

Atomarer Transport und die Kontrolle von Transportresonanzen in optischen Gitterpotentialen

Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)
der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von
Christopher Grossert
aus
Wissen

Bonn, April 2015

Angefertigt mit Genehmigung der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Martin Weitz
2. Gutachter: Prof. Dr. Dieter Meschede

Tag der Promotion: 25.06.2015
Erscheinungsjahr: 2015

Diese Dissertation ist auf dem Hochschulschriftenserver der ULB Bonn
http://hss.ulb.uni-bonn.de/diss_online elektronisch publiziert.

Zusammenfassung

Der Ratscheneffekt erlaubt es, eine gerichtete Teilchenbewegung mittels einer im zeitlichen Mittel ungerichteten Kraft zu erzeugen. Da die Transporteffizienz und die Transportrichtung eines klassischen Ratschensystems oft von Eigenschaften der Teilchen wie beispielsweise Durchmesser oder Temperatur abhängt, bietet der Ratscheneffekt einen vielversprechenden Ansatz zur Modellierung molekularer Motoren oder zur Teilchenseparation. Durch den Übergang zu quantenmechanischen Systemen werden auch Eigenschaften wie die Spinorientierung der Teilchen zur Separation zugänglich.

Die vorliegende Arbeit behandelt die Realisierung einer Quantenkippratsche für ultrakalte Rubidiumatome in einem zeitlich periodisch modulierten optischen Gitterpotential. Die verwendete biharmonische Modulation ermöglicht es, die räumliche und zeitliche Symmetrie des Systems zu brechen und so eine gerichtete Bewegung der Atome zu erzeugen. Für den Quantentransport der Kippratsche werden zugrunde liegende Transportsymmetrien und Abhängigkeiten wie zum Beispiel die Abhängigkeit vom Startzeitpunkt der Modulation vorhergesagt, welche im Rahmen der Arbeit experimentell untersucht und bestätigt werden. Unter Variation eines Kontrollparameters der Modulation wird eine resonante Verstärkung des atomaren Transports beobachtet, welche auf die Kopplung zwischen Floquet-Zuständen zurückzuführen ist und daher mit einer vermiedenen Kreuzung im Floquet-Spektrum zusammenfällt. Dieser Transportmechanismus führt unter Variation eines zweiten Kontrollparameters der Modulation zu einer Bifurkation der Transportresonanz aufgrund der Entkopplung der Floquet-Zustände. Die Bifurkation einer Transportresonanz wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit erstmals experimentell beobachtet. Die Messergebnisse und ergänzende numerische Simulationen demonstrieren die Kontrollierbarkeit des kohärenten Quantentransports ultrakalter Atome in diesem System. Da zur Realisierung der Quantenkippratsche eine einfache optische Stehwelle genügt, ist es in zukünftigen Arbeiten möglich, fernverstimmte optische Gitterpotentiale zu verwenden, so dass entsprechend lange Kohärenzzeiten erreicht werden können. Dies sollte die Verwirklichung von Quantenratschen im stark korrelierten Bereich ermöglichen.

Publikationsliste

Experimental control of transport resonances in a coherent quantum rocking ratchet

C. Grossert, M. Leder, S. Denisov, P. Hänggi und M. Weitz

Eingereicht zur Veröffentlichung (arXiv:1407.0605)

Veselago lensing with ultracold atoms in an optical lattice

M. Leder, C. Grossert und M. Weitz

Nature Comm. **5**, 3327 (2014)

Klein Tunneling of a quasirelativistic Bose-Einstein condensate in an optical lattice

T. Salger, C. Grossert, S. Kling und M. Weitz

Phys. Rev. Lett. **107**, 240401 (2011)

Effective Dirac dynamics of ultracold atoms in bichromatic optical lattices

D. Witthaut, T. Salger, S. Kling, C. Grossert und M. Weitz

Phys. Rev A **84**, 033601 (2011)

Atomic Bloch-Zener oscillations and Stückelberg interferometry in optical lattices

S. Kling, T. Salger, C. Grossert und M. Weitz

Phys. Rev. Lett. **105**, 215301 (2010)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Ultrakalte atomare Bose-Gase in optischen Gitterpotentialen	7
2.1	Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation	7
2.2	Optisches Kühlen und Fangen atomarer Gase	14
2.3	Optisches Gitter	22
3	Periodisch getriebene optische Gitter und atomare Transportresonanzen	29
3.1	Floquet-Theorie eines getriebenen optischen Gitterpotentials	29
3.2	Transportmechanismus und Symmetrien	31
3.3	Desymmetrisierung der Floquet-Zustände	35
3.4	Auftreten und Bifurkation von Transportresonanzen	37
3.5	Einfluss der experimentellen Rahmenbedingungen	41
4	Experimenteller Aufbau	45
4.1	Einleitung	45
4.2	Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats	46
4.3	Absorptionsabbildung	54
4.4	Optisches Gitter	57
4.5	Geschwindigkeitsselektion	62
5	Atomarer Transport der Quantenkippratsche	65
5.1	Gemittelter atomarer Impuls	65
5.2	Detektion von Transportresonanzen	70
5.3	Transportsymmetrien der Quantenkippratsche	74
5.4	Bifurkation einer Transportresonanz	76
6	Ausblick	83
A	Numerische Methoden	85
A.1	Eichtransformation zum räumlich periodischen Hamilton-Operator . . .	85

A.2	Numerische Integrationsverfahren	86
A.3	Erweiterung der numerischen Verfahren für einen Anfangszustand mit endlicher Impulsbreite	88
A.4	Umrechnung der Modulationsparameter in dimensionslose Größen . . .	88
Literatur		91

Einleitung

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit der Beobachtung und Manipulation von atomaren Transportresonanzen in zeitlich biharmonisch getriebenen optischen Gittern. Grundlage ist der Ratscheneffekt, bei dem ein gerichteter Transport durch Symmetriebrechung mittels einer externen periodisch treibenden Kraft möglich wird, obwohl die Kraft im zeitlichen Mittel verschwindet [1]. Eine gerichtete Teilchenbewegung bildet die Grundlage verschiedenster Effekte und Anwendungen in mehreren naturwissenschaftlichen Bereichen. Üblicherweise resultiert die Bewegung der Teilchen aus einer gerichteten äußeren Kraft. Ein Motor wandelt je nach Typ chemische, elektrische oder eine andere Energieform in kinetische Energie um. Auf mikroskopischer Ebene entsteht aber die Schwierigkeit, dass der Motor einer stark fluktuierenden Umgebung aufgrund der Brownschen Molekularbewegung ausgesetzt ist. Ein Ansatz zur Realisierung eines Brownschen Motors besteht darin, durch eine räumliche Asymmetrie die Teilchenfluktuationen in eine gerichtete Bewegung umzuwandeln [2]. Aus einem Gedankenexperiment von M. Smoluchowski [3], welches später durch R. Feynman bekannter wurde [4], geht hervor, dass eine gerichtete Bewegung in diesem Falle nur möglich wird, wenn das System nicht im thermischen Gleichgewicht ist, da sonst der zweite Hauptsatz der Thermodynamik verletzt wird. Der nach diesem Gedankenexperiment benannte Ratscheneffekt erlaubt die Gleichrichtung einer ungeordneten Bewegung in einem Nichtgleichgewichtssystem ohne eine gerichtete äußere Kraft.

Inzwischen gibt es eine Reihe an unterschiedlichsten Systemen und Modellen, welche auf dem Ratscheneffekt basieren. Beispiele sind die Modellierung biologischer Prozesse wie der Muskelkontraktion oder die Entwicklung molekularer Motoren [5, 6]. Auf nanoskopischer Ebene können quantenmechanische Effekte irgendwann nicht mehr vernachlässigt werden. In ersten Experimenten zur Physik der Quantenratsche wird der Strom durch einen dreieckförmigen Quantenpunkt beim Anlegen einer Wechselspannung auf den Ratscheneffekt zurückgeführt [7]. In der Spintronik kann eine peri-

odische Modulation eines asymmetrischen Potentials dazu genutzt werden, Teilchen entsprechend der Spinorientierung zu separieren [8]. Auf dem Gebiet der kalten atomaren Gase wurde zu Beginn der Transport kalter Cäsiumatome in einem zeitlich modulierten optischen Gitterpotential untersucht [9] und später gezeigt, dass in einem periodisch symmetrisch modulierten Potential Dissipation zum Transport der Atome führt [10].

Dissipative Effekte sind aber keine notwendige Voraussetzung für die Beobachtung einer gerichteten Bewegung in einem periodisch getriebenen System. Mittels einer Symmetrieanalyse lässt sich der Ratscheneffekt auch so verstehen, dass eine periodische Modulation, deren zeitliches Mittel verschwindet, nur dann zu einer gerichteten Bewegung führen kann, wenn gleichzeitig die zeitliche und die räumliche Symmetrie gebrochen werden [11]. Bei der Hamiltonischen Ratsche wird die zeitliche Symmetrie nicht über Dissipation, sondern explizit über eine zeitlich asymmetrische Modulation gebrochen [1]. In dissipationsarmen bzw. dissipationsfreien Systemen ist es möglich, grundlegende Eigenschaften des Ratscheneffekts zu untersuchen.

Ultrakalte Atome in optischen Gitterpotentialen bieten ein ideales System, kontrolliert und mit langen Kohärenzzeiten Effekte aus der Festkörperphysik zu simulieren. Die Idee basiert auf R. Feynmans Vorschlag, zur Quantensimulation eines komplizierten oder schwer zugänglichen Systems ein einfacher zugängliches und kontrollierbares quantenmechanisches System zur Nachahmung zu verwenden [12]. Seit der ersten experimentellen Realisierungen eines Bose-Einstein Kondensats [13, 14] sind eine Reihe von Quanteneffekten erstmalig in einem Experiment mit ultrakalten Atomen beobachtet worden. Die gezeigten Effekte reichen von Bloch-Oszillationen in optischen Gitterpotentialen [15] und quantenmechanischen Phasenübergängen wie der zum Mott-Isolator [16] zu exotischen Effekten wie negative Temperaturen [17] oder relativistische Effekte wie die des Klein-Tunnelns [18]. Entartete Quantengase sind heutzutage für viele bosonische und fermionische Spezies experimentell zugänglich und erlauben so die Modellierung unterschiedlichster Systeme. Neben atomaren Gasen ist auch für andere bosonische Ensembles, beispielsweise für Polaritonen [19] oder Photonen [20], die Bose-Einstein-Kondensation experimentell gezeigt und so das Tor zur Konstruktion neuer Quantensimulatoren geöffnet worden.

Für ultrakalte Atome in zeitlich periodisch getriebenen optischen Gitterpotentialen wurden verschiedene Effekte vorhergesagt und untersucht [21]. So wurde beispielsweise experimentell gezeigt, dass der Übergang vom Suprafluid zum Mott-Isolator in einem periodisch getriebenen dreidimensionalen optischen Gitterpotential über die Änderung der Modulationsamplitude induziert werden kann, wobei das optische Gitterpotential hier über retroreflektierende Spiegel realisiert und die Modulation durch eine periodische Positionsänderung des retroreflektierenden Spiegels erzeugt wurde [22]. In optischen Dreiecksgittern wurde eine zeitliche Symmetriebrechung

durch eine periodische Frequenzmodulation des Lichts einer der optischen Gitterstrahlen erreicht und dieses System zur Realisierung künstlicher Eichfelder verwendet [23–25].

Um die räumliche Symmetrie in optischen Gitterpotentialen zu brechen, kann ein bichromatisches Gitter verwendet werden. Dieses wird zum Beispiel durch die Überlagerung des Lichts zweier Laser mit unterschiedlichen Wellenlängen erzeugt [26]. Statt einer zweiten Laserlichtquelle können aber auch durch Mehrphotonenprozesse höhere räumliche Gitterperiodizitäten erreicht werden [27]. Durch die Überlagerung des einfachen Stehwellenpotentials mit den Gitterpotentialen höherer Ordnung kann so ein räumlich asymmetrisches Gitterpotential erzeugt werden [28]. Dieses Verfahren wurde in den Laboren unserer Arbeitsgruppe im Rahmen der Dissertation von T. Salger ausgenutzt, um 2009 erstmalig eine Hamiltonische Quantenrutsche zu realisieren [29, 30]. Dabei wurde ein Fourier-synthetisiertes, räumlich asymmetrisches optisches Gitterpotential zeitlich asymmetrisch amplitudenmoduliert und so Transport von ultrakalten Atomen beobachtet. Der gemessene mittlere Impuls der Atome nach der Wechselwirkung mit dem Ratschenpotential hängt dabei vom Startzeitpunkt der Modulation ab, eine Eigenschaft, die sich aus der Linearität der Schrödinger-Gleichung ergibt und im Kontrast zu einer auf den Gesetzen der klassischen Physik basierenden Rutsche steht, bei der keine Abhängigkeit vom Startzeitpunkt der Modulation erwartet wird. Der Quantentransport wurde auf die Desymmetrisierung der Floquet-Zustände zurückgeführt.

In der vorliegenden Arbeit geht es um die Untersuchung des atomaren Transports einer Quantenkipprutsche, d.h. eines optischen Gitterpotentials mit einer additiven biharmonischen Kraft, deren zeitliches Mittel verschwindet. Die biharmonische Modulation genügt, alle relevanten Symmetrien zu brechen [11], so dass die Experimente mit einem sinusförmigen Gitterpotential durchgeführt werden können. Unter Variation eines Kontrollparameters der Modulation wird eine resonante Verstärkung des atomaren Transports erwartet, welche sich über das Auftreten vermiedener Kreuzungen im Eigenenergiespektrum erklären lässt [31]. Die Kopplung zwischen den Floquet-Zuständen kann über die Anpassung eines weiteren Kontrollparameters beeinflusst werden, so dass die Transportresonanz verstärkt wird oder es durch die Entkopplung der Floquet-Zustände zu einer Bifurkation der Transportresonanz kommen kann. Im Vergleich zum amplitudenmodulierten Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotential hat die Quantenkipprutsche den Vorteil, auf einem einfachen Stehwellenpotential zu basieren, so dass ein Übergang zu fernverstimmten optischen Gitterpotentialen und damit zu längeren Kohärenzzeiten möglich wird.

Die in dieser Arbeit präsentierten experimentellen Ergebnisse zeigen die Abhängigkeit des atomaren Transports vom Startzeitpunkt der biharmonischen Modulation und die erwarteten Transportsymmetrien. Ein atomarer Transport wird nur im Fal-

le einer zeitlich asymmetrischen Modulation beobachtet. In Abhängigkeit von der Modulationsfrequenz zeigt sich, dass entsprechend eines störungstheoretischen Ansatzes für eine zu schnelle Modulation der atomaren Transport verschwindet, während im adiabatischen Grenzfall die Abhängigkeit chaotisch wirkt. Weiterhin werden Transportresonanzen beobachtet, die nicht nur auf einer Resonanz der Modulationsfrequenz zurückzuführen sind, sondern im Rahmen der Floquet-Theorie als Folge einer vermiedenen Kreuzung interpretiert werden. Die Transportresonanzen werden auch in Abhängigkeit anderer Kontrollparameter wie der Phasenverschiebung zwischen den beiden zeitlichen Harmonischen beobachtet. Mit einer kombinierten Variation mehrerer Kontrollparameter kann die Kopplung zwischen den Floquet-Zuständen beeinflusst werden. Die erstmalige Beobachtung der Bifurkation einer Transportresonanz unterstützt die Interpretation des atomaren Transports als Folge vermiedener Kreuzungen im Floquet-Bandspektrum.

Struktur der Arbeit

In Kapitel 2 werden die theoretischen Grundlagen zur Bose-Einstein-Kondensation und die im Experiment verwendeten Methoden zur Kühlung des atomaren Gases kurz angerissen. Die Erzeugung eines optischen Gitterpotentials und die Dynamik eines atomaren Bose-Einstein-Kondensats in stationären oder linear beschleunigten Gitterpotentialen werden in den Grundzügen besprochen.

Die Dynamik periodisch getriebener optischer Gitterpotentiale wird in Kapitel 3 behandelt. Mit der Floquet-Theorie lassen sich aus dem Quasienergiespektrum wichtige Eigenschaften des atomaren Transports ableiten. Insbesondere werden das Auftreten und die Bifurkation von Transportresonanzen in biharmonisch getriebenen optischen Gitterpotentialen behandelt. Das Kapitel schließt mit einer Differenzierung zum im Experiment beobachtbaren atomaren Transport und den wesentlichen Merkmalen, die bei einer numerischen Simulation der experimentellen Ergebnisse berücksichtigt werden müssen.

In Kapitel 4 wird der experimentelle Aufbau zur Untersuchung der atomaren Transportresonanzen behandelt. Der experimentelle Ablauf und der Aufbau zur Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats und des optischen Gitterpotentials wird beschrieben, auf die Zeeman-zustandssensitive Abbildung und die biharmonische Modulation genauer eingegangen. Das Kapitel schließt mit einer Beschreibung des im Experiment verwendeten geschwindigkeitsselektiven Lichtpulses zur Reduktion der Impulsbreite der Atome aus dem Kondensat.

Die experimentellen Ergebnisse zum atomaren Transport des biharmonisch modulierten optischen Gitterpotentials werden in Kapitel 5 vorgestellt. Das Kapitel beginnt mit einer Beschreibung, wie der mittlere Impuls im Experiment bestimmt wird und stellt dann verschiedene Ergebnisse zur Abhängigkeit des atomaren Transports von den

verschiedenen Kontrollparametern der Modulation und die beobachteten Transportsymmetrien vor. Schließlich wird über die erste experimentelle Beobachtung der Bifurkation einer Transportresonanz berichtet, die sich als charakteristisches Merkmal der Beobachtung von Quantentransport im Falle eines biharmonisch modulierten optischen Gitterpotentials ergibt und die Kontrollierbarkeit atomarer Transportresonanzen demonstriert.

Die Arbeit schließt mit einem Ausblick zur möglichen Anwendung und Weiterführung der in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse.

Ultrakalte atomare Bose-Gase in optischen Gitterpotentialen

Der erste Abschnitt dieses Kapitels beinhaltet eine Einführung in die theoretischen Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation. Diese wird zunächst für den Fall eines nichtwechselwirkenden atomaren Gases in drei Dimensionen behandelt, welcher auch in vielen Textbüchern zur statistischen Mechanik in allgemeinerer Form zu finden ist [32]. Danach wird die interatomare Wechselwirkung für ein dünnes atomare bosonisches Gas berücksichtigt. Es folgt eine knappe Darstellung der Gross-Pitaevskii-Gleichung und der Thomas-Fermi-Näherung. Die gewählte Darstellung orientiert sich weitestgehend an [33]. Im nächsten Abschnitt werden dann die im Experiment verwendeten Kühlmethode der magneto-optischen Falle und der evaporativen Kühlung in der Dipolfalle vorgestellt. Das Kapitel schließt mit einem Abschnitt über die Entwicklung einer Energiebandstruktur ultrakalter Atome in optischen Gitterpotentialen und einer Einführung in die Dynamik der Atome innerhalb dieser Energiedispersion.

2.1 Grundlagen der Bose-Einstein-Kondensation

In der Natur sind zwei mögliche Arten von Teilchen in Hinblick auf die Vertauschung zweier Teilchen in einem System aus vielen identischen Teilchen realisiert. Partikel, deren Vielteilchenzustand symmetrisch unter Permutation zweier Teilchen ist, werden Bosonen genannt. Im Gegensatz zu Fermionen, deren Vielteilchenzustand antisymmetrisch hinsichtlich der Zweiteilchenpermutation ist, können Bosonen denselben Einteilchenzustand, insbesondere den Grundzustand, besetzen. Die makroskopische Besetzung des Grundzustands ab einer kritischen Phasenraumdichte wird Bose-Einstein-Kondensation genannt [34, 35]. Im Falle atomarer Gase wird diesem Phasen-

übergang eine kritische Temperatur zugeordnet, unterhalb derer die Kondensation eintritt.

Kritische Temperatur und Kondensatanteil

Die mittlere Besetzungszahl $\langle n_\epsilon \rangle$ des Einteilchenzustands eines Bosons mit der Energie ϵ ist über die Bose-Einstein-Statistik

$$\langle n_\epsilon \rangle = \frac{1}{z^{-1} e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1} \quad (2.1)$$

gegeben, wobei die Energienormierung $\beta = 1/(k_B T)$ mit der Boltzmann-Konstante k_B gewählt wird und die Fugizität z über $z = \exp(\mu/(k_B T))$ mit dem chemischen Potential μ verknüpft ist [34, 35]. Für hohe Temperaturen geht diese in den klassischen Fall der Boltzmann-Verteilung

$$\langle n_\epsilon \rangle \approx e^{-(\epsilon-\mu)/k_B T} \quad (2.2)$$

über. Die Gesamtzahl N der Bosonen innerhalb der Verteilung ist

$$N = \sum_\epsilon \langle n_\epsilon \rangle = \sum_\epsilon \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1}. \quad (2.3)$$

Im Falle großen Volumens V kann die Summe in (2.3) wegen des nahezu kontinuierlichen Energiespektrums $\epsilon(p)$ durch ein Integral ersetzt werden.

Die Anzahl an Zuständen $A(\epsilon)$ mit einer kleineren Energie als ϵ ist gegeben als das Kugelvolumen im Impulsraum $4\pi/3 [p(\epsilon)]^3 = 4\pi/3(2m\epsilon)^{3/2}$ geteilt durch das Einheitsvolumen $(2\pi\hbar)^3$, welches ein Quantenzustand im Phasenraum einnimmt [33]. Definiert man die Zustandsdichte $a(\epsilon)$ für ein freies Teilchen der Masse m damit über

$$a(\epsilon) d\epsilon = dA(\epsilon) \rightarrow a(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} A(\epsilon) = \frac{d}{d\epsilon} \left(V \frac{4\pi}{3} \frac{(2m\epsilon)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \right) = \frac{Vm^{3/2}}{\sqrt{2}\pi^2\hbar^3} \epsilon^{1/2}, \quad (2.4)$$

so stellt man fest, dass der Grundzustand $\epsilon = 0$ mit 0 gewichtet wird. Die Anzahl angeregter Teilchen N_{ex} ergibt sich dann zu

$$N_{\text{ex}} = \int_0^\infty d\epsilon a(\epsilon) \langle n_\epsilon \rangle \stackrel{(2.3)}{=} \int_0^\infty d\epsilon a(\epsilon) \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/k_B T} - 1} \quad (2.5)$$

und wird für $\mu = 0$ maximal. Solange $N_{\text{ex}} > N$ können alle Teilchen des Ensembles in angeregten Zuständen untergebracht werden. Unterhalb einer kritischen Temperatur T_c gilt $N_{\text{ex}} < N$ und der Grundzustand mit der Teilchenzahl $N_0 = N - N_{\text{ex}} > 0$ wird makroskopisch besetzt. Es kommt zur Bose-Einstein-Kondensation. Die kritische Tem-

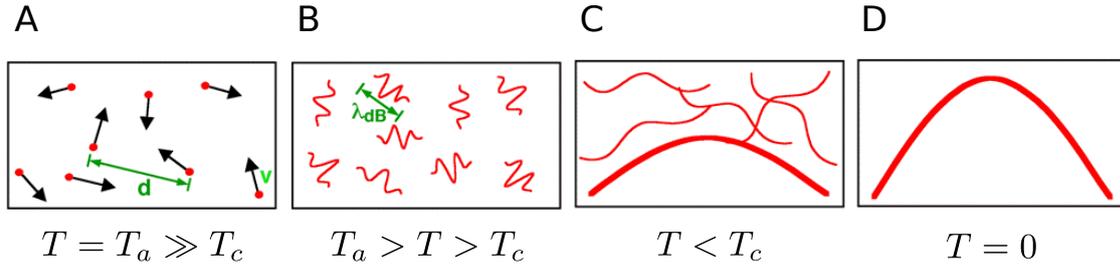


Abbildung 2.1: Illustration zur Bose-Einstein-Kondensation. **A:** Temperatur $T = T_a$ deutlich oberhalb der kritischen Temperatur (klassischer Fall). **B:** Bei sinkender Temperatur $T < T_a$ verlängert sich die thermische De-Broglie Wellenlänge λ_{dB} . **C:** Temperatur im Bereich der kritischen Temperatur (Überlapp der Wellenpakete, Übergang zum Bose-Einstein-Kondensat). **D:** Bei verschwindender Temperatur kondensiert das Gas vollständig (reines Bose-Einstein-Kondensat). Entnommen und bearbeitet aus Referenz [36].

peratur T_c entspricht derjenigen Temperatur, bei der die Gesamtzahl der Bosonen N noch in angeregten Zuständen untergebracht werden kann,

$$N = N_{\text{ex}}(T_c, \mu = 0) = \int_0^\infty d\epsilon a(\epsilon) \frac{1}{e^{\epsilon/k_B T_c} - 1}. \quad (2.6)$$

Mit der Beziehung

$$\int_0^\infty dx \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1} = \Gamma(\alpha) \zeta(\alpha) \quad (2.7)$$

und dem Wert $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ für die Gammafunktion ergibt sich schliesslich für freie Teilchen (2.4) in einem Boxvolumen V die kritische Temperatur

$$T_c = \frac{2\pi}{[\zeta(3/2)]^{2/3}} \frac{\hbar^2 n^{2/3}}{mk_B} \quad (2.8)$$

mit dem Wert $\zeta(3/2) \approx 2,612$ für die Riemannsche Zetafunktion [33].

Ein alternativer Ansatz vergleicht die mittlere freie Weglänge des Teilchens d , welche von der Größenordnung $\sim n^{-1/3}$ ist, mit der thermischen De-Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_T = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2}. \quad (2.9)$$

Der Übergang zum Bose-Einstein-Kondensat ist vereinfacht in Abbildung 2.1 dargestellt. Für hohe Temperaturen T (Abb. 2.1A) ist die thermische De-Broglie-Wellenlänge λ_T kurz und das Gas kann klassisch beschrieben werden. Bei sinkender Temperatur

steigt die Wellenlänge λ_T (Abb. 2.1B), bis sie ab der kritischen Temperatur T_c vergleichbar mit der mittleren freien Weglänge ist (Abb. 2.1C),

$$\lambda_T (T = T_c) = \lambda_{T_c} \sim n^{-1/3} \rightarrow T_c = C_1 \cdot \frac{2\pi\hbar^2 n^{2/3}}{mk_B} \quad (2.10)$$

mit der Konstanten C_1 , die sich beim Vergleich mit (2.8) zu $C_1 = [\zeta(3/2)]^{-2/3}$ ergibt. Weiterhin lässt sich eine kritische Phasenraumdichte

$$D_c = n(\lambda_{T_c})^3 \stackrel{(2.8)}{=} \zeta(3/2) \approx 2,612 \quad (2.11)$$

über die De-Broglie-Wellenlänge angeben. Der Anteil an kondensierten Atomen

$$N_0/N \stackrel{(2.5),(2.6)}{=} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)\right)^{3/2} \quad (2.12)$$

nimmt mit sinkender Temperatur zu, bis schließlich für $T = 0$ das atomare Gas vollständig kondensiert ist (Abb. 2.1D).

Für ein atomares Gas innerhalb einer paraboloiden Falle

$$V_{ext}(x, y, z) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) \quad (2.13)$$

ändert sich die Zustandsdichte $a(\epsilon)$ und es gilt für die kritische Temperatur

$$T_{c,harm} = \frac{\hbar\bar{\omega}N^{1/3}}{k_B [\zeta(3)]^{1/3}} \approx 0,045N^{1/3} (\bar{f}/\text{Hz}) \text{ nK} \quad (2.14)$$

mit dem geometrischen Mittel $\bar{\omega} = 2\pi\bar{f} = 2\pi(f_x f_y f_z)^{1/3}$ der Fallenfrequenzen f_i der harmonischen Falle und der Apéry-Konstanten $\zeta(3) \approx 1,202$ [37]. Nimmt man eine mittlere Fallenfrequenz von 50 Hz und eine Atomzahl von $5 \cdot 10^4$ am Ende der evaporativen Kühlung in der optischen Dipolfalle an, so ergibt sich mit (2.14) eine kritische Temperatur von etwa 83 nK.

Streulänge und effektive Wechselwirkung im atomaren Bose-Gas

In den bisherigen Überlegungen zur Bose-Einstein-Kondensation wurde ein wechselwirkungsfreies Gas angenommen. Im Falle der Bose-Einstein-Kondensation von Alkaliatomen werden oft dünne Gase verwendet, bei denen der mittlere Abstand zwischen zwei Atomen groß gegenüber den relevanten Längenskalen der Atom-Atom-Wechselwirkung ist. In diesem Falle wird die interatomare Wechselwirkung auf die Streuung zweier Atome im Rahmen der s -Wellenstreuung reduziert und Drei-

Körper-Stöße und Prozesse höherer Ordnung vernachlässigt. Die Lösung der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung lautet dann

$$\psi(r) = \text{const} \frac{\sin(r - a_s)}{r}, \quad (2.15)$$

mit dem Abstand r zwischen den Stoßpartnern [38]. Die Streulänge a_s leitet sich über das Streupotential ab, welches sich über die Stoßpartner ergibt. Im Falle attraktiver Wechselwirkung ist $a_s < 0$, bei Repulsion $a_s > 0$. Im Rahmen der Born-Näherung kann das Wechselwirkungspotential des Zweikörperstoßes in einem dünnen atomaren Gas durch eine Deltafunktion der Amplitude $2\pi\hbar^2 a_s / m_r$ mit der reduzierten Masse m_r beschrieben werden [39]. Sind die Stoßpartner identisch und der Abstand $r = |\mathbf{r}|$ zwischen zwei Atomen groß gegenüber a_s (aber klein gegenüber allen anderen charakteristischen Längen wie thermische De-Broglie-Wellenlänge, mittlerer Abstand der Atome im Gas etc.), so ergibt sich die effektive Wechselwirkungspotential zu

$$U(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{4\pi\hbar^2 a_s}{m} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = U_0 \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.16)$$

mit der Masse m des Atoms und dem Ort $\mathbf{r}_{i,j}$ des Teilchens i, j (es wurde verwendet, dass $m_r = m/2$). Die Größe U_0 wird effektive Wechselwirkung genannt [33].

Für Alkaliatome lässt sich das Problem allgemein nicht auf das Problem identischer Stoßpartner reduzieren, da es im elektronischen Grundzustand mehrere Hyperfeinzustände gibt [40]. Da die Hyperfeinenergieniveaus über externe Magnetfelder durch den Zeeman-Effekt verschoben werden, kann die effektive Streulänge mittels sogenannter Feshbach-Resonanzen angepasst werden, bei denen ein gebundener Zustand niedriger Energie die Streuung entscheidend beeinflusst [41].

Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung [42, 43] beschreibt ein Bose-Gas bei Temperatur $T = 0$, bei der die Streulänge a_s aus (2.15) deutlich kleiner als der mittlere interatomare Abstand ist. Sie kann aus dem Hartree-Fock-Ansatz hergeleitet werden [33, 44]. Hierbei wird die Vielteilchenwellenfunktion Ψ_N als symmetrisiertes Produkt der Einteilchenwellenfunktionen genähert, welche im Falle eines vollständig kondensierten Bose-Gases ($T = 0$) gerade dem Grundzustand $\phi_0(\mathbf{r})$ entspricht,

$$\Psi_N(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi_0(\mathbf{r}_i). \quad (2.17)$$

Dieser Ansatz beinhaltet noch nicht die Wechselwirkung zweier Bosonen, die sich nahe kommen. Diese wird nun mit der effektiven Wechselwirkung U_0 aus (2.16) berücksichtigt, so dass sich für den Hamilton-Operator des Systems

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}_i) \right] + U_0 \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.18)$$

mit dem externen Potential $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ ergibt. Die Energie des Zustands (2.17), welche gerade dem Erwartungswert des Hamilton-Operators (2.18) entspricht, lautet

$$E = \langle H \rangle_N = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \phi_0(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |\phi_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} U_0 |\phi_0(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (2.19)$$

Sie setzt sich zusammen aus dem kinetischen Term, dem Term für das externe Potential und den Wechselwirkungsterm, bei dem $N(N-1)/2$ gerade die Anzahl an Bosonenpaaren und $\int d\mathbf{r} U_0 |\phi_0(\mathbf{r})|^4$ die Wechselwirkungsenergie für zwei Bosonen im Zustand $\phi_0(\mathbf{r})$ ist [33]. Um das Kondensat als Ganzes zu beschreiben, führt man im nächsten Schritt eine Kondensatwellenfunktion über

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \phi_0(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

ein (N ist die Anzahl an Bosonen im Kondensat), welche auch Ordnungsparameter genannt wird. Aus ihr ergibt sich für die Dichteverteilung im Kondensat

$$n(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2. \quad (2.21)$$

Mit der Näherung $N-1 \approx N$ ist die Energie (2.19) über

$$E(\psi_0) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi_0(\mathbf{r})|^2 + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) |\psi_0(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} U_0 |\psi_0(\mathbf{r})|^4 \right] \quad (2.22)$$

gegeben. Die optimale Form von $\psi_0(\mathbf{r})$ ergibt sich nun über die Lagrange-Funktion $\delta E - \mu \delta N = 0$ mit dem chemischen Potential μ als Lagrange-Multiplikator, damit die Gesamtteilchenzahl $N = \int d\mathbf{r} |\psi_0|^2$ erhalten bleibt [33]. Dies ist gleichbedeutend mit $E - \mu N = 0$ und das Ergebnis lautet

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_0(\mathbf{r}) + V_{\text{ext}}(\mathbf{r}) \psi_0(\mathbf{r}) + U_0 |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \psi_0(\mathbf{r}) = \mu \psi_0(\mathbf{r}). \quad (2.23)$$

Diese Gleichung ist die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung. Sie entspricht der Schrödinger-Gleichung mit einem externen Potential $V_{\text{ext}}(\mathbf{r})$ und einem nicht-linearen Term $U_0 |\psi_0(\mathbf{r})|^2$, welcher als mittleres Feld der anderen Bosonen interpretiert werden kann (*mean field theory*). Aufgrund der Wechselwirkung ergibt sich bei

der Gross-Pitaevskii-Gleichung als Eigenwert das chemische Potential μ und nicht die mittlere Energie pro Boson (wie es bei der Einteilchen-Schrödinger-Gleichung der Fall ist). Die Gross-Pitaevskii-Gleichung kann oft nur numerisch gelöst werden.

Thomas-Fermi-Näherung

In einem harmonischen Fallenpotential (2.13) mit den Fallenfrequenzen ω_i erwartet man ohne Berücksichtigung der Wechselwirkung, dass das Bose-Gas die Radien

$$r_{\text{osc},i} = \left(\frac{\hbar}{m\omega_i} \right)^{1/2} \quad (2.24)$$

einnimmt. Im Experiment wird hingegen üblicherweise eine größere Ausdehnung des Kondensats beobachtet. Um diese Diskrepanz zu verstehen liefert die Gaußsche Variationsmethode eine einfache Abschätzung des Energieanteils, welcher aus der repulsiven Wechselwirkung im harmonischen Oszillator resultiert [33]. Sie lautet in einer Dimension

$$\frac{E_{\text{int}}}{N} \sim \hbar\omega \left(\frac{Na_s}{r_{\text{osc}}} \right)^{2/5} \quad (2.25)$$

mit der Streulänge a_s aus (2.15). Mit zunehmender Wechselwirkungsstärke Na_s/r_{osc} gewinnt also die Wechselwirkungsenergie an Bedeutung, während die kinetische Energie zunehmend vernachlässigt werden kann. Die Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.23) vereinfacht sich dann zu

$$\left[V(\mathbf{r}) + U_0 |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \right] \psi_0(\mathbf{r}) = \mu \psi_0(\mathbf{r}) \quad (2.26)$$

und liefert einen relativ einfachen Ausdruck für die Dichteverteilung (2.21),

$$n(\mathbf{r}) = |\psi_0(\mathbf{r})|^2 = \begin{cases} [\mu - V(\mathbf{r})] / U_0 & \text{für } (\mu - V(\mathbf{r})) \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.27)$$

Das Kondensat wird als ein gleichförmiges Gas der lokalen Dichte $n(\mathbf{r})$ genähert. Die Näherung (2.26) ist als Thomas-Fermi-Näherung bekannt, in Analogie zum Thomas-Fermi-Atommodell [45, 46]. Für das harmonische Potential (2.13) nimmt das Bose-Gas mit repulsiver Wechselwirkung in Thomas-Fermi-Näherung eine parabolische Form an. Die Ausdehnung des Kondensats ist über $\mu = V_{\text{ext}}$ festgelegt und der Thomas-Fermi-Radius R ergibt sich zu

$$R = 15^{1/5} \left(\frac{Na_s}{r_{\text{osc}}} \right)^{1/5} r_{\text{osc}} \approx 1,719 \cdot \left(\frac{Na_s}{r_{\text{osc}}} \right)^{1/5} r_{\text{osc}} \quad (2.28)$$

und ist damit typischerweise größer als der Radius r_{osc} , den das Kondensat ohne Wechselwirkung im harmonischen Oszillator einnimmt [33]. Die Thomas-Fermi-Näherung liefert jedoch keine guten Ergebnisse für Dichteverteilung am Rand des Kondensats, wo die kinetische Energie eine zunehmende Rolle spielt.

