

**Beiträge zum Entwurf größenoptimaler
schneller Fouriertransformationen auf
gewissen homogenen Räumen symmetrischer
Gruppen**

Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades (Dr. rer. nat.)

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

vorgelegt von

Paul Christoph Hühne

aus

Troisdorf

Bonn, Januar 2016

Angefertigt mit Genehmigung der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der
Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

1. Gutachter: Prof. Dr. Michael Clausen

2. Gutachter: Prof. Dr. Andreas Weber

Tag der Promotion: 31. Mai 2016

Erscheinungsjahr: 2016

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	v
1 Einleitung	1
2 Algebraische Grundlagen und Komplexität	7
2.1 Diskrete Fouriertransformationen aus algebraischer Sicht	7
2.2 Zur Komplexität von DFTs und Faltungen	14
2.3 Symmetriangepasste DFTs	18
3 DFTs U-invarianter Signale auf der Gruppe G	21
3.1 Signal- und Spektralbereich U -invarianter Signale	21
3.2 Komplexität von DFTs und Faltungen U -invarianter Signale	23
4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen	29
4.1 Symmetrische Gruppen – Grundlagen	29
4.2 Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$	32
4.3 Die Youngsche Seminormal- und Orthogonalform	40
5 FFT und iFFT für symmetrische Gruppen	47
5.1 Vorverarbeitung	47
5.2 FFT Algorithmus	50
5.3 iFFT Algorithmus	55
6 S_{n-k}-invariante Signale auf der S_n	57
6.1 Spektralbereich S_{n-k} -invarianter Signale	57
6.2 Multiplikation S_{n-k} -invarianter Signale im Spektralbereich	59
6.3 Youngsche Seminormalform vs. Youngsche Orthogonalform	60
6.4 Das Graphlet-Spektrum	61
6.5 Das Quadratic Assignment Problem	63
7 FFT von S_{n-1}-invarianten Signalen auf der S_n	69
7.1 Verwendung der Youngschen Seminormalform	69
7.2 Verwendung der Youngschen Orthogonalform	72
8 FFT von S_{n-2}-invarianten Signalen auf der S_n	75
8.1 Vorbereitungen	75
8.2 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$	78
8.2.1 Die Auswertung von $\kappa^{(m,2)}$ im Detail	79
8.2.2 Grundlegende Konzepte für die schnelle Auswertung von $\kappa^{(m,2)}$	85
8.2.3 Ein Algorithmus für die schnelle Auswertung von $\kappa^{(m,2)}$	87
8.3 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-2,1,1)}$ & $\kappa^{(n-1,1)}$	89

Inhaltsverzeichnis

8.3.1	Effiziente Auswertung von $\kappa^{(m,1,1)}$	89
8.3.2	Effiziente Auswertung von $\kappa^{(m+1,1)}$ & $\kappa^{(m+2)}$	90
8.4	Zusammenfassung und Aufwandsanalyse	90
8.5	Umrechnung in die Youngsche Orthogonalform	93
9	FFT von S_{n-3}-invarianten Signalen auf der S_n	97
9.1	Schnelle Auswertung von κ^α im Fall $\alpha_1 \geq n - 2$	99
9.2	Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-3,3)}$	100
9.3	Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-3,1,1,1)}$	104
9.4	Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-3,2,1)}$	107
9.5	Zusammenfassung und Aufwandsanalyse	112
10	Schlussbemerkungen und Ausblick	117
Anhang		119
A.1	\mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^4),(1^4))}$	119
A.2	Spechtmoduln \mathcal{S}_α zu $\alpha \vdash 4$	120
A.3	Alle $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ von $\mathbb{C}\mathcal{S}_4$ inklusive Last Letter Sequence	121
A.4	Konstruktion der DFT-Matrix $\mathbf{D}_{\sigma,4}$	122
A.5	Blockstruktur und die Datenpfade der DFT σ_4 auf \mathcal{S}_4	126
A.6	Konstruktion der DFT-Matrix $\mathbf{D}_{\kappa,4,2}$	127
A.7	Konstruktion der DFT-Matrix $\mathbf{D}_{\omega,4}$	132
A.8	Konstruktion der DFT-Matrix $\mathbf{D}_{\omega,4,2}$	136
A.9	Partielle Last Letter Sequence Bäume für $\alpha \vdash 12$ mit $\alpha_1 = 8$	138
Literaturverzeichnis		141

Abbildungsverzeichnis

1	Die Faltung zweier Signale a und b aus $\mathbb{C}G$	17
2	Die Faltung zweier U -invarianter Signale a und b aus $\mathbb{C}G$ mit $\mathbb{D} := \mathbf{D}_{G \bmod U}$	26
3	\mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^3), (1^3))}$ aus den Bideterminanten zu allen Standardbitableaux (S, T) vom Inhalt $((1^3), (1^3))$	35
4	Illustration des Young-Verbands.	39
5	Illustration der Dimension $d_{(2,2)}$ von $\mathcal{S}_{(2,2)}$. Es gilt: $d_{(2,2)} = 2$	39
6	Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (3, 2)$. Sein (total geordnetes) i -tes Level (auch S_{n-i} -Level genannt) besteht aus allen partiell gefüllten Tableaux mit exakt i Einträgen.	41
7	Illustration der Axialdistanz. Die Axialdistanz d ist hier gleich 11.	42
8	Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (3, 2)$	49
9	Blockstruktur (links) der DFT σ_3 auf S_3 und die Datenpfade (rechts).	53
10	Veranschaulichung der Beispielrechnung zur DFT σ_3 auf S_3	54
11	Das ρ_n -Bild von $\mathbb{C}[S_n \bmod S_{n-k}]$ für $k \in [1, 3]$	58
12	Illustration von $\omega^{(\alpha)}(f_A) \cdot \omega^{(\alpha)}(f_{A'})^\top$ für $\alpha \vdash n$ mit $\alpha_1 \geq n - 2$. Mit grau wurden die Bereiche gekennzeichnet, die von Null verschieden sein können.	65
13	Last Letter Sequence Baum von $(\ell, 1) \vdash \ell + 1$ bis zum S_ℓ -Level.	71
14	Struktur von $\kappa^{(\ell,1)}(a_j)$ (links), $\kappa^{(\ell+1)}(a)$ (mitte) and $\kappa^{(\ell,1)}(a)$ (rechts).	71
15	$(m, 2)$ -LLS-Baum (links) & $(m, 1, 1)$ -LLS-Baum (rechts) bis zum S_m -Level.	77
16	Struktur von $\kappa^\alpha(a_j)$ für $\alpha = (n), (n - 1, 1), (n - 2, 2)$ und $(n - 2, 1, 1)$. Zusätzlich sind für ein festes j die drei grauen Vektoren in \mathbb{C}^{n-2} gleich. Entsprechendes gilt für die zwei 1×1 Blöcke.	78
17	Illustration wichtiger Aspekte einer effizienten Berechnung der Summanden ν_j^i	80
18	Links: Illustration von $\kappa^{(m,2)}(\tau_{m+1}) \cdot \nu$, wobei ν ein Vektor ist, bei dem höchstens die letzten m Einträge von Null verschieden sind; $d := m - 1$. Rechts: Illustration von $\kappa^{(m,2)}(\tau_k) \cdot x$, wobei $k \in [1, m]$ und x ein beliebiger Vektor passenden Formats ist.	80
19	Oben: Schematische Version von Tabelle 3. Unten: Rotierter, gekürzter Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (4, 2)$, sich wiederholende Teile werden nicht gezeigt.	83
20	Mit grau wurden die Bereiche in $\kappa^\alpha(a)$ gekennzeichnet, die von Null verschieden sein können, $\alpha \in \{(n), (n - 1, 1), (n - 2, 2), (n - 2, 1, 1)\}$. Es ist $m := n - 2$	88
21	Struktur der Matrix $\kappa^\alpha(a_j)$ im Fall $\alpha_1 \geq n - 2$	99
22	Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a)$ sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $\alpha_1 \geq n - 2$	99
23	Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a_j)$ (links) und $\kappa^\alpha(a)$ (rechts) sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $m = n - 3$ und $\alpha = (n - 3, 3)$	101

Abbildungsverzeichnis

24	Oben: Schematische Darstellung der Berechnung von y in $\kappa^{(6,3)}(a)$. Unten: Rotierter, gekürzter Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (6, 3)$, sich wiederholende Teile werden nicht gezeigt.	102
25	Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a_j)$ (links) und $\kappa^\alpha(a)$ (rechts) sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $m = n - 3$ und $\alpha = (n - 3, 1, 1, 1)$.	104
26	Schematische Darstellung der Berechnung von z in $\kappa^{(5,1,1,1)}(a)$	105
27	Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a_j)$ (oben) und $\kappa^\alpha(a)$ (unten) sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $m = n - 3$ und $\alpha = (n - 3, 2, 1)$.	107
28	Schematische Darstellung der Berechnung von w_1 in $\kappa^{(5,2,1)}(a)$	110
29	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (5, 2, 1)$ bezüglich w_1	110
30	Schematische Darstellung der Berechnung von w_2 in $\kappa^{(5,2,1)}(a)$	111
31	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (5, 2, 1)$ bezüglich w_2	111
32	\mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^4),(1^4))}$ aus den Bideterminanten zu allen Standardbitableaux (S, T) vom Inhalt $((1^4), (1^4))$	119
33	Blockstruktur (links) der DFT σ_4 auf S_4 und die Datenpfade (rechts).	126
34	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 4)$	138
35	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 3, 1)$	138
36	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 2, 2)$	138
37	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 2, 1, 1)$	139
38	Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 1, 1, 1, 1)$	139

Tabellenverzeichnis

1	Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_3$ (Youngsche Seminormalform).	44
2	Aufstellung relevanter Parameter, die die ρ_n -Bilder von $\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]$ für $n \geq 6$ and $k \leq 3$ beschreiben.	58
3	Diese Tabelle ist spaltenweise von rechts nach links zu lesen. Die i -te Spalte beinhaltet den Vektor ν_j^i in strukturierter Form.	82
4	Arithmetischer Aufwand zur Berechnung von y	88
5	Arithmetischer Aufwand von ALG ₂	92
6	Arithmetischer Aufwand von Teil II.	114
7	Arithmetischer Aufwand von Teil III.	114
8	Arithmetischer Aufwand der gesamten Berechnung.	114
9	$(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \vdash 4}$	120
10	Alle $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ von $\mathbb{C}S_4$	121
11	Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Seminormalform).	122
12	Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (kontragrediente Version).	127
13	Matrixdarstellungen aller $g \in S_4 \text{ mod } S_2$ (kontragrediente Version).	129
14	Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Orthogonalform).	132
15	Matrixdarstellungen aller $g \in S_4 \text{ mod } S_2$ (Youngsche Orthogonalform).	136

1 Einleitung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist ein klassischer Satz von Wedderburn, der besagt, dass die komplexe Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ einer endlichen Gruppe G isomorph zu einer Algebra von Blockdiagonalmatrizen ist:

$$\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}.$$

Jeder Algebrenisomorphismus $D: \mathbb{C}G \rightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ wird als diskrete Fouriertransformation (DFT) auf G (bzw. $\mathbb{C}G$) bezeichnet. In Anlehnung an den klassischen Fall wird in den Anwendungen $\mathbb{C}G$ auch als *Signalbereich* und $\bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ als *Spektralbereich* bezeichnet. Die Elemente in der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ sind komplexwertige Signale $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ und die Multiplikation in $\mathbb{C}G$ setzt die Multiplikation in G bilinear fort. Diese sogenannte *Faltung* ist also für $a, b \in \mathbb{C}G$ gegeben durch

$$(a * b)(t) := \sum_{g \in G} a(g)b(g^{-1}t).$$

Da eine DFT D multiplikativ ist, wird durch D eine Faltung in die Multiplikation von Blockdiagonalmatrizen übergeführt:

$$D(a * b) = D(a) \cdot D(b).$$

Durch Anwendung der inversen DFT eröffnet sich hier ein alternativer Weg zur Berechnung von Faltungen:

$$a * b = D^{-1}(D(a) \cdot D(b)).$$

Im klassischen Fall ist $G = C_N$ die zyklische Gruppe der Ordnung N . Die DFT der Länge N beschreibt hier einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{C}C_N$ und dem Raum der N -reihigen Diagonalmatrizen. Für die Auswertung der klassischen DFT haben James W. Cooley und John W. Tukey im Jahr 1965 in [15] einen schnellen Algorithmus, die sogenannte Fast Fourier Transform (FFT), veröffentlicht. Cooley und Tukey haben gezeigt, dass die DFT der Länge $N = 2^n$ mit $\mathcal{O}(N \log N)$ arithmetischen Operationen berechnet werden kann. Bluestein konnte 1970 in [4] das Ergebnis für DFTs beliebiger Länge N verallgemeinern. Zum Vergleich erfordert die naive Methode zur Auswertung einen Aufwand von $\mathcal{O}(N^2)$ arithmetischen Operationen. Auch die inverse DFT lässt sich mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(N \log N)$ arithmetischen Operationen auswerten. Als direkte Konsequenz ist im Fall

1 Einleitung

von Signalen auf der C_N der oben beschriebenen, alternative Weg zur Berechnung von Faltungen schneller als die naive Herangehensweise. Im Spektralbereich ist die Multiplikation zweier N -reihigen Diagonalmatrizen mit N Multiplikationen der Diagonaleinträge durchführbar. Entsprechend ist die Anzahl der benötigten Operationen der Faltung zweier Signale auf der C_N von der Ordnung $\mathcal{O}(N \log N)$ im Vergleich zu $\mathcal{O}(N^2)$ beim naiven Ansatz. Eine Standardanwendung des Verfahrens ist beispielsweise die Polynommultiplikation. Die Signale sind hier beschrieben durch die Koeffizientenvektoren der Polynome. Fügt man den Eingabevektoren ausreichend Nullen zu, vermeidet man verfälschende Überlappungseffekte, die bei der Berechnung der (zyklischen) Faltung auftreten können. Diese Technik wird auch mit *Zero-Padding* bezeichnet. Wir betrachten also bei der (gewöhnlichen) Polynommultiplikation Signale von spezieller Gestalt.

Eine weitere Anwendung der klassischen DFT ist Multiplikation zweier ganzer Zahlen. Hierzu haben Schönhage und Strassen 1971 in [39] ein schnelles Verfahren vorgestellt. Der sogenannte Schönhage-Strassen-Algorithmus berechnet die Multiplikation zweier ganzer Zahlen mit $\mathcal{O}(N \cdot \log(N) \cdot \log(\log N))$ Bitoperationen, wobei hier N die maximale Bitlänge der beiden ganzen Zahlen ist. Die Grundidee des Algorithmus ist im Groben eine Zerlegung der Multiplikation. Hierfür werden zunächst die zu multiplizierenden Zahlen (in Binärdarstellung) in Stückfolgen passender Länge zerlegt. Die Multiplikation dieser Stückfolgen geschieht mit dem oben beschriebenen Weg zur Faltung zweier Signale. Zum Schluss werden die Teilergebnisse wieder zusammengesetzt, um das eigentliche Ergebnis der Multiplikation zu erhalten.

Ein anderer klassischer Fall ist $G = C_2^m$ mit $C_2^m = C_2 \times \dots \times C_2$. Die entsprechende lineare Transformation ist bekannt als *Walsh-Hadamard Transformation* (WHT). Die WHT lässt sich als mehrdimensionale Variante der klassischen DFT der Größe $2 \times \dots \times 2$ auffassen. Die zugehörige Transformationsmatrix H_m ist darstellbar als m -faches Kroneckerprodukt von DFT-Matrizen (s.u.) der Länge 2: $H_m = \otimes_{i=1}^m \text{DFT}_2$.

Insgesamt gehören der klassische FFT Algorithmus und diverse Varianten heute zu den fundamentalen Algorithmen, die in ganz unterschiedlichen Bereichen wie Mathematik, Informatik, Physik und den Ingenieurwissenschaften zum Einsatz kommen und ohne die manche Entwicklungen wie MP3, JPEG, MPEG, Streaming, WLAN, UMTS, LTE, ADSL, VDSL, etc. gar nicht möglich gewesen wären. Ausgehend von dieser zentralen Bedeutung der klassischen DFT und ihrer schnellen Auswertung ist aus historischer Sicht bemerkenswert, dass die Veröffentlichung des FFT Algorithmus von Cooley und Tukey eine Wiederentdeckung ist. In einer 1866 posthum veröffentlichten Abhandlung [20] beschreibt Carl Friedrich Gauß die Grundlagen der modernen FFT. Sein Interesse galt hier der Berech-

nung der Flugbahnen von Asteroiden und deren Positionen. Eine genauere Einordnung der Geschichte der FFT und der Zusammenhang zu Gauß wird von Heideman, Johnson und Burrus in [21] beschrieben.

Für konkrete Anwendungen zeigt sich, dass vornehmlich Spezialfälle des Satzes von Wedderburn von Interesse sind. Entscheidend dabei ist die Identifikation der Elemente eines Anwendungsproblems als Elemente einer komplexen Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$. Es stellt sich nun die Frage, ob für die entsprechende Gruppe ebenfalls schnelle, effiziente Algorithmen zur Auswertung der DFT gefunden werden können. Konsequenterweise versucht man bereits bekannte Techniken bzw. Prinzipien wie beispielsweise den Divide-and-Conquer Ansatz der klassischen FFT auf andere Gruppenalgebren zu verallgemeinern. In diesem Zusammenhang wurden seit Ende der 70er Jahre FFTs für nicht abelsche, endliche Gruppen von Baum, Beth, Clausen, Diaconis, Maslen, Rockmore, Willsky und anderen untersucht. Eine Übersicht für die Entwicklungen in diesem Bereich bis in die 90er Jahre findet man beispielsweise in [32, 37] oder auch Kapitel 13 in [5]. Als eine neuere Entwicklung haben Cohn und Umans in [14] einen gruppentheoretischen Ansatz zur Matrixmultiplikation veröffentlicht. Matrizen werden hier als Signale einer passenden Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ enkodiert. Dies ermöglicht die Matrixmultiplikation als eine Faltung in $\mathbb{C}G$ aufzufassen. Vergleichbar zu der Polynommultiplikation können nun Matrizen mit dem oben beschriebenen Weg zur Berechnung von Faltungen multipliziert werden. Entscheidend in dem gesamten Framework von Cohn und Umans ist die Wahl einer nicht abelschen Gruppe G mit gewissen Eigenschaften. Hierzu werden von Cohn et al. diverse Konstruktionen von Gruppen in [13] betrachtet.

Für diese Arbeit sind spezielle komplexwertige Signale, deren Definitionsbereich eine symmetrische Gruppe¹ ist, relevant. Zu der schnellen Auswertung der Fouriertransformation von Signalen auf der S_n gibt es zwei bedeutende Arbeiten. Clausen hat in [7] gezeigt, dass die Fouriertransformation solcher Signale mit $O(N \log^3 N)$, $N := n!$, arithmetischen Operationen durchführbar ist. Maslen konnte dies in [31] auf $O(N \log^2 N)$ verbessern. Anwendungen von Fouriertransformationen von Signalen auf der S_n finden sich u.a. bei der statistischen Analyse von Datensätzen mit einem Ranking (siehe [17, 18]), beim Graph Mining zur Messung der Ähnlichkeit zweier Graphen (siehe [28, 29]), beim Multi-Object Tracking bzw. Identity Management Problem (siehe [22]) sowie bei Optimierungsproblemen wie das Quadratic Assignment Problem (siehe [36, 27]).

Gemeinsames Merkmal ist hier die kombinatorische Natur der betrachteten Probleme, in

¹Mit S_n wird im Folgenden die symmetrische Gruppe aller Permutationen von $[1, n] := \{1, 2, \dots, n\}$ bezeichnet.

1 Einleitung

denen Permutationen von Objekten eine Rolle spielen. Wir wollen kurz auf zwei Anwendungen eingehen. So suchen Kondor, Shervashidze und Borgwardt in [29] nach Grapheninvarianten, bei denen die Anordnung der Knoten im Graphen keine Rolle spielt. Hierbei enkodieren sie die Adjazenzmatrix eines Graphen bezüglich der Adjazenzmatrix von Graphlets (elementare Teilgraphen mit k Knoten) in ein bestimmtes, niederfrequentes Signal auf gewissen homogenen Räumen von der S_n . Die gesuchten Grapheninvarianten ergeben sich dann im Spektralbereich. Ein weiteres Beispiel ist Kondors Ansatz zur Lösung des Quadratic Assignment Problems (QAP) in [27]. Die Zielfunktion des QAP misst den Grad der „Übereinstimmung“ zweier Graphen und ist über die Adjazenzmatrizen dieser Graphen definiert. Gesucht ist eine Permutation, die diese Funktion maximiert. Kondor setzt die Untersuchungen von Rockmore et al. in [36] fort und zeigt, dass die Zielfunktion ebenfalls als ein niederfrequentes Signal auf der S_n aufgefasst werden kann. Mittels eines Branch-and-Bound Verfahrens im Spektralbereich wird dann eine maximierende Permutation ermittelt. In Kapitel 6 werden beide Beispiele wieder aufgegriffen und näher betrachtet. Motiviert von diesen beiden Beispielen ist der Gegenstand dieser Arbeit die Betrachtung dieser niederfrequenten Signale.

Hintergrund dieser niederfrequenten Signale sind *homogene Räume*. Diese sind hier spezifiziert durch eine (endliche) Gruppe G und eine Untergruppe U von G . Statt beliebigen Signalen $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ beschränken wir uns auf U -rechtsinvariante Signale a , für die also $a(gu) = a(g)$ für alle $g \in G$ und alle $u \in U$ gilt. Konkret werden in dieser Arbeit S_{n-k} -rechtsinvariante Signale auf der symmetrischen Gruppe S_n betrachtet. Anschaulich gesehen sind diese Signale Treppenfunktionen, die konstant auf den Linksnebenklassen der Stabilisatoruntergruppe

$$S_{n-k} := \{\pi \in S_n \mid \forall j > n - k : \pi(j) = j\}$$

in S_n sind. Zudem sind diese Funktionen „bandbegrenzt“, d.h. nach Auswertung der DFT zeigt sich, dass nur eine begrenzte Anzahl der Blockdiagonalmatrizen von Null verschieden sind. In [33] haben Maslen und Rockmore 1997 für eine geeignete DFT auf S_n gezeigt, dass die Auswertung der DFT solcher S_{n-k} -rechtsinvarianten Signalen mit weniger als

$$k \cdot (n^2 - kn + \frac{k^2-1}{3}) \cdot [S_n : S_{n-k}]$$

arithmetischen Operationen berechnet werden kann. Diese obere Schranke konnte von Mas-

len 1998 in [31] auf

$$\frac{3}{4} \cdot k \cdot (2n - k - 1) \cdot [S_n : S_{n-k}]$$

verbessert werden. Für den Fall $k = 1$ entspricht die obere Schranke $\frac{3}{2}(n^2 - n)$ arithmetischen Operationen. Clausen und Kakarala haben 2010 in [12] einen Algorithmus vorgestellt, bei dem die Auswertung der Fouriertransformation von S_{n-1} -rechtsinvarianten Signalen mit $3n - 4$ arithmetischen Operationen berechnet werden kann. Für den Fall $k = 2$ entspricht die obere Schranke $\frac{3}{2} \cdot (2n - 3) \cdot n \cdot (n - 1)$ arithmetischen Operationen. Hier konnte Hühne in seiner Diplomarbeit [23] einen Algorithmus angeben, der mit $9n^2 - 22n + 3$ arithmetischen Operationen auskommt.

Die vorliegende Arbeit ist die Fortsetzung dieser Arbeiten. Ziel ist es, einen Ansatz zu beschreiben, mit dem es möglich ist, für kleine k asymptotisch optimale Algorithmen im Vergleich zu Maslens $\Theta(n^{k+1})$ Algorithmus zu entwickeln. Inhaltlich liegt diese Arbeit im Grenzgebiet von Darstellungstheorie und Algorithmenentwurf. Um hier den Lesern einen Einstieg in die Thematik zu ermöglichen, werden in den Kapiteln 2 bis 7 relevante mathematische Grundlagen und bisherige Resultate auf diesem Gebiet zusammengefasst. In Kapitel 2 werden fundamentale algebraische Konzepte rund um der Verallgemeinerung der DFTs auf beliebige endliche Gruppen G sowie die Komplexität der Auswertung solcher DFTs und Faltungen betrachtet. Als Fortsetzung behandelt Kapitel 3 die Generalisierung diverser Resultate auf die oben beschriebenen homogenen Räume. In Kapitel 4 werden darstellungstheoretische Grundlagen für den Fall, dass die Gruppe G eine symmetrische Gruppe vom Grad n ist, wiedergegeben. Es werden konkrete DFTs auf der S_n bezüglich der sogenannten *Youngschen Seminormalform* bzw. *Youngschen Orthogonalform* konstruiert. Diese DFTs dienen als Grundlage für die FFT und iFFT Algorithmen in Kapitel 5. Als Nächstes werden in Kapitel 6 diverse behandelte Punkte vorangegangener Kapitel im Fall von S_{n-k} -invarianten Signalen auf der S_n beschrieben. Mit dem Graphlet-Spektrum und dem QAP werden zwei Beispiele behandelt, wie S_{n-k} -invariante Signale und die DFTs solcher Signale verwendet werden. Im Anschluss beinhaltet Kapitel 7 die Beschreibung des Algorithmus von Clausen und Kakarala [12] für die Auswertung der DFT S_{n-1} -invarianter Signale. Dieser Algorithmus ist eine essentielle Grundlage für die folgenden Kapitel.

In Kapitel 8 werden grundlegende Konzepte vorgestellt, wie man für die Auswertung von DFTs S_{n-k} -invarianter Signale asymptotisch optimale Algorithmen für kleine k konstruieren kann. Für die Einsparung von arithmetischen Operationen wird sich zeigen, dass verschiedene Skalare ausgeklammert werden können, und dass diverse berechnete Teil-

1 Einleitung

strukturen sowie bekannte Algorithmen (wie der Algorithmus von Clausen und Kakarala) wiederverwendet werden können. Mit diesen Konzepten kann eine verbesserte Variante des Algorithmus von Hühne [23] zur Auswertung von DFTs S_{n-2} -invarianter Signale hergeleitet werden. Mit dem vorgestellten Verfahren ist die Auswertung der DFT auf Basis der Youngschen Seminormalform mit weniger als $9n^2 - 22n$ arithmetischen Operationen und einem Speicheraufwand von $2n^2 - 2$ durchführbar. Die Auswertung der DFT eines reellwertigen Signals ist für $n = 5000$ auf einem Einsteiger-Notebook mit weniger als einer Sekunde möglich. Für kleine k lassen sich die grundlegenden Konzepte wiederholt anwenden. Hierzu muss schrittweise vorgegangen werden. Für ein $k > 2$ benötigt man hierzu die Algorithmen zur Auswertung von DFTs $S_{n-\ell}$ -invarianter Signale, wobei $\ell < k$. Für den Fall $k = 3$ werden die entsprechenden Resultate in Kapitel 9 zusammengefasst. Mit dem beschriebenen Verfahren ist auf Basis der Youngschen Seminormalform die Auswertung der DFT S_{n-3} -invarianter Signale mit weniger als $16.5n^3 - 72n^2 + 50.5n + 9$ arithmetischen Operationen und einem Speicheraufwand von $2n^3 - 4.5n^2 - 0.5n + 2$ durchführbar. Des Weiteren entsteht für die Umrechnung in die Youngsche Orthogonalform lediglich ein linearer Overhead in dem Index von S_{n-k} in S_n .

Zum Abschluss dieser Arbeit befinden sich im Anhang mehrere Beispiele zur Unterstützung der Inhalte aus den Kapiteln 2 bis 6.

Danksagung

Meinen besonderen Dank gilt an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Michael Clausen für die Gelegenheit, sein letzter Promovend sein zu dürfen und diese Arbeit anfertigen zu können. Auch gilt ihm mein Dank für die Betreuung und Unterstützung während der Erstellung dieser Dissertation.

2 Algebraische Grundlagen und Komplexität

In Abschnitt 2.1 werden fundamentale Definitionen und Resultate aus der Darstellungstheorie im Zusammenhang mit dem Satz von Wedderburn zusammengefasst. Neben der Generalisierung der DFT auf beliebige endliche Gruppen durch diesen wichtigen Satz wird auch auf ihre Inverse eingegangen. Die Auswertung einer DFT auf einer endlichen Gruppe G der Ordnung N läuft auf die Multiplikation einer $N \times N$ -Matrix A mit einem N -dimensionalen Eingabevektor hinaus. Die Frage nach der Minimalzahl an arithmetischen Operationen, die ausreichend sind, um die Matrix A auszuwerten, führt zu dem linearen Berechnungsmodell und der Definition der linearen Komplexität einer Matrix A . Abschnitt 2.2 betrachtet wesentliche Eigenschaften der linearen Komplexität, obere und untere Schranken bezüglich der Auswertung von DFT-Matrizen sowie den arithmetischen Aufwand von Faltungen im Spektralbereich. Schließlich beinhaltet Abschnitt 2.3 ein Grundkonzept zum Entwurf von effizienten DFT Algorithmen. Insgesamt orientiert sich das Kapitel vor allem an dem Buch von Clausen und Baum [10] sowie Kapitel 13 in dem Buch von Bürgisser, Clausen und Shokrollahi [5]. Als weitere Grundlage ist das Buch von Serre [40] zu benennen. Für fehlende Grundkenntnisse in Algebra, insbesondere der Gruppentheorie, eignen sich u.a. die Bücher von Artin [1] oder Lang [30].

2.1 Diskrete Fouriertransformationen aus algebraischer Sicht

Eine (*assoziative*) \mathbb{C} -Algebra ist ein komplexer Vektorraum A , der zudem mit einer \mathbb{C} -bilinearen Multiplikation $*$: $A \times A \rightarrow A$ so ausgestattet ist, dass $(A, +, *)$ einen Ring mit Eins bildet. Beispiele für \mathbb{C} -Algebren sind:

- \mathbb{C}^n zusammen mit der punktweisen Multiplikation,
- $\mathbb{C}^{d \times d}$, der Vektorraum der d -reihigen Matrizen über \mathbb{C} , zusammen mit der Matrixmultiplikation,
- $\mathbb{C}[X] := \{\sum_{i \geq 0} a_i X^i \mid a_i \in \mathbb{C} \wedge \exists n \forall i > n : a_i = 0\}$, der Vektorraum aller univariaten Polynome über \mathbb{C} , zusammen mit der Polynommultiplikation (Faltung)

$$\left(\sum_i a_i X^i\right) * \left(\sum_j b_j X^j\right) := \sum_i \sum_j a_i b_j X^{i+j} = \sum_k \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j\right) X^k,$$

- $\mathbb{C}G := \{a \mid a: G \rightarrow \mathbb{C}\}$, der Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen auf einer

2 Algebraische Grundlagen und Komplexität

endlichen (multiplikativen) Gruppe G , zusammen mit der *Faltung*²

$$\left(\sum_{g \in G} a_g g\right) * \left(\sum_{h \in G} b_h h\right) := \sum_g \sum_h a_g b_h gh = \sum_{k \in G} \left(\sum_{gh=k} a_g b_h\right) k$$

als Multiplikation.

Die \mathbb{C} -Algebra $\mathbb{C}G$ wird auch *Gruppenalgebra* von G über \mathbb{C} genannt. Ferner wird die \mathbb{C} -Algebra $\mathbb{C}^{d \times d}$ als *volle Matrixalgebra* bezeichnet.

Ein Untervektorraum U einer Algebra A ist eine *Unteralgebra* von A , wenn U das Einselement 1_A enthält und zudem multiplikativ abgeschlossen ist, d.h. aus $a_1, a_2 \in U$ folgt stets $a_1 a_2 \in U$. Die Menge $U := \bigoplus_{j=1}^r \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ aller Blockdiagonalmatrizen vom Typ (d_1, \dots, d_r) mit $d := \sum_{j=1}^r d_j$ und $d_j \in \mathbb{Z}_+$ ist eine Unteralgebra der vollen Matrixalgebra $\mathbb{C}^{d \times d}$. Ein *zweiseitiges Ideal* I in einer Algebra A ist ein Untervektorraum, der zusätzlich unter Multiplikation von links und rechts mit beliebigen Elementen aus A abgeschlossen ist, d.h. für $a \in A$ und $x \in I$ gilt stets $xa \in I$ und $ax \in I$. Eine Algebra A besitzt die zwei trivialen zweiseitigen Ideale 0 und A . Der Faktorraum $A/I = \{a + I \mid a \in A\}$ einer Algebra A nach dem zweiseitigen Ideal I in A wird durch $(a_1 + I) \cdot (a_2 + I) := a_1 a_2 + I$ zu einer \mathbb{C} -Algebra. Diese wird auch *Faktoralgebra* genannt. Eine \mathbb{C} -lineare Abbildung $\varphi: A \rightarrow A'$ zwischen zwei Algebren A und A' wird *Algebren-Morphismus* genannt, falls $\varphi(1_A) = 1_{A'}$ und $\varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_1) \varphi(a_2)$ für alle $a_1, a_2 \in A$. Falls φ bijektiv ist, wird φ als *Algebren-Isomorphismus* bezeichnet. Das *Bild* $\varphi(A) := \{\varphi(a) \mid a \in A\}$ von φ ist eine Unteralgebra von A' . Der *Kern* $\ker(\varphi) := \{a \in A \mid \varphi(a) = 0\}$ von φ ist ein zweiseitiges Ideal in A . Sei $\varphi: A \rightarrow A'$ ein Algebren-Morphismus, dann wird für $a \in A$ durch $a + \ker(\varphi) \mapsto \varphi(a)$ ein wohldefinierter Algebren-Isomorphismus zwischen $A/\ker(\varphi)$ und $\varphi(A)$ definiert.

Für eine positive ganze Zahl N ist $\omega := \exp(2\pi i/N)$ eine primitive N -te Einheitswurzel. (D.h. $\omega^N = 1$ und $\omega^m \neq 1$ für alle $m \in [1, N-1]$.) Die klassische DFT der Länge N ergibt sich, wenn man $\mathbb{C}[X]$ mit Hilfe der multiplen Auswertung

$$\mathbb{C}[X] \ni f \mapsto (f(1), f(\omega), f(\omega^2), \dots, f(\omega^{N-1}))^\top \in \mathbb{C}^N$$

nach \mathbb{C}^N abbildet. Diese Abbildung ist ein surjektiver Algebren-Morphismus. Der Kern dieser Abbildung ist das von dem Polynom $\prod_{j=0}^{N-1} (X - \omega^j) = X^N - 1$ erzeugte zweiseitige

²Um die Analogie zur Polynomfaltung zu betonen, identifizieren wir die zum Gruppenelement $g \in G$ gehörige Indikatorfunktion $\chi_g := (G \ni h \mapsto \delta_{gh})$ mit g , so dass wir hier und im Folgenden für $a \in \mathbb{C}G$ statt $a = \sum_{g \in G} a(g) \chi_g$ symbolisch kurz $a = \sum_{g \in G} a_g g$ schreiben.

