theta\alpha \leq |F_{i_0}| \leq |F_{i_0} - \partial_1 u_2(x, y)| + |\partial_1 u_2(x, y)|.$$

Die anschließende Integration über Q_{i_0} liefert

$$\theta\alpha\lambda^2 h^2 \leq \int_{Q_{i_0}} |Du(x, y) - F_{i_0}| dx dy + \int_{Q_{i_0}} |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy.$$

Das erste Integral wird mit Hilfe von Lemma 4.22 abgeschätzt. Bei dem zweiten Integral nutzen wir aus, dass hier $|(F_{i_0})_{21}| \leq \tilde{\theta}\alpha$ ist. Dann gilt

$$\theta\alpha\lambda^2 h^2 \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 h^2}{\varepsilon l} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 \frac{h^{3/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} + \tilde{\theta}\alpha\lambda^2 h^2. \quad (4.69)$$

Wegen $\theta - \tilde{\theta} > 0$ gehen wir über zu

$$(\theta - \tilde{\theta}) \alpha\lambda^2 h^2 \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 h^2}{\varepsilon l} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 \frac{h^{3/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2}. \quad (4.70)$$

Schritt 3: Optimierung. Einer der zwei Terme auf der rechten Seite von (4.70) ist der Größte. Mit

$$C_{31} := \frac{(\theta - \tilde{\theta})(1-p_1)}{16c_P} \quad \text{und} \quad C_{32} := \frac{(\theta - \tilde{\theta})^2(1-p_1)}{16}$$

gilt insbesondere

$$\min \left\{ C_{31} \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_{32} \alpha^2 h l \right\} \leq E_1.$$

Wenn $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$, dann müssen wir

$$\min \left\{ \frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}, C_{32} \alpha^2 h l \right\} \leq E_1.$$

betrachten. Wegen

$$\frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq C_{32} \alpha^2 h l \iff \varepsilon \leq \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \alpha l$$

benötigen wir

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \right\}. \quad (4.71)$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

Erst dann gilt

$$\frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l).$$

Das beendet den zweiten Fall.

Schritt 4: Bestimmung der Parameter. In diesem Beweis haben wir Folgendes benötigt:

- $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$ war schon vor dem Beweis vorgegeben.
- $\tilde{\theta} \in (0, \theta)$ wegen (4.38).
- $\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \right\}$ wegen (4.71).
- $\alpha_0 = \min \left\{ 1, \sqrt{\frac{\widetilde{C}_{22}}{C_{21}}} \right\}$ wegen (4.68).

Die optimale Wahl von $\tilde{\varepsilon}_0$ wird erst später ermittelt, siehe (4.76).

Schritt 5: Zusammenfassung. Unter den Voraussetzungen aus Schritt 4 erhalten wir insgesamt

$$\min \left\{ C_{21} \tilde{\varepsilon}_0^{-2/3}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l).$$

Mit

$$\widetilde{C}_2 := \min \left\{ C_{21} \tilde{\varepsilon}_0^{-2/3}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\}$$

folgt die Behauptung des Lemmas. □

Die Voraussetzung $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l)$ in Lemma 4.33 scheint unnatürlich zu sein. Tatsächlich gibt es eine Konkurrenz zwischen dieser und der Voraussetzung $\varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2)$ aus dem nächsten Lemma 4.35. Um eine Überschneidung der Teilintervalle $(0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 l)$ und $(\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2)$ zu vermeiden, wird der Hilfsparameter τ in dem Beweis von Lemma 4.33 keine echte Konstante mehr sein. Wählen wir dort $\tau \sim \alpha h^2 / l^2$, so erhalten wir die nächste Aussage.

Lemma 4.34 (Argumentation über u_2 - Teil 1). *Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.23. Seien $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und θ drei von α, ε, h und l unabhängige Konstanten sind. Sei*

$\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist. Gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta \alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$, dann gilt

$$C_2 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_2 > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma 4.33. Die Wahl $\tau = \tau_0 \alpha h^2 / l^2$ bewirkt in Fall 1, dass wir aus \widetilde{C}_{22} das τ^2 heraus filtern sollen. Mit $C_{22} := \widetilde{C}_{22} \tau_0^2 / \tau^2$ erhalten wir in Fall 1:

$$\min \left\{ C_{21} \alpha^4 h l, C_{22} \alpha^4 \frac{h^3}{l} \right\} \leq E_1.$$

Wegen $h < l$ gilt $C_{22} \alpha^4 h^3 / l \leq E_1$. Wegen $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2$ gilt

$$C_{22} \tilde{\varepsilon}_0^{-2/3} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1.$$

In Fall 2 führt die Wahl

$$\varepsilon_0 = \min \left\{ 1, \left(\Lambda \frac{C_{32}}{C_{31}} \right)^{3/2} \right\} \quad (4.72)$$

wegen $h < l$ und

$$\varepsilon < \varepsilon_0 \alpha \frac{h^3}{l^2} \implies \varepsilon < \varepsilon_0 \alpha l$$

zu

$$\frac{C_{31}}{\Lambda} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2).$$

Mit

$$C_2 := \min \left\{ C_{22} \tilde{\varepsilon}_0^{-2/3}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\}$$

folgt die Behauptung. □

Wir müssen nur noch für den restlichen Fall zeigen, dass eine untere Schranke von

$$c \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1$$

mit der Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3} \right)^{1/3}$ hergeleitet werden kann, wobei $c > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist. Das ist die Aussage des nächsten Lemmas.

Lemma 4.35 (Argumentation über u_2 - Teil 2). *Seien u , λ , \mathcal{P} , $Q_i \in \mathcal{G}$ und F_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 4.23. Seien $\varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} -$*

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

1)/2), wobei $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, \min\{1, (\varepsilon_0/\tilde{\varepsilon}_0)^{1/3}\})$ und θ vier von α , ε , h und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist. Gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$, dann gilt

$$C_3\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0\alpha^4h^3/l^2, \varepsilon_0\alpha h^3/l^2) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_3 > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Schritt 1: Wie in der Bemerkung nach Lemma 4.30 diskutiert, beginnen wir mit

$$\begin{aligned} \frac{5}{16}\theta\alpha\lambda^3h^3p &\leq \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dx dy \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{P}} \int_{Q_i} |u_2(x, y) - xF_{21} - yF_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Schritt 2: Nach Lemma 4.28 ist

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| dy dx \leq \alpha^2\lambda^2h^3 + 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}}\lambda^2\frac{h^{5/2}}{l^{1/2}}E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \quad (4.74)$$

Lemma 4.23 liefert

$$\begin{aligned} &\int_{Q_i} |u_2(x, y) - xF_{21} - yF_{22} - (a_{i_0})_2| dy dx \\ &\leq c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4h^3}{\varepsilon l} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Schritt 3: Mit (4.73), (4.74) und (4.75) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{5}{16}\theta\alpha\lambda^3h^3p &\leq p \left(c'_{PCP} \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4h^3}{\varepsilon l} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2} \right) \\ &+ p \left(\alpha^2\lambda^2h^3 + 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}}\lambda^2\frac{h^{5/2}}{l^{1/2}}E_1^{1/2} \right). \end{aligned}$$

Wegen $\lfloor t^{-1} \rfloor \geq (2t)^{-1} \quad \forall t \in (0, 1)$ ist

$$p = \left\lfloor \left\lfloor \frac{l}{h\lambda} \right\rfloor (p_1 + p_2 - 1) \right\rfloor \geq \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{l}{h\lambda} \right\rfloor (p_1 + p_2 - 1) \geq \frac{1}{2} \frac{l}{h\lambda}.$$

Mit $h < l$ folgt

$$\frac{5\theta}{32}\alpha\lambda^2h^3\left(1 - \frac{32\alpha}{5\theta\lambda}\right) \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 h^3}{\varepsilon} E_1 + \left(c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} + 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}}\right) \lambda \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2}.$$

In unserem Fall $\varepsilon > \tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2$ muss das gesuchte optimale λ zusätzlich noch für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$

$$1 - \frac{32\alpha}{5\theta\lambda} = \vartheta > 0$$

erfüllen. Wenn $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3}\right)^{1/3}$ ist, dann gilt

$$1 - \frac{32\alpha^{4/3}h}{5\theta\Lambda\varepsilon^{1/3}l^{2/3}} \geq \vartheta \iff \varepsilon \geq \left(\frac{32}{5\theta\Lambda(1-\vartheta)}\right)^3 \alpha^4 \frac{h^3}{l^2}.$$

Wir benötigen daher

$$\tilde{\varepsilon}_0 \geq \left(\frac{32}{5\theta\Lambda(1-\vartheta)}\right)^3. \quad (4.76)$$

Wir bestimmen nun das optimale λ über die Ungleichung

$$\frac{5\theta}{32}\vartheta\alpha\lambda^2h^3 \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 h^3}{\varepsilon l} E_1 + \left(c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} + 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}}\right) \lambda \frac{h^{5/2}}{l^{1/2}} E_1^{1/2}.$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Mit

$$C_{41} := \frac{5\theta\vartheta}{64c'_P c_P} \frac{1-p_1}{8} \quad \text{und} \quad C_{42} := \frac{\left(\frac{5}{32}\theta\vartheta\right)^2}{4\left(c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} + 2\sqrt{\frac{2}{1-p_2}}\right)^2}$$

gilt insbesondere

$$\min \left\{ C_{41} \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, C_{42} \alpha^2 \lambda^2 h l \right\} \leq E_1.$$

Das optimale λ wäre hier

$$\lambda = \left(\frac{C_{41}}{C_{42}}\right)^{1/3} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha h}\right)^{1/3}. \quad (4.77)$$

Da wir jedoch die Fälle davor betrachten müssen, wird die Wahl wieder

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3}\right)^{1/3}$$

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

sein. Wenn ε_0 klein genug ist, dann ist

$$\min \left\{ \frac{C_{41}}{\Lambda}, C_{42}\Lambda^2 \right\} \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \forall \varepsilon \in (\tilde{\varepsilon}_0 \alpha^4 h^3 / l^2, \varepsilon_0 \alpha h^3 / l^2)$$

eine untere Schranke. Mit

$$C_3 := \min \left\{ \frac{C_{41}}{\Lambda}, C_{42} \right\}$$

folgt die Behauptung des Lemmas. □

4.2.6 Beweis der unteren Schranke

In diesem Abschnitt wollen wir die folgende Teilaussage von Theorem 1 beweisen:

Theorem (Die untere Schranke in Theorem 1 auf einem Rechteck). *Seien $\Omega := (0, l) \times (0, h)$ und K_1, \mathcal{E}_1 , wie in Theorem 1. Dann gibt es drei Konstanten $c > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und $\varepsilon_0 > 0$, die alle nicht von α , ε und l abhängen, so dass gilt:*

$$c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha h^3/l^2).$$

Beweis. Seien $u, \lambda, p, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$ wie in Lemma 4.4. Wie in der Bemerkung nach Lemma 4.30 diskutiert, teilen wir den Beweis in zwei Hauptfälle auf. Für $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$ sind diese:

- Fall 1: Es gibt ein $i_0 \in \mathcal{P}$, so dass $|(F_{i_0})_{21}| < \theta\alpha$.
- Fall 2: Es gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta\alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.

Den ersten Fall haben wir schon in Lemma 4.32 behandelt. Die Aussage, die wir dort entnehmen, ist, dass der gesamte Beweis mit der Wahl $\lambda = \Lambda\left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3}\right)^{1/3}$ geführt werden sollte. Die genaue Strukturierung des Beweises geben wir später noch an.

Durch Lemma 4.33 und Lemma 4.35 haben wir gesehen, dass innerhalb von Fall 2 eine weitere Fallunterscheidung getroffen werden musste. Wir benötigen hier:

- Fall 2a: Es gilt $\tilde{\varepsilon}_0\alpha^4 h^3/l^2 \geq \varepsilon$.
- Fall 2b: Es gilt $\tilde{\varepsilon}_0\alpha^4 h^3/l^2 < \varepsilon$.

Die optimale Wahl von $\tilde{\varepsilon}_0$ wurde durch (4.76) ermittelt. Der Fall 2a wurde in Lemma 4.33 untersucht. Dort wurden die Beweise ohne die Methoden aus Bemerkung 4.31 geführt. Der Fall 2b wurde in Lemma 4.35 analysiert. Dort wurde mit dem Ansatz aus Bemerkung 4.31 gearbeitet.

Jeder Fall einzeln betrachtet liefert eine Skalierung der unteren Schranke von $\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}hl^{1/3}$.

Umstrukturierung des Beweis. Zuerst wird entschieden, in welchem Hauptfall ε liegt. Diese sind

- Fall 1: $\varepsilon \leq \tilde{\varepsilon}_0\alpha^4 h^3/l^2$.
- Fall 2: $\tilde{\varepsilon}_0\alpha^4 h^3/l^2 < \varepsilon \leq \varepsilon_0\alpha h^3/l^2$.

Im nächsten Schritt wird $\lambda = \Lambda\left(\frac{\varepsilon l^2}{\alpha h^3}\right)^{1/3}$ gewählt. Jetzt beginnt die Maschinerie über Ko-

4 Beweis der unteren Schranken in Theorem 1 im Fall $h \leq l$

ollar 4.21 und Lemma 4.23. Am Ende bekommt man drei alternative untere Schranken für E_1 . Das gesuchte c ist dann

$$\min \left\{ \min \left\{ \frac{C_{11}}{\Lambda}, C_{12}\Lambda^2 \right\}, \min \left\{ \frac{C_{22}}{\tilde{\varepsilon}_0^{2/3}}, \frac{C_{31}}{\Lambda} \right\}, \min \left\{ \frac{C_{41}}{\Lambda}, C_{42}\Lambda^2 \right\} \right\}.$$

□

5 Der Fall $h > l$ in Theorem 1

Wir behandeln in diesem Kapitel den Fall $h > l$ aus Theorem 1. Zuerst zeigen wir die unteren Schranken. Wir verfolgen dieselbe Strategie wie im Fall $h < l$, verzichten aber auf die sofortige Umwandlung von α^4 -Faktoren in $\varepsilon^{2/3}$ -Anteile. Stattdessen leiten wir eine allgemeinere Aussage her, die zwei von drei Fällen abdeckt. Um den letzten Fall zu zeigen, werden wir eine untere Schranke aus dem Fall $h < l$ mit Hilfe eines Transformationstricks in eine untere Schranke für den letzten Fall umwandeln.

Bei den oberen Schranken gehen wir ähnlich vor. Mit dem selben Transformationstrick wandeln wir die obere Schranke aus dem Fall $h < l$ in eine obere Schranke für den Fall $h > l$ um. Dieser Trick deckt sofort alle Fälle ab, siehe Abbildung 5.1

5.1 Die unteren Schranken und ihre Beweise

Wir gehen hier ähnlich wie in Abschnitt 4.2 vor. Zuerst betrachten wir eine geeignete Energiepartitionierung. Dazu benötigen wir folgende Notation.

Notation. Seien $S''(\lambda) := (s, s + \lambda l) \times (0, h) \subset \Omega$

$$\mathcal{Q}(\lambda, p_1) := \left\{ i \in [1, \lfloor \frac{h}{l\lambda} \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{es gibt ein } Q_i := (s, s + \lambda l) \times ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \subset S''(\lambda), \right. \\ \left. \text{so dass } \int_{Q_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{Q_i} |D^2 u| \leq \frac{1}{1-p_1} \cdot 4 \frac{l}{h} \lambda^2 E_1. \right\}.$$

und

$$\mathcal{Q}(\lambda, p_1) := \{Q_i := (s, s + \lambda l) \times ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \subset S''(\lambda) : i \in \mathcal{Q}(\lambda)\}.$$

5 Der Fall $h > l$ in Theorem 1

Seien außerdem

$$\mathcal{S}(\lambda, p_2) := \left\{ i \in [1, \lfloor h/(l\lambda) \rfloor] \cap \mathbb{N} : \text{Für } S_i := (0, h) \times ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \text{ gilt} \right. \\ \left. \int_{S_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S_i} |D^2u| \leq \frac{1}{1-p_2} \cdot 2\frac{l}{h} \lambda E_1 \right\}.$$

Die zugehörige Auswahl von Streifen ist

$$\mathcal{S}(\lambda, p_2) := \{S_i := (0, l) \times ((i-1)\lambda l, i\lambda l) : i \in \mathcal{S}(\lambda)\}.$$

Dann seien

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \in (0, 1), \quad p_1, p_2 \in (1/2, 1), \\ \mathcal{P}(\lambda, p_1, p_2) := \mathcal{Q}(\lambda, p_1) \cap \mathcal{S}(\lambda, p_2), \\ p(\lambda, p_1, p_2) := \text{card } \mathcal{P}(\lambda, p_1, p_2), \\ \mathcal{G}(\lambda, p_1, p_2) := \{Q \in \mathcal{Q} : \text{es gibt ein } S \in \mathcal{S}, \text{ so dass } Q \subset S\} \end{array} \right\} \quad (5.1)$$

Lemma 5.1 (Energiepartitionierung). *Seien u , Ω , K_1 , ε und E_1 wie in Theorem 1. Seien p_1 , p_2 , \mathcal{P} und p wie in (5.1). Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es einen offenen Streifen $S'' = (s, s + \lambda l) \times (0, h) \subset \Omega$ und p offene Streifen $S_i = (0, l) \times ((i-1)\lambda l, i\lambda l) \subset \Omega$, $i \in \mathcal{P}$, mit den energetischen Eigenschaften*

$$\int_{S''} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S''} |D^2u| \leq 2\lambda E_1 \quad (5.2)$$

und

$$\int_{S'' \cap S_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S'' \cap S_i} |D^2u| \leq \frac{4}{1-p_1} \frac{l}{h} \lambda^2 E_1 \quad \forall i \in \mathcal{P} \quad (5.3)$$

und

$$\int_{S_i} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{S_i} |D^2u| \leq \frac{2}{1-p_2} \frac{l}{h} \lambda E_1 \quad \forall i \in \mathcal{P}, \quad (5.4)$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von Korollar 4.21. Die Rollen von h und l werden einfach vertauscht. \square

Damit erzeugen wir wie in Abschnitt 4.2.2 eine künstliche Interaktion zwischen der elastischen Energie und der Oberflächenenergie.