2.2 Optisches Kühlen und Fangen atomarer Gase

Um kollektive Effekte wie die Bose-Einstein-Kondensation experimentell beobachten zu können, muss das atomare Bose-Gas unter die kritische Temperatur gekühlt werden, die typischerweise im Mikro- bzw. Nanokelvinbereich liegt (siehe Abschnitt 2.1). Dies gelingt in der Regel nur mit einer Kombination aus optischen Kühlmethoden und verschiedenen Atomfallen. Während die Verdünnungskühlung in Mischkryostaten Temperaturen im Millikelvinbereich erreicht [47], werden mit Verfahren der Laser- und evaporativen Kühlung Gase neutraler Atome mit Temperaturen von einigen 10-100 Nanokelvin oder unter hohem Aufwand bis in den Pikokelvinbereich erzeugt (siehe z.B. [48, 49]).

Oft werden im ersten Schritt Atome in eine magneto-optische Falle geladen, deren Prinzip auf der Idee der Laserkühlung basiert [50]. Während der bei der Absorption übertragene Impuls auf ein Atom in Richtung des Photonimpulses zeigt, erfolgt die spontane Reemission eines Photons isotrop, so dass im statistischen Mittel über viele Absorptions- und Reemissionsprozesse nur der Impulsübertrag der Absorption übrig bleibt. Bei zwei gegenläufigen Laserstrahlen, deren Licht rotverstimmt zur Absorptionslinie des Atoms ist, erscheint der der Bewegungsrichtung des Atoms gegenläufige Laserstrahl aufgrund der Doppler-Verschiebung resonanter und das Atom wird abgebremst. Dieses Konzept der Doppler-Kühlung wurde von Ashkin 1978 zum Fangen von Atomen vorgeschlagen [51] und in seiner dreidimensionalen Erweiterung, die auch als optische Molasse bekannt ist, 1985 von Chu et al. experimentell demonstriert [52]. In der Betrachtung des Atoms als Zweiniveausystem ergibt sich als erwartete untere Grenze der Doppler-Kühlung die Doppler-Temperatur, welche sich über die natürliche Lebensdauer des angeregten Zustands herleitet und dem Punkt entspricht, an dem die Aufheizung durch die spontane Emission gerade die Doppler-Kühlung kompensiert [53]. Die im Experiment gemessene Temperatur unterschreitet die Doppler-Temperatur um eine Größenordnung [52]. Das Messergebnis wird erst bei der Betrachtung des Atoms als Mehrniveausystem verständlich. Wird das Mehrniveausystem berücksichtigt, wie z.B. bei der Sisyphus- oder Polarisationsgradientenkühlung, welche von Dalibard und Cohen-Tannoudji [54] formuliert wurde, so sind Temperaturen bis herab zur Rückstoßtemperatur, die über die Energie eines Rückstoßes bei der Photonemission gegeben ist, erreichbar.

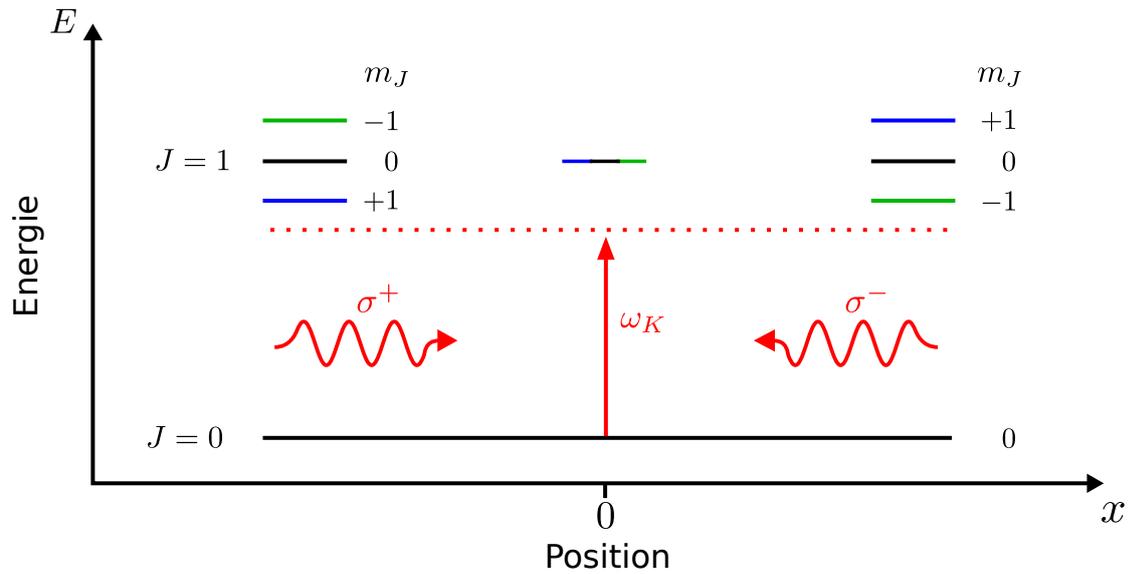


Abbildung 2.2: Skizze zum Prinzip der magneto-optischen Falle. σ^\pm polarisiertes Laserlicht der Frequenz ω_K , welches rotverstimmt (gekennzeichnet durch rote gepunktete Linie) zum Übergang des Atoms von $J=0$ nach $J=1$ ist (durchgezogene Linien), wird aus $\pm x$ -Richtung eingestrahlt. Durch den Zeeman-Effekt verschieben sich die Energieniveaus mit $J=1$. Für $m_J=+1$ (blau) verschiebt der Zeeman-Effekt die Energie nach unten für $x < 0$ und nach oben für $x > 0$. Für $m_J=-1$ (grün) ist das Vorzeichen der Energieverschiebung genau umgekehrt. Durch diese Konfiguration wird bevorzugt σ^\pm polarisiertes Licht von links/rechts absorbiert.

Im vorliegenden Experiment wird ein Bose-Einstein-Kondensat aus Rubidiumatomen (^{87}Rb) erzeugt. Für den im Experiment verwendeten Kühllaserübergang der Rubidium D2-Linie ergibt sich die Doppler-Temperatur zu etwa $T_D = 146 \mu\text{K}$ und die Rückstoßtemperatur zu etwa $T_r = 362 \text{nK}$ (Vakuumwellenlänge der D2-Linie und Lebensdauer des angeregten Zustands $|5P_{3/2}\rangle$ aus [55], Rubidiummasse (^{87}Rb) aus [56], zur Berechnung siehe z.B. [57]). Um noch tiefere Temperaturen zu erreichen, sind andere Methoden wie die der Verdampfungskühlung oder der Raman-Kühlung notwendig. Die im Experiment verwendeten Methoden, die Laserkühlung in der magneto-optischen Falle und die Verdampfungskühlung in der optischen Dipolfalle, werden in diesem Abschnitt vorgestellt. Einen guten Überblick über die verschiedenen optischen Kühlverfahren und die Grundlage der gewählten Darstellung liefert [57].

Magneto-optische Falle

Die magneto-optische Falle (MOT) stellt eine Erweiterung der optischen Molasse dar. Wie von Ashkin und Gordon gezeigt, ist eine aus einer fixen Anordnung von Laserstrahlen gebildete optische Falle, welche nur auf Absorption und spontaner Emission

beruht, fundamental instabil (optisches Earnshaw-Theorem) [58]. Bei der optischen Molasse existiert zwar eine dissipative Kraft in alle Raumrichtungen, jedoch keine Rückstellkraft zum Fallenzentrum, so dass die optische Molasse keine Atomfalle im eigentlichen Sinne bildet. Atome können weiterhin aus den Laserstrahlen diffundieren und so die optische Molasse verlassen. Bei der magneto-optischen Falle wird die optische Molasse um einen linearen Magnetfeldgradienten erweitert und σ^\pm -polarisiertes Licht verwendet. Das Prinzip ist in einer Dimension für einen Übergang von $J = 0$ zu $J' = 1$ in Abbildung 2.2 skizziert. Für nicht zu hohe Magnetfelder ist die Zeeman-Verschiebung in guter Näherung proportional zum Magnetfeld, so dass die Energieniveaus $|J' = 1, m'_j = \pm 1\rangle$ linear vom Ort abhängen. Es wird nun σ^\pm -polarisiertes Licht der Frequenz ω_K in $\pm x$ -Richtung eingestrahlt und damit die Übergänge $\Delta m_j = \pm 1$ getrieben. Für ein Atom mit positiver x -Koordinate ist das σ^- -polarisierte Licht resonanter als das σ^+ -polarisierte Licht, so dass es eine Rückstellkraft in Richtung Fallenzentrum erfährt. Analoges gilt für die entgegengesetzte Raumrichtung. Atome in der magneto-optischen Falle erfahren also sowohl eine geschwindigkeitsabhängige Kraft (durch die Doppler-Kühlung) als auch eine zum Fallenzentrum gerichtete Rückstellkraft (durch die Kombination aus Magnetfeldgradient und der zirkularen Polarisation des Lichts).

Für die Realisierung dieser Idee in drei Raumrichtungen genügt die Kombination aus drei gegenläufigen orthogonalen Laserstrahlen mit entgegengesetzter zirkularer Polarisation und einem Spulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration, welches den Magnetfeldgradienten in allen Raumrichtungen erzeugt. Die Symmetrieachse der Spulen wird oft mit einer der drei Achsen der Laserstrahlen zusammengelegt und heißt dann Hauptachse. Das Fallenzentrum entspricht dem Magnetfeldnullpunkt der Spulen. Durch zusätzliche Magnetfeldspulenpaare in Helmholtz-Konfiguration (*Offsetspulen*) kann der Magnetfeldnullpunkt in allen drei Raumrichtungen verschoben werden. Die erste experimentelle Realisierung einer magneto-optischen Falle gelang 1987 durch Chu, Pritchard et al. [59].

Optisches Dipolfallenpotential

Die Doppler-Kühlung beruht auf einer abwechselnden Folge von Absorption und spontaner Emission und lässt sich als dissipative Kraft auf die Atome beschreiben [57]. Im Gegensatz dazu beruht das Prinzip der optischen Dipolfalle auf der Wechselwirkung zwischen dem Laserlichtfeld und dem induzierten Dipolmoment des Atoms [60, 61]. Diese Wechselwirkung hat eine Verschiebung der potentiellen Energie des Atoms zur Folge, welche auch als dynamische Stark-Verschiebung bekannt ist [62]. Führt diese Verschiebung räumlich zu einem Potentialminimum, so ergibt sich das Fallenpotential der optischen Dipolfalle. Im Gegensatz zur magneto-optischen Falle ist die optische Dipolfalle eine konservative Falle. Die typische Fallentiefe beträgt we-

nige mK und ist damit vergleichsweise gering, so dass meistens eine Präparation der Atome (z.B. durch Kühlung in der magneto-optischen Falle) vorab notwendig ist, um Atome effizient in die Dipolfalle zu laden. Bei den ersten Experimenten zur Dipolfalle 1986 wurden Atome aus einer optischen Molasse in die Dipolfalle umgeladen [63]. Der Abschnitt beginnt mit einer klassischen Betrachtung des Dipolfallenpotentials und geht dann zur quantenmechanischen Sichtweise über. Die Argumentation folgt weitestgehend [64]. Es folgt eine Erläuterung der Verdampfungskühlung.

Klassisches Modell

Ein klassisches Laserlichtfeld, beschrieben durch das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}E(\mathbf{r})e^{-i\omega_l t} + c.c., \quad (2.29)$$

welches in Richtung des Einheitsvektor $\hat{\mathbf{e}}$ schwingt, induziert ein entsprechendes Dipolmoment

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}p(\mathbf{r})e^{-i\omega_l t} + c.c. \quad (2.30)$$

auf das Atom, welches mit der treibenden Frequenz ω_l schwingt. Die beiden Größen sind über die komplexe Polarisierbarkeit α miteinander verknüpft,

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad (2.31)$$

wobei α allgemein tensorieller Natur ist. Für ein isotropes Medium kann α als komplexer Skalar beschrieben werden. Wie später bei Betrachtung der dynamischen Stark-Verschiebung für die D-Liniendoublets der Alkaliatome klar wird, trifft dieser Punkt für Rubidiumatome (^{87}Rb) zu [65]. Das Wechselwirkungspotential des induzierten Dipolmoments \mathbf{p} im Lichtfeld \mathbf{E} ist dann

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\langle\mathbf{p}\mathbf{E}\rangle_t = -\frac{1}{2\epsilon_0 c}\text{Re}(\alpha)I(\mathbf{r}), \quad (2.32)$$

wobei der Faktor $-\frac{1}{2}$ berücksichtigt, dass das Dipolmoment induziert und nicht permanent ist, $\langle\cdot\rangle_t$ die zeitliche Mittelung meint und $I(\mathbf{r}) = 2\epsilon_0 c|E(\mathbf{r})|^2$ die Intensität des Laserlichts (2.29) angibt. Klassisch kann das Wechselwirkungspotential als der Anteil der Dipolschwingung interpretiert werden, welcher in Phase zum Laserlichtfeld ($\propto \text{Re}(\alpha)$) schwingt. Das Wechselwirkungspotential ist proportional zur Intensität $I(\mathbf{r})$ und hat für $\text{Re}(\alpha) > 0$ die Form eines Fallenpotentials, wobei das Fallenzentrum gerade mit dem im Intensitätsmaximum zusammenfällt. Der Gradient des Wechselwirkungspotentials wird als Dipolkraft bezeichnet.

Die Leistung P_{abs} , welche vom oszillierenden Dipolmoment absorbiert wird, ergibt sich zu

$$P_{\text{abs}}(\mathbf{r}) = \langle \dot{\mathbf{p}}\mathbf{E} \rangle_t = \frac{\omega_l}{2\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Klassisch entspricht dies dem Anteil der Dipolschwingung, der gegen die Phase des Laserlichtfelds ($\propto \text{Im}(\alpha)$) schwingt. Die absorbierte Leistung kann als Streuung, d.h. zyklische Abfolge von Absorption und spontaner Emission von Photonen der Energie $\hbar\omega_l$ interpretiert werden. Für die Streurrate $\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r})$ bedeutet das

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{P_{\text{abs}}(\mathbf{r})}{\hbar\omega_l} = \frac{1}{\hbar\epsilon_0 c} \text{Im}(\alpha) I(\mathbf{r}). \quad (2.34)$$

Wie auch das Dipolfallenpotential (2.32) hängt die Streurrate vom Intensitätsprofil $I(\mathbf{r})$ und von der atomaren Polarisierbarkeit α ab, für die im Folgenden ein Ausdruck gefunden werden soll. Als klassischen Ansatz wählt man dazu das Oszillatormodell nach H. Lorentz [64]. In diesem Modell ist das Elektron der Ladung e mit der Masse m_e elastisch mit der Eigenfrequenz ω_0 , welche der optischen Übergangsfrequenz entspricht, an den Atomkern gebunden. Über die Larmorsche Formel [66] ergibt sich über die abgestrahlte Dipolstrahlung des Lorentz-Oszillators für die Dämpfung

$$\Gamma_\omega = \frac{e^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 m_e c^3} \quad (2.35)$$

mit der Frequenz ω des Oszillators. Über die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + \Gamma_\omega \dot{x} + \omega_0^2 x = -eE(t) \quad (2.36)$$

lässt sich mit (2.31) ein Ausdruck für die atomare Polarisierbarkeit angeben,

$$\alpha = \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_\omega} = 6\pi\epsilon_0 c^3 \frac{\Gamma/\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i(\omega^3/\omega_0^2)\Gamma} \quad (2.37)$$

mit der Dämpfungsrate $\Gamma = (\omega_0/\omega)^2 \Gamma_\omega$ am Ort der Resonanz. Setzt man dieses Ergebnis in die Gleichungen für das Dipolfallenpotential (2.32) und die Streurrate (2.34) ein (und vernachlässigt den Term $\propto (\Gamma/\omega_0)^2$), so ist

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = -\frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right) I(\mathbf{r}), \quad (2.38)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{\Gamma}{\omega_0 - \omega} + \frac{\Gamma}{\omega_0 + \omega} \right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (2.39)$$

Neben der üblichen Resonanz bei $\omega = \omega_0$ gibt es einen weiteren resonanten Fall bei $\omega = -\omega_0$, der gegenrotierend genannt wird. In der Drehwellennäherung wird dieser

gegenrotierende Term unter der Annahme, dass die Verstimmung $|\Delta| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ nicht zu groß im Vergleich zur treibenden Frequenz ω_0 ist, vernachlässigt [67]. Weiterhin nähert man $(\omega/\omega_0) \approx 1$ und findet damit einfache Ausdrücke für Dipolfallenpotential und Streurrate,

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\mathbf{r}), \quad (2.40)$$

$$\Gamma_{\text{sc}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\hbar\omega_0^3} \left(\frac{\Gamma}{\Delta}\right)^2 I(\mathbf{r}). \quad (2.41)$$

Während also sowohl die Potentialtiefe als auch die Streurrate linear mit der Intensität ansteigen, ist die Potentialtiefe antiproportional zur Verstimmung Δ , während die Streurrate antiproportional zu Δ^2 ist. Üblicherweise werden daher experimentell hohe Verstimmungen bei hoher Intensität für das Laserlicht der Dipolfalle gewählt, um die Streurrate bei vergleichbarer Dipolfallentiefe zu minimieren. Weiterhin zeigt (2.40), dass für rotverstimmttes Laserlicht ($\Delta > 0$) die Atome zum Intensitätsmaximum (bei einem Gaußschen Strahlprofil zur Strahlmitte), für blauverstimmttes Laserlicht ($\Delta < 0$) zum Intensitätsminimum gezogen werden.

Quantenmechanisches Modell

Um eine Lösung für das Dipolfallenpotential bei quantenmechanischer Betrachtung zu erhalten, kann die Energieniveaushiftung ΔE_i des i ten Energieniveaus eines Atoms, welches einem fernverstimmtten Laserfeld ausgesetzt ist, im Rahmen der zeitunabhängigen Störungstheorie zweiter Ordnung bestimmt werden,

$$\Delta E_i = \sum_{i \neq j} \frac{|\langle j | H_{\text{int}} | i \rangle|^2}{\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j}, \quad (2.42)$$

wobei $H_{\text{int}} = -\hat{\mu}\mathbf{E}$ den Wechselwirkungsoperator mit dem elektrischen Dipoloperator $\hat{\mu} = -e\mathbf{r}$ und $\mathcal{E}_{i,j}$ die Energien des ungestörten Atoms bezeichnet (siehe z.B. [68]). Das Problem wird im Rahmen des Jaynes-Cummings-Modells gelöst [69]. Die Idee des Modells ist es, das Atom und das Lichtfeld als kombiniertes System (*dressed states*) zu betrachten [70]. Im Grundzustand verschwindet die innere Energie des Atoms, während die des Lichtfelds $N\hbar\omega$ über die Anzahl der Photonen N gegeben ist. Für den ungestörten Zustand ergibt dies die Gesamtenergie $\mathcal{E}_i = N\hbar\omega$. Wird ein Atom über die Absorption eines Photons auf die Energie $\hbar\omega_0$ angeregt, so ergibt sich für die Energie

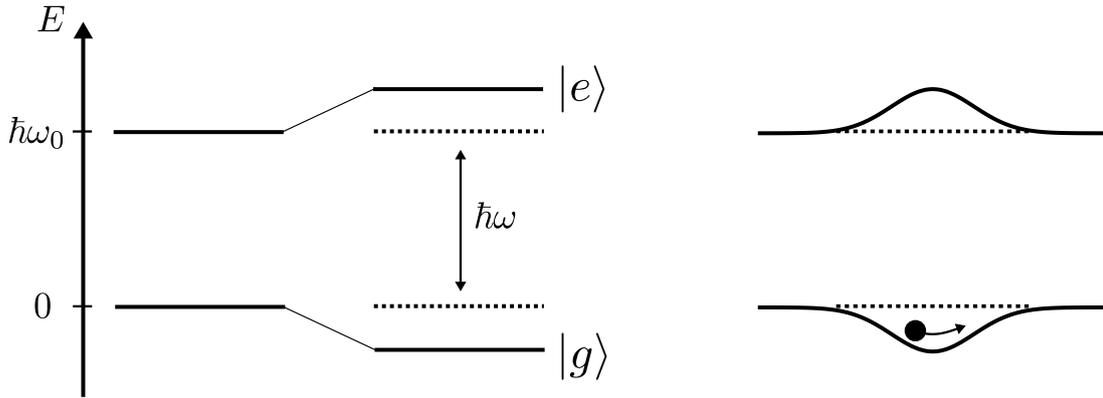


Abbildung 2.3: Skizze zur dynamischen Stark-Verschiebung. Die Licht-Dipolwechselwirkung verschiebt die Energieniveaus proportional zur Intensität mit umgekehrten Vorzeichen. Für den Grundzustand ergibt sich daher eine Potentialmulde am Intensitätsmaximum (rechte Seite). Abbildung entnommen und bearbeitet aus [64].

nach der Absorption $\mathcal{E}_j = \hbar\omega_0 + (N - 1)\hbar\omega = -\hbar\Delta_{ij} + N\hbar\omega$. Die Energiedifferenz ist dann $\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_j = \hbar\Delta_{ij}$. Beim Zweiniveaumatom ergibt sich die Energieverschiebung

$$\Delta E = \pm \frac{|\langle e|\mu|g\rangle|^2}{\hbar\Delta} |E(\mathbf{r})|^2 = \pm \frac{3\pi c^2 \Gamma}{2\omega_0^3 \Delta} I(\mathbf{r}), \quad (2.43)$$

wobei $I(\mathbf{r}) = 2\epsilon_0 c |E(\mathbf{r})|^2$ und $\Gamma = \left[\omega_0^3 / (3\pi\epsilon_0 \hbar c^3) \right] |\langle e|\mu|g\rangle|^2$ verwendet wurde [64]. Sie hat ein umgekehrtes Vorzeichen für den angeregten und den Grundzustand. Beim Vergleich mit (2.40) fällt auf, dass die Energieverschiebung des Grundzustands genau dem (klassischen) Dipolfallenpotential entspricht. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.3 skizziert. Diese optisch induzierte Verschiebung wird auch dynamische Stark-Verschiebung oder AC-Stark-Verschiebung genannt.

Bei der analogen, aber komplizierteren Rechnung für das Mehrniveaumatom ergibt sich die dynamische Stark-Verschiebung und damit die Dipolfallenpotentialtiefe als Summe der jeweiligen Beiträge ΔE_j der verschiedenen anregbaren Energieniveaus \mathcal{E}_j zur Verschiebung des Grundniveaus unter Berücksichtigung der jeweiligen Gewichtungskoeffizienten des Dipolübergangs und der jeweiligen Verstimmung Δ_{ij} [64]. Für das Termschema eines S→P Übergangs bei einem Kernspin $I = 3/2$ (wie es z.B. für ^{87}Rb der Fall ist) ergibt sich das bekannte D-Liniendoublett ($^2S_{1/2} \rightarrow ^2P_{1/2}, ^2P_{3/2}$) mit der Feinstrukturaufspaltung $\hbar\Delta_{\text{FS}}$ [40]. Bei einer hohen Verstimmung des Laserlichts der Dipolfalle im Vergleich zur Feinstrukturaufspaltung ($\Delta \gg \Delta_{\text{FS}}$) kann die noch kleinere

Hyperfeinaufspaltung komplett vernachlässigt werden und die Stark-Verschiebung bzw. die Dipolfallenpotentialtiefe vereinfacht sich zu [71]

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3\pi c^2}{2\omega_0^3} \frac{\Gamma}{\Delta} \left(1 + \frac{1}{3} \mathcal{P} g_F m_F \frac{\Delta_{\text{FS}}}{\Delta} \right) I(\mathbf{r}) \quad (2.44)$$

mit der Polarisation \mathcal{P} des Laserlichts der Dipolfalle ($\mathcal{P} = 0, \pm 1$ für π, σ^\pm -Polarisation) und dem Landéfaktor g_F sowie der magnetischen Quantenzahl m_F .

Im vorliegenden Experiment wird zur Erzeugung des Dipolfallenpotentials für die Rubidiumatome (^{87}Rb) Laserlicht der Wellenlänge $\lambda_{\text{dip}} = 10,6 \mu\text{m}$ verwendet, so dass $\Delta_{\text{FS}}/\Delta \approx 0,02$ und die Korrektur zum Ergebnis für das Zweiniveaumatom (2.43) klein werden. Durch die lineare Polarisation des Laserlichts $\mathcal{P} = 0$ verschwindet der Unterschied zwischen den Ergebnissen für die Dipolfallenpotentialtiefe (2.44), (2.43) und (2.40).

Evaporatives Kühlen

Die Verdampfungskühlung (auch evaporative Kühlung) eines atomaren Gases basiert auf dem Zusammenspiel aus dem Entfernen der heißesten Atome aus dem Ensemble und der Rethermalisierung des verbleibenden Gases. Das Prinzip wurde 1987 das erste Mal mit Wasserstoffatomen in einer Magnetfalle [72] und 1997 mit Natriumatomen in einer gekreuzten Dipolfalle demonstriert [73]. Heutzutage ist die evaporative Kühlung die technische Grundlage vieler Experimente zur Erzeugung eines quantenentarteten atomaren Gases.

Um kontrolliert die heißesten Atome aus der Falle zu entfernen, werden bei Magnetfallen Anregungen des Atoms zu Zeeman-Niveaus genutzt, die von der Magnetfalle nicht gehalten werden. Die Anregungsfrequenzen liegen dabei gewöhnlich im Radiofrequenzbereich. Bei der Dipolfalle führt eine gezielte Absenkung der Potentialtiefe, die technisch durch Intensitätsverringern erreicht wird, zur induzierten Evaporation der Atome. Die evaporative Kühlung ist in beiden Fällen mit hohem Atomverlust verbunden, weshalb eine hohe Atomzahl vor Beginn der Evaporation erwünscht ist.

Für eine ausreichend hohe Rethermalisierungsrate ist eine möglichst hohe Dichte des gefangenen Gases nötig. Damit die evaporative Kühlung effizient ablaufen kann, sollte das Verhältnis von inelastischen Stößen zwischen den Atomen, die zum Austritt der Atome aus der Falle führen können, zu elastischen Stößen, die zur Rethermalisierung führen, gering sein. Dieses Verhältnis wird durch das Laden eines atomaren Ensembles im energetischen Grundzustand in die Falle stark begünstigt. Aus analogen Gründen sollte die Stoßrate mit dem Hintergrundgas so gering wie möglich gehalten werden, was ein ultrahohes Vakuum voraussetzt.

Aufgrund der vergleichsweise geringen typischen Potentialtiefe der optischen Dipolfalle findet in den meisten Experimenten eine Vorkühlung des atomaren Gases, z.B. wie im vorliegenden Experiment in einer magneto-optischen Falle, statt. Bei starker Fokussierung des Dipolfallenlaserstrahls ist die erreichte Potentialtiefe und die atomare Dichte in der Falle maximal, das Volumen der Falle hingegen gering, so dass schon allein aus geometrischen Gründen nur ein geringer Anteil der Atome aus der magneto-optischen Falle in die Dipolfalle geladen werden können. Erhöht man das Volumen der Falle durch weniger starke Fokussierung des Laserstrahls, so erhöht sich die Anzahl der Atome in der Falle, aber die atomare Dichte und die elastische Stoßrate nehmen ab. Im Experiment wird ein Kompromiss gefunden, indem der Dipolfallenstrahl über eine räumliche Modulation aufgeweitet und der zeitliche Verlauf der Modulationsamplitude an den Intensitätsverlauf der Evaporation angepasst wird (vgl. Abschnitt 4.2).

2.3 Optisches Gitter

Bisher wurde das Dipolfallenpotential für einen oder zwei sich kreuzende Laserstrahlen behandelt, welches im Falle von Gauß-Strahlen eine harmonische Form annimmt. Betrachtet man zwei gegenläufige Laserstrahlen der gleichen Frequenz und fester relativer Phase zueinander, so bildet sich eine optische Stehwelle aus, d.h. eine periodische Abfolge von Intensitätsminima und Intensitätsmaxima. Bei rotverstimmttem Laserlicht bildet jedes Intensitätsmaximum ein Potentialminimum für die Atome. Dieses System wird als optisches Gitterpotential bezeichnet. Die Idee lässt sich auf zwei bzw. drei sich kreuzende Laserlichtstrahlen erweitern und führt dann zu einer zwei- bzw. dreidimensionalen periodischen Anordnung von Potentialminima, welche manchmal auch wegen der Analogie zur Festkörperphysik als Lichtkristall bezeichnet wird. In diesem Abschnitt werden die Grundlagen des im Experiment realisierten eindimensionalen optischen Gitterpotentials beschrieben. Zunächst wird genauer auf die Dispersionsrelation der Atome in optischen Gitterpotentialen eingegangen, welche sich aus der räumlichen Periodizität des Potentials mit dem Bloch-Theorem [74] ableiten lässt und ein Bändermodell beschreibt, welches die Analogie zur Festkörperphysik deutlich macht [75]. Danach folgt eine Ausführung zur Dynamik der Atome in optischen Gitterpotentialen.

Optisches Gitterpotential

Bei Vernachlässigung des radialen Strahlprofils werden zwei gegenläufige, linear polarisierte Laserlichtstrahlen in $\pm z$ -Richtung mit gleicher Frequenz ω und der Wellen-

zahl $k = 2\pi/\lambda_l$ mit der Wellenlänge λ_l des Laserlichts klassisch durch die ebenen Wellengleichungen

$$\mathbf{E}_1(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_1 E_1 \left[e^{i(\omega t + kz)} + e^{-i(\omega t + kz)} \right], \quad (2.45)$$

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \hat{\mathbf{e}}_2 E_2 \left[e^{i(\omega t - kz)} + e^{-i(\omega t - kz)} \right] \quad (2.46)$$

beschrieben. Die Polarisationsrichtung der Laserstrahlen ist über die Einheitsvektoren $\hat{\mathbf{e}}_{1,2}$ berücksichtigt. Die Intensität ist über $I = c\epsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle_t$ gegeben, wobei $\langle \rangle_t$ die zeitliche Mittelung meint, so dass sich die Gesamtintensität zu

$$\begin{aligned} I(z) &= c\epsilon_0 \langle [\mathbf{E}_1(z, t) + \mathbf{E}_2(z, t)]^2 \rangle_t = c\epsilon_0 \left[\langle \mathbf{E}_1^2 \rangle_t + \langle \mathbf{E}_2^2 \rangle_t + 2 \langle \mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2 \rangle_t \right] \\ &= I_1 + I_2 + \hat{\mathbf{e}}_1 \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos^2(kz) \propto \cos^2(kz) \end{aligned} \quad (2.47)$$

ergibt. Das longitudinale Intensitätsprofil ist die Summe aus einem konstanten Intensitätsanteil und einem Interferenzanteil mit der räumlichen Periode $\lambda_l/2$. Das Potential für die Atome ist analog zu (2.40) proportional zur Intensität, wobei für das effektive Potential nur der Interferenzterm mit räumlicher Abhängigkeit relevant ist, so dass

$$V(z) = \frac{V_0}{2} \cos(2kz) \quad (2.48)$$

mit der Potentialtiefe $V_0 \propto \sqrt{I_1 I_2}$, welche maximal für $\hat{\mathbf{e}}_1 \parallel \hat{\mathbf{e}}_2$ wird.

Die Wechselwirkung des Atoms mit den Laserlichtstrahlen kann auch als zyklische Abfolge von Absorption eines Photons des einen Laserstrahls und der stimulierten Emission eines Photons in den anderen Laserstrahl verstanden werden. Der Prozess ist in Abbildung 2.4A skizziert. Es findet je nach Prozessrichtung ein Impulsübertrag von $\pm 2\hbar k$ auf das Atom statt. Da der Übertrag symmetrisch in beiden Laserstrahlen stattfindet, werden die Atome im Impulsraum periodisch im Abstand $2\hbar k$ angeordnet, was der Beugung an einem Gitter mit der räumlichen Periode $\lambda_l/2$ entspricht. Deshalb wird das effektive Potential für die Atome auch optisches Gitterpotential oder kurz optisches Gitter genannt. Analog zu (2.43) kann das optische Gitterpotential auch in Dipolnäherung für das Zweiniveaumatom bestimmt werden. Eine solche Näherung ist in [30] ausführlicher dargestellt.

Bloch-Theorie und Bändermodell

Um die Dynamik ultrakalter Atome (bzw. eines Bose-Einstein-Kondensats) im optischen Gitterpotential zu untersuchen soll im Folgenden die Dispersionsrelation bestimmt werden. Dazu wird die Lösung der Gross-Pitaevskii-Gleichung (2.23) in einer Dimension mit dem externen Potential (2.48) unter Vernachlässigung der interatomaren Wechselwirkung U_0 bestimmt. Dieser Ansatz ist im vorliegenden Experi-

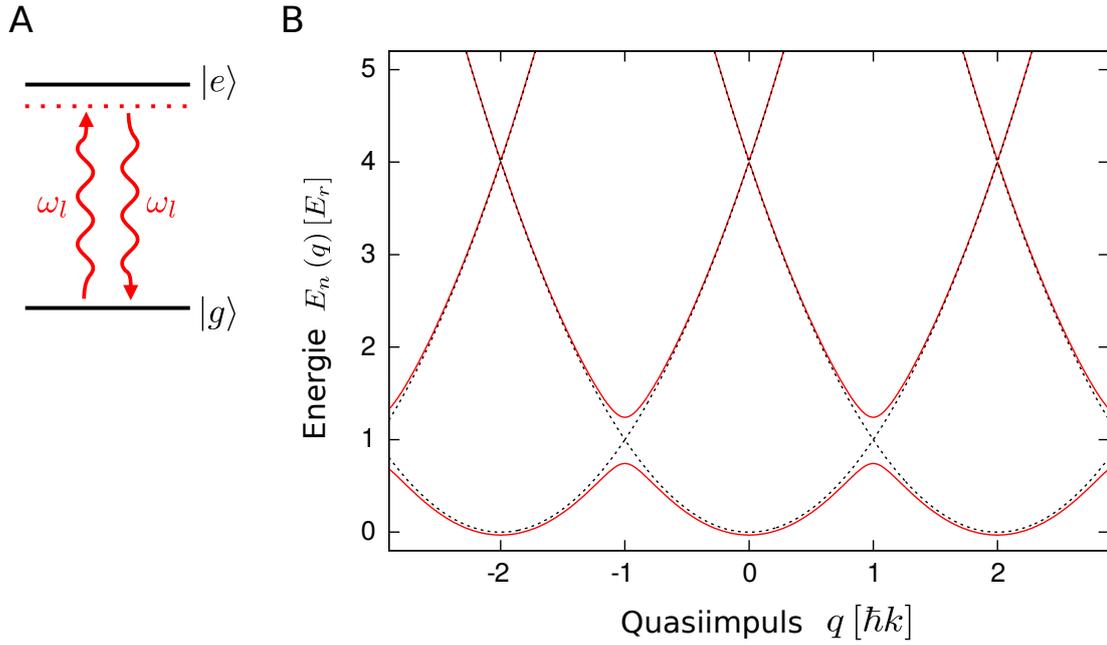


Abbildung 2.4: **A:** Skizze zum Zweiphotonenprozess beim optischen Gitter. Photonen der Frequenz ω_l , welche rotverstimmt zum Übergang $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ sind werden absorbiert und wieder stimuliert emittiert. Eine zyklische Abfolge führt zum optischen Gitterpotential für die Atome. **B:** Erweiterte Energiedispersionsrelation des optischen Gitterpotentials. Ohne das Gitterpotential folgen die Atome Parabeln mit Ursprung $N2\hbar k$, $N \in \mathbb{Z}$ (schwarz gepunktete Linie). Durch die Wechselwirkung mit dem optischen Gittern kommt es zu einer Kopplung nahe der dargestellten Kreuzungspunkte und es ergibt sich eine Energiebandstruktur, die hier für den Fall $V_0 = 1E_r$ aufgetragen ist (rot durchgezogene Linie).

ment in guter Näherung gerechtfertigt, da eine freie Expansionsphase vor dem Einschalten des optischen Gitterpotentials zur Umwandlung der inneren Energie in kinetische Energie führt. Die zu lösende Gleichung vereinfacht sich zur stationären Schrödinger-Gleichung der Form

$$E\psi(z) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(z) \right) \psi(z) \quad (2.49)$$

mit dem Impulsoperator $\hat{p} = i\hbar\partial_z$, der Masse m der Atome und dem externen periodischen Potential (2.48). Nach dem Bloch-Theorem [74] haben die Lösungen $\psi(z)$ notwendigerweise die Form eines Produkts aus einer ebenen Welle in z -Richtung und einer Funktion $u_q(z)$ derselben Periodizität wie das externe Potential $V(z)$. Das Bloch-Theorem ist ein Spezialfall des Floquet-Theorems [76, 77], welches bei der Analyse zeitlich periodisch getriebener Systeme in Kapitel 3.1 verwendet wird. Der Bloch-Ansatz lautet

$$\psi(z) = e^{iqz/\hbar} u_q(z). \quad (2.50)$$

Die ebene Welle $\exp(iqz/\hbar)$ bringt die Analogie zur Bewegung eines freien Teilchens mit Quasiimpuls q zum Ausdruck, dessen Wellenfunktion mit der Periodizität des externen Potentials über die Bloch-Funktion $u_q(z)$ moduliert wird. Mit diesem Lösungsansatz folgt

$$E(q) u_q(z) = \left[\frac{1}{2m} (\hat{p} + q)^2 + V(z) \right] u_q(z). \quad (2.51)$$

Da die räumliche Periodizität des externen Potentials durch die Wellenzahl k bestimmt wird, ist nach Fourier-Entwicklung die Bloch-Funktion über

$$u_q(z) = \sum_{l=-N}^N b_l e^{i2lkz} \quad (2.52)$$

mit der beliebig hohen Zahl $N \in \mathbb{N}$ und den Entwicklungskoeffizienten b_l gegeben (typischerweise genügt für die in diesem Kapitel betrachtete Dynamik $N \leq 5$). Mit

$$V(z) \stackrel{(2.48)}{=} \frac{V_0}{4} (e^{i2kz} + e^{-i2kz}) \quad (2.53)$$

liefert die Fourier-Summe schließlich nach Einsetzen in (2.51)

$$E(q) \sum_{l=-N}^N b_l e^{i2lkz} = \sum_{l=-N}^N \left[\frac{1}{2m} (2l\hbar k + q)^2 + \frac{V_0}{4} (\delta_{-1,l} + \delta_{1,l}) \right] b_l e^{i2lkz}. \quad (2.54)$$

Daraus kann eine Eigenwertgleichung abgeleitet werden, die oft in Matrixform dargestellt wird,

$$E(q) \mathbf{b} = \underline{\mathbf{H}}(q) \mathbf{b} \quad (2.55)$$

mit

$$\underline{\mathbf{H}}(q) = [H_{l,l'}]_{l,l'=-N}^N = \begin{cases} [2l + q/(\hbar k)]^2 E_r & \text{für } l = l' \\ V_0/4 & \text{für } |l - l'| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei die Rückstoßenergie

$$E_r = \hbar^2 k^2 / (2m) \quad (2.56)$$

eingeführt wurde, welche derjenigen Energie entspricht, die das Atom bei der Absorption eines Photons der Wellenlänge λ_l des Laserlichts der optischen Gitterstrahlen aufnimmt (bzw. bei der Emission abgibt). Für numerische Berechnungen bietet sich eine Division der Gleichung durch E_r an, so dass $E(q)$ und V_0 in Einheiten der Rückstoßenergie und q analog dazu in Einheiten des Rückstoßimpulses $\hbar k$ angegeben werden. Die Matrix $\underline{\mathbf{H}}(q)$ entspricht dem Hamilton-Operator des Systems in der Basis $\{|2l\hbar k\rangle\}_{l=-N,\dots,N}$.