2.1 Diskrete Fouriertransformationen aus algebraischer Sicht

Ideal $(X^N - 1)$, das aus allen Vielfachen des Polynoms $X^N - 1$ besteht. Zusammengefasst hat man einen kanonischen Algebren-Isomorphismus

$$\mathbb{C}[X]/(X^N - 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^N.$$

Die Faktoralgebra $\mathbb{C}[X]/(X^N - 1)$ kann angesehen werden als Algebra aller univariaten Polynome vom Grad kleiner als N mit Multiplikation modulo $X^N - 1$. Die Auswertung von $f(X) := \sum_{j=0}^{N-1} c_j X^j \in \mathbb{C}[X]/(X^N - 1)$ an den Stellen $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{N-1}$ lässt sich wie folgt als Matrix-Vektor-Multiplikation schreiben:

$$\begin{pmatrix} f(1) \\ f(\omega) \\ f(\omega^2) \\ \vdots \\ f(\omega^{N-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\text{DFT}_N = (\omega^{k\ell})_{0 \leq k, \ell < N}$ wird (N -reihige) *DFT-Matrix* genannt. Die durch diese Matrix beschriebene lineare Abbildung ist die (klassische) diskrete Fouriertransformation der Länge N .

Bevor wir die klassische DFT verallgemeinern, schauen wir uns nochmals beide Seiten vom kanonischen Algebren-Isomorphismus $\mathbb{C}[X]/(X^N - 1) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^N$ an. Die Faktoralgebra $\mathbb{C}[X]/(X^N - 1)$ hat als Algebra aller univariaten Polynome vom Grad kleiner als N mit Multiplikation modulo $X^N - 1$ die Polynome $1, X, X^2, \dots, X^{N-1}$ als \mathbb{C} -Basis. Zudem gilt die Relation $X^N = 1$. Daher ist diese Basis multiplikativ gesehen die zyklische Gruppe C_N der Ordnung N und $\mathbb{C}[X]/(X^N - 1)$ – als lineare Hülle dieser Gruppe – ist die Gruppenalgebra $\mathbb{C}C_N$. Auf der anderen Seite kann man \mathbb{C}^N mit punktweiser Multiplikation auch als Algebra der N -reihigen Diagonalmatrizen auffassen. Zusammenfassend kann man also festhalten:

Satz 2.1. *Die Gruppenalgebra der zyklischen Gruppe der Ordnung N ist isomorph zur Algebra der N -reihigen Diagonalmatrizen.*

Dieses Resultat wird nun erheblich verallgemeinert:

Satz 2.2 (Wedderburn). *Die Gruppenalgebra einer endlichen Gruppe G ist isomorph zu einer Algebra von Blockdiagonalmatrizen. Präziser: hat G genau h Konjugationsklassen³,*

³Konjugationsklassen sind die Äquivalenzklassen der folgenden Relation auf der Gruppe G : $x \sim y$ gdw. $\exists g \in G: gxg^{-1} = y$.

2 Algebraische Grundlagen und Komplexität

so gibt es einen Algebren-Isomorphismus

$$D: \mathbb{C}G \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$$

mit eindeutig bestimmten positiven ganzen Zahlen $d_1 \leq \dots \leq d_h$, die aus Dimensionsgründen der Gleichung $|G| = \sum_{j=1}^h d_j^2$ genügen.

Beweis. Siehe z.B. Abschnitt 2.3 in [10]. □

Jeder derartige Isomorphismus heißt eine *diskrete Fouriertransformation* (DFT) auf G (bzw. $\mathbb{C}G$). Im klassischen Fall $G = C_N$ ist $h = N$ und für alle $j \in [1, N]$ gilt $d_j = 1$. In Anlehnung an den klassischen Fall wird in den Anwendungen $\mathbb{C}G$ auch als *Signalbereich* und $\bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ als *Spektralbereich* bezeichnet.

Als Nächstes gehen wir näher auf die natürlichen Projektionen D_1, \dots, D_h von D ein. Hintergrund ist die Darstellungstheorie von Algebren, hier insbesondere die Darstellungstheorie der Gruppenalgebra $A = \mathbb{C}G$. Allgemein versteht man unter einer d -dimensionalen Darstellung D der Algebra A einen Algebren-Morphismus D von A in die Algebra $\text{End}(V)$ aller Endomorphismen eines d -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorraums V . Statt $D(a)(v)$ schreibt man kurz av und spricht dann auch vom *A -Linksmodul* V . Ein Untervektorraum U von V mit $au \in U$ für alle $a \in A$ und alle $u \in U$ heißt *A -Unterm modul* von V . Gibt es außer dem Nullraum und V , den sogenannten *trivialen* Untermoduln, keine weiteren A -Unterm oduln in V , so heißt die Darstellung D *irreduzibel* und V heißt ein *einfacher* A -Linksmodul. Zwei Darstellungen $D_1: A \rightarrow \text{End}(V_1)$ und $D_2: A \rightarrow \text{End}(V_2)$ heißen *äquivalent* (und die zugehörigen A -Moduln V_1 und V_2 heißen *isomorph*), wenn es einen Vektorraumisomorphismus $T: V_1 \rightarrow V_2$ gibt, so dass für alle $a \in A$ stets $D_2(a) = T \circ D_1(a) \circ T^{-1}$ gilt. Will man konkret rechnen, so wählt man in den Moduln Vektorraumbasen aus und beschreibt die linearen Abbildungen $D(a)$ durch $d \times d$ -Matrizen. Auf diese Weise entstehen *Matrixdarstellungen* bezüglich des Algebren-Morphismus $A \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$. Die obigen Begriffe (Irreduzibilität, Äquivalenz, etc.) übertragen sich entsprechend auf Matrixdarstellungen.

Wir betrachten nun den hier relevanten Fall $A = \mathbb{C}G$. Eine Darstellung einer endlichen Gruppe G ist ein Gruppenmorphismus $D: G \rightarrow \text{GL}(V)$. Eine Matrixdarstellung von G vom Grad d ist ein Gruppenmorphismus $D: G \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{C})$. Falls $D: \mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V)$ eine Darstellung der Gruppenalgebra $\mathbb{C}G$ ist, dann ist die Restriktion auf G eine Darstellung von G . Umgekehrt kann der Gruppenmorphismus $D: G \rightarrow \text{GL}(V)$ eindeutig zu einem

2.1 Diskrete Fouriertransformationen aus algebraischer Sicht

Algebren-Morphismus $\mathbb{C}G \rightarrow \text{End}(V)$ durch

$$\sum_{g \in G} a_g g \mapsto \sum_{g \in G} a_g D(g)$$

linear fortgesetzt werden. Insgesamt handelt es sich bei Moduln, Darstellungen und Matrixdarstellungen von Gruppen und ihrer entsprechenden Gruppenalgebra um äquivalente Konzepte.

Ein A -Modul, der durch eine direkte Summe von einfachen A -Untermoduln beschrieben werden kann, wird *vollständig reduzibel* genannt. Der folgende zentrale Satz von Maschke besagt, dass jeder $\mathbb{C}G$ -Modul vollständig reduzibel ist.

Satz 2.3 (Satz von Maschke).

(a) Jede Matrixdarstellung $D: G \rightarrow \text{GL}(d, \mathbb{C})$ von G ist äquivalent zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen: $D = D_1 \oplus \dots \oplus D_m$.

(b) Jeder $\mathbb{C}G$ -Linksmodul V ist die direkte Summe von einfachen $\mathbb{C}G$ -Untermoduln:
 $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_m$.

Beweis. Siehe z.B. Abschnitt 2.2 in [10]. □

Eine Matrixdarstellung D von G wird *unitär* genannt, falls für alle $g \in G$ die Matrizen $D(g)$ unitär sind. Im Zusammenhang mit dem Satz von Maschke und dessen Beweis stellt sich zudem heraus, dass jede Matrixdarstellung äquivalent zu einer unitären Darstellung ist.

Ferner stellt sich heraus, dass die Anzahl der Äquivalenzklassen irreduzibler Darstellungen von $\mathbb{C}G$ endlich ist und mit der Anzahl h der Konjugationsklassen von G übereinstimmt. Ist D_1, \dots, D_h ein Repräsentantensystem der Äquivalenzklassen irreduzibler Matrixdarstellungen von $\mathbb{C}G$, so ist $D := D_1 \oplus \dots \oplus D_h$ eine DFT auf $\mathbb{C}G$ und jede DFT auf $\mathbb{C}G$ ergibt sich auf diese Weise. Dies zeigt, dass sich zwei DFTs auf $\mathbb{C}G$ nur um einen Basiswechsel in jeder Komponente unterscheiden. Die Wahl geeigneter Basen in den einfachen $\mathbb{C}G$ -Moduln wird in dieser Arbeit eine zentrale Rolle spielen.

Ist G eine endliche Gruppe der Ordnung N und

$$D := \bigoplus_{j=1}^h D_j: \mathbb{C}G \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$$

2 Algebraische Grundlagen und Komplexität

eine DFT auf $\mathbb{C}G$, so beschreibt D eine lineare Abbildung zwischen N -dimensionalen \mathbb{C} -Vektorräumen und kann also bzgl. natürlicher Basen⁴ in $\mathbb{C}G$ und $\bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ durch eine N -reihige Matrix \mathbf{D} beschrieben werden. Die Zeilen dieser Matrix sind parametrisiert durch

$$\bigcup_{1 \leq j \leq h} \{(j, \mu, \nu) | 1 \leq \mu, \nu \leq d_j\},$$

wobei (j, μ, ν) die Position (μ, ν) in D_j beschreibt. Die Spalten sind mit den Gruppenelementen indiziert. Insgesamt ist damit

$$\mathbf{D}_{(j, \mu, \nu), g} := D_j(g)_{\mu\nu}. \quad (2.1)$$

Die Abbildung eines Signals $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ in den Spektralbereich entspricht aus dieser Sicht der Matrix-Vektor-Multiplikation $\mathbf{D} \cdot (a(g))_{g \in G}$. Bis auf Permutationen der Spalten und Reihen ist die Matrix \mathbf{D} durch D eindeutig bestimmt. Solche Permutationen haben keinen Einfluss auf die (arithmetische) Komplexität der Matrix-Vektor-Multiplikationen, siehe Lemma 2.7 im nächsten Abschnitt.

Im klassischen Fall $G = C_N$ gibt es genau N inäquivalente irreduzible Darstellungen D_0, \dots, D_{N-1} , die alle 1-dimensional sind. Genauer ist D_j als Algebren-Morphismus schon durch Angabe von $D_j(X) := \omega^j$ eindeutig bestimmt. Die zugehörige N -reihige Matrix ist dann gerade die Matrix DFT_N .

Ein wichtiges Hilfsmittel in der Darstellungstheorie von Algebren ist das *Lemma von Schur* (siehe Lemma 2.4). Mit diesem Lemma lassen sich u.a. die sogenannten *Schur Relationen* (siehe Satz 2.5) beweisen, die einen engen Zusammenhang der DFT und ihrer Inversen aufzeigen.

Lemma 2.4 (Lemma von Schur). *Sei A eine Algebra mit den irreduziblen Darstellungen $D: A \rightarrow \text{End}(V)$ und $D': A \rightarrow \text{End}(V')$ bezüglich der einfachen A -Linksmoduln V und V' . Falls es einen A -Morphismus T von V nach V' gibt, so dass $TD(a) = D'(a)T$ für alle $a \in A$, dann ist $T = 0$ oder T ist ein Isomorphismus. Falls zusätzlich V gleich V' ist, dann ist T ein skalares Vielfaches der Identität.*

Beweis. Siehe beispielsweise Abschnitt 2.2 in [40] oder Lemma (2.2) in [10]. □

Im Folgenden bezeichnet $\mathbf{I}_{a,b}^{n \times n}$ die $n \times n$ Matrix, die eine 1 bei Position (a, b) hat und sonst Null ist. Ist der Kontext klar, wird abkürzend $\mathbf{I}_{a,b}$ verwendet. Mit \mathbf{I}_n wird die $n \times n$

⁴Indikatorfunktionen der Gruppenelemente bzw. Indikatorfunktionen der Blockdiagonalpositionen.

2.1 Diskrete Fouriertransformationen aus algebraischer Sicht

Einheitsmatrix bezeichnet.

Satz 2.5 (Schur Relationen). *Sei D_1, \dots, D_h eine Transversale irreduzibler Matrixdarstellungen von $\mathbb{C}G$ jeweils vom Grad d_1, \dots, d_h . Dann gilt für alle $1 \leq j, j' \leq h$, $1 \leq \mu, \nu \leq d_j$ und $1 \leq \mu', \nu' \leq d_{j'}$:*

$$\sum_{g \in G} D_j(g)_{\mu\nu} \cdot D_{j'}(g^{-1})_{\mu'\nu'} = \delta_{jj'} \delta_{\mu\nu'} \delta_{\nu\mu'} \frac{|G|}{d_j}.$$

Beweis. Siehe beispielsweise Abschnitt 2.2 in [40] oder Theorem (5.4) in [10]. □

Korollar 2.6. *Es sei G eine endliche Gruppe. Falls \mathbf{D} eine DFT-Matrix für G ist, wobei $\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$, dann existieren Permutationsmatrizen P und Q , so dass*

$$\mathbf{D}^{-1} = P \cdot \mathbf{D}^\top \cdot Q \cdot \bigoplus_{j=1}^h \frac{d_j}{|G|} \mathbf{I}_{d_j^2}.$$

Beweis. Sei n die Ordnung der Gruppe G und D_1, \dots, D_h eine Transversale irreduzibler Darstellungen von $\mathbb{C}G$ mit $d_j := \deg(D_j)$. Falls $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine DFT-Matrix von $\mathbb{C}G$ bezüglich D_1, \dots, D_h ist, dann sind die Spalten von \mathbf{D} durch die Gruppenelemente von G und die Zeilen von \mathbf{D} durch

$$\bigcup_{1 \leq j \leq h} \{(j, \mu, \nu) \mid 1 \leq \mu, \nu \leq d_j\}$$

parametrisiert, d.h. (j, μ, ν) beschreibt die Position (μ, ν) in D_j . Nun sei $P \cdot \mathbf{D}^\top \cdot Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrix die man aus \mathbf{D} erhält. Hierzu wird zunächst die Matrix \mathbf{D} transponiert. Anschließend werden in \mathbf{D}^\top die Permutation P der Zeilen bzgl. der Inversion ($G \ni g \mapsto g^{-1}$) und die Permutation Q der Spalten bzgl. $(j, \mu, \nu) \mapsto (j, \nu, \mu)$ ausgeführt. Nach den Schur Relationen ist $\mathbf{D} \cdot (P \cdot \mathbf{D}^\top \cdot Q)$ eine Diagonalmatrix mit d_j^2 -maligem Vorkommen von $|G|/d_j$ für $1 \leq j \leq h$, d.h. $\mathbf{D} \cdot (P \cdot \mathbf{D}^\top \cdot Q) = \bigoplus_{j=1}^h \frac{|G|}{d_j} \mathbf{I}_{d_j^2}$. □

Führt man die Konstruktion des Beweises im klassischen Fall $G = C_N$ mit den weiter oben beschriebenen irreduziblen Darstellungen aus, dann ist $h = N$, $P = \mathbf{I}_{0,0} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{I}_{j,N-j}$, $Q = \mathbf{I}_N$, $d_j = 1$ für alle $j \in [1, N]$ und $|G| = N$. Insgesamt erhält man

$$\text{DFT}_N^{-1} = P \cdot \text{DFT}_N^\top \cdot Q \cdot \bigoplus_{j=1}^h \frac{d_j}{|G|} \mathbf{I}_{d_j^2} = \frac{1}{N} \cdot (\mathbf{I}_{0,0} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{I}_{j,N-j}) \cdot \text{DFT}_N.$$

2.2 Zur Komplexität von DFTs und Faltungen

Das letzte Abschnitt hat gezeigt, dass wir vor folgendem Berechnungsproblem stehen: Gegeben ist eine konkrete N -reihige Matrix A . Diese Matrix ist mit beliebigen N -komponentigen Spaltenvektoren zu multiplizieren. Gesucht ist ein Verfahren, das mit möglichst wenig arithmetischen Operationen (Additionen, Subtraktionen, Skalarmultiplikationen) auskommt. Die Minimalzahl an Operationen zur Auswertung von A wird die *lineare Komplexität* von A genannt und mit $L_\infty(A)$ bezeichnet. Lässt man bei den Skalarmultiplikationen nur Skalare vom Betrag kleiner gleich c zu, so ergibt sich die *c-lineare Komplexität* $L_c(A)$. Natürlich ist $L_c(A) \geq L_\infty(A)$. Die bisher bekannten schnellen Fouriertransformationsalgorithmen kommen mit Programmkonstanten aus, die meist den Betrag 1 haben. Hier ist die Forderung $c \geq 2$ keine gravierende Einschränkung.⁵ Zunächst stellt man folgende Eigenschaften fest:

Lemma 2.7. Sei $2 \leq c \leq \infty$ und $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$.

- (a) $L_c(P) = 0$, falls P eine Permutationsmatrix ist.
- (b) Falls B eine Teilmatrix von A ist, d.h. B entsteht durch das Löschen von Zeilen und Spalten aus A , gilt $L_c(B) \leq L_c(A)$.
- (c) $L_c(A \cdot B) \leq L_c(A) + L_c(B)$, falls A und B multipliziert werden können.
- (d) $L_c(P \cdot A \cdot Q) = L_c(A)$, falls P und Q Permutationsmatrizen sind.

Beweis. (a) Durch eine Permutationsmatrix entstehen lediglich Kopieroperationen. Es entsteht kein arithmetischer Aufwand.

(b) Klar.

(c) Wird bei einer Matrix-Vektor-Multiplikation der Vektor zunächst mit B und das Resultat anschließend mit A multipliziert, folgt sofort die obere Schranke $L_c(A) + L_c(B)$.

(d) Man kombiniere (a) und (c). □

Der folgende Satz gibt eine untere Komplexitätsschranke für die *c-lineare Komplexität* an.

Satz 2.8 (Morgenstern). Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ invertierbar und $2 \leq c < \infty$. Dann ist

$$L_c(A) \geq \log_c |\det(A)|.$$

⁵Man fordert $c \geq 2$ statt $c \geq 1$, da es ansonsten zu einer Inkonsistenz käme: $x + x$ wäre ein Berechnungsschritt, aber $2 \cdot x$ wäre bei $c < 2$ kostspieliger!

Beweis. Siehe [34], siehe auch S. 312 in [5]. □

Als direkte Anwendung erhalten wir eine nichttriviale untere Schranke für die 2-lineare Komplexität der DFT-Matrizen der Länge N :

Korollar 2.9 (Morgenstern). $L_2(\text{DFT}_N) \geq \frac{N}{2} \log N$.

Beweis. Mit $\text{DFT}_N^2 = N \cdot (\mathbf{I}_{0,0} + \sum_{j=1}^{N-1} \mathbf{I}_{j,N-j})$ gilt $|\det(\text{DFT}_N)|^2 = |\det(\text{DFT}_N^2)| = N^N$, woraus mit dem Satz von Morgenstern die Behauptung folgt. □

Nach dem Algorithmus von Bluestein ist $L_2(\text{DFT}_N) = \mathcal{O}(N \log N)$. Damit ist gezeigt, dass innerhalb des 2-linearen Berechnungsmodells die FFT-Algorithmen im Fall $G = C_N$ größenordnungsmäßig optimal sind.

Der folgende Satz von Kaminski, Kirkpatrick und Bshouty zeigt eine enge Verbindung zwischen der linearen Komplexität einer Matrix A und ihrer Transponierten A^\top auf.

Satz 2.10 (Transpositionssatz). *Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, dann gilt*

$$L_c(A^\top) = L_c(A) - n + m - z(A) + z(A^\top),$$

wobei mit $z(A)$ die Anzahl der Nullzeilen von A bezeichnet wird. Für eine invertierbare Matrix A gilt insbesondere

$$L_c(A) = L_c(A^\top).$$

Beweis. Siehe [25]. □

Eine beliebige endliche Gruppe G hat im allgemeinen unendlich viele DFT-Matrizen, die sich in ihrer linearen Komplexität unterscheiden können. Daher definiert man die c -lineare Komplexität von G durch

$$L_c(G) := \min\{L_c(\mathbf{D}) \mid \mathbf{D} \text{ ist DFT-Matrix von } \mathbb{C}G\}.$$

Lemma 2.11. *Es gilt:*

$$|G| - 1 \leq L_\infty(G) \leq 2 \cdot |G| \cdot (|G| - 1)$$

Beweis. Da die Einsdarstellung in jeder DFT D auf $\mathbb{C}G$ involviert ist, gibt es in einer wie oben beschrieben konstruierten DFT-Matrix \mathbf{D} eine Zeile $B = (1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{1 \times |G|}$. Weil

2 Algebraische Grundlagen und Komplexität

$L_\infty(B^\top) = 0$, folgt aus dem Transpositionssatz und Lemma 2.7 (b), dass $|G|-1 = L_\infty(B) \leq L_\infty(\mathbf{D})$. Da $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{|G| \times |G|}$ und eine Zeile in \mathbf{D} gleich B ist, ist die Multiplikation von \mathbf{D} mit einem Vektor in $\mathbb{C}^{|G|}$ mit höchstens $(|G|-1) \cdot |G|$ Multiplikationen und $(|G|-1) \cdot |G|$ Additionen durchführbar. \square

Mit Hilfe der Schur Relationen (siehe Satz 2.5), dem Transpositionssatz, dem Satz von Morgenstern und Lemma 2.7 konnten folgenden Resultate bewiesen werden.

Satz 2.12 (Baum, Clausen). *Sei \mathbf{D} eine DFT-Matrix für eine endliche Gruppe G , dann gilt*

$$(1) \quad L_c(\mathbf{D}^{-1}) \leq L_c(\mathbf{D}) + |G| \text{ für } 2 \leq c \leq \infty.$$

$$(2) \quad |L_\infty(\mathbf{D}) - L_\infty(\mathbf{D}^{-1})| \leq |G|.$$

Beweis. Siehe [3]. \square

Satz 2.13 (Baum, Clausen). *Für eine endlichen Gruppe G der Ordnung N ist*

$$L_2(G) \geq \frac{1}{4}N \log N.$$

Beweis. Siehe [3]. \square

Aufgrund von Satz 2.13 sind innerhalb des 2-linearen Berechnungsmodells bei endlichen Gruppen der Ordnung N FFT-Algorithmen, die mit Aufwand $\Theta(N \log N)$ auskommen, das große Ziel.

Dieses Ziel wurde für die Klasse der überauflösbaren Gruppen⁶ erreicht und fast erreicht für die Klasse der symmetrischen Gruppen:

Satz 2.14. (1) (Baum) *Für eine überauflösbare Gruppe G der Ordnung N ist $L_2(G) \leq \gamma N \log N$, mit einer Konstanten $1.5 \leq \gamma \leq 8.5$, die nur von den Primfaktoren von N abhängt.*

$$(2) \quad \text{(Clausen)} \quad L_2(S_n) \leq o(|S_n| \log^3 |S_n|).$$

⁶Eine endliche Gruppe G ist *überauflösbar* gdw. es eine Kette $G = G_n > G_{n-1} > \dots > G_1 = \{1\}$ von Normalteilern G_i in G gibt, so dass alle Indizes $[G_i : G_{i-1}]$ prim sind. Beispielsweise sind alle endlichen abelschen Gruppen, sowie alle nilpotenten Gruppen (das sind direkte Produkte von Gruppen von Primzahlpotenzordnung) überauflösbar.

(3) (Maslen) $L_2(S_n) \leq o(|S_n| \log^2 |S_n|)$.

Beweis. (1) siehe [2], (2) siehe [7], (3) siehe [31]. □

Mit Hilfe einer DFT D auf $\mathbb{C}G$ lässt sich die Faltung zweier Signale $a, b \in \mathbb{C}G$ auf die Multiplikation zweier Blockdiagonalmatrizen überführen:

$$a * b = D^{-1}(D(a) \cdot D(b)).$$

Das folgende Lemma betrachtet den arithmetischen Aufwand im Spektralbereich.

Lemma 2.15. *Seien $D := \bigoplus_{j=1}^h D_j: \mathbb{C}G \rightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ eine DFT auf einer endlichen Gruppe G und $a, b \in \mathbb{C}G$, dann können $D(a)$ und $D(b)$ mit weniger als $2 \cdot |G|^{3/2}$ arithmetischen Operationen multipliziert werden.*

Beweis. Mit $d := \max_{j \in [1, h]} d_j$ gilt $d^2 \leq \sum_{j=1}^h d_j^2 = |G|$, m.a.W. ist also $d \leq |G|^{1/2}$. Zwei Blockdiagonalmatrizen in $\bigoplus_j \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$ können mit weniger als $2 \cdot \sum_j d_j^3$ arithmetischen Operationen multipliziert werden. Wegen

$$2 \cdot \sum_{j=1}^h d_j^3 \leq 2 \cdot d \cdot \sum_{j=1}^h d_j^2 \leq 2 \cdot |G|^{1/2} \cdot |G| = 2 \cdot |G|^{3/2}$$

folgt die Behauptung. □

Wie in der Einleitung beschrieben, wird im klassischen Fall $G = C_N$ durch die DFT die Faltung sogar in die Multiplikation von Diagonalmatrizen überführt. Im Spektralbereich ergibt sich also ein linearer Aufwand. Bereits dieses Beispiel zeigt, dass die Struktur der Blockdiagonalmatrizen (in Abhängigkeit von G) entscheidend ist, ob die obere Schranke in Lemma 2.15 weiter verbessert werden kann.

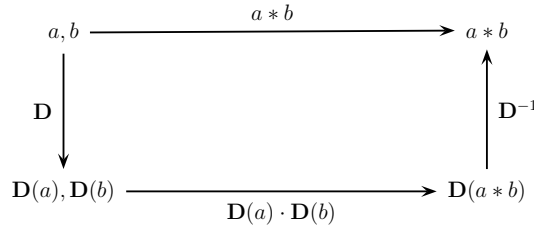


Abbildung 1: Die Faltung zweier Signale a und b aus $\mathbb{C}G$.

Um nun zwei Signale in $\mathbb{C}G$ gemäß dem Schema in Abbildung 1 schnell zu falten, muss zunächst ein FFT-Algorithmus zur Auswertung von \mathbf{D} an Signalen a gefunden werden.

Nach Satz 2.12 (2) entsteht bei der inversen DFT lediglich ein Overhead, der linear in der Gruppenordnung ist. Der folgende Abschnitt beinhaltet grundlegende Konzepte zur Konstruktion von FFT-Algorithmen.

2.3 Symmetrieangepasste DFTs

Nach dem Satz von Maschke ist jede Matrixdarstellung von $\mathbb{C}G$ äquivalent zu einer direkten Summe irreduzibler Matrixdarstellungen. Kommt eine irreduzible Matrixdarstellung bis auf Äquivalenz mehrfach vor, so kann man durch geeigneten Basiswechsel zudem erreichen, dass äquivalente irreduzible Bestandteile sogar gleich sind. Das wird, wie sich u.a. in Abschnitt 5.2 (Formel (5.1)) zeigen wird, den Berechnungsaufwand reduzieren helfen, indem man ein Ergebnis *einmal* berechnet, aber *mehrfach* wiederverwendet. Diese Grundphilosophie wird auf geeignete Ketten von Untergruppen verallgemeinert und führt dann zu symmetrieangepassten Basen. Grundlegend ist folgende

Definition 2.16. Sei $\mathcal{T} := (G = G_n > \dots > G_0 = \{1\})$ eine Kette von Untergruppen der endlichen Gruppe G . Eine Matrixdarstellung D von $\mathbb{C}G$ wird symmetrieangepasst bzw. \mathcal{T} -angepasst genannt, falls für alle $j \in [0, n]$ die folgenden Bedingungen gelten:

- (a) Die Restriktion $D \downarrow \mathbb{C}G_j$ von D nach $\mathbb{C}G_j$ ist **gleich** der direkten Summe von irreduziblen Matrixdarstellungen von $\mathbb{C}G_j$.
- (b) Äquivalente irreduzible Bestandteile von $D \downarrow \mathbb{C}G_j$ sind **gleich**.

Zunächst stellt man fest, dass \mathcal{T} -Anpassung immer möglich ist:

Satz 2.17. *Jede Darstellung von $\mathbb{C}G$ ist äquivalent zu einer \mathcal{T} -angepassten Darstellung.*

Beweis: Siehe z.B. Theorem (7.2) in [10]. □

Kombiniert man diesen Satz und dessen Beweis mit der Tatsache, dass jede Matrixdarstellung äquivalent zu einer unitären Darstellung ist, folgt

Korollar 2.18. *Jede Darstellung von $\mathbb{C}G$ ist äquivalent zu einer unitären \mathcal{T} -angepassten Darstellung.*

Modultheoretisch basiert die \mathcal{T} -Anpassung einer Darstellung auf der Wahl spezieller, sog. \mathcal{T} -angepasster Basen im Darstellungsraum. Besonders einfach gestaltet sich \mathcal{T} -Anpassung, wenn für jedes j die Einschränkung einer irreduziblen Darstellung D_j von $\mathbb{C}G_j$ auf $\mathbb{C}G_{j-1}$ vielfachheitenfrei ist. Wir sprechen dann auch von *vielfachheitenfreier \mathcal{T} -Anpassung*.

Satz 2.19 (Janusz). *Bei vielfachheitenfreier \mathcal{T} -Anpassung sind die \mathcal{T} -angepassten Basen bis auf Reihenfolge und Skalierung eindeutig bestimmt.*

Beweis. Siehe z.B. Theorem (7.4) in [10]. □

3 DFTs U -invarianter Signale auf der Gruppe G

Dieses Kapitel ist im Wesentlichen die Fortsetzung von Kapitel 2. Ausgangspunkt ist eine endliche Gruppe G der Ordnung N sowie eine echte Untergruppe U von G . In Abschnitt 3.1 werden der Signal- und Spektralbereich im Fall von U -invarianten Signalen auf G beschrieben. In Abschnitt 3.2 wird die Komplexität von DFTs und Faltungen solcher Signale betrachtet. Dabei werden ausgehend von den Publikationen von Kondor und Borgwardt [28] sowie von Kondor, Shervashidze und Borgwardt [29] bekannte Resultate auf den Fall von U -invarianten Signalen verallgemeinert.

3.1 Signal- und Spektralbereich U -invarianter Signale

Es sei G eine endliche Gruppe der Ordnung N , U eine echte Untergruppe von G . Allgemein wird in dieser Arbeit die Auswertung einer DFT D auf G auf den Unterraum

$$\mathbb{C}[G \bmod U] := \{a: G \rightarrow \mathbb{C} \mid \forall g \in G, u \in U : a(gu) = a(g)\}$$

der U -rechtsinvarianten Signale auf G beschränkt. Sei $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ eine Transversale der Linksnebenklassen von U in G : $G = \bigsqcup_{j=1}^m t_j U$. Gemäß dieser Zerlegung von G lässt sich zunächst jedes Signal $a: G \rightarrow \mathbb{C}$ wie folgt umschreiben:

$$a = \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{j=1}^m \sum_{u \in U} a_{t_j u} t_j u = \sum_{j=1}^m t_j \sum_{u \in U} a_{t_j u} u = \sum_{j=1}^m t_j a_j,$$

wobei $a_j := \sum_{u \in U} a_{t_j u} u \in \mathbb{C}U$. Ist nun a zudem U -rechtsinvariant, so sind die Signale a_j von spezieller Form:

$$a_j = \sum_{u \in U} a_{t_j u} u = \sum_{u \in U} a_{t_j} u = a_{t_j} \sum_{u \in U} u. \quad (3.1)$$

Mit dem idempotenten Element

$$\iota_U := \frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} u$$

und $r_j := |U| \cdot a_{t_j}$ erhält man:

$$a = \left(\sum_{j=1}^m r_j \cdot t_j \right) * \iota_U.$$

3 DFTs U -invarianter Signale auf der Gruppe G

Insbesondere ist damit gezeigt, dass $\mathbb{C}[G \bmod U]$ das durch das idempotente Element ι_U erzeugte Linksideal in $\mathbb{C}G$ ist: $\mathbb{C}[G \bmod U] = \mathbb{C}G * \iota_U$. Modultheoretisch ist $\mathbb{C}U * \iota_U$ das minimale Linksideal in $\mathbb{C}U$ zur Einsdarstellung von U und $\mathbb{C}G * \iota_U$ ein induzierter Modul der Dimension $[G:U]$. Für mehr Details siehe beispielsweise Abschnitt 6.2 in [10].

Gegeben sei ein beliebiges $a \in \mathbb{C}G$. Wir betrachten das Signal $b := a * \iota_U$ aus $\mathbb{C}G$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 a * \iota_U &= \sum_{g \in G} \frac{1}{|U|} \sum_{\ell \in U} a_g g \ell = \sum_{k \in G} \left(\frac{1}{|U|} \sum_{\ell \in U} a_{k\ell^{-1}} \right) k \\
 &= \sum_{j=1}^m \sum_{y \in U} \left(\frac{1}{|U|} \sum_{\ell \in U} a_{t_j y \ell^{-1}} \right) t_j y \\
 &\stackrel{(u=y\ell^{-1})}{=} \sum_{j=1}^m \sum_{y \in U} \left(\frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} a_{t_j u} \right) t_j y \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{|U|} \sum_{u \in U} a_{t_j u} \right) \sum_{y \in U} t_j y.
 \end{aligned}$$

Demnach entsteht das Signal b aus a mittels Tiefpassfilterung durch die Rechtsmultiplikation mit ι_U . Das Signal b ist konstant auf jeder Linksnebenklasse $t_j U$ und der konstante Wert ergibt sich durch den Mittelwert $|U|^{-1} \sum_{u \in U} a_{t_j u}$. Diese Methode zur Glättung nennt man auch *gleitende Mittelwertbildung*. Für jedes $x \in G$ ist das Signal

$$|U| \cdot x * \iota_U = \sum_{u \in U} x u$$

die Indikatorfunktion der Linksnebenklasse xU .