Lemma 5.2 (BV-Poincarésche Lokalisierung einer festen K_1 -Matrix). *Seien u , Ω , h , l , ε und E_1 wie in Theorem 1. Seien λ , \mathcal{P} , p_1 , p und $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (5.3). Dann gibt es zu jedem $i \in \mathcal{P}$ ein $F_i \in K_1$ und eine von α , ε , h , l , λ , p_1 und p unabhängige Konstante c_P , so dass*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_i} |Du(x, y) - F_i| dx dy \\ & \leq c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^3 l^2}{\varepsilon h} E_1 + \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^2 \frac{l^{3/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von Lemma 4.22. Auch hier werden die Rollen von h und l vertauscht. \square

Eine erneute Anwendung der Poincaréschen Ungleichung liefert die folgende Version:

Lemma 5.3 ($W^{1,1}$ -Poincarésche Lokalisierung). *Seien u , Ω , h , l , ε und E_1 wie in Theorem 1. Seien λ , p_1 , \mathcal{P} , p und $Q_i \in \mathcal{G}$, $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (5.3). Seien F_i und c_P wie in Lemma 5.2. Dann gibt es eine von α , ε , λ , h , l , p_1 und p unabhängige Konstante $c'_P > 0$ und Vektoren $a_i \in \mathbb{R}^2$, so dass*

$$\begin{aligned} & \int_{Q_i} \left| u(x, y) - F_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a_i \right| dx dy \\ & \leq c'_P c_P \frac{8}{1-p_1} \frac{\lambda^4 l^3}{\varepsilon h} E_1 + c'_P \sqrt{\frac{4}{1-p_1}} \lambda^3 \frac{l^{5/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.1.1 Einige Hilfsabschätzungen

Jetzt benötigen wir erneut eine Sammlung von Hilfsabschätzungen. Im Prinzip werden folgende Hilfssätze genau so wie in Abschnitt 4.2.4 bewiesen. Da wir aber im übertragenen Sinne die Rollen von S'_i und S vertauscht haben, können wir nicht ohne Weiteres die Beweise aus Abschnitt 4.2.4 übernehmen.

Lemma 5.4. *Seien u , Ω , h , l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S_i , $i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (5.4). Dann gilt*

$$\int_{S_i} |u_1(x, y) - x| dx dy \leq \sqrt{2} \lambda l^2 E_1^{1/2} \left(\frac{l}{h} \right)^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

5 Der Fall $h > l$ in Theorem 1

Beweis. Der Beweis ist ähnlich wie der Beweis von Lemma 4.25. Der Korrekturfaktor $(l/h)^{1/2}$ kommt von der Rollenvertauschung von h und l , der sich in (5.4) bemerkbar gemacht hat. \square

Lemma 5.5. Seien u, Ω, h, l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S_i, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (5.4). Dann gilt

$$\int_{S_i} |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2^{3/2} \lambda l^2 E_1^{1/2} \left(\frac{l}{h} \right)^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.26. Wegen (5.4) gibt es wieder den Korrekturfaktor $(l/h)^{1/2}$. \square

Lemma 5.6. Seien u, Ω, h, l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$, p_2, \mathcal{P} und S'' wie in der Energiepartitionierung (5.2). Dann gilt

$$\int_{S''} |\partial_2 u_2(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda h^{1/2} l^{1/2} E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda h l.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.27 \square

Lemma 5.7. Seien u, Ω, h, l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$, p_2, \mathcal{P} und $Q_i \in \mathcal{G}, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (5.3). Dann gilt

$$\int_{Q_i} |u_2(x, y) - y| \, dx dy \leq 2 \sqrt{\frac{2}{1-p_2}} \lambda^2 l^{3/2} h^{1/2} E_1^{1/2} + \alpha^2 \lambda^2 h l^2 \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Der Beweis ist ähnlich zu dem Beweis von Lemma 4.28. Der einzige Unterschied kommt nun von der Geometrie von S'' , der den Störterm $\alpha^2 \lambda^2 h l^2$ verursacht. \square

Bei der Abschätzung von $\int_{S_i} |\partial_1 u_2(x, y)| \, dx dy, i \in \mathcal{P}$, werden wir die folgende Variante verwenden:

Lemma 5.8. Seien u, Ω, h, l und E_1 wie in Theorem 1. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S_i, i \in \mathcal{P}$, wie in der Energiepartitionierung (4.54). Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$\int_{S_i} |\partial_1 u_2(x, y)| \, dx dy \leq 2^{3/4} (1+\tau)^{1/2} \lambda l^{3/2} E_1^{1/4} \left(\frac{l}{h} \right)^{1/4} + 2^{1/2} \frac{1+\tau}{\tau} \lambda l E_1^{1/2} \left(\frac{l}{h} \right)^{1/2} \quad \forall i \in \mathcal{P}.$$

Beweis. Die Korrekturfaktoren $(l/h)^{1/4}$ und $(l/h)^{1/2}$ werden durch die Anwendung von (4.54) verursacht. Sonst ist der Beweis analog zu dem Beweis von Lemma 4.29 \square

5.1.2 Untere Schranke für kleine ε

Wir verfolgen die gleiche Strategie wie in Abschnitt 4.2.5. Wir beginnen mit dem folgenden Fall:

Lemma 5.9 (Argumentation über u_1). *Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 5.3. Seien $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und θ drei von α, ε, h und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α, ε, h und l unabhängige Konstante ist. Gibt es ein $i_0 \in \mathcal{P}$, so dass $|(F_{i_0})_{21}| < \theta \alpha$, dann gilt*

$$C_1 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_1 > 0$ eine von α, ε, h und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Wir benötigen Lemma 4.30. Dort wenden wir (4.58) mit der Substitution $h = l$ an. Wie in dem Beweis von Lemma 4.32 gibt es drei von α, ε, l und h unabhängige Konstanten $c_1, c_2, c_3 > 0$, so dass

$$\alpha \lambda^3 l^3 \leq c_1 \frac{\lambda^4 l^3}{\varepsilon h} E_1 + c_2 \lambda^3 \frac{l^{5/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2} + c_3 \lambda^2 \frac{l^{5/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2}. \quad (5.7)$$

Für die linke Seite war Lemma 4.30 verantwortlich. Auf der rechten Seite wurden Lemma 5.1 und die Version von Lemma 5.4 auf Q_i angewendet. Auf der rechten Seite von (5.7) können wir wegen $\lambda < 1$ noch etwas einfacher schreiben:

$$\alpha \lambda^3 l^3 \leq c_1 \frac{\lambda^4 l^3}{\varepsilon h} E_1 + (c_2 + c_3) \lambda^2 \frac{l^{5/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2}. \quad (5.8)$$

Einer der zwei Summanden auf der rechten Seite von (5.8) ist der Größte. Insbesondere erhalten wir

$$\min \left\{ \frac{\alpha \varepsilon h}{2c_1 \lambda}, \frac{1}{4(c_2 + c_3)^2} \alpha^2 \lambda^2 l h \right\} \leq E_1. \quad (5.9)$$

Falls $\varepsilon < \varepsilon_0 \alpha l$, dann sagt (5.9) aus, dass

$$\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3} \quad (5.10)$$

die optimale Wahl sein wird, wobei $\Lambda > 0$ eine von α, ε, l und h unabhängige Konstante ist. Wegen (5.9) und (5.10) gibt es eine von α, ε, h und l unabhängige Konstante $C_1 > 0$, so dass gilt:

$$C_1 \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0).$$

□

Wir kommen nun zum nächsten Fall.

Lemma 5.10 (Argumentation über u_2). *Seien $u, \lambda, \mathcal{P}, Q_i \in \mathcal{G}$ und $F_i, i \in \mathcal{P}$, wie in Lemma 5.3. Seien $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$, $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\theta \in (0, (\sqrt{5} - 1)/2)$, wobei $\varepsilon_0 > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und θ drei von α, ε, h und l unabhängige Konstanten sind. Sei $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$, wobei $\Lambda \in (0, \varepsilon_0^{-1/3})$ eine von α, ε, h und l unabhängige Konstante ist. Gilt $|(F_i)_{21}| \geq \theta \alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$, dann gilt*

$$C_2 \min \{ \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}, \alpha^4 h l \} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $C_2 > 0$ eine von α, ε, h und l unabhängige Konstante ist.

Beweis. Analog zu dem Beweis von Lemma 4.33 müssen wir noch eine Fallunterscheidung treffen.

Schritt 1: Ansatz. Bei $|(F_i)_{21}| > \theta \alpha \quad \forall i \in \mathcal{P}$ betrachten wir den folgenden Ansatz: Zu jedem $i \in \mathcal{P}$ betrachten wir auf $Q_i \in \mathcal{G}$ den folgenden Mittelwert:

$$M_i := \frac{1}{\lambda^2 l^2} \int_{Q_i} Du(x, y) \, dx dy.$$

Wie in (4.69) benötigen wir $\tilde{\theta} \in (0, \theta)$, wobei $\tilde{\theta}$ eine von α, ε, h und l unabhängige Konstante ist. Es gibt nun zwei Fälle.

- Fall 1: $|(M_i)_{21}| > \tilde{\theta} \alpha$ für alle $i \in \mathcal{P}$.
- Fall 2: $|(M_{i_0})_{21}| \leq \tilde{\theta} \alpha$ für ein $i_0 \in \mathcal{P}$.

In Fall 1 wenden wir Lemma 5.8 an. Dort sei τ eine von α, ε, l und h unabhängige Konstante. Es gibt daher zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$, die beide nicht von α, ε, h und l abhängen, so dass gilt:

$$\alpha \lambda^2 \leq c_1 \lambda^{3/2} E_1^{1/4} \left(\frac{l}{h}\right)^{1/4} + c_2 \lambda E_1^{1/2} \left(\frac{l}{h}\right)^{1/2}.$$

Einer der zwei Summanden auf der rechten Seite ist der Größte. Insbesondere gilt

$$\min \left\{ \frac{1}{2^4 c_1^4} \alpha^4 l h, \frac{1}{4 c_2^2} \alpha^2 l h \right\} \leq E_1.$$

5.1 Die unteren Schranken und ihre Beweise

Falls

$$\alpha_0 \leq \frac{2c_1^2}{c_2},$$

dann gilt

$$\frac{1}{2^4 c_1^4} \alpha^4 l h = \min \left\{ \frac{1}{2^4 c_1^4} \alpha^4 l h, \frac{1}{4c_2^2} \alpha^2 l h \right\} \leq E_1.$$

Das beendet den ersten Fall.

In Fall 2 gehen wir ähnlich wie in dem Beweis von Lemma 4.33 vor. Wegen der Variante (4.59) aus Lemma 4.30 mit der Substitution $h = l$, Lemma 5.2 und

$$\theta \alpha \leq |F_{i_0} - \partial_1 u_2(x, y)| + |\partial_1 u_2(x, y)|$$

gibt es zwei von α , ε , h und l unabhängige Konstanten $c_1, c_2 > 0$, so dass

$$\theta \alpha \lambda^2 l^2 \leq c_1 \frac{\lambda^3 l^2}{\varepsilon h} E_1 + c_2 \lambda^2 \frac{l^{3/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2} + \tilde{\theta} \alpha \lambda^2 l^2.$$

Wegen $\theta > \tilde{\theta}$ dürfen wir den rechten Störterm von der linken Seite absorbieren lassen. Eine Umbenennung der Konstanten c_1 und c_2 ergibt dann

$$\alpha \lambda^2 l^2 \leq c_1 \frac{\lambda^3 l^2}{\varepsilon h} E_1 + c_2 \lambda^2 \frac{l^{3/2}}{h^{1/2}} E_1^{1/2}.$$

Insbesondere erhalten wir hieraus

$$\min \left\{ \frac{1}{2c_1} \frac{\alpha \varepsilon h}{\lambda}, \frac{1}{4c_2^2} \alpha^2 l h \right\} \leq E_1.$$

Falls

$$\varepsilon < \left(\frac{c_1}{2c_2^2} \right)^{3/2} \alpha l,$$

dann gilt mit $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3}$

$$\frac{1}{2c_1} \frac{\alpha \varepsilon h}{\lambda} = \min \left\{ \frac{1}{2c_1} \frac{\alpha \varepsilon h}{\lambda}, \frac{1}{4c_2^2} \alpha^2 l h \right\} \leq E_1.$$

Das beendet den zweiten Fall.

Fazit: Beide Fälle zusammen sagen, dass es eine von α , ε , h und l unabhängig Konstante

5 Der Fall $h > l$ in Theorem 1

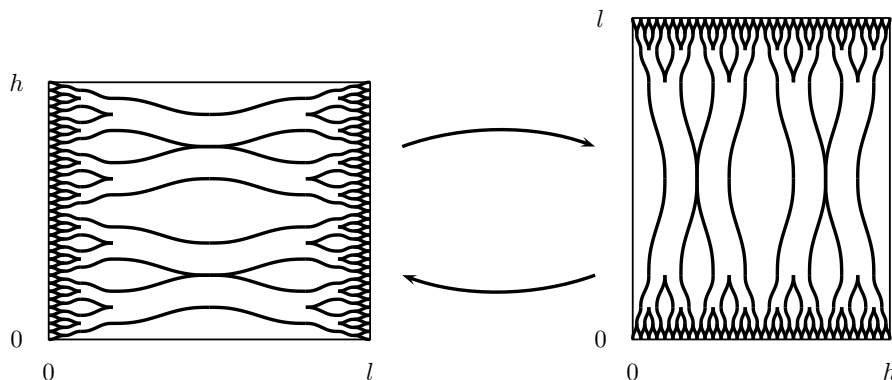


Abbildung 5.1: Mit Hilfe von Rotationen und Spiegelungen können die Beweise des Falls $h < l$ nach $h > l$ transportiert werden. Für große ε wird dieser Trick im Beweis von Lemma 5.12 zum Einsatz kommen. Die oberen Schranken können sofort mit dem Transformationstrick gewonnen werden.

$C_3 > 0$ gibt, so dass

$$C_3 \min \{ \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}, \alpha^4 h l \} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Das beendet den Beweis. □

Aus Lemma 5.9 und Lemma 5.10 gewinnen wir die folgende Aussage für kleine ε :

Korollar 5.11 (Untere Schranke für kleine ε). *Unter derselben Voraussetzung wie im Fall $h > l$ in Theorem 1 gilt*

$$c \min \{ \alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} h l^{1/3}, \alpha^4 h l \} \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha^4 l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $c > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist.

Dieses Korollar zeigt die unteren Schranken in den Fällen $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha^4 l)$ und $\varepsilon \in [\varepsilon_0 \alpha^4 l, \varepsilon_0 \alpha^4 h]$ aus Theorem 1. Zu behandeln ist noch der Fall $\varepsilon \in [\varepsilon_0 \alpha^4 h, \varepsilon_0 \alpha l^3 / h^2]$. Das ist die Aufgabe des nächsten Abschnitts.