Die Dispersionsrelation ist in Abbildung 2.4B ohne externes Potential (gestrichelte Linie) und mit optischen Gitterpotential (durchgezogene Linie) dargestellt. In dieser erweiterten Darstellung zeigen sich bei verschwindender Gitterpotentialtiefe die Parabeln $E(q) = (2l + q/(\hbar k))^2 E_r$ der Lösungen freier Teilchen mit Quasiimpuls q (gestrichelte Linie), welche gerade den Einträgen der Hauptdiagonalen der Matrix $\underline{\mathbf{H}}(q)$ entsprechen. An den Punkten $q = (l_1 + l_2)/2$ kreuzen sich die Parabeln mit $l = l_1, l_2$. Die Energieentartung wird durch die Wechselwirkung mit dem optischen Gitterpotential aufgehoben (durchgezogene Linie). An die Stelle echter Kreuzungen treten vermiedene Kreuzungen und es kommt zur Ausbildung einer Bandstruktur analog zur Dispersionsrelation eines Elektrons im Festkörperkristall [75]. Die Energien $E(q)$ werden daher auch dem Betrag nach in die Energiebänder $E_n(q)$ eingeteilt. Das Energieband niedrigster Energie $E_0(q)$ wird als Grundband, ein Energieband $E_n(q)$ höherer Energie mit $n > 0$ entsprechend als n -tes angeregtes Band bezeichnet. Oft wird die Darstellung der Dispersionsrelation aufgrund der Periodizität der Bandstruktur auf die Region $q \in [-\hbar k, \hbar k]$ beschränkt, welche auch erste Brillouin-Zone heißt. Die Grenzen der Brillouin-Zone werden auch Bandkanten genannt.

Dynamik in optischen Gitterpotentialen

Bisher wurde die stationäre Schrödinger-Gleichung (2.49) mit dem optischen Gitterpotential (2.48) betrachtet. Zur Beschreibung der Dynamik der Atome wird analog die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(z, t) = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{V_0}{2} \cos(2kz) + z \cdot F(t) \right] \psi(z, t) \quad (2.57)$$

mit der externen Kraft $F(t)$ gelöst. Der Bloch-Ansatz (2.50) führt zur Eigenwertgleichung

$$i\hbar\partial_t\mathbf{b}(t) = \underline{\mathbf{H}}(q(t)) \mathbf{b}(t), \quad (2.58)$$

bei der die Koeffizienten $b_l(t)$ und der Quasiimpuls $q(t)$ zeitabhängig sind. Eine analoge Situation wurde von F. Bloch zur Dynamik von Elektronen in Kristallgittern untersucht und es wurde gezeigt, dass sich der Quasiimpuls unter der Wirkung einer schwachen äußeren konstanten Kraft F gemäß

$$q(t) = q_0 + F \cdot t \quad (2.59)$$

mit dem Anfangsquasiimpuls q_0 ändert [74]. Die lineare Änderung des Quasiimpulses führt zu einer Bewegung der Atome in den Energiebändern. Die Gruppen-

geschwindigkeit der Atome im n -ten Energieband $E_n(q)$ ist über die Ableitung nach dem Quasiimpuls q gegeben,

$$v_g(q) = \frac{\partial E_n(q)}{\partial q}. \quad (2.60)$$

Die vermiedenen Kreuzungen in der Bandstruktur stellen für die Atome eine Bandlücke dar, durch die sie quantenmechanisch tunneln oder reflektiert werden können [78, 79]. Wenn der Übergang in höhere Bänder vernachlässigt werden kann, resultiert die Beschleunigung durch die externe Kraft in einer oszillatorischen Bewegung der Atome aufgrund der periodischen Änderung des Quasiimpulses innerhalb eines Energiebands. Die als Bloch-Oszillation bekannte Bewegung eines atomaren Gases wurde in vorangegangenen Arbeiten am vorliegenden Experiment in Multiphotonengittern [30] sowie innerhalb einer Minibandstruktur, die durch ein Fourier-synthetisiertes optisches Gitterpotential erzeugt wurde [80], genauer untersucht.

Ist die Energielücke ΔE zwischen den Bändern klein gegenüber dem Abstand zu höheren Bändern, so kann das System als getriebenes Zweiniveausystem genähert werden. Für das Minibandsystem ist diese Beschreibung in [80] ausführlich behandelt. Die Näherung kann auch an der ersten Bandkante (d.h. $q = \hbar k$) motiviert werden. Dazu wird die Eigenwertgleichung des stationären Systems (2.55)

$$\begin{pmatrix} 9E_r & V_0/4 & 0 & 0 \\ V_0/4 & E_r & V_0/4 & 0 \\ 0 & V_0/4 & E_r & V_0/4 \\ 0 & 0 & V_0/4 & 9E_r \end{pmatrix} \mathbf{b} = E\mathbf{b} \quad (2.61)$$

mit den Eigenenergien $E = E_{0,1,2,3}$ des Grundbands und der ersten beiden angeregten Energiebänder mit

$$E_{0,1,2,3} = 5E_r \pm 4E_r \sqrt{1 \mp \frac{V_0}{16E_r} + \frac{5V_0^2}{1024E_r^2}} \pm \frac{V_0}{8} \approx 5E_r \pm 4E_r \left(1 \mp \frac{V_0}{32E_r}\right) \pm \frac{V_0}{8} \quad (2.62)$$

gelöst, wobei im zweiten Schritt die Taylorentwicklung für den Fall $\Delta E = E_1 - E_0 \ll E_{0,1}$ gültig ist. Die Lösungen

$$E_{0,1} = E_r \pm V_0/4 \quad \rightarrow \Delta E = V_0/2 \quad (2.63)$$

entsprechen exakt der Lösung des Zweiniveausystems

$$\begin{pmatrix} \left(-2 + \frac{q}{\hbar k}\right)^2 E_r & V_0/4 \\ V_0/4 & \left(\frac{q}{\hbar k}\right)^2 E_r \end{pmatrix} \mathbf{b} \stackrel{q=\hbar k}{=} \begin{pmatrix} E_r & V_0/4 \\ V_0/4 & E_r \end{pmatrix} \mathbf{b} = E\mathbf{b} \quad (2.64)$$

und der Abstand zum nächsthöheren Energieband $E_{2,3} - E_0 = 8E_r + V_0/4 \gg \Delta E$, so dass für nicht zu hohe Potentialtiefen V_0 höhere Energiebänder vernachlässigt werden können.

Rabi-Oszillation

Ohne äußere Kraft ($F(t) = 0$) lautet die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (2.58) mit dem Hamilton-Operator (2.64) an der ersten Bandkante ($q = \hbar k$)

$$i\hbar\partial_t\mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} E_r & V_0/4 \\ V_0/4 & E_r \end{pmatrix} \mathbf{b}(t) \quad (2.65)$$

mit den Koeffizienten $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t))$, deren Betragsquadrat die Besetzungswahrscheinlichkeit der beiden Basiszustände $|-2\hbar k\rangle$ und $|0\hbar k\rangle$ angeben. Für ein analoges Zweiniveausystem wird in I.I. Rabis Arbeit zur Spinumklappwahrscheinlichkeit in einem rotierenden Magnetfeld eine sinusförmige Oszillation zwischen den Besetzungswahrscheinlichkeiten vorhergesagt [81]. Die charakteristische Rabi-Frequenz der Oszillation ist über die Energiedifferenz ΔE der beiden Niveaus gegeben,

$$\hbar\Omega_{\text{Rabi}} = \Delta E. \quad (2.66)$$

Der Effekt kann zur experimentellen Bestimmung der Potentialtiefe genutzt werden. Für das vorliegende Experiment lässt sich die Potentialtiefe in Einheiten der Rückstoßenergie E_r mit

$$V_0/E_r = 2\Delta E/E_r = 4\lambda_l^2 m/h \cdot \tau_{\text{Rabi}}^{-1} \approx 540 \mu\text{s} \cdot \tau_{\text{Rabi}}^{-1} \quad (2.67)$$

angeben, wobei die Wellenlänge $\lambda_l = 783,45 \text{ nm}$ des optischen Gitterlasers, die Masse m der Rubidiumatome (^{87}Rb) und das Plancksche Wirkungsquantum h verwendet werden und τ_{Rabi} die beobachtete Periode der Rabi-Oszillation bezeichnet.

Periodisch getriebene optische Gitter und atomare Transportresonanzen

In diesem Kapitel geht es um die Grundlagen des atomaren Transports eines Bose-Einstein-Kondensats in einem zeitlich biharmonisch modulierten optischen Gitterpotential. Das Kapitel beginnt mit einer Einleitung, in welcher der Wechsel zur Floquet-Basis im Falle eines getriebenen optischen Gitterpotentials nachvollzogen wird. Danach wird der zugrunde liegende Transportmechanismus der dissipationsfreien Quantenrutsche und die Grundlagen für das Auftreten und die Manipulation von Transportresonanzen erläutert. Die Darstellung der theoretischen Grundlagen orientiert sich an [31, 82]. Im letzten Abschnitt wird der in den Grundlagen behandelte Transport dem im Experiment beobachtbaren atomaren Transport gegenübergestellt und auf die experimentellen Rahmenbedingungen eingegangen, die in der Simulation berücksichtigt werden müssen, um den atomaren Transport korrekt zu beschreiben.

3.1 Floquet-Theorie eines getriebenen optischen Gitterpotentials

Ausgangspunkt zur Analyse der Dynamik im periodisch getriebenen Gitterpotential ist wie im vorangegangenen Kapitel (siehe 2.57) die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\partial_t\psi(z, t) = \hat{H}(z, t)\psi(z, t) = \left[\frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{V_0}{2} \cos(2kz) + z \cdot F(t) \right] \psi(z, t) \quad (3.1)$$

mit einer periodischen Kraft (Modulation) $F(t+T) = F(t)$, deren zeitliches Mittel verschwindet,

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt F(t) = 0. \quad (3.2)$$

Der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t, t_0)$ beschreibt die zeitliche Entwicklung des Zustands $\psi(z, t_0)$ zum Startzeitpunkt t_0 hin zum Zustand $\psi(z, t_0 + t)$ zum Zeitpunkt $t_0 + t$,

$$\hat{U}(t, t_0) \psi(z, t_0) = \psi(z, t_0 + t). \quad (3.3)$$

Um die zeitliche Periodizität $\hat{H}(z, t+T) = \hat{H}(z, t)$ des Hamilton-Operators zu nutzen, wird eine Basis gesucht, deren Zustände $\phi_j(z, t)$ bis auf einen komplexen Phasenfaktor $\exp(i\varepsilon_j)$ dieselbe zeitliche Periodizität zeigen,

$$\phi_j(z, t+T) = e^{i\varepsilon_j} \phi_j(z, t). \quad (3.4)$$

Die Funktionen $\phi_j(z, t)$ werden Floquet-Zustände des Systems genannt und ergeben sich als Lösung des Eigenwertproblems des Zeitentwicklungsoperators (3.3) zum Startzeitpunkt t_0 nach einer Periode T ,

$$\hat{U}(T, t_0) \phi_j(z, t_0) = \phi_j(z, t_0 + T) = e^{i\varepsilon_j} \phi_j(z, t_0). \quad (3.5)$$

Aufgrund der Analogie zu den Energieeigenwerten der stationären Schrödinger-Gleichung wird die Phase ε_j auch als Quasienergie bezeichnet [83]. Die Quasienergie hängt über

$$\varepsilon_j = (E_j T / \hbar \quad \text{mod } 2\pi) \quad (3.6)$$

mit der Energie E_j zusammen. Es genügt, die Quasienergie auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ zu beschränken, da diese nur bis auf ein additives Vielfaches von 2π bestimmt ist.

Der Lösungsansatz (3.4) basiert auf dem Floquet-Theorem [76, 77]. Wie beim Bloch-Ansatz werden die Eigenzustände des Systems als Produkt einer Funktion derselben Periodizität und einem komplexen Phasenfaktor geschrieben. Die Quasienergie ε_j bildet das Analog zum Quasiimpuls beim Bloch-Theorem (2.50). Der Zeitentwicklungsoperator wird in diesem Zusammenhang auch Floquet-Operator genannt.

Eine erneute Anwendung des Floquet-Operators auf einen Floquet-Zustand hat die Multiplikation der Phase $\exp(i\varepsilon_j)$ zur Folge, so dass auch nach N Perioden der Floquet-Zustand bis auf einen Phasenfaktor erhalten bleibt,

$$\hat{U}(NT, t_0) \phi_j(z, t_0) = e^{iN\varepsilon_j} \phi_j(z, t_0). \quad (3.7)$$

Die Floquet-Zustände bilden eine vollständige, orthonormale Basis [83]. Jede Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung (2.57) für den Zeitpunkt $t_0 + NT$ lässt sich daher als Summe

$$\psi(z, t_0 + NT) = \sum_j c_j(t_0) e^{iN\varepsilon_j} \phi_j(z, t_0) \quad (3.8)$$

schreiben. Die Koeffizienten $c_j(t_0)$ hängen dabei explizit vom Startzeitpunkt t_0 ab. Mittels einer Eichtransformation kann der Hamilton-Operator in (2.57) in einen räumlich periodischen Hamilton-Operator transformiert werden [31]. Dann lassen sich die Floquet-Zustände mittels des Bloch-Theorems in der Bloch-Basis (2.52) entwickeln,

$$\phi_j(z, t) = \sum_{l=-N}^N b_l(t) e^{i2lkz}. \quad (3.9)$$

Im Anhang A wird die Eichtransformation für den Hamilton-Operator in (3.1) nachvollzogen.

3.2 Transportmechanismus und Symmetrien

Eine Symmetrieanalyse des Systems hilft zu verstehen, wann es zu einem Transport der Atome kommen kann. Die Idee basiert auf der klassischen Analyse eines dissipationsfreien räumlich periodischen Systems mit einer externen periodisch treibenden Kraft, welches durch die Langevin-Gleichung

$$\ddot{x} + f(x) + F(t) = 0 \quad (3.10)$$

mit der räumlich periodischen Funktion $f(x + 2\pi) = f(x)$ und der zeitlich periodischen Funktion $F(t + T) = F(t)$ beschrieben wird, deren räumlicher bzw. zeitlicher Mittelwert verschwindet. Gibt es eine Symmetrietransformation, unter der die Langevin-Gleichung invariant bleibt und das Vorzeichen des Impulses wechselt, so kann für jede Trajektorie des chaotischen Phasenraumbereichs über diese Symmetrietransformation eine Trajektorie mit umgekehrten Impuls gefunden werden. Daher verschwindet die mittlere Geschwindigkeit v_{ch} des chaotischen Phasenraumbereichs und es findet kein Transport statt. Im klassischen Fall führt ein Vorzeichenwechsel des Orts x oder der Zeit t zu einem umgekehrten Impuls $p = dx/dt$, so dass die räumliche und die zeitliche Punktsymmetrie gebrochen werden müssen, damit es zu einem Transport kommen kann [11].

Quantenmechanisch ist der Gesamtimpuls der Atome über den Erwartungswert des Impulsoperators

$$p(t) = \langle \psi(t) | \hat{p} | \psi(t) \rangle = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(z', t) \frac{\partial \psi(z', t)}{\partial z} dz' \quad (3.11)$$

gegeben. Die Zustände $\psi(z, t)$, $\psi^*(z, t)$ können nach (3.8) in der Floquet-Basis entwickelt werden, so dass für den Impuls nach N Perioden

$$p(t_0 + NT) = \sum_{j,g} c_j(t_0) c_g^*(t_0) e^{-iN(\varepsilon_j - \varepsilon_g)} \langle \phi_g(t_0) | \hat{p} | \phi_j(t_0) \rangle = p_{\text{asym}}(t_0) + p_{\text{beat}}(N, t_0) \quad (3.12)$$

mit

$$p_{\text{asym}}(t_0) = \sum_j |c_j(t_0)|^2 \langle \phi_j(t_0) | \hat{p} | \phi_j(t_0) \rangle = \sum_j |c_j(t_0)|^2 p_j(t_0) \quad (3.13)$$

$$p_{\text{beat}}(N, t_0) = \sum_{j \neq g} c_j(t_0) c_g^*(t_0) e^{-iN(\varepsilon_j - \varepsilon_g)} \langle \phi_g(t_0) | \hat{p} | \phi_j(t_0) \rangle \quad (3.14)$$

und der Abkürzung $p_j(t)$ für Impuls des Floquet-Zustands ϕ_j nach (3.11) gilt. Der erste Term $p_{\text{asym}}(t_0)$ bildet einen konstanten Beitrag, der nur noch vom Startzeitpunkt t_0 abhängt und daher auch im asymptotischen Grenzfall $t \rightarrow \infty$ erhalten bleibt. Der zweite Term $p_{\text{beat}}(N, t_0)$ beschreibt den Beitrag der Wechselwirkung zwischen verschiedenen Floquet-Zuständen. Die Kopplung zweier Floquet-Zustände $\phi_g \neq \phi_j$ führt zu einer Oszillation zwischen den beiden Floquet-Zuständen, deren Frequenz über die Energiedifferenz $\varepsilon_j - \varepsilon_g$ gegeben ist. Die Summe über alle Beiträge verschiedener Floquet-Zustandspaare zum Wechselwirkungsterm verschwindet im Allgemeinen für $N \rightarrow \infty$ aufgrund von Dephasierung, da im Laufe der Zeit immer größere Phasen $N(\varepsilon_j - \varepsilon_g)$ angesammelt werden und verschiedene Quasienergien inkommensurabel sind [84].

Ein gerichteter Transport der Atome findet statt, wenn das zeitliche Mittel des Impulses

$$\langle p \rangle_t(t_0) = \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t_0+t} dt' p(t') \quad (3.15)$$

nicht verschwindet. Der Grenzwert

$$J(t_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p \rangle_t(t_0) = \sum_j |c_j(t_0)|^2 \langle p_j \rangle_T = \langle p_{\text{asym}} \rangle_T(t_0) \quad (3.16)$$

wird auch Transport oder asymptotischer Strom genannt und beinhaltet nur noch das zeitliche Mittel des asymptotischen Impulsbeitrags über eine Periode T , sofern das Quasienergiespektrum nicht entartet ist, d.h. es gibt kein Paar $\varepsilon_j = \varepsilon_g$ für $j \neq g$ [82].

Für den Quantentransport sind diejenigen Symmetrietransformationen relevant, welche das Vorzeichen des Impulsoperators $\hat{p} = -i\hbar\partial_z$ umkehren. Analog zum klassischen Fall ergeben sich zwei Symmetrietransformationen \hat{S} , nämlich eine räumliche

$$\hat{S}_z : \quad (z, t, \psi) \rightarrow (-z + \chi, t + \tau, \psi) \quad (3.17)$$

und eine zeitliche Transformation

$$\hat{S}_t : (z, t, \psi) \rightarrow (z + \chi, -t + \tau, \psi^*), \quad (3.18)$$

wobei χ und τ eine optionale räumliche bzw. zeitliche Verschiebung und $\psi \rightarrow \psi^*$ die komplexe Konjugation meint [82]. Bei der räumlichen Symmetrie dreht die Ortsumkehr, bei der zeitlichen Symmetrie die komplexe Konjugation das Vorzeichen von \hat{p} um. Ist die Schrödinger-Gleichung (3.1) invariant unter \hat{S}_z , lösen die Floquet-Zustände $\phi_j(x, t)$ und $\phi_j(-x, t + \tau)$ dieselbe Gleichung, weshalb für den Impuls

$$\hat{S}_z : \phi_j(x, t) = \pm \phi_j(-x, t + \tau) \xrightarrow{(3.11)} p_j(t) = -p_j(t + \tau) \quad (3.19)$$

folgt. Analog gilt für die zeitliche Symmetrie

$$\hat{S}_t : \phi_j(x, t) = \pm \phi_j^*(x, -t + \tau) \rightarrow p_j(t) = -p_j(T - t). \quad (3.20)$$

In beiden Fällen verschwindet das zeitliche Mittel $\langle p_j \rangle_T$ des Impulses (3.15) über eine Periode T für alle Floquet-Zustände und damit auch der Transport (3.16). Ohne die zeitliche Mittelung kann jedoch der asymptotische Anteil $p_{\text{asym}}(t_0)$ des Impulses (3.12) erhalten bleiben.

Für das räumlich symmetrische Potential $V(z) = V_0/2 \cos(2kz)$ ist die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung (3.1) genau dann invariant unter den Symmetrietransformationen (3.17) und (3.18), wenn für die zeitliche Modulation des Gitterpotentials

$$\hat{S}_{\text{sh}} : F(t + T/2) = -F(t) \quad (3.21)$$

$$\hat{S}_{\text{ts}} : F(t + \tau) = F(-t) \quad (3.22)$$

gilt [11]. Eine einfache Funktion, welche beide Symmetrien bricht, ist die biharmonische Funktion

$$F(t) = F_1 \cos(\omega_m t) + F_2 \cos(2\omega_m t + \theta) \quad (3.23)$$

mit der Phasenverschiebung θ und der Modulationsfrequenz ω_m . Ist $F_1, F_2 \neq 0$, so ist die Verschiebungssymmetrie (3.21) und daher die räumliche Symmetrie gebrochen. Für $\theta \neq m\pi, m \in \mathbb{Z}$ ist (3.22) nicht erfüllt, weshalb die zeitliche Symmetrie gebrochen wird. Die additive asymmetrische Modulation eines räumlich periodischen Potentials wird auch als Kippratsche (*rocking ratchet*) bezeichnet.

Im Experiment wird die Kippratsche erzeugt, indem die Frequenz des Laserlichts an einem der beiden Laserstrahlen biharmonisch moduliert wird. Eine Frequenz-

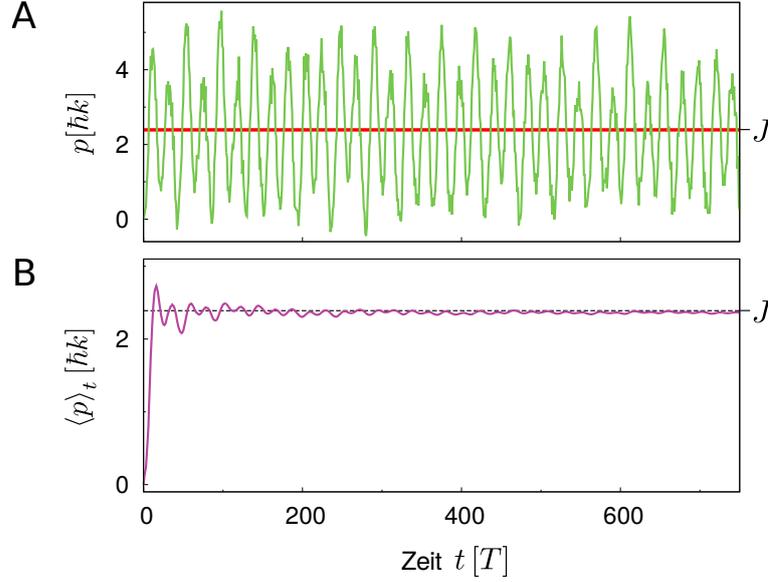


Abbildung 3.1: **A:** Erwarteter zeitlicher Verlauf des mittleren Impulses (grün) in einer atomaren Kippratsche. Es findet eine Oszillation um einen nicht verschwindenden Mittelwert, den Transport J (rot) statt. **B:** Entwicklung des zeitlichen Mittelwerts des mittleren Impulses (violett). Durch die zeitliche Mittelung konvergiert das zeitliche Mittel zum Grenzwert J (schwarz gestrichelt). Die Parameter der biharmonischen Modulation lauten $\Omega_0 = 93,4 \text{ kHz}$, $\beta = 0,5$, $\omega_m = 12,8 \omega_r \approx 47,82 \text{ kHz}$, $\theta = -2,0$, $t_0 = 0$ und $V_0 = 16E_r$.

modulation $\Omega(t)$ entspricht einer Kraft $F(t) = \frac{m}{2k} \int \Omega(t') dt'$ im Ruhesystem der Atome [9]. Im Experiment wird eine Frequenzmodulation der Form

$$\Omega(t) = \Omega_0 [\sin(\omega_m(t - t_0)) + \beta \sin(2\omega_m(t - t_0))] \quad (3.24)$$

verwendet und so eine biharmonische Kraft (3.23) mit den Amplituden $F_1 = \frac{m}{2k} \Omega_0 \omega_m$ und $F_2 = \frac{m}{k} \Omega_0 \beta \omega_m$ erzeugt. Hierbei meint Ω_0 die Amplitude der Frequenzmodulation, ω_m die Modulationsfrequenz, $k = 2\pi/\lambda_l$ die Wellenzahl des Laserlichts der optischen Gitterstrahlen mit der Wellenlänge λ_l und m die Masse der Atome. Der Startzeitpunkt $t_0 \in [0, T]$ gibt die Anfangsphase der Modulation mit der Periode T an. Um einen direkten Bezug zum Experiment herzustellen, werden bei den gezeigten Ergebnissen der numerischen Simulation die Parameter der entsprechenden Frequenzmodulation (3.24) in der Bildunterschrift angegeben. Die Details zum Zusammenhang mit den in einigen theoretischen Arbeiten [31, 82] verwendeten dimensionslosen Größen können im Anhang A nachgeschlagen werden.

In Abbildung 3.1 ist die zeitliche Entwicklung des mittleren Momentanimpulses (3.12) und des Stroms (3.16) im Falle einer biharmonischen Modulation aufgetragen. Für den mittleren Impuls (grün) ergibt sich eine Oszillation um den Wert $p_{\text{asym}} \neq 0$, der dem

Transport J entspricht (durch rote Linie gekennzeichnet). Für das zeitlichen Mittel $\langle p \rangle_t$ (violett) ergibt sich der Transport J als asymptotischer Grenzwert (gestrichelte Linie). Der Transport der Atome hängt trotz der zeitlichen Mittelung nicht nur von der Form der Wellenfunktion $|\psi(t)\rangle$, sondern wegen der expliziten Abhängigkeit der Koeffizienten $c_j(t_0)$ auch vom Startzeitpunkt t_0 der Modulation ab. Manchmal wird zur Veranschaulichung des Transportmechanismus das Bild einer Atomwolke (das Wellenpaket $|\psi(t_0)\rangle$) auf einem Satz von Transportbändern mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten in beide Richtungen (Floquet-Zustände) benutzt [29, 82]. Die anfängliche Besetzungswahrscheinlichkeit $|c_j(t_0)|^2$ gibt den jeweiligen Beitrag der verschiedenen Transportbänder vor. Der Gesamtstrom (3.16) ist gegeben durch den Überlapp der Floquet-Zustände mit der atomaren Anfangsverteilung zum Startzeitpunkt t_0 . Der Transportmechanismus unterscheidet sich stark vom klassischen Transport im Falle periodisch getriebener Systeme, bei dem sich der gemischte Phasenraum sowohl aus regulären Strukturen als auch chaotischen Gebieten zusammensetzt und dem chaotischen Bereich eine mittlere Geschwindigkeit v_{ch} zugeordnet werden kann, die dann den klassischen Transport bestimmt [1]. Hier wird zwar die mittlere Geschwindigkeit der Atome über v_{ch} vorgegeben, es gibt aber keine determinierte Abhängigkeit dieser Geschwindigkeit von den Anfangsbedingungen. Statt Transportbändern kann hier die Analogie zu einer Atomwolke in einer turbulenten Strömung gezogen werden [82].

3.3 Desymmetrisierung der Floquet-Zustände

Allgemein hängt der atomare Transport von allen Kontrollparametern der treibenden Funktion $F(t)$ ab. Für die treibende Frequenz ω_m der Modulation lässt sich der Bereich eingrenzen, in dem es zum Transport der Atome kommen kann. Das Potential in (3.1) setzt sich aus dem stationären optischen Gitterpotential $V_{\text{st}}(z)$ und einem zeitlich periodisch modulierten Potential $V_{\text{mod}}(z, t)$ zusammen,

$$V(z, t) = V_0/2 \cos(2kz) - F(t)z = V_{\text{st}}(z) + V_{\text{mod}}(z, t). \quad (3.25)$$

Für hohe Modulationsfrequenzen ω_m sollten die Atome nur ein zeitlich gemitteltes, stationäres Potential $V_{\text{st}}(z)$ wahrnehmen. Mittels einer Eichtransformation, die den Übergang zu diesem mittleren stationären Potential beschreibt, kann gezeigt werden, dass für hohe Modulationsfrequenzen der Einfluss der Modulation auf das effektive Potential verschwindet [85]. Vereinfacht formuliert lässt sich das Ergebnis auch so verstehen, dass bei einer hohen Modulationsfrequenz die Atome der Modulation nicht mehr folgen können.

Der Einfluss der Modulation kann im Bloch-Bandspektrum veranschaulicht werden, wie Abbildung 3.2 für die zwei Modulationsfrequenzen $\omega_m = 8\omega_r$ und $\omega_m = 32\omega_r$ mit der Rückstoßfrequenz $\omega_r = E_r/\hbar \approx 2\pi \cdot 3,74 \text{ kHz}$ darstellt. Das Spektrum ist im Falle

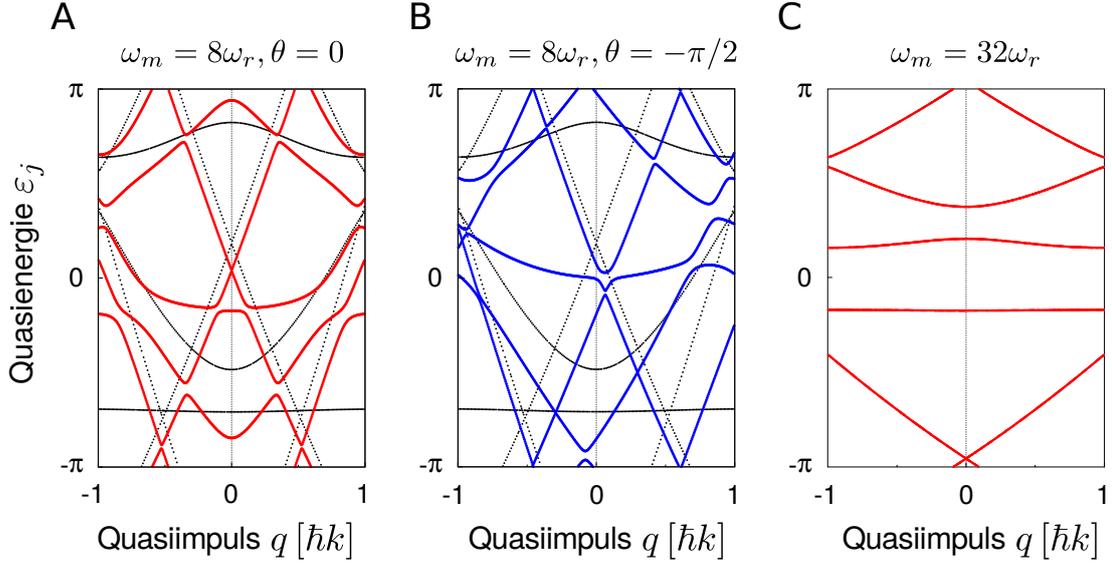


Abbildung 3.2: Vergleich des Bloch-Spektrums ohne Modulation (schwarz) und mit symmetrischer bzw. asymmetrischer biharmonischer Modulation für verschiedene Modulationsfrequenzen (farbig). Zur besseren Übersicht sind nur die Bänder $|j| < 2$ aufgetragen. **A:** Symmetrische Modulation mit der Phasenverschiebung $\theta = 0$ (rot) für die Modulationsfrequenz $\omega_m = 8\omega_r$, mit der Rückstoßfrequenz $\omega_r = E_r/\hbar \approx 2\pi \cdot 3,74$ kHz. **B:** Asymmetrischer Fall $\theta = -\pi/2$ (blau) für die Modulationsfrequenz $\omega_m = 8\omega_r$. **C:** Für $\omega_m = 32\omega_r$ gibt es keinen Unterschied zwischen dem unmodulierten und dem asymmetrisch bzw. symmetrisch modulierten Fall (rot). Die weiteren Parameter der Modulation lauten $\Omega_0 = 119,56$ kHz, $\beta = 0,5$ und $V_0 = 12 E_r$.

einer symmetrischen (rot) bzw. asymmetrischen (blau) biharmonischen Modulationsfunktion (3.23) sowie ohne Modulation (schwarz) gezeigt. Jedem Quasienergieband kann nach dem erweiterten Hellman-Feynman-Theorem eine Geschwindigkeit

$$v_j(q) = \frac{\partial \varepsilon_j(q)}{\partial q} \quad (3.26)$$

zum Quasiimpuls q zugeordnet werden [1, 86]. Im Bloch-Bandspektrum $\varepsilon_j(q)$ sind im Falle einer symmetrischen Modulation alle Floquet-Bänder symmetrisch um $q = 0$, d.h. $\varepsilon_j(-q) = \varepsilon_j(q)$ (siehe Abbildung 3.2A). Aufgrund dieser Symmetrie verschwindet der atomare Transport. Für die asymmetrische Modulation kommt es zur Desymmetrisierung der Floquet-Zustände und damit zu nicht verschwindenden Geschwindigkeiten $v_j(q = 0)$ (Abbildung 3.2B). Während der Unterschied in der Nähe der Resonanzfrequenz $\omega_m = 8\omega_r$ deutlich erkennbar ist, verschwindet für eine hohe treibende Frequenz $\omega_m = 32\omega_r$ die Differenz zwischen dem Bloch-Bandspektrum der symmetrischen bzw. der asymmetrischen Modulation (Abbildung 3.2C). Insbesondere unterscheiden sich beide Situationen nicht erkennbar vom Energiespektrum ohne

Modulation. In der Abbildung sind alle Linien überlagert, so dass nur die rote Linie erkennbar ist.

Die asymmetrische Geschwindigkeitsverteilung kann weiterhin über eine Husimi-Darstellung des Phasenraums genauer interpretiert und der klassischen Poincaré-Darstellung gegenüber gestellt werden. Für die biharmonische Funktion (3.23) findet sich eine detaillierte Analyse der Wechselwirkung zwischen den Floquet-Zuständen und der daraus resultierenden Desymmetrisierung in [31]. In dieser wird über eine Störungsrechnung erster Ordnung in der Nähe eines Symmetriepunkts der Modulation (z.B. $\theta = 0$) eine sinusoidale Abhängigkeit des Wechselwirkungsterms zwischen den Floquet-Zuständen und damit des Transports $J \sim \sin(\theta)$ vorhergesagt. Während am Symmetriepunkt der zeitliche Mittelwert des mittleren Impulses (3.15) für alle Floquet-Zustände verschwindet, kommt es zu einer Desymmetrisierung der Floquet-Zustände außerhalb der Symmetriepunkte und die Floquet-Zustände werden transportierend. Dieses Ergebnis ähnelt dem klassischen Ergebnis, bei dem die mittlere Geschwindigkeit des chaotischen Phasenraumbereichs ebenfalls eine sinusförmige Abhängigkeit von der Phasenverschiebung zeigt [11].