Sei $D = \bigoplus_{j=1}^h D_j$ eine $(G > U)$ -angepasste DFT auf G und d_j der Grad von D_j . Die zugehörige Abbildungsmatrix $\mathbf{D} = (D_j(g)_{\mu\nu})$ des Isomorphismus erhält man durch die Konstruktion in (2.1). Die Zeilenindizes (j, μ, ν) sind lexikographisch angeordnet, wobei $j \in [1, h]$ und $\mu, \nu \in [1, d_j]$. Die Spaltenindizes sind parametrisiert durch $g \in G$. Des Weiteren ist $F = \bigoplus_{i=1}^s F_i$ die zugehörige DFT auf U und F_1 bezeichnet die Einsdarstellung von $\mathbb{C}U$. Durch die Symmetrieanpassung gilt $D_j \downarrow \mathbb{C}U = F_{j,1} \oplus \dots \oplus F_{j,n_j}$ mit $F_{j,k} \in \{F_1, \dots, F_s\}$. Falls $f_{j,k}$ der Grad von $F_{j,k}$ ist, enthält $\Gamma_j := \{1 + \sum_{\ell < k} f_{j,\ell} \mid F_{j,k} = F_1\} \subseteq [1, d_j]$ diejenigen Diagonalpositionen von $D_j \downarrow \mathbb{C}U$, die zur Einsdarstellung von $\mathbb{C}U$ korrespondieren. Für eine positive ganze Zahl d und $\Gamma \subseteq [1, d]$ ist

$$\mathbb{C}(d, \Gamma) := \{A \in \mathbb{C}^{d \times d} \mid \forall k \in [1, d] \forall \ell \notin \Gamma : a_{k\ell} = 0\} \quad (3.2)$$

3.2 Komplexität von DFTs und Faltungen U -invarianter Signale

der Raum aller $d \times d$ Matrizen, deren Spalten mit Index nicht in Γ Null sind. Der folgende Satz beschreibt den Spektralbereich von $\mathbb{C}[G \bmod U]$.

Satz 3.1. $\bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}(d_j, \Gamma_j)$ ist das D -Bild von $\mathbb{C}[G \bmod U]$. Ferner ist $|\Gamma_j|$ die Vielfachheit der Einsdarstellung F_1 in der Restriktion $D_j \downarrow \mathbb{C}U$.

Beweis. Wegen des Satzes von Wedderburn und der $(G > U)$ -Anpassung gilt:

$$\begin{aligned} D(\mathbb{C}[G \bmod U]) &= D(\mathbb{C}G * \iota_U) = D(\mathbb{C}G) \cdot D(\iota_U) \\ &= \bigoplus_{j=1}^h \left(\mathbb{C}^{d_j \times d_j} \cdot \bigoplus_{k=1}^{n_j} F_{j,k}(\iota_U) \right). \end{aligned}$$

Nach dem Lemma von Schur (siehe Lemma 2.4) ist $F_{j,k}(\iota_U)$ die Einheitsmatrix \mathbf{I}_1 , falls $F_{j,k} = F_1$. Andernfalls ist $F_{j,k}(\iota_U)$ die $f_{j,k} \times f_{j,k}$ Nullmatrix. Demnach ist $\bigoplus_{k=1}^{n_j} F_{j,k}(\iota_U)$ eine binäre Diagonalmatrix mit einer 1 genau an den Positionen $i \in \Gamma_j$. $|\Gamma_j|$ ist die gesuchte Vielfachheit. Zusammengefasst gilt

$$D(\mathbb{C}[G \bmod U]) = \bigoplus_{j=1}^h \left(\mathbb{C}^{d_j \times d_j} \cdot \sum_{i \in \Gamma_j} \mathbf{I}_{i,i}^{d_j \times d_j} \right) = \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}(d_j, \Gamma_j).$$

□

Beschränkt man nun die Auswertung einer DFT auf $\mathbb{C}G$ auf den Raum $\mathbb{C}[G \bmod U]$, kann sich die Anzahl der arithmetischen Operationen erheblich reduzieren.

3.2 Komplexität von DFTs und Faltungen U -invarianter Signale

Der obige Isomorphismus $\mathbb{C}[G \bmod U] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}(d_j, \Gamma_j)$ kann bezüglich natürlicher Basen (das arithmetische Mittel der U -Linksnebenklassen in G bzw. die Indikatorfunktionen der nichttrivialen Matrixpositionen bestimmt durch Γ_j) vergleichbar zu der Konstruktion in (2.1) durch eine $[G:U] \times [G:U]$ -Matrix $\mathbf{D}_{G \bmod U}$ beschrieben werden. Genauer hat $\mathbf{D}_{G \bmod U}$ die Zeilenindizes (j, μ, ν) , wobei nur die Indizes $j \in [1, h]$ durchlaufen werden, wo D_j eingeschränkt auf $\mathbb{C}U$ die Einsdarstellung F_1 enthält, $\mu \in [1, d_j]$ und $\nu \in \Gamma_j$. Diese Indizes sind linear geordnet durch $(j, \mu, \nu) \leq (j', \mu', \nu')$, gdw. $(j, \nu, \mu) \leq_{\text{lex}} (j', \nu', \mu')$. Die Spaltenindizes sind die Elemente der linear geordneten Transversale T der Linksnebenklassen von U in G . Demnach ist der Eintrag der Matrix $\mathbf{D}_{G \bmod U}$ bei Position $((j, \mu, \nu), t)$ gleich $D_j(t * \iota_U)_{\mu, \nu}$.

3 DFTs U -invarianter Signale auf der Gruppe G

Die c -lineare Komplexität von G modulo U ist definiert durch

$$L_c(G | U) := \min\{L_c(\mathbf{D}_{G \bmod U}) \mid \mathbf{D} \text{ ist eine DFT-Matrix von } \mathbb{C}G\}.$$

Lemma 2.11 lässt sich wie folgt verallgemeinern:

Lemma 3.2. *Es gilt:*

$$[G:U] - 1 \leq L_\infty(G|U) \leq 2 \cdot [G:U] \cdot ([G:U] - 1).$$

Beweis. Sei $m := [G:U]$. Da die Einsdarstellung in jeder DFT D auf $\mathbb{C}[G \bmod U]$ involviert ist, gibt es in einer wie oben beschrieben konstruierten DFT-Matrix $A := \mathbf{D}_{G \bmod U}$ eine Zeile $B = (1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{1 \times m}$. Weil $L_\infty(B^\top) = 0$, folgt aus dem Transpositionssatz (Satz 2.10) und Lemma 2.7 (b), dass $m - 1 = L_\infty(B) \leq L_\infty(A)$. Da $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ und eine Zeile in A gleich B ist, ist die Multiplikation von A mit einem Vektor in \mathbb{C}^m mit höchstens $(m - 1) \cdot m$ Multiplikationen und $(m - 1) \cdot m$ Additionen durchführbar. \square

Im Folgenden wird die inverse DFT auf $\mathbb{C}[G \bmod U]$ betrachtet. Auch hier zeigen die Schur Relationen (Satz 2.5) einen engen Zusammenhang der DFT und ihrer Inversen auf. Das folgende Lemma betrachtet die Schur Relationen und Korollar 2.6 im Fall von unitären DFTs.

Lemma 3.3. *Für eine unitäre DFT $D = \bigoplus_{j=1}^h D_j$ auf G gilt:*

$$(a) \sum_{g \in G} D_j(g)_{\mu\nu} \overline{D_{j'}(g)_{\nu'\mu'}} = \delta_{jj'} \cdot \delta_{\mu\nu'} \cdot \delta_{\nu\mu'} \cdot \frac{|G|}{d_j}.$$

$$(b) \sum_{g \in G} D_j(g)_{\mu\nu} \overline{D_{j'}(gy)_{\nu'\mu'}} = \delta_{jj'} \cdot \delta_{\mu\nu'} \cdot \overline{D_{j'}(y)_{\nu\mu'}} \cdot \frac{|G|}{d_j}, \text{ für } y \in G.$$

$$(c) \mathbf{D} \text{ ist quasi-unitär: } \mathbf{D}^{-1} = \overline{\mathbf{D}^\top} \cdot \bigoplus_{j=1}^h \frac{d_j}{|G|} \mathbf{I}_{d_j^2}.$$

Beweis. (a): Da $D_{j'}$ unitär ist, gilt $D_{j'}(g^{-1})_{\mu'\nu'} = \overline{D_{j'}(g)_{\nu\mu'}}$. Die Behauptung folgt durch Anwendung der Schur Relationen (Satz 2.5).

(b): Folgt aus (a) und $D_{j'}(gy)_{\nu'\mu'} = \sum_{m=1}^{d_{j'}} D_{j'}(g)_{\nu'm} D_{j'}(y)_{m\mu'}$.

(c) folgt aus (a). \square

Mit Lemma 3.3 kann nun eine Variante der Schur Relationen und Korollar 2.6 bezüglich der DFTs von U -invarianten Signalen auf G bewiesen werden. Im Folgenden wird für eine komplexe Matrix A die zugehörige adjungierte Matrix mit A^\dagger bezeichnet.

3.2 Komplexität von DFTs und Faltungen U -invarianter Signale

Satz 3.4. Falls $D = \bigoplus_{j=1}^h D_j$ eine unitäre ($G > U$)-angepasste DFT auf G ist, dann ist die Matrix $\mathbf{D}_{G \bmod U}$, die den Isomorphismus $\mathbb{C}[G \bmod U] \rightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}(d_j, \Gamma_j)$ beschreibt, quasi-unitär. Genauer gilt:

$$\mathbf{D}_{G \bmod U} \cdot \mathbf{D}_{G \bmod U}^\dagger = \bigoplus_j \frac{[G:U]}{d_j} \cdot \mathbf{I}_{d_j \cdot |\Gamma_j|},$$

wobei in der direkten Summe nur die Indizes j durchlaufen werden, wo D_j eingeschränkt auf $\mathbb{C}U$ die Einsdarstellung F_1 enthält.

Beweis. Wie oben beschrieben ist T die linear geordnete Transversale der Linksnebenklassen von U in G . Sei $\mathbb{D} := \mathbf{D}_{G \bmod U}$. Zudem bezeichnet X den Eintrag bei Position $((j, \mu, \nu), (j', \nu', \mu'))$ in $\mathbb{D} \cdot \mathbb{D}^\dagger$: $X := (\mathbb{D} \cdot \mathbb{D}^\dagger)_{(j, \mu, \nu), (j', \nu', \mu')}$. Mit dieser Notation erhalten wir:

$$\begin{aligned} X &= \sum_{t \in T} \mathbb{D}_{(j, \mu, \nu), t} \cdot \overline{\mathbb{D}_{(j', \nu', \mu'), t}} = \sum_{t \in T} D_j(t * \iota_U)_{\mu, \nu} \cdot \overline{D_{j'}(t * \iota_U)_{\nu', \mu'}} \\ &= |U|^{-2} \sum_{t \in T} \sum_{x, y \in U} D_j(tx)_{\mu, \nu} \cdot \overline{D_{j'}(ty)_{\nu', \mu'}} \\ &= |U|^{-2} \sum_{t \in T} \sum_{x, y \in U} D_j(tx)_{\mu, \nu} \cdot \overline{D_{j'}(txx^{-1}y)_{\nu', \mu'}} \\ &= |U|^{-2} \sum_{t \in T} \sum_{x \in U} D_j(tx)_{\mu, \nu} \cdot \left(\sum_{y \in U} \overline{D_{j'}(txx^{-1}y)_{\nu', \mu'}} \right) \\ &\stackrel{(A)}{=} |U|^{-2} \sum_{t \in T} \sum_{x \in U} D_j(tx)_{\mu, \nu} \cdot \left(\sum_{y \in U} \overline{D_{j'}(txy)_{\nu', \mu'}} \right) \\ &\stackrel{(B)}{=} |U|^{-2} \sum_{y \in U} \sum_{g \in G} D_j(g)_{\mu, \nu} \cdot \overline{D_{j'}(gy)_{\nu', \mu'}} \\ &\stackrel{(C)}{=} |U|^{-2} \sum_{y \in U} \delta_{jj'} \cdot \delta_{\mu\nu'} \cdot \overline{D_{j'}(y)_{\nu\mu'}} \cdot \frac{|G|}{d_j} \\ &= \frac{[G:U]}{d_j} \cdot \delta_{jj'} \cdot \delta_{\mu\nu'} \cdot \overline{D_{j'}(\iota_U)_{\nu\mu'}} \\ &\stackrel{(D)}{=} \frac{[G:U]}{d_j} \cdot \delta_{jj'} \cdot \delta_{\mu\nu'} \cdot \delta_{\nu\mu'} \cdot \delta_{\nu \in \Gamma_{j'}}. \end{aligned}$$

Da $U \ni y \mapsto x^{-1}y \in U$ (für ein festgewähltes $x \in U$) eine Bijektion ist, gilt (A). (B) folgt aus der Tatsache, dass $T \times U \ni (t, u) \mapsto tu \in G$ eine Bijektion ist. (C) folgt aus Lemma 3.3 (b). (D) folgt aus der Tatsache, dass das idempotente Element ι_U zur Einsdarstellung von U korrespondiert, siehe Abschnitt 3.1. \square

Das folgende Resultat verallgemeinert Satz 2.12 (2).

3 DFTs U -invarianter Signale auf der Gruppe G

Korollar 3.5. *Mit den Voraussetzungen und der Notation von Satz 3.4 gilt:*

$$|L_\infty(\mathbf{D}_{G \bmod U}) - L_\infty(\mathbf{D}_{G \bmod U}^{-1})| \leq [G:U].$$

Beweis. Sei $\mathbb{D} := \mathbf{D}_{G \bmod U}$ und $\Delta := \bigoplus_j \frac{M}{d_j} \cdot \mathbf{I}_{d_j \cdot |\Gamma_j|}$, wobei $M := [G:U]$.

Nach Lemma 2.7 (c), dem Transpositionssatz (Satz 2.10), $L_\infty(A) = L_\infty(\bar{A})$ (Konjugation ist ein Köperautomorphismus von \mathbb{C}) und Satz 3.4 gilt:

$$L_\infty(\mathbb{D}^{-1}) \leq L_\infty(\mathbb{D}^\dagger) + L_\infty(\Delta^{-1}) \leq L_\infty(\mathbb{D}) + M.$$

Mit $\mathbb{D} \cdot \mathbb{D}^\dagger = \Delta$ folgt $\mathbb{D} = \Delta \cdot (\mathbb{D}^\dagger)^{-1} = \Delta \cdot (\mathbb{D}^{-1})^\dagger$. Demnach ist

$$L_\infty(\mathbb{D}) \leq L_\infty(\Delta) + L_\infty((\mathbb{D}^{-1})^\dagger) \leq M + L_\infty(\mathbb{D}^{-1}).$$

□

Zur Faltung zweier Signale $a, b \in \mathbb{C}[G \bmod U]$ kann das Schema in Abbildung 2 verwendet werden.

$$\begin{array}{ccc}
 a, b & \xrightarrow{a * b} & a * b \\
 \mathbb{D} \downarrow & & \uparrow \mathbb{D}^{-1} \\
 \mathbb{D}(a), \mathbb{D}(b) & \xrightarrow{\mathbb{D}(a) \cdot \mathbb{D}(b)} & \mathbb{D}(a * b)
 \end{array}$$

Abbildung 2: Die Faltung zweier U -invarianter Signale a und b aus $\mathbb{C}G$ mit $\mathbb{D} := \mathbf{D}_{G \bmod U}$.

Das folgende Lemma betrachtet den arithmetischen Aufwand im Spektralbereich und verallgemeinert Lemma 2.15.

Lemma 3.6. *Seien $\bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}(d_j, \Gamma_j)$ das D -Bild von $\mathbb{C}[G \bmod U]$ und $a, b \in \mathbb{C}[G \bmod U]$, dann können $D(a)$ und $D(b)$ mit weniger als $2 \cdot [G:U]^{3/2}$ arithmetischen Operationen multipliziert werden.*

Beweis. Mit $\Gamma := \max_{j \in [1, h]} |\Gamma_j|$ gilt $\Gamma^2 \leq \sum_{j=1}^h |\Gamma_j| \cdot d_j = [G:U]$, m.a.W. ist $\Gamma \leq [G:U]^{1/2}$. Die Multiplikation zweier Blöcke $D_j(a)$ und $D_j(b)$ entspricht einer Multiplikation von einer $d_j \times |\Gamma_j|$ -Matrix mit einer $|\Gamma_j| \times |\Gamma_j|$ -Matrix. Demnach können zwei Blockdiagonalmatrizen $\bigoplus_j \mathbb{C}(d_j, \Gamma_j)$ mit weniger als $2 \cdot \sum_j d_j \cdot |\Gamma_j|^2$ arithmetischen Operationen multipliziert

3.2 Komplexität von DFTs und Faltungen U -invarianter Signale

werden. Wegen

$$2 \cdot \sum_{j=1}^h d_j \cdot |\Gamma_j|^2 \leq 2 \cdot \Gamma \cdot \sum_{j=1}^h d_j \cdot |\Gamma_j| \leq 2 \cdot [G:U]^{1/2} \cdot [G:U] = 2 \cdot [G:U]^{3/2}$$

folgt die Behauptung. □

Wie man in den vorangegangenen Abschnitten sehen kann, lassen sich einige bekannte Resultate bzgl. allgemeiner Signale auf G , d.h. $\{1_G\}$ -invarianter Signale, auf U -invariante Signale verallgemeinern. Bisher fehlt der Entwurf von FFT-Algorithmen zur Auswertung von \mathbb{D} . Der restliche Teil der Arbeit beschäftigt sich mit diesem Problem für den wichtigen Spezialfall, dass $G = S_n$ eine endliche symmetrische Gruppe und $U = S_{n-k}$ diejenige Untergruppe ist, die alle Ziffern $j > n - k$ stabilisiert.

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Nach dem Satz von Wedderburn wissen wir bereits, dass es für die symmetrische Gruppe S_n einen Algebren-Isomorphismus (DFT)

$$D = \bigoplus_j D_j : \mathbb{C}S_n \rightarrow \bigoplus_{j=1}^h \mathbb{C}^{d_j \times d_j}$$

gibt, wobei h die Anzahl der Konjugationsklassen der S_n und $d_1 \leq \dots \leq d_h$ geeignete positive ganze Zahlen sind. In diesem Kapitel werden wir zunächst auf die Konjugationsklassen und wichtige Eigenschaften der S_n eingehen (siehe Abschnitt 4.1) und danach die einzelnen Komponenten D_j einer möglichen DFT D auf S_n beschreiben (siehe Abschnitt 4.2). Zum Schluss beinhaltet Abschnitt 4.3 die Konstruktion konkreter irreduzibler Matrixdarstellungen der symmetrischen Gruppe S_n . Die Grundlage für dieses Kapitel bilden die Bücher von James und Kerber [24], Sagan [38] sowie Clausen und Baum [10]. Des Weiteren basiert Abschnitt 4.2 im Wesentlichen auf der Publikation von Clausen [8].

4.1 Symmetrische Gruppen – Grundlagen

Für eine Permutation $\pi \in S_n$ gibt es drei verschiedene Schreibweisen, die wir für die Darstellung von π verwenden können. Die erste Schreibweise ist eine zweireihige Matrix:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}.$$

Da die erste Zeile fix ist, kann diese auch weggelassen werden. Man erhält die Tupelschreibweise:

$$\pi = [\pi(1), \pi(2), \dots, \pi(n)].$$

Zuletzt kann für π die Zykelschreibweise verwendet werden. Betrachtet man ein Element $k \in [1, n]$, so können die Elemente der Folge $k, \pi(k), \pi^2(k), \pi^3(k), \dots$ nicht alle verschieden sein. Sei ℓ die kleinste natürliche Zahl, so dass $\pi^\ell(k) = \pi^h(k)$, für ein $h \in [0, \ell - 1]$. Wäre $h > 0$, so würde sich $\pi^{\ell-h}(k) = k$ ergeben, im Widerspruch zur Minimalität von ℓ . Also ist $\pi^\ell(k) = k$ und wir erhalten den Zykel:

$$(k, \pi(k), \pi^2(k), \dots, \pi^{\ell-1}(k)).$$

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Ein Zykel $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_\ell)$ bedeutet, dass $k_1 \mapsto k_2, k_2 \mapsto k_3, \dots, k_\ell \mapsto k_1$. Nun nehmen wir eine weitere Zahl aus $[1, n]$, die nicht in dem Zykel von k enthalten ist und iterieren den beschriebenen Prozess solange, bis alle Elemente in $[1, n]$ verwendet wurden. Das Produkt der so erhaltenen disjunkten Zykeln⁷ ergibt die Zykelschreibweise einer Permutation. Beispielsweise ist

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & 7 & 5 & 9 & 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = (1, 2, 3)(4, 7, 8)(5)(6, 9).$$

Das zyklische Vertauschen der Elemente innerhalb eines Zyklus verändert nicht die Permutation, z.B. ist:

$$(1, 2, 3) = (3, 1, 2) = (2, 3, 1).$$

Des Weiteren kommutieren disjunkte Zykeln. Beispielsweise ist

$$\pi = (1, 2, 3)(4, 7, 8)(5)(6, 9) = (4, 7, 8)(1, 2, 3)(6, 9)(5).$$

Ein Zykel mit ℓ Elementen wird auch als Zykel der Länge ℓ oder kurz als ℓ -Zykel bezeichnet. Die Permutation in dem obigen Beispiel besteht aus zwei 3-Zykel, einem 2-Zykel und einem 1-Zykel. Ein 2-Zykel wird auch *Transposition* genannt. Bei der Zykelschreibweise lässt man, sofern n aus dem Kontext klar ist, 1-Zykel gern weg. Der *Zykeltyp* von π ist ein Ausdruck der Form

$$(1^{m_1}, 2^{m_2}, \dots, n^{m_n})$$

wobei m_k die Anzahl der Zykeln der Länge k in π ist. Beispiel:

$$\pi = (1, 2, 3)(4, 7, 8)(5)(6, 9) \text{ hat den Zykeltyp } (1^1, 2^1, 3^2, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Ordnen wir in der Zykelschreibweise einer Permutation $\pi \in S_n$ die Zykeln gemäß ihrer Längen von links nach rechts schwach monoton fallend an, beschreibt die so geordnete Folge der Zykellängen eine Partition $\alpha(\pi)$ von n . Eine *Partition* von n ist eine Folge

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$$

schwach monoton fallender positiver ganzer Zahlen α_ℓ mit $\sum_{\ell=1}^r \alpha_\ell = n$. Dies ist eine andere Möglichkeit den Zykeltyp einer Permutation darzustellen, indem m_k -mal die Zykellänge k in einer Partition wiederholt wird, wobei $m_k > 0$. Beispiel:

⁷Zwei Zykeln (p_1, p_2, \dots, p_r) und (q_1, q_2, \dots, q_s) heißen *disjunkt*, falls $p_k \neq q_\ell$ für alle k und ℓ gilt.

Für $\pi = (1, 2, 3)(4, 7, 8)(5)(6, 9)$ ist $\alpha(\pi) = (3, 3, 2, 1)$.

Sei

$$\pi = (k_1, k_2, \dots, k_\ell) \cdots (k_m, k_{m+1}, \dots, k_n) \in S_n$$

in Zykelschreibweise, dann gilt für ein beliebiges $\sigma \in S_n$

$$\sigma\pi\sigma^{-1} = (\sigma(k_1), \sigma(k_2), \dots, \sigma(k_\ell)) \cdots (\sigma(k_m), \sigma(k_{m+1}), \dots, \sigma(k_n)).$$

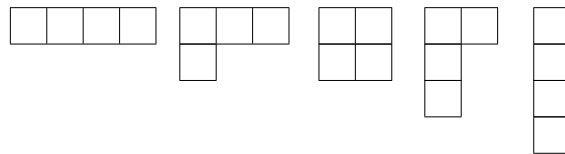
Umgekehrt sieht man sofort, dass zwei Permutationen gleichen Zykeltyps durch Konjugation miteinander verbunden sind. Demnach gilt:

Satz 4.1. *Die Konjugationsklassen der symmetrischen Gruppe S_n sind parametrisiert durch die Partitionen von n .*

Beispielsweise besitzt die S_4 fünf Konjugationsklassen, denn

$$(4), \quad (3, 1), \quad (2, 2) =: (2^2), \quad (2, 1, 1) =: (2, 1^2), \quad (1, 1, 1, 1) =: (1^4)$$

sind alle Partitionen von 4. Allgemein wird eine Partition $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ von n gern mit dem zugehörigen Young-Diagramm $Y_\alpha := \bigcup_{i=1}^r \{(i, j) \mid 1 \leq j \leq \alpha_i\}$ identifiziert und durch n gleichgroße Boxen visualisiert, von denen α_i linksjustiert in Zeile i stehen. Es folgt eine Illustration der Young-Diagramme im Fall $n = 4$:



Satz 4.2. *Für $1 \leq j \leq k \leq n$ sei $g_{j,k} := (j, j + 1, \dots, k)$. Dann gilt:*

(1) $S_n = \bigsqcup_{j=1}^n g_{j,n} S_{n-1}$.

(2) Für $k \in [1, n]$ sei $J_k^n := \{(j_n, j_{n-1}, \dots, j_{k+1}) \mid \forall i > k : 1 \leq j_i \leq i\}$ und $g_{\underline{j}} := g_{j_n, n} g_{j_{n-1}, n-1} \cdots g_{j_{k+1}, k+1}$. Dann ist $g_{\underline{j}}$ für $\underline{j} \in J_k^n$ eine Transversale der Linksnebenklassen von S_k in S_n :

$$S_n = \bigsqcup_{\underline{j} \in J_k^n} g_{\underline{j}} S_k.$$

(3) Jede Permutation $\pi \in S_n$ ist darstellbar als $\pi = g_{\underline{j}} = g_{j_n, n} g_{j_{n-1}, n-1} \cdots g_{j_2, 2}$ mit einem eindeutig bestimmten $\underline{j} = (j_n, \dots, j_2)$ aus J_1^n .

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

(4) S_n wird erzeugt von den Transpositionen benachbarter Ziffern:

$$S_n = \langle (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n) \rangle.$$

Beweis. (1) Wir zeigen: $g_{j,n}S_{n-1} = \{\pi \in S_n \mid \pi(n) = j\}$. Die Inklusion \subseteq ist klar. Sei umgekehrt $\pi \in S_n$ mit $\pi(n) = j$. Dann ist $g_{j,n}^{-1}\pi \in S_{n-1}$, d.h. $\pi = g_{j,n}(g_{j,n}^{-1}\pi) \in g_{j,n}S_{n-1}$.

(2) folgt aus (1) per Induktion.

(3) ist der Spezialfall $k = 1$ in (2).

(4) folgt aus (3) und der Beobachtung, dass

$$g_{j,k} = (j, j+1)(j+1, j+2) \dots (k-2, k-1)(k-1, k)$$

gilt. □

4.2 Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$

Nach dem Satz von Wedderburn, siehe Satz 2.2, und dem Satz über die Konjugationsklassen der S_n , siehe Satz 4.1, sind die Äquivalenzklassen einfacher $\mathbb{C}S_n$ -Linksmoduln parametrisiert durch die Partitionen von n . Als Nächstes beschreiben wir diese einfachen $\mathbb{C}S_n$ -Moduln. Dazu betrachten wir den Polynomring $\mathbb{C}[\mathbb{X}] := \mathbb{C}[X_{ij} \mid i, j \in [1, n]]$. Die S_n operiert auf $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ als Gruppe von Algebrenautomorphismen vermöge $\pi X_{ij} := X_{\pi(i),j}$. Ein $\pi \in S_n$ wirkt also linear auf $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ und bildet das Potenzprodukt $\prod_{ij} X_{ij}^{m_{ij}}$ auf $\prod_{ij} X_{\pi(i)j}^{m_{ij}}$ ab. Man beachte, dass die S_n nur auf den linken Indizes operiert. Mit den rechten Indizes werden später kombinatorische Strukturen erzeugt, die letztendlich Vielfachheiten beschreiben.

Wir sortieren zunächst die Potenzprodukte grob nach den „Inhalten“ der linken und rechten Indizes. Ein n -Tupel $a = (a_1, \dots, a_n)$ nichtnegativer ganzer Zahlen mit $\sum a_i = d$ nennen wir eine *uneigentliche Partition* von d und kürzen dies durch $a \vDash d$ ab. Zu $a \vDash d$ und $b \vDash d$ bilden wir den Raum

$$\mathbb{C}_{a,b} := \left\langle \prod_{i,j} X_{ij}^{m_{ij}} \mid \forall i : \sum_j m_{ij} = a_i \wedge \forall j : \sum_i m_{ij} = b_j \right\rangle,$$

der die Gesamtheit aller Potenzprodukte, bei denen links der Index i genau a_i -mal und rechts der Index j genau b_j -mal vorkommt, als \mathbb{C} -Basis hat. Der Polynomring lässt sich

4.2 Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$

damit folgendermaßen in Untervektorräume endlicher Dimensionen zerlegen:

$$\mathbb{C}[\mathbb{X}] = \bigoplus_{d \geq 0} \bigoplus_{a=d, b=d} \mathbb{C}_{a,b}.$$

Von besonderem Interesse ist der Spezialfall $a = b = (1^n)$, da hier $\mathbb{C}_{(1^n), (1^n)}$ nicht nur ein Untervektorraum, sondern sogar ein $\mathbb{C}S_n$ -Untermodul ist, in dem zudem die Permutationsmonome $X_\pi := \prod_{i=1}^n X_{\pi(i), i}$ zu allen $\pi \in S_n$ eine \mathbb{C} -Basis bilden. Da für $\sigma, \pi \in S_n$ stets $\sigma X_\pi = X_{\sigma\pi}$ gilt, ist $\mathbb{C}_{(1^n), (1^n)}$ als $\mathbb{C}S_n$ -Linksmodul isomorph zu $\mathbb{C}S_n$ aufgefasst als $\mathbb{C}S_n$ -Linksmodul. (Man spricht dann auch vom *regulären $\mathbb{C}S_n$ -Linksmodul*.)

Der Polynomring $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ besitzt neben der \mathbb{C} -Basis aus den Potenzprodukten eine weitere, darstellungstheoretisch relevante \mathbb{C} -Basis. Diese wird als Nächstes beschrieben. Dazu gehen wir von der $n \times n$ Matrix $\mathbb{X} = (X_{ij})$ aller Unbestimmten aus. Die alternative Basis besteht aus gewissen Potenzprodukten von Minoren der Matrix \mathbb{X} . Ein *Minor* ist die Determinante einer quadratischen Teilmatrix von \mathbb{X} und kann wie folgt durch Angabe von k Zeilen- und k Spaltenindizes gekennzeichnet werden:

$$\left(\begin{array}{c|c} r_1 & c_1 \\ r_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots \\ r_k & c_k \end{array} \right) := \det \begin{pmatrix} X_{r_1 c_1} & X_{r_1 c_2} & \cdots & X_{r_1 c_k} \\ X_{r_2 c_1} & X_{r_2 c_2} & \cdots & X_{r_2 c_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{r_k c_1} & X_{r_k c_2} & \cdots & X_{r_k c_k} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante verschwindet, wenn zwei Zeilen - oder Spaltenindizes gleich sind. Die Determinante ändert ihr Vorzeichen, wenn zwei Zeilen- oder Spaltenindizes vertauscht werden. Sei $\alpha \vdash d$ und Y_α das zugehörige Young-Diagramm. Ein α -*Tableau* ist eine Abbildung $S: Y_\alpha \rightarrow [1, n]$. Die uneigentliche Partition $(|S^{-1}[1]|, \dots, |S^{-1}[n]|)$ von d wird als der *Inhalt* von S bezeichnet. Ein Paar (S, T) von α -Tableaux nennt man auch ein *Bitableau* der *Gestalt* α , oder auch kurz α -Bitableau vom Inhalt (a, b) , wenn S den Inhalt a und T den Inhalt b hat. Ist (S, T) ein Bitableau und bezeichnet S^i bzw. T^i die i -te Spalte von S bzw. T , so heißt $(S|T) := \prod_i (S^i|T^i)$ die *Bideterminante* zu (S, T) .

Beispiel 4.3. Zum $(3, 2, 1)$ -Bitableau

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 9 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 9 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right)$$

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

erhalten wir die Bideterminante

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 9 \\ \hline 2 & 1 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 9 & \\ \hline 5 & & \\ \hline \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline 5 \\ \hline \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} \middle| \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 9 \\ \hline \end{array} \right) \cdot (\boxed{9} \mid \boxed{2}) \\ &= \det \begin{pmatrix} X_{12} & X_{11} & X_{15} \\ X_{22} & X_{21} & X_{25} \\ X_{32} & X_{31} & X_{35} \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} X_{21} & X_{29} \\ X_{11} & X_{19} \end{pmatrix} \cdot X_{92} . \end{aligned}$$

Sind in einem α -Tableau S vom Inhalt a die Einträge in den Zeilen von links nach rechts gelesen schwach monoton steigend und in den Spalten von oben nach unten gelesen streng monoton steigend, so nennt man S ein α -Standardtableau. Ein Paar (S, T) von α -Standardtableaux nennt man ein α -Standardbitableau und die zugehörige Bideterminante eine Standardbideterminante. Sind a und b uneigentliche Partitionen von d , so bezeichne $\text{SBT}(a, b)$ bzw. $\text{SBD}(a, b)$ die Menge aller Standardbitableaux bzw. aller Standardbideterminanten vom Inhalt (a, b) . Damit können wir nun den folgenden fundamentalen Satz von Désarmenien, Kung und Rota formulieren.

Satz 4.4 (Désarmenien, Kung, Rota). *Die Standardbideterminanten bilden eine \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$. Genauer gilt für uneigentliche Partitionen a und b von d : Die Menge aller Standardbideterminanten vom Inhalt (a, b) bildet eine \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{a,b}$.*

Beweis. Siehe [16]. □

Wir bereiten eine Verfeinerung der gerade gemachten Aussage vor. Dazu sei α eine Partition von d und a und b uneigentliche Partitionen von d . Mit $\text{ST}^\alpha(a)$ bezeichnen wir die Menge aller α -Standardtableaux vom Inhalt a , weiter bezeichnet $\text{SBT}^\alpha(a, b)$ die Menge aller α -Standardbitableaux vom Inhalt (a, b) . Der folgende Satz beschreibt eine wichtige Folgerung aus dem Satz von Désarmenien, Kung und Rota. Er kann - wie wir gleich näher erläutern werden - als modultheoretische Variante des Satzes von Wedderburn interpretiert werden.