5.1.3 Untere Schranke für große ε

Wir zeigen in diesem Abschnitt die folgende Aussage:

5.1 Die unteren Schranken und ihre Beweise

Lemma 5.12 (Untere Schranke für große ε). *Seien Ω und E_1 wie in Theorem 1. Es gibt drei Konstanten $c > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$ und $\varepsilon_0 > 0$, die nicht von α , ε , h und l abhängen, so dass Folgendes gilt:*

$$c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3} - \alpha^4hl \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in [\varepsilon_0\alpha^4h, \varepsilon_0\alpha l^3/h^2] \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Beweis. Schritt 1: Zurückführung auf Abschnitt 4.2. Seien $\Omega_H := (0, l) \times (0, h)$ und $\Omega_L := (0, h) \times (0, l)$. Sei $v \in \mathcal{M}(\Omega_H)$, so dass

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_H} \text{dist}^2(Dv(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\Omega_H} |D^2v| \\ &= \inf_{w \in \mathcal{M}(\Omega_H)} \left\{ \int_{\Omega_H} \text{dist}^2(Dw(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\Omega_H} |D^2w| \right\} =: E_1. \end{aligned}$$

Wir wollen die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2 anwenden. Dazu benötigen wir zuerst eine geeignete Koordinatentransformation der Form

$$\Xi : \Omega_L \mapsto \Omega_H.$$

Falls $(x, y) \in \Omega_L$, dann wird (x, y) durch die folgende spezielle Wahl von Ξ nach Ω_H geschickt:

$$\Xi : (x, y) \in \Omega_L \mapsto \left(Z \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)^T, \quad Z := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist Z eine Spiegelung an der e_1 -Achse mit einer anschließenden Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Falls $(x, y) \in \Omega_L$ durch Ξ nach Ω_H geschickt wurde, dann wenden wir auf $\Xi(x, y)$ das obige v an. Danach holen wir $v(\Xi(x, y))$ nach Ω_L zurück. Bei der Rückkehr nach Ω_L müssen die auf die Randdaten achten. Wir betrachten die folgende Funktion:

$$u(x, y) := Z \cdot v(\Xi(x, y)); \tag{5.11}$$

wegen

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist die letzte Abbildung eine Spiegelung an der e_2 -Achse mit einer anschließenden Drehung um 90° im Uhrzeigersinn. Wegen des Transportes der Radwerten von Ω_H nach Ω_L benötigen wir diese letzte Abbildung. Nur so dürfen wir die Ergebnisse aus Abschnitt 4.2

5 Der Fall $h > l$ in Theorem 1

anwenden. Das wird in Abbildung 5.1 angedeutet. Wir betrachten jetzt

$$Du(x, y) = ZDv(\Xi(x, y))Z$$

und wollen den Abstand zu K_1 messen. Seien $R_u, R_v \in \text{SO}(2)$ und $J_u, J_v \in \{A, B\}$ so gewählt, dass $|Du(x, y) - R_u J_u| \geq \text{dist}(Du(x, y), K_1)$ und $|Dv(\Xi(x, y)) - R_v J_v| = \text{dist}(Dv(\Xi(x, y)), K_1)$ gelten. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{dist}(Du(x, y), K_1) &\leq 2 \text{dist}(Dv(\Xi(x, y)), K_1) \\ &+ \left| \begin{pmatrix} -\sigma_v \alpha \sin(\phi_v) + \cos(\phi_v) & -\sin(\phi_v) \\ \sigma_v \alpha \cos(\phi_v) + \sin(\phi_v) & \cos(\phi_v) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(\phi_u) & \alpha \sigma_u \cos(\phi_u) - \sin(\phi_u) \\ \sin(\phi_u) & \alpha \sigma_u \sin(\phi_u) + \cos(\phi_u) \end{pmatrix} \right|, \end{aligned} \quad (5.12)$$

wobei $\sigma_u, \sigma_v \in \{-1, 1\}$ und $\phi_u, \phi_v \in \mathbb{R}$. Da wir in (5.12) zu dist übergegangen sind, ist (5.12) auch für eine spezielle Wahl von σ_u richtig. Wir betrachten (5.12) mit $\sigma_u = \sigma_v$ und erhalten

$$\begin{aligned} \text{dist}(Du(x, y), K_1) &\leq 2 \text{dist}(Dv(\Xi(x, y)), K_1) \\ &+ \sqrt{2\alpha^2 + 4\alpha\sigma_v \sin(\phi_v - \phi_u) + 4(1 - \cos(\phi_v - \phi_u))}. \end{aligned}$$

Wir wählen ϕ_u so, dass $\phi_v - \phi_u = -\sigma_v \alpha$. Wegen

$$\sup_{z \in (-\pi, \pi)} \frac{2z^2 + 4(1 - \cos(z)) - 4z \sin(z)}{z^4} = \frac{1}{2}$$

erhalten wir schließlich

$$\text{dist}(Du(x, y), K_1) \leq 2 \text{dist}(Dv(\Xi(x, y)), K_1) + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha^2$$

bzw.

$$\text{dist}^2(Du(x, y), K_1) \leq 4 \text{dist}^2(Dv(\Xi(x, y)), K_1) + \alpha^4. \quad (5.13)$$

Jetzt gehen wir zu E_1 zurück. Mit (5.11) und (5.13) folgt nun

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_L} \text{dist}^2(Du(x, y), K_1) dx dy + \varepsilon \int_{\Omega_L} |D^2 u| \\ &\leq \int_{\Omega_H} 4 \text{dist}^2(Dv(\Xi(x, y)), K_1) dx dy + 4\varepsilon \int_{\Omega_H} |D^2 v(\Xi)| + \alpha^4 h l. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Schritt 2: Anwendung des $h > l$ -Falls. Die linke Seite von (5.14) kennen wir schon aus Abschnitt 4.2. Es gibt also eine Konstante $c > 0$, die von α, ε, h und l unabhängig

ist, so dass

$$c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3} - \alpha^4hl \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha\frac{l^3}{h^2}) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (5.15)$$

Falls $\varepsilon > c^{-3/2}\alpha^4h$, dann ist die linke Seite von (5.15) positiv. In diesem Fall haben wir

$$c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3} \left(1 - \frac{\alpha^4hl}{c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3}}\right) \leq E_1 \quad \forall \varepsilon \in (c^{-3/2}\alpha^4h, \varepsilon_0\alpha\frac{l^3}{h^2}) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Das beendet den Beweis. □

5.2 Die oberen Schranken und ihre Beweise

Mit dem Transformationstrick aus dem letzten Abschnitt erhalten wir sofort aus der oberen Schranke im Fall $h < l$ eine obere Schranke für drei von drei Fällen im Fall $h > l$, siehe Abbildung 5.1. Wir erhalten das folgende Lemma:

Lemma 5.13 (Die obere Schranke für kleine ε). *Unter denselben Voraussetzungen wie im Fall $h > l$ von Theorem 1 gilt:*

$$E_1 \leq c\alpha^{4/3}\varepsilon^{2/3}lh^{1/3} + 4\alpha^4hl \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha\frac{l^3}{h^2}) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0),$$

wobei $c > 0$ eine von α , ε , h und l unabhängige Konstante ist.

Dieses Lemma zeigt den Fall $\varepsilon \in (\varepsilon_0\alpha^4h, \varepsilon_0\alpha l^3/h^2)$.

5 *Der Fall $h > l$ in Theorem 1*

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Die folgenden Sätze und Beweise sind bis auf Nullmengen zu verstehen. Um die Notation übersichtlich zu halten, werden wir im Folgenden nicht mehr Bezug auf die vielen Nullmengen nehmen.

6.1 Der Fall $h = l$

Bevor wir in den Beweis der oberen Schranke von Theorem 2 einsteigen, wollen wir zuerst die Strategie aus Kapitel 6 rekapitulieren und übertragen sie auf die Situation von K_2 .

Erfahrungen aus Kapitel 4: Wir haben bei dem Beweis der unteren Schranken von Theorem 1 eine Hilfsvariable eingeführt, um eine Reihe von alternativen unteren Schranken herzuleiten. Eine Schwierigkeit war, die optimale Wahl von λ zu bestimmen. Um zumindest die Skalierung von λ zu erfahren, sind wir dort in zwei von vier Fällen auf die folgende Situation gestoßen:

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ c_1 \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, c_2 \alpha^2 \lambda^2 l^2 \right\} \leq E_1,$$

wobei $c_1, c_2 > 0$ zwei Konstanten sind, die nicht von α , ε und l abhängen. Das führte zu der Skalierung $\lambda \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3}$ und somit $\alpha^{4/3} \varepsilon^{2/3} l^{4/3} \sim E_1$.

Hauptziel der Strategie in diesem Kapitel: Wir erwarten diesmal die Situation

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ c_1 \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, c_2 \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\} \leq E_2 \tag{6.1}$$

und somit $\lambda \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/5}$, weil wir in Richtung $\alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} l^{6/5} \sim E_2$ gehen wollen. In der Tat werden wir noch feststellen, dass (6.1) zum Erfolg führt.

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

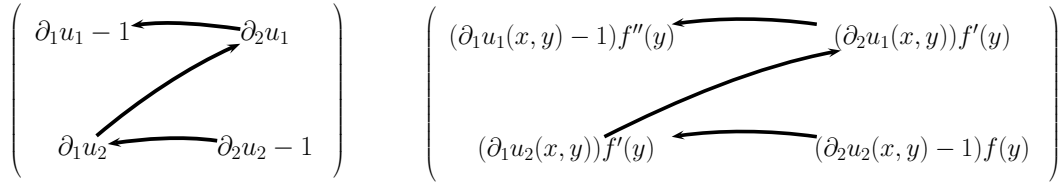


Abbildung 6.1: Bekannte Strategie aus der oberen Schranke (links). Eine ähnliche Strategie verfolgen wir bei der unteren Schranke (rechts). Diesmal benötigen wir eine zusätzliche Hilfsfunktion. Die rechte Matrix ist symbolisch zu verstehen. Die genaue Strategie ist in Abbildung 6.5 zu sehen.

Separation von ε aus \mathcal{E} : Ähnlich wie bei Theorem 1 wird uns diesmal im Wesentlichen die Ungleichung

$$\alpha \lambda^3 l^3 \leq C_1 \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_2 + C_2 \lambda^2 l^2 E_2^{1/2} \quad (6.2)$$

zu (6.1) führen. Die genaue Form der Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 > 0$ sind vorerst unwichtig. Sie hängen nicht von α , ε und l ab. Damit die Strategie (6.2) erfolgreich sein kann, muss der Parameter ε zuerst in einer geeigneten Form von E_2 herausgefiltert werden. Das wird wieder die Aufgabe der Energiepartitionierung sein, siehe Lemma 6.1.

Energetische Interaktion: Die Ungleichung (6.2) ist anders betrachtet eine Interaktion zwischen verschiedenen Energieanteilen. Um das nun herausgefilterte ε wieder ins Spiel zu bringen und in Richtung (6.2) zu gehen, müssen die Alternativen aus Lemma 6.1 interagieren. Das wird in Lemma 6.2 vorgeführt.

Unterschiede zwischen K_1 und K_2 : Im Fall K_1 konnten sowohl die $\alpha^{4/3}$ -Skalierung als auch die $\varepsilon^{2/3}$ -Skalierung der unteren Schranke simultan hergeleitet werden. Zwar kann im Fall K_2 auf einem ähnlichen Weg wie im Fall K_1 die $\varepsilon^{4/5}$ -Skalierung relativ schnell gezeigt werden, jedoch ist die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung nicht mehr so schnell vorhanden. Das wird in Abschnitt 6.1.4 vorgeführt. Um auch die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung herzuleiten, werden beide Komponenten des Vektors u simultan benötigt. Ohne eine Interaktion zwischen u_1 und u_2 , die im Fall K_1 nicht benötigt wurde, kann die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung nicht gezeigt werden.

Das $\alpha^{6/5}$ -Projekt: Das Hauptlemma hierfür ist Lemma 6.12. Wir benötigen eine ähnliche Herangehensweise wie bei der oberen Schranke. In Abbildung 6.1 wird daran erinnert, wie wir bei der oberen Schranke zu der richtigen Skalierung gekommen sind. Dort sind wir im Wesentlichen von $\partial_2 u_2 - 1$ über $\partial_1 u_2$ und $\partial_2 u_1$ nach $\partial_1 u_1 - 1$ gegangen, um in $\partial_1 u_1 - 1$ die passenden, kleinen Terme zu erzeugen. Einen ähnlichen Weg werden wir auch diesmal einschlagen.

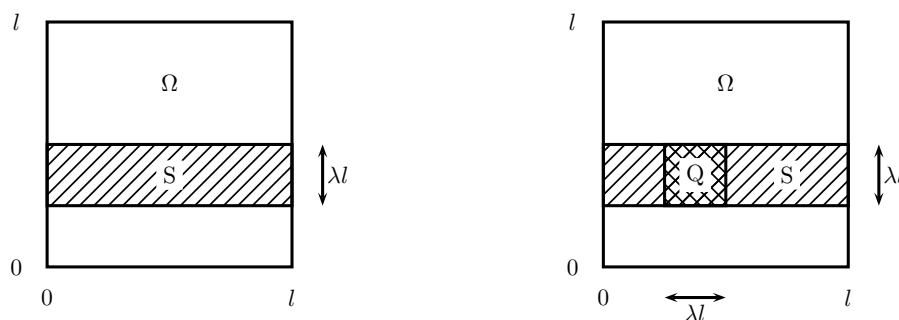


Abbildung 6.2: Energiepartitionierung: Es werden solche Streifen und Quadrate lokalisiert, wo die elastische Energie und die Oberflächenenergie durch denselben Energieanteil abgeschätzt werden können. Tatsächlich wird mit der Energiepartitionierung der Parameter ε aus \mathcal{E}_2 herausgefiltert.

6.1.1 Energiepartitionierung

Die Energiepartitionierung ist uns schon aus Kapitel 4 bekannt. Wir benötigen diesmal die Energiepartitionierung in der folgenden, leichteren Form.

Lemma 6.1 (Energiepartitionierung). *Seien u , Ω , K_2 , ε und E_2 wie in Theorem 2. Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es einen offenen Streifen $S = (0, l) \times (s, s + \lambda) \subset \Omega$ und ein offenes Quadrat $Q = q + (0, \lambda)^2 \subset S$ mit den energetischen Eigenschaften*

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) \, dx dy + \varepsilon \int_S |D^2 u| \leq 2\lambda E_2, \quad (6.3)$$

und

$$\int_Q \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) \, dx dy + \varepsilon \int_Q |D^2 u| \leq 4\lambda^2 E_2. \quad (6.4)$$

Beweis. Der Beweis ist sogar leichter als der von Lemma 4.1, weil wir diesmal ohne die Anteilsparameter p , p_1 und p_2 auskommen. Die Eigenschaft (6.3) wird genauso wie im Fall Lemma 4.1 gezeigt. Um (6.4) zu zeigen, wenden wir die vorherige Argumentation auf S an. \square

6.1.2 Energetische Interaktion

Die nächsten zwei Aussagen kennen wir schon aus Kapitel 4. Geändert haben sich im Vergleich zu Kapitel 4 nur die Konstanten.

Lemma 6.2 (BV-Poincarésche Lokalisierung einer festen K_2 -Matrix). *Seien u , Ω , l , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und Q wie in der Energiepartitionierung (6.4). Dann gibt es ein $F \in K_2$ und eine Konstante $c_P > 0$, so dass*

$$\int_Q |Du(x, y) - F| \, dx dy \leq 8c_P \frac{\lambda^3 l}{\varepsilon} E_2 + 2\lambda^2 l E_2^{1/2}. \quad (6.5)$$

Beweis. Der Beweis ist unabhängig von K_1 und K_2 und ist somit analog zu dem Beweis von Lemma 4.3. \square

Lemma 6.3 ($W^{1,1}$ -Poincarésche Lokalisierung). *Seien u , Ω , l , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und Q wie in der Energiepartitionierung (6.4). Seien F und c_P wie in Lemma 6.2. Dann gibt es eine Konstante $c'_P > 0$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so dass*

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| \, dx dy \leq 16c_P c'_P \frac{\lambda^4 l^2}{\varepsilon} E_2 + 4c'_P \lambda^3 l^2 E_2^{1/2}. \quad (6.6)$$

Beweis. Sei Q wie in der Energiepartitionierung (6.4) und F wie in Lemma 6.2. Wegen der Poincaréschen Ungleichung gibt es eine Konstante $c'_P > 0$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| \, dx dy \leq 2c'_P \lambda \int_Q |Du(x, y) - F| \, dx dy. \quad (6.7)$$

Auf der rechten Seite von (6.7) wenden wir Lemma 6.2 an. \square

Bemerkung. Mit [7] und [1] können c_P und c'_P ermittelt werden.

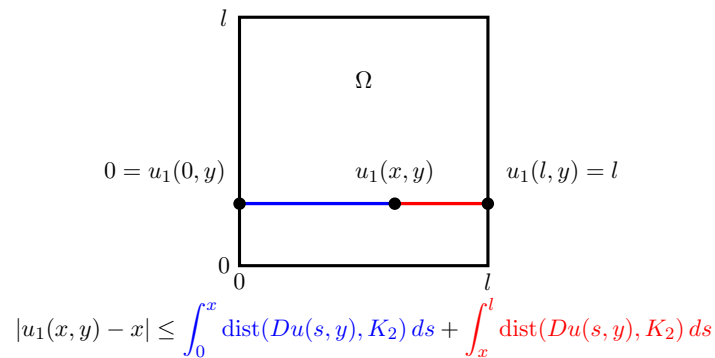


Abbildung 6.3: Aussage von Lemma 6.4.

6.1.3 Rigidität der ersten Komponente des Vektors u

Hier kommen die Randdaten ins Spiel. Das nächste Lemma sagt aus, dass $|u_1(x, y) - x|$ punktweise durch elastische Energieanteile kontrolliert wird, siehe Abbildung 6.3. Diese Art von Aussagen kennen wir schon aus Kapitel 4.

Lemma 6.4 (Punktweise Rigidität). *Seien u , Ω und K_2 wie in Theorem 2. Dann gilt*

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_2) ds \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.5. □

6.1.4 Die $\varepsilon^{4/5}$ -Skalierung

Wenn wir im Fall K_2 die gleiche Strategie wie im Fall K_1 verfolgen, dann können wir zwar eine $\varepsilon^{4/5}$ -Skalierung zeigen, doch eine $\alpha^{6/5}$ -Skalierung ist nicht in Sicht. Das werden wir in diesem Abschnitt sehen. Wir vernachlässigen hier die genaue Form der Konstanten ersetzen in jeder Zeile alle Konstanten durch die größte der dort vorkommenden Konstanten. Von Zeile zu Zeile wird sich die Konstante $c > 0$, die nicht von α , ε und l abhängen wird, ändern.

Schritt 1: Struktur von K_2 .

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Für jedes $\lambda \in (0, 1)$ und jedes Quadrat $Q \subset \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{L}^2(Q) = \lambda^2 l^2$ gilt:

$$c_0 \alpha \lambda^3 l^3 \leq \min_{F \in K, a \in \mathbb{R}^2} \int_Q \left| \left((1 - F) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right) \cdot e_2 \right| dx dy, \quad (6.8)$$

wobei die Konstante $c_0 > 0$ nicht von α , λ und l abhängt.