3.4 Auftreten und Bifurkation von Transportresonanzen

Neben der bisher beschriebenen Desymmetrisierung der Floquet-Zustände in der Nähe der Symmetriepunkte kommt es auch von den Symmetriepunkten entfernt zur Wechselwirkung zwischen den Floquet-Zuständen. Die dabei auftretende Vermischung der Floquet-Zustände kann zu einer resonanten Erhöhung des Quantentransports führen, wie im Folgenden genauer erläutert werden soll. Dazu wird das Floquet-Spektrum gegen den Kontrollparameter θ , der Phasenverschiebung zwischen den beiden Harmonischen der Modulationsfunktion (3.23) aufgetragen. Abbildung 3.3A zeigt den Ausschnitt eines solchen Floquet-Spektrums. Damit die Abbildung übersichtlich bleibt, beschränkt sich die folgende Betrachtung auf die Energiebänder ε_j mit $|j| \leq 10$. Aufgrund der biharmonischen Modulationsfunktion folgen die Floquet-Bänder den Symmetrien

$$\varepsilon_j(\theta) = \varepsilon_j(\theta + \pi) = \varepsilon_j(-\theta). \quad (3.27)$$

Es gibt einige Floquet-Bänder, die nur eine geringe Abhängigkeit von der Phasenverschiebung θ zeigen, während andere eine starke Dispersion für diesen Kontrollparameter mit maximaler Dispersion an den Punkten $\theta = \pm\pi/2$ aufweisen. Jedem Floquet-Band kann eine mittlere Energie des zugehörigen Floquet-Zustands zugeordnet werden. Flache Floquet-Bänder entsprechen dann entweder einer niedrigen mittleren Energie und damit einer räumlichen Lokalisation innerhalb der Potentialtöpfe des räumlich periodischen Potentials $V(z)$, oder einer hohen Energie weit über dem

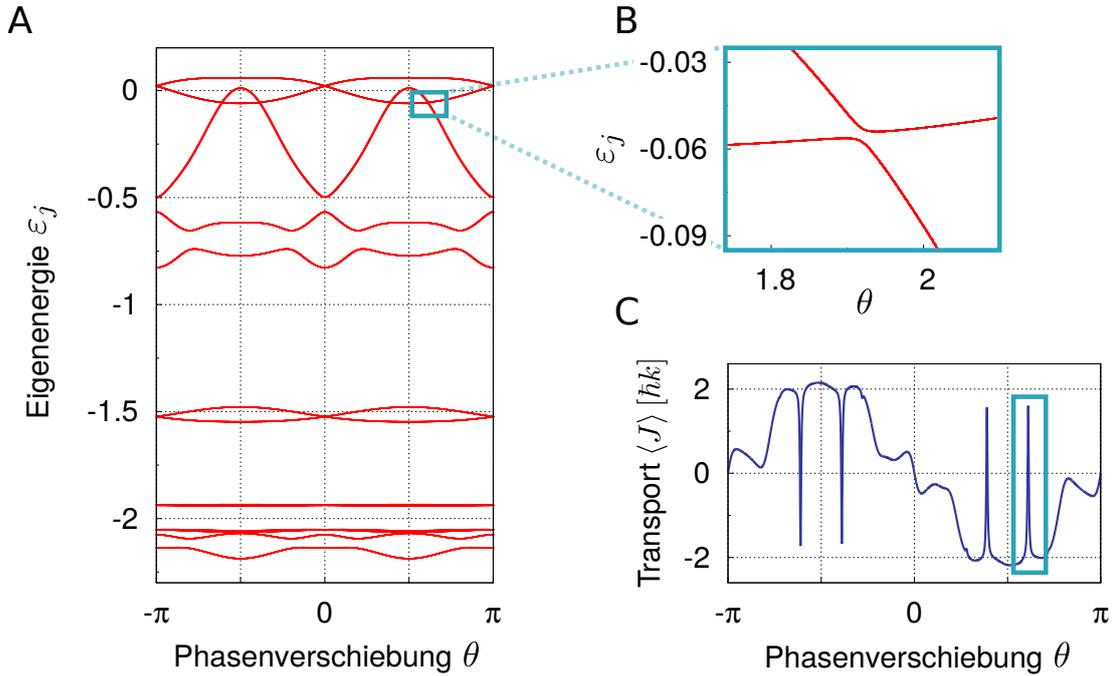


Abbildung 3.3: A: Floquet-Spektrum gegen die Phasenverschiebung θ für den Quasiimpuls $q = 0$. Zur übersichtlicheren Ansicht ist nur ein Ausschnitt aus dem Spektrum für die Quasienergien ε_j (rot) mit $|j| \leq 10$ aufgetragen. Mit dem hellblauen Kasten ist eine vermiedene Kreuzung markiert. B: Vergrößerte Darstellung der mit dem Kasten markierten vermiedenen Kreuzung im Floquet-Spektrum. C: Gemittelter Transport gegen die Phasenverschiebung θ . Der Kasten markiert die Transportresonanz, die mit der vermiedenen Kreuzung im Floquet-Spektrum einhergeht. Die Parameter der biharmonischen Modulation für diese Abbildungen sind $\Omega_0 = 124,6$, $\beta = 0,45$, $\omega_m = 1,2$ $\omega_r \approx 35,87$ kHz und $V_0 = 16E_r$.

Potential $V(z)$ [82]. Im zweiten Fall bezeichnet man das Floquet-Band auch als ballistisch. Floquet-Bänder, die eine starke Abhängigkeit vom Kontrollparameter zeigen, liegen demnach energetisch in der Größenordnung der Potentialtiefe des räumlich periodischen Potentials. An manchen Stellen des Floquet-Spektrums kommt es zur vermiedenen Kreuzung zwischen den beiden Floquet-Bandtypen, wie beispielsweise in der Abbildung durch das hellblaue Rechteck markiert und in Abbildung 3.3B vergrößert dargestellt. Analog zu den vermiedenen Kreuzungen im Bloch-Bandspektrum resultiert die vermiedene Kreuzung aus der Wechselwirkung zwischen zwei Floquet-Zuständen.

Das zeitliche Mittel des Impulses (3.15) kann nicht verschwindende Beiträge der Oszillation zwischen den Floquet-Zuständen enthalten, welche erst im asymptotischen Grenzfall $t \rightarrow \infty$ verschwinden. Zur Beschreibung des atomaren Transports wird deshalb der asymptotische Strom (3.16) verwendet. Dieser hängt im Allgemei-

nen auch vom Startzeitpunkt t_0 ab. Im Folgenden wird diese Abhängigkeit durch eine Mittelung über den Startzeitpunkt t_0

$$\langle J \rangle = \int_0^T J(t'_0) dt'_0 \quad (3.28)$$

aufgehoben und der so gemittelte asymptotische Strom als gemittelter Transport bezeichnet. Der gemittelte Transport ist in Abbildung (3.3C) aufgetragen und die Stelle der vermiedenen Kreuzung mit einem hellblauen Rechteck gekennzeichnet. Als Anfangszustand zur Berechnung des Transports wurde für der Bloch-Zustand $|0\hbar k\rangle$ gewählt (siehe Anhang A). Die Symmetrien

$$\langle J \rangle(\theta) = -\langle J \rangle(-\theta) = -\langle J \rangle(\theta + \pi) \quad (3.29)$$

sind als Folge der entsprechenden Symmetrien (3.27) der Floquet-Bänder erkennbar. Außerhalb der vermiedenen Kreuzung überlappt der Anfangszustand der sich in Ruhe befindlichen Atome hauptsächlich mit dem Floquet-Zustand niedrigster kinetischer Energie. Der gemittelte Transport zeigt eine nahezu sinusoidale Abhängigkeit mit Abweichungen, die bei näherer Betrachtung mit anderen vermiedenen Kreuzungen in Verbindung gebracht werden können. An der Stelle der vermiedenen Kreuzung aus Abbildung 3.3B kommt es zu einer Vermischung mit dem transportierenden Floquet-Zustand und dadurch zu einer resonanten Erhöhung des Transports. Die Abweichungen von der sinusoidalen Abhängigkeit lassen sich nur in quantenmechanischer Betrachtung verstehen. Die Beobachtung einer Transportresonanz ist neben der Abhängigkeit vom Startzeitpunkt der Modulation ein zweites Indiz für die Beobachtung von Quantentransport.

Bisher wurde der Transport lediglich in Abhängigkeit der Phasenverschiebung θ beschrieben und Transportresonanzen auf das Auftreten einer vermiedenen Kreuzung im Floquet-Spektrum zurückgeführt. Die Kopplung zwischen zwei Floquet-Zuständen lässt sich über die Variation der weiteren Kontrollparameter beeinflussen. In Abbildung 3.4A ist der gemittelte Transport $\langle J \rangle$ in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung θ für verschiedene Modulationsamplituden Ω_0 aufgetragen. Gezeigt ist der Abschnitt um $\theta = -\pi/2$. Für den Fall $\Omega_0 = 156,33$ kHz (blau, gepunktet) ist eine niedrige Resonanz bei $\theta = -\pi/2$ erkennbar. Durch Erhöhen der Modulationsamplitude auf $\Omega_0 = 156,52$ kHz (grün, durchgezogen) erhöht sich die Transportresonanz und wird deutlich erkennbar. Bei weiterer Erhöhung $\Omega_0 = 156,87$ kHz (gelb, gestrichelt) kommt es schließlich zur Aufspaltung der Resonanz in zwei Resonanzen, welche sich mit steigender Modulationsamplitude vom Punkt $\theta = \pm\pi/2$ in entgegengesetzter Richtung entfernen. Für $\Omega_0 = 158,00$ kHz (violett, gestrichpunktet) sind beide Resonanzen deutlich getrennt voneinander. Dieses Bifurkationsszenario kann im Floquet-Spektrum nachvollzogen werden, wie in Abbildung 3.4B schematisch darge-

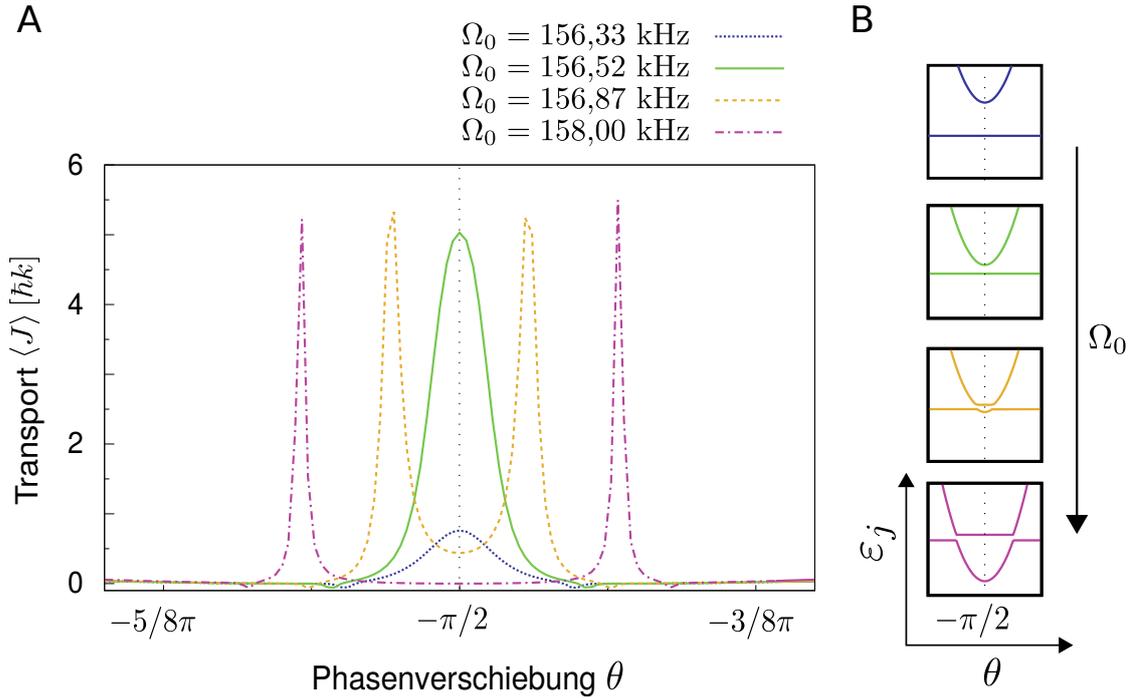


Abbildung 3.4: Bifurkation einer Transportresonanz gegen den Kontrollparameter θ der biharmonischen Modulation. **A:** Gemittelter Transport gegen die Phasenverschiebung θ für verschiedene Werte der Modulationsamplitude Ω_0 der Frequenzmodulation (3.24). **B:** Schematische Darstellung des Bifurkationsszenarios im Floquet-Spektrum. Von oben nach unten erhöht sich die Modulationsamplitude Ω_0 . Die gewählten Linienfarben korrespondieren mit den jeweiligen Linienfarben des gemittelten Transports aus A. Die weiteren Parameter der biharmonischen Modulation lauten $\beta = 0,5$, $\omega_m = 9,6 \omega_r \approx 35,87$ kHz und $V_0 = 8E_r$.

stellt. Skizziert sind zwei Floquet-Bänder in Abhängigkeit vom Kontrollparameter θ , von denen ein Band als ballistisch und daher flach, das andere Band mit maximaler Dispersion bei $\theta = -\pi/2$ angenommen wird. Von oben nach unten erhöht sich die Modulationsamplitude F_2 . Zu Anfang sind die Floquet-Bänder weiter voneinander entfernt (oberstes Bild). Mit höherer Modulationsamplitude kommt es zur Kopplung der Floquet-Zustände und zu einer vermiedenen Kreuzung am Punkt $\theta = -\pi/2$ (zweites Bild). Beim weiteren Erhöhen führt die Entkopplung der Floquet-Zustände zu einer Aufspaltung in zwei vermiedene Kreuzungen, welche sich wegen (3.27) symmetrisch um den Punkt $\theta = -\pi/2$ anordnen (drittes Bild). Im untersten Bild sind die beiden vermiedenen Kreuzungen schließlich deutlich voneinander getrennt. Da die Symmetrie (3.27) aus der Wahl der biharmonischen Modulationsfunktion (3.23) folgt, ist dieses Bifurkationsszenario typisch für den Quantentransport der Kippratsche.

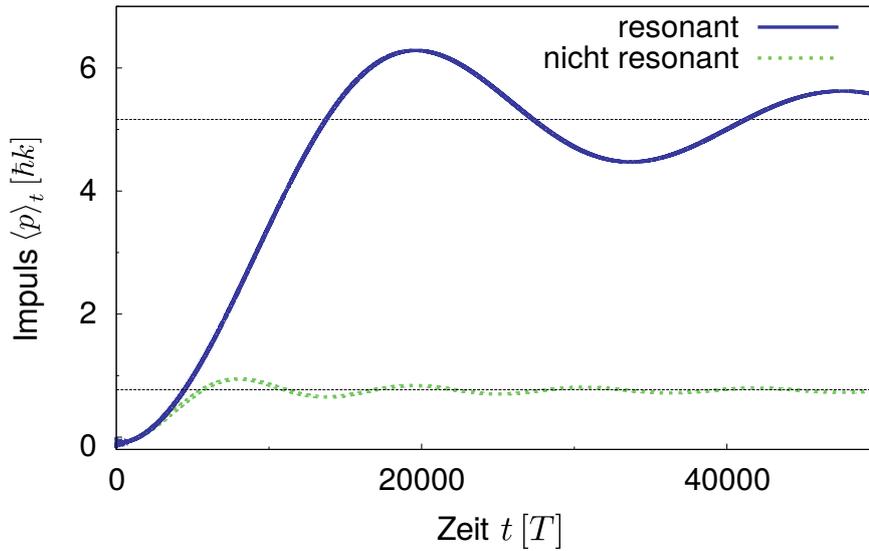


Abbildung 3.5: Entwicklung des zeitlichen Mittels des mittleren Impulses $\langle p \rangle_t$ an der Stelle einer Transportresonanz (blau, durchgezogen) und neben einer Transportresonanz (grün, gepunktet). Die Parameter der biharmonischen Modulation lauten $\Omega_0 = 156,67$ kHz, $\beta = 0,5$, $\omega_m = 9,6 \omega_r \approx 35,868$ kHz, $V_0 = 8E_r$ und $\theta = -\pi/2$ für den resonanten Fall bzw $\theta = -1.5$ für den nicht resonanten Fall.

3.5 Einfluss der experimentellen Rahmenbedingungen

Damit eine numerische Simulation den im Experiment beobachtbaren atomaren Transport korrekt beschreibt, müssen die experimentellen Rahmenbedingungen in der Simulation berücksichtigt werden. Die wichtigsten Punkte sollen hier kurz angesprochen werden.

Bis zu diesem Punkt wurde der asymptotische Strom (3.16) zur Beschreibung der Transportresonanzen verwendet. In dieser Näherung verschwindet der Interferenzterm des Impulses (3.12) durch die zeitliche Mittelung im Grenzfall $t \rightarrow \infty$. Im Experiment wird der instantane, mittlere Impuls der Atome bestimmt. Da die Kohärenzzeit des optischen Gitters aufgrund der endlichen Verstimmung der Lichtfelds von den atomaren Resonanzen und damit die Anzahl der möglichen Modulationsperioden begrenzt ist, kann nicht davon ausgegangen werden, dass der asymptotische Grenzfall erreicht werden kann. Dies stimmt insbesondere am Ort einer Transportresonanz, wo die geringe Energieaufspaltung der vermiedenen Kreuzung zu einer niedrigen Rabi-Frequenz (2.66) und damit zu einer Oszillation langer Periodendauer des mittleren Impulses führt, für die das zeitliche Mittel sich erst nach langer Zeit dem asymptotischen Strom nähert. Ein Beispiel einer solchen Oszillation ist in Abbildung 3.5 für den resonanten (blau, durchgezogen) und den nicht-resonanten Fall (grün, gepunktet) gezeigt. Im nicht-resonanten Fall nähert sich das zeitliche Mittel deutlich schnell-

ler dem asymptotischen Grenzwert, aber in beiden Situationen sind dazu einige 10000 Modulationsperioden nötig.

Ohne das zeitliche Mittel des mittleren Impulses zu bilden sollte der Wechselwirkungsterm in (3.12) aufgrund von Dephasierung verschwinden. Dies gilt aber streng genommen aber nur für eine unendliche Anzahl an Basiszuständen in der Entwicklung (3.9), eine Forderung, die weder in den numerischen Simulationen noch im Experiment erfüllt ist. Durch die anfängliche Impulsbreite des Kondensats ergibt sich aber ein anderer selbstmittelnder Effekt aufgrund der Dephasierung verschiedener Impulsbeiträge zum Gesamttransport der Atome.

Der im Experiment beobachtete mittlere atomare Impuls setzt sich aus den Impulsbeiträgen der verschiedenen Beugungsordnungen zusammen, die sich nach der Wechselwirkung mit dem optischen Gitterpotential über eine freie Expansionsphase trennen (siehe Abschnitt 5.1). Die Anzahl der Beugungsordnungen, die zur Bestimmung des Impulses im Experiment verwendet wird, muss in der Simulation berücksichtigt werden, da sonst Impulsbeiträge höherer Beugungsordnung zu einer anderen Signatur und im Experiment nicht auflösbaren Transportresonanzen führen können.

Das zur Detektion der Transportresonanzen im Experiment verwendete Bose-Einstein-Kondensat hat im Gegensatz zur bisherigen Betrachtung immer eine endliche Impulsbreite Δp . Diese Tatsache hat zur Folge, dass zur Bestimmung des Impulses auch Beiträge mit Quasiimpuls $q \neq 0$ berücksichtigt werden müssen. Im Bloch-Bandspektrum $\varepsilon_j(q)$ sind im Falle einer symmetrischen Modulation alle Floquet-Bänder symmetrisch um $q = 0$, d.h. $\varepsilon_j(-q) = \varepsilon_j(q)$, weshalb der atomare Transport an dieser Stelle verschwindet. Dasselbe gilt aber im Allgemeinen nicht für die Entwicklungskoeffizienten $c_j(t_0, -q) \neq c_j(t_0, q)$ der Floquet-Zustände, selbst im Falle einer symmetrischen Modulation. Ebenso wenig verschwindet im Allgemeinen der Impuls $p_j(t_0, q \neq 0)$, so dass bei einer symmetrischen Modulation der asymptotische Anteil des Impulses (3.12) endlich sein kann, wenn die Impulsbreite $\Delta p > 0$ ist. Dieser Effekt wird erst über die zeitliche Mittelung des Startzeitpunkts t_0 aufgehoben [82].

Nicht zuletzt sind Transportresonanzen und das beschriebene Bifurkationsszenario zwar generisch für den Quantentransport der Kippratsche, die Detektion im Experiment aber mit einigem Aufwand verbunden. Zu scharfe Transportresonanzen werden im Experiment aufgrund der endlichen Impulsbreite des Bose-Einstein-Kondensats nicht aufgelöst. Wie die Parameterwahl in Abbildung (3.4) zeigt, hat eine kleine Änderung eines Kontrollparameters wie der Modulationsamplitude bereits einen großen Einfluss auf die Amplitude der Transportresonanz. Im Experiment muss also ein Parametersatz gefunden werden, der eine breite und damit auflösbare Transportresonanz zeigt. In der numerischen Simulation muss die endliche Impulsbreite des Kondensats und die im Experiment realisierbaren Potentialtiefen

und Kontrollparameter berücksichtigt werden. Im Anhang A finden sich Details zur Implementierung der endlichen Impulsbreite in die numerische Simulation.

Experimenteller Aufbau

In diesem Kapitel wird der experimentelle Aufbau zur Untersuchung des atomaren Transports eines Rubidium Bose-Einstein-Kondensats in einem zeitlich biharmonisch modulierten optischen Gitterpotential behandelt. In der Einleitung wird eine Übersicht über den typischen Ablauf eines Experiments gegeben. In den folgenden Abschnitten wird dann auf die verschiedenen Schritte des Experimentzyklus genauer eingegangen. Die Vakuumapparatur, die verschiedenen Lasersysteme und die verwendeten Kühltechniken zur Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats sind in früheren Arbeiten an dem im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten experimentellen Aufbau ausführlich behandelt [28, 30, 80, 87] und werden in dieser Arbeit kürzer wiedergegeben. Es folgt eine Aufbaubeschreibung des optischen Gitters und der Frequenzmodulation, die zum zeitlich modulierten optischen Gitterpotential führt. Dann wird genauer auf die Erweiterung der Absorptionsabbildung um einen zustandsselektiven Mikrowellenpuls eingegangen, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendet wird. Abschließend wird die Geschwindigkeitsselektion mittels eines Raman-Lichtpulses beschrieben, die zu einer Verringerung der anfänglichen Impulsbreite des Bose-Einstein-Kondensats führt.

4.1 Einleitung

Der experimentelle Ablauf lässt sich grob in vier Phasen unterteilen, welche zyklisch wiederholt werden. Abbildung 4.1 zeigt eine schematische Darstellung des Experimentzyklus. Zunächst wird ein Bose-Einstein-Kondensat aus Rubidiumatomen (^{87}Rb) erzeugt (*BEC- Erzeugung*). Dazu werden Rubidiumatome in einer magneto-optischen Falle gefangen und dann in eine optische Dipolfalle umgeladen. Der Übergang zum Bose-Einstein-Kondensat wird dann in der Dipolfalle über evaporative Kühlung erreicht. Nach einer freien Expansionsphase von 3 ms, in der die innere

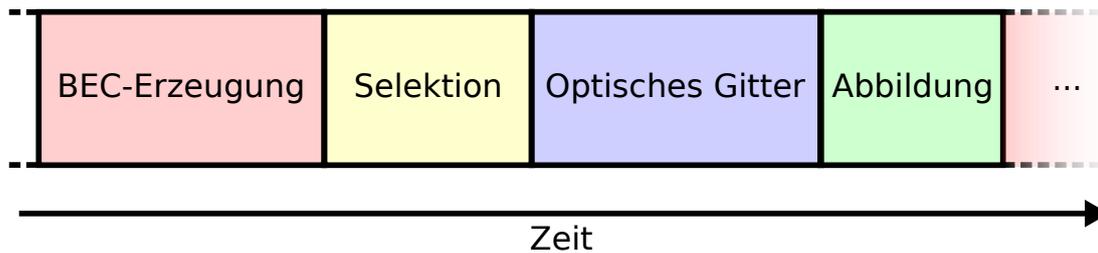


Abbildung 4.1: Schematische Übersicht über dem zeitlichen Ablauf der verschiedenen Schritte eines Durchgangs des Experiments. Der Durchgang wird zyklisch unter Variation eines oder mehrerer Parameter wiederholt.

Energie des Kondensats durch das Abschalten der Dipolfalle in kinetische Energie umgewandelt wird, führt ein geschwindigkeitssensitiver Raman-Lichtpuls zu einer Verringerung der Impulsbreite des Kondensats für die folgenden optischen Gitterexperimente (*Selektion*). Danach wird das optische Gitter erzeugt und es kommt zur Wechselwirkung des Kondensats mit dem biharmonisch modulierten Gitterpotential (*Optisches Gitter*). Im letzten Schritt des Experimentzyklus folgt eine freie Expansionsphase, in der sich die verschiedenen Beugungsordnungen des Kondensats räumlich trennen, und eine anschließende Absorptionsabbildung (*Abbildung*). Ein Durchgang des Experimentzyklus dauert typischerweise etwa 37 s, wobei die meiste Zeit für das Laden der MOT (29 s) und für die evaporativen Kühlung (7 s) verwendet wird. Die Absorptionsabbildung bildet das atomare Ensemble nicht zerstörungsfrei ab. Daher muss zur Variation eines oder mehrerer experimenteller Parameter der beschriebene Ablauf zyklisch wiederholt werden.

Der Ablauf des Experiments ist computergesteuert. Die jeweiligen Steuerspannungen und Triggersignale der Netzgeräte, elektronischen Schaltungen, Funktionsgeneratoren etc. werden über ein Echtzeitsystem (Modell *ADwin-Pro*, Firma *Jäger Computergesteuerte Messtechnik*) mit einer zeitlichen Genauigkeit von einigen Mikrosekunden geliefert. Eine Software zur Übertragung der jeweiligen Triggersignal- und Steuerspannungsabfolge wurde von C. Geckeler in der Programmiersprache *python* entwickelt und im Rahmen der vorliegenden Arbeit auf ein modernes Betriebssystem angepasst und um die Übertragung von Datensätzen und Einstellungen der verwendeten Funktionsgeneratoren über die Netzwerkschnittstelle erweitert.

4.2 Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats

Vakuumkammer

Wie im Abschnitt 2.2 beschrieben sollte die Stoßrate der Atome in der optischen Dipolfalle mit dem Hintergrundgas so gering wie möglich gehalten werden, damit

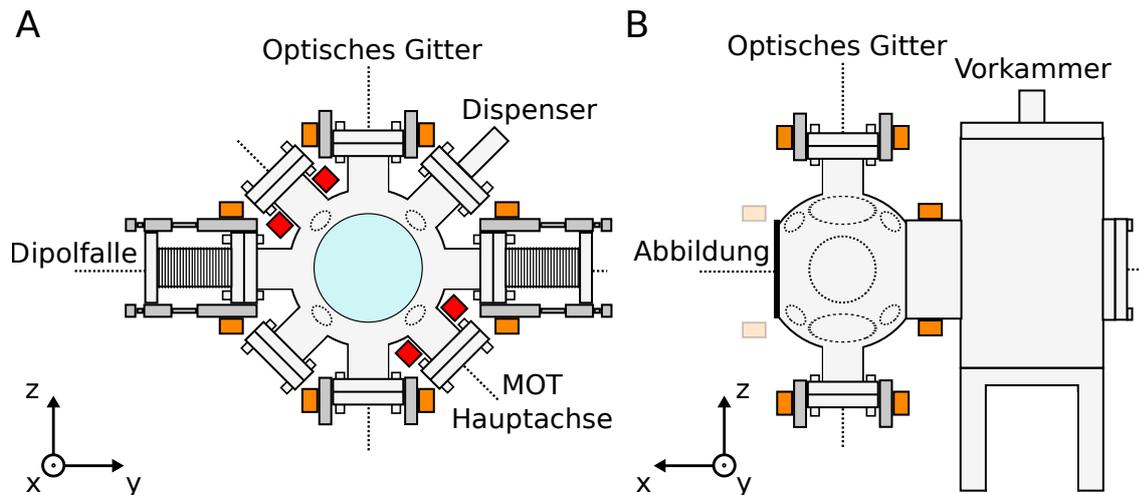


Abbildung 4.2: Aufbauskiizze der Vakuumkammer. **A:** Frontalansicht. Dargestellt ist die Hauptkammer mit den verschiedenen optischen Zugängen. Zur besseren Ansicht sind die kleineren, zur MOT-Hauptachse orthogonalen Flansche nur gestrichelt angedeutet. **B:** Seitenansicht. In dieser Ansicht erkennt man die Verbindung von Haupt- und Vorkammer und die optische Achse, in der die Absorptionsabbildung aufgebaut ist. Die halbtransparent eingezeichnete Kompensationsspule auf der optischen Achse der Abbildung ist nicht an der Vakuumkammer befestigt, sondern freistehend auf dem optischen Tisch installiert und daher hier nur der Vollständigkeit halber eingezeichnet. Nicht eingezeichnet sind Druckmesser und Vakuumpumpen an der Vorkammer.

die evaporative Kühlung effizient abläuft und eine Bose-Einstein-Kondensation erreicht werden kann. Dies setzt ein Ultrahochvakuum, d.h. Drücke im Bereich von $10^{-7} - 10^{-12}$ mbar voraus. Im Experiment wird dieser Bereich durch den kombinierten Einsatz einer Ionengetterpumpe (Modell *VTS 251/s*, Firma *Meca2000*) und einer Titan-Sublimationspumpe (Modell *TSP2*, Firma *Riber*) erreicht. Der Betrieb dieser Pumpentypen setzt ein Hochvakuum voraus, welches zuvor durch Ausheizen der Vakuumkammer und zusätzlichem Einsatz einer Turbomolekularpumpe hergestellt wird. Der im Experiment erreichte Druck beträgt etwa $3 \cdot 10^{-10}$ mbar.

Die Vakuumkammer setzt sich aus einer zylindrischen Vorkammer und einer sphärischen Hauptkammer zusammen, welche über einen CF63-Flansch miteinander verbunden sind. In Abbildung 4.2 ist der Aufbau der Vakuumkammer aus zwei Ansichten skizziert. Die frontale Ansicht (Abbildung 4.2A) zeigt die Hauptkammer mit dem zentralen Hauptfenster (hellblau) sowie vier koaxialen Flanschpaaren vom Typ CF-38 und gestrichelte Konturen, welche die weiteren vier kleineren Flanschpaare mit einem Durchmesser von 20 mm andeuten, die zur besseren Ansicht nicht eingezeichnet sind. Die Hauptkammer ist aus Edelstahl gefertigt und hat einen Durchmesser von 163 mm. Mit Ausnahme der horizontalen Achse (in y-Richtung) und des Flansches, an dem der Dispenser angebracht ist, sind alle Flansche mit einem optischen Zugang

aus Quarzglas abgeschlossen, welches für den nahinfraroten Bereich um 780 nm anti-reflexionsbeschichtet ist.

In der horizontalen Achse wird die Dipolfalle realisiert. An den beiden Flanschen ist ein metallischer Faltenbalg montiert, welcher mit drei Mikrometerschrauben über die umfassende Halterung (dunkelgrau) in seiner Länge variiert werden kann. Die beiden Flansche sind mit einem optischen Zugang aus Zinkselenidglas abgeschlossen, welches im Gegensatz zu Quarzglas transparent für das Licht des CO₂-Lasers bei einer Wellenlänge von 10,6 µm ist. Zur Kammermitte zeigt beiderseits koaxial zu den Flanschen ein Metallrohr, an dessen Ende eine Zinkselenidlinse der Brennweite 38,1 mm angebracht ist (nicht eingezeichnet). Da die Metallrohre mit dem jeweiligen äußeren Ende des Flansches verbunden sind, können die im Vakuum liegenden Linsen über die Mikrometerschrauben der äußeren Halterung ausgerichtet und so das im Vakuum liegende Teleskop justiert werden (vgl. Abbildung 4.5). Um ein konstantes magnetisches Feld zu erzeugen, ist um die Halterungen der beiden Flansche der Dipolfallenachse sowie über weitere Halterungen an den beiden Flanschen der vertikalen Achse jeweils ein Spulenpaar in Helmholtz-Konfiguration angebracht (*Offsetspulen*, orange). Die Achse in -45°-Richtung bildet die MOT-Hauptachse, an der das Spulenpaar in Anti-Helmholtz-Konfiguration zur Erzeugung des magnetischen Gradienten montiert ist, welches in der Skizze im Querschnitt angedeutet wird (*Gradientenspulen*, rot). Die Spulen sind in ein wassergekühltes Kupferschalenpaar um die beiden Flansche gewickelt. Bei der Windungszahl von 310 Windungen und einem durch die Kühlung begrenzten Maximalstrom von 6 A wird ein Magnetfeldgradient von etwa 9,2 G/cm erreicht [88]. Die beiden anderen Achsen der magneto-optischen Falle sind orthogonal zur Hauptachse auf den kleineren Flanschen realisiert.

In +45°-Richtung ist ein Rubidiumdispenser angebracht. Der Dispenser besteht aus einer elektrischen Durchföhrung zu drei mit Rubidiumchromat (Rb₂CrO₄) beschichteten Metallplättchen (Modell *RB/NF3.4*, Firma *SAES Getters*). Beim Anlegen eines konstanten Stroms von etwa 4,5 A an der elektrischen Durchföhrung wird das Metallplättchen erhitzt und es kommt zu einer chemischen Reaktion, bei der atomares Rubidiumgas in der Vakuumkammer entsteht. Weiterhin sind an zwei der kleineren Flansche eine Kamera zur Abbildung der MOT sowie eine Sammellinse, welche die Fluoreszenz der Atome auf eine Photodiode abbildet, aufgebaut.

Aus seitlicher Ansicht (Abbildung 4.2B) erkennt man die mit der sphärischen Hauptkammer verbundene zylindrische Vorkammer. Außer den beiden Flanschen in vertikaler Richtung sind die weiteren Flansche der Hauptkammer in dieser Abbildung nur durch die gestrichelten Konturen angedeutet. An der Vorkammer ist ein Druckmesser (Modell *TR 211*, Firma *Leybold*) sowie die beiden Vakuumpumpen angebracht. Zusätzlich bietet die Vorkammer über ein wiederverschließbares Ventil die Möglichkeit, andere Vakuumpumpen an einen CF-38 Flansch anzuschließen. Koaxial zum Haupt-

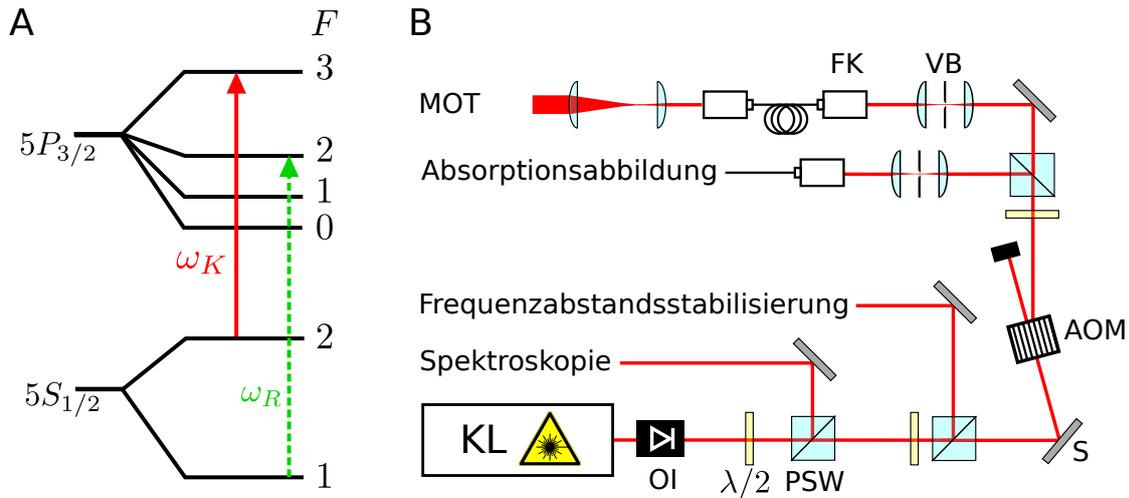


Abbildung 4.3: A: Vereinfachtes Termschema der D2-Linie von ^{87}Rb . Der Übergang des Kühllasers (Rückpumpasers) mit der Frequenz ω_K (ω_R) ist durch den roten durchgezogenen (grünen gestrichelten) Pfeil gekennzeichnet. B: Aufbauskinne zur Optik des Kühllasers. Folgende Abkürzungen werden verwendet: KL: Kühllaser, OI: Optischer Isolator, $\lambda/2$: $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte, PSW: Polarisationsstrahlteilerwürfel, AOM: Akusto-optischer Modulator, VB: Verschlussblende, FK: Faserkopleter.

fenster der Hauptkammer befindet sich ein Fenster, so dass diese horizontale Achse (x-Richtung) zur Absorptionsabbildung der Atome genutzt werden kann. Auf dieser Achse befindet sich ebenfalls das dritte Offsetsolenpaar, von dem eine Spule um den Verbindungsflansch zwischen den beiden Vakuumkammerteilen und die andere Spule freistehend extern montiert ist (transparent angedeutet).