Satz 4.5. *Die \mathbb{C} -lineare Hülle $\mathbb{C}_{((1^n), (1^n))}$ der Permutationsmonome $X_\pi := \prod_{i=1}^n X_{\pi(i), i}$ zu allen $\pi \in S_n$ ist ein $\mathbb{C}S_n$ -Linksmodul und als solcher isomorph zu $\mathbb{C}S_n$. Der Raum $\mathbb{C}_{((1^n), (1^n))}$ hat die Bideterminanten zu allen Standardbitableaux (S, T) vom Inhalt $((1^n), (1^n))$ als \mathbb{C} -Basis. Genauer sind die Bideterminanten zu den Bitableaux aus*

$$\bigsqcup_{\alpha \vdash n} \text{SBT}^\alpha((1^n), (1^n))$$

4.2 Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$

eine \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^n),(1^n))}$. Insbesondere ergibt sich durch einen Dimensionsvergleich die Formel:

$$n! = \sum_{\alpha \vdash n} |\text{ST}^\alpha(1^n)|^2.$$

Beispiel 4.6. Eine naheliegende Basis von $\mathbb{C}_{((1^3),(1^3))}$ ist:

$$\begin{aligned} X_{(1)} &= X_{11}X_{22}X_{33}, & X_{(1,2)} &= X_{21}X_{12}X_{33}, & X_{(1,3)} &= X_{31}X_{22}X_{13}, \\ X_{(2,3)} &= X_{11}X_{32}X_{23}, & X_{(1,2,3)} &= X_{21}X_{32}X_{13}, & X_{(1,3,2)} &= X_{31}X_{12}X_{23}. \end{aligned}$$

Nach Satz 4.5 bilden die Bideterminanten in Abbildung 3 eine alternative Basis.

$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{3} \end{array} \right)$					
		$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{2} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{2} \end{array} \right)$	
		$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{2} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{3} \\ \boxed{2} & \boxed{3} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} \boxed{1} & \boxed{2} \\ \boxed{3} & \boxed{2} \end{array} \right)$	
					$\left(\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \mid \boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \right)$

Abbildung 3: \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^3),(1^3))}$ aus den Bideterminanten zu allen Standardbitableaux (S, T) vom Inhalt $((1^3), (1^3))$.

Die darstellungstheoretische Relevanz der gerade beschriebenen alternativen Basis wird durch die Anordnung der Basiselemente in Blockdiagonalform angedeutet. Bezeichnet $U_{s,3}$ die \mathbb{C} -lineare Hülle aller Bideterminanten in den ersten s Spalten dieser Blockdiagonalmatrix, so ist

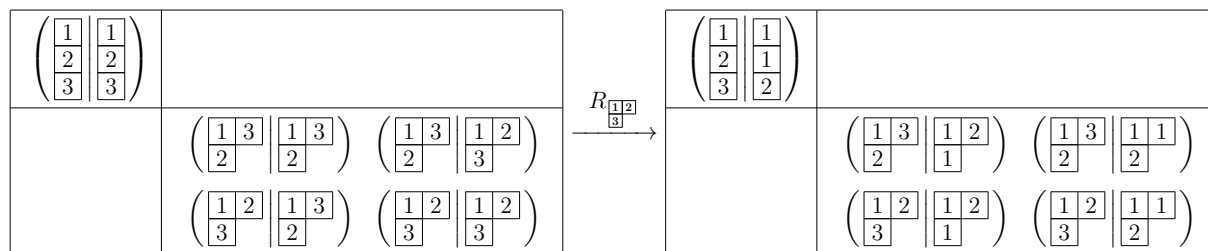
$$\mathbb{C}_{((1^3),(1^3))} = U_{4,3} > U_{3,3} > U_{2,3} > U_{1,3} > U_{0,3} = \{0\}$$

zunächst eine Kette von Untervektorräumen von $\mathbb{C}_{((1^3),(1^3))}$. Es gilt aber noch viel mehr: Die $U_{s,3}$ sind $\mathbb{C}S_3$ -Untermodule von $\mathbb{C}_{((1^3),(1^3))}$ und die Quotienten $U_{s,3}/U_{s-1,3}$ sind einfache $\mathbb{C}S_3$ -Linksmoduln. Um dies einzusehen, betrachten wir der Reihe nach spezielle Substitutionsoperatoren. Zunächst betrachten wir den durch $X_{ij} \mapsto X_{i1}$ ($i \in [1, n]$) definierten Algebrenmorphismus $R_{\overline{123}}$. Dies ist derjenige Substitutionsoperator, der in allen Bideterminanten $(S|T)$ in T alle Einträge durch 1 ersetzt. Da $R_{\overline{123}}$ nur auf den rechten Indizes operiert, handelt es sich um einen $\mathbb{C}S_3$ -Morphismus, dessen Bild und Kern jeweils $\mathbb{C}S_3$ -Moduln sind. Die Basis aus Bideterminanten wird durch $R_{\overline{123}}$ wie folgt abgebildet:

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

$\left(\begin{array}{c c} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$
$\left(\begin{array}{c c} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{array} \right)$
$\left(\begin{array}{c c} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c c} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{array} \right)$
$\left(\begin{array}{c c} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$	

Folglich ist $(\boxed{1\ 2\ 3} \mid \boxed{1\ 1\ 1})$ Basis eines 1-dimensionalen $\mathbb{C}S_3$ -Linksmoduls, den wir mit $\mathcal{S}_{(3)}$ bezeichnen, und $U_{3,3}$ ist als Kern der Einschränkung von $R_{\boxed{1\ 2\ 3}}$ auf $U_{4,3}$ ein $\mathbb{C}S_3$ -Untermodul von $U_{4,3}$. Allgemein stellt man fest, dass in Abbildung 3 in der j -ten Spalte alle rechten Standardtableaux gleich sind. Sei T ein solches Tableau. Dann definieren wir den Substitutionsoperator R_T als denjenigen Algebrenmorphismus, der X_{ij} auf X_{ia} abbildet, wenn j in der a -ten Zeile von T steht. Dieses R_T ist wieder ein $\mathbb{C}S_3$ -Morphismus. Wie aus folgendem Schaubild klar wird,



bildet $R_{\boxed{1\ 2\ 3}}$ den $\mathbb{C}S_3$ -Modul $U_{3,3}$ ab auf den 2-dimensionalen $\mathbb{C}S_3$ -Linksmodul $\mathcal{S}_{(2,1)}$ mit Basis

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{array} \right).$$

Zudem ist $U_{2,3}$ als Kern dieser Abbildung selbst wieder ein $\mathbb{C}S_3$ -Untermodul. Analog bildet $R_{\boxed{1\ 3\ 2}}$ den $\mathbb{C}S_3$ -Modul $U_{2,3}$ ab auf denselben 2-dimensionalen $\mathbb{C}S_3$ -Linksmodul $\mathcal{S}_{(2,1)}$. Zudem ist $U_{1,3}$ als Kern dieser Abbildung selbst wieder ein $\mathbb{C}S_3$ -Untermodul, den wir mit $\mathcal{S}_{(1,1,1)}$ bezeichnen. $\mathcal{S}_{(3)}$ korrespondiert zur Einsdarstellung, $\mathcal{S}_{(1,1,1)}$ zur alternierenden Darstellung (Signum-Darstellung) und $\mathcal{S}_{(2,1)}$ (bei Wahl einer geeigneten Basis) zur Darstellung der S_3 als Symmetriegruppe des regulären Tetraeders.

Das Beispiel der S_3 lässt sich wie folgt verallgemeinern. Zur Partition α von n bezeichne P_α die Projektion von Y_α auf die erste Komponente. Weiterhin bezeichne \mathcal{S}_α die \mathbb{C} -lineare Hülle aller Bideterminanten $(S|P_\alpha)$, wobei S alle Bijektionen $Y_\alpha \rightarrow [1, n]$ durchläuft.

4.2 Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$

Satz 4.7. Die sogenannten Spechtmoduln \mathcal{S}_α , α Partition von n , sind $\mathbb{C}S_n$ -Untermoduln von $\mathbb{C}[\mathbb{X}]$ und haben die Bideterminanten $(S|P_\alpha)$ zu allen $S \in \text{ST}^\alpha(1^n)$ als Basis. Weiterhin ist $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \vdash n}$ ein vollständiges System einfacher $\mathbb{C}S_n$ -Moduln.

Beweis. Siehe z.B. [8]. □

Hinweis: Die folgende Passage basiert auf unveröffentlichten Notizen von Clausen [9]. Dadurch können die bisherigen Überlegungen im Vergleich zu bestehender Literatur konsequenter fortgesetzt werden.

Als Nächstes diskutieren wir die Frage, wie ein einfacher $\mathbb{C}S_n$ -Linksmodul in einfache $\mathbb{C}S_{n-1}$ -Linksmoduln zerfällt. Dieses Verzweigungsverhalten von Spechtmoduln wird bei der konkreten Beschreibung von Darstellungsmatrizen von Bedeutung sein. Wir illustrieren das Verzweigungsverhalten anhand der Partition $\alpha = (3, 3, 2, 1)$ von $n = 9$. Die Basis aus Standardbideterminanten des Spechtmoduls \mathcal{S}_α zerfällt gemäß der Position von $n = 9$ in drei Teile:

$$\mathcal{S}_\alpha = \left\langle \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & 2 & 2 & 2 \\ * & * & & 3 & 3 & \\ 9 & & & 4 & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & 2 & 2 & 2 \\ * & 9 & & 3 & 3 & \\ * & & & 4 & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & 9 & 2 & 2 & 2 \\ * & * & & 3 & 3 & \\ * & & & 4 & & \end{array} \right) \right\rangle.$$

Der durch

$$X_{9j} \mapsto \delta_{j4} \quad \text{und} \quad X_{ab} \mapsto X_{ab} \quad \text{für } a < 9$$

definierte Algebrenmorphismus $L_{9,4}$ ist sogar ein $\mathbb{C}S_8$ -Morphismus, der im Fall $a < b < c < 9$ wegen

$$\begin{aligned} L_{9,4} \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & & & 1 & & \\ b & & & 2 & & \\ c & & & 3 & & \\ 9 & & & 4 & & \end{array} \right) &= L_{9,4} \left(\det \begin{pmatrix} X_{a1} & X_{a2} & X_{a3} & X_{a4} \\ X_{b1} & X_{b2} & X_{b3} & X_{b4} \\ X_{c1} & X_{c2} & X_{c3} & X_{c4} \\ X_{91} & X_{92} & X_{93} & X_{94} \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} X_{a1} & X_{a2} & X_{a3} & X_{a4} \\ X_{b1} & X_{b2} & X_{b3} & X_{b4} \\ X_{c1} & X_{c2} & X_{c3} & X_{c4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a & & & 1 & & \\ b & & & 2 & & \\ c & & & 3 & & \end{array} \right) \end{aligned}$$

den Spechtmodul zur Partition $\alpha = (3, 3, 2, 1)$ auf den Spechtmodul zur Partition $(3, 3, 2)$

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

abbildet. Kern dieser Abbildung ist der $\mathbb{C}S_8$ -Untermodul

$$\mathcal{S}_\alpha^1 := \left\langle \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & * & 2 & 2 & 2 \\ * & 9 & & 3 & 3 & \\ * & & & 4 & & \end{array} \right), \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & 9 & 2 & 2 & 2 \\ * & * & & 3 & 3 & \\ * & & & 4 & & \end{array} \right) \right\rangle.$$

Analog bildet der durch

$$X_{9j} \mapsto \delta_{j3} \quad \text{und} \quad X_{ab} \mapsto X_{ab} \quad \text{für } a < 9$$

definierte Algebrenmorphismus $L_{9,3}$, der wiederum ein $\mathbb{C}S_8$ -Morphismus ist, den $\mathbb{C}S_8$ -Untermodul \mathcal{S}_α^1 auf den Spechtmodul zur Partition $(3, 3, 1, 1)$ ab. Kern dieser Abbildung ist der $\mathbb{C}S_8$ -Untermodul

$$\mathcal{S}_\alpha^2 := \left\langle \left(\begin{array}{ccc|ccc} * & * & * & 1 & 1 & 1 \\ * & * & 9 & 2 & 2 & 2 \\ * & * & & 3 & 3 & \\ * & & & 4 & & \end{array} \right) \right\rangle.$$

Dieser wird mit dem $\mathbb{C}S_8$ -Morphismus $L_{9,2}$ isomorph abgebildet auf den Spechtmodul zur Partition $(3, 2, 2, 1)$. Die von $\alpha = (3, 3, 2, 1)$ erreichten Partitionen von $n - 1 = 8$ ergeben sich also aus α durch Elimination eines Eckkästchens im zu α gehörigen Young-Diagramm. Auch dieses Beispiel lässt sich auf beliebiges n verallgemeinern.

Satz 4.8 (Verzweigungssatz von Young). *Ist α eine Partition von n , so ist der Spechtmodul \mathcal{S}_α als $\mathbb{C}S_{n-1}$ -Modul isomorph zu*

$$\bigoplus_{\beta} \mathcal{S}_\beta,$$

wobei die direkte Summe über alle Partitionen β von $n - 1$ läuft, so dass $Y_\beta \subset Y_\alpha$. Insbesondere ist die Einschränkung der zu α gehörigen irreduziblen Darstellung von $\mathbb{C}S_n$ auf $\mathbb{C}S_{n-1}$ vielfachheitenfrei, d.h. in der Einschränkung kommt keine irreduzible Darstellung mehrfach vor.

Beweis. Siehe z.B. Abschnitt 2.8 in [38]. □

Iteriert man dieses Resultat, so stößt man auf den sogenannten *Young-Verband*, der das Verzweigungsverhalten über die gesamte Untergruppenkette $S_n > S_{n-1} > S_{n-2} > \dots > S_1$ kombinatorisch festhält:

4.2 Äquivalenzklassen der irreduziblen Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$

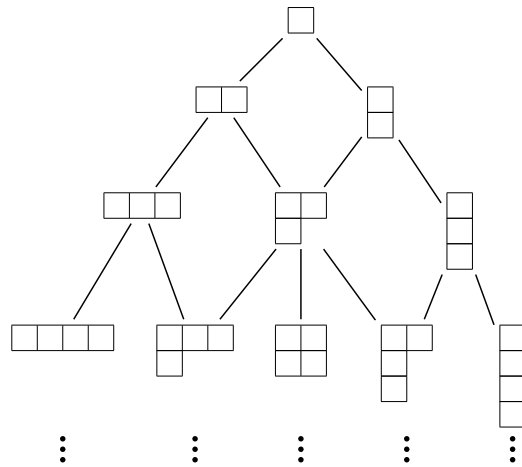


Abbildung 4: Illustration des Young-Verbands.

Aufgrund des Satzes 4.7 stimmt die \mathbb{C} -Dimension d_α des Spechtmoduls \mathcal{S}_α mit der Anzahl der α -Standardtableaux vom Inhalt (1^n) überein. Die Dimension d_α von \mathcal{S}_α ist gleich der Anzahl der Pfade von (1) zu α im Young-Verband. Jeder Pfad korrespondiert zu einem α -Standardtableau mit den Einträgen $1, 2, \dots, n$.

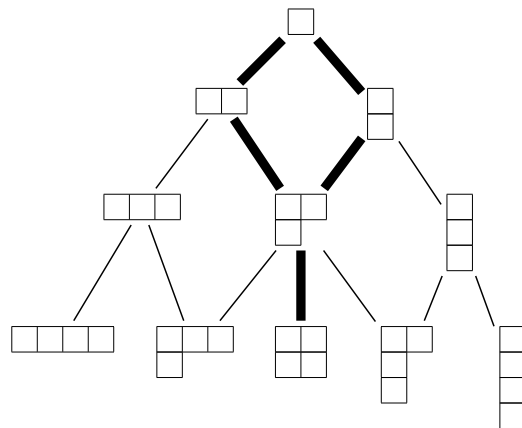
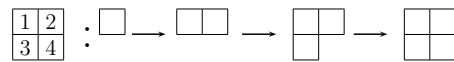
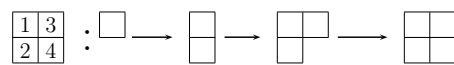


Abbildung 5: Illustration der Dimension $d_{(2,2)}$ von $\mathcal{S}_{(2,2)}$. Es gilt: $d_{(2,2)} = 2$.

Eine alternative Möglichkeit zur Bestimmung der Dimension d_α von \mathcal{S}_α bietet die so-

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

nannte *Hakenformel von Frame, Robinson, Thrall* [19]:

$$d_\alpha = |\text{ST}^\alpha(1^n)| = \frac{n!}{\prod_{(i,j) \in Y_\alpha} h_{ij}^\alpha},$$

wobei $h_{ij}^\alpha := |\{(a, b) \in Y_\alpha : (a = i \wedge b \geq j) \vee (b = j \wedge a \geq i)\}|$ die *Hakenlänge* zur Position (i, j) in Y_α ist.

Beispiel 4.9. In dem folgenden Tableau zu $\alpha = (4, 3, 2) \vdash 9$ stehen in den Boxen die entsprechenden Hakenlängen, z.B. ist $h_{12} = 5$.

6	5	3	1
4	3	1	
2	1		

Mit der Hakenformel erhalten wir

$$d_{(4,3,2)} = \frac{9!}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1} = 168.$$

4.3 Die Youngsche Seminormal- und Orthogonalform

Im Folgenden werden irreduzible Matrixdarstellungen der symmetrischen Gruppe S_n konstruiert. Konkret wird die sogenannte *Youngsche Seminormalform*, die *kontragrediente* Version der Youngschen Seminormalform und die sogenannte *Youngsche Orthogonalform* beschrieben, die jeweils symmetrieangepasste Darstellungen der S_n sind. Eine vielfachheitenfreie Symmetrieanpassung ist wegen des Verzweigungssatzes von Young bei der Kette

$$\mathcal{T}_n := (S_n > S_{n-1} > \dots > S_1 = \{1\})$$

der iterierten Stabilisatoruntergruppen von S_n gegeben. Das kombinatorische Gerüst einer \mathcal{T}_n -angepassten Basis basiert auf der sogenannten *Last Letter Sequence*, einer speziellen Totalordnung aller α -Standardtableaux zu $\alpha \vdash n$. Diese Totalordnung ergibt sich durch die folgende Definition: Sei $\alpha \vdash n$ und seien S und T zwei verschiedene α -Standardtableaux vom Inhalt (1^n) . Die Ziffer n komme in S (bzw. in T) in der p -ten (bzw. q -ten) Zeile vor. Im Fall $p < q$ kommt dann S in der Last Letter Sequence vor T , kurz: $S < T$. Falls $p = q$, wird in beiden Tableaux die Box mit n gelöscht und der Vergleich mit der Position von $n - 1$ fortgesetzt. Die Last Letter Sequence aller Elemente in $\text{ST}^\alpha(1^n)$ kann anschaulich durch die Blätter eines Baumes, dem sogenannten *Last Letter Sequence Baum*, illustriert werden. Das Verzweigungsverhalten der Knoten ergibt sich aus der Definition der Totalordnung.

4.3 Die Youngsche Seminormal- und Orthogonalform

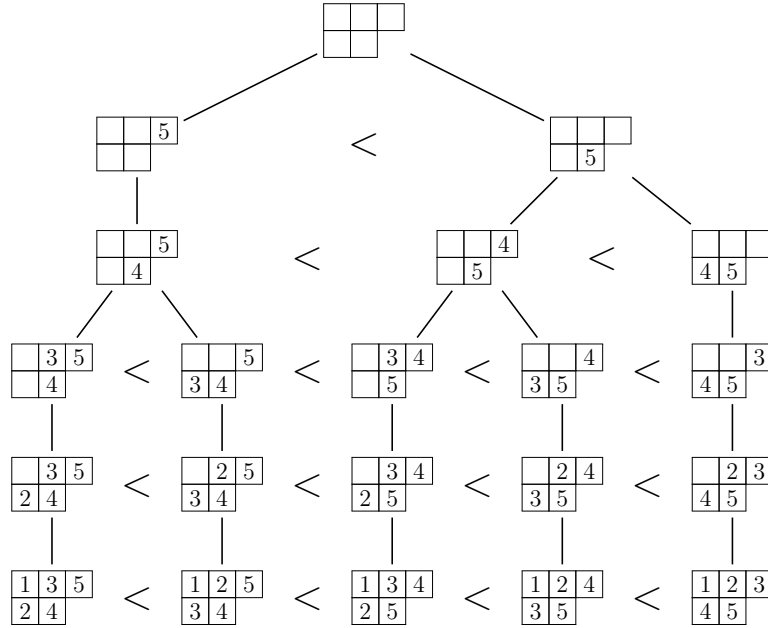


Abbildung 6: Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (3, 2)$. Sein (total geordnetes) i -tes Level (auch S_{n-i} -Level genannt) besteht aus allen partiell gefüllten Tableaux mit exakt i Einträgen.

Da die S_n von den Transpositionen benachbarter Ziffern erzeugt wird (siehe Satz 4.2), ist jede Darstellung D von $\mathbb{C}S_n$ komplett durch die Angabe von $D((i, i+1))$, wobei $i \in [1, n-1]$, bestimmt. Für eine Partition α von n wird zunächst die *Youngsche Seminormalform* σ^α beschrieben, die eine irreduzible Darstellung von $\mathbb{C}S_n$ vom „Typ α “ ist. Die Spalten und Zeilen sind durch die Last Letter Sequence $T_1 < \dots < T_{d_\alpha}$ aller α -Standardtableaux parametrisiert. Um die Matrix

$$\sigma^\alpha((i, i+1)) =: (\alpha_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq d_\alpha}$$

für ein festgewähltes $i \in [1, n-1]$ zu beschreiben, wird zwischen zwei Fällen unterschieden:

Fall 1: Für ein $a \in [1, d_\alpha]$ befinden sich die Zahlen i und $i+1$ in derselben Zeile oder Spalte in T_a . In diesem Fall ist $\alpha_{a,a} = 1$, wenn i und $i+1$ in derselben Zeile von T_a sind. Hingegen ist $\alpha_{a,a} = -1$, wenn sich i und $i+1$ in derselben Spalte von T_a befinden. Die restlichen Einträge in der a -ten Spalte und der a -ten Zeile in $\sigma^\alpha((i, i+1))$ sind gleich Null.

Fall 2: T_b entsteht aus T_a durch die Vertauschung von i und $i+1$: Falls $a < b$ ist

$$\begin{pmatrix} \alpha_{a,a} & \alpha_{a,b} \\ \alpha_{b,a} & \alpha_{b,b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1} & 1 - d^{-2} \\ 1 & -d^{-1} \end{pmatrix} =: J_{\sigma,d}, \quad (4.1)$$

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

wobei $d := |u - x| + |v - y|$ die *Axialdistanz* der Positionen (u, v) von i und (x, y) von $i + 1$ in T_a ist. Abbildung 7 illustriert die Axialdistanz. Die restlichen Einträge in diesen zwei Spalten und Zeilen der Matrix $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ sind gleich Null.

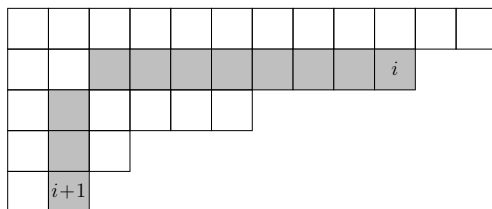


Abbildung 7: Illustration der Axialdistanz. Die Axialdistanz d ist hier gleich 11.

Die Matrix $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ ist 2-dünn, d.h. in jeder Spalte und Zeile befinden sich maximal zwei von Null verschiedene Einträge. Des Weiteren sind alle Einträge rationale Zahlen.

Beispiel 4.10. Die Last Letter Sequence für $\alpha = (3, 2)$ ist:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} < \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array} .$$

Die Dimension $d_{(3,2)}$ ist gleich 5 und für $i \in [1, 4]$ sehen die Matrizen $\sigma^{(3,2)}((i, i + 1))$ wie folgt aus:

$$\sigma^{(3,2)}((1, 2)) = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{(3,2)}((3, 4)) = \begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{(3,2)}((2, 3)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & & & \\ & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & & & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ & & & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{(3,2)}((4, 5)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & & & \\ & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & \\ & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & & & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Im Anhang findet man in Tabelle 10 die Matrizen $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ für $n = 4$, $\alpha \vdash 4$ und alle $i \in [1, 3]$.

Durch das Ersetzen der Matrix auf der rechten Seite der Gleichung (4.1) im 2. Fall mit

$$\begin{pmatrix} \alpha_{a,a} & \alpha_{a,b} \\ \alpha_{b,a} & \alpha_{b,b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1} & q_d \\ q_d & -d^{-1} \end{pmatrix} =: J_{\omega,d}, \quad (4.2)$$

4.3 Die Youngsche Seminormal- und Orthogonalform

wobei $q_d := \sqrt{d^2 - 1}/d$, erhalten wir die *Youngsche Orthogonalform* ω^α .

Die *kontragrediente* Version der Youngschen Seminormalform σ^α ist für ein $\pi \in S_n$ bestimmt durch

$$\kappa^\alpha(\pi) := \sigma^\alpha(\pi^{-1})^\top.$$

Wegen $(i, i+1)^{-1} = (i, i+1)$ ist $\kappa^\alpha((i, i+1)) = \sigma^\alpha((i, i+1))^\top$. Konkret muss also für die Berechnung von $\kappa^\alpha((i, i+1))$ die Matrix auf der rechten Seite der Gleichung (4.1) im 2. Fall transponiert werden:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{a,a} & \alpha_{a,b} \\ \alpha_{b,a} & \alpha_{b,b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{-1} & 1 \\ q_d^2 & -d^{-1} \end{pmatrix} =: J_{\kappa,d}. \quad (4.3)$$

Diese Variante der Youngschen Seminormalform wird später wichtig sein.

Satz 4.11 (Young). *Die diskreten Fouriertransformationen*

$$\sigma_n := \bigoplus_{\alpha \vdash n} \sigma^\alpha, \quad \omega_n := \bigoplus_{\alpha \vdash n} \omega^\alpha \quad \text{und} \quad \kappa_n := \bigoplus_{\alpha \vdash n} \kappa^\alpha$$

auf $\mathbb{C}S_n$ sind \mathcal{T}_n -angepasst. Genauer gilt für $\rho^\alpha \in \{\sigma^\alpha, \omega^\alpha, \kappa^\alpha\}$:

$$\rho^\alpha \downarrow S_{n-1} = \bigoplus_{\beta \vdash n-1; \beta \subset \alpha} \rho^\beta, \quad (4.4)$$

wobei die direkten Summanden gemäß dem ersten Level des Last Letter Sequence Baumes für α sortiert sind.

Beweis. Siehe Abschnitte 3.3 und 3.4 in [24]. □

Beispiel 4.12.

$$\sigma^{(3,2)} \downarrow S_4 = \sigma^{(2,2)} \oplus \sigma^{(3,1)}$$

bzw.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \downarrow S_4 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Mit der Parametrisierung der Zeilen und Spalten wie bei (2.1) können wir nun $n!$ -reihige DFT-Matrizen $\mathbf{D}_{\sigma,n}$, $\mathbf{D}_{\omega,n}$ oder $\mathbf{D}_{\kappa,n}$ für die S_n beschreiben, die jeweils auf der Youngschen Seminormalform, der Youngschen Orthogonalform oder der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform basieren. Es folgt ein Beispiel für $n = 3$ und der Verwendung der Youngschen Seminormalform.

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

Tabelle 1: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_3$ (Youngsche Seminormalform).

Nr.	$\pi \in S_3$	$\sigma^{(3)}(\pi)$	$\sigma^{(2,1)}(\pi)$	$\sigma^{(1,1,1)}(\pi)$
1.	(1, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
2.	(1, 2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
3.	(1, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
4.	(2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
5.	(1, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	(-1)
6.	(1)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	(1)

$$\mathbf{D}_{\sigma,3} := \begin{matrix} & (1, 3) & (1, 2, 3) & (1, 3, 2) & (2, 3) & (1, 2) & (1) \\ \begin{matrix} (\sigma^{(3)})_{11} \\ (\sigma^{(2,1)})_{11} \\ (\sigma^{(2,1)})_{12} \\ (\sigma^{(2,1)})_{21} \\ (\sigma^{(2,1)})_{22} \\ (\sigma^{(1^3)})_{11} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (4.5)$$

In den Abschnitten A.4 und A.7 werden jeweils die DFT-Matrizen $\mathbf{D}_{\sigma,4}$ und $\mathbf{D}_{\omega,4}$ für die S_4 konstruiert.

Die Youngsche Seminormalform (bzw. die kontragrediente Version der Youngschen Seminormalform) lässt sich mit dem folgenden Resultat relativ einfach in die Youngsche Orthogonalform überführen.

4.3 Die Youngsche Seminormal- und Orthogonalform

Korollar 4.13. *Es gibt eine bis auf einen nichtnegativen Skalar eindeutig bestimmte invertierbare Diagonalmatrix $\Delta_{\sigma,n} = \bigoplus_{\alpha+n} \Delta_{\sigma}^{\alpha}$ (bzw. $\Delta_{\kappa,n} = \bigoplus_{\alpha+n} \Delta_{\kappa}^{\alpha}$), so dass für alle $\pi \in S_n$ gilt: $\Delta_{\sigma,n} \cdot \sigma_n(\pi) \cdot \Delta_{\sigma,n}^{-1} = \omega_n(\pi)$ (bzw. $\Delta_{\kappa,n} \cdot \kappa_n(\pi) \cdot \Delta_{\kappa,n}^{-1} = \omega_n(\pi)$).*

Beweis. Siehe Abschnitt 3.4 in [24]. □

Mit dem Ansatz $\Delta_{\sigma}^{\alpha} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_{d_{\alpha}})$ (bzw. $\Delta_{\kappa}^{\alpha} = \text{diag}(\delta'_1, \dots, \delta'_{d_{\alpha}})$) erhält man

$$\delta_a \cdot \sigma^{\alpha}(\pi)_{ab} \cdot \delta_b^{-1} = \omega^{\alpha}(\pi)_{ab} \quad (4.6)$$

$$\text{(bzw. } \delta'_a \cdot \kappa^{\alpha}(\pi)_{ab} \cdot \delta'_b^{-1} = \omega^{\alpha}(\pi)_{ab}), \quad (4.7)$$

für alle $\pi \in S_n$ und alle $a, b \in [1, d_{\alpha}]$. Für $a = b$ ergibt die Gleichung 4.6 (bzw. Gleichung 4.7) keine nichttriviale Relation. Des Weiteren können die folgenden Überlegungen auf die Transpositionen $(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)$ beschränkt werden, die die S_n erzeugen. Da $\sigma^{\alpha}((1, 2)) = \omega^{\alpha}((1, 2))$ (bzw. $\kappa^{\alpha}((1, 2)) = \omega^{\alpha}((1, 2))$) eine Diagonalmatrix ist, bleiben zum Vergleich die außerdiagonalen Positionen in den Matrizen $\sigma^{\alpha}((i, i+1))$ (bzw. $\kappa^{\alpha}((i, i+1))$) und $\omega^{\alpha}((i, i+1))$ für $i \in [2, n-1]$ übrig. Die außerdiagonalen Positionen werden im 2. Fall zur Konstruktion der Matrixdarstellungen beschrieben, siehe die Gleichungen (4.1) (bzw. (4.3)) und (4.2). Mit $\sigma^{\alpha}((i, i+1))_{ba} = 1$, $\sigma^{\alpha}((i, i+1))_{ab} = q_d^2$ (bzw. $\kappa^{\alpha}((i, i+1))_{ba} = q_d^2$, $\kappa^{\alpha}((i, i+1))_{ab} = 1$) sowie $\omega^{\alpha}((i, i+1))_{ba} = \omega^{\alpha}((i, i+1))_{ab} = q_d$ ergibt sich sofort für die Positionen (a, b) und (b, a) die gleiche Relation: $\delta_b/\delta_a = q_d$ (bzw. $\delta'_a/\delta'_b = q_d$). Betrachtet man diese Relationen für alle Paare (a, b) und allen Transpositionen $(i, i+1)$ mit $i \in [2, n-1]$ ergibt sich eine vollständige Menge von Relationen, die Δ_{σ}^{α} (bzw. Δ_{κ}^{α}) bis auf einen nichtnegativen Skalar bestimmen. Wir normalisieren Δ_{σ}^{α} (bzw. Δ_{κ}^{α}), indem $\delta_1 = 1$ (bzw. $\delta'_{d_{\alpha}} = 1$) gesetzt wird.

Beispiel 4.14. Wir berechnen Δ_{κ}^{α} für $\alpha = (3, 2)$. Nach Abbildung 6 erhalten wir neben $\kappa^{\alpha}((1, 2)) = \omega^{\alpha}((1, 2)) = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, 1)$

$$\kappa^{\alpha}((2, 3)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \mathbf{1} & & & \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & \mathbf{1} & \\ & & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega^{\alpha}((2, 3)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & q_2 & & & \\ q_2 & -\frac{1}{2} & & & \\ & & \frac{1}{2} & q_2 & \\ & & q_2 & -\frac{1}{2} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

4 Darstellungstheorie symmetrischer Gruppen

$$\kappa^\alpha((3,4)) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{3} & \mathbf{1} \\ & & & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \omega^\alpha((3,4)) = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \frac{1}{3} & q_3 \\ & & & q_3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\kappa^\alpha((4,5)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \mathbf{1} \\ & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{3}{4} & & -\frac{1}{2} & & \\ & \frac{3}{4} & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \omega^\alpha((4,5)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & q_2 & & & \\ \frac{1}{2} & & & & q_2 \\ q_2 & & -\frac{1}{2} & & \\ & q_2 & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachtet man die hervorgehobenen Einsen, erhalten wir folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (2,3) & : \delta'_1/\delta'_2 = q_2, & \delta'_3/\delta'_4 = q_2, \\ (3,4) & : \delta'_4/\delta'_5 = q_3, \\ (4,5) & : \delta'_1/\delta'_3 = q_2, & \delta'_2/\delta'_4 = q_2. \end{aligned}$$

Zusammen mit $\delta'_5 := 1$ folgt $\Delta_\kappa^\alpha = \text{diag}(q_2^2 q_3, q_2 q_3, q_2 q_3, q_3, 1)$.

5 FFT und iFFT für symmetrische Gruppen

Im letzten Kapitel haben wir verschiedene DFTs auf S_n kennengelernt. In diesem Kapitel wird konkret ein Algorithmus für die schnelle Auswertung der diskreten Fouriertransformation auf den symmetrischen Gruppen basierend auf der Youngschen Seminormalform (σ_n) beschrieben. Die Varianten des Algorithmus basierend auf der kontragredienten Version (κ_n) oder der Youngschen Orthogonalform (ω_n) werden sich durch leichte Modifikationen ergeben. Die vorgestellten Algorithmen zur FFT (siehe Abschnitt 5.2) und iFFT (siehe Abschnitt 5.3) beruhen auf den Publikationen von Clausen [7] sowie von Clausen und Baum [11] (bzw. Kapitel 9 in [10]).