Beweis. Wir gehen hier ähnlich wie in Lemma 4.13 aus Abschnitt 4.1.5 vor. Sei $\theta \in (0, 1)$ fest gewählt und unabhängig von α , λ und l . Entweder ist $|F_{21}| \geq \theta\alpha$ oder $|F_{21}| < \theta\alpha$. Im ersten Fall wenden wir (4.24) aus Lemma 4.13 an. Falls $|F_{21}| = |\sin(\phi)| < \theta\alpha$, dann gilt $1 - \cos(\phi) < \theta^2 \alpha^2$. Das bedeutet aber auch $\alpha |\cos(\phi)| > \alpha(1 - \theta^2 \alpha^2)$. Daher gibt es eine Konstante $\tilde{\theta} > 0$, die unabhängig von α , λ und l ist, so dass $|1 - F_{22}| \geq \tilde{c}\alpha$. Wähle nun $c_0 = \min \{ \tilde{\theta}, \theta \}$. \square

Schritt 2: Aufspaltung der Ungleichungskette in zwei Zweige.

Unter den selben Voraussetzungen wie in Lemma 6.3 gibt es eine Konstante c_0 , die nicht von α , ε , Q abhängt, so dass

$$c_0 \alpha \lambda^3 l^3 \leq \int_Q \left| \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| dx dy + c \frac{\lambda^4 l^2 E_2}{\varepsilon} + c \lambda^3 l^2 E_2^{1/2}. \quad (6.9)$$

Beweis. Zunächst folgt aus (6.8) und Dreiecksungleichung

$$c_0 \alpha \lambda^3 l^3 \leq \int_Q |u_2(x, y) - y| dx dy + \int_Q |u_2(x, y) - F_{21}x - F_{22}y - a_2| dx dy.$$

Das zweite Integral wird mit Lemma 6.3 abgeschätzt. \square

Schritt 3a: Abschätzung des zweiten Zweiges - Teil I.

Um den ersten Summanden in (6.9) abzuschätzen, beginnen wir mit der folgenden Ungleichung:

Unter den selben Voraussetzungen wie in Lemma 6.3 gilt:

$$\int_Q \left| \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 dx dy \leq \lambda^2 \int_S |\partial_1 u(x, y) - e_1|^2 dx dy. \quad (6.10)$$

Beweis. Da $u_1(0, y) = 0$ und $u_2(0, y) = y$ für jedes $y \in [0, l]$, erhalten wir für jedes $(x, y) \in \Omega$

$$|u_1(x, y) - x| = \left| \int_0^x (\partial_1 u_1(s, y) - 1) ds \right| \leq l^{1/2} \left(\int_0^l |\partial_1 u_1(s, y) - 1|^2 ds \right)^{1/2} \quad (6.11)$$

bzw.

$$|u_2(x, y) - y| = \left| \int_0^x \partial_1 u_2(s, y) ds \right| \leq l^{1/2} \left(\int_0^l |\partial_1 u_2(s, y)|^2 ds \right)^{1/2}. \quad (6.12)$$

Wir fassen (6.11) und (6.12) zusammen zu:

$$\int_Q \left| \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 dx dy \leq l \int_Q \int_0^l |\partial_1 u(s, y) - e_1|^2 ds dx dy.$$

□

Schritt 3b: Abschätzung des zweiten Zweiges - Teil II.

Wir können die rechte Seite in (6.9) noch genauer angeben:

Unter den selben Voraussetzungen wie in Lemma 6.3 gilt:

$$\int_Q \left| \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 dx dy \leq c\lambda^2 l^3 E_2^{1/2} + c\lambda^2 l^2 E_2. \quad (6.13)$$

Beweis. Wegen $u_1(0, y) = 0$, $u_1(l, y) = l$, $u_2(0, y) = y$ und $u_2(l, y) = y$ gilt

$$l = \int_0^l \partial_1 u(x, y) \cdot e_1 dx.$$

Diese Identität liefert bei

$$\int_0^l |\partial_1 u(x, y) - e_1|^2 dx = \int_0^l (|\partial_1 u(x, y)|^2 - 2\partial_1 u(x, y) \cdot e_1 + 1) dx$$

zunächst

$$\int_0^l |\partial_1 u(x, y) - e_1|^2 dx = \int_0^l |\partial_1 u(x, y)|^2 dx - l. \quad (6.14)$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Wegen $|(Du) \cdot e_1| \leq 1 + \text{dist}(Du, K_2)$ ist

$$|(Du) \cdot e_1|^2 \leq 1 + 2 \text{dist}(Du, K_2) + \text{dist}^2(Du, K_2). \quad (6.15)$$

Aus (6.14) und (6.15) folgt nun

$$\int_0^l |\partial_1 u(x, y) - e_1|^2 dx \leq 2 \int_0^l \text{dist}(Du, K_2) dx + \int_0^l \text{dist}^2(Du, K_2) dx. \quad (6.16)$$

Mit (6.10) und (6.16) erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} & \int_Q \left| \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 dx dy \\ & \leq \lambda^2 \int_S (2 \text{dist}(Du(x, y), K_2) + \text{dist}^2(Du(x, y), K_2)) dx dy. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Die rechte Seite in (6.17) kann mit Hilfe von Lemma 6.1 durch elastische Energieanteile abgeschätzt werden. Wir erhalten somit die behauptete Abschätzung (6.13). \square

Schritt 4: Zusammenfügen der Schritte 1 bis 3.

Bisher haben wir erreicht:

Unter den selben Voraussetzungen wie im Schritt 2 gibt es eine Konstante $c_0 > 0$, die nicht von $\alpha, \varepsilon, \lambda l$ abhängt, so dass gilt:

$$c_0 \alpha \lambda^3 l^3 \leq c \frac{\lambda^4 l^2 E_2}{\varepsilon} + c \lambda^3 l^2 E_2^{1/2} + \lambda l \sqrt{c \lambda^2 l^3 E_2^{1/2} + c \lambda^2 l^2 E_2}. \quad (6.18)$$

Beweis. Zunächst folgt aus (6.9) aus Schritt 2 und der Hölderschen Ungleichung

$$c_0 \alpha \lambda^3 l^3 \leq \lambda l \sqrt{\int_Q \left| \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right|^2 dx dy} + c \frac{\lambda^4 l^2 E_2}{\varepsilon} + c \lambda^3 l^2 E_2^{1/2}.$$

Anschließend wenden wir (6.13) an. \square

Schritt 5: Optimierung nach λ .

Vernachlässigen wir einmal die Konstanten in (6.18). Einer der Terme auf der rechten

Seite von (6.18) ist der Größte. Insbesondere gilt:

$$\min \left\{ \frac{\alpha l \varepsilon}{\lambda}, \alpha^2 l^2, \alpha^4 \lambda^4 l^2, \alpha^2 \lambda^2 l^2 \right\} \lesssim E_2.$$

Falls ε und α passend eingeschränkt wurden, dann ist

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ \frac{\alpha l \varepsilon}{\lambda}, \alpha^2 l^2, \alpha^4 \lambda^4 l^2, \alpha^2 \lambda^2 l^2 \right\} = \sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ \frac{\alpha l \varepsilon}{\lambda}, \alpha^4 \lambda^4 l^2 \right\}.$$

Das optimale λ wäre $\lambda \sim \varepsilon^{1/5} \alpha^{-3/5} l^{-1/5}$. Dieses optimierte λ liefert als untere Schranke für E_2 nun

$$\alpha^{8/5} \varepsilon^{4/5} l^{6/5} \lesssim E_2.$$

Fazit: Diese Rechnung hat gezeigt, dass es bei der unteren Schranke von E_2 eine $\varepsilon^{4/5}$ -Skalierung gibt. Jedoch hat diese Rechnung die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung nicht zeigen können. Dafür benötigen wir andere Techniken, siehe Lemma 6.12, das wir im nächsten Abschnitt vorstellen werden.

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

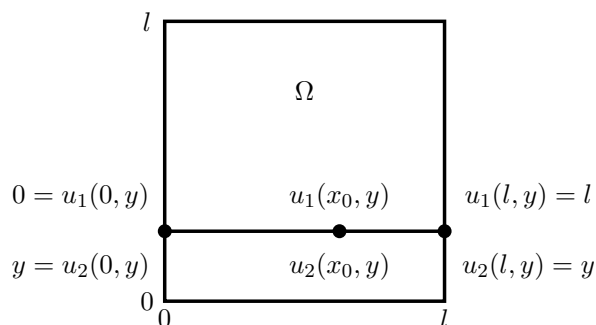


Abbildung 6.4: Die Daten auf dem linken und rechten Rand von Ω werden verwendet, um den Operator ∂_1 zu erzeugen.

6.1.5 Die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung

Die Hauptaussage in diesem Abschnitt ist Lemma 6.12.

Einige Hilfsabschätzungen

Lemma 6.5. Seien u , Ω , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (6.3). Dann gilt

$$\int_S |u_1(x, y) - x| \, dx dy \leq \sqrt{2} \lambda l^2 E_2^{1/2}.$$

Beweis. Zuerst wenden wir Lemma 6.4 an. Dann bilden wir das Integral über S . Danach folgt die Behauptung mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 6.3. \square

Lemma 6.6. Seien u , Ω , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (6.3). Dann gilt

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2^{3/2} \lambda l E_2^{1/2}.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis von Lemma 4.7. In dem Beweis von Lemma 4.7 haben wir

$$|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + \text{dist}(Du(x, y), K_1) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

verwendet. Diesmal wird

$$|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

angewandt.

Wir geben den Beweis hier an, weil wir in dem Beweis von Lemma 6.10 auf ihn verweisen werden. Wir betrachten zuerst die Zerlegung

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 = (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ - (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^-, \quad (6.19)$$

wobei

$$\begin{aligned} (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ &:= \max \{ \partial_1 u_1(x, y) - 1, 0 \}, \\ (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^- &:= \max \{ -(\partial_1 u_1(x, y) - 1), 0 \}. \end{aligned}$$

Wegen $u_1(0, y) = 0 \quad \forall y \in [0, l]$ und $u_1(l, y) = l \quad \forall y \in [0, l]$ ist

$$\int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ dx = \int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^- dx \quad \forall y \in [0, l]. \quad (6.20)$$

Aus (6.19) und (6.20) folgt

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx \leq 2 \int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ dx \quad \forall y \in [0, l]. \quad (6.21)$$

Da $|Fe_1| = 1$ für alle $F \in K_2$, gilt

$$|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Hieraus folgt

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 \leq |\partial_1 u_1(x, y)| - 1 \leq \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Dann gilt

$$(\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ = \max \{ \partial_1 u_1(x, y) - 1, 0 \} \leq \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Diese Abschätzung verbessert (6.21) zu

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx \leq 2 \int_0^l \text{dist}(Du(x, y), K_2) dx. \quad (6.22)$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Wegen der Hölderschen Ungleichung und (6.3) erhalten wir

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \leq 2\sqrt{2}\lambda^2 E_2^{1/2}.$$

□

Bei der Abschätzung von $\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy$ entscheiden wir uns für die folgende Version.

Lemma 6.7 (E_2 -affin lineare Abschätzung für $\partial_1 u_2$). *Seien u , Ω , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (6.1). Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq \sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2.$$

Beweis. Der Beweis geht genau so wie der Beweis von Lemma 4.12. □

Da wir auch auf Segmenten Abschätzungen durchführen werden, benötigen wir noch:

Lemma 6.8. *Seien u , Ω , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.3). Dann gibt es ein $x_0 \in (0, l)$, so dass*

$$\int_I |\partial_1 u_2(x_0, y)| dy \leq \sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}l} E_2.$$

Beweis. Das folgt aus Lemma 6.7. □

Gute Energieanteile

Lemma 6.9 (Abschätzung des guten Energieanteils - Version 1). *Seien u , Ω , l , α , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.3). Sei $f \in C^\infty(I)$. Dann gilt*

$$\int_S |(u_1(x, y) - x) f(y)| dx dy \leq l^{3/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{2}\sqrt{\lambda} E_2^{1/2}.$$

Beweis. Aus Lemma 6.4 erhalten wir zunächst

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_2) ds.$$

Insbesondere gilt auch für jedes $f \in C_C^\infty(I)$:

$$|u_1(x, y) - x||f(y)| \leq \int_0^l |f(y)| \operatorname{dist}(Du(s, y), K_2) ds.$$

Die Höldersche Ungleichung liefert dann

$$\int_S |u_1(x, y) - x||f(y)| dydx \leq l^{3/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\int_S \operatorname{dist}^2(Du(s, y), K_2) dsdy}.$$

Wegen (6.3) aus Lemma 6.1 folgt die Behauptung. \square

Lemma 6.10 (Abschätzung des guten Energieanteils - Version 2). *Seien u , Ω , l , α , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.3). Sei $f \in C_C^\infty(I)$. Dann gilt*

$$\int_S |(\partial_1 u_1(x, y) - 1) f(y)| dx dy \leq 2^{3/2} l^{1/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda E_2^{1/2}}.$$

Beweis. Wir gehen wie in Lemma 6.6 vor und steigen direkt bei (6.22) ein. Insbesondere gilt für $f \in C_C^\infty(I)$:

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1||f(y)| dx \leq 2 \int_0^l |f(y)| \operatorname{dist}(Du(x, y), K_2) dx.$$

Die Höldersche Ungleichung liefert dann

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1||f(y)| dx dy \leq 2l^{1/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\int_S \operatorname{dist}^2(Du(x, y), K_2) dx dy}.$$

Die Ungleichung (6.3) aus Lemma 6.1 liefert anschließend die Behauptung. \square

Schlechte Energieanteile

Lemma 6.11 (Abschätzung des schlechten Energieanteils). *Seien u , Ω , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ und c wie in der Energiepartitionierung*

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

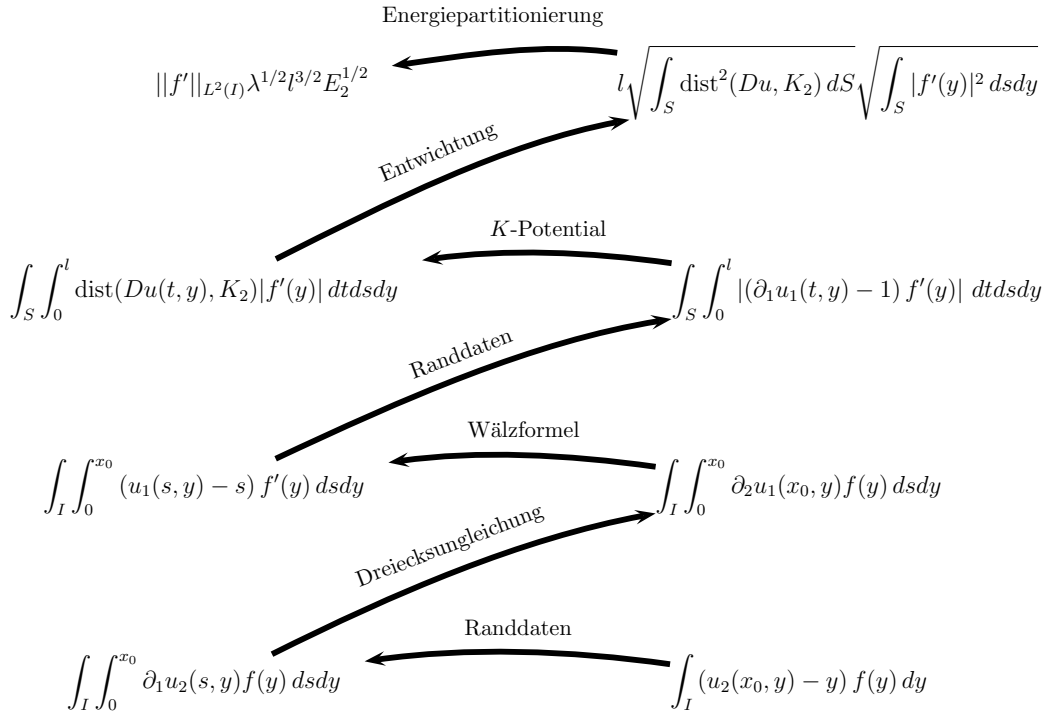


Abbildung 6.5: Beweisskizze vom Lemma 6.12.

(6.3). Sei $f \in C_c^\infty(I)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, l)$, so dass

$$\begin{aligned} \int_I |(\partial_1 u_2(x_0, y)) f(y)| dy &\leq \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2} l} E_2 \right) \|f\|_{L^\infty(I)} \\ &\quad + \left(3\sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{-1}} + \sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{1/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis. Das folgt aus dem Beweis des nächsten, wichtigen Lemmas. □

Das Hauptlemma für die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung

Lemma 6.12 (C_c^∞ -Energietransport). Seien u , Ω , l , α , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.3). Sei $f \in C_c^\infty(I)$.

Dann gibt es ein $x_0 \in (0, l)$, so dass

$$\begin{aligned} & \left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f(y) dy \right| \\ & \leq \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \|f\|_{L^\infty(I)} \\ & \quad + \left(3\sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l} + \sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis. Schritt 1: Umwandlung der Randdaten von u_2 in einen ∂_1 -Operator.