Magneto-optische Falle

Im Experiment wird eine magneto-optische Falle für Rubidiumatome (^{87}Rb) realisiert. In Abbildung 4.3A ist das Termschema der D2-Linie von ^{87}Rb vereinfacht dargestellt. Als Kühlübergang wird der in rot eingezeichnete Übergang von $|5S_{1/2}, F=2\rangle$ nach $|5P_{3/2}, F=3\rangle$ gewählt, zu dem das Licht des im Folgenden Kühllaser genannten Lasers um etwa 3 Linienbreiten (≈ 21 MHz) rotverstimmt ist. Es ist allerdings auch ein nicht-resonanter Übergang der Atome nach $|5P_{3/2}, F=2\rangle$ möglich, aus dem die Atome nach $|5S_{1/2}, F=1\rangle$ zerfallen und dann für die weitere Kühlung verloren sind. Um den Kühlkreislauf wieder zu schließen, wird eine zweite Laserlichtquelle, die Rückpumplaser genannt wird, verwendet [89]. Der Rückpumplaser strahlt resonantes Licht zum Übergang von $|5S_{1/2}, F=1\rangle$ nach $|5P_{3/2}, F=2\rangle$ ein und führt die Atome damit in den Kühlkreislauf zurück. Der Rückpumplaser wird über eine

Frequenzmodulationsspektroskopie auf die Übergangsfrequenz stabilisiert. Über eine Frequenzabstandsstabilisierung wird dann der Kühllaser relativ zum Rückpump- laser auf den Kühlübergang frequenzstabilisiert. Bei dieser wird das Licht des Kühllasers und des Rückpump- lasers in einer Glasfaser überlagert und über eine schnelle Photodiode dann das Schwebungssignal analysiert. Der Frequenzabstand der beiden Übergänge beträgt etwa 6,8 GHz und kann über dieses Verfahren stabilisiert werden. Die Frequenzabstandsstabilisierung hat den Vorteil, dass die Frequenz des Kühllasers schnell (\sim ms) über einen weiten Bereich (mehrere 100 MHz) verstimmt werden kann, was bei der dunklen MOT wichtig wird. Eine ausführliche Darstellung zum Aufbau der beiden Stabilisierungsmethoden und zur im Experiment erreichten Frequenz- stabilität findet sich in [28].

Eine Skizze zum Aufbau der Optik des Kühllasers zeigt Abbildung 4.3B. Als Kühllaser (KL) wird ein trapezverstärkter Diodenlaser (Modell *DLX 110*, Firma *Toptica*) mit einer Ausgangsleistung von etwa 400 mW bei einer Wellenlänge von 780 nm verwendet. Um den Laser vor Rückreflexionen zu schützen, wird ein optischer Isolator verwendet (OI). Dann wird ein geringer Teil der Strahlleistung zur Sättigungs- spektroskopie und zur Frequenzabstandsstabilisierung abgezweigt. Die Sättigungs- spektroskopie dient beim Kühllaser zur groben Justage der Laserlichtfrequenz. Da- nach durchquert der Strahl einen akusto-optischen Modulator (AOM, Modell *3080- 122*, Firma *Crystal Technology Inc.*) zum schnellen Schalten der Lichtintensität. Nach dem AOM wird ein weiterer Teil der Leistung abgezweigt und hinter einer mecha- nischen Verschlussblende (VB) in eine Glasfaser eingekoppelt. Die mechanische Ver- schlussblende ist zum Blocken des Laserlichts notwendig, da auch ohne Anlegen einer treibenden Frequenz am AOM ein kleiner Teil der eingehenden Lichtleistung isotrop gestreut wird. Über die Glasfaser gelangt das Licht zur Vakuumkammer und wird dort zur Absorptionsabbildung verwendet. Die übrige Leistung wird für die MOT verwendet. Zur Verbesserung des Strahlprofils und zur Entkopplung der Justage der Teilstrahlen der magneto-optischen Falle vom bisherigen Strahlengang läuft der Strahl zunächst durch eine Glasfaser. Hinter der Glasfaser beträgt die Strahlleistung etwa 100 mW. Nach dem Faserkoppler wird der Strahlradius über ein Teleskop auf etwa 2 cm aufgeweitet und dann mit dem Laserstrahl des Rückpump- lasers überlagert.

Der Strahlverlauf des Rückpump- lasers ist in Abbildung 4.4 skizziert. Als Quelle des Rückpump- laserlichts dient ein selbstgebauter gitterstabilisierter Diodenlaser in Littrow-Konfiguration (Laserdiode: Modell *RLD78PZW2*, Firma *Rohm*). Eine ausführ- liche Beschreibung zum verwendeten Aufbau findet sich in [90]. Der Rückpump- laser hat eine Ausgangsleistung von etwa 35 mW bei einer Wellenlänge von etwa 780,23 nm. Nach dem optischen Isolator wird ein Teil der Leistung für die Frequenzmodulations- spektroskopie und die Frequenzabstandsstabilisierung abgezweigt. Danach wird ein AOM (Modell *1205C-1*, Firma *Isomet*) zum schnellen Schalten der Laserlichtintensität

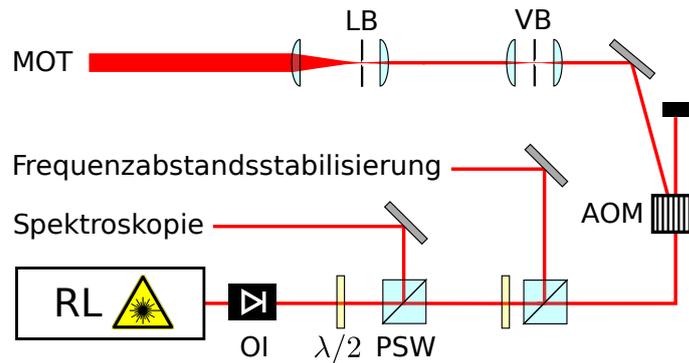


Abbildung 4.4: Aufbauskinne zur Optik des Rückpumplasers. Folgende Abkürzungen werden verwendet: *RL*: Rückpumplaser, *OI*: Optischer Isolator, $\lambda/2$: $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte, *PSW*: Polarisationsstrahlteilerwürfel, *AOM*: Akusto-optischer Modulator, *VB*: Verschlussblende, *LB*: Lochblende.

und eine Verschlussblende verwendet. Innerhalb des darauf folgenden Teleskops zur Aufweitung des Strahlradius befindet sich eine Lochblende, die das Strahlprofil des Rückpumplasers verbessert. Nach dem Teleskop beträgt die Leistung des Rückpumplaserlichts etwa 20 mW.

Für die magneto-optische Falle werden die aufgeweiteten Strahlen des Kühllasers und des Rückpumplasers überlagert und auf drei Strahlen gleicher Intensität aufgeteilt, die dann auf den senkrecht zueinander stehenden MOT-Achsen eingestrahlt werden. Auf jeder Achse durchquert das Laserlicht eine $\lambda/4$ Verzögerungsplatte, die Hauptkammer und wird dann durch eine weitere $\lambda/4$ Verzögerungsplatte retroreflektiert, so dass die für die magneto-optische Falle notwendige Konfiguration aus entgegengerichteten Lichtstrahlen mit σ^+/σ^- -Polarisation in drei orthogonalen Raumrichtungen realisiert ist.

Im experimentellen Zyklus lädt die magneto-optische Falle für etwa 29 s Atome aus dem Hintergrundgas. Der Dispenser wird wenige Sekunden vor dem Ende der MOT Lade phase nicht mehr versorgt, um den Druck in der Vakuumkammer während der evaporativen Kühlung zu verbessern. Nach jedem Durchgang dauert es daher etwa 5 s, bis der Dispenser genügend erhitzt ist, damit es zum Ausgasen von Rubidiumatomen kommt. Die Atomzahl und die Laderate der magneto-optischen Falle für die im Rahmen der vorliegenden Arbeit erneuerten Gradientenspulen ist in der Diplomarbeit von T. Burgermeister untersucht worden [88]. Aus dem Fluoreszenzsignal der MOT, welches über eine Photodiode detektiert wird, ergibt sich eine Atomzahl von etwa $5 \cdot 10^8$ am Ende der MOT-Lade phase.

Um die Atome aus der magneto-optischen Falle effizienter in die Dipolfalle zu laden, wird vor dem Umladen innerhalb von rund 150 ms die Frequenz des Kühllasers stetig bis zu 230 MHz rotverstimmt und die Leistung des Rückpumplaserlichts deutlich ver-

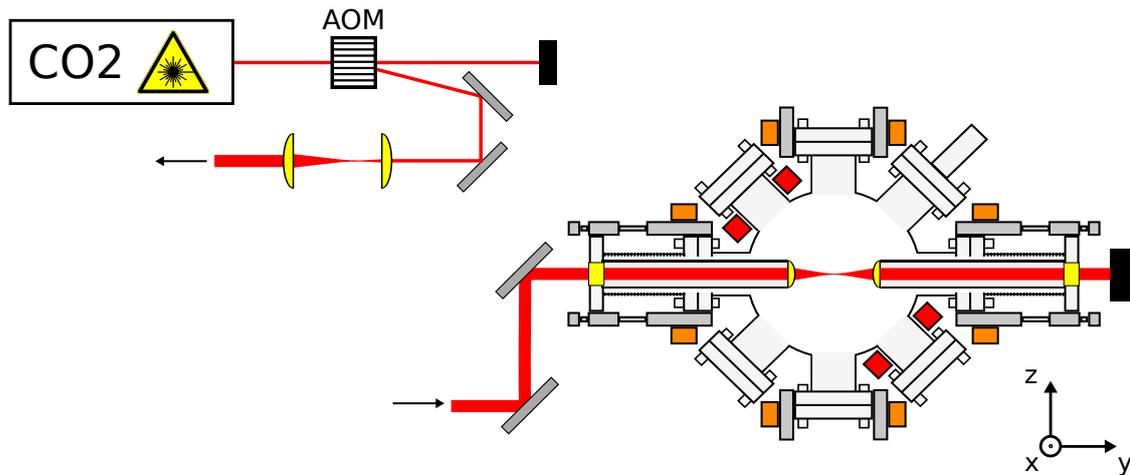


Abbildung 4.5: Aufbauskinne zur Dipolfalle. Links ist der Aufbau zur Modulation des Laserstrahls und der Strahlaufweitung dargestellt. Rechts zeigt die Skizze den Strahlengang an der Vakuumhauptkammer. Folgende Abkürzungen werden verwendet: CO₂: CO₂-Laser, AOM: Akusto-optischer Modulator.

ringert. Dadurch werden zunehmend Atome in den Zustand $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ gepumpt und die Fluoreszenz nimmt ab, weshalb man auch von einer *dunklen MOT* spricht. Aufgrund der geringeren Photonenstoßrate verringert sich die Temperatur und erhöht sich die Dichte der MOT, wodurch das Umladen in die Dipolfalle begünstigt wird. Wie in Abschnitt 2.2 erwähnt verläuft die evaporative Kühlung in der Dipolfalle effizienter, wenn der Anteil an Atomen im Hyperfeingrundzustand hoch ist. Am Ende der dunklen MOT wird die Temperatur der Atome zu $40 \mu\text{K}$ bestimmt [30].

Dipolfalle

Im nächsten Schritt werden die Atome in eine optische Dipolfalle umgeladen. Eine Aufbauskinne der Dipolfalle zeigt Abbildung 4.5. Als Laserlichtquelle wird ein CO₂-Laser (Modell GEM-50S, Firma Coherent) mit einer Ausgangsleistung von 55 W bei einer Wellenlänge von $10,6 \mu\text{m}$ verwendet. Der Laserstrahl durchquert zunächst einen wassergekühlten AOM und wird dann über ein Teleskop mit den Brennweiten 63,5 mm und 127 mm aufgeweitet (Abbildung 4.5 links). Aufgrund der vergleichsweise geringen Beugungseffizienz der für die Wellenlänge des CO₂-Laserlichts geeigneten AOMs und durch Verluste an der Optik verringert sich die Strahlleistung auf etwa 27 W vor der Vakuumkammer. Der Strahl wird durch die horizontale Achse der Hauptkammer geleitet und trifft dann auf einen Strahlblocker (Abbildung 4.5 rechts). Innerhalb der Vakuumkammer befindet sich ein Teleskop mit zwei Linsen der Brennweite 38,1 mm, über das der Strahl auf einen Durchmesser von etwa $25 \mu\text{m}$ fokussiert

wird. Die beiden Linsen des Teleskops können über je drei Mikrometerschrauben an der Flanschhalterung von außerhalb der Kammer justiert werden.

Das extrem weit von den Rubidiumresonanzen verstimmt Licht des CO₂-Lasers stört den Ladevorgang in der magneto-optischen Falle nicht und wird daher bereits während der MOT-Ladephase eingestrahlt. Zum Umladen der Atome in die Dipolfalle wird das Licht der magneto-optischen Falle abgeschaltet. Die Atomzahl in der Dipolfalle kann aus dem Fluoreszenzsignal der Atome bestimmt werden, die mit einem resonanten Lichtpuls des Rückpumpulaserlichts angeregt werden. Aufgrund der geringeren Falltiefe der Dipolfalle und aus geometrischen Gründen werden nur etwa 1 – 2% der Atome aus der magneto-optischen Falle in die Dipolfalle umgeladen. Im Experimentzyklus entspricht dies typischerweise $6 \cdot 10^6$ Atomen. Die Anzahl der in der Dipolfalle gefangenen Atome zeigt einen doppelt-exponentiellen Zerfall, der auf die natürliche Evaporation bzw. auf Stöße mit dem Hintergrundgas zurückzuführen ist. Eine genauere Untersuchung im Experiment ergibt eine Lebensdauer der Atome in der Dipolfalle aufgrund von Stößen mit dem Hintergrundgas von etwa 21,6 s [88].

Eine Änderung der Treiberfrequenz des AOMs hat eine Austrittswinkeländerung der ersten Beugungsordnung zur Folge. Um den Anteil der Atome, der aus der magneto-optischen Falle in die Dipolfalle umgeladen wird, zu maximieren, wird über eine sinusförmige Frequenzmodulation am AOM der Strahl räumlich aufgeweitet und so das Fallenvolumen bei vergleichsweise hoher Potentialtiefe maximiert. Die Modulationsfrequenz wird hierbei hoch gegen alle Fallenfrequenzen der Dipolfalle gewählt. In der Diplomarbeit von J. Plumhof [91] und in der Dissertation von T. Salger [30] ist die Methode ausführlich untersucht.

Zur evaporativen Kühlung wird die Falltiefe der Dipolfalle stetig verringert, indem die Leistung des CO₂-Laserlichts über den AOM gesenkt wird. Durch die geringere Falltiefe wird es den hochenergetischen Teilchen in der Falle möglich, aus der Falle zu entweichen. Der Rest der Atome rethermalisiert in der Dipolfalle zu einer niedrigeren Temperatur, bis schließlich die Bose-Einstein-Kondensation eintritt. Für die Evaporation in einer optischen Dipolfalle wird ein optimales Verhältnis von Falltiefe zu thermischer Energie $V(t)/k_b T \approx 10$ vorhergesagt [92]. Der Verlauf der Falltiefe im Experiment ist durch diese Vorhersage motiviert und folgt der Form

$$V(t) = \frac{V_0}{(1 + t/\tau)^\beta}, \quad (4.1)$$

mit der anfänglichen (maximalen) Dipolfallentiefe $V_0 \approx k_B \cdot 1,6$ mK und den Konstanten τ und β , mit denen die Atomzahl im Bose-Einstein-Kondensat optimiert wird. Experimentell hat sich eine Dauer der evaporativen Kühlung von etwa 6 s als optimal herausgestellt, in der die Falltiefe auf ungefähr 0,3% der anfänglichen Dipolfallentiefe V_0 gesenkt wird.

Im Gegensatz zu einer Magnetfalle werden Atome unabhängig von der Spinpolarisation des Hyperfeinzustands in der Dipolfalle gefangen. Für die späteren Experimente ist es jedoch günstig, ein spinpolarisiertes Bose-Einstein-Kondensat zu erzeugen. Dies ist möglich, indem zur Dipolfalle ein magnetisches Gradientenfeld überlagert wird. Im Experiment wird dieses über die Gradientenspulen der magneto-optischen Falle und ein geeignetes konstantes Magnetfeld der Offsetspulen erzeugt. Durch das Gradientenfeld wird die effektive Fallentiefe während der Evaporation abhängig von der magnetische Quantenzahl m_F und so eine Selektion der am Ende der Evaporation verbleibenden Atome möglich. Die Auswahl des Zeeman-Zustands ist bei dieser Methode mit einem zusätzlichen Atomverlust verbunden. Über die Absorptionaufnahme kann die Atomzahl des Bose-Einstein-Kondensats bestimmt werden. Ohne externen Magnetfeldgradienten wird eine Atomzahl von etwa $8 \cdot 10^4$ im Experiment erreicht. Für ein spinpolarisiertes Bose-Einstein-Kondensat im Zeeman-Zustand $m_F = 0$, wie es für die weiteren Experimente dieser Arbeit verwendet wird, reduziert sich die Atomzahl im Kondensat auf etwa $3 - 5 \cdot 10^4$. Eine genauere Untersuchung dieser Technik zur Erzeugung eines spinpolarisierten Bose-Einstein-Kondensats findet sich in [87].

4.3 Absorptionsabbildung

Um Atome in der Dipolfalle bzw. das Bose-Einstein-Kondensat abzubilden, wird im Experiment eine Absorptionsabbildung verwendet. Eine Skizze des experimentellen Aufbaus zeigt Abbildung 4.6A. Ein Teil der Leistung des Kühlaserlichts wird über eine Glasfaser zur Vorkammer transferiert und der Abbildungsstrahl (rot) dann horizontal in x-Richtung durch die Vakuumkammer geleitet. In der Hauptkammer trifft der Abbildungsstrahl auf das Bose-Einstein-Kondensat (BEC) und wird hinter dem Hauptfenster über eine Abbildungslinse (Modell AC254-100-B, Firma Thorlabs) auf eine CCD-Kamera (CCD, Modell XC-55, Firma Sony) mit etwa vierfacher Vergrößerung abgebildet. Zusätzlich wird über einen Hohlleiter (HL, Modell 14040 mit Adapter Modell 14094-SF40, Firma Flann) eine Mikrowelle (MW) mit einer Frequenz von ca. 6,8 GHz und einer Leistung von etwa 2,5 W durch das Hauptfenster in Richtung der Atome eingestrahlt. Die elektronische Schaltung zur Erzeugung der Mikrowelle ist in Abbildung 4.6B gezeigt. Die Mikrowellenfrequenz wird von einem Funktionsgenerator (MWFG, Modell SMR-20, Firma Rhode & Schwarz) erzeugt und über zwei Frequenzmischer (MIX, Modell ZMX-10G, Firma Mini Circuits) mit einem Radiofrequenzschalter (Modell ZYSWA-2-50DR, Firma Mini Circuits) über ein Schaltsignal (TTL) geschaltet. Durch einen Verstärker (AMP, Modell ZVE-3W-83+, Firma Mini Circuits) wird die Leistung der Mikrowelle auf maximal 3 W erhöht und dann über ein abgeschirmtes, verlustarmes SMA-Kabel zur Vakuumkammer transferiert.

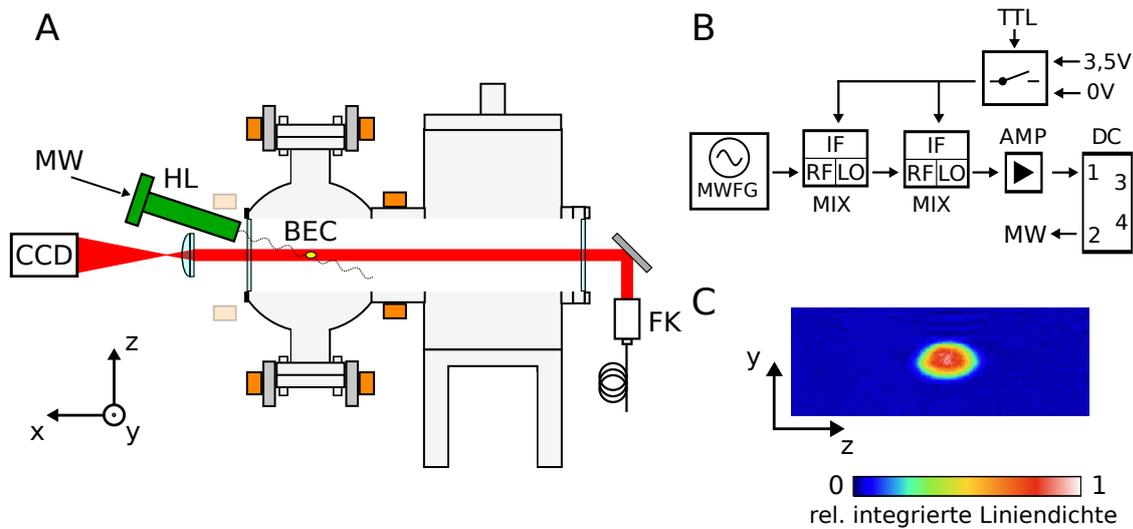


Abbildung 4.6: A: Aufbauskitze zur Zeeman-zustandsselektiven Abbildung. Die verwendeten Abkürzungen sind: FK: Faserkoppler, BEC: Bose-Einstein-Kondensat, CCD: CCD-Kamera, HL: Hohlleiter, MW: Mikrowelle B: Elektronische Schaltung zur Erzeugung der Mikrowellenfrequenz. Dabei werden abgekürzt: MWFG: Funktionsgenerator der Mikrowellenfrequenz, TTL: Schaltsignal, MIX: Mischer, AMP: Verstärker, DC: Richtkoppler. C: In Falschfarben koordierte Absorptionaufnahme eines spinpolarisierten Bose-Einstein-Kondensats mit $m_F = 0$ nach einer Flugzeit von 18 ms.

Bevor die Mikrowellenleistung den Hohlleiter erreicht, wird ein Richtkoppler (DC, Modell ZGDC35-93HP+, Firma *Mini Circuits*) passiert, an dem über die gekoppelten Ausgänge die eingehende Mikrowellenfrequenz und Leistung bzw. die in den Hohlleiter reflektierte Mikrowellenleistung geprüft werden kann. Der am Ausgang des Richtkopplers angeschlossene Hohlleiter dient als Mikrowellenantenne.

Die Lichtfrequenz des Abbildungsstrahls entspricht der Frequenz des Kühlaserlichts ω_K . Für die Abbildung wird diese resonant zum Übergang von $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ nach $|5P_{3/2}, F = 3\rangle$ (siehe Abbildung 4.3A) gewählt. Die Atome in der Dipolfalle bzw. im Bose-Einstein-Kondensat befinden sich im Zustand $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ und müssen daher für die Absorptionsabbildung erst in den Zustand $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ transferiert werden. In vorangegangenen Arbeiten am Experiment wurde dies durch zusätzliches Einstrahlen des Rückpumplaserlichts erreicht. Durch Einstrahlen einer Mikrowelle der Frequenz $\Delta_{HF} = 6,834\,682\,611$ GHz [93], welche der Hyperfeinaufspaltung entspricht, kann der Übergang von $|5S_{1/2}, F = 1\rangle$ nach $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ aber auch direkt erreicht werden. Bei der Absorptionaufnahme entsteht aufgrund von Absorption ein Schatten am Ort der Atome, der auf die CCD-Kamera abgebildet wird. Zur Bestimmung der optischen Dichte wird diese Aufnahme mit einer zweiten Aufnahme ohne Absorption der Atome verrechnet. Das Ergebnis einer solchen Absorptionaufnahme in Falschfarbendarstellung zeigt Abbildung 4.6C. Aufgetragen ist die integrierte Linien-

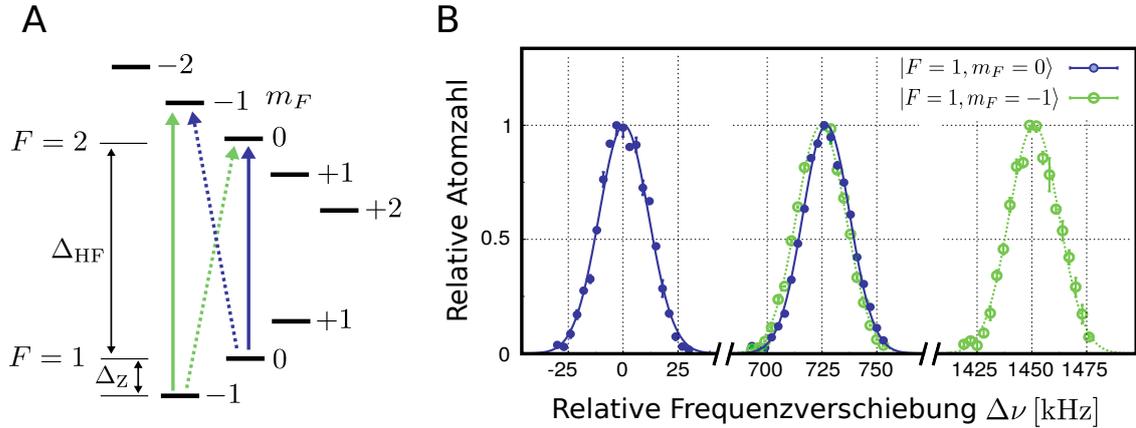


Abbildung 4.7: **A:** Termschema zur Zeeman-Aufspaltung der für die Absorption relevanten Hyperfeinniveaus $|5S_{1/2}, F=1, 2\rangle$, die hier mit $F=1, 2$ gekennzeichnet sind. Neben den Niveaus ist die magnetische Quantenzahl m_F angegeben. Die Pfeile kennzeichnen mögliche Übergänge der Zustände $|F=1, m_F=-1, 0\rangle$, die mittels der Mikrowelle getrieben werden können. **B:** Relative Atomzahl der abgebildeten Atome für die Zustände $|F=1, m_F=-1, 0\rangle$ gegen die Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ zur Frequenz Δ_{HF} . Die eingezeichneten Linien sind eine Anpassung von Gauß-Funktionen und dienen der klareren optischen Darstellung. Zur besseren Ansicht ist die x-Achse unterbrochen. Die Zeeman-Aufspaltung beträgt in dieser Messung $\Delta_Z = 725$ kHz.

dichte in Falschfarben, wobei dunkelblau einer niedrigen Dichte und weiß bzw. rot einer hohen Dichte entspricht. Zu erkennen ist eine Erhöhung der Dichte im Zentrum der Aufnahme, die räumlich mit dem Bose-Einstein-Kondensat nach einer Flugzeit von 18 ms zusammenfällt und aus der die Atomzahl über Integration bestimmt werden kann. Die Rabi-Frequenz des von der Mikrowelle getriebenen atomaren Übergangs lässt sich ermitteln, indem für verschiedene Mikrowellenpulslängen die abgebildete Atomzahl bestimmt wird. Bei der im Experiment maximalen Mikrowellenleistung und einer aus geometrischen Gründen festgelegten Einstrahlrichtung der Mikrowelle wird eine Rabi-Frequenz von etwa 28 kHz erreicht.

Nach der Evaporation in der Dipolfalle wird ein konstantes magnetisches Feld angelegt, welches zu einer Zeeman-Aufspaltung der Hyperfeinniveaus führt. Das Termschema zur Zeeman-Aufspaltung der relevanten Niveaus $|5S_{1/2}, F=1\rangle$ und $|5S_{1/2}, F=2\rangle$ für die Absorptionsabbildung zeigt Abbildung 4.7A. Die beiden Hyperfeinniveaus mit $F=1, 2$ spalten um Δ_Z entsprechend der magnetischen Quantenzahl m_F in umgekehrter Reihenfolge auf. Der Abstand zwischen den Zuständen $|F=1, m_F=0\rangle$ und $|F=2, m_F=0\rangle$ entspricht der Hyperfeinaufspaltung Δ_{HF} . Mögliche Übergänge der Atome im Zustand $|F=1, m_F=-1, 0\rangle$, die mit der Mikrowelle getrieben werden können, sind durch die Pfeile gekennzeichnet. Wird die Mikrowellenfrequenz $\nu_{MW} = \Delta_{HF}$ eingestrahlt, so ist nur der Übergang von

$|F = 1, m_F = 0\rangle$ nach $|F = 2, m_F = 0\rangle$ möglich (grün, durchgezogen). Die gestrichelten Pfeile kennzeichnen die Übergänge, die für die Mikrowellenfrequenz $\nu_{\text{MW}} = \Delta_{\text{HF}} + \Delta_Z$ möglich sind. In diesem Falle werden Atome in beiden Zuständen $|F = 1, m_F = -1\rangle$ und $|F = 1, m_F = 0\rangle$ abgebildet. Für die Frequenz $\nu_{\text{MW}} = \Delta_{\text{HF}} + 2\Delta_Z$ werden schließlich nur noch Atome im Zustand $|F = 1, m_F = -1\rangle$ abgebildet (blau). Analoge Überlegungen treffen für die Abbildung der Atome im Zustand $|F = 1, m_F = +1\rangle$ zu. Über eine Verschiebung $\Delta\nu$ der Mikrowellenfrequenz relativ zur Hyperfeinaufspaltung Δ_{HF} können also selektiv Atome unterschiedlicher magnetischer Quantenzahl m_F abgebildet werden. In Abbildung 4.7B ist die relative Anzahl der abgebildeten Atome gegen die relative Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ für die beiden Zustände $|F = 1, m_F = 0\rangle$ (blaue Punkte, durchgezogen) und $|F = 1, m_F = -1\rangle$ (grüne Kreise, gestrichelt) aufgetragen. Die Zeeman-Aufspaltung in dieser Messung beträgt $\Delta_Z = 725$ kHz. Die Atomzahl der abgebildeten Atome im Zustand $|F = 1, m_F = 0\rangle$ wird entsprechend der Erwartung maximal für $\Delta\nu = 0$, Δ_Z und die Anzahl der abgebildeten Atome im Zustand $|F = 1, m_F = -1\rangle$ maximal für $\Delta\nu = \Delta_Z, 2\Delta_Z$.

4.4 Optisches Gitter

Zur Erzeugung des optischen Gitterpotentials werden zwei zueinander phasenstabilisierte, entgegengerichtete Laserstrahlen benötigt. Im Experiment wird dazu dieselbe Laserlichtquelle für beide Lichtpfade verwendet. Eine Aufbauskitze zeigt Abbildung 4.8. Als Gitterlaser (GL) wird ein trapezverstärkter Diodenlaser (Modell: *DLX 110*, Firma: *Toptica*) mit einer Ausgangsleistung von etwa 800 mW bei einer Wellenlänge von $\lambda_l = 783,45$ nm verwendet. Nach dem optischen Isolator (OI) dient ein Teil der Leistung zur Überprüfung der Modenstabilität über ein Fabry-Perot-Interferometer und der Wellenlänge über ein Spektrometer (Modell: *Angstrom WS6*, Firma: *High Finesse*). Nach einer Verschlussblende zum Blocken des Laserstrahls wird ein holographisches Reflexionsgitter (RG, Modell: *PLR808-92.5-13-17.5-1.5*, Firma: *Ondax Inc*) zur spektralen Filterung des Laserlichts verwendet. Der Laserstrahl wird zweimal am holographischen Gitter reflektiert, um einen spektral breiten Untergrund des Diodenlasers möglichst effizient zu unterdrücken. Dann wird der Laserstrahl auf über einen Strahlteilerwürfel auf zwei Teilstrahlen gleicher Leistung aufgeteilt. Für beide Teilstrahlen wird ein AOM (AOM 1/2, Modell: *3200-121*, Firma *Crystal Technology*) verwendet, um die Intensität des Laserstrahls einzustellen und die Frequenz zu modulieren. Nach dem AOM wird die erste Beugungsordnung in einen Faserkoppler (FK) eingekoppelt. Über eine polarisationserhaltende Glasfaser wird das Licht zur Vakuumkammer transferiert.

Der rechte Teil der Abbildung zeigt den Strahlengang an der Vakuumkammer. Die beiden Laserstrahlen werden oberhalb (von AOM 2 moduliertes Licht) und unterhalb

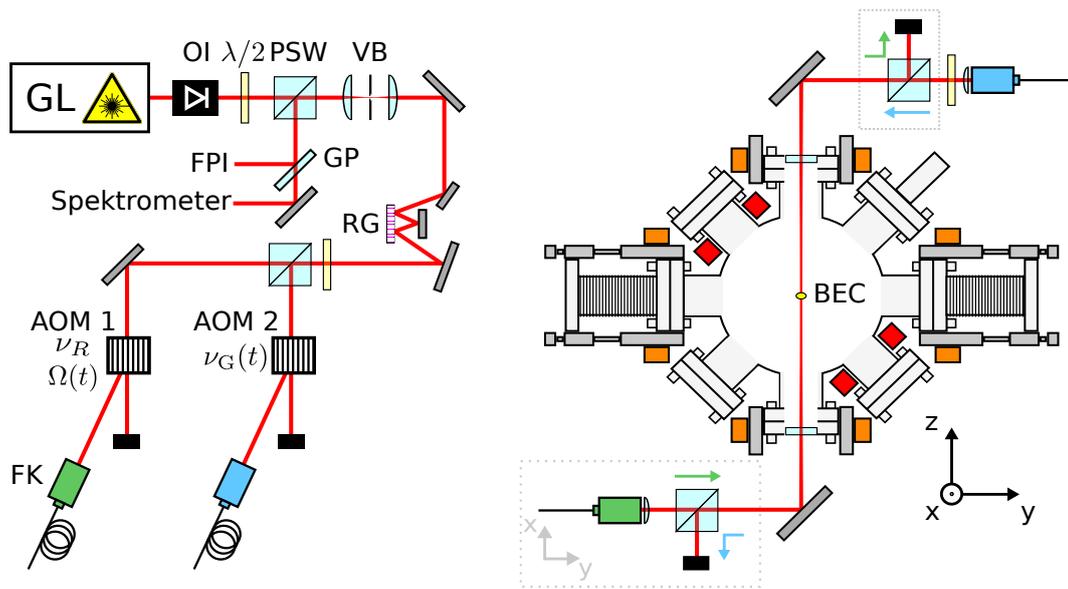


Abbildung 4.8: Aufbauskitze zur Realisierung des optischen Gitters. Links ist der Aufbau zur Strahlanalyse, der Aufteilung auf die beiden Pfade des optischen Gitters, der Modulation und der Einkopplung der beiden Strahlen in die Glasfasern dargestellt. Neben den AOMs sind die Treiberfrequenzen ν_R und $\Omega(t)$ für den Selektionspuls und die biharmonische Modulation bzw. ν_G für die Gravitationskompensation angegeben, die am jeweiligen AOM verwendet werden (siehe Haupttext und Abbildung 4.9). Rechts wird der Strahlengang der beiden Pfade nach Auskopplung aus der Glasfaser an der Vakuuhauptkammer skizziert. Die perspektivisch geänderten Bereiche in der Skizze sind durch grau gestrichelte Kästen markiert. Der PSW im oberen Kasten ist um die Strahlachse rotierbar, die Optik im unteren Kasten ist auf dem optischen Tisch in der XY-Ebene aufgebaut. Die Abkürzungen sind: *GL*: Gitterlaser, *OI*: Optischer Isolator, $\lambda/2$: $\lambda/2$ -Verzögerungsplatte, *PSW*: Polarisierender Strahlteilerwürfel, *VB*: Verschlussblende, *RG*: Reflexionsgitter, *GP*: Glasplatte, *FPI*: Fabry-Perot-Interferometer, *FK*: Faserkoppler

(von AOM 1 modulierte Licht) der Vakuummkammer aus der Glasfaser ausgekoppelt und dann in vertikaler Richtung gegenläufig durch die Vakuummkammer geleitet. Die typische Lichtleistung hinter den Faserauskopplern beträgt etwa 45 mW auf beiden Pfaden. Durch die Faserauskoppler (Modell: *60FC-4-M8-10*, Firma: *Schäfter+Kirchhoff*) wird ein gemeinsamer Fokus mit einer Breite von 300 μm am Ort des Bose-Einstein-Kondensats (BEC) eingestellt. Der Rayleigh-Bereich beträgt etwa 180 mm [80]. Hinter der Vakuummkammer werden die Laserstrahlen dann über Strahlteilerwürfel ausgekoppelt, um Rückreflexionen zu vermeiden. In der Abbildung ist zu beachten, dass der unterhalb der Kammer mit einem graugestrichelten Kasten markierte Bereich in der XY-Ebene aufgebaut ist, so dass die beiden Laserstrahlen zunächst orthogonal zueinander polarisiert sind und daher am Strahlteilerwürfel hinter der Vakuummkammer ausgekoppelt werden. Bei orthogonalen Polarisationsrichtungen verschwindet nach

(2.47) der Interferenzterm und damit das optische Gitterpotential. Der Strahlteilerwürfel oberhalb der Vakuumkammer ist deshalb um die Strahlachse drehbar, so dass ein Kompromiss aus Gitterpotentialtiefe und ausgekoppelter Strahlleistung gefunden werden kann. Obwohl zueinander parallele Polarisationsrichtungen der Gitterlaserstrahlen die Gitterpotentialtiefe maximieren, ist diese Konfiguration für das vorliegende Experiment keine Wahl, da für die Raman-Übergänge, die bei der Geschwindigkeitsselektion verwendet werden, sowohl $\sigma^{+/-}$ als auch π -Polarisationsanteile nötig sind. Der Verkippwinkel des Strahlteilerwürfels ist typischerweise so gewählt, dass die Polarisationsrichtungen nahezu orthogonal zueinander stehen. Bei der gewählten Konfiguration wird eine maximale Gitterpotentialtiefe von etwa $9 E_r$ erreicht.