Wie bereits eingangs in Kapitel 1 erwähnt, hat Maslen in [31] einen FFT Algorithmus vorgestellt, der mit weniger arithmetischen Operationen auskommt. Dieser Algorithmus ersetzt die Matrixmultiplikation im Zusammenhang mit den „Twiddle Faktoren“ in Clausens Algorithmus (s.u.) durch Summen. Diese Summen sind indiziert durch kombinatorische Objekte, die das Konzept der Young Tableaux verallgemeinern. Das sich ergebende Resultat wird ähnlich zum Horner-Schema berechnet. Es hat sich jedoch in neueren Entwicklungen gezeigt, dass in diversen Anwendungen u.a. wegen einer höheren Zugänglichkeit Clausens Algorithmus verwendet wird, siehe beispielsweise in [22, 26, 27, 28, 29, 35]. Auch spätere Ausführungen in dieser Arbeit basieren auf Clausens Algorithmus. Aus diesen Gründen beschränken wir uns im Folgenden auf die Beschreibung von Clausens Algorithmus. Zunächst wird die für diesen Algorithmus benötigte Vorverarbeitung beschrieben.

5.1 Vorverarbeitung

Zur Auswertung von σ_n sind zunächst für alle $\ell \leq n$, für alle $\beta \vdash \ell$ und alle $i < \ell$ sämtliche Matrizen $\sigma^\beta((i, i+1))$ zu berechnen und zu speichern. Wie wir bereits gesehen haben, sind die Matrizen $\sigma^\beta((i, i+1))$ dünnbesetzt. Diese Eigenschaft kann ausgenutzt werden, um die Matrizen effizient zu speichern. Die 2-dünne Matrix $\sigma^\beta((i, i+1)) =: (\beta_{a,b})$ wird durch eine Tabelle $(b_a, c_a)_{1 \leq a \leq d_\beta}$ repräsentiert, wobei $1 \leq b_a \leq d_\beta$ und $-1 \leq c_a < \ell$. Das a -te Tupel der Tabelle (b_a, c_a) beschreibt die a -te Zeile der Matrix. Falls $a = b_a$ befinden wir uns im 1. Fall bei der Konstruktion der Matrix (siehe oben): $\beta_{a,a} = c_a \in \{\pm 1\}$. Ansonsten sind wir im 2. Fall: Falls $a < b_a$ gilt $\beta_{a,a} = c_a^{-1}$ und $\beta_{a,b_a} = 1 - c_a^{-2}$. Falls $a > b_a$ ist $\beta_{a,b_a} = 1$ und $\beta_{a,a} = -c_a^{-1}$.

Beispiel 5.1.

$$\sigma^{(3,2)}((4,5)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & \\ & \frac{3}{4} & & & \\ & & \frac{1}{2} & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & \frac{3}{4} \\ & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c} a & b_a & c_a \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{array}$$

Mit Hilfe dieser Kodierung sind nur $2 \sum_{\ell \leq n} (\ell - 1) \sum_{\beta \vdash \ell} d_\beta$ ganze Zahlen im Gegensatz zu $\sum_{\ell \leq n} (\ell - 1) \sum_{\beta \vdash \ell} d_\beta^2$ rationale Zahlen zu speichern.

Zu Beginn wird der Young-Verband bis zum n -ten Level erstellt, siehe Abbildung 4. Mit dem Young-Verband können sämtliche Partitionen, die zugehörigen Matrizen $\sigma^\beta((i, i + 1))$, die entsprechenden Grade und das Verzweigungsverhalten der korrespondierenden Darstellungen verwaltet werden.

Hierzu kann bei der Erstellung wie folgt vorgegangen werden. Zunächst werden alle Knoten des Young-Verbands konstruiert. Dabei werden im ℓ -ten Level alle Partitionen lexikographisch sortiert erzeugt. Die entsprechenden Knoten werden in Form einer einfach verketteten Liste beginnend mit der Partition (ℓ) gespeichert. Die Listenköpfe werden dabei in einem Array abgespeichert. Dadurch wird im späteren Verlauf ein schneller Zugriff auf die Blockstruktur von Signalen auf der S_ℓ ermöglicht. Als Nächstes werden die Kanten in den Graphen eingefügt. Ausgehend von einem Startknoten können hier die Endknoten der Kanten ebenfalls in Form einfach verketteter Listen gespeichert werden. Bei der Konstruktion der Rückwärtskanten (vom ℓ -ten zum $\ell - 1$ -ten Level) ist zu beachten, dass diese gemäß dem ersten Level des Last Letter Sequence Baumes anzuordnen sind. Im Anschluss werden die Matrizen $\sigma^\beta((i, i + 1))$ sukzessive für S_2, S_3, \dots, S_n berechnet. Sei $\beta \vdash \ell \leq n$ und $i < \ell$. Dann gibt es zwei Fälle:

1. Für $i < \ell - 1$ gilt

$$\sigma^\beta((i, i + 1)) = (\sigma^\beta \downarrow S_{\ell-1})((i, i + 1)) = \bigoplus_{\beta \triangleright \gamma \vdash \ell-1} \sigma^\gamma((i, i + 1))$$

2. Für $i = \ell - 1$ wird die Matrix $\sigma^\beta((\ell - 1, \ell))$ mit Hilfe der Last Letter Sequence von β gemäß der Formel für die Youngsche Seminormalform konstruiert.

Durch die Sortierung der Rückwärtskanten im berechneten Young-Verband kann im ersten Fall die korrekte Reihenfolge der Summanden bei der Bildung der direkten Summe gemäß dem ersten Level des Last Letter Sequence Baumes (vgl. Satz 4.11) eingehalten werden. Zusätzlich erhalten wir kostenfrei durch die „Bottom-up“-Struktur der Berechnung der S_ℓ -Level und durch die Bildung der direkten Summe die Dimension d_β von σ^β .

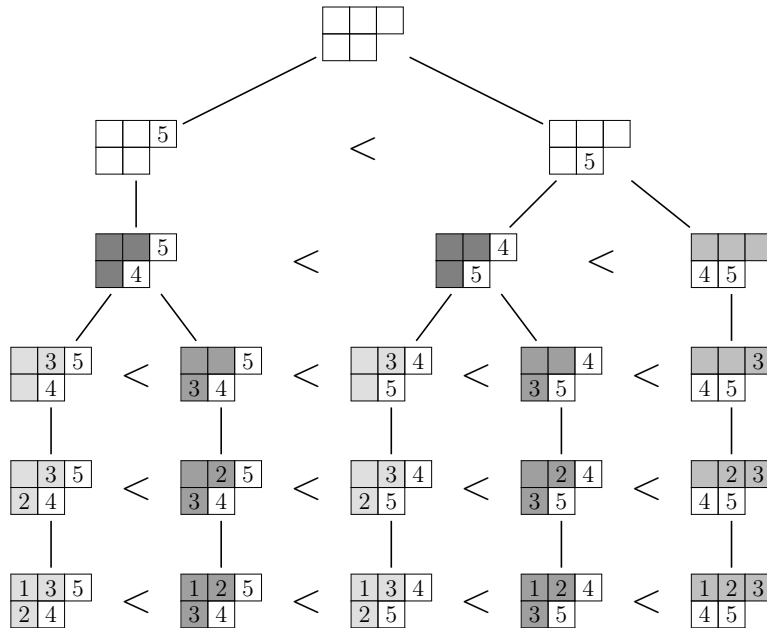


Abbildung 8: Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (3, 2)$.

Nur für $i = \ell - 1$ im zweiten Fall wird die Matrix $\sigma^\beta((\ell - 1, \ell))$ mit Hilfe der Last Letter Sequence gemäß der Formel für die Youngsche Seminormalform konstruiert. Hierzu brauchen wir nur die Positionen von $\ell - 1$ und ℓ in den β -Standardtableaux $T_1 < \dots < T_{d_\beta}$ zu kennen. Der komplette Last Letter Sequence Baum muss nicht konstruiert werden. Es ist ausreichend, den Last Letter Sequence Baum bis zum zweiten Level zu konstruieren und die Knoten $N_1 < \dots < N_m$ in diesem Level zu betrachten. Jeder Knoten N_j definiert ein Intervall $I_j \subseteq \{T_1, \dots, T_{d_\beta}\}$, das jedes Blatt in dem Unterbaum mit Wurzel N_j enthält. Löschen wir bei dem Knoten N_j in dem Tableau die Boxen bzw. Positionen, wo sich $\ell - 1$ und ℓ befinden, erhalten wir ein Young-Diagramm bzw. ein noch leeres Tableau zu der Partition $\lambda \subset \beta$. Es gilt: $|I_j| = d_\lambda$. Befinden sich $\ell - 1$ und ℓ in derselben Zeile oder Spalte in N_j , so gilt das auch für alle β -Standardtableaux in I_j .

Ensteht nun für ein $h > j$ ein Knoten N_h aus N_j durch Vertauschen von $\ell - 1$ und ℓ , so erhalten wir ein Young-Diagramm bzw. ein noch leeres Tableau zu der gleichen Partition $\lambda \subset \beta$, wenn wir die Boxen bzw. Positionen, wo sich $\ell - 1$ und ℓ in N_h befinden, löschen.

Es gilt $|I_j| = |I_h|$. Die Reihenfolge, mit denen $1, \dots, \ell - 2$ bei N_j und N_h in das Young-Diagramm zu λ aufgefüllt werden und weitere Kindknoten entstehen, ist dieselbe. Daraus folgt, dass das u -te Element in I_h aus dem u -ten Element in I_j entstanden ist. Abbildung 8 veranschaulicht diese Situation. Zusammenfassend kann im Fall $i = \ell - 1$ wie folgt vorgegangen werden:

I. Berechne den Last Letter Sequence Baum bis zum zweiten Level.

In diesem Level erhält man die Knoten $N_1 < \dots < N_m$.

II. Für alle $1 \leq j \leq m$:

a. $\ell - 1$ und ℓ sind in derselben Zeile (Spalte) von N_j :

Wende **Fall 1** der Konstruktion der Youngschen Seminormalform (s.o.) für alle Elemente T_a in I_j an.

b. Für ein $h > j$ entsteht N_h aus N_j durch Tausch von $\ell - 1$ und ℓ :

Wende **Fall 2** der Konstruktion der Youngschen Seminormalform (s.o.) für alle Paare (T_a, T_b) , bestehend jeweils aus dem u -ten Element von I_j und I_h , an. Die Axialdistanz d ist gleich für alle diese Paare.

Bei der Speicherung der 2-dünnen Matrizen mit der oben beschriebenen Datenstruktur wird nur bei II.b. die Axialdistanz berechnet. Die so gespeicherten Matrizen können auch bei der kontragredienten Version oder der Variante basierend auf der Youngschen Orthogonalform verwendet werden. Hierfür muss bei einer Matrix-Matrix-Multiplikation oder Matrix-Vektor-Multiplikation lediglich der 2. Fall zur Rekonstruktion einer Zeile (siehe Definition der Datenstruktur) entsprechend angepasst werden.

5.2 FFT Algorithmus

Gegeben sei ein Element $a = \sum_{g \in S_n} a_g g$ in $\mathbb{C}S_n$. Ziel ist die schnelle Auswertung von $\sigma_n(a)$. Satz 4.2 (1) gibt eine disjunkte Zerlegung der S_n in die Linksnebenklassen von der Untergruppe S_{n-1} an:

$$S_n = \bigsqcup_{j=1}^n g_{j,n} S_{n-1},$$

wobei $g_{j,n} = (j, j + 1, \dots, n)$. Gemäß dieser Zerlegung kann das Element a anders aufgeschrieben werden:

$$a = \sum_{j=1}^n g_{j,n} a_j,$$

wobei

$$a_j = \sum_{h \in S_{n-1}} a_{g_j, n, h} h \in \mathbb{C}S_{n-1}.$$

Da σ_n sowohl ein Algebren-Morphismus als auch eine \mathcal{T}_n -angepasste DFT auf S_n (siehe Satz 4.11) ist, erhalten wir für die Auswertung von $\sigma_n(a)$:

$$\begin{aligned} \sigma_n(a) &= \sum_{j=1}^n \sigma_n(g_{j,n}) \sigma_n(a_j) = \sum_{j=1}^n \bigoplus_{\alpha \vdash n} \sigma^\alpha(g_{j,n}) \sigma^\alpha(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \bigoplus_{\alpha \vdash n} \sigma^\alpha(g_{j,n}) (\sigma^\alpha \downarrow \mathbb{C}S_{n-1})(a_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \bigoplus_{\alpha \vdash n} \sigma^\alpha(g_{j,n}) \bigoplus_{\alpha \supset \beta \vdash n-1} \sigma^\beta(a_j). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Die letzte Zeile zeigt, dass die Auswertung von $\sigma^\alpha(a_j)$ für alle $\alpha \vdash n$ und $\beta \subset \alpha$ mit Kopien von $\sigma^\beta(a_j)$ durchgeführt werden kann. Hier zeigt sich der Vorteil \mathcal{T}_n -angepasster DFTs, da das Kopieren als kostenfrei angesehen werden kann. Wiederholt man das obige Schema für $\sigma_n(a_j)$, so erhalten wir einen rekursiven Algorithmus für die Auswertung von $\sigma_n(a)$. In Anlehnung an die klassischen FFT-Algorithmen wird $\sigma^\alpha(g_{j,n})$ als „Twiddle Faktor“ bezeichnet. Hier zeigt sich, dass die Wahl der Transversalen der Linksnebenklassen von S_{n-1} in S_n bestehend aus den Elementen $g_{j,n}$, $1 \leq j \leq n$, weiter ausgenutzt werden kann. Es gilt $g_{j,n} = (j, j+1, \dots, n) = (j, j+1)(j+1, j+2) \dots (n-1, n)$. Demnach ist $\sigma^\alpha(g_{j,n})$ das Produkt von $n-j$ vielen 2-dünnen Matrizen. Genauer gilt:

$$\sigma^\alpha(g_{j,n}) = \sigma^\alpha((j, j+1)) \cdot \sigma^\alpha((j+1, j+2)) \cdot \dots \cdot \sigma^\alpha((n-1, n)).$$

Statt erst die Matrix $\sigma^\alpha(g_{j,n})$ direkt zu berechnen und einer anschließenden Multiplikation von $\sigma^\alpha(g_{j,n})$ mit $\sigma^\alpha(a_j)$ wird das folgende Schema verwendet:

$$\left(\sigma^\alpha((j, j+1)) \cdot \dots \cdot \left(\sigma^\alpha((n-2, n-1)) \cdot \left(\sigma^\alpha((n-1, n)) \cdot \sigma^\alpha(a_j) \right) \right) \dots \right) \quad (5.2)$$

Für den arithmetischen Aufwand wurde das folgende Resultat gezeigt.

Satz 5.2 (Clausen).

$$L_2(S_n) \leq \left(\frac{5}{12}n^3 + \frac{1}{2}n^2 - \frac{11}{12}n \right) n!.$$

Beweis. Siehe [11]. □

5 FFT und iFFT für symmetrische Gruppen

Eine Implementation des angedeuteten rekursiven Ansatzes zur Berechnung der Fouriertransformation ist sehr speicherintensiv. Die im Folgenden geschilderte iterative Variante umgeht dieses Problem. Im Groben wird die Berechnung unterteilt in n Level. In Level k bzw. im S_k -Level wird die DFT σ_k auf S_k für jede Linksnebenklasse von S_k in S_n ausgewertet.

Nach Satz 4.2 (2) bilden die Elemente

$$g_{\underline{j}} := g_{j_n, n} g_{j_{n-1}, n-1} \cdots g_{j_{k+1}, k+1}, \quad 1 \leq j_i \leq i,$$

eine Transversale der Linksnebenklassen von S_k in S_n . Eine lexikographische Sortierung von (j_n, \dots, j_{k+1}) führt zu einer Totalordnung der Linksnebenklassen von S_k in S_n . Gemäß

$$S_n = \bigsqcup_{\underline{j} \in J_k^n} g_{\underline{j}} S_k.$$

kann das Eingangssignal $a \in \mathbb{C}S_n$ wie folgt aufgeschrieben werden:

$$a = \sum_{\underline{j}} g_{\underline{j}} a_{\underline{j}} \quad \text{mit} \quad a_{\underline{j}} \in \mathbb{C}S_k.$$

Demnach sind die Daten in Level k in $n!/k!$ Blöcke $\sigma_k(a_{\underline{j}})$ der Größe $k!$ unterteilt. Diese Blöcke sind in Level k nach der eben erwähnten lexikographischen Sortierung der Linksnebenklassen von S_k in S_n angeordnet. Jeder Block $\sigma_k(a_{\underline{j}})$ ist eine Blockdiagonalmatrix, die durch einen Vektor der Länge $k!$ wie folgt repräsentiert wird: Die zu den Partitionen von k korrespondierenden Matrizen auf der Diagonalen werden entsprechend einer lexikographischen Sortierung der Partitionen von k angeordnet. Von jeder Matrix werden die Einträge zeilenweise abgespeichert. Durch diese Anordnung können die Daten in Level k als ein Vektor $v_k \in \mathbb{C}^{n!}$ beschrieben werden. Nach Satz 4.2 (3) lässt sich jede Permutation $\pi \in S_n$ darstellen als $\pi = g_{j_n, n} g_{j_{n-1}, n-1} \cdots g_{j_2, 2}$ mit einem eindeutig bestimmten (j_n, \dots, j_2) . Folglich sind die Koeffizienten von a in dem Eingabevektor v_1 gemäß der lexikographischen Sortierung der Gruppenelemente angeordnet.

Mit einer gegebenen Eingabe v_1 werden nun sukzessive die Vektoren v_2, \dots, v_n berechnet und am Ende v_n ausgegeben. In Level k wird v_k aus v_{k-1} berechnet. Genauer wird jeder Block $\sigma_k(a_{\underline{j}})$ von k Blöcken $\sigma_{k-1}(a_{\underline{\ell}})$ mit $g_{\underline{\ell}} S_{k-1} \subset g_{\underline{j}} S_k$ gemäß Formel (5.1) berechnet. Die einzelnen Blöcke und Matrizen lassen sich mit Pointern auf den Vektoren v_k und v_{k-1} ansteuern. Abbildung 9 zeigt die Blockstruktur (links) der DFT σ_3 auf S_3 und die

Datenpfade (rechts), die sich durch die Bildung der direkten Summen ergeben. Von den Vektoren v_1, \dots, v_n müssen nur zwei in Level k gespeichert sein. Für die Berechnung des Ausdrucks (5.2) werden zusätzlich $\mathcal{O}(d_n^2)$ Elemente gespeichert, wobei d_n der maximale Grad aller Darstellungen von $\mathbb{C}S_n$ ist. Das Speichern von zwei $n!$ großen Vektoren ist eine der Haupteinschränkungen des Algorithmus.

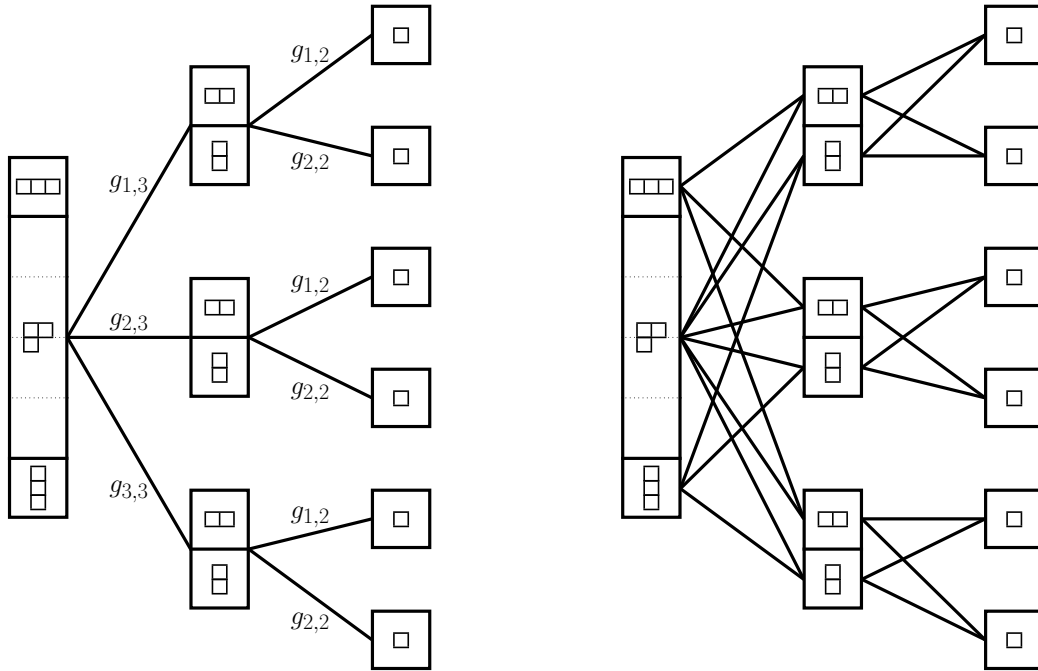


Abbildung 9: Blockstruktur (links) der DFT σ_3 auf S_3 und die Datenpfade (rechts).

Beispiel 5.3. Gegeben ist ein Signal $a \in \mathbb{C}S_3$, so dass

$$v_1 = (\sigma^{(1)}(a_{1,1}), \sigma^{(1)}(a_{1,2}), \sigma^{(1)}(a_{2,1}), \sigma^{(1)}(a_{2,2}), \sigma^{(1)}(a_{3,1}), \sigma^{(1)}(a_{3,2}))^\top = (1, 2, 3, 4, 5, 6)^\top.$$

$$v_2 \hat{=} \sigma_2(a_1) \oplus \sigma_2(a_2) \oplus \sigma_2(a_3)$$

Sei im Folgenden $1 \leq i \leq 3$ und $\beta \in \{(2), (1^2)\}$:

$$\sigma_2(a_i) = \sigma^{(2)}(a_i) \oplus \sigma^{(1^2)}(a_i)$$

$$\sigma^\beta(a_i) = \sigma^\beta(g_{1,2}) \cdot \sigma^{(1)}(a_{i,1}) + \sigma^\beta(g_{2,2}) \cdot \sigma^{(1)}(a_{i,2})$$

$$\sigma^{(2)}(a_1) = 1 \cdot 1 + 2 = 3 \quad \sigma^{(1^2)}(a_1) = -1 \cdot 1 + 2 = 1$$

$$\sigma^{(2)}(a_2) = 1 \cdot 3 + 4 = 7 \quad \sigma^{(1^2)}(a_2) = -1 \cdot 3 + 4 = 1$$

$$\sigma^{(2)}(a_3) = 1 \cdot 5 + 6 = 11 \quad \sigma^{(1^2)}(a_3) = -1 \cdot 5 + 6 = 1$$

$$v_3 \hat{=} \sigma_3(a) = \sigma^{(3)}(a) \oplus \sigma^{(2,1)}(a) \oplus \sigma^{(1^3)}(a)$$

5 FFT und iFFT für symmetrische Gruppen

$$\sigma^{(3)}(a) = \sum_{j=1}^3 \sigma^{(3)}(g_{j,3}) \cdot \sigma^{(2)}(a_j) = 1 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 11 = 21$$

$$\sigma^{(2,1)}(a) = \sum_{j=1}^3 \sigma^{(2,1)}(g_{j,3}) \cdot \left(\sigma^{(1^2)}(a_j) \oplus \sigma^{(2)}(a_j) \right) = \text{siehe Abbildung 10}$$

$$\sigma^{(1^3)}(a) = \sum_{j=1}^3 \sigma^{(1^3)}(g_{j,3}) \cdot \sigma^{(1^2)}(a_j) = (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 = 1$$

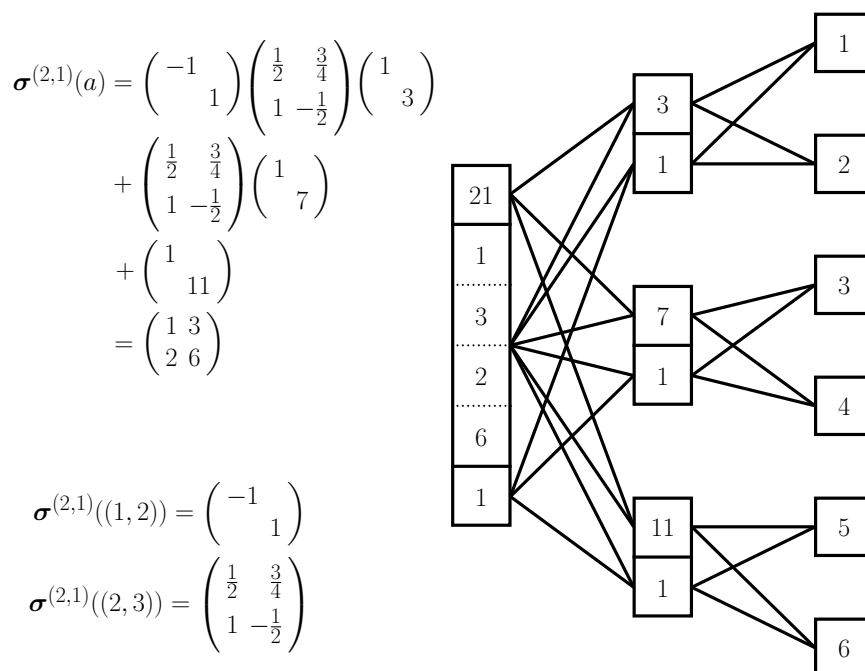


Abbildung 10: Veranschaulichung der Beispielrechnung zur DFT σ_3 auf S_3 .

Die (gespeicherten) Matrizen $\sigma^\alpha((j, j + 1))$ werden nur bei der Multiplikation mit den „Twiddle Faktoren“, siehe (5.2), verwendet. Wie weiter oben beschrieben, muss hier lediglich die Matrix-Matrix-Multiplikation angepasst werden, um die Varianten des Algorithmus für die kontragrediente Version (κ_n) oder der Version basierend auf der Youngschen Orthogonalform (ω_n) zu erhalten.

5.3 IFFT Algorithmus

Ausgangspunkt ist die bekannte Fourier-Inversionsformel.

Satz 5.4 (Fourier-Inversionsformel). *Es sei $\bigoplus_{i=1}^h D_i$ eine DFT auf $\mathbb{C}G \simeq \bigoplus_{i=1}^h \mathbb{C}^{d_i \times d_i}$. Dann gilt für $a \in \mathbb{C}G$ und $g \in G$*

$$a(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^h d_i \cdot \text{Spur}(D_i(g^{-1}) \cdot D_i(a)).$$

Beweis. Siehe beispielsweise Theorem (6.8) in [10] oder Proposition 11 in [40]. □

Im Fall der S_n folgt nach diesem Satz:

$$\sigma_n^{-1} \left(\bigoplus_{\alpha \vdash n} A_\alpha \right) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{g \in S_n} \left(\sum_{\alpha} d_\alpha \cdot \text{Spur}(\sigma^\alpha(g^{-1}) \cdot A_\alpha) \right) g$$

für jede Blockdiagonalmatrix $\bigoplus_{\alpha} A_\alpha \in \sigma_n(\mathbb{C}S_n)$. Diese Formel kann gemäß der bekannten Zerlegung $S_n = \bigsqcup_{j=1}^n g_{j,n} S_{n-1}$ anders aufgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sigma_n^{-1} \left(\bigoplus_{\alpha \vdash n} A_\alpha \right) &= \sum_{j \leq n} g_{j,n} \left[\frac{1}{|S_{n-1}|} \sum_{g \in S_{n-1}} \left(\sum_{\alpha} \frac{d_\alpha}{n} \cdot \text{Spur}(\sigma^\alpha(g^{-1}) \cdot \sigma^\alpha(g_{j,n}^{-1}) \cdot A_\alpha) \right) g \right] \\ &=: \sum_{j \leq n} g_{j,n} X_{j,n}. \end{aligned}$$

Sei p_α die natürliche Projektion von $\mathbb{C}^{d_\alpha \times d_\alpha}$ auf die Blockdiagonale $\bigoplus_{\alpha \supset \beta \vdash n-1} \mathbb{C}^{d_\beta \times d_\beta}$ und sei

$$\bigoplus_{\beta} A_{\alpha,j}^\beta := p_\alpha(\sigma^\alpha(g_{j,n}^{-1}) \cdot A_\alpha).$$

Nach Kapitel 4 in [11] (bzw. Kapitel 9.3 in [10]) folgt:

$$X_{j,n} = \sigma_{n-1}^{-1} \left(\bigoplus_{\beta} A_j^\beta \right),$$

wobei

$$A_j^\beta := \sum_{\alpha \supset \beta} \frac{d_\alpha}{n \cdot d_\beta} A_{\alpha,j}^\beta.$$

Ingesamt ergibt sich folgende Formel:

$$\sigma_n^{-1} \left(\bigoplus_{\alpha \vdash n} A_\alpha \right) = \sum_{j \leq n} g_{j,n} \sigma_{n-1}^{-1} \left(\bigoplus_{\beta} A_j^\beta \right). \quad (5.3)$$

Die Berechnung von $\sigma_n^{-1}(\bigoplus_{\alpha} A_\alpha)$ gestaltet sich wie folgt. Im ersten Schritt werden alle Produkte $\sigma^\alpha(g_{j,n}^{-1}) \cdot A_\alpha$ berechnet. Mit der Zerlegung $g_{j,n}^{-1} = (n-1, n)(n-2, n-1) \cdots (j, j+1)$ und einer Herangehensweise wie in Formel (5.2) erhalten wir all diese Produkte (und demnach die Blöcke $A_{\alpha,j}^\beta$). Danach können alle Blöcke A_j^β mit der obigen Summenformel berechnet werden. Schlussendlich wird $\sigma_{n-1}^{-1}(\bigoplus_{\beta} A_j^\beta)$ für alle j berechnet, indem der Algorithmus rekursiv angewendet wird.

Für den arithmetischen Aufwand wurde das folgende Resultat gezeigt.

Satz 5.5 (Clausen).

$$L_2(\sigma_n^{-1}) < \left(\frac{5}{12}n^3 + \frac{4}{3}\sqrt{2}n^{3/2} + \frac{7}{12}n \right) n!.$$

Beweis. Siehe [11]. □

Anschaulich gesehen liest man bei der iFFT die Illustrationen der Blockstruktur und Datenpfade in Abbildung 9 „rückwärts“, d.h. von links nach rechts. Mit dieser Sichtweise erhält man eine iterative Variante der iFFT, indem der iterative Algorithmus zur FFT in Abschnitt 5.2 „rückwärts“ (unter Verwendung der obigen Formeln zur iFFT) gelesen wird und exakt die gleichen Datenstrukturen und ihre Anordnung verwendet werden. Entsprechend lassen sich die Aussagen zur Implementation aus den vorangegangenen Abschnitten übertragen. Die Varianten des Algorithmus für die kontragrediente Version (κ_n) oder der Youngschen Orthogonalform (ω_n) erhält man entsprechend durch die Anpassung der Multiplikation mit den „Twiddle Faktoren“, wie es bereits am Ende von Abschnitt 5.2 beschrieben wurde.

6 S_{n-k} -invariante Signale auf der S_n

In den Abschnitten 6.1 und 6.2 wird der Spektralbereich und die Multiplikation im Spektralbereich von S_{n-k} -invarianten Signalen betrachtet. Beispielkonstruktionen von S_{n-2} - bzw. S_{n-k} -invarianten Signalen werden in Abschnitt 6.4 zum Graphlet-Spektrum und in Abschnitt 6.5 zum Quadratic Assignment Problem behandelt. Diese Abschnitte basieren auf Resultaten, die von Kondor und Borgwardt in [28], von Kondor, Shervashidze und Borgwardt in [29], von Rockmore et al. in [36] sowie von Kondor in [27] vorgestellt wurden. Des Weiteren werden in Abschnitt 6.3 die DFTs von S_{n-k} -invarianten Signalen basierend auf der Youngschen Seminalform (bzw. der kontragredienten Version der Youngschen Seminalform) und der Youngschen Orthogonalform gegenübergestellt.

6.1 Spektralbereich S_{n-k} -invarianter Signale

Satz 4.11 kombiniert mit Satz 3.1 ergibt folgenden

Satz 6.1. *Sei $k \in [1, n - 1]$ und $\rho_n \in \{\sigma_n, \kappa_n, \omega_n\}$. Das ρ_n -Bild von $\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]$ ist gleich $\bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}(d_{\alpha}, \Gamma_{\alpha,k})$, wobei α alle Partitionen von n mit $\alpha_1 \geq n - k$ durchläuft und $\Gamma_{\alpha,k}$ die Menge aller Indizes a ist, so dass T_a das a -te α -Standardtableau (in der Last Letter Sequence) mit den Zahlen $1, 2, \dots, n - k$ in der ersten Zeile ist.*

Für $k = n - 1$ ist $\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_1] = \mathbb{C}S_n$ und der letzte Satz ergibt den Satz von Wedderburn für den Fall $G = S_n$. Betrachtet man kleine k , beispielsweise $2k \leq n$, dann ist

$$\rho_n(\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]) \cong \bigoplus_{\ell=0}^k \bigoplus_{\beta+\ell} \mathbb{C}(d_{(n-\ell,\beta)}, \Gamma_{(n-\ell,\beta),k}), \quad (6.1)$$

und $|\Gamma_{(n-\ell,\beta),k}| = d_{\beta} \cdot \binom{k}{\ell}$. Vergleicht man die Dimensionen in (6.1), ergibt sich für den Fall $2k \leq n$:

$$[S_n : S_{n-k}] = \sum_{\ell=0}^k \sum_{\beta+\ell} d_{(n-\ell,\beta)} \cdot d_{\beta} \cdot \binom{k}{\ell}. \quad (6.2)$$

Beispiel 6.2. Wir beschreiben das ρ_n -Bild von $\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]$ für $n \geq 6$ und $k \in [1, 3]$. Tabelle 2 beinhaltet alle relevanten Partitionen α , die zugehörigen Dimensionen d_{α} , sowie alle Elemente in $\Gamma_{\alpha,k}$. Des Weiteren illustriert Abbildung 11 diese Spektralbereiche.

6 S_{n-k} -invariante Signale auf der S_n

Tabelle 2: Aufstellung relevanter Parameter, die die ρ_n -Bilder von $\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]$ für $n \geq 6$ and $k \leq 3$ beschreiben.