Da für jedes $y \in [0, l]$ die Gleichung $u_2(0, y) = y$ erfüllt ist, gilt zunächst

$$\left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f(y) dy \right| = \left| \int_I \int_0^{x_0} \partial_1 u_2(s, y) f(y) ds dy \right|. \quad (6.23)$$

Schritt 2: Interaktion zwischen u_2 und u_1 . Zu jedem $(s, y) \in S$ gibt es ein $F(s, y) \in K_2$, so dass $|Du(s, y) - F(s, y)| = \text{dist}(Du(s, y), K_2)$. Zu jedem solchen $F(s, y)$ gibt es eine Phasenfunktion $\sigma(s, y) \in \{-1, 1\}$, so dass $F(s, y) \in \text{SO}(2) \text{diag}(1, 1 + \sigma(s, y)\alpha)$. Wir beginnen mit

$$\begin{aligned} & (1 + \sigma(s, y)\alpha) \partial_1 u_2(s, y) \\ & = (1 + \sigma(s, y)\alpha) (\partial_1 u_2(s, y) - (F(s, y))_{21}) + (\partial_2 u_1(s, y) - (F(s, y))_{12}) \\ & \quad - \partial_2 u_1(s, y) + (F(s, y))_{12} + (1 + \sigma(s, y)\alpha) (F(s, y))_{21}. \end{aligned}$$

Wegen $F(s, y) \in \text{SO}(2) \text{diag}(1 + \sigma(s, y)\alpha)$ ist $(F(s, y))_{12} + (1 + \sigma(s, y)\alpha) (F(s, y))_{21} = 0$. Daher

$$\begin{aligned} (1 + \sigma(s, y)\alpha) \partial_1 u_2(s, y) & = (1 + \sigma(s, y)\alpha) (\partial_1 u_2(s, y) - (F(s, y))_{21}) \\ & \quad + (\partial_2 u_1(s, y) - (F(s, y))_{12}) - \partial_2 u_1(s, y). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Wegen $1 + \sigma(s, y)\alpha \neq 0 \forall \alpha \in (0, \alpha_0)$ und $\forall (s, y) \in \Omega$ wäre zwar

$$\begin{aligned} \int_I \partial_1 u_2(s, y) f(y) dy & = \int_I (\partial_1 u_2(s, y) - (F(s, y))_{21}) f(y) dy \\ & \quad + \int_I \frac{\partial_2 u_1(s, y) - (F(s, y))_{12}}{1 + \sigma(s, y)\alpha} f(y) dy - \int_I \frac{\partial_2 u_1(s, y)}{1 + \sigma(s, y)\alpha} f(y) dy, \end{aligned}$$

jedoch würde auf diesem Weg die Möglichkeit verloren gehen, den letzten Term direkt partiell zu integrieren. Um (6.24) auf der rechten Seite von (6.23) anwenden zu können,

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

beginnen wir mit der Aufspaltung

$$\left| \int_I \int_0^{x_0} \partial_1 u_2(s, y) f(y) ds dy \right| \leq T_1 + T_2, \quad (6.25)$$

wobei

$$T_1 := \left| \int_I \int_0^{x_0} (1 + \sigma(s, y)\alpha) \partial_1 u_2(s, y) f(y) ds dy \right|,$$

$$T_2 := \left| \int_I \int_0^{x_0} \sigma(s, y)\alpha \partial_1 u_2(s, y) f(y) ds dy \right|.$$

Schritt 3: Umwandlung der Randdaten von u_1 in einen ∂_1 -Operator. Wir schätzen zuerst T_1 ab. Es ist

$$T_1 \leq (2 + \alpha) \sqrt{\int_I \int_0^{x_0} |f(y)|^2 dy dx} \sqrt{\int_I \int_0^{x_0} \text{dist}^2(Du(s, y), K_2) ds dy} + \left| \int_I \int_0^{x_0} \partial_2 u_1(s, y) f(y) ds dy \right|. \quad (6.26)$$

Bei dem ersten Summanden in (6.26) vergrößern wir das Integrationsgebiet zu S . Bei dem zweiten Summanden in (6.26) wenden wir die Wälzformel an. Daher ist

$$T_1 \leq (2 + \alpha) \sqrt{l} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\int_S \text{dist}^2(Du(s, y), K_2) ds dy} + \left| \int_I \int_0^{x_0} (u_1(s, y) - s) f'(y) ds dy \right|. \quad (6.27)$$

Der erste Summand in (6.27) wird mit (6.3) abgeschätzt. Der zweite Summand in (6.27) wurde schon in Lemma 6.9 behandelt. Daher erhalten wir

$$T_1 \leq (2 + \alpha) \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda l} E_2^{1/2} + \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda l^{3/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.28)$$

Schritt 4: Nun schätzen wir T_2 ab. Wegen Lemma 6.7 gilt

$$T_2 \leq \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \|f\|_{L^\infty(I)}.$$

Eine Zusammenfassung der Summanden in $T_1 + T_2$ ergibt zuerst

$$\begin{aligned} & \left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f(y) dy \right| \\ & \leq \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \|f\|_{L^\infty(I)} \\ & \quad + \left((2 + \alpha) \sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l} + \sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Wegen $\alpha \in (0, 1)$ schätzen wir auf der rechten Seite der letzten Ungleichung bei $2 + \alpha$ das α durch 1 ab. Hieraus folgt die Behauptung. \square

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

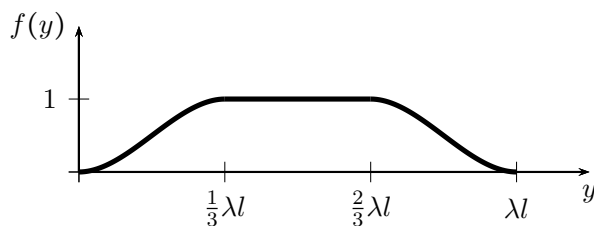


Abbildung 6.6: Ein Beispiel für die Hilfsfunktion f in Schritt 2, falls $I = (0, \lambda)$ ist.

6.1.6 Die untere Schranke von Theorem 2

Wir zeigen in diesem Abschnitt die folgende Teilaussage aus Theorem 2:

Theorem (Die untere Schranke in Theorem 2 auf einem Quadrat). *Seien $\Omega := (0, l)^2$ und E_2 wie in Theorem 2. Dann gibt es drei Konstanten $c > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ und $\alpha_0 \in (0, 1)$, die alle nicht von ε , α und l abhängen, so dass gilt:*

$$c\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}l^{6/5} \leq E_2 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha).$$

Beweis. Wir werden zeigen, dass $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/5}$ die richtige Wahl ist, wobei $\Lambda > 0$ eine von α , ε und l unabhängige Konstante ist.

Schritt 1: Energiepartitionierung. Wir wenden zunächst Lemma 6.1 an, um ε aus \mathcal{E}_2 heraus zu filtern.

Schritt 2: Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie. Dann wenden wir Lemma 6.2 an, um das ε wieder ins Spiel zu bringen. Seien $Q = (q, q + \lambda) \times (y_0, y_0 + \lambda)$ und $F = F(Q)$ wie in Lemma 6.2. Je nachdem, ob $F = R(\phi)A$ oder $F = R(\phi)B$ ist, wobei $R(\phi) \in \text{SO}(2)$ ist, können wir schreiben:

$$|F_{22} - 1| = |\cos(\phi) - 1 \pm \alpha \cos(\phi)|.$$

Entweder ist $|F_{22} - 1| \geq \frac{\alpha}{2}$ oder $|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2}$. Wir spalten den Beweis nun in zwei Teile auf.

Fall 1: $|F_{22} - 1| \geq \frac{\alpha}{2}$.

Schritt 1: Auswahl eines speziellen Segments. Sei $I := (y_0, y_0 + \lambda)$. Ausgehend

von Lemma 6.2 wählen wir ein $x_0 \in [0, l]$ so aus, dass $(x_0, y) \in Q \forall y \in I$ und

$$\int_I |Du(x_0, y) - F| dy \leq 8c_P \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + 2\lambda E_2^{1/2}. \quad (6.29)$$

An dieser Stelle muss die weitere Strategie anders aussehen als im Fall K_1 . Der folgende Weg führt zum Erfolg.

Schritt 2: Auswahl einer guten Störung. Sei $f \in C_C^\infty(I, [0, 1])$, so dass $f(y) = f'(y) = 0$ für $y \in \partial I$, siehe Abbildung 6.6. Dann gilt einerseits nach Schritt 1 und Lemma 6.1

$$\int_I |(Du(x_0, y) - F)f(y)| dy \leq 8c_P \|f\|_{L^\infty(I)} \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + 2 \|f\|_{L^\infty(I)} \lambda E_2^{1/2} \quad (6.30)$$

und andererseits

$$\frac{1}{2} \alpha \|f\|_{L^1(I)} \leq \left| \int_I (F_{22} - 1) f(y) dy \right|. \quad (6.31)$$

Schritt 3: Energietransport. Um (6.30) und (6.31) zu kombinieren, gehen wir so vor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \alpha \|f\|_{L^1(I)} &\leq \left| \int_I (\partial_2 u_2(x_0, y) - F_{22}) f(y) dy \right| + \left| \int_I (\partial_2 u_2(x_0, y) - 1) f(y) dy \right| \\ &\leq \int_I |(Du(x_0, y) - F)f(y)| dy + \left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f'(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 6.12 und (6.30) gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \alpha \|f\|_{L^1(I)} \\ &\leq 8c_P \|f\|_{L^\infty(I)} \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + 2 \|f\|_{L^\infty(I)} \lambda E_2^{1/2} \\ &\quad + \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \|f'\|_{L^\infty(I)} \\ &\quad + \left(3\sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l} + \sqrt{2} \|f''\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Schritt 4: Überprüfung der Skalierungen. Wir betrachten zunächst nur $\|f\|_{L^1(I)} \approx \lambda l$, $\|f\|_{L^\infty(I)} \approx 1$, $\|f'\|_{L^\infty(I)} \approx (\lambda l)^{-1}$, $\|f'\|_{L^2(I)} \approx (\lambda l)^{-1/2}$ und $\|f''\|_{L^2(I)} \approx (\lambda l)^{-3/2}$. Wir wählen bei $\tau = \tau_0 \left(\frac{\varepsilon}{\alpha \lambda^2}\right)^{2/3}$ das τ_0 so, dass

$$\frac{1}{2} \alpha \|f\|_{L^1(I)} - \alpha \sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda l^2 \|f'\|_{L^\infty(I)} > 0$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

ist, wobei τ_0 eine Konstante ist, die unabhängig von α , ε und l sein soll. Wir ignorieren zunächst die vielen Konstanten in (6.32) und betrachten in diesem Schritt nur

$$\alpha\lambda l \lesssim \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + \lambda E_2^{1/2} + \frac{\alpha\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + \frac{1}{\lambda} E_2^{1/2}. \quad (6.33)$$

Wegen $\lambda \in (0, 1)$ und $\alpha \in (0, 1)$ können wir (6.33) noch vereinfachen zu

$$\alpha\lambda l \lesssim \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + \frac{1}{\lambda} E_2^{1/2}. \quad (6.34)$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Insbesondere gilt

$$\min \left\{ \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\} \lesssim E_2.$$

Das Supremum von

$$\min \left\{ \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\}$$

wird bei $\lambda \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/5}$ angenommen. Das bedeutet, dass die Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/5}$ zum Erfolg führt. Damit hätten wir tatsächlich $\alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} l^{6/5} \lesssim E_2$.

Schritt 5: Bestimmung von α_0 und ε_0 . Jetzt geht es nur noch darum, wie die vielen Konstanten gehandhabt werden. Wir gehen zurück nach (6.32). Seien

$$\begin{aligned} c_0(f) &:= \|f\|_{L^1(I)} / (\lambda l), \\ c_1(f) &:= \|f\|_{L^\infty(I)}, \\ c_2(f') &:= \|f'\|_{L^\infty(I)} (\lambda l), \\ c_3(f') &:= \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l}, \\ c_4(f'') &:= \|f''\|_{L^2(I)} (\lambda l)^{3/2}. \end{aligned}$$

Wegen $\lambda \in (0, 1)$ und $\max\{\lambda, 1, \lambda^{-1}\} = \lambda^{-1}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \alpha \lambda l c_0(f) \left(1 - \tau_0^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/3} \frac{1}{\lambda^{5/3}} \frac{2c_2(f')}{c_1(f)} \right) \\ & \leq \left(8c_P c_1(f) + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha\varepsilon}{\tau^{3/2} l \lambda^2} c_2(f') \right) \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + \left(3\sqrt{2}c_3(f') + \sqrt{2}c_4(f'') + 2c_1(f) \right) \frac{1}{\lambda} E_2^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

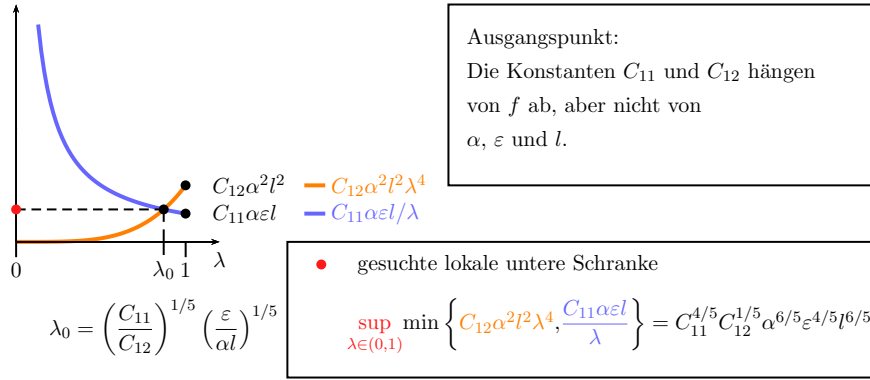


Abbildung 6.7: Situation in Schritt 5.

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Insbesondere gilt

$$\min \left\{ C_{11}(f) \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, C_{12}(f) \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\} \leq E_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{11}(f) &\leq \frac{\frac{1}{2}c_0(f) \left(1 - \tau_0^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3} \frac{1}{\lambda^{5/3}} \frac{2c_2(f')}{c_1(f)} \right)}{2 \left(8c_P c_1(f) + \frac{8\tau+6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha\varepsilon}{\tau^{3/2} l \lambda^2} c_2(f') \right)}, \\ C_{12}(f) &\leq \frac{\left(\frac{1}{2}c_0(f) \left(1 - \tau_0^{1/2} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/3} \frac{1}{\lambda^{5/3}} \frac{2c_2(f')}{c_1(f)} \right) \right)^2}{4 \left(3\sqrt{2}c_3(f') + \sqrt{2}c_4(f'') + 2c_1(f) \right)^2}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Für $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/5}$ kann die rechte Seite von (6.36) so abgeschätzt werden, dass C_{11} und C_{12} nicht mehr von α , ε und l abhängen. Sei

$$\varepsilon_0 := \frac{C_{12}(f)}{C_{11}(f)}. \quad (6.37)$$

Mit dieser Wahl von ε_0 gilt dann für alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$ und alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$:

$$C_{11}(f) \alpha \varepsilon l \leq C_{12}(f) \alpha^2 l^2.$$

Wir wollen nun

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ C_1(f) \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, C_2(f) \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\}$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

bestimmen, siehe Abbildung 6.7. Das Supremum wird für

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ 1, \frac{C_{12}(f)}{C_{11}(f)} \right\}$$

bei

$$\lambda = \left(\frac{C_{11}(f)}{C_{12}(f)} \right)^{1/5} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/5} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad (6.38)$$

angenommen und wir erhalten die untere Schranke

$$C_{11}(f)^{4/5} C_{12}(f)^{1/5} \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} l^{6/5} \leq E_2 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (6.39)$$

Fall 2: $|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2}$. Auch hier müssen wir zeigen, dass die Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/5}$ zum Erfolg führt. Im Prinzip führen wir Fall 2 auf Fall 1 zurück, jedoch benötigt man hier einen Trick und die Rechnungen sind hier länger.

Es gibt dann ein $\phi \in \mathbb{R}$, so dass

$$F_{22} \in \{(1 - \alpha) \cos(\phi), (1 + \alpha) \cos(\phi)\}.$$

Wenn $F_{22} = (1 - \alpha) \cos(\phi)$ wäre, dann wäre

$$|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2} \quad \iff \quad \frac{2 - \alpha}{2(1 - \alpha)} < \cos(\phi) \quad \text{und} \quad \cos(\phi) < \frac{\alpha + 2}{2(1 - \alpha)}$$

ein Widerspruch zu $-1 \leq \cos(\phi) \leq 1$. Daher gilt

$$|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2} \quad \implies \quad F_{22} = (1 + \alpha) \cos(\phi).$$

Die Lösungsmenge $\Phi = \{\phi \in \mathbb{R} : |F_{22}(\phi) - 1| < \frac{\alpha}{2}\}$ von $|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2}$ lässt sich für $\alpha \in (0, 1)$ schreiben als

$$\Phi := 2\pi\mathbb{Z} + \left\{ \phi \in \mathbb{R} : \arccos\left(\frac{2 - \alpha}{2(1 + \alpha)}\right) < |\phi| < \arccos\left(\frac{\alpha + 2}{2(1 + \alpha)}\right) \right\}.$$

Wegen $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$\Phi \subset 2\pi\mathbb{Z} + \left\{ t \in \mathbb{R} : 0 < t < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Daher ist $\sin(\phi) \in [0, 1]$ für alle $\phi \in \Phi$.

$$|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2} \quad \iff \quad \frac{2 - \alpha}{2(1 + \alpha)} < \cos(\phi) < \frac{\alpha + 2}{2(1 + \alpha)}$$

Deshalb gibt es zwei Konstanten $0 < b_0 < b_1$, so dass

$$\Phi \subset 2\pi\mathbb{Z} + \{\phi \in \mathbb{R} : b_0\sqrt{\alpha} < |\phi| < b_1\sqrt{\alpha}\}.$$

Betrachte nun $\phi \in \Phi$, dann gilt

$$\frac{\alpha}{2} < |(1 + \alpha) \cos(\phi) - 1 + \operatorname{sgn}(\phi) \sin(\phi)| \quad \forall \phi \in \Phi.$$

Daher ist $\frac{\alpha}{2} < |F_{22} - 1 + \operatorname{sgn}(F_{21})F_{21}|$.