Im Experiment wird das Bose-Einstein-Kondensat in der optischen Dipolfalle erzeugt und dann das Dipolfallenpotential abgeschaltet. Es kommt zur freien Expansion des Kondensats und die Atome werden aufgrund der Gravitation in vertikaler Richtung beschleunigt. Damit das optische Gitter im Ruhesystem der Atome ein unbeschleunigtes Gitterpotential erzeugt, muss die optische Stehwelle in $-z$ -Richtung mit der Erdbeschleunigung g beschleunigt werden. Die Geschwindigkeit der optischen Stehwelle ist über

$$v = \lambda_l/2 \cdot \Delta\nu \quad (4.2)$$

gegeben, wobei $\Delta\nu$ eine Frequenzverschiebung zwischen den beiden Laserstrahlen des optischen Gitters meint [94]. Entsprechend wird das optische Gitterpotential über eine Frequenzrampe linear beschleunigt. Um die Gravitationsbeschleunigung zu kompensieren, wird eine Frequenzrampe der Form

$$\nu_G = \nu_c + 2g/\lambda_l \cdot t \quad (4.3)$$

als treibende Frequenz am AOM 2 verwendet, wobei $\nu_c = 200$ MHz die zentrale Treiberfrequenz meint.

Zur Untersuchung des atomaren Transports soll das optische Gitterpotential biharmonisch moduliert werden (siehe Abschnitt 3.2). Dazu wird die Frequenz von einem der beiden Laserstrahlen des optischen Gitters (über AOM 1) periodisch mit der Frequenz $\Omega(t)$ (3.24) moduliert. Eine Skizze der elektronischen Schaltung zur Erzeugung der benötigten Radiofrequenzen für die AOMs des optischen Gitters zeigt Abbildung 4.9. Die zentrale Treiberfrequenz der verwendeten AOMs liegt bei 200 MHz. Zur Erzeugung der Frequenzrampe, der Frequenz für den geschwindigkeitsselektierenden Raman-Puls (FG Grav bzw. FG Raman, Modell AFG3102C, Firma *Tektronix*) bzw. der biharmonischen Frequenzmodulation (FG MOD, Modell WW2571, Firma *Tabor*) werden Arbiträrunktionsgeneratoren eingesetzt, deren maximale Trägerfrequenz 100 MHz beträgt. Als Trägerfrequenz ν_c dieser Signale wird daher 47 MHz gewählt und diese Frequenz mit einer Frequenz von 153 MHz eines wei-

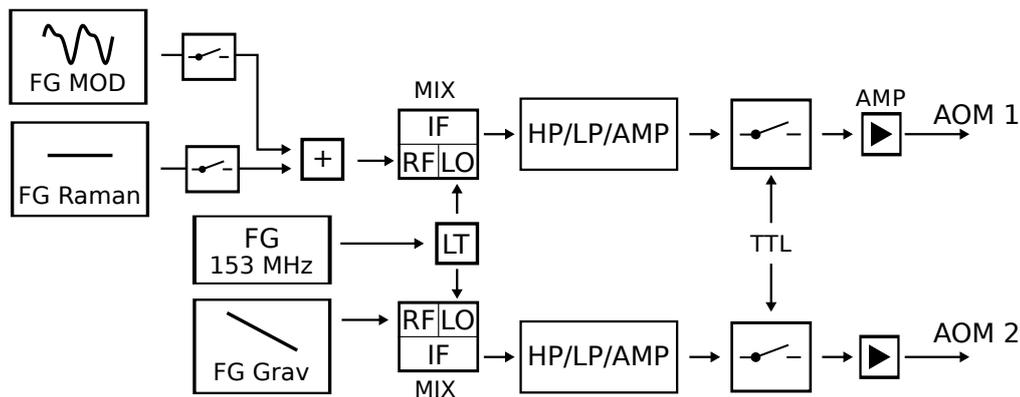


Abbildung 4.9: Skizze der elektronischen Schaltung zur Erzeugung der Radiofrequenzen für die AOMs des optischen Gitters. Es werden folgende Abkürzungen verwendet: *FG MOD/Raman/153 MHz/Grav*: Verschiedene Funktionsgeneratoren, *+*: RF-Kombinierer, *LT*: RF-Leistungsteiler, *MIX*: Mischer, *HP/LP*: Hochpass/Tiefpass, *AMP*: Verstärker, *TTL*: Schaltsignal

teren Funktionsgenerators (Modell: *HM8134-2*, Firma: *Hameg*) hochgemischt. Dazu wird das Signal über einen Leistungsteiler aufgeteilt und dann über je einen Mischer mit der Frequenzrampe der Gravitationskompensation bzw. dem kombinierten Signal der Frequenz des Selektionspulses bzw. des biharmonisch frequenzmodulierten Signals gemischt. Beide gemischten Signale passieren dann eine Kombination von Hoch- bzw. Tiefpässen und anschließenden Verstärkern zur Selektion der Frequenzsumme des Mischerausgangssignals. Die Schaltung unterdrückt das Differenzsignal der beiden Eingangssignale an den Frequenzmischern, führt aber auch zu einer leichten Frequenzabhängigkeit der Radiofrequenzleistung von der Eingangsfrequenz. Details zu dieser Schaltung finden sich in [28]. Zuletzt können beide Radiofrequenzen mit einem gemeinsamen Schaltsignal über zwei RF-Schalter geschaltet werden, bevor sie abschließend über je einen Verstärker (Modell: *ZHL-1-2W-BNC*, Firma: *Mini Circuits*) zur jeweiligen Treiberfrequenz der beiden AOMs verstärkt werden.

Eine Frequenzänderung der Treiberfrequenz eines akusto-optischen Modulators geht mit einer Austrittswinkeländerung der ersten Beugungsordnung einher, wie bereits bei der Umladerate der Atome in die optische Dipolfalle erwähnt. Beim Aufbau zur Realisierung des optischen Gitters führt eine Winkeländerung der ersten Beugungsordnung zu einer Änderung des Strahlengangs bei der Einkopplung in die jeweilige Glasfaser. Eine zu hohe Abweichung von der zentralen Treiberfrequenz, auf welche die Einkopplung in die Glasfaser optimiert ist, resultiert in einer Abnahme der durch die Glasfaser transmittierten optischen Leistung. Während der Wechselwirkungsdauer der Atome mit dem optischen Gitterpotential, welche durch das Aufheizen der Atome aufgrund von Streuung auf maximal 10 ms beschränkt ist, wird die Frequenz durch die Frequenzrampe zur Kompensation der Gravitationsbeschleunigung

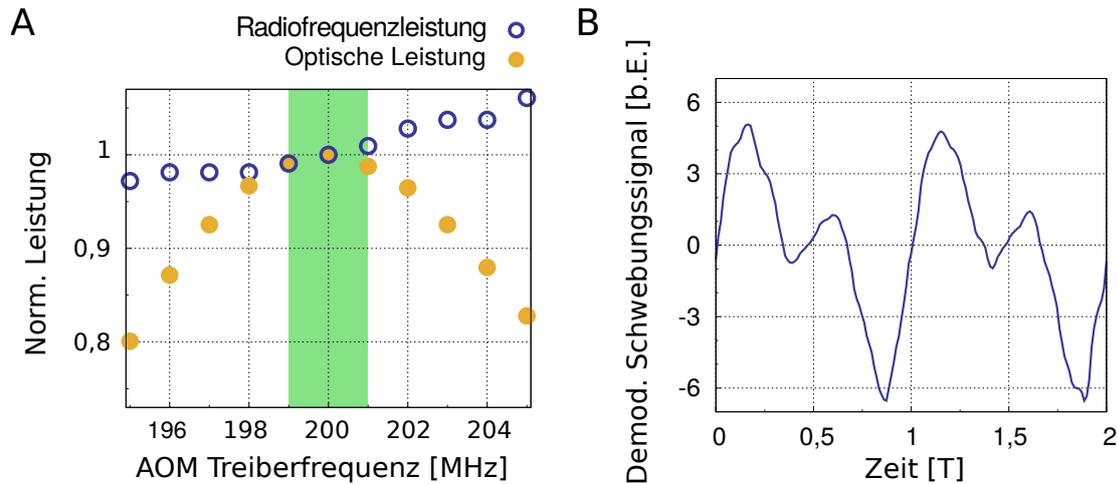


Abbildung 4.10: **A:** Einfluss der Treiberfrequenz auf die Ausgangsleistung der Radiofrequenzschaltung in Abbildung 4.9 und auf die durch die Glasfaser transmittierte optische Leistung. Die angegebene Leistung ist auf die Leistung für die zentrale Frequenz 200 MHz normiert. **B:** Demoduliertes Schwebungssignal zwischen dem Licht der beiden optischen Gitterpfade im Falle einer biharmonischen Frequenzmodulation auf einen der Pfade und einer konstanten Frequenzverschiebung auf dem anderen Pfad. Das Signal wird von einer schnellen Photodiode detektiert und über einen Spektrumanalysator demoduliert. Aufgetragen ist die der Logarithmus der zeitlichen Änderung der Amplitude des Signals am Spektrumanalysator für eine etwas zur Differenzfrequenz der beiden optischen Gitterpfade verschobene Frequenz. Die Parameter der biharmonischen Modulation lauten $\Omega_0 = 2\pi \cdot 31,2 \text{ kHz}$, $\beta = 0,923$, $\omega_m = 2\pi \cdot 24 \text{ kHz}$ und $\theta = 0,262$.

nur um etwa 250 kHz geändert. Die Modulationsamplitude Ω_0 der biharmonischen Frequenzmodulation (3.24) ist hingegen zunächst unbeschränkt. Eine zu hoch gewählte Modulationsamplitude führt zu einer ungewollten Amplitudenmodulation des durch die Glasfaser transmittierten Lichts. Um dies zu vermeiden, wurde der Einfluss der Treiberfrequenz des AOMs, die im Experiment biharmonisch frequenzmoduliert werden soll, auf die optische Leistung hinter der Glasfaser untersucht. Das Ergebnis zeigt Abbildung 4.10A. Betrachtet wird die Ausgangsleistung der Radiofrequenzschaltung (blaue Kreise) und die optische Leistung hinter der Glasfaser (gelbe Punkte), welche beide auf die jeweilige Leistung bei der zentralen Treiberfrequenz von 200 MHz normiert sind. Die Radiofrequenzleistung zeigt eine leichte Abhängigkeit von der Eingangsfrequenz der Schaltung aufgrund der Kombination aus verschiedenen Hoch- bzw. Tiefpässen hinter dem Frequenzmischer. Einen deutlich höheren Verlust zeigt die durch die Glasfaser transmittierte Lichtleistung, welche bei einer Abweichung von $\pm 5 \text{ MHz}$ von der zentralen Treiberfrequenz um etwa 20% abnimmt. Um die Abhängigkeit zu minimieren, könnte statt der direkten Einkopplung der ersten Beugungsordnung des AOMs die Beugungsordnung zuerst in den AOM retro-

reflektiert werden. Die Winkelabhängigkeit wird durch diesen Aufbau aufgehoben, aber die Beugungseffizienz nimmt deutlich ab und damit auch die Lichtleistung des optischen Gitters. In grüner Schattierung ist der für die in der vorliegenden Arbeit gewählte Bereich der Modulationsamplitude Ω_0 markiert, in dem die optische Leistung hinter der Glasfaser nur um maximal 1.5% abweicht.

Zur qualitativen Überprüfung der korrekten Frequenzmodulation wird das Licht der beiden optischen Gitterpfade überlagert und das Schwebungssignal mit einer schnellen Photodiode detektiert. Die Frequenz des einen Pfades ist dabei um wenige MHz verschoben, die Frequenz des anderen Pfades wird biharmonisch moduliert. Das Schwebungssignal kann über einen Spektrumanalysator demoduliert werden, indem die Amplitude einer leicht zur Trägerfrequenz verschobenen Frequenz logarithmisch aufgetragen und die zeitliche Änderung bei verschwindender Frequenzspanne am Spektrumanalysator betrachtet wird. Vereinfacht ausgedrückt ändert sich die Amplitude der betrachteten Frequenz, da sich die Frequenz maximaler Amplitude durch die Frequenzmodulation verschiebt. Die zeitlich aufgetragene Amplitudenänderung ist in erster Ordnung linear zur Frequenzänderung, solange die Modulationsamplitude nicht zu hoch gewählt wird. Das Ergebnis eines auf diese Weise demodulierten Schwebungssignals zeigt Abbildung 4.10B. Aufgetragen ist das demodulierte Schwebungssignal der Photodiode gegen die Zeit in Einheiten der Periodendauer T der biharmonischen Modulation. Die Parameter der Modulation sind in der Bildunterschrift gegeben. Die so ermittelte Differenzfrequenz zwischen den beiden optischen Gitterpfaden bestätigt qualitativ den erwarteten biharmonischen Verlauf.

4.5 Geschwindigkeitsselektion

Zur Untersuchung atomarer Transportresonanzen ist eine möglichst geringe Impulsbreite des anfänglichen Bose-Einstein-Kondensats erwünscht. Grund dafür ist zum einen die im Abschnitt 3.5 beschriebene Asymmetrie der Entwicklungskoeffizienten der Floquet-Zustände, die zu einem nicht verschwindenden mittleren Impuls selbst im Falle einer symmetrischen Modulation führen kann. Zum anderen müssen bei zunehmender Impulsbreite des Anfangszustands auch der Einfluss vermiedener Kreuzungen an Stellen des Energiespektrums mit Quasiimpuls $q \neq 0$ berücksichtigt werden. Eine zu hohe atomare Impulsbreite erschwert oder verhindert die Beobachtung und Untersuchung einer einzelnen Transportresonanz.

Die anfängliche Impulsbreite des Kondensats im optischen Gitterpotential ergibt sich aus der Umwandlung der inneren Energie in kinetische Energie während der freien Expansion nach Abschalten des optischen Dipolfallenpotentials und vor Einschalten des optischen Gitterpotentials. Letztlich bestimmt die Dipolfallentiefe am Ende

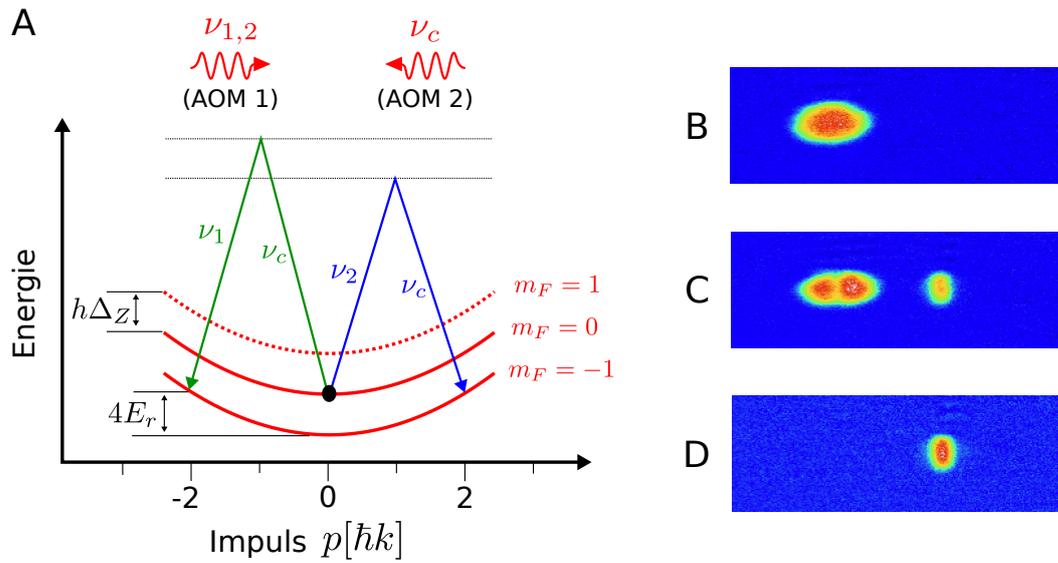


Abbildung 4.11: A: Vereinfachtes Energieschema zur Veranschaulichung der möglichen Raman-Übergänge. B: Absorptionsoaufnahme des spinpolarisierten Bose-Einstein-Kondensats mit $m_F = 0$ ohne geschwindigkeitsselektierenden Puls. C: Absorptionsoaufnahme nach einem Raman-Puls $|m_F = 0, 0\hbar k\rangle \rightarrow |m_F = -1, 2\hbar k\rangle$. Abgebildet sind die Atome beider Zustände $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$. D: Absorptionsoaufnahme wie in C, jedoch werden nur Atome im Zustand $|m_F = -1\rangle$ abgebildet.

der evaporativen Kühlphase die mittlere Temperatur des atomaren Gases und damit auch die Impulsbreite. Die Dipolfallentiefe kann im vorliegenden Experiment nicht beliebig niedrig gewählt werden, da irgendwann die nötige Dipolfallenkraft, die zur Kompensation der Gravitationskraft nötig ist, unterschritten wird und die Atome aus der Falle entweichen. Eine mögliche, aber technisch aufwendigere Lösung wäre, über eine andere externe (z.B. magnetische) Kraft die Gravitation zu kompensieren und so über eine adiabatische Expansion des Kondensats oder über andere Kühlmethode die Impulsbreite zu reduzieren. Im vorliegenden Experiment wird zur Reduktion der Impulsbreite ein geschwindigkeitsselektiver Raman-Puls verwendet, der einen Ausschnitt des Kondensats mit geringerer Impulsbreite in einen anderen Zeeman-Zustand transferiert, der dann selektiv über die Absorptionsoaufnahme abgebildet wird [95, 96].

Ein vereinfachtes Energieschema zur Veranschaulichung der möglichen Raman-Übergänge zeigt Abbildung 4.11A. Der schwarze Punkt kennzeichnet den Anfangszustand $|m_F = 0, 0\hbar k\rangle$ des Bose-Einstein-Kondensats. Verstimmt man die Treiberfrequenz von einem der beiden AOMs (AOM 1) des optischen Gitters zur zentralen Frequenz ν_c um $\delta = \Delta_Z - 4E_r/h$, so gibt es zwei Frequenzen $\nu_{1,2}$, für die ein Raman-Übergang in den Zeeman-Zustand mit $m_F = -1$ stattfinden kann. Für die Frequenz $\nu_1 = \nu_c + \delta$ wird ein Photon der Frequenz ν_c mit Impuls $-\hbar k$ (AOM 2) absorbiert und

ein Photon der Frequenz ν_1 in mit Impuls $+\hbar k$ (AOM1) stimuliert emittiert. Durch diesen Prozess findet ein Impulsübertrag von $-2\hbar k$ statt. Umgekehrt wird bei der Frequenz $\nu_2 = \nu_c - \delta$ ein Photon der Frequenz ν_2 mit Impuls $+\hbar k$ absorbiert und ein Photon der Frequenz ν_c mit Impuls $-\hbar k$ stimuliert emittiert und so das Atom in den Zustand $|m_F = -1, +2\hbar k\rangle$ übertragen.

Die Impulsbreite des Kondensats wird über die räumliche Ausdehnung des Kondensats für verschiedene Expansionszeiten bestimmt. Im Experiment wird zunächst ein Bose-Einstein-Kondensat im Zeeman-Zustand $|m_F = 0, 0\hbar k\rangle$ mit einer anfänglichen Impulsbreite von $\Delta p = 0,8\hbar k$ erzeugt. Eine Absorptionsaufnahme des Kondensats zeigt Abbildung 4.11B. Über einen Raman-Puls mit einer Pulslänge von $320 \mu\text{s}$ wird ein Teil der Atome in den unteren Zeeman-Zustand $|m_F = -1, +2\hbar k\rangle$ transferiert. Die mittlere Geschwindigkeit der Atome von $+2\hbar k$ muss in den anschließenden Gitterexperimenten durch eine konstante Frequenzverschiebung (4.2) berücksichtigt werden, um im Ruhesystem der Atome weiterhin ein statisches optisches Gitterpotential zu erzeugen. Eine Absorptionsaufnahme, in der die Atome beider Zeeman-Zustände $|m_F = 0\rangle$ und $|m_F = -1\rangle$ abgebildet sind, zeigt Abbildung 4.11C. Um schließlich nur den Transport der selektierten Atome zu untersuchen, ist die Mikrowellenfrequenz $\nu_{\text{MW}} = \nu_{\text{HF}} + 2\Delta_Z$ so gewählt, dass nur die Atome im Zeeman-Zustand $|m_F = -1\rangle$ in der Absorptionsaufnahme abgebildet werden, wie in Abbildung 4.11D gezeigt. Die Impulsbreite des selektierten Wellenpakets sinkt mit steigender Lichtpulslänge. Die mit dieser Methode erreichbare minimale Impulsbreite ist hauptsächlich durch die Stabilität der externen Magnetfelder bestimmt. Über den optimierten Selektionspuls wird die anfängliche atomare Impulsbreite von etwa $0,8\hbar k$ auf etwa $0,2\hbar k$ reduziert.

Die Zeeman-Aufspaltung wird nach der Erzeugung des Bose-Einstein-Kondensats über die Offsetspulen eingestellt. Damit es nicht ungewollt zu resonanten Raman-Übergängen aufgrund der biharmonischen Modulation während der Wechselwirkung mit dem optischen Gitterpotential kommt, wird die Zeeman-Aufspaltung deutlich höher als die Modulationsamplitude Ω_0 der Frequenzmodulation (typischerweise $100 - 300 \text{ kHz}$) gewählt. Das Offset-Magnetfeld während der Geschwindigkeitsselektion, der Wechselwirkung mit dem optischen Gitterpotential und während der Absorptionsabbildung wurde so eingestellt, dass sich eine Zeeman-Aufspaltung von $\Delta_Z = 2 \text{ MHz}$ ergibt.

Atomarer Transport der Quantenkippratsche

Das vorliegende Kapitel behandelt die experimentellen Ergebnisse zur Dynamik der Atome im Falle eines zeitlich biharmonisch modulierten optischen Gitterpotentials. Die atomaren Transporteigenschaften werden über den mittleren Impuls der Atome untersucht. Insbesondere wird die Bifurkation einer einzelnen Transportresonanz beobachtet, wie sie unter Variation eines zweiten Kontrollparameters vorhergesagt wird. Zunächst wird eine Einführung zur Bestimmung des mittleren atomaren Impulses aus den experimentellen Flugzeitbildern gegeben. Dann wird die Abhängigkeit des Impulses vom Startzeitpunkt der Modulation untersucht. In den darauf folgenden Messergebnissen wird der mittlere Impuls der Atome über den Startzeitpunkt t_0 gemittelt und dann als gemittelter Impuls bezeichnet. Es werden die zeitliche Entwicklung und die Abhängigkeit des gemittelten Impulses von der Modulationsfrequenz besprochen. Über die Wahl der Modulationsfrequenz kann die Detektion einzelner oder einer Kombination mehrerer Transportresonanzen beeinflusst werden. Danach werden weitere Symmetrieeigenschaften der Quantenkippratsche untersucht. Schließlich folgt die Untersuchung einer einzelnen Transportresonanz, die sich unter Variation der Modulationsamplitude in zwei Resonanzen aufspaltet und so das erwartete Bifurkationsszenario widerspiegelt.

5.1 Gemittelter atomarer Impuls

Messung des mittleren atomaren Impulses

Im Experiment wird zur Untersuchung des atomaren Transports der mittlere atomare Impuls bestimmt. Dazu folgt nach der Wechselwirkung mit dem modulierten op-

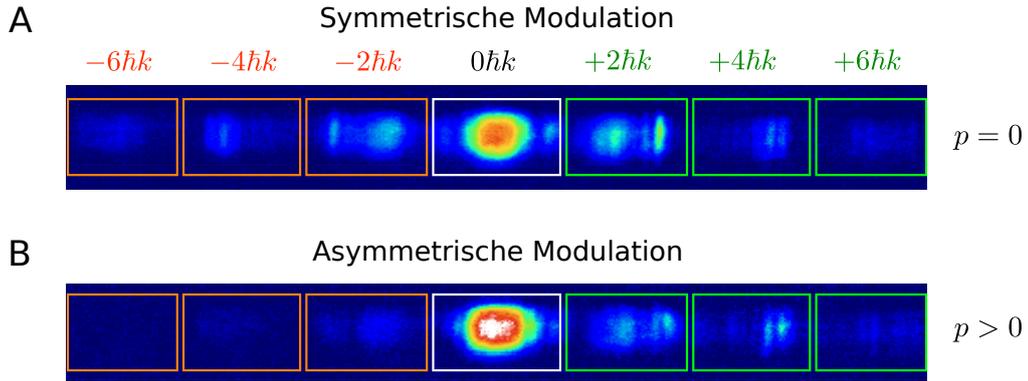


Abbildung 5.1: Darstellung zur Bestimmung des mittleren atomaren Impuls p . Nach der Wechselwirkung mit dem modulierten optischen Gitterpotential trennen sich die Beugungsordnungen während der freien Expansion voneinander. Der n -ten Beugungsordnung kann eine Geschwindigkeit $n \cdot 2\hbar k$ zugeordnet und so der mittlere atomare Impuls bestimmt werden. Die horizontale Achse der Absorptionsspektren entspricht der optischen Gitterachse. **A:** Absorptionsspektren für ein symmetrisch moduliertes optisches Gitter ($\theta = 0$). **B:** Absorptionsspektren für ein asymmetrisch moduliertes optisches Gitter ($\theta = -3\pi/4$). Die Parameter der Modulation lauten $\Omega_0 = 241,8 \text{ kHz}$, $\beta = 12/13 \approx 0,923$, $\omega_m = 24 \text{ kHz} \approx 6,42\omega_r$, $V_0 = 8,9E_r$ und $N = 50$.

tischen Gitterpotential eine freie Expansionsphase von 15 – 20 ms. Nach dieser Zeit sind die verschiedenen Beugungsordnungen voneinander getrennt. Jeder Beugungsordnung kann ein mittlerer Impuls der Atome zugeordnet werden. Die Zuordnung ist in Abbildung 5.1 für zwei Beispiele nach der Wechselwirkung mit einem symmetrisch modulierten (A) bzw. einem asymmetrisch modulierten (B) optischen Gitterpotential dargestellt. Die Absorptionsspektren werden in verschiedene Regionen unterteilt, deren zugeordneter Impuls der Atome ein positives (grün) bzw. negatives (orange) Vielfaches $n \cdot 2\hbar k$ entsprechend der jeweiligen Beugungsordnung beträgt. Der mittlere atomare Impuls des Kondensats wird bestimmt, indem der relative Anteil b_n der Atome in der n -ten Beugungsordnung mit dem jeweiligen mittleren Impuls $n \cdot 2\hbar k$ der Atome in dieser Beugungsordnung multipliziert und schließlich über alle Beugungsordnungen summiert wird,

$$p = \sum_n b_n \cdot 2n\hbar k. \quad (5.1)$$

Aufgrund der begrenzten Sensitivität und des Kontrasts der CCD-Kamera wird die Auswertung auf die Beugungsordnungen mit $n = -3 \dots 3$ beschränkt. Der so ermittelte Impuls p verschwindet für das Beispiel einer symmetrischen Modulation in Abbildung 5.1A, da sich die Beiträge mit entgegengesetzten Impuls aufheben. Für das Beispiel einer asymmetrischen Modulation in Abbildung 5.1B erkennt man eine asymmetrische Verteilung der Atome im Beugungsmuster, aus der ein Impuls $p > 0$ resultiert.

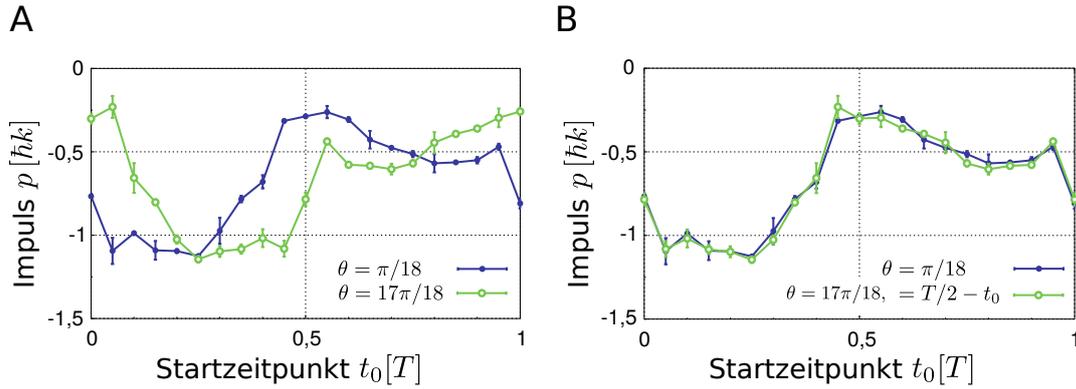


Abbildung 5.2: Mittlerer atomarer Impuls p gegen den Startzeitpunkt $t_0 \in [0, T]$ mit $T = \omega_m^{-1}$ für die Phasenverschiebung $\theta = \pi/18$ und $\theta = 17\pi/18$. **A:** Experimentelle Daten ohne Transformation. **B:** Mit der Transformation $t_0^* = T/2 - t_0$ ist der Verlauf für beide Phasenverschiebungen identisch. Die weiteren experimentellen Parameter sind $\Omega_0 = 241,8 \text{ kHz}$, $\beta = 12/13 \approx 0,923$, $\omega_m = 24 \text{ kHz} \approx 6,42\omega_r$, $V_0 = 8,9E_r$ und $N = 100$. Die eingezeichneten Linien dienen der klareren optischen Darstellung.

Abhängigkeit vom Startzeitpunkt der Modulation

Als Erstes wird die Abhängigkeit des mittleren atomaren Impulses vom Startzeitpunkt t_0 der Modulation untersucht. In Abbildung 5.2A ist der atomare Impuls p für zwei Situationen $\theta = \pi/18$ (blaue Punkte) und $\theta = 17\pi/18$ (grüne Kreise) gegen den Startzeitpunkt t_0 in Einheiten der Periode $T = 2\pi/\omega_m$ aufgetragen. Die übrigen Parameter der biharmonischen Modulation sind hier und im Folgenden in der Bildunterschrift gegeben. In beiden Situationen hängt der mittlere Impuls der Atome stark vom Startzeitpunkt der Modulation ab. Die Abhängigkeit von Startzeitpunkt kann als Indiz der Beobachtung von Quantentransport gedeutet werden. Der Impuls der Atome hängt quantenmechanisch selbst im asymptotischen Grenzfall $t \rightarrow \infty$ vom Startzeitpunkt t_0 der Modulation ab, während der Limes beim klassischen Transport aufgrund der Ergodizität unabhängig vom Startzeitpunkt ist (siehe Abschnitt 3.2).

Die beobachtete Abhängigkeit des mittleren atomaren Impulses vom Startzeitpunkt t_0 der Modulation zeigt eine Symmetrie, welche nach einer Transformation des Startzeitpunkts

$$t_0 \rightarrow t_0^* = T/2 - t_0 \quad (5.2)$$

klarer erkennbar ist. In Abbildung 5.2B ist diese Transformation des Startzeitpunkts für den Fall $\theta = 17\pi/18$ angewendet. Im Rahmen der experimentellen Unsicherheit ist die Abhängigkeit vom Startzeitpunkt nach der Transformation für beide Situationen identisch, so dass für den mittleren Impuls

$$p(\theta, t_0) = p(\pi - \theta, T/2 - t_0) \quad (5.3)$$

gilt. Aus theoretischer Sicht ergibt sich diese Symmetrie aus der Invarianz des Hamilton-Operators in (3.1) unter der simultanen Transformation (5.2) des Startzeitpunkts und der Phasenverschiebung

$$\theta \rightarrow \theta^* = \pi - \theta \quad (5.4)$$

bei gleichzeitiger Umkehr von Ort und Zeit und komplexer Konjugation [97]. Die Symmetrie ist eine Folge der biharmonischen Modulation und eine vorhergesagte Eigenschaft des Quantentransports der Kippratsche, welche im Experiment bestätigt wird.

Um die Abhängigkeit des mittleren Impulses vom Startzeitpunkt t_0 der Modulation in den folgenden Ergebnissen des Kapitels aufzuheben, wird der mittlere Impuls der Atome für 8 äquidistante Startzeitpunkte über eine Periode T gemittelt,

$$\langle p \rangle = \sum_{j=0}^7 p(t_0 = j \cdot T/8) / 8, \quad (5.5)$$

und dann als gemittelter Impuls bezeichnet. Der gemittelte Impuls erlaubt die Untersuchung der in Abschnitt 3.3 beschriebenen Transporteigenschaften und Symmetrien, die sich allgemein nur im zeitlichen Mittel ergeben und für die Beobachtung des Bifurkationsszenarios relevant sind. Weiterhin verschwindet erst über die zeitliche Mittelung der asymptotische Anteil p_{asym} des Impulses in (3.11) im Falle einer symmetrischen Modulation.

Zeitliche Entwicklung des gemittelten Impulses

Als Nächstes wird die zeitliche Entwicklung des gemittelten Impulses behandelt. Abbildung 5.3A zeigt den gemittelten Impuls gegen die Anzahl an Modulationsperioden für ein Bose-Einstein-Kondensat mit einer Impulsbreite von $0,8\hbar k$ (grüne Kreise) und für ein Kondensat nach Geschwindigkeitsselektion mit einer Impulsbreite von $0,2\hbar k$ (blaue Punkte). Für die geringere Impulsbreite steigt der Betrag des gemittelten Impulses zunächst an und erreicht nach etwa 20 Perioden den Maximalwert. Danach sinkt die Amplitude des Impulses wieder und der Verlauf folgt einer Oszillation um den Mittelwert von etwa $-0,5\hbar k$. Im Falle der höheren Impulsbreite $0,8\hbar k$ nimmt die Dämpfung deutlich zu. Der Impulsbetrag, gegen den der gemittelte atomare Impuls konvergiert, ist leicht niedriger als der Grenzwert für die schmalere Impulsbreite. Eine mögliche Erklärung hierfür wäre, dass der relative Anteil der transportierten Atome bei höherer Impulsbreite abnimmt und so der Impulsbetrag (5.1) sinkt.

Die Oszillation kann als Folge einer Schwebung, welche durch den Term p_{beat} in (3.11) beschrieben wird, gedeutet werden. Der Anfangszustand des Bose-Einstein-

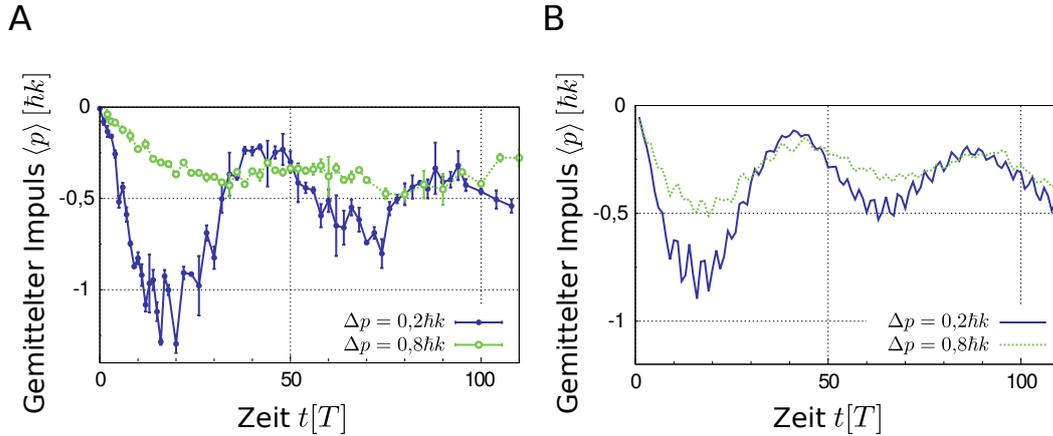


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung des gemittelten Impulses $\langle p \rangle$ für zwei verschiedene Impulsbreiten $\Delta p = 0,2\hbar k$ (blaue Punkte) und $\Delta p = 0,8\hbar k$ (grüne Kreise). **A:** Experimentelle Daten. Für $\Delta p = 0,2\hbar k$ ist ein oszillatorischer Verlauf erkennbar, der für $\Delta p = 0,8\hbar k$ stark gedämpft ist. Die eingezeichneten Linien dienen der klareren optischen Darstellung. **B:** Simulation des gemittelten Impulses $\langle p \rangle$. Qualitativ stimmt die zeitliche Entwicklung mit den experimentellen Daten überein. Die experimentellen Parameter sind $\Omega_0 = 93,6$ kHz, $\beta = 12/13 \approx 0,923$, $\theta = \pi/2$, $\omega_m = 59,4$ kHz $\approx 15,9\omega_r$ und $V_0 = 8,9E_r$.