$\alpha \vdash n$	d_α	k	Elemente in $\Gamma_{\alpha,k}$
(n)	1	1	1
$(n-1, 1)$	$n-1$	1	d_α
(n)	1	2	1
$(n-1, 1)$	$n-1$	2	$d_\alpha - 1, d_\alpha$
$(n-2, 2)$	$n(n-3)/2$	2	d_α
$(n-2, 1^2)$	$(n-1)(n-2)/2$	2	d_α
(n)	1	3	1
$(n-1, 1)$	$n-1$	3	$d_\alpha - 2, d_\alpha - 1, d_\alpha$
$(n-2, 2)$	$n(n-3)/2$	3	$d_{(n-3,2)}, d_\alpha - 1, d_\alpha$
$(n-2, 1^2)$	$(n-1)(n-2)/2$	3	$d_{(n-3,1^2)}, d_\alpha - 1, d_\alpha$
$(n-3, 3)$	$n(n-1)(n-5)/6$	3	d_α
$(n-3, 2, 1)$	$n(n-2)(n-4)/3$	3	$d_{(n-4,2,1)} + d_{(n-3,1^2)}, d_\alpha$
$(n-3, 1^3)$	$(n-1)(n-2)(n-3)/6$	3	d_α

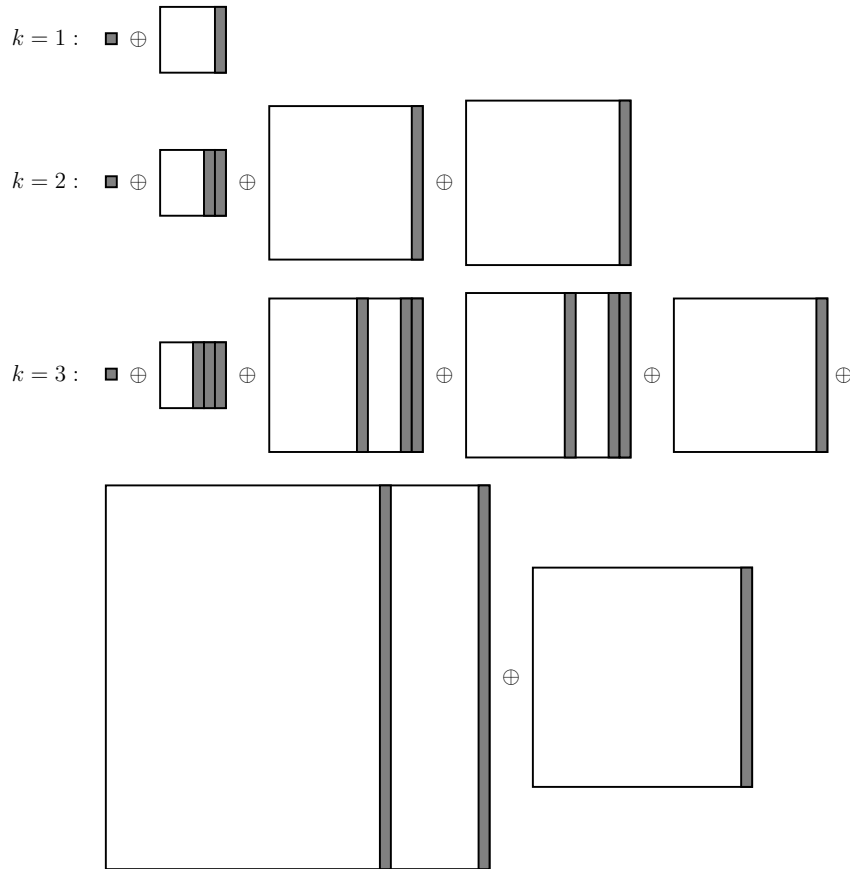


Abbildung 11: Das ρ_n -Bild von $\mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]$ für $k \in [1, 3]$.

6.2 Multiplikation \mathcal{S}_{n-k} -invarianter Signale im Spektralbereich

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis von folgendem

Satz 6.3. *Sei $2k \leq n$ und seien $a, b \in \mathbb{C}[S_n \text{ mod } S_{n-k}]$. Falls $\rho_n \in \{\sigma_n, \kappa_n, \omega_n\}$, dann können im Spektralbereich $\rho_n(a)$ und $\rho_n(b)$ mit weniger als $2 \cdot \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} \cdot \sqrt{k!} \cdot [S_n : S_{n-k}]$ arithmetischen Operationen multipliziert werden.*

Beweis. Nach Gleichung (6.1) sind $\rho_n(a)$ und $\rho_n(b)$ in $\bigoplus_{\ell=0}^k \bigoplus_{\beta+\ell} \mathbb{C}(d_{(n-\ell,\beta)}, \Gamma_{(n-\ell,\beta),k})$. Wegen $|\Gamma_{(n-\ell,\beta),k}| = d_\beta \cdot \binom{k}{\ell}$ entspricht die Multiplikation $\rho_n(a) \cdot \rho_n(b)$ für jede Partition β von $\ell \leq k$ einer Multiplikation von einer $d_{(n-\ell,\beta)} \times |\Gamma_{(n-\ell,\beta),k}|$ -Matrix mit einer $|\Gamma_{(n-\ell,\beta),k}| \times |\Gamma_{(n-\ell,\beta),k}|$ -Matrix. Demnach kann $\rho_n(a) \cdot \rho_n(b)$ mit weniger als

$$\#_{n,k} := 2 \cdot \sum_{\ell=0}^k \sum_{\beta+\ell} d_{(n-\ell,\beta)} \cdot d_\beta^2 \cdot \binom{k}{\ell}^2$$

arithmetischen Operationen berechnet werden. Es seien $b_k := \max_{\ell \leq k} \binom{k}{\ell} = \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor}$ und $c_k := \max_{\beta+\ell \leq k} d_\beta$. Aus dem Satz von Wedderburn, siehe Satz 2.2, folgt

$$\sum_{\beta+\ell} d_\beta^2 = \ell!$$

für $\ell \geq 1$. Es gilt $c_k^2 \leq \sum_{\beta+\ell} d_\beta^2 = \ell! \leq k!$, m.a.W. ist $c_k \leq \sqrt{k!}$. Mit Gleichung (6.2) ergibt sich die obere Schranke

$$\#_{n,k} \leq 2 \cdot b_k \cdot c_k \cdot [S_n : S_{n-k}] \leq 2 \cdot \binom{k}{\lfloor k/2 \rfloor} \cdot \sqrt{k!} \cdot [S_n : S_{n-k}].$$

□

Beispielsweise gilt $\#_{n,2} < 6 \cdot [S_n : S_{n-2}]$ und $\#_{n,3} < 15 \cdot [S_n : S_{n-3}]$.

Für ein festgewähltes k und ein ausreichend großes n erhalten wir demnach die obere Schranke $\#_{n,k} \leq \gamma_k \cdot [S_n : S_{n-k}]$, wobei γ_k eine nur von k abhängende Konstante ist. Dieses Resultat ist vergleichbar zum klassischen Fall $G = C_N$, bei dem die Faltung in die Multiplikation von Diagonalmatrizen überführt wird. Hier ist der arithmetische Aufwand im Spektralbereich linear in $|C_N|$.

6.3 Youngsche Seminormalform vs. Youngsche Orthogonalform

Der Isomorphismus $\mathbb{C}[S_n \bmod S_{n-k}] \rightarrow \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}(d_{\alpha}, \Gamma_{\alpha,k})$ kann bezüglich der arithmetischen Mittel der Linksnebenklassen von S_{n-k} in S_n als Basis in $\mathbb{C}[S_n \bmod S_{n-k}]$ und den Indikatormatrizen von möglicherweise von Null verschiedenen Positionen in $\bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}(d_{\alpha}, \Gamma_{\alpha,k})$ als Basis im Spektralbereich durch eine $[S_n : S_{n-k}] \times [S_n : S_{n-k}]$ -Matrix $\mathbf{D}_{S_n \bmod S_{n-k}}$ beschrieben werden, siehe Abschnitt 3.2. Die Matrix $\mathbf{D}_{S_n \bmod S_{n-k}}$ wird bei Verwendung der Youngschen Seminormalform mit $\mathbf{D}_{\sigma,n,k}$, bei Verwendung der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform mit $\mathbf{D}_{\kappa,n,k}$ und bei Verwendung der Youngschen Orthogonalform mit $\mathbf{D}_{\omega,n,k}$ bezeichnet. Das folgende Resultat zeigt, dass man sich auf die Verwendung von DFTs basierend auf der Youngschen Seminormalform (bzw. der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform) beschränken kann, da die Youngschen Orthogonalform im Vergleich lediglich einen Overhead linear in $[S_n : S_{n-k}]$ verursacht.

Satz 6.4. Für $\rho \in \{\sigma, \kappa\}$ gilt:

$$L_{\infty}(\mathbf{D}_{\omega,n,k}) \leq L_{\infty}(\mathbf{D}_{\rho,n,k}) + [S_n : S_{n-k}] - \sum_{\alpha \vdash n, \alpha_1 \geq n-k} |\Gamma_{\alpha,k}|.$$

Beweis. Es sei $a \in \mathbb{C}[S_n \bmod S_{n-k}]$. Nach Satz 6.1 ist $\rho_n(a) = \bigoplus_{\alpha} \rho^{\alpha}(a)$ und $\omega_n(a) = \bigoplus_{\alpha} \omega^{\alpha}(a)$, wobei α alle Partitionen von n mit $\alpha_1 \geq n-k$ durchläuft. Zudem sind $\rho^{\alpha}(a)$ und $\omega^{\alpha}(a)$ in $\mathbb{C}(d_{\alpha}, \Gamma_{\alpha,k})$. Nach Korollar 4.13 gibt es für α eine Diagonalmatrix Δ_{ρ}^{α} mit $\omega^{\alpha}(a) = \Delta_{\rho}^{\alpha} \cdot \rho^{\alpha}(a) \cdot (\Delta_{\rho}^{\alpha})^{-1}$. Falls $\Delta_{\rho}^{\alpha} = \text{diag}(\delta_1, \delta_2, \dots)$, dann ist $\omega^{\alpha}(a)_{ij} = (\delta_i \delta_j^{-1}) \cdot \rho^{\alpha}(a)_{ij}$. Die beschriebene Konjugation ist für jede Spalte mit weniger als $d_{\alpha} - 1$ Multiplikationen durchführbar. Da für eine Matrix in $\mathbb{C}(d_{\alpha}, \Gamma_{\alpha,k})$ weniger als $|\Gamma_{\alpha,k}|$ Spalten von Null verschieden sind, gilt: $L_{\infty}(\mathbf{D}_{\omega,n,k}) \leq L_{\infty}(\mathbf{D}_{\rho,n,k}) + \sum_{\alpha \vdash n, \alpha_1 \geq n-k} (d_{\alpha} - 1) \cdot |\Gamma_{\alpha,k}|$. Ein Vergleich der Dimensionen in $\mathbb{C}[S_n \bmod S_{n-k}] \cong \bigoplus_{\alpha} \mathbb{C}(d_{\alpha}, \Gamma_{\alpha,k})$ ergibt $[S_n : S_{n-k}] = \sum_{\alpha \vdash n, \alpha_1 \geq n-k} d_{\alpha} \cdot |\Gamma_{\alpha,k}|$. Es folgt die Behauptung. \square

Beispiel 6.5. Satz 6.4 und Tabelle 2 ergeben für $\rho \in \{\sigma, \kappa\}$ folgende oberen Schranken:

$$\begin{aligned} L_{\infty}(\mathbf{D}_{\omega,n,1}) &\leq L_{\infty}(\mathbf{D}_{\rho,n,1}) + [S_n : S_{n-1}] - 2 \\ L_{\infty}(\mathbf{D}_{\omega,n,2}) &\leq L_{\infty}(\mathbf{D}_{\rho,n,2}) + [S_n : S_{n-2}] - 5 \\ L_{\infty}(\mathbf{D}_{\omega,n,3}) &\leq L_{\infty}(\mathbf{D}_{\rho,n,3}) + [S_n : S_{n-3}] - 14. \end{aligned}$$

6.4 Das Graphlet-Spektrum

Um Strukturen wie Moleküle oder Personen in einem sozialen Netzwerk zu modellieren, sind Graphen die naheliegende Datenstruktur. Dabei repräsentieren die Knoten die Objekte und die Kanten die Beziehungen zwischen diesen. Eine zentrale Frage ist, inwieweit zwei Graphen ähnlich zueinander sind. Ein fundamentales Problem zur Darstellung von Graphinstanzen in Lernalgorithmen ist der Entwurf von Merkmalen, die invariant bezüglich der Nummerierung der Knoten sind. Im Bereich des Machine Learning gibt es im Wesentlichen zwei Ansätze: der Entwurf von Graph-Kernelfunktionen oder der Entwurf einer expliziten Merkmalsabbildung. Eine Übersicht zum ersten Ansatz ist beispielsweise in [41] zu finden. Kondor, Shervashidze und Borgwardt verfolgen in [29] den zweiten Ansatz, indem sie einen algebraischen Zugang zu Grapheninvarianten mit Hilfe der Gruppenalgebra $\mathbb{C}S_n$ beschreiben. In diesem Abschnitt wird dieser Zugang skizziert und dabei erläutert, wie man auf kanonische Weise auf das Problem der Fouriertransformation S_{n-2} - bzw. S_{n-k} -invarianter Signale stößt.

Im Folgenden beschränken wir uns auf schleifenfreie Graphen mit Knotenmenge $[1, n]$ und reellwertigen Kantengewichten. Die gewichteten Adjazenzmatrizen derartiger Graphen korrespondieren dann zur Menge $\mathbb{R}_0^{n \times n}$ aller reellwertigen $n \times n$ -Matrizen mit verschwindender Diagonalen. Ein Graphenisomorphismus wird durch eine Knotenpermutation $\pi \in S_n$ beschrieben und führt zur neuen Adjazenzmatrix A^π mit $A_{\pi(i), \pi(j)}^\pi = A_{ij}$, für alle $i, j \in [1, n]$. Gesucht sind Grapheninvarianten $c: \mathbb{R}_0^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $\pi \in S_n$ gilt

$$c(A) = c(A^\pi).$$

Zunächst wird einem $A \in \mathbb{R}_0^{n \times n}$ das Element

$$f_A := \sum_{\sigma \in S_n} A_{\sigma(n), \sigma(n-1)} \sigma \in \mathbb{R}S_n$$

zugeordnet. Wir betrachten f_A genauer: Zunächst ist $f_A(\sigma) = A_{\sigma(n), \sigma(n-1)}$. Damit ergibt sich

$$f_A = \sum_{\sigma \in S_n} f_A(\sigma) \sigma = \sum_{i \neq j} A_{ij} \Sigma_{ij},$$

wobei Σ_{ij} die Indikatorfunktion der Menge aller $\sigma \in S_n$ mit $\sigma(n) = i$ und $\sigma(n-1) = j$ ist. Da für alle $\pi \in S_{n-2}$ stets $f_A(\sigma) = f_A(\sigma \circ \pi)$ gilt, ist für eine beliebige Permutation

6 S_{n-k} -invariante Signale auf der S_n

$\pi_{ij} \in S_n$ mit $\pi_{ij}(n) = i$ und $\pi_{ij}(n-1) = j$

$$\Sigma_{ij} = \pi_{ij} \sum_{\pi \in S_{n-2}} \pi = (n-2)! \cdot \pi_{ij} * \iota_{S_{n-2}},$$

wobei – zur Erinnerung – $\iota_{S_{n-2}}$ das arithmetische Mittel aller Elemente in S_{n-2} bezeichnet. Insgesamt ist

$$f_A = \sum_{i \neq j} A_{ij} \cdot (n-2)! \cdot \pi_{ij} * \iota_{S_{n-2}}$$

ein S_{n-2} -rechtsinvariantes Signal.

Dies wird wie folgt verallgemeinert. Für $k < n$ bezeichne \mathcal{I}_n^k die Menge aller injektiven k -Tupel mit Einträgen aus $[1, n]$. Zu $g = (g_{ij}) \in \mathbb{R}_0^{k \times k}$ und $A \in \mathbb{R}_0^{n \times n}$ ist die Indikatorfunktion $\mu_{A,g}: \mathcal{I}_n^k \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$\mu_{A,g}(v_1, \dots, v_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } g_{i,j} \leq A_{v_i, v_j}, \forall i \neq j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Die Funktion $\mu_{A,g}$ gibt an, ob g ein Teilgraph von A an der Position (v_1, \dots, v_k) ist. Zu $g = (g_{ij}) \in \mathbb{R}_0^{k \times k}$, $A \in \mathbb{R}_0^{n \times n}$ und $\sigma \in S_n$ definiere

$$f_{A,g}(\sigma) := \mu_{A,g}(\sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(n-k+1)).$$

Die Funktion $f_{A,g}$ ist S_{n-k} -rechtsinvariant, d.h. für alle $\pi \in S_{n-k}$ gilt $f_{A,g}(\sigma) = f_{A,g}(\sigma \circ \pi)$. Eine Alternative lässt sich auch für die Indikatorfunktion $\nu_{A,g}: \mathcal{I}_n^k \rightarrow \{0, 1\}$ konstruieren, die wie folgt definiert ist:

$$\nu_{A,g}(v_1, \dots, v_k) := \begin{cases} 1 & \text{falls } g_{i,j} = A_{v_i, v_j}, \forall i \neq j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion gibt an, ob g ein induzierter Teilgraph von A an der Position (v_1, \dots, v_k) ist. Der folgende Satz liefert die Grundlage zur Konstruktion von Graphenvarianten.

Satz 6.6. *Sind $f, h \in \mathbb{C}S_n$ und bezeichnet D_α eine unitäre irreduzible Darstellung von S_n zur Partition α von n , so gilt für beliebige Permutationen $\pi \in S_n$*

$$D_\alpha(h)^\dagger \cdot D_\alpha(f) = D_\alpha(\pi h)^\dagger \cdot D_\alpha(\pi f).$$

Beweis. Wegen der Unitarität von D_α und $D_\alpha(\pi h)^\dagger = (D_\alpha(\pi) \cdot D_\alpha(h))^\dagger = D_\alpha(h)^\dagger \cdot D_\alpha(\pi)^\dagger$

sowie $D_\alpha(\pi f) = D_\alpha(\pi) \cdot D_\alpha(f)$ folgt

$$\begin{aligned} D_\alpha(\pi h)^\dagger \cdot D_\alpha(\pi f) &= D_\alpha(h)^\dagger \cdot D_\alpha(\pi)^\dagger \cdot D_\alpha(\pi) \cdot D_\alpha(f) \\ &= D_\alpha(h)^\dagger \cdot D_\alpha(f) \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Als unitäre Darstellung wird die Youngsche Orthogonalform verwendet. Eine spezielle Eigenschaft der Youngschen Orthogonalform ist, dass sämtliche Darstellungsmatrizen reellwertig sind. Bilden nun $g_1, \dots, g_m \in \mathbb{R}_0^{k \times k}$ eine Bibliothek kleiner Graphen (sog. *Graphlets*), so ist nach Satz 6.6 jede Komponente

$$[\omega^\alpha(f_{A,g_i})^\top \cdot \omega^\alpha(f_{A,g_j})]_{a,b} \quad (6.3)$$

eine Grapheninvariante, wobei a und b alle α -Standardtableaux durchlaufen. Die Funktion

$$(\alpha, i, j) \mapsto \omega^\alpha(f_{A,g_i})^\top \cdot \omega^\alpha(f_{A,g_j})$$

heißt das *Graphlet-Spektrum* von A bezüglich der Graphlet-Bibliothek (g_1, \dots, g_m) . Dabei durchläuft α alle Partitionen von n und $1 \leq i \leq j \leq m$. Eine alternative Konstruktion ergibt sich bei Verwendung der Indikatorfunktion $\nu_{A,g}$.

Wie in Abschnitt 6.1 beschrieben, sind S_{n-k} -invariante Funktionen „bandbegrenzt“. Genauer ist

$$\omega_n(f_{A,g}) \in \bigoplus_{\ell=0}^k \bigoplus_{\beta+\ell} \mathbb{C}(d_{(n-\ell,\beta)}, \Gamma_{(n-\ell,\beta),k}).$$

Zur Berechnung des Graphlet-Spektrums kann eine Variante des FFT-Algorithmus in Kapitel 5 verwendet werden, in der nur die relevanten Partitionen und Spalten in den diversen Matrizen berücksichtigt werden.

6.5 Das Quadratic Assignment Problem

Das Quadratic Assignment Problem (QAP) ist eines der zentralen NP-schweren Probleme in der Kombinatorischen Optimierung. Diverse bekannte Probleme wie beispielsweise das Graphpartitionierungsproblem, das Problem der maximalen Clique oder das Problem des Handlungsreisenden lassen sich als Spezialfälle des QAP formulieren. Eine Übersicht zum QAP ist unter anderem in [6] zu finden. In [27] entwickelt Kondor einen Branch-and-

6 S_{n-k} -invariante Signale auf der S_n

Bound Algorithmus, der auf der DFT auf S_n basiert. Im Folgenden wird dieser Ansatz zusammenfassend dargestellt.

Seien $A, A' \in \mathbb{R}_0^{n \times n}$ gewichtete Adjazenzmatrizen zweier schleifenfreier Graphen mit n Knoten. Die *Zielfunktion* $f_{A,A'}: S_n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_{A,A'}(\sigma) := \sum_{i,j=1}^n A_{\sigma(i),\sigma(j)} A'_{i,j} \quad (6.4)$$

des QAP misst die „Übereinstimmung“ zweier Graphen nach Knotenumbenennung mittels der Permutation σ . Das QAP ist die Bestimmung von

$$\operatorname{argmax}_{\sigma \in S_n} f_{A,A'}(\sigma).$$

Für jedes A ist die *Graphfunktion* $f_A: S_n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $f_A(\sigma) := A_{\sigma(n),\sigma(n-1)}$, eine S_{n-2} -rechtsinvariante Funktion, siehe Abschnitt 6.4 zum Graphlet-Spektrum. Die Menge aller $\pi \in S_n$ mit $\pi(n) = i$ und $\pi(n-1) = j$ enthält $(n-2)!$ Elemente. Demnach gilt:

$$\begin{aligned} f_{A,A'}(\sigma) &= \sum_{i,j=1}^n A_{\sigma(i),\sigma(j)} A'_{i,j} = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\pi \in S_n} A_{\sigma\pi(n),\sigma\pi(n-1)} A'_{\pi(n),\pi(n-1)} \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\pi \in S_n} f_A(\sigma\pi) f_{A'}(\pi). \end{aligned}$$

Zu einer Graphfunktion $g_A: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ sei $g_A^-: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g_A^-(\sigma) := g_A(\sigma^{-1})$. Die Funktion g_A^- ist S_{n-2} -linksinvariant. Es folgt:

$$\begin{aligned} f_{A,A'}(\sigma) &= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\pi \in S_n} f_A(\sigma\pi) f_{A'}(\pi) = \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\pi \in S_n} f_A(\sigma\pi^{-1}) f_{A'}(\pi^{-1}) \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \sum_{\pi \in S_n} f_A(\sigma\pi^{-1}) f_{A'}^-(\pi) \\ &= \frac{1}{(n-2)!} \cdot (f_A * f_{A'}^-)(\sigma). \end{aligned}$$

M.a.W. lässt sich die Zielfunktion des QAP als Faltung einer S_{n-2} -rechtsinvarianten mit einer S_{n-2} -linksinvarianten Funktion darstellen. Kondor verwendet die Youngsche Orthogonalform, um die Funktion $f_{A,A'}$ in den Spektralbereich abzubilden. Durch die Orthogo-

nalität gilt $\omega^\alpha(g_A^-) = \omega^\alpha(g_A)^\top$ für alle $\alpha \vdash n$. Es folgt zusammen mit Abschnitt 6.1:

$$\omega_n(f_{A,A'}) = \frac{1}{(n-2)!} \cdot \omega_n(f_A) \cdot \omega_n(f_{A'})^\top = \frac{1}{(n-2)!} \cdot \bigoplus_{\substack{\alpha \vdash n \\ \alpha_1 \geq n-2}} \omega^\alpha(f_A) \cdot \omega^\alpha(f_{A'})^\top.$$

Abbildung 12 veranschaulicht die Struktur der relevanten Blockdiagonalmatrizen. Die Zielfunktion $f_{A,A'}$ ist „bandbegrenzt“. Zudem ist für $\alpha \in \{(n-2, 2), (n-2, 1, 1)\}$ die Matrix $\omega^\alpha(f_A) \cdot \omega^\alpha(f_{A'})^\top$ ein dyadisches Produkt.

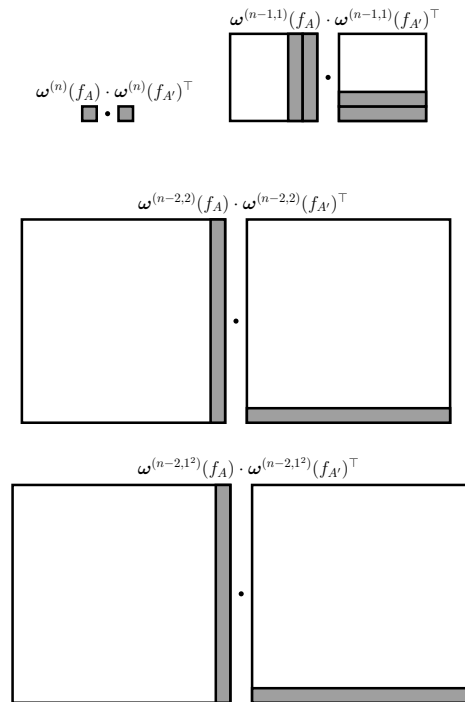


Abbildung 12: Illustration von $\omega^{(\alpha)}(f_A) \cdot \omega^{(\alpha)}(f_{A'})^\top$ für $\alpha \vdash n$ mit $\alpha_1 \geq n-2$. Mit grau wurden die Bereiche gekennzeichnet, die von Null verschieden sein können.

Es werden im Folgenden die Grundlagen des Branch-and-Bound Verfahrens skizziert. Die Elemente

$$g_{\underline{j}} := g_{j_n, n} g_{j_{n-1}, n-1} \cdots g_{j_{k+1}, k+1}, \quad 1 \leq j_i \leq i,$$

bilden nach Satz 4.2 (2) eine Transversale der Linksnebenklassen von S_k in S_n . Es lässt sich ein Baum der Linksnebenklassen derart konstruieren, dass die Knoten zu $g_{\underline{j}} S_k$ korrespondieren. Ein Elternknoten $g_{\underline{j}} S_k$ ist über eine (ungerichtete) Kante zu einem Kindknoten $g_{\underline{\ell}} S_{k-1}$ verbunden, falls $g_{\underline{\ell}} S_{k-1} \subset g_{\underline{j}} S_k$. Insgesamt gibt es k solcher Kindknoten. Nach Satz 4.2 (3) lässt sich jede Permutation $\pi \in S_n$ darstellen als $\pi = g_{j_n, n} g_{j_{n-1}, n-1} \cdots g_{j_2, 2}$ mit einem eindeutig bestimmten (j_n, \dots, j_2) . Demnach befinden sich in den Blättern sämtliche

6 S_{n-k} -invariante Signale auf der S_n

Elemente der S_n .

Das Branch-and-Bound Verfahren von Kondor maximiert die Zielfunktion des QAP, indem dieser so konstruierte Baum untersucht wird. Als Grundlagen zur Formulierung des Verfahrens dienen zwei Punkte. Erstens werden eingeschränkte Zielfunktionen betrachtet. Gemäß der Zerlegung

$$S_n = \bigsqcup_{\underline{j} \in J_k^n} g_{\underline{j}} S_k$$

kann das Signal $f_{A,A'}$ wie folgt aufgeschrieben werden:

$$f_{A,A'} = \sum_{\sigma \in S_n} f_{A,A'}(\sigma) \sigma = \sum_{\underline{j} \in J_k^n} \sum_{\pi \in S_k} f_{A,A'}(g_{\underline{j}} \pi) g_{\underline{j}} \pi = \sum_{\underline{j} \in J_k^n} g_{\underline{j}} \sum_{\pi \in S_k} f_{A,A'}(g_{\underline{j}} \pi) \pi = \sum_{\underline{j} \in J_k^n} g_{\underline{j}} f_{\underline{j}}^k,$$

wobei $f_{\underline{j}}^k: S_k \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist durch $f_{\underline{j}}^k(\pi) := f_{A,A'}(g_{\underline{j}} \pi)$. Die Funktion $f_{\underline{j}}^k$ ist mit dem entsprechenden Knoten $g_{\underline{j}} S_k$ des Baumes assoziiert. Zweitens wird eine zugehörige obere Schranke

$$\max_{\pi \in S_k} f_{\underline{j}}^k(\pi) \leq B(\omega_k(f_{\underline{j}}^k)) \quad (6.5)$$

betrachtet. Das Branch-and-Bound Verfahren basiert auf der Tiefensuche, bei dem stets der Zweig mit der größten Schranke verfolgt wird. Falls für einen aktuellen Kandidaten σ_{best} gilt, dass $B(\omega_k(f_{\underline{j}}^k)) \leq f_{A,A'}(\sigma_{\text{best}})$, wird der entsprechende Zweig verworfen. Das Verfahren von Kondor wird ausschließlich im Spektralbereich ausgeführt. Hierzu kann eine Variante des iFFT Algorithmus in Abschnitt 5.3 verwendet werden. Die Blockstruktur der Vektoren in den S_k -Leveln bei der iFFT, siehe Abbildungen 9 und 33, entspricht dem weiter oben konstruierten Baum. Ausgehend von der Wurzel im S_n -Level

$$\omega_n(f_{A,A'}) = \frac{1}{(n-2)!} \cdot \bigoplus_{\substack{\alpha \vdash n \\ a_1 \geq n-2}} \omega^\alpha(f_A) \cdot \omega^\alpha(f_{A'})^\top$$

werden nur die Blöcke berechnet, die sich über das Branch-and-Bound Verfahren ergeben. Es zeigt sich, dass die eingeschränkten Zielfunktionen $f_{\underline{j}}^k$ ebenfalls „bandbegrenzt“ sind.

Satz 6.7. *Wie in (6.4) sei $f_{A,A'}: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ die Zielfunktion des QAP. Dann ist*

$$\omega_k(f_{\underline{j}}^k) = \bigoplus_{\alpha \vdash k} \omega^\alpha(f_{\underline{j}}^k)$$

nur für $\alpha \in \{(k), (k-1, 1), (k-2, 2), (k-2, 1, 1)\}$ von Null verschieden. Des Weiteren ist

$\omega^\alpha(f_j^k)$ für $\alpha \in \{(k-2, 2), (k-2, 1, 1)\}$ ein dyadisches Produkt.

Beweis. Siehe Kapitel 4 in [27]. □

Demnach lässt sich das Verfahren in den Blöcken weiter auf die Matrizen zu den relevanten Partitionen einschränken. Als Grundlage für die Berechnung der erwähnten oberen Schranke in Formel (6.5) dient der folgende Satz.

Satz 6.8 (Kondor). *Für eine Funktion $f: S_n \rightarrow \mathbb{R}$ gilt*

$$\max_{\sigma \in S_n} f(\sigma) \leq \frac{1}{n!} \sum_{\alpha \vdash n} d_\alpha \|\omega^\alpha(f)\|_*,$$

wobei mit $\|\cdot\|_*$ die Spurnorm einer Matrix (Summe der Singulärwerte einer Matrix) bezeichnet wird.

Beweis. Siehe Kapitel 5 in [27]. □

7 FFT von S_{n-1} -invarianten Signalen auf der S_n

In den folgenden Kapiteln werden gewisse Algorithmen wieder verwendet. Diese Algorithmen haben verschiedene Ausgabevektoren, die separat adressiert werden müssen. Der j -te Ausgabevektor des i -ten Algorithmus wird bezüglich der Eingabeparameter p_1, \dots, p_k und dem Index q mit

$$\text{ALG}_i(p_1, \dots, p_k; q)_j$$

bezeichnet. Zudem spielt hierbei die kontragrediente Version der Youngschen Seminormalform eine wichtige Rolle. Es wird bei der Matrix

$$J_{\kappa, d} = \begin{pmatrix} d^{-1} & 1 \\ q_d^2 & -d^{-1} \end{pmatrix}, \quad q_d := \frac{\sqrt{d^2 - 1}}{d},$$

die im 2. Fall bei Konstruktion der Youngschen Seminormalform auftaucht, ausgenutzt, dass bei Position (1,2) eine Eins steht.

In dem nächsten Abschnitt werden die in [12] vorgestellten Resultate zur Berechnung der FFT von S_{n-1} -invarianten Signalen auf der S_n zusammengefasst. Sie werden an späterer Stelle von Bedeutung sein.

7.1 Verwendung der Youngschen Seminormalform

Gegeben sei ein S_{n-1} -rechtsinvariantes Signal a in $\mathbb{C}S_n$. Gemäß Satz 4.2 (1) gibt es eine disjunkte Zerlegung der S_n in die Linksnebenklassen von der Untergruppe S_{n-1} :

$$S_n = \bigsqcup_{j=1}^n g_{j,n} S_{n-1},$$

wobei $g_{j,n} = (j, j+1, \dots, n)$. Demnach kann das Signal a wie folgt aufgeschrieben werden:

$$a = \left(\sum_{j=1}^n r_j \cdot g_{j,n} \right) * \iota_{S_{n-1}}, \quad \text{wobei} \quad r_j := |S_{n-1}| \cdot a(g_{j,n}).$$

Das idempotente Element $\iota_{S_{n-1}} = |S_{n-1}|^{-1} \sum_{h \in S_{n-1}} h$ korrespondiert zur Einsdarstellung $\kappa^{(n-1)}$ von $\mathbb{C}S_{n-1}$. Wegen des Verzweigungssatzes (Satz 4.8) ist $\kappa^\alpha(\iota_{S_{n-1}}) = 0$, wenn α

7 FFT von \mathcal{S}_{n-1} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

nicht gleich (n) oder $(n-1, 1)$ ist. Demzufolge gilt:

$$\boldsymbol{\kappa}_n(a) = \boldsymbol{\kappa}^{(n)}(a) \oplus \boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(a) \oplus \bigoplus_{\alpha \neq (n), (n-1,1)} \mathbf{0}_{d_\alpha \times d_\alpha}.$$

Mit $\boldsymbol{\kappa}^{(n)} \downarrow \mathbb{C}\mathcal{S}_{n-1} = \boldsymbol{\kappa}^{(n-1)}$ folgt $\boldsymbol{\kappa}^{(n)}(a) = \sum_{j=1}^n r_j$. Aufgrund des Verzweigungssatzes (Satz 4.8) und der Last Letter Sequence gilt, dass $\boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)} \downarrow \mathbb{C}\mathcal{S}_{n-1} = \boldsymbol{\kappa}^{(n-2,1)} \oplus \boldsymbol{\kappa}^{(n-1)}$. Demnach folgt $\boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(\iota_{\mathcal{S}_{n-1}}) = \mathbf{0}_{n-2 \times n-2} \oplus (1)$ und wir erhalten

$$\boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(a) = \sum_{j=1}^n r_j \cdot \boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(g_{j,n}) \cdot (\mathbf{0}_{n-2 \times n-2} \oplus (1)). \quad (7.1)$$

Für alle j kann nur die letzte Spalte in $r_j \cdot \boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(g_{j,n}) \cdot (\mathbf{0}_{n-2 \times n-2} \oplus (1))$ von Null verschieden sein. Folglich trifft dies auch auf $\boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(a)$ zu. Entsprechend brauchen wir während der Berechnung nur die Veränderungen der letzten Spalte in jedem Summanden zu verfolgen. Mit $y \in \mathbb{C}^{n-1}$ bezeichnen wir die letzte Spalte von $\boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(a)$ und formulieren die Gleichung (7.1) wie folgt um:

$$y = \sum_{j=1}^n r_j \cdot \boldsymbol{\kappa}^{(n-1,1)}(g_{j,n}) \cdot \begin{bmatrix} 0_{n-2} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Sei $\ell := n-1$ und mit $\tau_i := (i, i+1)$ gilt für den Zykel $g_{j,\ell+1} = (j, j+1, \dots, \ell+1) = \tau_j \tau_{j+1} \dots \tau_\ell$. Für die Matrix-Vektor-Multiplikation in jedem Summanden verwenden wir das bekannte Schema:

$$\boldsymbol{\kappa}^{(\ell,1)}(\tau_j) \cdot \left(\dots \left(\boldsymbol{\kappa}^{(\ell,1)}(\tau_{\ell-1}) \cdot \left(\boldsymbol{\kappa}^{(\ell,1)}(\tau_\ell) \cdot \begin{bmatrix} 0_{\ell-1} \\ 1 \end{bmatrix} \right) \right) \dots \right). \quad (7.3)$$

Zur effizienten Berechnung jedes Summanden brauchen wir die genaue Kenntnis der Matrizen $\boldsymbol{\kappa}^{(\ell,1)}(\tau_k)$. Der folgenden Satz liefert die Struktur dieser Matrizen.