Daraus folgt für $f \in C^\infty(I, [0, \infty))$ mit $f(y) = f'(y) = 0$ für $y \in \partial I$

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda c_0(f) < \left| \int_I (F_{22} - 1 + \operatorname{sgn}(F_{12})F_{12}) f(y) dy \right|, \quad (6.40)$$

wobei $c_0(f) := \|f\|_{L^1(I)}/(\lambda)$. Sei $x_0 \in [0, l]$, so dass

$$\int_I |(Du(x_0, y) - F(Q))f(y)| dy \leq 8c_P \|f\|_{L^\infty(I)} \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + 2 \|f\|_{L^\infty(I)} \lambda E_2^{1/2}. \quad (6.41)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir aus (6.40)

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda c_0(f) < T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (6.42)$$

wobei

$$\begin{aligned} T_1 &:= \left| \int_I (F_{22} - \partial_2 u_2(x_0, y)) dy \right| \|f\|_{L^\infty(I)}, \\ T_2 &:= \left| \int_I (\partial_2 u_2(x_0, y) - 1) f(y) dy \right| = \left| \int_I (u_2(s, y) - y) f'(y) dy \right|, \\ T_3 &:= \left| \int_I (F_{12} - \partial_1 u_2(x_0, y)) dy \right| \|f\|_{L^\infty(I)}, \\ T_4 &:= \left| \int_I \partial_1 u_2(x_0, y) f(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Wir sind jetzt wieder in Fall 1 angekommen. Die Terme T_1 und T_3 werden einfach durch (6.41) abgeschätzt. T_2 wurde schon in Lemma 6.12 und T_4 in Lemma 6.11 untersucht. Wir

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

erhalten

$$\begin{aligned}
T_1 + T_3 &\leq 2 \|f\|_{L^\infty(I)} \left(8c_P \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 + 2\lambda E_2^{1/2} \right), \\
T_2 &\leq \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau_1} \lambda l^2 + \frac{8\tau_1 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau_1^{3/2}} E_2 \right) \alpha \|f'\|_{L^\infty(I)} \\
&\quad + \left(3\sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l} + \sqrt{2} \|f''\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}, \\
T_4 &\leq \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau_2} \lambda l + \frac{8\tau_2 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau_2^{3/2} l} E_2 \right) \alpha \|f\|_{L^\infty(I)} \\
&\quad + \left(3\sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{-1}} + \sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{1/2}} \right) E_2^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wir gehen zurück zu (6.42). Seien

$$\begin{aligned}
c_1(f) &:= \|f\|_{L^\infty(I)}, \\
c_2(f) &:= \|f\|_{L^2(I)} / \sqrt{\lambda l}, \\
c_3(f') &:= \|f'\|_{L^\infty(I)} (\lambda l), \\
c_4(f') &:= \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l}, \\
c_5(f'') &:= \|f''\|_{L^2(I)} (\lambda l)^{3/2}.
\end{aligned}$$

Wir wählen bei $\tau_1 = \tau_{1,0} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l \lambda^2} \right)^{2/3}$ und $\tau_2 = \tau_{2,0} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l \lambda} \right)^{2/3}$ die Konstanten $\tau_{1,0} > 0$ und $\tau_{2,0}$ so, dass sie nicht von α , ε und l abhängen und

$$\frac{1}{2} c_0(f) - c_3(f') \sqrt{6} \frac{\tau_1^{1/2}}{\lambda} - c_1(f) \sqrt{6} \tau_2^{1/2} > 0$$

erfüllen. Wegen $\lambda = \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/5}$ und den speziellen Wahlen von τ_1 und τ_2 gelten zunächst einmal

$$\tau_1 \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{6/15} \sim 1, \quad \tau_2 \sim 1.$$

Daher ist

$$\frac{1}{2} c_0(f) - c_3(f') \sqrt{6} \frac{\tau_1^{1/2}}{\lambda} - c_1(f) \sqrt{6} \tau_2^{1/2} \sim \frac{1}{2} c_0(f).$$

Wegen $\lambda \in (0, 1)$ ist $\max\{\lambda, 1, \lambda^{-1}\} = \lambda^{-1}$ und

$$\begin{aligned} & \alpha\lambda \left(\frac{1}{2}c_0(f) - c_3(f')\sqrt{6}\frac{\tau_1^{1/2}}{\lambda} - c_1(f)\sqrt{6}\tau_2^{1/2} \right) \\ & \leq \left(16c_1(f) + \frac{8\tau_1 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha\varepsilon}{\tau_1^{3/2}\lambda^2 l} c_3(f') + \frac{8\tau_2 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha\varepsilon}{\tau_2^{3/2}\lambda l} c_1(f) \right) \frac{\lambda^2}{\varepsilon} E_2 \\ & \quad + \left(4c_1(f) + 3\sqrt{2}c_4(f') + \sqrt{2}c_5(f'') + 3\sqrt{2}c_2(f) + \sqrt{2}c_4(f') \right) \frac{1}{\lambda} E_2^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite in (6.43) ist der Größte. Insbesondere erhalten wir

$$\min \left\{ C_{21}(f) \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, C_{22}(f) \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\} \leq E_2,$$

wobei

$$\begin{aligned} C_{21}(f) & \leq \frac{\frac{1}{2}c_0(f) - c_3(f')\sqrt{6}\frac{\tau_1^{1/2}}{\lambda} - c_1(f)\sqrt{6}\tau_2^{1/2}}{2 \left(16c_1(f) + \frac{8\tau_1 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha\varepsilon}{\tau_1^{3/2}\lambda^2 l} c_3(f') + \frac{8\tau_2 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha\varepsilon}{\tau_2^{3/2}\lambda l} c_1(f) \right)}, \\ C_{22}(f) & \leq \frac{\left(\frac{1}{2}c_0(f) - c_3(f')\sqrt{6}\frac{\tau_1^{1/2}}{\lambda} - c_1(f)\sqrt{6}\tau_2^{1/2} \right)^2}{4 \left(4c_1(f) + 3\sqrt{2}c_4(f') + \sqrt{2}c_5(f'') + 3\sqrt{2}c_2(f) + \sqrt{2}c_4(f') \right)^2}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

Die rechte Seite kann so abgeschätzt werden, dass dort keine Abhängigkeiten in α , ε und l mehr sind. Sei

$$\varepsilon_0 := \frac{C_{22}(f)}{C_{21}(f)}. \quad (6.45)$$

Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l)$ und alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$:

$$C_{21}(f) \alpha \varepsilon l \leq C_{22}(f) \alpha^2 l^2.$$

Das Supremum von

$$\min \left\{ C_{21}(f) \frac{\alpha\varepsilon l}{\lambda}, C_{22}(f) \alpha^2 \lambda^4 l^2 \right\}$$

wird für

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ 1, \frac{C_{21}(f)}{C_{22}(f)} \right\}$$

bei

$$\lambda = \left(\frac{C_{21}(f)}{C_{22}(f)} \right)^{1/5} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha l} \right)^{1/5} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad (6.46)$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

angenommen und wir erhalten die untere Schranke

$$C_{21}(f)^{4/5}C_{22}(f)^{1/5}\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}l^{6/5} \leq E_2 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (6.47)$$

Fazit: Beide Fälle konnten mit der Wahl $\lambda = \Lambda\left(\frac{\varepsilon}{\alpha l}\right)^{1/5}$ abgearbeitet werden. Bis auf Konstanten haben wir die untere Schranke $\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}l^{6/5} \lesssim E_2$ zeigen können. Was die Konstanten angeht, so muss man nun in beiden Fällen die Konstanten über die Wahl von f optimieren, anschließend nehmen wir die kleinste aus beiden Fällen. Das beendet den Beweis. \square

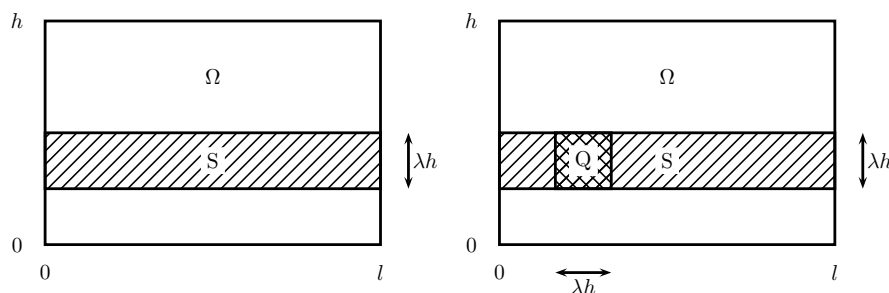


Abbildung 6.8: Energiepartitionierung: Es werden solche Streifen und Quadrate lokalisiert, wo die elastische Energie und die Oberflächenenergie durch denselben Energieanteil abgeschätzt werden können. Tatsächlich wird mit der Energiepartitionierung der Parameter ε aus \mathcal{E} herausgefiltert.

6.2 Der Fall $h < l$

Wir gehen hier genau so vor wie im Fall $h = l$. Viele der hier aufgeführten Aussagen können analog wie im Fall $h = l$ bewiesen werden. Die Kernstruktur des Beweises der unteren Schranke ist in Abbildung 6.10 zu sehen.

6.2.1 Energiepartitionierung

Lemma 6.13 (Energiepartitionierung). *Seien u , Ω , l , α , ε , K_2 und E_2 wie in Theorem 2. Zu jedem $\lambda \in (0, 1)$ gibt es einen Streifen $S := (0, l) \times I \subset \Omega$, wobei $I \subset (0, h)$ ein offenes Intervall mit $\mathcal{H}^1(I) = \lambda h$ ist, ein offenes Quadrat $Q \subset S$, wobei $\mathcal{L}^2(Q) = \lambda^2 h^2$, so dass*

$$\int_S \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) \, dx dy + \varepsilon \int_S |D^2 u| \leq 2\lambda E_2, \quad (6.48)$$

und

$$\int_Q \text{dist}^2(Du(x, y), K_2) \, dx dy + \varepsilon \int_Q |D^2 u| \leq 4 \frac{h}{l} \lambda^2 E_2. \quad (6.49)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 6.1. Wir müssen nur berücksichtigen, dass es in S diesmal $\lfloor (l/h\lambda) \rfloor$ Quadrate gibt. \square

6.2.2 Energetische Interaktion

Lemma 6.14 (BV-Poincarésche Lokalisierung einer festen K -Matrix). *Seien $u, \Omega, h, l, \varepsilon$ und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und Q wie in der Energiepartitionierung (6.49). Dann gibt es ein $F \in K_2$ und eine Konstante $c_P > 0$, so dass*

$$\int_Q |Du(x, y) - F| dx dy \leq 8c_P \frac{\lambda^3 h^2}{\varepsilon l} E_2 + 2\lambda^2 \frac{h^{3/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.50)$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 6.2. □

Lemma 6.15 ($W^{1,1}$ -Poincarésche Lokalisierung). *Seien $u, \Omega, l, \varepsilon$ und E_2 , wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und Q wie in der Energiepartitionierung (6.49). Seien F und c_P wie in Lemma 6.14. Dann gibt es eine Konstante $c'_P > 0$ und ein Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so dass*

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| dx dy \leq 16c'_P c_P \frac{\lambda^4 h^3}{\varepsilon l} E_2 + 4c'_P \lambda^3 \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.51)$$

Beweis. Sei Q wie in der Energiepartitionierung und F wie in Lemma 6.14. Wegen der Poincaréschen Ungleichung gibt es eine Konstante $c'_P > 0$ und einen Vektor $a \in \mathbb{R}^2$, so dass

$$\int_Q \left| u(x, y) - F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - a \right| dx dy \leq c'_P \lambda l \int_Q \left| \begin{pmatrix} \partial_1 u_2(x, y) \\ \partial_2 u_2(x, y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_{21} \\ F_{22} \end{pmatrix} \right| dx dy. \quad (6.52)$$

Auf der rechten Seite von (6.52) wenden wir Lemma 6.14 an. □

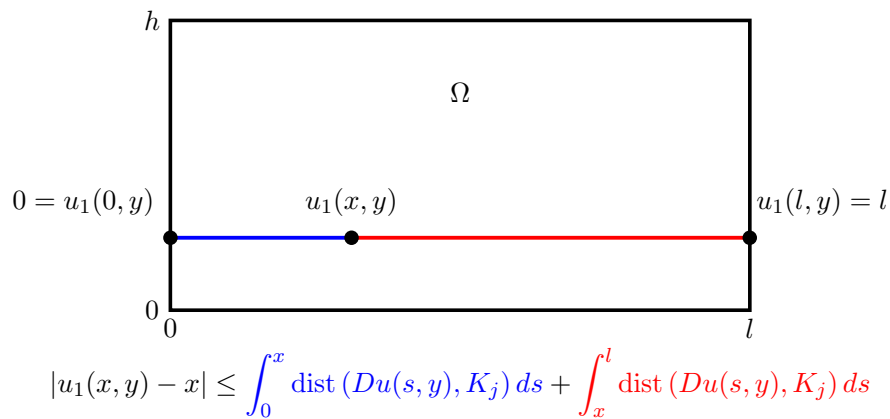


Abbildung 6.9: Aussage von Lemma 6.16.

6.2.3 Rigidität der ersten Komponente des Vektors u

Das nächste Lemma haben wir schon mehrmals gesehen.

Lemma 6.16 (Punktweise Rigidität). *Seien u , Ω und K_2 wie in Theorem 2. Dann gilt*

$$|u_1(x, y) - x| \leq \int_0^l \text{dist}(Du(s, y), K_2) ds \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 4.5. In der Bemerkung nach Lemma 4.5 sind wir schon auf den Beweis von Lemma 6.16 eingegangen. \square

6.2.4 Die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung

Einige Hilfsabschätzungen

Lemma 6.17. *Seien u , Ω , h , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (6.48). Dann gilt*

$$\int_S |u_1(x, y) - x| \, dx dy \leq 2^{3/2} \lambda^{3/2} h^{1/2} E_2^{1/2}.$$

Beweis. Das folgt mit der Hölderschen Ungleichung und Lemma 6.13 aus Lemma 6.16. \square

Lemma 6.18. *Seien u , Ω , h , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (6.48). Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx dy \leq 2^{3/2} \lambda^{1/2} h^{1/2} E_2^{1/2}.$$

Beweis. Wir betrachten die Zerlegung

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 = (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ - (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^-,$$

wobei

$$\begin{aligned} (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ &:= \max \{ \partial_1 u_1(x, y) - 1, 0 \}, \\ (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^- &:= \max \{ -(\partial_1 u_1(x, y) - 1), 0 \}. \end{aligned}$$

Wegen $u_1(0, y) = 0 \, \forall y \in [0, h]$ und $u_1(l, y) = l \, \forall y \in [0, h]$ ist

$$\int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ \, dx = \int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^- \, dx \quad \forall y \in [0, h].$$

Damit erhalten wir zunächst

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1| \, dx \leq 2 \int_0^l (\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ \, dx \quad \forall y \in [0, h]. \quad (6.53)$$

Da $|Fe_1| = 1$ für alle $F \in K_2$, gilt

$$|\partial_1 u(x, y)| \leq 1 + \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

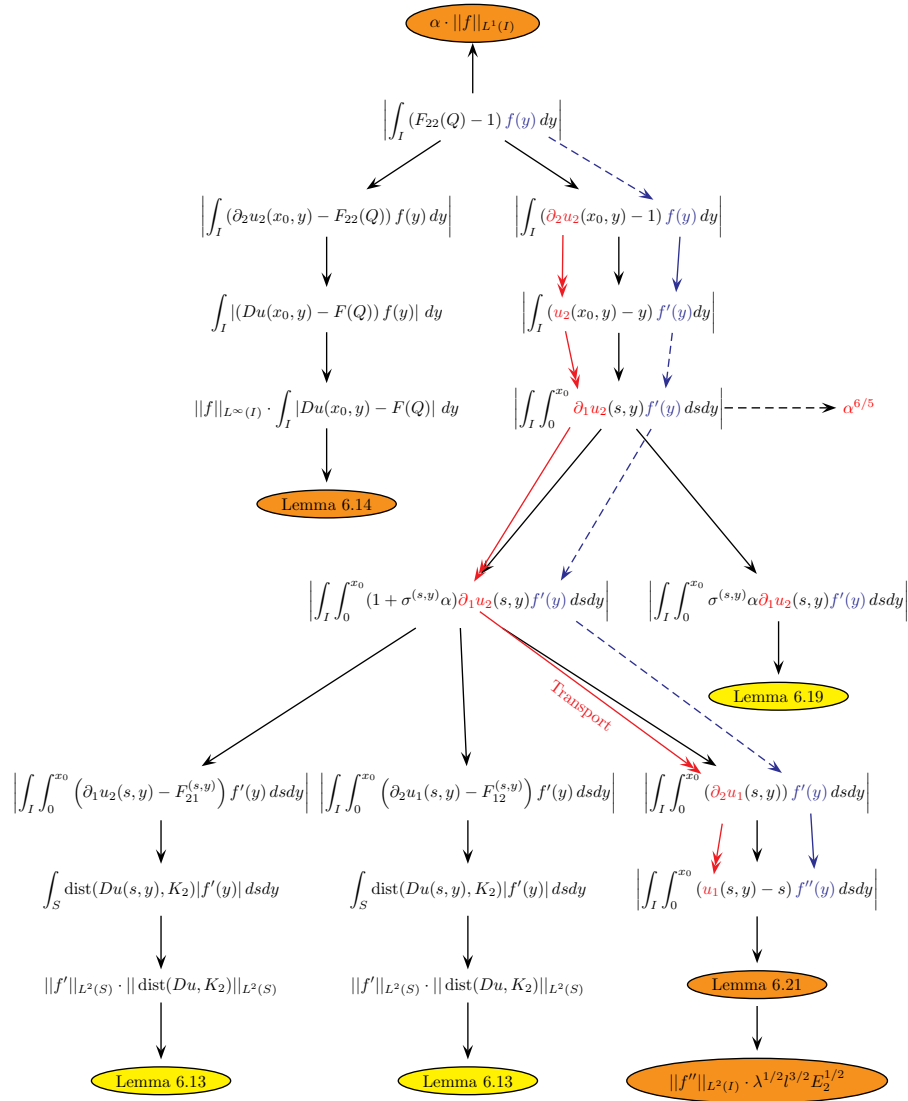


Abbildung 6.10: Die Kernstruktur des Beweises der unteren Schranke. Die orangen Bausteine liefern die gewünschte untere Schranke $c\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}hl^{1/5}$. Die gelben Bausteine erhalten das gesuchte $\lambda = \Lambda\left(\frac{\varepsilon l^4}{\alpha h^5}\right)^{1/5}$. Den roten Weg kennen wir schon aus der oberen Schranke. Auch diesmal werden wir die richtigen Skalierungen nur dadurch erhalten, dass wir erneut von $\partial_2 u_2$ über $\partial_1 u_2$ und $\partial_2 u_1$ nach $\partial_1 u_1$ gehen. Über den blauen Weg werden am Ende die richtigen Skalierungen von λ erzeugt. Die Hauptschwierigkeit im Beweis liegt in der Abschätzung von $\int_I \int_0^{x_0} \partial_1 u_2(s, y) ds dy$. Die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung der unteren Schranke wird auf diesem Weg erzeugt.