Kondensats kann nach (3.8, 3.9) in der Floquet-Basis entwickelt werden. Zu Anfang befinden sich die Atome hauptsächlich im Grundzustand des Floquet-Bandspektrums. Durch die Kopplung mit einem höheren Floquet-Band kommt es zur Vermischung der Floquet-Zustände. Diese resultiert in einer Oszillation des Impulses um den asymptotischen Grenzwert des zeitlichen Mittelwerts (vgl. mit Abbildung 3.1). Aufgrund der Dephasierung zwischen den verschiedenen Impulsen innerhalb der anfänglichen Impulsbreite des Kondensats kommt es zu einer Dämpfung der Oszillation. Die Dephasierung kann auch als eine Selbstmittelung des Impulses interpretiert werden, durch die der Interferenzterm p_{beat} im Laufe der Zeit verschwindet, so dass eine zusätzliche zeitliche Mittelung des Impulses unnötig wird.

Abbildung 5.3B zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation des gemittelten Impulses für die experimentellen Parameter. Der Verlauf wird für beide Impulsbreiten qualitativ reproduziert. Bei der Simulation ergeben sich etwas niedrigere Werte für den gemittelten Impulsbetrag als im Experiment. Eine mögliche Unsicherheit liegt in der Potentialtiefe des optischen Gitterpotentials, da diese über die Rabi-Periodendauer der Oszillation an der ersten Bandkante des unmodulierten Potentials bestimmt wird (siehe Abschnitt 2.3). Wie in Abschnitt 4.4 erläutert spielt die Winkeländerung aufgrund der Frequenzmodulation bei der Einkopplung in die Glasfaser eine Rolle, so dass die effektive Potentialtiefe für das modulierte optische Gitterpotential eventuell überschätzt wird. Die Impulsbreite des Kondensats wird über die Breite des Kondensats in Abhängigkeit von der freien Expansionszeit und damit eben-

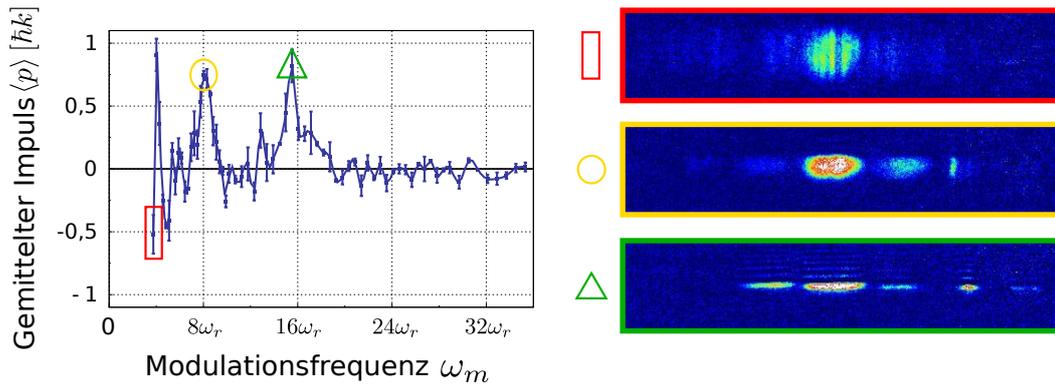


Abbildung 5.4: Abhängigkeit des gemittelten Impulses $\langle p \rangle$ von der treibenden Frequenz ω_m . Rechts sind drei Absorptionsabbildungen der Messung gezeigt, deren treibende Frequenz mit dem jeweiligen Symbol in den experimentellen Daten markiert ist. Das Beispiel für $\omega_m < 8\omega_r$ (Rechteck, rot) zeigt mehrere schmale Streifen, die aus der 0ten Beugungsordnung in höhere Ordnungen übertragen sind. Am Ort der Resonanz $\omega_m \approx 8\omega_r$ (Kreis, gelb) ist ein einzelner schmaler Streifen aus ausgeschnitten, der aber nicht ganz zentral in der 0ten Beugungsordnung liegt. Für die Resonanz $\omega_m \approx 16\omega_r$ liegt der übertragene Anteil der Atome in die höhere Beugungsordnung zentral in der 0ten Beugungsordnung. Die experimentellen Parameter sind $\Omega_0 = 192,5$ kHz, $\beta = 13/7 \approx 1,857$, $\theta = \pi/2$, $V_0 = 8,9E_r$ und $N = 70$.

falls mit einer gewissen Unsicherheit bestimmt. Über eine Anpassung der beiden Parameter werden möglicherweise höhere Werte für den gemittelten Impulsbetrag in der Simulation erreicht. Der Fehler kann aber auch systematischer Natur sein, zum Beispiel durch eine Überschätzung des im Experiment ermittelten Impulses, falls die auf der Absorptionaufnahme gewählten Regionen der verschiedenen Beugungsordnungen zu ungenau gewählt wurden.

5.2 Detektion von Transportresonanzen

Im Folgenden wird der Einfluss der Modulationsfrequenz der biharmonischen Modulation auf den gemittelten Impuls der Atome genauer betrachtet. In Abbildung 5.4 ist der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ gegen die Modulationsfrequenz ω_m in Einheiten der Rückstoßfrequenz ω_r bei einer konstanten Anzahl an Modulationsperioden von $N = 70$ für ein Bose-Einstein-Kondensat mit der Impulsbreite $\Delta p = 0,2\hbar k$ aufgetragen. Verschiedene Bereiche der treibenden Frequenz sind durch Symbole in den experimentellen Daten markiert.

Für eine niedrige Modulationsfrequenz $\omega_m < 8\omega_r$ erscheint die Abhängigkeit des gemittelten Impulses von der treibenden Frequenz recht komplex. Die Transportrichtung kehrt sich unter kleiner Variation der Modulationsfrequenz um und der Betrag des gemittelten Impulses ist in beide Richtungen hoch. Mit dem roten Recht-

eck ist der Datenpunkt markiert, welcher der ebenfalls durch ein rotes Rechteck gekennzeichneten Absorptionsabbildung (rechts oben) entspricht. Für die Aufnahme wird ein Kondensat höherer Impulsbreite ($\Delta p = 0,8\hbar k$) verwendet. Mehrere Streifen sind aus der 0ten Beugungsordnung ausgeschnitten und in höhere Beugungsordnungen übertragen. Die Untersuchung ist nicht für beliebig niedrige Modulationsfrequenzen möglich. Bei einer konstanten Anzahl an Modulationsperioden erhöht sich die Wechselwirkungsdauer mit Verringerung der Modulationsfrequenz. Die längere Pulsdauer des optischen Gitterpulses führt zu einem Aufheizen der Atome, so dass die Messung auf Modulationsfrequenzen $\omega_m \geq 4\omega_r$ beschränkt ist.

Für die Modulationsfrequenzen $\omega_m \approx 8\omega_r$ und $\omega_m \approx 16\omega_r$ sind Resonanzen erkennbar, die durch einen gelben Kreis bzw. ein grünes Dreieck markiert sind und deren zugehörige Absorptionenaufnahmen durch dieselben Symbole markiert sind. Im Gegensatz zum „chaotischen“ Bereich $\omega_m < 8\omega_r$ ist in der 0ten Beugungsordnung nur ein einzelner schmaler Ausschnitt erkennbar, der sich in der +2ten Beugungsordnung wiederfindet. Für die Frequenz $\omega_m \approx 8\omega_r$ (gelber Kreis) liegt der Anteil der Atome, die übertragen wurden, etwas verschoben zum Zentrum der Beugungsordnung. Für höhere Modulationsfrequenzen $\omega_m > 16\omega_r$ wird schließlich keine weitere Resonanz beobachtet und der atomare Transport verschwindet im Rahmen der experimentellen Genauigkeit.

Die experimentellen Beobachtungen können mit den Ergebnissen zur Abhängigkeit des Quasienergiespektrums von der Modulationsfrequenz in Zusammenhang gebracht werden (vgl. Abschnitt 3.3). Während für niedrigere treibende Frequenzen $\omega_m \leq 8\omega_r$ eine asymmetrische Modulation zu einer starken Desymmetrisierung der Floquet-Bänder im Quasienergiespektrum $\varepsilon(q)$ führt, unterscheidet sich bei zunehmender Modulationsfrequenz das Spektrum immer weniger vom Energiespektrum im Falle eines unmodulierten optischen Gitterpotentials (siehe Abbildung 3.2). Für niedrigere Modulationsfrequenzen wird ein Streifenmuster innerhalb des Bose-Einstein-Kondensats auf der Absorptionsabbildung beobachtet. Das Streifenmuster kann als eine Folge der Komplexität des Quasienergiespektrums $\varepsilon(q)$ interpretiert werden. Der atomare Transport setzt sich aus mehreren schmalen Beiträgen innerhalb der Impulsbreite des Kondensats zusammen. Jeder Streifen entspricht einer Transportresonanz, die sich aus einer vermiedenen Kreuzung an dieser Stelle des Quasienergiespektrums ergibt. Das Zusammenspiel aus mehreren Transportresonanzen ist möglicherweise auch die Ursache für die komplexe Abhängigkeit des gemittelten Impulses von der Modulationsfrequenz für diesen Wertebereich.

Für die Modulationsfrequenzen $\omega_m \approx 8\omega_r$ und $\omega_m \approx 16\omega_r$ kann der Ausschnitt eines einzelnen Streifens als der Einfluss einer einzelnen vermiedenen Kreuzung an dieser Stelle des Quasienergiespektrums gedeutet werden, durch den die Atome in die höhere Ordnung übertragen werden. Die Kopplung der entsprechenden Floquet-

zustände wird über die Modulationsfrequenz beeinflusst, so dass für diese beiden Modulationsfrequenzen Resonanzen beobachtet werden. Der gemittelte Impuls verschwindet schließlich für höhere Modulationsfrequenzen, im Einklang mit den Ergebnissen der Störungsrechnung, nach der das Quasienergiespektrum sich bei hohen Modulationsfrequenzen unabhängig von den Parametern der biharmonischen Modulation nicht mehr von dem Energiespektrum des unmodulierten optischen Gitterpotentials unterscheiden lässt und daher kein atomarer Transport erwartet wird.

Aus experimenteller Sicht ist eine höhere Modulationsfrequenz vorteilhaft, um die Einstrahldauer des optischen Gitters bei gleicher Anzahl an Modulationsperioden zu minimieren. Für die weiteren Messungen wird daher die Modulationsfrequenz $\omega_m = 59,6 \text{ kHz} \approx 15,95\omega_r$ gewählt, welche der mit dem grünen Dreieck markierten Resonanz in Abbildung 5.4 entspricht. Damit der im Experiment beobachtete atomare Transport unabhängig von der Impulsbreite der Atome als Folge derselben vermiedenen Kreuzung innerhalb des Quasienergiespektrums interpretiert werden kann, sollte diese zentral, d.h. bei $q = 0$ liegen. Die starke transversale Einschnürung des Kondensats bei dieser Modulationsfrequenz macht es allerdings schwierig zu erkennen, an welcher Stelle die Atome aus der 0ten Beugungsordnung in die +2te Ordnung übergegangen sind. Über eine Verschiebung des Quasiimpulses q der Atome im optischen Gitterpotential, die über eine konstante Frequenzverschiebung an einem der AOMs der optischen Gitterstrahlen erreicht wird, kann die Transportresonanz genauer untersucht werden.

In Abbildung 5.5A ist der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ gegen den Quasiimpuls q der anfänglichen Atomwolke relativ zum Gitter aufgetragen. Die Impulsbreite des Kondensats beträgt in dieser Messung $0,2\hbar k$. Die Modulationsamplitude Ω_0 ist in dieser Messung niedriger als für die in Abbildung 5.4 präsentierten Ergebnisse und entspricht den experimentellen Parametern der Ergebnisse zur Bifurkation einer Transportresonanz. Neben einer zentralen resonanten Erhöhung des Transports bei $q = 0\hbar k$, die durch den grünen Hintergrund hervorgehoben ist, ist eine zweite Resonanz bei $q = 0,4\hbar k$ erkennbar. Der gemittelte Impuls steigt im gemessenen Bereich in negativer Richtung mit steigendem Quasiimpuls, was eine mögliche Folge breiterer Resonanzen um $q = \pm 1\hbar k$ sein könnte.

Um die im Experiment beobachtete Signatur zu interpretieren, wird eine numerische Simulation für die experimentellen Parameter durchgeführt. Die schwarze durchgezogene Linie in Abbildung 5.5A entspricht dem Ergebnis der Simulation und ist im guten Einklang mit den experimentellen Daten. Beim Vergleich mit dem zugehörigen Quasienergiespektrum, welches in Abbildung 5.5B gezeigt ist, fällt auf, dass an den Stellen der beiden Resonanzen (neben weiteren Kreuzungen mit vergleichsweise kleiner Kopplung) je eine vermiedene Kreuzung des Grundbands mit einem angeregten Band auftritt. Die vermiedene Kreuzung bei $q = 0\hbar k$ ist wie die zugehörige Resonanz

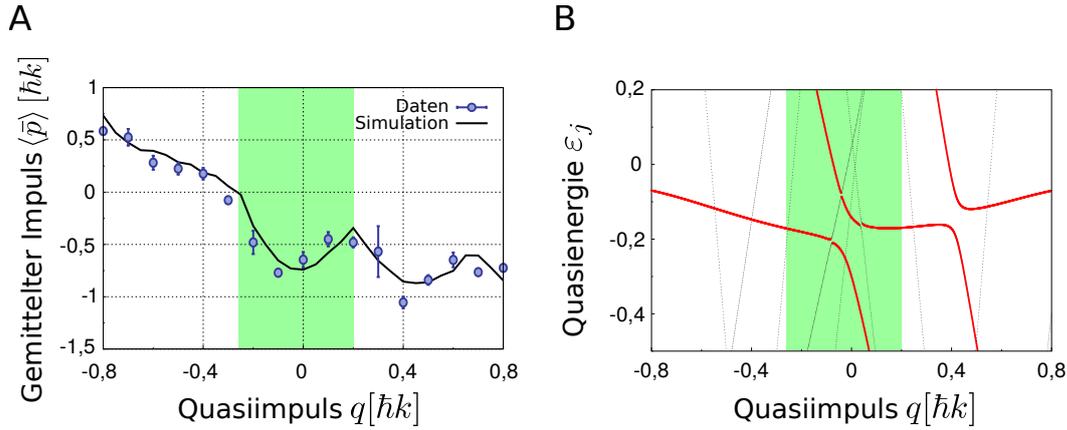


Abbildung 5.5: **A:** Gemittelter Impuls $\langle p \rangle$ gegen den Quasiimpuls q der Atome. Die Impulsbreite des Kondensats zur Ermittlung des gemittelten Impulses beträgt $\Delta p = 0,2\hbar k$. Um $q = 0\hbar k$ ist eine Resonanz erkennbar, die farblich durch einen grünen Hintergrund hervorgehoben ist. Eine weitere Resonanz ist bei $q = 0,4\hbar k$ erkennbar. Die schwarze Linie entspricht dem Ergebnis einer numerischen Simulation. **B:** Relevanter Ausschnitt des zugehörigen Quasienergiespektrums. Aufgetragen sind die Energiebänder mit $j < |5|$. An den Stellen der Resonanzen bei $q = 0\hbar k$ und $q = 0,4\hbar k$ sind vermiedene Kreuzungen zwischen dem Grundband und angeregten Bändern erkennbar. Das Grundband und die beiden angeregten Bänder sind rot eingezeichnet. Die Parameter der Modulation lauten $\Omega_0 = 70$ kHz, $\beta = 13/7 \approx 1,857$, $\theta = \pi/2$, $\omega_m = 59,6$ kHz $\approx 15,95\omega_r$, $V_0 = 8,9E_r$ und $N = 70$.

durch einen grünen Hintergrund hervorgehoben. Das Grundband bzw. das angeregte Band der vermiedenen Kreuzungen bei $q = 0\hbar k$ und $q = 0,4\hbar k$ ist rot eingezeichnet. Die Transportresonanzen können durch den in Abschnitt 3.2 beschriebenen Mechanismus erklärt werden. Die Wechselwirkung zwischen zwei Floquet-Zuständen führt zu einer vermiedenen Kreuzung im Quasienergiespektrum, welche sich in einer resonanten Erhöhung des atomaren Transports widerspiegelt. Für die im Experiment erreichte Impulsbreite des Bose-Einstein-Kondensats von $\Delta p = 0,2\hbar k$ kann für ein anfänglich ruhendes Kondensat die zweite Resonanz um $q = 0,4\hbar k$ vernachlässigt werden, so dass für diese Parameter der biharmonischen Modulation unter Variation eines Kontrollparameters eine einzelne Transportresonanz erwartet wird.

Im Quasienergiespektrum sind wie erwähnt noch eine Reihe weiterer vermiedener Kreuzungen kleinerer Kopplung erkennbar, welche nicht hervorgehoben sind. Die aus diesen vermiedenen Kreuzungen möglichen Transportresonanzen werden aufgrund der gegebenen Impulsbreite des Kondensats experimentell nicht aufgelöst.

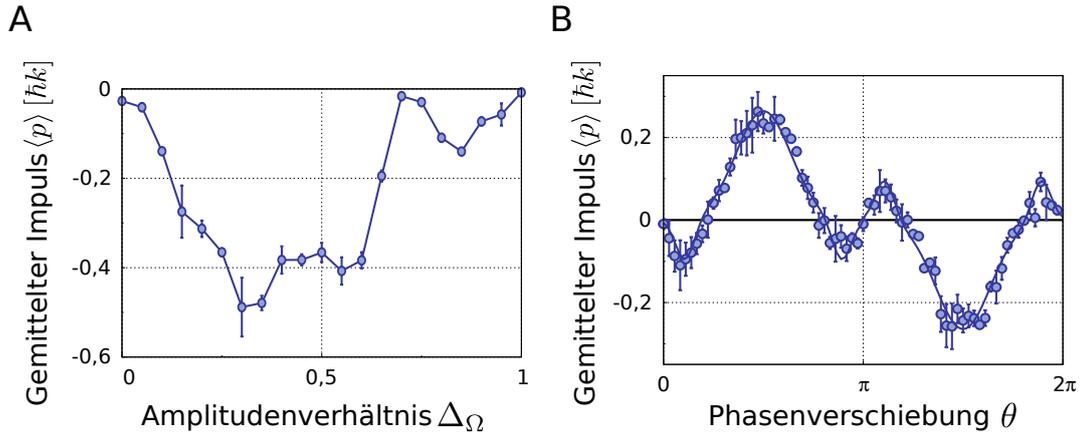


Abbildung 5.6: **A:** Gemittelter Impuls $\langle p \rangle$ gegen das Modulationsamplitudenverhältnis Δ_Ω zwischen den beiden Harmonischen der Frequenzmodulation. Die eingezeichnete Linie dient der klareren optischen Darstellung. Die weiteren experimentellen Parameter lauten $\theta = \pi/2$, $\Omega_0^* = 200$ kHz, $\omega_m = 59,6$ kHz $\approx 15,95\omega_r$, $V_0 = 7,1E_r$ und $N = 70$. **B:** Gemittelter Impuls $\langle p \rangle$ gegen die Phasenverschiebung θ . Die eingezeichnete Linie dient der klareren optischen Darstellung. Die weiteren experimentellen Parameter lauten $\Omega_0 = 192,5$ kHz, $\beta = 13/7 \approx 1,857$, $\omega_m = 59,6$ kHz $\approx 15,95\omega_r$, $V_0 = 8,9E_r$ und $N = 70$.

5.3 Transportsymmetrien der Quantenkippratsche

Ein atomarer Transport wird nur dann erwartet, wenn die zeitliche und räumliche Symmetrie des Systems gebrochen wird (vgl. Abschnitt 3.2). Für die biharmonische Modulation wird die räumliche Symmetrie gebrochen, wenn keine der Modulationsamplituden der beiden Harmonischen verschwindet. Zur Untersuchung der Abhängigkeit des atomaren Transports von der räumlichen Symmetrie der Modulation wird das Amplitudenverhältnis Δ_Ω über

$$\Delta_\Omega = \frac{1}{1 + \beta} \quad (5.6)$$

definiert. Die biharmonische Modulation schreibt sich dann

$$\Omega(t) = \Omega_0^* (\Delta_\Omega \sin(\omega_m(t - t_0)) + (1 - \Delta_\Omega) \sin(2\omega_m(t - t_0))) \quad (5.7)$$

mit der Modulationsamplitude Ω_0^* , welche der Summe der Modulationsamplituden der beiden Harmonischen entspricht (vgl. Abschnitt 3.24). Über $\Delta_\Omega \in [0,1]$ lässt sich so der relative Anteil der Modulationsamplituden einstellen. Für $\Delta_\Omega = 0$ bzw. $\Delta_\Omega = 1$ verschwindet die Modulationsamplitude der ersten bzw. zweiten Harmonischen der biharmonischen Funktion und die Modulationsfunktion wird räumlich symmetrisch, so dass gemäß (3.21) der atomare Transport verschwinden sollte.

In Abbildung 5.6A. ist der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ gegen das Amplitudenverhältnis Δ_Ω aufgetragen. Für eine asymmetrische Modulation $\Delta_\Omega \neq 0, 1$ wird ein gemittelter Impuls in negative Richtung beobachtet, der sein betragsmäßiges Maximum bei $\Delta_\Omega = 0,35$ erreicht. Der gemittelte Impuls verschwindet nahezu für $\Delta_\Omega = 0$ und $\Delta_\Omega = 1$. Das experimentelle Ergebnis bestätigt somit in guter Näherung die Erwartung an eine räumlich symmetrische Modulation. Der Grund für den nicht vollständig verschwindenden beobachteten gemittelten Impuls kann sehr wohl physikalischer Natur sein. Während bei einer symmetrischen Modulation der asymptotische Anteil des mittleren Impulses verschwindet, kann ein endlicher Beitrag des Interferenzterms p_{beat} zum mittleren Impuls erhalten bleiben. Dieser verschwindet erst im zeitlichen Mittel für den asymptotischen Grenzfall $t \rightarrow \infty$.

Interessanterweise verschwindet der gemittelte Impuls auch für $\Delta_\Omega = 0,7$, obwohl dieser Fall einer asymmetrischen Modulation entspricht. Dieses Ergebnis verdeutlicht, dass eine asymmetrische Modulation nicht zwingend zu einem nicht verschwindenden gemittelten Impuls führen muss. Es gilt nur, dass bei einer symmetrischen Modulation der atomare Transport, d.h. das zeitliche Mittel des mittleren Impulses für den Grenzfall $t \rightarrow \infty$ verschwindet.

Zur Untersuchung der Abhängigkeit des atomaren Transports von der zeitlichen Symmetrie wird der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung θ bestimmt. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.6B. Es ergeben sich betragsmäßig zwei Maxima des gemittelten Impulses bei $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ in entgegengesetzten Richtungen sowie weitere Extrema niedrigerer Amplitude. Die gemittelte Impuls zeigt die Symmetrien

$$\langle p(\theta) \rangle = -\langle p(\theta + \pi) \rangle = -\langle p(-\theta) \rangle. \quad (5.8)$$

Für $\theta = m \cdot \pi, m \in \mathbb{Z}$ ist die biharmonische Modulation zeitlich symmetrisch, so dass der gemittelte Impuls verschwinden sollte, wie das experimentelle Ergebnis in guter Näherung bestätigt. Leichte Abweichungen des experimentellen Ergebnisses von dieser Erwartung lassen sich in gleicher Weise wie bei der Variation des Amplitudenverhältnisses erklären. Die beobachteten Symmetrien (5.8) können als Folge der entsprechenden Symmetrien (3.27) der Quasienergiebänder gewertet werden.

Nach einer Störungsrechnung erster Ordnung erwartet man aufgrund der Desymmetrisierung der Floquet-Zustände eine sinusförmige Abhängigkeit $\langle p \rangle \sim \sin(\theta)$ des gemittelten Impulses von der Phasenverschiebung θ um einen der Symmetriepunkte [31]. Das experimentelle Ergebnis weicht deutlich von dieser Erwartung ab. Die Abweichung der Signatur $\langle p \rangle(\theta)$ vom sinusförmigen Verlauf ist möglicherweise die Folge einer Transportresonanz an der Stelle $\theta = \pi/2$ bzw. aufgrund der Symmetrien (5.8) mit umgekehrter Transportrichtung an der Stelle $\theta = 3\pi/2$. Um diese Vermutung zu bestätigen, sollte analog zur Untersuchung der Abhängigkeit des gemittelten Impulses vom der Verschiebung des Quasiimpulses ein Vergleich des experimentel-

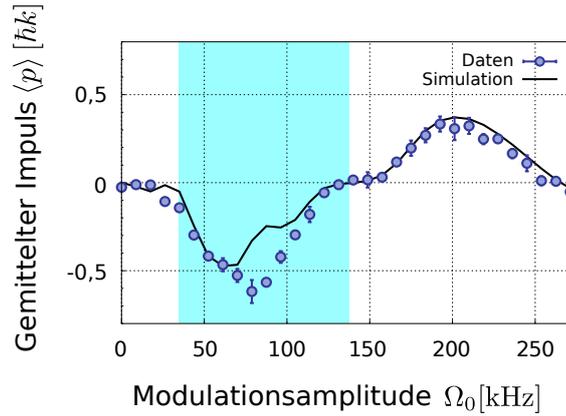


Abbildung 5.7: A: Gemittelter atomarer Impuls $\langle p \rangle$ gegen die Modulationsamplitude Ω_0 . In hellblau ist der Bereich hervorgehoben, der bei der Untersuchung zur Bifurkation einer Transportresonanz durchgeföhren wird. Die eingezeichnete schwarze Linie ist das Ergebnis einer numerischen Simulation mit den experimentellen Parametern, d.h. $\beta = 13/7 \approx 1,857$, $\theta = \pi/2$, $\omega_m = 59,6 \text{ kHz} \approx 15,95\omega_r$, $V_0 = 7,1E_r$ und $N = 70$.

len Ergebnisses mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation stattfinden und das zugehörige Quasienergiespektrum genauer untersucht werden. Da für die Beobachtung der Bifurkation einer Transportresonanz eine andere Modulationsamplitude gewählt wurde, wird in dieser Arbeit auf eine detailliertere numerische Analyse dieser experimentellen Daten verzichtet.

5.4 Bifurkation einer Transportresonanz

Wird im Experiment eine Transportresonanz beobachtet, so kann diese unter der Veränderung eines zweiten Kontrollparameters der Modulation in der Amplitude variiert und maximiert werden. Durch die Variation des zweiten Kontrollparameters verändert sich die Kopplung zwischen den Floquet-Zuständen, welche zu einer vermiedenen Kreuzung im Floquet-Spektrum und damit zur Transportresonanz führt. Durch die Entkopplung der Floquet-Zustände wird die Transportresonanz aufgrund der Symmetrie (5.8) des gemittelten atomaren Impulses im Falle einer biharmonischen Modulation an der Stelle $\langle p \rangle$ ($\theta = \pi/2$) aufgespalten (siehe Abschnitt 3.4). Die beiden Resonanzen, die aus der Bifurkation resultieren, ordnen sich um $\theta = \pi/2$ symmetrisch an.

Variation der Modulationsamplitude

Um ein Bifurkationsszenario im Experiment zu beobachten und zu untersuchen, wird zunächst der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ an der Stelle $\theta = \pi/2$ unter Variation eines zweiten

Kontrollparameters aufgetragen. Sollte an dieser Stelle eine Resonanz auftreten, was sich in einer Erhöhung des atomaren Transports widerspiegeln würde, so wird diese Resonanz über den zweiten Kontrollparameter in der Amplitude einstellbar sein, da die für die resonante Erhöhung des Transports verantwortliche Kopplung zwischen zwei Floquet-Zuständen von der Variation des zweiten Kontrollparameters beeinflusst wird. Im Experiment wird als Kontrollparameter die Modulationsamplitude Ω_0 der biharmonischen Modulation gewählt. Der Einfluss der Modulationsamplitude auf den gemittelten Impuls $\langle p(\theta = \pi/2) \rangle$ zeigt Abbildung 5.7. Der gemittelte Impuls wird für $\Omega_0 = 70$ kHz maximal in negative Richtung. Ein zweites Maximum des gemittelten Impulses in positive Richtung findet sich an der Stelle $\Omega_0 = 200$ kHz. In hellblau ist der Bereich hervorgehoben, der für die folgenden Ergebnisse zur Bifurkation einer Transportresonanz gewählt wird. Unter Variation der Phasenverschiebung sollte die Amplitude der entsprechenden Transportresonanz an der Stelle $\theta = \pi/2$ für diese Modulationsamplitude maximal sein und unter Variation der Modulationsamplitude in zwei Resonanzen aufspalten.

Die schwarze Linie zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation mit den experimentellen Parametern. Das Simulationsergebnis reproduziert die Messergebnisse weitestgehend, allerdings ist der Betrag des berechneten gemittelten Impulses im hellblau hervorgehobenen Bereich etwas niedriger und das Maximum verschoben. Möglicherweise muss die in der Simulation verwendete Gitterpotentialtiefe oder die Anfangsimpulsbreite angepasst werden, um den Verlauf numerisch mit geringerer Abweichung zu reproduzieren. Auch hier kann die Abweichung aber auch systematischer Natur sein.

Ergebnisse zur Bifurkation einer Transportresonanz

Als nächstes wird der in Abbildung 5.7 in hellblau hervorgehobene Bereich der Modulationsamplitude genauer untersucht. In Abbildung 5.8 ist der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ gegen die Phasenverschiebung der biharmonischen Modulation für verschiedene Modulationsamplituden Ω_0 aufgetragen. Aufgrund der Symmetrien des gemittelten Impulses (5.8) genügt es, die Messung auf den Bereich $\theta \in [0, \pi]$ zu beschränken. Die Modulationsamplitude der Messreihe steigt von unten nach oben, wie durch den Pfeil angedeutet. Für $\Omega_0 = 35$ kHz (blau, unten) zeigt sich eine Resonanz des gemittelten Impulses in negativer Richtung an der Stelle $\theta = \pi/2$. Durch Erhöhen der Modulationsamplitude (in der Abbildung von unten nach oben) erhöht sich zunächst für $\Omega_0 = 52,5$ kHz (grün) und $\Omega_0 = 70$ kHz (gelb) die Amplitude der Transportresonanz. Für höhere Modulationsamplituden kommt es zur Aufspaltung in zwei Resonanzen, die sich symmetrisch um $\theta = \pi/2$ anordnen. Für $\Omega_0 = 105$ kHz (violett) sind die beiden Resonanzen noch nicht vollständig getrennt. Durch weiteres Erhöhen entfernen sich die beiden Resonanzen für $\Omega_0 = 122,5$ kHz (rot) und $\Omega_0 = 140$ kHz (braun) voneinander.

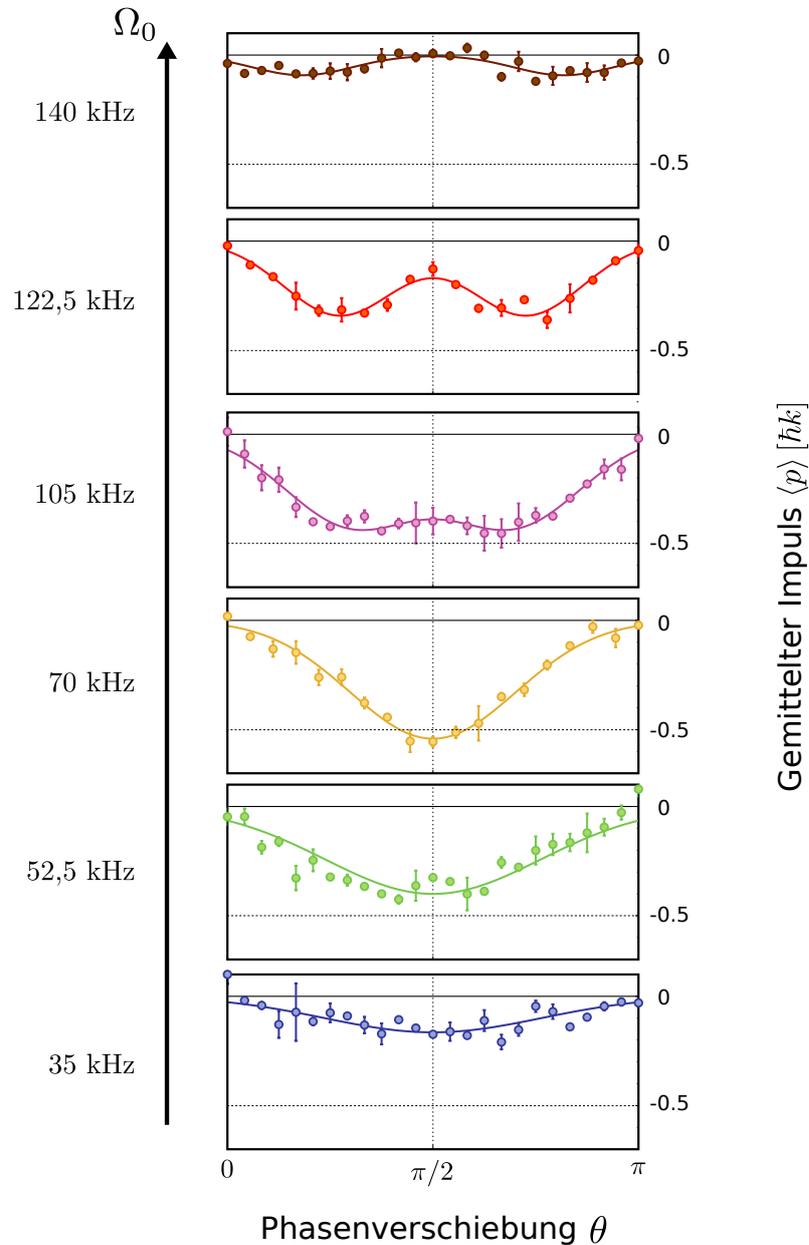


Abbildung 5.8: Bifurkation einer Transportresonanz. Aufgetragen ist der gemittelte Impuls $\langle p \rangle$ gegen die Phasenverschiebung θ für verschiedene Modulationsamplituden Ω_0 . Die Modulationsamplitude nimmt in der Messreihe von unten nach oben zu, wie durch den Pfeil gekennzeichnet. Die eingezeichneten Linien dienen der klareren optischen Darstellung. Mit steigender Modulationsamplitude baut sich zunächst eine Transportresonanz auf, welche sich dann bei weiter steigender Modulationsamplitude in zwei Resonanzen teilt. Die beiden Resonanzen sind symmetrisch um $\theta = \pi/2$ angeordnet. Die anderen experimentellen Parameter lauten $\beta = 13/7 \approx 1,857$, $\omega_m = 59,6 \text{ kHz} \approx 15,95\omega_r$, $V_0 = 7,1E_r$ und $N = 70$.

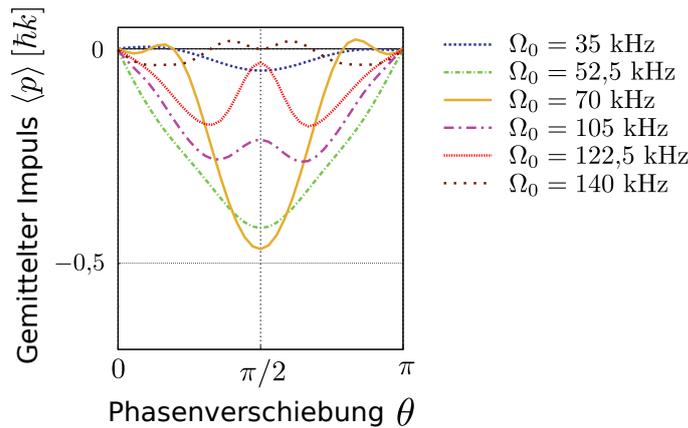


Abbildung 5.9: A: Numerische Simulation der Bifurkation einer Transportresonanz. Die verwendeten Parameter entsprechen den experimentellen Parametern in Abbildung 5.8. Der Anstieg der Amplitude und die Bifurkation der Transportresonanz werden qualitativ reproduziert. Quantitativ ist der gemittelte atomare Impuls etwas geringer als in den Messergebnissen.