Satz 7.1. Für $\alpha = (\ell, 1) \vdash \ell+1$ gilt

$$\boldsymbol{\kappa}^{(\ell,1)}(\tau_k) = \begin{cases} \mathbf{I}_{k-2} \oplus J_{\kappa,k} \oplus \mathbf{I}_{\ell-k} & \text{falls } k \in [2, \ell] \\ (-1) \oplus \mathbf{I}_{\ell-1} & \text{falls } k = 1. \end{cases}$$

Beweis. Mit Hilfe der Hakenformel ergibt sich $d_{(\ell,1)} = \ell$. In Abbildung 13 ist $\ell+1$ mit ■

kodiert.

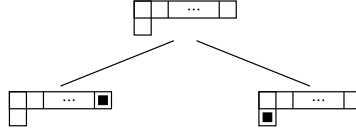


Abbildung 13: Last Letter Sequence Baum von $(\ell, 1) \vdash \ell + 1$ bis zum S_ℓ -Level.

Der rechte Teilbaum korrespondiert zur Einsdarstellung von $\mathbb{C}S_\ell$. Wenn die Box mit \blacksquare gelöscht wird, wird sich im linken Teilbaum das illustrierte Verzweigungsverhalten für die Partition $(\ell - 1, 1)$ von ℓ wiederholen. Demzufolge ist die Last Letter Sequence $T_1 < \dots < T_\ell$ spezifiziert durch $T_k(2, 1) = k + 1$. Aus der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform folgt die Behauptung. \square

Wir definieren die Vektoren $r := (r_1, \dots, r_n)^\top$ und $C_j := \kappa^{(n-1,1)}(g_{j,n}) \cdot (0, \dots, 0, 1)^\top$. Sei $C = (C_1, \dots, C_n) = (C_{ij}) \in \mathbb{C}^{n-1 \times n}$. Dann ist $y = C \cdot r$. Mit Satz 7.1 und einer Induktion entlang der Spalten (beginnend mit der letzten) folgt mit $\varepsilon_d := -1/d$

$$C = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_3 & \varepsilon_3 & \varepsilon_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & & \\ \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-2} & \varepsilon_{n-2} & 1 & 0 \\ \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1} & \varepsilon_{n-1} & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

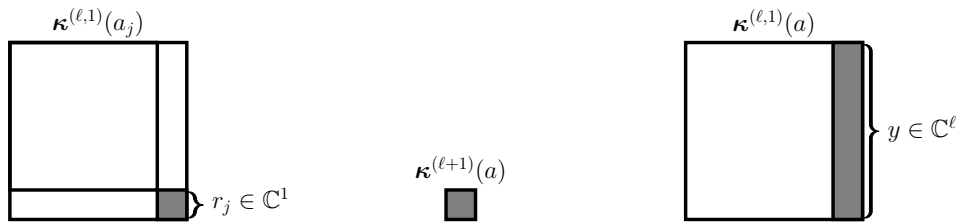


Abbildung 14: Struktur von $\kappa^{(\ell,1)}(a_j)$ (links), $\kappa^{(\ell+1)}(a)$ (mitte) and $\kappa^{(\ell,1)}(a)$ (rechts).

Abbildung 14 veranschaulicht die Situation zur Auswertung von $\kappa_{\ell+1}(a)$. Zur Berechnung von $y = C \cdot r$ und $x := \kappa^{(\ell+1)}(a)$ wird der Algorithmus ALG_1 verwendet.

Erweitert man die Matrix C in (7.4) um eine Zeile, die nur aus Einsen besteht, entspricht das Result der Matrix $\mathbf{D}_{\kappa,n,1}$. Insgesamt wurde das folgende Resultat gezeigt.

Algorithmus $\text{ALG}_1(r_1, \dots, r_{\ell+1}; \ell)$

```

1:  $s = r_1$ 
2:  $y_1 = r_2 - s$ 
3: for  $j = 2$  to  $\ell$  do
4:    $s = s + r_j$ 
5:    $y_j = r_{j+1} - \frac{1}{j}s$ 
6: end for
7:  $x = s + r_{\ell+1}$ 
8: Output 1:  $y = (y_1, \dots, y_\ell)^\top$ 
9: Output 2:  $x$ 

```

Satz 7.2 (Clausen, Kakarala). *Die Auswertung der Fouriertransformation S_{n-1} -invarianter Funktionen auf der symmetrischen Gruppe S_n (auf Basis der Youngschen Seminormalform) ist mit $2n - 2$ Additionen und $n - 2$ Multiplikationen durchführbar. Insbesondere gilt $L_\infty(S_n|S_{n-1}) \leq L_\infty(\mathbf{D}_{\kappa,n,1}) \leq 3n - 4$.*

7.2 Verwendung der Youngschen Orthogonalform

Die DFT basierend auf der Youngschen Orthogonalform ergibt sich über geringfügige Modifikationen gegenüber der DFT basierend auf der Youngschen Seminormalform. Zunächst werden mit ALG_1 die Matrizen $\kappa^{(\ell+1)}(a)$ und $\kappa^{(\ell,1)}(a)$ berechnet, siehe Abbildung 14. Im Anschluss wird Korollar 4.13 zur Berechnung von $\omega^{(\ell+1)}(a)$ und $\omega^{(\ell,1)}(a)$ verwendet. Da $\kappa^{(\ell+1)} = \omega^{(\ell+1)}$, bleibt die Betrachtung von $\omega^{(\ell,1)}(a)$ übrig.

Analog zu Satz 7.1 erhält man $\omega^{(\ell,1)}(\tau_k) = \mathbf{I}_{k-2} \oplus J_{\omega,k} \oplus \mathbf{I}_{\ell-k}$, falls $k \in [2, \ell]$, und $\omega^{(\ell,1)}(\tau_1) = (-1) \oplus \mathbf{I}_{\ell-1}$. Nach Korollar 4.13 gibt es eine bis auf einen nichtnegativen Skalar eindeutig bestimmte invertierbare Diagonalmatrix $\Delta^{(\ell,1)}$, so dass $\omega^{(\ell,1)}(a) = \Delta^{(\ell,1)} \cdot \kappa^{(\ell,1)}(a) \cdot (\Delta^{(\ell,1)})^{-1}$. Mit dem Ansatz $\Delta^{(\ell,1)} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ und der Normalisierung $\delta_\ell = 1$ ergibt sich durch eine einfache Rechnung, dass $\delta_{k-1}/\delta_k = q_k$ für $k \in [2, \ell]$. Es folgt induktiv $\delta_k = \prod_{d=k+1}^{\ell} q_d$ für $k \in [1, \ell]$. Durch einen einfachen Induktionsbeweis folgt

Lemma 7.3. *Seien p und q positive ganze Zahlen und $p \leq q$, dann gilt*

$$\prod_{d=p}^q q_d = \sqrt{\frac{(p-1) \cdot (q+1)}{p \cdot q}}.$$

7.2 Verwendung der Youngschen Orthogonalform

Demnach gilt für $k \in [1, \ell]$

$$\delta_k = \sqrt{\frac{k \cdot (\ell + 1)}{(k + 1) \cdot \ell}}.$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega^{(\ell,1)}(a) &= \Delta^{(\ell,1)} \cdot \kappa^{(\ell,1)}(a) \cdot (\Delta^{(\ell,1)})^{-1} \\ &= \Delta^{(\ell,1)} \cdot [\mathbf{0}_{\ell \times (\ell-1)} | y] \cdot (\Delta^{(\ell,1)})^{-1} = \Delta^{(\ell,1)} \cdot \kappa^{(\ell,1)}(a). \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\omega^{(\ell,1)}(a)$ aus $\kappa^{(\ell,1)}(a)$ ist also mit $\ell - 1$ ($= n - 2$) zusätzlichen Skalarmultiplikationen durchführbar (vgl. Satz 6.4).

Der Ansatz in [23] zur Verwendung der Youngschen Orthogonalform machte eine Vorverarbeitung und Zwischenspeicherung von Skalaren notwendig. Diese entfallen komplett durch die Verwendung der Matrix $\Delta^{(\ell,1)}$ und der expliziten Angabe der Diagonalelemente.

8 FFT von \mathcal{S}_{n-2} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

wobei $\mathbf{Z} := \bigoplus_{\beta: \beta_1 < n-2} \mathbf{0}_{d_\beta \times d_\beta}$ eine direkte Summe von Nullmatrizen ist. Für die Berechnung der relevanten Blöcke bezüglich der Partitionen α von n mit $\alpha_1 \geq n-2$ gilt

$$\kappa^\alpha(a) = \sum_{j=1}^n \kappa^\alpha(\tau_j) \cdot \kappa^\alpha(\tau_{j+1}) \cdot \dots \cdot \kappa^\alpha(\tau_{n-1}) \cdot \kappa^\alpha(a_j). \quad (8.3)$$

Mit dem bekannten Multiplikationsschema (5.2) werden die Matrix-Matrix-Multiplikationen in den Summanden durchgeführt. Zur effizienten Berechnung der relevanten Blöcke wird die genaue Kenntnis der Matrizen $\kappa^\alpha(\tau_k)$ benötigt. Der Fall $\alpha = (n)$ entspricht der Einsdarstellung, so dass $\kappa^{(n)}(\tau_k) = (1)$ für alle k . Der Fall $\alpha = (n-1, 1)$ ist mit Satz 7.1 erfasst. Der folgende Satz liefert die genaue Struktur der Matrizen $\kappa^\alpha(\tau_k)$ für $\alpha = (n-2, 2)$ und $\alpha = (n-2, 1, 1)$. Zur Erinnerung: die Matrix $J_{\kappa, d}$ ist definiert durch

$$J_{\kappa, d} := \begin{pmatrix} d^{-1} & 1 \\ q_d^2 & -d^{-1} \end{pmatrix}.$$

Satz 8.1.

(a) Für $\alpha = (m, 2) \vdash m+2 > 4$ ist

$$\kappa^{(m,2)}(\tau_k) = \begin{cases} \mathbf{I}_{m(m-3)/2} \oplus J_{\kappa, m-1} \otimes \mathbf{I}_{m-1} \oplus (1) & \text{falls } k = m+1 \\ \kappa^{(m-1,2)}(\tau_k) \oplus \kappa^{(m,1)}(\tau_k) & \text{falls } k \in [1, m]. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = (2, 2)$ ist

$$\begin{aligned} \kappa^{(2,2)}(\tau_1) &= \kappa^{(2,1)}(\tau_1) = (-1) \oplus (1) \\ \kappa^{(2,2)}(\tau_2) &= \kappa^{(2,1)}(\tau_2) = J_{\kappa, 2} \\ \kappa^{(2,2)}(\tau_3) &= (-1) \oplus (1). \end{aligned}$$

(b) Für $\alpha = (m, 1, 1) \vdash m+2 > 4$ ist

$$\kappa^{(m,1,1)}(\tau_k) = \begin{cases} \mathbf{I}_{m(m-3)/2+1} \oplus J_{\kappa, m+1} \otimes \mathbf{I}_{m-1} \oplus (-1) & \text{falls } k = m+1 \\ \kappa^{(m-1,1,1)}(\tau_k) \oplus \kappa^{(m,1)}(\tau_k) & \text{falls } k \in [1, m]. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = (2, 1, 1)$ ist

$$\begin{aligned} \kappa^{(2,1,1)}(\tau_1) &= (-1) \oplus \kappa^{(2,1)}(\tau_1) = (-1) \oplus (-1) \oplus (1) \\ \kappa^{(2,1,1)}(\tau_2) &= (-1) \oplus \kappa^{(2,1)}(\tau_2) = (-1) \oplus J_{\kappa,2} \\ \kappa^{(2,1,1)}(\tau_3) &= J_{\kappa,3} \oplus (-1). \end{aligned}$$

Beweis. (a) Der Fall $k = m + 1$ und $m > 2$ folgt aus der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform und der Betrachtung des Last Letter Sequence Baums von $\alpha = (m, 2)$ bis zu dem Level, in dem bereits $m + 2$ (codiert durch \blacksquare) und $m + 1$ (codiert durch \bullet) eingefügt wurden, siehe Abbildung 15, links.

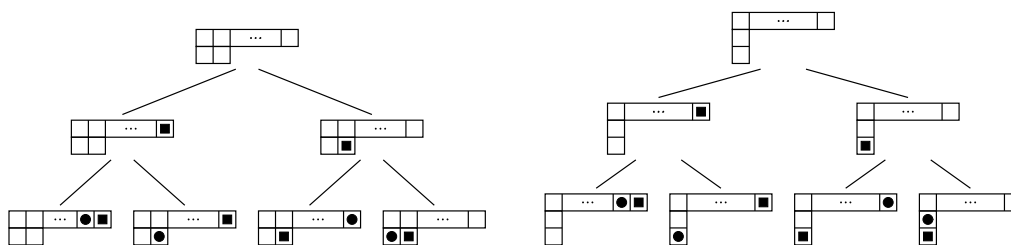


Abbildung 15: $(m, 2)$ -LLS-Baum (links) & $(m, 1, 1)$ -LLS-Baum (rechts) bis zum S_m -Level.

Auf dem S_m -Level ergeben sich vier Teilbäume T_1, T_2, T_3 und T_4 (von links nach rechts gesehen). Die Standardtableaux (= Blätter) in Teilbaum T_1 haben die Zahlen $m + 1$ und $m + 2$ in Zeile 1 stehen. Bei den Standardtableaux von T_4 stehen diese Zahlen hingegen in Zeile 2. Die Standardtableaux in T_2 haben die Zahl $m + 2$ in Zeile 1 stehen, während $m + 1$ in Zeile 2 sich befindet. Bei T_3 sind gegenüber T_2 die Rollen von $m + 2$ und $m + 1$ vertauscht. Nach der Hakenformel ergeben sich für die Grade, die mit der Anzahl der Blätter in den Teilbäumen übereinstimmen: $d_{(m-2,2)} = m(m - 3)/2$, $d_{(m-1,1)} = m - 1$ sowie $d_{(m)} = 1$. Bei sämtlichen Blättern der Teilbäume T_2 und T_3 haben $m + 1$ und $m + 2$ die Axialdistanz $m - 1$. Zudem haben diejenigen Blätter in diesen beiden Teilbäumen, die durch Vertauschen von $m + 1$ und $m + 2$ auseinander hervorgehen, einen Abstand von $m - 1$ in der Last Letter Sequence. Aus der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform ergibt sich damit die Behauptung im Fall $k = m + 1$ und $m > 2$. Die Gültigkeit der Rekursion im Fall $k \in [1, m]$ folgt aus dem Verzweigungssatz (Satz 4.8) und der Last Letter Sequence. Der Fall $m = 2$ ergibt sich direkt aus der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform.

(b) Analog zu (a), mit Abbildung 15, rechts. □

Für die effiziente Berechnung der Summanden in (8.3) ist die Struktur der rechts stehenden

8 FFT von S_{n-2} -invarianten Signalen auf der S_n

Faktoren $\kappa^\alpha(a_j)$ von entscheidender Bedeutung, da diese Matrizen weitgehend Null sind, siehe Abbildung 16.

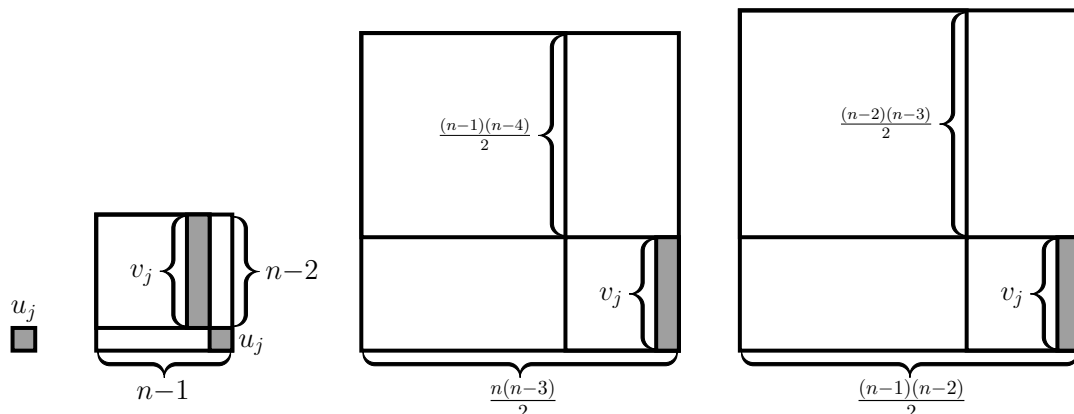


Abbildung 16: Struktur von $\kappa^\alpha(a_j)$ für $\alpha = (n), (n-1, 1), (n-2, 2)$ und $(n-2, 1, 1)$. Zusätzlich sind für ein festes j die drei grauen Vektoren in \mathbb{C}^{n-2} gleich. Entsprechendes gilt für die zwei 1×1 Blöcke.

In Abschnitt 8.2 werden wir einen Algorithmus für die Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$ bei S_{n-2} -invarianten Signalen entwerfen und im Detail beschreiben. Da die Algorithmen für die Auswertung von $\kappa^{(n-2,1,1)}$ und $\kappa^{(n-1,1)}$ ähnlich zu unserem Algorithmus für die Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$ sind, werden wir diese nur kurz in Abschnitt 8.3 skizzieren.

8.2 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$

Mit obiger Notation ist das Hauptziel dieses Abschnitts einen effizienten Algorithmus zur Berechnung von

$$\kappa^{(m,2)}(a) = \sum_{j=1}^{m+2} \kappa^{(m,2)}(g_{j,m+2}) \kappa^{(m,2)}(a_j). \quad (8.4)$$

für $m := n-2 > 2$ zu beschreiben. Um dieses Ziel zu erreichen, müssen wir uns zunächst die Berechnung von $\kappa^{(m,2)}(a)$ im Detail ansehen (Unterabschnitt 8.2.1). Nach der Herleitung von grundlegenden Konzepten in Unterabschnitt 8.2.2 werden wir einen Algorithmus für die schnelle Auswertung von $\kappa^{(m,2)}(a)$ in Unterabschnitt 8.2.3 angeben.

Hinweis: In dem ganzen Abschnitt 8.2 sind die definierten Strukturen abhängig vom Parameter m . Um die Notation so einfach wie möglich zu halten, werden wir auf die Angabe von einem weiteren Index m verzichten.

8.2.1 Die Auswertung von $\kappa^{(m,2)}$ im Detail

Da nur die letzte Spalte von $\kappa^{(m,2)}(a_j)$ möglicherweise von Null verschieden ist, trifft dies auch auf $\kappa^{(m,2)}(a)$ zu. Daher verfolgen wir bei der Berechnung von $\kappa^{(m,2)}(a)$ nur, wie sich die letzte Spalte von $\kappa^{(m,2)}(a_j)$ im Verlauf der Berechnung von $\kappa^{(m,2)}(g_{j,m+2}a_j)$ entlang der Formel

$$\kappa^{(m,2)}(\tau_j) \cdot (\dots (\kappa^{(m,2)}(\tau_m) \cdot (\kappa^{(m,2)}(\tau_{m+1}) \cdot \kappa^{(m,2)}(a_j))) \dots). \quad (8.5)$$

verändert. Es bezeichne $\nu_j^i \in \mathbb{C}^{(m+2)(m-1)/2}$ die letzte Spalte der Matrix im i -ten Multiplikationsschritt der Formel (8.5), wobei $i \in [0, m+2-j]$. Respektive bezeichnet für $i=0$ der Vektor

$$\nu_j^0 := \left(\underbrace{0, \dots, 0}_{\frac{(m+1)(m-2)}{2}}, \underbrace{v_{j,1}, \dots, v_{j,m}}_{=: v_j^\top} \right)^\top \quad (8.6)$$

die letzte Spalte von $\kappa^{(m,2)}(a_j)$ und für $i \in [1, m+2-j]$ definieren wir

$$\nu_j^i := \kappa^{(m,2)}(\tau_{m+2-i}) \cdot \nu_j^{i-1}.$$

Des Weiteren bezeichnen wir mit $y \in \mathbb{C}^{(m+2)(m-1)/2}$ die letzte Spalte der Matrix $\kappa^{(m,2)}(a)$. Mit obiger Notation und der Formel (8.4) kann der Vektor y wie folgt berechnet werden:

$$y = \sum_{j=1}^{m+2} \nu_j^{m+2-j}. \quad (8.7)$$

Bevor wir die Summanden genauer analysieren und die Formel (8.7) umformulieren, betrachten wir zunächst ein Beispiel.

Beispiel 8.2. Abbildung 17 veranschaulicht die Berechnung eines Summanden in (8.7) für $m=4$ und $j=3$.

In diesem Beispiel weisen die Linien in den Vektoren auf eine Partitionierung aller Vektoren in drei Teilvektoren hin. Der Berechnungsvorgang folgt einem gewissen Muster. Wir erkennen Kopierprozesse, Multiplikationen gewisser Komponenten mit dem selben Skalar und diverse Matrix-Vektor-Multiplikationen. Diese Beobachtungen werden wir nun im Detail beschreiben.

Allgemein legen die rekursive Struktur der Aussagen des Satzes 8.1 und Abbildung 18

8 FFT von \mathcal{S}_{n-2} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

$$\begin{array}{c}
 \nu_3^3 \\
 \left[\begin{array}{c} -v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ \hline \kappa^{(3,1)}(\tau_3) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot v_{3,1} \\ -\frac{1}{2} \cdot v_{3,2} \\ v_{3,3} \end{pmatrix} \\ \hline \kappa^{(4,1)}(\tau_3 \cdot \tau_4) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot v_{3,1} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{3,2} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{3,3} \\ v_{3,4} \end{pmatrix} \end{array} \right] \xleftarrow{\kappa^{(4,2)}(\tau_3)} \begin{array}{c}
 \nu_3^2 \\
 \left[\begin{array}{c} v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ \hline -\frac{1}{2} \cdot v_{3,1} \\ -\frac{1}{2} \cdot v_{3,2} \\ v_{3,3} \\ \hline \kappa^{(4,1)}(\tau_4) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot v_{3,1} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{3,2} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{3,3} \\ v_{3,4} \end{pmatrix} \end{array} \right] \xleftarrow{\kappa^{(4,2)}(\tau_4)} \begin{array}{c}
 \nu_3^1 \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \hline v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \\ \hline -\frac{1}{3} \cdot v_{3,1} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{3,2} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{3,3} \\ v_{3,4} \end{array} \right] \xleftarrow{\kappa^{(4,2)}(\tau_5)} \begin{array}{c}
 \nu_3^0 \\
 \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline v_{3,1} \\ v_{3,2} \\ v_{3,3} \\ v_{3,4} \end{array} \right]
 \end{array}$$

Abbildung 17: Illustration wichtiger Aspekte einer effizienten Berechnung der Summanden ν_j^i .

eine Unterteilung der Vektoren ν_j^i , $i \in [0, m + 2 - j]$, in Teilvektoren $b_j^{h,i} \in \mathbb{C}^{h+1}$, $h \in [1, m - 1]$, nahe. Die Spaltenvektoren $b_j^{h,i}$ behalten die Einträge von ν_j^i zu den Indizes in $[(\binom{h+1}{2}, (\binom{h+2}{2}) - 1]$. Demnach ist $b_j^{1,i} := (\nu_{j,1}^i, \nu_{j,2}^i)^\top$, $b_j^{2,i} := (\nu_{j,3}^i, \nu_{j,4}^i, \nu_{j,5}^i)^\top$ und schlussendlich beinhaltet $b_j^{m-1,i}$ die letzten m Einträge von ν_j^i .

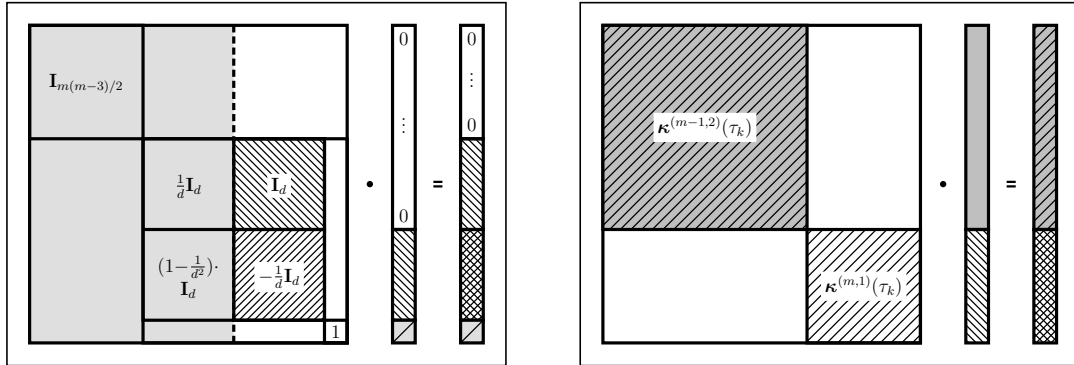


Abbildung 18: Links: Illustration von $\kappa^{(m,2)}(\tau_{m+1}) \cdot \nu$, wobei ν ein Vektor ist, bei dem höchstens die letzten m Einträge von Null verschieden sind; $d := m - 1$. Rechts: Illustration von $\kappa^{(m,2)}(\tau_k) \cdot x$, wobei $k \in [1, m]$ und x ein beliebiger Vektor passenden Formats ist.

Ein effizientes Verfahren zur Berechnung von ν_j^i aus ν_j^{i-1} basiert auf dem folgenden Satz.

Satz 8.3. *Mit obiger Notation gilt:*

- (a) $b_j^{h,i}$ ist der Nullvektor für alle $h \in [1, m - i - 2]$.
- (b) Nachdem $b_j^{m-1,0} := v_j$ (siehe (8.6)) gesetzt und alle anderen $b_j^{h,i}$ mit Nullvektoren initialisiert wurden, resultiert der Vektor ν_j^i aus ν_j^{i-1} durch das Anwenden der folgenden Fälle:

Fall 1 : $h+i = m-1$. Hier wird $b_j^{h,i}$ durch die ersten $h+1$ Einträge von $b_j^{h+1,i-1}$ ersetzt.

Fall 2 : $h+i = m$. Hier wird $b_j^{h,i}$ durch $b_j^{h,i-1}$ ersetzt. Anschließend werden die ersten h Einträge mit $-1/h$ multipliziert.

Fall 3 : $h+i \in [m+1, m+i-1]$. Hier wird $b_j^{h,i}$ durch $\kappa^{(h+1,1)}(\tau_{m+2-i}) \cdot b_j^{h,i-1}$ ersetzt.

Beweis. Beide Behauptungen werden durch Induktion über i bewiesen. Für $i = 0$ ist Behauptung (a) wahr, siehe Gleichung (8.6). Bei Behauptung (b) tritt keiner der angegebenen Fälle ein. Als Nächstes betrachten wir den Fall $i = 1$. Nach Definition und Satz 8.1 erhalten wir

$$\nu_j^1 = \kappa^{(m,2)}(\tau_{m+1}) \cdot \nu_j^0 = (\mathbf{I}_{m(m-3)/2} \oplus J_{\kappa, m-1} \otimes \mathbf{I}_{m-1} \oplus (1)) \cdot \nu_j^0.$$

Höchstens die letzten m Einträge ν_j^0 sind von Null verschieden, demzufolge können höchstens $b_j^{m-1,1}$ und $b_j^{m-2,1}$ von Null verschiedene Vektoren sein. Anders ausgedrückt ist $b_j^{h,1}$ der Nullvektor für alle $h \in [1, m-3]$ in Übereinstimmung mit (a). Ferner folgt wegen

$$\begin{bmatrix} b_j^{m-2,1} \\ b_j^{m-1,1} \end{bmatrix} = (J_{\kappa, m-1} \otimes \mathbf{I}_{m-1} \oplus (1)) \cdot \begin{bmatrix} 0_{m-1} \\ b_j^{m-1,0} \end{bmatrix},$$

dass $b_j^{m-1,1} = ((-\frac{1}{m-1}\mathbf{I}_{m-1}) \oplus (1)) \cdot b_j^{m-1,0}$. Demnach beschreibt Fall 2 (mit $h = m-1$) korrekt den Übergang von $b_j^{m-1,0}$ zum Vektor $b_j^{m-1,1}$. Schließlich ist der Block bei Position (1, 2) in $J_{\kappa, m-1} \otimes \mathbf{I}_{m-1}$ gleich \mathbf{I}_{m-1} . Diese Matrix verursacht eine Kopieroperation, wie sie in Fall 1 (mit $h = m-2$) beschrieben wird. Der Induktionsanfang ist vollständig beschrieben, da Fall 3 für $i = 1$ nicht eintritt. Für eine Veranschaulichung des Induktionsanfangs siehe Abbildung 18 (links).

Für den Induktionsschritt $i-1 \rightarrow i$, wobei $i \geq 2$, verwenden wir für jedes $k \in [3, m]$ die Gleichung

$$\kappa^{(m,2)}(\tau_k) = \kappa^{(k-1,2)}(\tau_k) \oplus \bigoplus_{\ell=k}^m \kappa^{(\ell,1)}(\tau_k),$$

die durch eine Induktion aus Satz 8.1 (a) folgt. Sei nun $k = m+2-i$. Falls wir beide Seiten in dieser Gleichung mit dem Vektor ν_j^{i-1} multiplizieren, sehen wir, dass der Teil des sich ergebenden Vektors ν_j^i bezüglich $\bigoplus_{\ell=m+2-i}^m \kappa^{(\ell,1)}(\tau_{m+2-i})$ korrekt durch Fall 3 beschrieben ist. Der Teil bezüglich $\kappa^{(m+1-i,2)}(\tau_{m+2-i})$ ist korrekt durch Fall 1 und Fall 2 erfasst. Damit ist der Satz bewiesen. \square

Seien h und j fest gewählt. Die Reihenfolge, in der die obigen Fälle auftreten, ist beschränkt

8 FFT von \mathcal{S}_{n-2} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

durch die nachstehenden Folgen der Fälle: 1 und 123^q , wobei q eine nicht negative ganze Zahl ist. Ob und wann diese Fälle auftreten, hängt von j ab. Sobald der 1. Fall im ℓ -ten Schritt eingetreten ist, ist eine anschließende Modifikation aller Vektoren $b_j^{h,i}$, $i \in [\ell, m+2-j]$, unabhängig von anderen Teilvektoren. Des Weiteren kann der 1. Fall anders interpretiert werden. Hier wird der Vektor $b_j^{h,i}$ durch die ersten $h+1$ Einträge von $b_j^{m-1,0} = (v_{j,1}, \dots, v_{j,m})^\top = v_j$ ersetzt, siehe Gleichung (8.6) und Tabelle 3.

Für ein fest gewähltes h und $i \in [\ell, m+2-j]$ stellt sich die Frage, für welche j die verschiedenen Fälle bei $b_j^{h,i}$ auftreten können. Fall 1: Hier ist $i = m-1-h$ und mit $i \leq m+2-j$ erhalten wir $j \leq h+3$. Als direkte Konsequenz erhalten wir $j \leq h+2$ im Fall 2 und $j \leq h+1$ im Fall 3.

Beispiel 8.4. Wir veranschaulichen die Situation für $n = 6$ und $m = n-2 = 4$. Sei $\nu_j^0 = (0, 0, 0, 0, 0, v_{j,1}, v_{j,2}, v_{j,3}, v_{j,4})^\top$ die letzte Spalte von $\kappa^{(4,2)}(a_j)$. Mit den Beobachtungen von oben erhalten wir die Resultate in Tabelle 3.

Tabelle 3: Diese Tabelle ist spaltenweise von rechts nach links zu lesen. Die i -te Spalte beinhaltet den Vektor ν_j^i in strukturierter Form.