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Hieraus folgt

$$\partial_1 u_1(x, y) - 1 \leq |\partial_1 u_1(x, y)| - 1 \leq \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Dann gilt

$$(\partial_1 u_1(x, y) - 1)^+ = \max\{\partial_1 u_1(x, y) - 1, 0\} \leq \text{dist}(Du(x, y), K_2) \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Diese Abschätzung verbessert (6.53) zu

$$\int_0^l |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx \leq 2 \int_0^l \text{dist}(Du(x, y), K_2) dx.$$

Wegen (6.48) aus Lemma 6.13 erhalten wir

$$\int_S |\partial_1 u_1(x, y) - 1| dx dy \leq 2\sqrt{c}\lambda^{1/2}h^{1/2}E_2^{1/2}.$$

□

Lemma 6.19. *Seien u , Ω , h , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und S wie in der Energiepartitionierung (6.48). Sei $\tau \in (0, \infty)$. Dann gilt*

$$\int_S |\partial_1 u_2(x, y)| dx dy \leq \sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda h l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2.$$

Beweis. Da wir nur die Randdaten von u_1 bei

$$0 = \int_S (\partial_1 u_1(x, y) - 1) dx dy$$

verwenden, ist der Beweis analog zu dem Beweis von Lemma 4.11 aus Kapitel 4. □

Lemma 6.20. *Seien u , Ω , h , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.48). Dann gibt es ein $x_0 \in (0, l)$, so dass*

$$\int_I |\partial_1 u_2(x_0, y)| dy \leq \sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda h + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}l} E_2.$$

Beweis. Das folgt mit Fubini aus Lemma 6.19. □

Gute Energieanteile

Lemma 6.21 (Abschätzung des guten Energieanteils - Version 1). *Seien u , Ω , h , l , α , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.48). Sei $f \in C_C^\infty(I)$. Dann gilt*

$$\int_S |(u_1(x, y) - x) f(y)| \, dx dy \leq l^{3/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda} E_2^{1/2}.$$

Beweis. Das folgt aus dem Beweis von Lemma 6.16, denn dort steht diesmal

$$|(u_1(x, y) - x) f(y)| \leq \int_0^l |f(y)| \operatorname{dist}(Du(s, y), K_2) \, ds.$$

Daher

$$\int_S |(u_1(x, y) - x) f(y)| \, dy dx \leq l^{3/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\int_S \operatorname{dist}^2(Du(s, y), K_2) \, ds dy}.$$

Wegen (6.48) folgt die Behauptung. \square

Lemma 6.22 (Abschätzung des guten Energieanteils - Version 2). *Seien u , Ω , h , l , α , ε und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.48). Sei $f \in C_C^\infty(I)$. Dann gilt*

$$\int_S |(\partial_1 u_1(x, y) - 1) f(y)| \, dx dy \leq 2l^{1/2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda} E_2^{1/2}.$$

Beweis. Das ist analog zu Lemma 6.18. \square

Schlechte Energieanteile

Lemma 6.23 (Abschätzung des schlechten Energieanteils). *Seien u , Ω , h , l und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.48). Sei $f \in C_C^\infty(I)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, l)$, so dass*

$$\begin{aligned} \int_I |(\partial_1 u_2(x_0, y)) f(y)| \, dy &\leq \alpha \|f\|_{L^\infty(I)} \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda h + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2} l} E_2 \right) \\ &\quad + \left(3\sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{-1}} + \sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda} l^{1/2} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Beweis. Das folgt aus dem Beweis des nächsten, wichtigen Lemmas. \square

Das Hauptlemma für die $\alpha^{6/5}$ -Skalierung

Lemma 6.24 (C^∞ -Energietransport). *Seien $u, \Omega, h, l, \alpha, \varepsilon$ und E_2 wie in Theorem 2. Seien $\lambda \in (0, 1)$ und $S := (0, l) \times I \subset \Omega$ wie in der Energiepartitionierung (6.48). Sei $f \in C^\infty(I)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, l)$, so dass*

$$\begin{aligned} & \left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f(y) dy \right| \\ & \leq \alpha \|f\|_{L^\infty(I)} \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda h l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \\ & \quad + \left(3\sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l} + 2\sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis ist analog zu dem Beweis von Lemma 6.12. Wir schätzen diesmal T_1 mit Hilfe von Lemma 6.21 wie folgt ab:

$$T_1 \leq (2 + \alpha) \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda l} E_2^{1/2} + \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{2} \sqrt{\lambda l^{3/2}} E_2^{1/2}.$$

Der Ausdruck T_2 wird mit Hilfe von Lemma 6.23 wie folgt abgeschätzt:

$$T_2 \leq \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda h l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \|f\|_{L^\infty(I)}.$$

Eine Zusammenfassung der Summanden in $T_1 + T_2$ ergibt zunächst

$$\begin{aligned} & \left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f(y) dy \right| \\ & \leq \alpha \left(\sqrt{6} \sqrt{\tau} \lambda h l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \|f\|_{L^\infty(I)} \\ & \quad + \left((2 + \alpha) \sqrt{2} \|f\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l} + \sqrt{2} \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Wegen $\alpha \in (0, 1)$ schätzen wir $2 + \alpha$ durch 3 ab. Hieraus folgt die Behauptung. \square

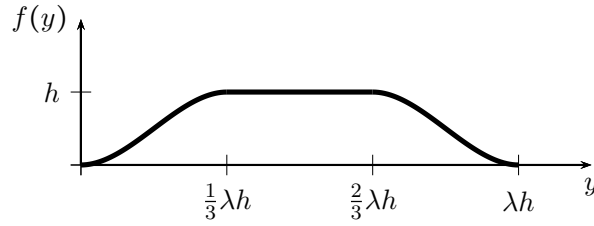


Abbildung 6.11: Ein Beispiel für die Hilfsfunktion f in Schritt 2, falls $I = (0, \lambda h)$ ist.

6.2.5 Die untere Schranke von Theorem 2

In diesem Abschnitt zeigen wir die untere Schranke in Theorem 2:

Theorem (Die untere Schranke von Theorem 2 im Fall $h < l$). *Seien Ω , h , l , E_2 wie in Theorem 2. Dann gibt es drei Konstanten $c > 0$, $\alpha_0 \in (0, 1)$, $\varepsilon_0 > 0$, die alle nicht von α , ε , h und l abhängen, so dass gilt:*

$$c\alpha^{6/5}\varepsilon^{4/5}hl^{1/5} \leq E_2 \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0\alpha h^5/l^4).$$

Beweis. Wir werden zeigen, dass hier die Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^4}{\alpha h^5} \right)^{1/5}$ optimal ist. Dabei ist $\Lambda > 0$ eine Konstante, die nicht von α , ε , h und l abhängt. Ihre genauere Form ist unwichtig, da es uns nur um die Skalierungen geht. Der Beweis ist analog zu der Version aus dem Fall $h = l$.

Schritt 1: Energiepartitionierung. Wir wenden zunächst Lemma 6.13 an, um ε aus \mathcal{E}_2 heraus zu filtern.

Schritt 2: Interaktion zwischen elastischer Energie und Oberflächenenergie. Dann wenden wir Lemma 6.14 an, um das ε wieder ins Spiel zu bringen. Seien $Q := (q, q + \lambda h) \times (y_0, y_0 + \lambda h)$ und $F = F(Q)$ wie im Lemma 6.14. Je nachdem, ob $F = R(\phi)A$ oder $F = R(\phi)B$ ist, wobei $R(\phi) \in \text{SO}(2)$ ist, können wir schreiben:

$$|F_{22} - 1| = |\cos(\phi) - 1 \pm \alpha \cos(\phi)|.$$

Entweder ist $|F_{22} - 1| \geq \frac{\alpha}{2}$ oder $|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2}$. Wir spalten den Beweis nun in zwei Teile auf.

Fall 1: $|F_{22} - 1| \geq \frac{\alpha}{2}$.

Schritt 1: Auswahl eines speziellen Segments. Sei $I := (y_0, y_0 + \lambda h)$. Ausgehend

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

von Lemma 6.14 wählen wir ein $x_0 \in [0, l]$ so aus, dass $(x_0, y) \in Q \forall y \in I$ und

$$\int_I |Du(x_0, y) - F| dy \leq 8c_P \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + 2\lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.54)$$

An dieser Stelle muss die weitere Strategie anders aussehen als im Fall K_1 . Der folgende Weg führt zum Erfolg.

Schritt 2: Auswahl einer guten Störung. Sei $f \in C^\infty(I, [0, 1])$, so dass $f(y) = f'(y) = 0$ für $y \in \partial I$. Dann gilt einerseits

$$\int_I |(Du(x_0, y) - F)f(y)| dy \leq 8c_P \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + 2\lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2} \quad (6.55)$$

und andererseits

$$\frac{1}{2}\alpha \|f\|_{L^1(I)} \leq \left| \int_I (F_{22} - 1)f(y) dy \right|. \quad (6.56)$$

Schritt 3: Energietransport. Um (6.55) und (6.56) zu kombinieren, gehen wir so vor:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\alpha \|f\|_{L^1(I)} &\leq \left| \int_I (\partial_2 u_2(x_0, y) - F_{22}(Q))f(y) dy \right| + \left| \int_I (\partial_2 u_2(x_0, y) - 1)f(y) dy \right| \\ &\leq \int_I |(Du(x_0, y) - F(Q))f(y)| dy + \left| \int_I (u_2(x_0, y) - y) f'(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Wegen Lemma 6.24 und (6.30) gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\alpha \|f\|_{L^1(I)} \\ &\leq 8c_P \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} \|f\|_{L^\infty(I)} E_2 + 2\|f\|_{L^\infty(I)} \lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2} \\ &\quad + \alpha \|f'\|_{L^\infty(I)} \left(\sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda h + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}l} E_2 \right) \\ &\quad + \left(3\sqrt{2}\|f'\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda l} + \sqrt{2}\|f''\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.57)$$

Schritt 4: Überprüfung der Skalierungen. Wir betrachten zunächst nur $\|f\|_{L^1(I)} \approx \lambda h$, $\|f\|_{L^\infty(I)} \approx 1$, $\|f'\|_{L^\infty(I)} \approx (\lambda h^{-1})$, $\|f'\|_{L^2(I)} \approx (\lambda h)^{-1/2}$ und $\|f''\|_{L^2(I)} \approx (\lambda h)^{-3/2}$. Wir wählen bei $\tau = \tau_0 \left(\frac{\varepsilon l}{\lambda^2 h^2}\right)^{2/3}$ die Konstante $\tau_0 > 0$ so, dass

$$\frac{1}{2}\alpha \|f\|_{L^1(I)} - \alpha \|f'\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda h > 0$$

gilt. Dabei soll τ_0 unabhängig von α , ε , h und l sein. Wir ignorieren zunächst die vielen Konstanten in (6.57) und betrachten in diesem Schritt nur

$$\alpha\lambda h \lesssim \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + \lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2} + \alpha \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + \frac{1}{\lambda} \frac{l^{3/2}}{h^{3/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.58)$$

Wegen $\lambda \in (0, 1)$, $\alpha \in (0, 1)$ und $h \leq l$ können wir (6.58) vereinfachen zu

$$\alpha\lambda h \lesssim \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + \frac{1}{\lambda} \frac{l^{3/2}}{h^{3/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.59)$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Insbesondere gilt

$$\min \left\{ \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3} \right\} \lesssim E_2,$$

Das Supremum von

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3} \right\}$$

wird bei $\lambda \sim \left(\frac{\varepsilon l^4}{\alpha h^5} \right)^{1/5}$ angenommen. Damit hätten wir tatsächlich $\alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \lesssim E_2$.

Schritt 5: Bestimmung von α_0 und ε_0 . Wir gehen zurück nach (6.57). Seien

$$\begin{aligned} c_0(f) &:= \|f\|_{L^1(I)} / (\lambda h), \\ c_1(f) &:= \|f\|_{L^\infty(I)}, \\ c_2(f) &:= \|f'\|_{L^\infty(I)}, \\ c_3(f') &:= \|f'\|_{L^2(I)} \sqrt{\lambda h}, \\ c_4(f'') &:= \|f''\|_{L^2(I)} (\lambda h)^{3/2}. \end{aligned}$$

Wegen $h \leq l$, $\lambda \in (0, 1)$ und

$$\max \left\{ \lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}}, \frac{l^{1/2}}{h^{1/2}}, \frac{1}{\lambda} \frac{l^{3/2}}{h^{3/2}} \right\} = \frac{1}{\lambda} \frac{l^{3/2}}{h^{3/2}}$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

betrachten wir statt (6.57) die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \alpha \lambda h \left(\frac{1}{2} c_0(f) \alpha \lambda h - \|f'\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau} \right) \\
& \leq \left(8c_P + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau^{3/2} h \lambda^2} \right) \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} c_3(f') E_2 \\
& \quad + \left(2c_1(f) + 3\sqrt{2}c_3(f') + \sqrt{2}c_4(f'') \right) \frac{1}{\lambda} \left(\frac{l}{h} \right)^{3/2} E_2^{1/2}.
\end{aligned} \tag{6.60}$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite ist der Größte. Insbesondere gilt

$$\min \left\{ C_1(f) \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_2(f) \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3} \right\} \leq E_2, \tag{6.61}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_1(f) & \leq \frac{8c_P + \frac{8\tau+6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau^{3/2} h \lambda^2}}{2(2c_1(f) + 3\sqrt{2}c_3(f') + \sqrt{2}c_4(f''))}, \\
C_2(f) & \leq \frac{\left(8c_P + \frac{8\tau+6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau^{3/2} h \lambda^2} \right)^2}{4(2c_1(f) + 3\sqrt{2}c_3(f') + \sqrt{2}c_4(f''))^2}.
\end{aligned} \tag{6.62}$$

Die rechte Seite kann so abgeschätzt werden, dass dort keine Abhängigkeiten in α , ε , l und h mehr sind. Sei

$$\varepsilon_0 := \frac{C_2(f)}{C_1(f)}, \tag{6.63}$$

dann gilt für alle $\varepsilon \in (\varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4})$ und alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$

$$C_1(f) \alpha \varepsilon l \leq C_2(f) \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3}.$$

Wir wollen nun

$$\sup_{\lambda \in (0,1)} \min \left\{ C_1(f) \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_2(f) \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3} \right\}$$

bestimmen. Das Supremum wird für

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ 1, \frac{C_2(f)}{C_1(f)} \right\}$$

bei

$$\lambda = \left(\frac{C_1(f)}{C_2(f)} \right)^{1/5} \left(\frac{\varepsilon l^4}{\alpha h^5} \right)^{1/5} \quad \forall \varepsilon \in \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4} \right) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad (6.64)$$

angenommen und wir erhalten die untere Schranke

$$C_1(f)^{4/5} C_3(f)^{1/5} \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \leq E_2 \quad \forall \varepsilon \in \left(\varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4} \right) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (6.65)$$

Fall 2: $|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2}$.