Die beobachtete Aufspaltung der Transportresonanz kann wie in Abschnitt 3.4 als Folge eines entsprechenden Szenarios im Quasienergiespektrum interpretiert werden. Durch die Variation der Kopplung zwischen den beiden Floquet-Zuständen, welche für die Transportresonanz verantwortlich sind, kommt es zunächst zur Erhöhung des Transports auf der Resonanz und schließlich zu einer Bifurkation der Resonanz, was auf eine Entkopplung der Floquet-Zustände zurückgeführt werden kann. Die experimentellen Ergebnisse bestätigen den vorhergesagten Transportmechanismus und demonstrieren die Möglichkeit, über den Zusammenhang zwischen dem Auftreten einer vermiedenen Kreuzung im Floquet-Spektrum und der resonanten Erhöhung des atomaren Transports experimentell die Aufspaltung der vermiedenen Kreuzung über die Transportresonanz einzustellen.

Abbildung 5.9 zeigt das Ergebnis einer numerischen Simulation des gemittelten Impulses für die experimentellen Parameter der in Abbildung 5.8 gezeigten Bifurkation der Transportresonanz. Entsprechend dem in Abbildung 5.7 gezeigten numerischen Ergebnisse ist hier die Amplitude der Transportresonanz etwas niedriger als die des entsprechenden Messergebnisses. Auch in der numerischen Simulation wird das Bifurkationsszenario reproduziert und entspricht zumindest qualitativ dem im Experiment beobachteten Verlauf. Über eine weitere Anpassung der Parameter der Simulation kann die Modellierung der experimentellen Ergebnisse weiter optimiert werden. Die numerischen Ergebnisse unterstützen die Interpretation der Messergebnisse und erlauben eine Analyse des Quasienergiespektrums für eine im Experiment gefundene Transportresonanz, wie beispielsweise in Abbildung 5.5 gezeigt.

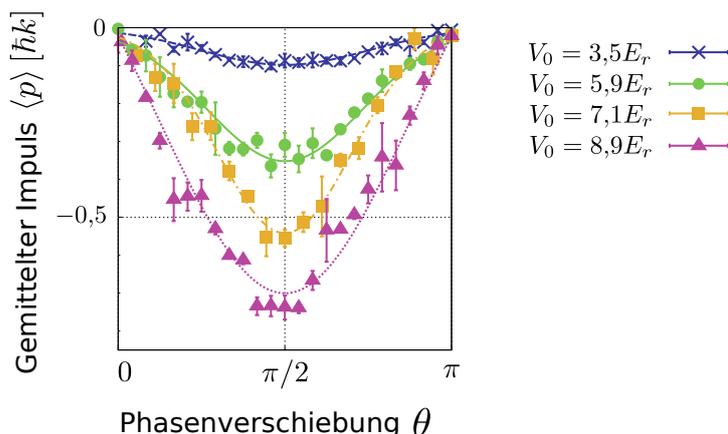


Abbildung 5.10: Gemittelter atomarer Impuls $\langle p \rangle$ gegen die Phasenverschiebung θ für verschiedene Potentialtiefen V_0 des optischen Gitterpotentials. Die Amplitude der Transportresonanz nimmt mit steigender Gitterpotentialtiefe zu, während die Signatur $\langle p(\theta) \rangle$ erhalten bleibt. Die eingezeichneten Linien dienen der klareren optischen Darstellung. Die experimentellen Parameter lauten $\Omega_0 = 70$ kHz, $\beta = 13/7 \approx 1,857$, $\omega_m = 59,6$ kHz $\approx 15,95\omega_r$ und $N = 70$.

Variation der Potentialtiefe des optischen Gitterpotentials

Neben den Kontrollparametern der biharmonischen Modulation kann auch die Potentialtiefe des optischen Gitters variiert werden. Abbildung 5.10 zeigt die Abhängigkeit des gemittelten atomaren Impulses von der Potentialtiefe V_0 . Die Parameter der Modulation entsprechen den experimentellen Parametern der in Abbildung 5.8 gezeigten Transportresonanz mit der Modulationsamplitude $\Omega_0 = 70$ kHz. Die Amplitude der Transportresonanz steigt mit zunehmender Potentialtiefe des optischen Gitterpotentials. Da die Kopplung zwischen den Floquet-Zuständen mit steigender Gitterpotentialtiefe zunimmt, kommt es zur Erhöhung des gemittelten Impulses. Allerdings muss bei dieser Messung berücksichtigt werden, dass nicht der asymptotische Wert $\langle p_{\text{asym}} \rangle$, sondern der gemittelte Impuls nach 70 Modulationsperioden untersucht wird. Da die Gitterpotentialtiefe die Kopplung zwischen den Floquet-Zuständen beeinflusst, ändert sich die Periodendauer der Oszillation zwischen den Floquet-Zuständen. Daher kann die Erhöhung der Resonanz möglicherweise auch bedeuten, dass die unterschiedlichen Transportamplituden auf unterschiedliche Punkte der Oszillation zwischen den Floquet-Zuständen, welche noch nicht den asymptotischen Grenzfall erreicht hat, zurückzuführen ist. Um diesen Effekt ausschließen zu können, müsste die Messung für eine deutlich höhere Anzahl an Modulationsperioden wiederholt werden.

Das Messergebnis zeigt auch, dass eine gewisse Potentialtiefe des optischen Gitters notwendig zu sein scheint, um experimentell eine Transportresonanz zu detektieren. Diese Beobachtung wird in den numerischen Simulationen bestätigt, in der die Reso-

nanzen in den oft erst ab einer gewissen Potentialtiefe und damit verbundenen genügend hohen Kopplung zwischen den Floquet-Zuständen auftreten. Die Verwendung eines einfachen optischen Stehwellenpotentials wie im Rahmen der vorliegenden Arbeit macht die Beobachtung der Transportresonanz und der charakteristischen Bifurkation der Resonanz möglich, da aufgrund der höheren Verstimmung im Vergleich zu den in einer früheren Arbeit durchgeführten Messungen [30] größere Kohärenzzeiten möglich sind.

Ausblick

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurden Messungen des mittleren atomaren Impulses eines Bose-Einstein-Kondensats nach der Wechselwirkung mit einem zeitlich biharmonisch modulierten optischen Gitterpotential durchgeführt, was es erlaubte den atomaren Transport einer Quantenkippratsche zu untersuchen. Unter Variation eines Kontrollparameters der Modulation wurden Transportresonanzen beobachtet, die über die Anpassung der weiteren Kontrollparameter verstärkt werden konnten. Die vorhergesagten Transportsymmetrien und die charakteristische Abhängigkeit des Quantentransports vom Startzeitpunkt und von der treibenden Frequenz werden experimentell bestätigt. Insbesondere die Beobachtung der Bifurkation einer Transportresonanz unterstützt die Interpretation der Transportresonanzen als Folge vermiedener Kreuzungen im Floquet-Bandschema und erlaubt eine umfassende theoretische Modellierung des beobachteten Quantentransports des Kippratschensystems im Experiment. Einige erste numerische Simulationsergebnisse werden in der vorliegenden Arbeit präsentiert. Umfangreichere numerische Simulationen könnten eine Anpassung der Parameter beinhalten und so die zukünftige Modellierung des experimentellen Systems optimieren.

Die experimentelle Realisierung der Quantenkippratsche ermöglicht es, kontrolliert und kohärent ultrakalte Atome zu transportieren. Im Gegensatz zu einer in früheren Arbeiten durchgeführten asymmetrischen Amplitudenmodulation eines biharmonischen Gitterpotentials mit dem Verfahren der optischen Mehrphotonengitter [29, 30] bietet das verwendete frequenzmodulierte optische Stehwellenpotential die Möglichkeit, den atomaren Transport auch in fernverstimmten optischen Gittern zu untersuchen, da hier keine Mehrphotonenprozesse höherer Ordnung zur Erzeugung des Potentials nötig sind. Dies führt einerseits zu höheren Kohärenzzeiten und erlaubt andererseits, Transportresonanzen eines stark korrelierten Quantengases zu untersuchen. Für einen Mott-Isolator werden im Falle einer konstanten Kraft schar-

fe, durch die interatomare Wechselwirkung verschobene, Tunnelresonanzen zwischen den Potentialmulden des optischen Gitters vorhergesagt (*photon-assisted tunneling*) [98]. Die Erhöhung der interatomaren Wechselwirkung im biharmonisch modulierten optischen Gitterpotential bietet die Perspektive, durch die Anpassung der Modulationsparameter Vielteilchen-Floquet-Zustände kontrolliert zu besetzen und Transportresonanzen eines stark korrelierten Quantengases zu untersuchen.

Eine andere Perspektive zeitlich modulierter Gitterpotentiale ergibt sich in der Möglichkeit der Simulation von Vorhersagen der relativistischen Vielteilchenphysik mit ultrakalten Atomen. In früheren Arbeiten wurden bereits räumlich bichromatische Gitter dazu genutzt, eine lineare Dispersionsrelation zu erzeugen und so relativistische Effekte mit ultrakalten Atomen zu beobachten [18, 99], siehe auch [100]. Analog zur negativen Brechung einer elektromagnetischen Welle innerhalb eines Metamaterials kommt es zu einer Refokussierung des Kondensats, wenn durch geeignete Raman-Pulse die Atome in einen Energiebereich der Dispersion transferiert werden, welcher einem negativen Brechungsindex entspricht [101]. Die Realisierung eines Dirac-Kegels innerhalb des Quasienergiespektrums durch die Erzeugung einer möglichst scharfen vermiedenen Kreuzung würde relativistische Effekte auch innerhalb einer einfachen modulierten Stehwelle möglich machen. Die in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Ergebnisse zur Anpassung atomarer Transportresonanzen bieten einen idealen Ausgangspunkt, vermiedene Kreuzungen experimentell zu detektieren und modellieren. Biharmonisch fernverstimmte optische Gitterpotentiale könnten so als Quantensimulator relativistischer Vielteilcheneffekte verwendet werden [102].

Numerische Methoden

A.1 Eichtransformation zum räumlich periodischen Hamilton-Operator

Der Hamilton-Operator aus (3.1)

$$\hat{H}(z,t) = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{V_0}{2} \cos(2kz) + zF(t) \quad (\text{A.1})$$

ist aufgrund der periodischen Kraft $F(t+T) = F(t)$ zeitlich periodisch, so dass das Floquet-Theorem wie in Abschnitt 3.1 beschrieben angewendet werden kann. Um den Floquet-Zuständen, die sich als Lösung des Hamilton-Operators ergeben, einen mittleren Impuls zuzuordnen, ist es günstig, diese in der Bloch-Basis zu entwickeln. Damit die Bloch-Zustände Eigenzustände des Hamilton-Operators sind, muss dieser räumlich periodisch sein. In [31] wird dazu die Eichtransformation

$$\tilde{\psi}(z,t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}zA(t)\right)\psi(z,t) \quad (\text{A.2})$$

mit

$$A(t) = - \int_{t_0}^t F(t') dt' + A_0 \quad (\text{A.3})$$

vorgeschlagen. Die Konstante A_0 ist dabei so zu wählen, dass das zeitliche Mittel

$$\frac{1}{T} \int_0^T A(t') dt' = 0 \quad (\text{A.4})$$

verschwindet. Nach Einsetzen von (A.2) in die Schrödinger-Gleichung 3.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\tilde{\psi}(z,t) &= \tilde{H}(z,t)\tilde{\psi}(z,t) \\
&= \left[\frac{1}{2m}(\hat{p} - A(t))^2 - \frac{V_0}{2}\cos(2kz) \right] \tilde{\psi}(z,t) \\
&= \left[\frac{\tilde{p}^2}{2m} - \frac{V_0}{2}\cos(2kz) \right] \tilde{\psi}(z,t)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

mit dem transformierten Impulsoperator $\tilde{p} = \hat{p} - A(t)$. Die transformierte Schrödinger-Gleichung ist räumlich periodisch und das Bloch-Theorem kann wie in Abschnitt 2.3 genutzt werden. Der mittlere Impuls

$$\begin{aligned}
\tilde{p} &= \langle \tilde{\psi}(t) | \tilde{p} | \tilde{\psi}(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(z,t) [-i\hbar\partial_z - A(t)] \tilde{\psi}(z,t) dz \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(z,t) [-i\hbar\partial_z] \psi(z,t) dz = p
\end{aligned} \tag{A.6}$$

bleibt unter dieser Transformation invariant. Für die biharmonische Funktion (3.23) ist schließlich

$$A(t) = -\frac{F_1}{\omega_m} \sin(\omega_m(t_0 + t)) - \frac{F_2}{2\omega_m} \sin(2\omega_m(t_0 + t) + \theta). \tag{A.7}$$

A.2 Numerische Integrationsverfahren

Um die zeitliche Entwicklung eines Anfangszustands, welcher in der Bloch-Basis (3.9) entwickelt ist, numerisch zu bestimmen, werden in [31] zwei Verfahren vorgeschlagen, die hier knapp wiedergegeben werden sollen.

Beim ersten Verfahren wird die zeitliche Entwicklung des Vektorpotentials (A.7) mit der Reihe

$$A(t) \approx \frac{\Delta t}{\hbar} A(t) \sum_l \delta(t - k\Delta t) \tag{A.8}$$

genähert. Die Anzahl der Zeitschritte pro Periode $N_t = T/\Delta t$ sollten dabei hoch genug gewählt werden, damit die Reihe eine gute Näherung bleibt. Die zeitliche Entwicklung der Koeffizienten b_l aus (3.9) für einen Zeitschritt Δt wird dann über eine Matrixmultiplikation

$$\mathbf{b}(t + \Delta t) = \underline{\mathbf{U}}(\Delta t) \mathbf{b}(t) \tag{A.9}$$

beschrieben. Als Anfangszustand wird der Zustand $|0\rangle$, d.h. $b_l(0) = \delta_{l,0}$ mit $-N \leq l \leq N$ gewählt. Die Matrix $\underline{\mathbf{U}}(\Delta t)$ ergibt sich mit der Näherung (A.8) aus dem Produkt

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}}\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{V}}\underline{\mathbf{Q}}^{-1} \tag{A.10}$$

mit den Diagonalmatrizen

$$A_{l,l} = \exp\left(-i\hbar\frac{\Delta t}{2}\left[l^2 - \frac{2l}{\hbar}A(t) + \frac{A(t)^2}{\hbar^2}\right]\right) \quad (\text{A.11})$$

$$V_{l,l} = \exp(-i\Delta t\tilde{v}_l), \quad (\text{A.12})$$

die sich aus der Dyson-Reihe des Zeitentwicklungsoperators ergeben [103]. Mit \tilde{v}_l sind die Eigenwerte der Matrixdarstellung $\tilde{\mathbf{V}}$ des Potentials $V_0/(2\hbar)\cos(2kz)$ in der Bloch-Basis gemeint, d.h. (vgl. mit (2.53))

$$\tilde{V}_{l,m} = \frac{V_0}{4\hbar}(\delta_{l,m-1} + \delta_{l,m+1}). \quad (\text{A.13})$$

Die Matrizen $\underline{\mathbf{Q}}$ und $\underline{\mathbf{Q}}^{-1}$ bringen $\tilde{\mathbf{V}}$ in Diagonalform und ergeben sich damit aus dem Eigenvektoren von $\tilde{\mathbf{V}}$. Diese Methode hat den Nachteil, dass sie vergleichsweise viele Matrixmultiplikationen beinhaltet.

Bei der zweiten Integrationsmethode [104] wird der Zustand $|\tilde{\psi}(t_0 + t)\rangle$ in der transformierten Schrödinger-Gleichung A.5 in der Bloch-Basis entwickelt und die Entwicklungskoeffizienten als Produkt zweier unabhängiger Funktionen

$$|\tilde{\psi}(t_0 + t)\rangle = \sum_{l=-N}^N a_l(t_0 + t) b_l(t_0 + t) |2l\hbar k\rangle \quad (\text{A.14})$$

angenommen, wobei $b(t_0 + t)$ die Lösung der Schrödinger-Gleichung ohne Gitterpotential sein soll,

$$i\hbar\partial_t b_l(t_0 + t) = \left[\frac{1}{2m}(\hat{p} - A(t))^2\right] b_l(t_0 + t). \quad (\text{A.15})$$

Mit Separation der Variablen folgt für die Lösung

$$b_l(t_0 + t) = b_l(t) = \exp\left[-\frac{i\hbar}{2}\left(l^2 t - \frac{2l}{\hbar} \int_0^t A(t') dt' + \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t A^2(t') dt'\right)\right], \quad (\text{A.16})$$

bei der der letzte Term mit $A^2(t)$ für die numerischen Berechnungen vernachlässigt werden kann, da er nicht von l abhängt und somit nur einer globalen Phase entspricht. Wird der Ansatz (A.14) in die Schrödinger-Gleichung (A.5) eingesetzt, so erhält man die Rekursionsformel

$$\dot{a}_l(t_0 + t) = -i\frac{V_0}{4\hbar}\left[a_{l+1}(t_0 + t)\frac{b_{l+1}(t)}{b_l(t)} + a_{l-1}(t_0 + t)\frac{b_{l-1}(t)}{b_l(t)}\right]. \quad (\text{A.17})$$

Nun soll der Zeitentwicklungsoperator $\underline{\mathbf{U}}(T, t_0)$ in der Bloch-Basis mit dem Startzeitpunkt t_0 nach einer Periode T bestimmt werden. Die Koeffizienten $a_l^n(t_0 + T)$ wer-

den nach einer Periode T für die verschiedenen Bloch-Zustände $|2n\hbar k\rangle$ bestimmt, d.h. die Anfangskoeffizienten $a_l^k(t_0) = \delta_{l,k}$ der Gleichung (A.17) mit $-N \leq k \leq N$ gewählt und über eine Periode integriert. Das Produkt $b_l(T) a_l^k(t_0 + T)$ ergibt dann den Eintrag $U_{l,k}$ der gesuchten Matrixform des Zeitentwicklungsoperators $\underline{U}(T, t_0)$. Nach (3.5) entspricht das Eigenwertspektrum dieser Matrix gerade dem Quasienergiespektrum und die Eigenzustände den Floquet-Zuständen in der Bloch-Basis. Der asymptotische Strom kann schließlich aus (3.16) bestimmt werden, wenn man den zeitlichen Mittelwert des mittleren Impulses dieser Floquet-Zustände über eine Periode T bildet.

A.3 Erweiterung der numerischen Verfahren für einen Anfangszustand mit endlicher Impulsbreite

Die bisherige Beschreibung der numerischen Integrationsverfahren geht von einer ebenen Welle $|0\rangle$ als Anfangszustand aus. Um eine Anfangsimpulsverteilung der Breite Δq zu berücksichtigen, nutzt man aus, dass die zeitliche Entwicklung der Zustände mit Quasiimpuls $q \neq q'$ unabhängig voneinander verläuft und das Integral über die Anfangsimpulsverteilung als Summe einer endlichen Zahl N_q von diskreten Quasiimpulsen im Abstand $\delta q = \Delta q/N_q$ genähert werden kann [105]. In den beiden numerischen Verfahren müssen die Gleichungen (A.11) und (A.16) angepasst werden, indem mit $l \rightarrow l + q_i$ der Quasiimpuls q_i berücksichtigt wird. Die Anfangsimpulsverteilung des Bose-Einstein-Kondensats wird im Folgenden als Gauß-Verteilung genähert. Für jeden der $N_q + 1$ Quasiimpulse q_i im Intervall $[-\Delta q/2, \Delta q/2]$ wird der mittlere Impuls $p(q_i)$ über die beschriebenen Integrationsverfahren bestimmt und entsprechend der Gauß-Verteilung alle Beiträge gewichtet aufsummiert,

$$p(\Delta q) = \sum_{i=1}^{N_q+1} g(q_i) p(q_i), \quad (\text{A.18})$$

wobei $g(q_i)$ die Gauß-Gewichtung meint.

A.4 Umrechnung der Modulationsparameter in dimensionslose Größen

Für die numerischen Berechnungen bietet es sich an, die Parameter der biharmonischen Modulation (3.23) in dimensionslose Größen zu transformieren. Die

dimensionslose Größe zu a wird mit \tilde{a} gekennzeichnet. Die Transformation der Schrödinger-Gleichung (3.1) wird über die Gleichungen

$$\tilde{z} = 2kz \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow \frac{\partial \tilde{z}}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} = 2k \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \quad (\text{A.19})$$

$$\tilde{t} = 8\omega_r t \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} = 8\omega_r \cdot \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (\text{A.20})$$

mit der Rückstoßfrequenz ω_r beschrieben. Einsetzen in die Schrödinger-Gleichung liefert

$$i\hbar 8\omega_r \partial_{\tilde{t}} \psi(\tilde{z}, \tilde{t}) = \left[\frac{-\hbar^2 k^2 \cdot 4 \partial_{\tilde{z}}^2}{2m} + \frac{V_0}{2} \cos(\tilde{z}) - \frac{\tilde{z}}{2k} F(\tilde{t}) \right] \psi(\tilde{z}, \tilde{t}) \quad (\text{A.21})$$

$$8E_r i \partial_{\tilde{t}} \psi = \left[8E_r \frac{\tilde{p}^2}{2} + \frac{V_0}{2} \cos(\tilde{z}) - \frac{\tilde{z}}{2k} F(\tilde{t}) \right] \psi \quad (\text{A.22})$$

$$i \partial_{\tilde{t}} \psi = \left[\frac{\tilde{p}^2}{2} + \frac{\tilde{V}_0}{2} \cos(\tilde{z}) - \tilde{z} \tilde{F}(\tilde{t}) \right] \psi \quad (\text{A.23})$$

mit $\tilde{p} = -i\partial_{\tilde{z}}$. Die dimensionslose Form der biharmonischen Modulation lautet dann

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\tilde{t}) &= \frac{1}{16kE_r} \left[F_1 \cos\left(\omega_m \frac{\tilde{t}}{8\omega_r}\right) + F_2 \cos\left(2\omega_m \frac{\tilde{t}}{8\omega_r} + \theta\right) \right] \\ &= \tilde{F}_1 \cos(\tilde{\omega}_m \tilde{t}) + \tilde{F}_2 \cos(2\tilde{\omega}_m \tilde{t} + \theta). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Die Umrechnungen zwischen reellen und dimensionslosen Parametern ergibt sich also zu

$$\tilde{F}_{1,2} = \frac{F_{1,2}}{16kE_r} \quad (\text{A.25})$$

$$\tilde{\omega}_m = \frac{\omega_m}{8\omega_r} \quad (\text{A.26})$$

$$\tilde{V}_0 = \frac{V_0}{8E_r}. \quad (\text{A.27})$$

Literatur

- [1] H. Schanz et al., *Classical and quantum Hamiltonian ratchets*, Phys. Rev. Lett. **87**, 07 0601 (2001).
- [2] R. D. Astumian, *Thermodynamics and kinetics of a Brownian motor*, Science **276**, 5314 917–922 (1997).
- [3] M. Smoluchowski, *Experimental proof of regular thermodynamic conflicting molecular phenomenons*, Phys. Zeitschrift **13** 1069–1080 (1912).
- [4] R. P. Feynman, R. Leighton und M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics*, Bd. 1, Addison-Wesley, 1963.
- [5] H. Linke und T. E. Humphrey, *Ratchets: muscles, molecules, and quantum heat pumps*, Proc. SPIE **4590** 263–272 (2001).
- [6] P. Reimann und P. Hänggi, *Introduction to the physics of Brownian motors*, Applied Physics A **75**, 2 169–178 (2002).
- [7] H. Linke et al., *A quantum dot ratchet: Experiment and theory*, EPL **44**, 3 341 (1998).
- [8] M. V. Costache und S. O. Valenzuela, *Experimental spin ratchet*, Science **330**, 6011 1645–1648 (2010).
- [9] M. Schiavoni et al., *Phase control of directed diffusion in a symmetric optical lattice*, Phys. Rev. Lett. **90**, 09 4101 (2003).
- [10] R. Gommers, S. Bergamini und F. Renzoni, *Dissipation-induced symmetry breaking in a driven optical lattice*, Phys. Rev. Lett. **95**, 07 3003 (2005).
- [11] S. Flach, O. Yevtushenko und Y. Zolotaryuk, *Directed current due to broken time-space symmetry*, Phys. Rev. Lett. **84**, 11 2358 (2000).
- [12] R. P. Feynman, *Simulating physics with computers*, Int. journal of theoretical physics **21**, 6 467–488 (1982).
- [13] M. H. Anderson et al., *Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor*, Science **269**, 5221 198–201 (1995).
- [14] K. B. Davis et al., *Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms*, Phys. Rev. Lett. **75**, 22 3969 (1995).
- [15] M. B. Dahan et al., *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76**, 24 4508 (1996).

- [16] M. Greiner et al., *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 6867 39–44 (2002).
- [17] S. Braun et al., *Negative absolute temperature for motional degrees of freedom*, Science **339**, 6115 52–55 (2013).
- [18] T. Salger et al., *Klein tunneling of a quasirelativistic Bose-Einstein condensate in an optical lattice*, Phys. Rev. Lett. **107**, 24 240401 (2011).
- [19] R. Balili et al., *Bose-Einstein condensation of microcavity polaritons in a trap*, Science **316**, 5827 1007–1010 (2007).
- [20] J. Klaers et al., *Bose-Einstein condensation of photons in an optical microcavity*, Nature **468**, 7323 545–548 (2010).
- [21] E. Arimondo, P. Berman und C. Lin, *Advances in atomic, molecular and optical physics*, Bd. 61, Elsevier inc., 2012.
- [22] A. Zenesini et al., *Coherent control of dressed matter waves*, Phys. Rev. Lett. **102**, 10 0403 (2009).
- [23] J. Struck et al., *Quantum simulation of frustrated classical magnetism in triangular optical lattices*, Science **333**, 6045 996–999 (2011).
- [24] J. Struck et al., *Tunable gauge potential for neutral and spinless particles in driven optical lattices*, Phys. Rev. Lett. **108**, 22 5304 (2012).
- [25] J. Struck et al., *Engineering Ising-XY spin-models in a triangular lattice using tunable artificial gauge fields*, Nature Physics **9**, 11 738–743 (2013).
- [26] S. Fölling et al., *Direct observation of second-order atom tunnelling*, Nature **448**, 7157 1029–1032 (2007).
- [27] M. Weitz et al., *Optical multiphoton lattices*, Phys. Rev. A **70**, 04 3414 (2004).
- [28] G. Ritt, *Fourier-Synthese von asymmetrischen optischen Potentialen für Atome*, Dissertation, Universität Tübingen, 2007.
- [29] T. Salger et al., *Directed transport of atoms in a Hamiltonian quantum ratchet*, Science **326**, 5957 1241–1243 (2009).
- [30] T. Salger, *Quantentransport ultrakalter Atome in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2010.
- [31] S. Denisov et al., *Periodically driven quantum ratchets: Symmetries and resonances*, Phys. Rev. A **75**, 06 3424 (2007).
- [32] R. Pathria, *Statistical Mechanics*, 1. Aufl., Pergamon Press, 1972.
- [33] C. Pethick und H. Smith, *Bose-Einstein condensation in dilute gases*, 2. Aufl., Cambridge University Press, 2008.
- [34] S. Bose, *Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese*, Zeitschrift f. Physik **26**, 1 178–181 (1924).

- [35] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases*, Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 261–267 (1924).
- [36] W. Ketterle, *When atoms behave as waves: Bose-Einstein condensation and the atom laser*, Le Prix Nobel 2001 118–154 (2002).
- [37] V. Bagnato, D. E. Pritchard und D. Kleppner, *Bose-Einstein condensation in an external potential*, Phys. Rev. A **35**, 10 4354 (1987).
- [38] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics (Revised Edition)*, 1. Aufl., Addison Wesley, 1993.
- [39] M. Born, *Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge*, Zeitschrift f. Physik 12 863–867 (1926).
- [40] H. Haken und H. C. Wolf, *Atom-und Quantenphysik -Eine Einführung in die experimentellen und theoretischen Grundlagen*, Springer, 1980.
- [41] H. Feshbach, *A unified theory of nuclear reactions. II*, Annals of Physics **19**, 2 287–313 (1962).
- [42] E. Gross, *Structure of a quantized vortex in boson systems*, Il Nuovo Cimento Series 10 **20**, 3 454–477 (1961).
- [43] L. Pitaevskii, *Vortex lines in an imperfect Bose gas*, Sov. Phys. JETP **13**, 2 451–454 (1961).
- [44] A. J. Leggett, *Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts*, Rev. Mod. Phys. **73** 307–356 (2001).
- [45] L. H. Thomas, *The calculation of atomic fields*, Mathematical Proc. Cambridge Phil. Soc. **23**, 05 542–548 (1927).
- [46] E. Fermi, *Eine statistische Methode zur Bestimmung einiger Eigenschaften des Atoms und ihre Anwendung auf die Theorie des periodischen Systems der Elemente*, Zeitschrift f. Physik **48**, 1-2 73–79 (1928).
- [47] F. Pobell, *Matter and methods at low temperatures*, Springer, 2007.
- [48] A. Leanhardt et al., *Cooling Bose-Einstein condensates below 500 picokelvin*, Science **301**, 5639 1513–1515 (2003).
- [49] T. Kovachy et al., *Matter wave lensing to picokelvin temperatures*, pre-print **arXiv:1407.6995** (2014).
- [50] T. W. Hänsch und A. L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Optics Comm. **13**, 1 68–69 (1975).
- [51] A. Ashkin, *Trapping of atoms by resonance radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **40**, 12 0729 (1978).
- [52] S. Chu et al., *Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **55** 0048 (1985).
- [53] J. P. Gordon und A. Ashkin, *Motion of atoms in a radiation trap*, Phys. Rev. A **21** 1606 (1980).

- [54] J. Dalibard und C. Cohen- Tannoudji, *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients: simple theoretical models*, JOSA B **6**, 11 2023–2045 (1989).
- [55] A. A. Radzig und B. M. Smirnov, *Reference data on atoms, molecules and ions*, Springer, 1985.
- [56] M. P. Bradley et al., *Penning Trap Measurements of the Masses of ^{133}Cs , $^{87,85}\text{Rb}$, and ^{23}Na with Uncertainties ≤ 0.2 ppb*, Phys. Rev. Lett. **83**, 22 4510 (1999).
- [57] C. Adams und E. Riis, *Laser cooling and trapping of neutral atoms*, Progress in Quantum Electronics **21**, 1 1–79 (1997).
- [58] A. Ashkin und J. P. Gordon, *Stability of radiation-pressure particle traps: an optical Earnshaw theorem*, Optics letters **8**, 10 511–513 (1983).
- [59] E. Raab et al., *Trapping of neutral sodium atoms with radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **59**, 23 2631 (1987).
- [60] A. Ashkin, *Acceleration and trapping of particles by radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **24**, 04 0156 (1970).
- [61] A. Ashkin, *Atomic-beam deflection by resonance-radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **25**, 19 1321 (1970).
- [62] J. Dalibard und C. Cohen- Tannoudji, *Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited*, JOSA B **2**, 11 1707–1720 (1985).
- [63] S. Chu et al., *Experimental observation of optically trapped atoms*, Phys. Rev. Lett. **57**, 03 0314 (1986).
- [64] R. Grimm, M. Weidemüller und Y. B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, Advances in atomic, molecular, and optical physics **42**, 95–170 (2000).
- [65] A. Khadjavi, A. Lurio und W. Happer, *Stark Effect in the Excited States of Rb, Cs, Cd, and Hg*, Phys. Rev. **167** 128–135 (1968).
- [66] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, New York, 1962.
- [67] L. Allen und J. Eberly, *Optical Resonance and Two-Level Atoms*, Wiley, New York, 1975.
- [68] R. Shankar, R. Shankar und R. Shankar, *Principles of quantum mechanics*, 1994.
- [69] E. T. Jaynes und F. W. Cummings, *Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser*, Proc. IEEE **51**, 1 89–109 (1963).
- [70] C. Cohen- Tannoudji, J. Dupont- Roc und G. Grynberg, *Atom-photon interactions: basic processes and applications*, Wiley, Online Library, 1992.
- [71] I. H. Deutsch und P. S. Jessen, *Quantum-state control in optical lattices*, Phys. Rev. A **57** 1972 (1998).
- [72] H. F. Hess et al., *Magnetic trapping of spin-polarized atomic hydrogen*, Phys. Rev. Lett. **59**, 06 0672 (1987).

- [73] C. S. Adams et al., *Evaporative Cooling in a Crossed Dipole Trap*, Phys. Rev. Lett. **74** 3577 (1995).
- [74] F. Bloch, *Über die Quantenmechanik der Elektronen in Kristallgittern*, Zeitschrift f. Physik **52**, 7-8 555–600 (1929).
- [75] C. Kittel, *Einführung in die Festkörperphysik*, Oldenbourg Verlag, 2013.
- [76] G. Teschl, *Ordinary differential equations and dynamical systems*, American Mathematical Soc., 2012.
- [77] G. Floquet, *Sur les equations differentielles lineaires*, Ann. ENS **12** 47–88 (1883).
- [78] C. Zener, *Non-adiabatic crossing of energy levels*, Proc. Roy. Soc. A 696–702 (1932).
- [79] L. D. Landau, *Zur Theorie der Energieübertragung II*, Physics of the Soviet Union **2**, 2 46–51 (1932).
- [80] S. Kling, *Landau-Zener-Stückelberg Interferometrie mit ultrakalten Atomen in Fourier-synthetisierten optischen Gitterpotentialen*, Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2011.
- [81] I. I. Rabi, *Space quantization in a gyrating magnetic field*, Phys. Rev. **51**, 8 652 (1937).
- [82] S. Denisov, S. Flach und P. Hänggi, *Tunable transport with broken space-time symmetries*, Physics Reports **538**, 3 77–120 (2014).
- [83] Y. B. Zel’Dovich, *The quasienergy of a quantum-mechanical system subjected to a periodic action*, Soviet Physics JETP **24**, 5 1006–1008 (1967).
- [84] H. Lignier et al., *Quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor*, EPL **69**, 3 327 (2005).
- [85] S. Rahav, I. Gilary und S. Fishman, *Effective Hamiltonians for periodically driven systems*, Phys. Rev. A **68**, 01 3820 (2003).
- [86] H. Sambe, *Steady states and quasienergies of a quantum-mechanical system in an oscillating field*, Phys. Rev. A **7**, 06 2203 (1973).
- [87] G. Cennini, *Field-insensitive Bose-Einstein condensates and an all-optical atom laser*, Dissertation, Universität Tübingen, 2004.
- [88] T. Burgermeister, *Ultrakalte Rubidiumatome in variablen optischen Gitterpotentialen*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2012.
- [89] W. Ertmer et al., *Laser manipulation of atomic beam velocities: Demonstration of stopped atoms and velocity reversal*, Phys. Rev. Lett. **54**, 10 0996 (1985).
- [90] L. Ricci et al., *A compact grating-stabilized diode laser system for atomic physics*, Optics Comm. **117**, 5 541–549 (1995).
- [91] J. Plumhof, *Bose-Einstein-Kondensation von Rubidiumatomen in variablen optischen Gittern*, Diplomarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2008.
- [92] K. O’hara et al., *Scaling laws for evaporative cooling in time-dependent optical traps*, Phys. Rev. A **64**, 05 1403 (2001).

- [93] S. Bize et al., *High-accuracy measurement of the ^{87}Rb ground-state hyperfine splitting in an atomic fountain*, EPL **45**, 5 558 (1999).
- [94] O. Morsch und M. Oberthaler, *Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices*, Reviews of modern physics **78**, 1 179 (2006).
- [95] M. Kasevich et al., *Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions*, Phys. Rev. Lett. **66**, 18 2297 (1991).
- [96] K. Moler et al., *Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions*, Phys. Rev. A **45**, 01 0342 (1992).
- [97] *Private Diskussion mit Sergey Denisov, Uni Augsburg*. 2013.
- [98] R. Ma et al., *Photon-assisted tunneling in a biased strongly correlated Bose gas*, Phys. Rev. Lett. **107**, 09 5301 (2011).
- [99] D. Witthaut et al., *Effective Dirac dynamics of ultracold atoms in bichromatic optical lattices*, Phys. Rev. A **84**, 03 3601 (2011).
- [100] L. Tarruell et al., *Creating, moving and merging Dirac points with a Fermi gas in a tunable honeycomb lattice*, Nature **483**, 7389 302–305 (2012).
- [101] M. Leder, C. Grossert und M. Weitz, *Veselago lensing with ultracold atoms in an optical lattice*, Nature Comm. **5**, 3327 (2014).
- [102] J. I. Cirac, P. Maraner und J. K. Pachos, *Cold atom simulation of interacting relativistic quantum field theories*, Phys. Rev. Lett. **105**, 19 0403 (2010).
- [103] M. Latka, P. Grigolini und B. J. West, *Chaos-induced avoided level crossing and tunneling*, Phys. Rev. A **50**, 02 1071 (1994).
- [104] R. Graham und J. Keymer, *Level repulsion in power spectra of chaotic Josephson junctions*, Phys. Rev. A **44**, 10 6281 (1991).
- [105] F. Zhan et al., *Quantum ratchet transport with minimal dispersion rate*, Phys. Rev. A **84**, 04 3617 (2011).