Es gibt dann ein $\phi \in \mathbb{R}$, so dass

$$F_{22} \in \{(1 - \alpha) \cos(\phi), (1 + \alpha) \cos(\phi)\}.$$

Wenn $F_{22} = (1 - \alpha) \cos(\phi)$ wäre, dann wäre

$$|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2} \quad \iff \quad \frac{2 - \alpha}{2(1 - \alpha)} < \cos(\phi) \quad \text{und} \quad \cos(\phi) < \frac{\alpha + 2}{2(1 - \alpha)}$$

ein Widerspruch zu $-1 \leq \cos(\phi) \leq 1$. Daher gilt

$$|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2} \quad \implies \quad F_{22} = (1 + \alpha) \cos(\phi).$$

Die Lösungsmenge $\Phi = \{\phi \in \mathbb{R} : |F_{22}(\phi) - 1| < \frac{\alpha}{2}\}$ von $|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2}$ lässt sich für $\alpha \in (0, 1)$ schreiben als

$$\Phi := 2\pi\mathbb{Z} + \left\{ \phi \in \mathbb{R} : \arccos\left(\frac{2 - \alpha}{2(1 + \alpha)}\right) < |\phi| < \arccos\left(\frac{\alpha + 2}{2(1 + \alpha)}\right) \right\}.$$

Wegen $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$\Phi \subset 2\pi\mathbb{Z} + \left\{ t \in \mathbb{R} : 0 < t < \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Daher ist $\sin(\phi) \in [0, 1]$ für alle $\phi \in \Phi$.

$$|F_{22} - 1| < \frac{\alpha}{2} \quad \iff \quad \frac{2 - \alpha}{2(1 + \alpha)} < \cos(\phi) < \frac{\alpha + 2}{2(1 + \alpha)}$$

Deshalb gibt es zwei Konstanten $0 < b_0 < b_1$, so dass

$$\Phi \subset 2\pi\mathbb{Z} + \{\phi \in \mathbb{R} : b_0\sqrt{\alpha} < |\phi| < b_1\sqrt{\alpha}\}.$$

Betrachte nun $\phi \in \Phi$, dann gilt

$$\frac{\alpha}{2} < |(1 + \alpha) \cos(\phi) - 1 + \operatorname{sgn}(\phi) \sin(\phi)| \quad \forall \phi \in \Phi.$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Daher ist $\frac{\alpha}{2} < |F_{22} - 1 + \operatorname{sgn}(F_{21})F_{21}|$.

Daraus folgt für $f \in C^\infty(I, [0, \infty))$ mit $f(y) = f'(y) = 0$ für $y \in \partial I$

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda hc_0(f) < \left| \int_I (F_{22} - 1 + \operatorname{sgn}(\phi)F_{12}) f(y) dy \right|, \quad (6.66)$$

wobei $c_0(f) := \|f\|_{L^1(I)}/(\lambda h)$. Sei $x_0 \in [0, l]$, so dass

$$\int_I |Du(x_0, y) - F(Q)| dy \leq 8c_p \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + 2\lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2}. \quad (6.67)$$

Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir aus (6.66)

$$\frac{1}{2}\alpha\lambda hc_0(f) < T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (6.68)$$

wobei

$$\begin{aligned} T_1 &:= \left| \int_I (F_{22} - \partial_2 u_2(x_0, y)) dy \right| \|f\|_{L^\infty(I)}, \\ T_2 &:= \left| \int_I (\partial_2 u_2(x_0, y) - 1) f(y) dy \right| = \left| \int_I (u_2(s, y) - y) f'(y) dy \right|, \\ T_3 &:= \left| \int_I (F_{12} - \partial_1 u_2(x_0, y)) dy \right| \|f\|_{L^\infty(I)}, \\ T_4 &:= \left| \int_I \partial_1 u_2(x_0, y) f(y) dy \right|. \end{aligned}$$

Die Terme T_1 und T_3 werden einfach durch (6.67) abgeschätzt. T_2 wurde schon in Lemma 6.24 und T_4 in Lemma 6.23 untersucht. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T_1 + T_3 &\leq \|f\|_{L^\infty(I)} \left(16c_p \frac{\lambda^2 h}{\varepsilon l} E_2 + 4\lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}} E_2^{1/2} \right), \\ T_2 &\leq \alpha \|f'\|_{L^\infty(I)} \left(\sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda hl + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{\tau^{3/2}} E_2 \right) \\ &\quad + \left(3\sqrt{2}\|f'\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda l} + \sqrt{2}\|f''\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda l^{3/2}} \right) E_2^{1/2}, \\ T_4 &\leq \alpha \|f\|_{L^\infty(I)} \left(\sqrt{6}\sqrt{\tau}\lambda l + \frac{8\tau + 6}{\sqrt{6}} \frac{\lambda}{h\tau^{3/2}} E_2 \right) \\ &\quad + \left(3\sqrt{2}\|f\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda l^{-1}} + \sqrt{2}\|f'\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda l^{1/2}} \right) E_2^{1/2}. \end{aligned}$$

Wir gehen zurück zu (6.68). Seien

$$\begin{aligned}
c_1(f) &:= \|f\|_{L^\infty(I)}, \\
c_2(f) &:= \|f\|_{L^2(I)}/\sqrt{\lambda h}, \\
c_3(f) &:= \|f'\|_{L^\infty(I)}(\lambda h), \\
c_4(f') &:= \|f'\|_{L^2(I)}\sqrt{\lambda h}, \\
c_5(f'') &:= \|f''\|_{L^2(I)}(\lambda h)^{3/2}.
\end{aligned} \tag{6.69}$$

Wegen $h \leq l$, $\lambda \in (0, 1)$ und

$$\max \left\{ \lambda \frac{h^{1/2}}{l^{1/2}}, \frac{l^{1/2}}{h^{1/2}}, \frac{1}{\lambda} \frac{l^{3/2}}{h^{3/2}} \right\} = \frac{1}{\lambda} \frac{l^{3/2}}{h^{3/2}}$$

ist

$$\begin{aligned}
& \alpha \lambda h \left(\frac{1}{2} c_0(f) \alpha \lambda h - \|f'\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau_1} - \|f\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau_2} \right) \\
& \leq \left(16c_P c_1(f) + c_3(f') \frac{8\tau_1 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau_1^{3/2} h^2} + c_1(f) \frac{8\tau_2 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau_2^{3/2} h^2} \right) \frac{h \lambda^2}{l \varepsilon} E_2 \\
& \quad + \left(2\sqrt{2} c c_1(f) + 3\sqrt{2}(c_4(f') + c_2(f)) + \sqrt{2}(c_5(f'') + c_4(f')) \right) \frac{1}{\lambda} \left(\frac{l}{h} \right)^{3/2} E_2^{1/2}.
\end{aligned}$$

Einer der zwei Terme auf der rechten Seite in (6.69) ist der Größte. Insbesondere erhalten wir

$$\min \left\{ C_1(f) \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_2(f) \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3} \right\} \lesssim E_2,$$

wobei

$$\begin{aligned}
C_1(f) & \leq \frac{\frac{1}{2} c_0(f) \alpha \lambda h - \|f'\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau_1} - \|f\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau_2}}{2 \left(16c_P c_1(f) + c_3(f') \frac{8\tau_1 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau_1^{3/2} h^2} + c_1(f) \frac{8\tau_2 + 6}{\sqrt{6}} \frac{\alpha \varepsilon l}{\tau_2^{3/2} h^2} \right)}, \\
C_2(f) & \leq \frac{\left(\frac{1}{2} c_0(f) \alpha \lambda h - \|f'\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau_1} - \|f\|_{L^\infty(I)} \sqrt{6} \sqrt{\tau_2} \right)^2}{4 \left(2\sqrt{2} c c_1(f) + 3\sqrt{2}(c_4(f') + c_2(f)) + \sqrt{2}(c_5(f'') + c_4(f')) \right)^2}.
\end{aligned} \tag{6.70}$$

Auch hier kann die rechte Seite so abgeschätzt werden, dass dort keine Abhängigkeiten in α , ε , h und l mehr sind. Sei

$$\varepsilon_0 := \frac{C_2(f)}{C_1(f)}. \tag{6.71}$$

6 Beweis der unteren Schranke von Theorem 2

Dann gilt für alle $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4})$ und alle $\alpha \in (0, \alpha_0)$:

$$C_1(f) \alpha \varepsilon l \leq C_2(f) \alpha^2 \frac{h^5}{l^3}.$$

Das Supremum von

$$\min \left\{ C_1(f) \frac{\alpha \varepsilon l}{\lambda}, C_2(f) \alpha^2 \lambda^4 \frac{h^5}{l^3} \right\}$$

wird für

$$\varepsilon_0 := \min \left\{ 1, \frac{C_2(f)}{C_1(f)} \right\}$$

bei

$$\lambda = \left(\frac{C_1(f)}{C_2(f)} \right)^{1/5} \left(\frac{\varepsilon l^4}{\alpha h^5} \right)^{1/5} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4}) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0) \quad (6.72)$$

angenommen und wir erhalten die untere Schranke

$$C_1(f)^{4/5} C_2(f)^{1/5} \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \leq E_2 \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha \frac{h^5}{l^4}) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0). \quad (6.73)$$

Fazit: In beiden Fällen führte die Wahl $\lambda = \Lambda \left(\frac{\varepsilon l^4}{\alpha h^5} \right)^{1/5}$ zum Erfolg. Bis auf Konstanten haben wir eine untere Schranke der Form $\alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \lesssim E_2$ gezeigt. Die Konstanten können noch wie im Fall $h = l$ behandelt werden. Das beendet den Beweis. \square

7 Der Fall $h > l$ in Theorem 2

Zum Abschluss zeigen wir noch den Fall $h > l$ von Theorem 2.

Die obere Schranke. Eine obere Schranke ist schnell gefunden, denn wir wenden den Fall $h = l$ genau $\lfloor h/l \rfloor$ -mal an. Bis auf Konstanten folgt sofort

$$E_2 \lesssim \alpha^{6/5} \varepsilon^{4/5} h l^{1/5} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0 \alpha l) \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0).$$

Die untere Schranke. Im Gegensatz zu K_1 mussten wir bei der unteren Schranke im Fall K_2 nicht die Randdaten von u in e_2 -Richtung anwenden. Das hat zur Folge, dass wir jetzt blockweise argumentieren dürfen. Wir wenden den Fall $h = l$ jetzt genau $\lfloor h/l \rfloor$ an.

7 Der Fall $h > l$ in Theorem 2

Literaturverzeichnis

- [1] G. ACOSTA AND R. DURÁN, *An optimal Poincare inequality in L^1 for convex domains*, Proceedings AMS, 132 (2003), pp. 195–202.
- [2] J. M. BALL, *Mathematical models of martensitic microstructure*, Materials Science and Engineering: A, 378 (2004), pp. 61 – 69. European Symposium on Martensitic Transformation and Shape-Memory.
- [3] J. M. BALL AND C. CARSTENSEN, *Nonclassical austenite-martensite interfaces*, J. Phys. IV France, 07 (1997), pp. 35–40.
- [4] J. M. BALL AND R. D. JAMES, *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 100 (1987), pp. 13–52. 10.1007/BF00281246.
- [5] ———, *Proposed Experimental Tests of a Theory of Fine Microstructure and the Two-Well Problem*, Philosophical Transactions of The Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 338 (1992), pp. 389–450.
- [6] J. M. BALL, K. KOUMATOS, AND H. SEINER, *An analysis of non-classical austenite-martensite interfaces in CuAlNi*, Proceedings ICOMAT, 08 (2011), pp. TMS383–390.
- [7] M. BEBENDORF, *A Note on the Poincaré Inequality for Convex Domains*, Zeitschrift Für Analysis Und Ihre Anwendungen, 22 (2003), pp. 751–756.
- [8] F. BETHUEL, G. HUISKEN, K. STEFFEN, AND S. MÜLLER, *Variational models for microstructure and phase transitions*, in Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, vol. 1713 of Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin / Heidelberg, 1999, pp. 85–210. 10.1007/BFb0092670.
- [9] K. BHATTACHARYA, *Comparison of the geometrically nonlinear and linear theories of martensitic transformation*, Continuum Mechanics and Thermodynamics, 5 (1993), pp. 205–242. 10.1007/BF01126525.
- [10] ———, *Microstructure of Martensite*, Oxford Series on Materials Modelling, Oxford University Press, 2003.

- [11] J. BOWLES AND J. MACKENZIE, *The crystallography of martensite transformations I*, Acta Metallurgica, 2 (1954), pp. 129 – 137.
- [12] A. CHAN, *Energieskalierung und Domänenverzweigung bei fest-fest Phasenübergängen mit $SO(2)$ -Invarianz*. Diplomarbeit, 2007.
- [13] R. CHOKSI, S. CONTI, R. V. KOHN, AND F. OTTO, *Ground state energy scaling laws during the onset and destruction of the intermediate state in a type-I superconductor*, Comm. Pure Appl. Math., 61 (2008), pp. 595–626.
- [14] R. CHOKSI, R. V. KOHN, AND F. OTTO, *Energy Minimization and Flux Domain Structure in the Intermediate State of a Type-I Superconductor*, Journal of Nonlinear Science, 14 (2004), pp. 119–171. 10.1007/s00332-004-0568-2.
- [15] S. CONTI, *Branched microstructures: scaling and asymptotic self-similarity*, Comm. Pure Appl. Math., 53 (2000), pp. 1448–1474.
- [16] —, *A lower bound for a variational model for pattern formation in shape-memory alloys*, Cont. Mech. Thermod., 17 (2006), pp. 469–476.
- [17] S. CONTI, A. DESIMONE, G. DOLZMANN, S. MÜLLER, AND F. OTTO, *Multiscale Modeling of Materials – the Role of Analysis*, in Trends in Nonlinear Analysis, M. Kir-kilionis, S. Krömker, R. Rannacher, and F. Tomi, eds., Heidelberg, 2002, Springer, pp. 375–408.
- [18] S. CONTI AND B. SCHWEIZER, *A sharp-interface limit for a two-well problem in geometrically linear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal., 179 (2006), pp. 413–452.
- [19] P. A. CORNING, *The re-emergence of “emergence“: A venerable concept in search of a theory*, Complexity, 7 (2002), pp. 18–30.
- [20] G. DOLZMANN, *Variational Methods for Crystalline Microstructure - Analysis and Computation*, vol. 1803 of Lecture Notes in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2003.
- [21] J. L. ERICKSEN, *Constitutive theory for some constrained elastic crystals*, International Journal of Solids and Structures, 22 (1986), pp. 951 – 964.
- [22] G. FRIESECKE, R. D. JAMES, AND S. MÜLLER, *A theorem on geometric rigidity and the derivation of nonlinear plate theory from three-dimensional elasticity*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 55 (2002), pp. 1461–1506.
- [23] H. JANOSHA, *Unkonventionelle Aktoren*, Oldenbourg, 2012.

- [24] A. KHACHATURYAN, *Theory of structural transformations in solids*, John Wiley & Sons, 1983.
- [25] R. V. KOHN, *The Relationship Between Linear and Nonlinear Variational Models of Coherent Phase Transitions*, in Transactions of the Army Conference on Applied Mathematics and Computing (7Th) Held in West Point, New York on 6-9 June 1989, A. R. O. R. T. P. NC., ed., Defense Technical Information Center, 1990.
- [26] R. V. KOHN AND S. MÜLLER, *Branching of twins near an austenite-twinned-martensite interface*, Philosophical Magazine A, 66 (1992), pp. 697–715.
- [27] ———, *Surface energy and microstructure in coherent phase transitions*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 47 (1994), pp. 405–435.
- [28] R. V. KOHN AND F. OTTO, *Small surface energy, coarse-graining, and selection of microstructure*, Phys. D, 107 (1997), pp. 272–289.
- [29] P. K. KUMAR AND D. C. LAGOUDAS, *Introduction to shape memory alloys*, in Shape Memory Alloys, Springer US, 2008, pp. 1–51. 10.1007/978-0-387-47685-8-1.
- [30] D. LIEBERMAN, M. WECHSLER, AND T. READ, *Cubic to orthorhombic diffusionless phase change - experimental and theoretical studies of auCd*, J. Appl. Phys., 26 (1955), p. 473.
- [31] J. MACKENZIE AND J. BOWLES, *The crystallography of martensite transformations II*, Acta Metallurgica, 2 (1954), pp. 138 – 147.
- [32] M. MERTMANN, *Entwicklung eines Greifmechanismus aus neuen Verbundwerkstoffen mit Zweiweg-Formgedächtnis*, in Nordrhein-Westfälische Akademie der Wissenschaften - Vorträge N 418, 1995.
- [33] M. MÜLLER, *Experimente mit Nitinoldraht*, Franzis, 2007.
- [34] V. PETZOLD, *Formgedächtnistechnik - Tiefbohren und Mikrofräsen von NiTi*, Vulkan, 2006.
- [35] G. RUDDOCK, *A microstructure of martensite which is not a minimiser of energy: the X-interface*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 127 (1994), pp. 1–39. 10.1007/BF01845216.
- [36] M. WECHSLER, D. LIEBERMAN, AND T. READ, *On the theory of the formation of martensite*, Trans. AIME, 197 (1953), p. 1503.
- [37] B. ZWICKNAGL, *Mathematical analysis of microstructures and low hysteresis shape*

Literaturverzeichnis

memory alloys. Dissertation, 2011.