5	4	3	2	1	0	i
(1, 2)	(2, 3)	(3, 4)	(4, 5)	(5, 6)	(6, 6)	τ_k
$\kappa^{(2,1)}(\tau_1) \cdot b_j^{1,4}$	$\kappa^{(2,1)}(\tau_2) \cdot b_j^{1,3}$	$\begin{pmatrix} -v_{j,1} \\ v_{j,2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$b_j^{1,i}$
$\kappa^{(3,1)}(\tau_1) \cdot b_j^{2,4}$	$\kappa^{(3,1)}(\tau_2) \cdot b_j^{2,3}$	$\kappa^{(3,1)}(\tau_3) \cdot b_j^{2,2}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot v_{j,1} \\ -\frac{1}{2} \cdot v_{j,2} \\ v_{j,3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ v_{j,3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$b_j^{2,i}$
$\kappa^{(4,1)}(\tau_1) \cdot b_j^{3,4}$	$\kappa^{(4,1)}(\tau_2) \cdot b_j^{3,3}$	$\kappa^{(4,1)}(\tau_3) \cdot b_j^{3,2}$	$\kappa^{(4,1)}(\tau_4) \cdot b_j^{3,1}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \cdot v_{j,1} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{j,2} \\ -\frac{1}{3} \cdot v_{j,3} \\ v_{j,4} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} v_{j,1} \\ v_{j,2} \\ v_{j,3} \\ v_{j,4} \end{pmatrix}$	$b_j^{3,i}$
[1, 1]	[1, 2]	[1, 3]	[1, 4]	[1, 5]	[1, 6]	tritt auf bei j in

Eine schematische Version von Tabelle 3 befindet sich in Abbildung 19 (oben). Die angedeuteten Kopierprozesse und die Bildung von Teilvektoren können ebenfalls in dem Last Letter Sequence Baum abgelesen werden, siehe Abbildung 19 (unten). Falls im S_m -Level des Last Letter Sequence Baumes ein Knoten N_ℓ durch das Vertauschen von $m+1$ und $m+2$ im Knoten N_k resultiert, sind die zugehörigen Teilbäume isomorph und miteinander verbunden. Das Gewicht dieser Verbindung ist nach Definition die Axialdistanz zwischen diesen

8.2 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$

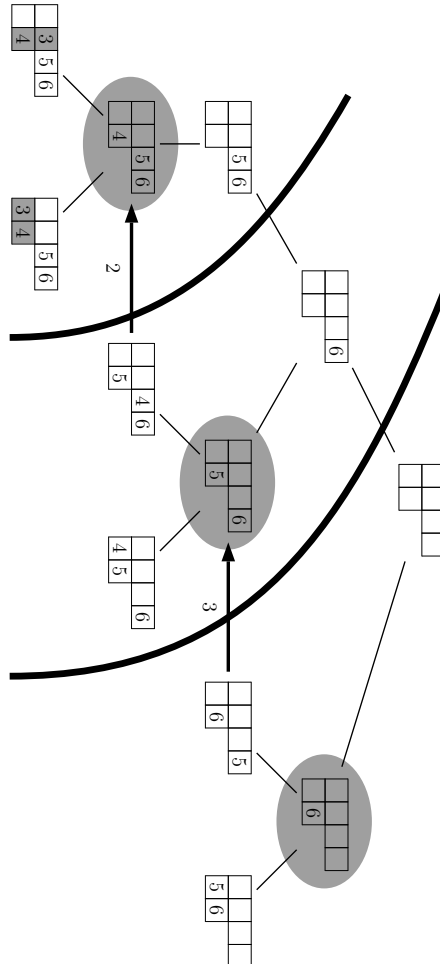
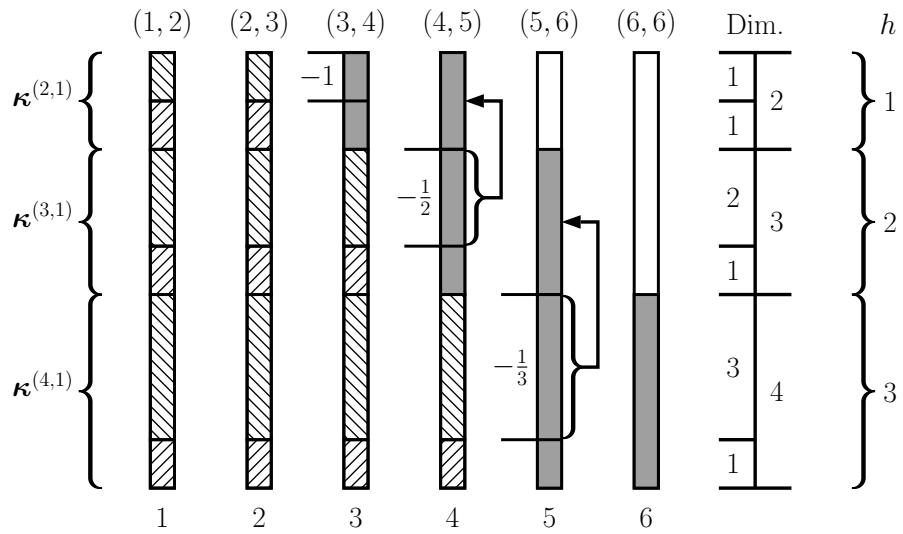


Abbildung 19: Oben: Schematische Version von Tabelle 3. Unten: Rotierter, gekürzter Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (4, 2)$, sich wiederholende Teile werden nicht gezeigt.

8 FFT von \mathcal{S}_{n-2} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

beiden Knoten. Ein Vergleich zwischen dem Last Letter Sequence Baum mit der schematischen Version von Tabelle 3 zeigt eine enge Verbindung zwischen (partiellen) Last Letter Sequence Bäumen, Kopierprozessen und der Bildung von Teilvektoren. Gemäß vorangegangener Diskussion kann die Berechnung entlang der Formel (8.5) restrukturiert werden. Genauer und bezogen auf unser Beispiel werden die Einträge Schritt für Schritt zeilenweise von oben nach unten und in jeder Zeile von rechts nach links berechnet. Dadurch können wir die partiellen Kopier- und Modifikationsoperationen berücksichtigen.

Wir sind nun vorbereitet die Formel (8.7) zur Berechnung von y (die letzte Spalte von $\kappa^{(m,2)}(a)$) umzuformulieren. Analog zur Aufteilung der Vektoren ν_j^i in Teilvektoren $b_j^{h,i} \in \mathbb{C}^{h+1}$ für $h \in [1, m-1]$ unterteilen wir y in Teilvektoren $y^h \in \mathbb{C}^{h+1}$. Beispielsweise ist $y^1 := (y_1, y_2)^\top$ und $y^2 := (y_3, y_4, y_5)^\top$. Für $h \in [1, m]$ sei $P_h := [\mathbf{I}_h | 0_{h \times (m-h)}] \in \mathbb{C}^{h \times m}$. Jeder Teilvektor y^h lässt sich nun wie folgt berechnet werden:

$$y^h = \sum_{j=1}^{h+3} b_j^{h,m+2-j} = \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{h+1} b_j^{h,m+2-j}}_{\text{Fall 3}} \right) + \underbrace{b_{h+2}^{h,m-h}}_{\text{Fall 2}} + \underbrace{b_{h+3}^{h,m-h-1}}_{\text{Fall 1}}.$$

Wir wenden Satz 8.3 auf die drei Fälle an und erhalten

$$\begin{aligned} b_j^{h,m+2-j} &= \kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+2}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} \cdot P_h \cdot v_j \\ v_{j,h+1} \end{bmatrix}, \\ b_{h+2}^{h,m-h} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} \cdot P_h \cdot v_{h+2} \\ v_{h+2,h+1} \end{bmatrix}, \text{ und} \\ b_{h+3}^{h,m-h-1} &= P_{h+1} \cdot v_{h+3}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$y^h = \left(\sum_{j=1}^{h+2} \kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+2}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} \cdot P_h \cdot v_j \\ v_{j,h+1} \end{bmatrix} \right) + P_{h+1} \cdot v_{h+3}. \quad (8.8)$$

Wir können nun den Vektor y blockweise berechnen. Im Folgenden werden wir den arithmetischen Aufwand zur Berechnung von y^h betrachten. Zunächst wird für $h \geq 2$ die Multiplikation des Vektors $P_h \cdot v_j$ mit dem Skalar $-\frac{1}{h}$, $j \in [1, h+2]$ ausgeführt. Dies erfordert $(h+2) \cdot h$ Multiplikationen. Als Nächstes multiplizieren wir in jedem Summanden die Matrix $\kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+2})$ mit dem sich ergebenden Vektor nach dem bekannten Multiplikationsschema (siehe (5.2)). Nach Satz 7.1 wissen wir, dass $\kappa^{(h+1,1)}(\tau_k) = \mathbf{I}_{k-2} \oplus J_{\kappa,k} \oplus \mathbf{I}_{h+1-k}$,

falls $k \in [2, h+1]$, und $\kappa^{(h+1,1)}(\tau_k) = (-1) \oplus \mathbf{I}_h$, falls $k = 1$. Die Multiplikation von $J_{\kappa,k}$ mit einem 2-dimensionalen Vektor ist mit 3 Multiplikationen und 2 Additionen realisierbar. Für $j \in [2, h+2]$ ist die Berechnung der Matrix-Vektor-Multiplikation im j -ten Summanden mit $2 \cdot (h+2-j)$ Additionen und $3 \cdot (h+2-j)$ Multiplikationen durchführbar. Für die Fälle $j = 1$ und $j = 2$ ist die Anzahl der Additionen und Multiplikationen gleich. Schließlich werden alle Summanden, inklusive dem Vektor $P_{h+1} \cdot v_{h+3}$, mit $(h+2) \cdot (h+1)$ Additionen aufsummiert. Insgesamt kann jeder Teilvektor y^h , $h \geq 2$, mit $(h+2) \cdot h + 3h + 3 \cdot \sum_{j=2}^{h+2} (h+2-j) = \frac{5}{2}h^2 + \frac{13}{2}h$ Multiplikationen und $(h+2) \cdot (h+1) + 2h + 2 \cdot \sum_{j=2}^{h+2} (h+2-j) = 2h^2 + 6h + 2$ Additionen berechnet werden. Die Berechnung von y^1 ist durchführbar mit 10 Additionen und 6 Multiplikationen. Demnach ist der arithmetische Aufwand zur Berechnung des Vektors $y = (y^1{}^\top, y^2{}^\top, \dots, y^{m-1}{}^\top)^\top$ kubisch in n .

8.2.2 Grundlegende Konzepte für die schnelle Auswertung von $\kappa^{(m,2)}$

Wir werden die Struktur der Formel zur Berechnung von y^h weiter verfeinern. Im Wesentlichen ist es möglich, verschiedene Skalare auszuklammern, diverse Teile von vorher berechneten Teilvektoren in y wiederzuverwenden, und den schnellen Algorithmus zur Auswertung der Fouriertransformation von S_{n-1} -invarianten Funktionen wieder anzuwenden. Als Erstes teilen wir den linken Summanden in der Formel (8.8) in zwei Teile auf, so dass wir den Skalar $1/h$ ausklammern können. Um dies durchzuführen, definieren die folgenden Vektoren für $h \in [0, m]$

$$\mathbb{C}^{h+1} \ni s^h := \sum_{j=1}^{h+2} \kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+2}) \cdot \begin{bmatrix} P_h \cdot v_j \\ 0 \end{bmatrix}$$

und für $h \in [0, m-1]$

$$\mathbb{C}^{h+1} \ni r^h := \sum_{j=1}^{h+2} \kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+2}) \cdot \begin{bmatrix} 0_h \\ v_{j,h+1} \end{bmatrix}.$$

Insbesondere ist $s^0 = 0$ und $r^0 = v_{2,1} - v_{1,1}$. Es folgt sofort für $h \in [1, m-1]$

$$y^h = -\frac{1}{h} \cdot s^h + r^h + P_{h+1} \cdot v_{h+3}.$$

Als Nächstes betrachten wir genauer den Vektor s_h , um einen engen Zusammenhang zwi-

8 FFT von \mathbf{S}_{n-2} -invarianten Signalen auf der \mathbf{S}_n

schen den Teilvektoren y^h and y^{h-1} festzustellen. Zunächst ist

$$s^h = \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{h+1} \kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+2}) \cdot \begin{bmatrix} P_h \cdot v_j \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{=:S} + \begin{bmatrix} P_h \cdot v_{h+2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Satz 7.1 (mit $\ell = k = h + 1$) und dem Verzweigungssatz von Young (Satz 4.8) gilt

$$\begin{aligned} S &= \sum_{j=1}^{h+1} \kappa^{(h+1,1)}(g_{j,h+1}) \cdot \kappa^{(h+1,1)}(\tau_{h+1}) \cdot \begin{bmatrix} P_h \cdot v_j \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{h+1} (\kappa^{(h+1,1)} \downarrow S_{h+1})(g_{j,h+1}) \cdot (\mathbf{I}_{h-1} \oplus J_{\kappa,h+1}) \cdot \begin{bmatrix} P_{h-1} \cdot v_j \\ v_{j,h} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{h+1} (\kappa^{(h,1)} \oplus \kappa^{(h+1)})(g_{j,h+1}) \cdot \begin{bmatrix} P_{h-1} \cdot v_j \\ \frac{1}{h+1} \cdot v_{j,h} \\ q_{h+1}^2 \cdot v_{j,h} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{h+1} (\kappa^{(h,1)}(g_{j,h+1}) \oplus (1)) \cdot \begin{bmatrix} P_{h-1} \cdot v_j \\ \frac{1}{h+1} \cdot v_{j,h} \\ q_{h+1}^2 \cdot v_{j,h} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Schlussendlich teilen wir den Summanden S in drei Teile auf, so dass wir die auftretenden Skalare ausklammern können. Wir erhalten die folgenden Teile:

$$\begin{aligned} 1. & \sum_{j=1}^{h+1} (\kappa^{(h,1)}(g_{j,h+1}) \oplus (1)) \cdot \begin{bmatrix} P_{h-1} \cdot v_j \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ 2. & \frac{1}{h+1} \cdot \sum_{j=1}^{h+1} (\kappa^{(h,1)}(g_{j,h+1}) \oplus (1)) \cdot \begin{bmatrix} 0_{h-1} \\ v_{j,h} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h+1} \cdot \begin{bmatrix} r^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ 3. & q_{h+1}^2 \cdot \sum_{j=1}^{h+1} (\kappa^{(h,1)}(g_{j,h+1}) \oplus (1)) \cdot \begin{bmatrix} 0_h \\ v_{j,h} \end{bmatrix} = q_{h+1}^2 \cdot \sum_{j=1}^{h+1} \begin{bmatrix} 0_h \\ v_{j,h} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Für $h \in [1, m]$ definieren wir die Summen

$$V^h := \sum_{j=1}^{h+1} v_{j,h}.$$

Für $h > 0$ kann der Vektor s^h mit der Formel

$$s^h = \begin{bmatrix} s^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h+1} \cdot \begin{bmatrix} r^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_h \cdot v_{h+2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_{h+1}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_h \\ V^h \end{bmatrix}$$

berechnet werden. Folglich können wir Teile bei der Berechnung des Vektors y^{h-1} wieder bei der Berechnung von y^h verwenden.

Die Situation für die Berechnung des Vektors r^h ist genau die gleiche wie für die Berechnung des ersten Ausgabevektors mit ALG_1 und der Eingabe $v_{j,h+1}$, $j \in [1, h+2]$, d.h.

$$r^h = \text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h+1)_1.$$

Die Summe V^h kann ebenfalls mit ALG_1 berechnet werden:

$$V^h = \sum_{j=1}^{h+1} v_{j,h} = \text{ALG}_1(v_{1,h}, \dots, v_{h+1,h}; h)_2.$$

8.2.3 Ein Algorithmus für die schnelle Auswertung von $\kappa^{(m,2)}$

Insgesamt erhalten wir den folgenden effizienten Algorithmus zur Berechnung des Vektors $y \in \mathbb{C}^{(m+2)(m-1)/2}$ (die letzte Spalte von $\kappa^{(m,2)}(a)$), siehe Abbildung 20. Die Eingabe für diesen Algorithmus besteht aus den Vektoren $v_j \in \mathbb{C}^m$, $j \in [1, m+2]$, siehe Abbildung 16. Tabelle 4 fasst den arithmetischen Aufwand zur Berechnung von y zusammen. Die Berechnung des Vektors y^h ist für $h \in [2, m-1]$ mit $6h+4$ Additionen und $3h+2$ Multiplikationen durchführbar. Insgesamt ist der Aufwand quadratisch in m und folglich in n . Verglichen mit dem kubischen Aufwand der naiven Methode am Ende von Abschnitt 8.2.1 ist der vorliegende Algorithmus eine wesentliche Verbesserung.

Algorithmus Berechnung von y

- 1: $s^0 = 0$
 - 2: $\text{ALG}_1(v_{1,1}, v_{2,1}; 1)$:
 - 3: $r^0 = \text{ALG}_1(v_{1,1}, v_{2,1}; 1)_1$
 - 4: $V^1 = \text{ALG}_1(v_{1,1}, v_{2,1}; 1)_2$
 - 5: **for** $h = 1$ **to** $m - 1$ **do**
 - 6: $s^h = \begin{bmatrix} s^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h+1} \cdot \begin{bmatrix} r^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_h \cdot v_{h+2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_{h+1}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_h \\ V^h \end{bmatrix}$
 - 7: $\text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h + 1)$:
 - 8: $r^h = \text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h + 1)_1$
 - 9: $V^{h+1} = \text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h + 1)_2$
 - 10: $y^h = -\frac{1}{h} \cdot s^h + r^h + P_{h+1} \cdot v_{h+3}$
 - 11: **end for**
 - 12: **Output:** $y = (y^{1\top}, y^{2\top}, \dots, y^{m-1\top})^\top$
-

Tabelle 4: Arithmetischer Aufwand zur Berechnung von y .

Berechnung von	# Add.	# Mult.	Parameter
$\text{ALG}_1(\dots; h + 1)$	$2h + 2$	h	$h \in [0, m - 1]$
s^1	1	2	
s^h	$2h$	$h + 1$	$h \in [2, m - 1]$
y^1	4	0	
y^h	$2(h + 1)$	$h + 1$	$h \in [2, m - 1]$

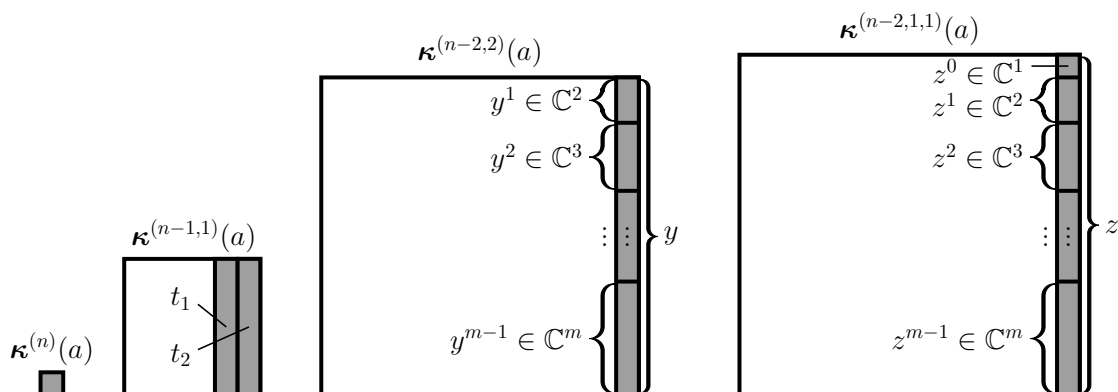


Abbildung 20: Mit grau wurden die Bereiche in $\kappa^\alpha(a)$ gekennzeichnet, die von Null verschieden sein können, $\alpha \in \{(n), (n - 1, 1), (n - 2, 2), (n - 2, 1, 1)\}$. Es ist $m := n - 2$.

8.3 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-2,1,1)}$ & $\kappa^{(n-1,1)}$

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, wie man einen effizienten Algorithmus zur Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$ bei S_{n-2} -invarianten Signalen herleiten kann. Wir setzen diese Herangehensweise fort, um eine effiziente Auswertung der übriggebliebenen, von Null verschiedenen Blöcke bezüglich der Partitionen $(n-2, 1, 1)$, $(n-1, 1)$ und (n) zu beschreiben. Weiterhin ist $m := n - 2$.

8.3.1 Effiziente Auswertung von $\kappa^{(m,1,1)}$

Die effiziente Berechnung von $\kappa^{(m,1,1)}(a)$, $m > 2$, basiert auf der Formel

$$z = \sum_{j=1}^{m+2} \kappa^{(m,1,1)}(\tau_j) \cdot \kappa^{(m,1,1)}(\tau_{j+1}) \cdot \dots \cdot \kappa^{(m,1,1)}(\tau_{m+1}) \cdot \zeta_j^0,$$

wobei $z, \zeta_j^0 \in \mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ jeweils die letzten Spalten von $\kappa^{(m,1,1)}(a)$ und $\kappa^{(m,1,1)}(a_j)$ bezeichnen. Nur die letzten m Einträge des Vektors ζ_j^0 können von Null verschieden sein. Nach Abbildung 16 stimmen die letzten m Einträge von ν_j^0 und ζ_j^0 überein und bilden den Vektor v_j . In Analogie zu der Unterteilung von y bei der Berechnung von $\kappa^{(m,2)}(a)$ wird nun z in Teilvektoren $z^h \in \mathbb{C}^{h+1}$ unterteilt. Folglich ist $z^0 := (z_1)^\top$, $z^1 := (z_2, z_3)^\top$, etc. Schlussendlich beinhaltet z^{m-1} die letzten m Einträge von z , siehe Abbildung 20 (rechts). Die Überlegungen für die effiziente Berechnung von $\kappa^{(m,2)}(a)$ in Abschnitt 8.2 können analog übernommen werden. Es gibt jedoch drei Unterschiede:

1. $d_{(m,1,1)} = d_{(m,2)} + 1$, d.h. die Dimension von $\kappa^{(m,1,1)}$ ist um 1 größer als bei $\kappa^{(m,2)}$.
2. Im Fall bei $(m, 2)$, wo die ersten h Einträge mit dem Skalar $-1/h$ multipliziert werden, ist nun im Fall bei $(m, 1, 1)$ der neue Skalar $-1/(h+2)$.
3. In dem gleichen Fall wird nun der Eintrag bei Position $h+1$ mit -1 multipliziert.

Der erste Unterschied hat zur Folge, dass es zusätzlich noch einen weiteren Teilvektor $z^0 \in \mathbb{C}^1$ gibt. Betrachtet man den Fall $m = 2$ in Satz 8.1 (b), so ist erkennbar, dass z^0 mit der ersten Komponente der Vektoren v_1, v_2 und v_3 berechnet werden kann:

$$z^0 = v_{1,1} - v_{2,1} + v_{3,1} = -r^0 + P_1 \cdot v_3. \quad (8.9)$$

Verglichen mit der Berechnung von y^h , wirken sich der zweite und dritte Unterschied bei

8 FFT von S_{n-2} -invarianten Signalen auf der S_n

der Berechnung von z^h , $h \in [1, m-1]$, wie folgt aus:

$$y^h = -\frac{1}{h} \cdot s^h + r^h + P_{h+1} \cdot v_{h+3} \quad \text{vs.} \quad z^h = -\frac{1}{h+2} \cdot s^h - r^h + P_{h+1} \cdot v_{h+3}.$$

8.3.2 Effiziente Auswertung von $\kappa^{(m+1,1)}$ & $\kappa^{(m+2)}$

Die Matrix $\kappa^{(m+1,1)}(a_j)$ hat zwei möglicherweise von Null verschiedene Spalten, siehe Abbildung 16. Deswegen können nur die letzten beiden Spalten in $\kappa^{(m+1,1)}(a)$ ebenfalls ungleich Null sein. Die Berechnung von $\kappa^{(m+1,1)}(a)$ wird unterteilt. Sei t_1 die vorletzte und t_2 die letzte Spalte der Matrix $\kappa^{(m+1,1)}(a)$. Der Vektor t_1 ist gleich s^m und kann wie folgt berechnet werden:

$$t_1 = \begin{bmatrix} s^{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{m+1} \cdot \begin{bmatrix} r^{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_m \cdot v_{m+2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_{m+1}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_m \\ V^m \end{bmatrix}.$$

Ein Vergleich der Abbildung 16 mit Abbildung 20 zeigt, dass t_2 und $\kappa^{(m+2)}(a)$ mit Algorithmus ALG_1 berechnet werden können.

8.4 Zusammenfassung und Aufwandsanalyse

Jeder Block im S_{n-1} -Level kann mit Algorithmus ALG_1 berechnet werden. Die Notation für die möglicherweise von Null verschiedenen Teile des S_{n-1} -Levels ist in Abbildung 16 zu finden. In Abschnitt 8.1 haben wir bereits gesehen, dass die Berechnung des S_{n-1} -Levels mit $n \cdot (2n-4)$ Additionen und $n \cdot (n-3)$ Multiplikationen durchführbar ist.

Die Berechnung des S_n -Levels wird in zwei Teile aufgeteilt. Abbildung 20 veranschaulicht die Notation. Der erste Teil berechnet die Vektoren $t_2 \in \mathbb{C}^{m+1}$ (die letzte Spalte in $\kappa^{(m+1,1)}(a)$) und $\kappa^{(m+2)}(a) \in \mathbb{C}^1$. Der zweite Teil berechnet die Vektoren $t_1 \in \mathbb{C}^{m+1}$ (die vorletzte Spalte in $\kappa^{(m+1,1)}(a)$), $y \in \mathbb{C}^{(m+2)(m-1)/2}$ (die letzte Spalte in $\kappa^{(m,2)}(a)$) und $z \in \mathbb{C}^{m(m+1)/2}$ (die letzte Spalte in $\kappa^{(m,1,1)}(a)$).

Der erste Teil wird mit Algorithmus ALG_1 berechnet. Nach Satz 7.2 ist dies mit $2n-2$ Additionen und $n-2$ Multiplikationen durchführbar. Der zweite Teil der Berechnung des S_n -Levels wird mit ALG_2 ausgeführt. Tabelle 5 fasst den arithmetischen Aufwand von ALG_2 zusammen. Für die Berechnung von ALG_2 reichen $4n^2 - 12n + 4$ Additionen und $2n^2 - 6n$ Multiplikationen aus.

Algorithmus Berechnung des S_n -Levels – Teil I

- 1: $\text{ALG}_1(u_1, \dots, u_n; n - 1)$:
 - 2: $t_2 = \text{ALG}_1(u_1, \dots, u_n; n - 1)_1$
 - 3: $\kappa^{(n)}(a) = \text{ALG}_1(u_1, \dots, u_n; n - 1)_2$
-

Algorithmus $\text{ALG}_2(v_1, \dots, v_{m+2}; m)$

- 1: $s^0 = 0$
 - 2: $\text{ALG}_1(v_{1,1}, v_{2,1}; 1)$:
 - 3: $r^0 = \text{ALG}_1(v_{1,1}, v_{2,1}; 1)_1$
 - 4: $V^1 = \text{ALG}_1(v_{1,1}, v_{2,1}; 1)_2$
 - 5: $z^0 = -r^0 + P_1 \cdot v_3$
 - 6: **for** $h = 1$ **to** $m - 1$ **do**
 - 7: $s^h = \begin{bmatrix} s^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h+1} \cdot \begin{bmatrix} r^{h-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_h \cdot v_{h+2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_{h+1}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_h \\ V^h \end{bmatrix}$
 - 8: $\text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h + 1)$:
 - 9: $r^h = \text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h + 1)_1$
 - 10: $V^{h+1} = \text{ALG}_1(v_{1,h+1}, \dots, v_{h+2,h+1}; h + 1)_2$
 - 11: $y^h = -\frac{1}{h} \cdot s^h + r^h + P_{h+1} \cdot v_{h+3}$
 - 12: $z^h = -\frac{1}{h+2} \cdot s^h - r^h + P_{h+1} \cdot v_{h+3}$
 - 13: **end for**
 - 14: $t_1 = \begin{bmatrix} s^{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{m+1} \cdot \begin{bmatrix} r^{m-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_m \cdot v_{m+2} \\ 0 \end{bmatrix} + q_{m+1}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_m \\ V^m \end{bmatrix}$
 - 15: **Output** 1: $y = (y^{1\top}, y^{2\top}, \dots, y^{m-1\top})^\top$
 - 16: **Output** 2: $z = (z^{0\top}, z^{1\top}, \dots, z^{m-1\top})^\top$
 - 17: **Output** 3: t_1
-

8 FFT von S_{n-2} -invarianten Signalen auf der S_n

Tabelle 5: Arithmetischer Aufwand von ALG_2 .

Berechnung von	# Add.	# Mult.	Parameter
$\text{ALG}_1(\dots; h+1)$	$2h+2$	h	$h \in [0, m-1]$
s^1	1	2	
s^h	$2h$	$h+1$	$h \in [2, m-1]$
y^1	4	0	
y^h	$2(h+1)$	$h+1$	$h \in [2, m-1]$
z^0	1	0	
z^h	$2(h+1)$	$h+1$	$h \in [1, m-1]$
t_1	$2m$	$m+1$	
\sum	$4m^2 + 4m - 4$	$2m^2 + 2m - 4$	$m = n - 2$

Insgesamt wurde das folgende Resultat gezeigt.

Satz 8.5. *Die Auswertung der Fouriertransformation S_{n-2} -invarianter Funktionen auf der symmetrischen Gruppe S_n (auf Basis der Youngschen Seminormalform) ist mit $6n^2 - 14n + 2$ Additionen und $3n^2 - 8n - 2$ Multiplikationen durchführbar. Insbesondere gilt $L_\infty(S_n|S_{n-2}) \leq L_\infty(\mathbf{D}_{\kappa, n, 2}) \leq 9n^2 - 22n$.*

Als Nächstes betrachten wir den Speicheraufwand. Da jedes $a_{j,k}$ in (8.1) ein Vielfaches von $\iota_{S_{n-2}}$ ist, das zur Einsdarstellung der S_{n-2} korrespondiert, umfasst die Eingabe $n \cdot (n-1)$ Werte im S_{n-2} -Level. Im S_{n-1} -Level werden für $j \in [1, n]$ nur die Einträge bezüglich $\kappa^{(n-1)}(a_j)$ (ein Wert pro j) und die letzte Spalte der Matrix $\kappa^{(n-2,1)}(a_j)$ ($n-2$ Werte pro j) gespeichert. Dies sind insgesamt $n \cdot (n-1)$ Werte. Bei der Berechnung des S_{n-1} -Levels werden Partialsummen in ALG_1 berechnet. Hierbei wird lediglich ein Wert zwischengespeichert. Im S_n -Level sind $1 + 2 \cdot (n-1) + \frac{n \cdot (n-3)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = n \cdot (n-1)$ Werte zu speichern, siehe die grauen Flächen in Abbildung 20. Für die Berechnung von s^h im zweiten Teil müssen die Vektoren s^{h-1} und r^{h-1} , sowie der Wert V^h zwischengespeichert sein. Algorithmus ALG_1 wird ebenfalls verwendet zur Berechnung des Vektors r^h und des Wertes V^{h+1} . Insgesamt ist $(n-2) + (n-2) + 1 + 1 = 2n-2$ eine obere Schranke für den Speicheraufwand bei der Berechnung des h -ten Schrittes und des Vektors t_1 in Algorithmus ALG_2 .

Satz 8.6. *Auf Basis der Youngschen Seminormalform kann die Fouriertransformation von S_{n-2} -invarianten Signalen auf $\mathbb{C}S_n$ mit einem Speicheraufwand von $2n^2 - 2$ berechnet werden.*

Das Verfahren wurde in C implementiert und auf einem Einsteiger-Notebook (CPU: Intel® Core™ i3-370M 2,4 GHz, 4 GB RAM) getestet. Die folgende Tabelle zeigt die Auswer-

8.5 Umrechnung in die Youngsche Orthogonalform

tungszeit (ohne die Zeit für das Einlesen der Eingabe) und die benötigten arithmetischen Operationen. Die Eingabe bestand aus einem reellwertigen Signal.

n	$[S_n : S_{n-2}]$	eval. (s)	arith. ops
1,000	999,000	0.033	8,978,000
2,000	3,998,000	0.139	35,956,000
4,000	15,996,000	0.602	143,912,000
5,000	24,995,000	0.910	224,890,000
6,000	35,994,000	1.340	323,868,000
8,000	63,992,000	3.300	575,824,000
11,000	120,989,000	5.243	1,088,758,000
15,000	224,985,000	11.674	2,024,670,000

Zusammen mit der unteren Schranke für die lineare Komplexität in Lemma 3.2 folgt

Satz 8.7. *Die Fouriertransformation von S_{n-2} -invarianten Signalen auf $\mathbb{C}S_n$ auf Basis der Youngschen Seminormalform benötigt $\Omega(n^2)$ arithmetische Operationen.*

8.5 Umrechnung in die Youngsche Orthogonalform

Wie in Abschnitt 7.2 wird Korollar 4.13 für die Auswertung der DFT basierend auf der Youngschen Orthogonalform verwendet. Hierzu werden zunächst die Matrizen $\kappa^\alpha(a)$ mit $\alpha_1 \geq n-2$, siehe Abbildung 20, wie oben beschrieben berechnet. Nach Korollar 4.13 gibt es eine bis auf einen nichtnegativen Skalar eindeutig bestimmte invertierbare Diagonalmatrix Δ^α , so dass $\omega^\alpha(a) = \Delta^\alpha \cdot \kappa^\alpha(a) \cdot (\Delta^\alpha)^{-1}$. Im Fall $\alpha = (n)$ gilt $\kappa^{(n)} = \omega^{(n)}$. Wir wissen bereits, dass $\Delta^{(n-1,1)} = \text{diag}(\delta_1, \dots, \delta_{n-1})$, wobei

$$\delta_k = \sqrt{\frac{k \cdot n}{(k+1) \cdot (n-1)}}$$

für $k \in [1, n-1]$, siehe Abschnitt 7.2. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} \omega^{(n-1,1)}(a) &= \Delta^{(n-1,1)} \cdot \kappa^{(n-1,1)}(a) \cdot (\Delta^{(n-1,1)})^{-1} \\ &= \Delta^{(n-1,1)} \cdot [\mathbf{0}_{(n-1) \times (n-3)} | t_1 | t_2] \cdot (\Delta^{(n-1,1)})^{-1} \\ &= \Delta^{(n-1,1)} \cdot [\mathbf{0}_{(n-1) \times (n-3)} | \delta_{n-2}^{-1} \cdot t_1 | 0_{n-1}] + \Delta^{(n-1,1)} \cdot [\mathbf{0}_{(n-1) \times (n-2)} | t_2] \\ &= \delta_{n-2}^{-1} \cdot \Delta^{(n-1,1)} \cdot [\mathbf{0}_{(n-1) \times (n-3)} | t_1 | 0_{n-1}] + \Delta^{(n-1,1)} \cdot [\mathbf{0}_{(n-1) \times (n-2)} | t_2] . \end{aligned}$$

Die Berechnung von $\omega^{(n-1,1)}(a)$ ist demnach mit $2 \cdot (n-2)$ zusätzlichen Multiplikationen durchführbar.

8 FFT von \mathbf{S}_{n-2} -invarianten Signalen auf der \mathbf{S}_n

Für den Fall $\alpha_1 = m (= n - 2)$, ergibt sich das Gegenstück von Satz 8.1 basierend auf der Youngschen Orthogonalform durch das Ersetzen der Matrix $J_{\kappa,k}$ durch die Matrix $J_{\omega,k}$ in diesem Satz. Im Fall $\alpha = (m, 2)$ ergeben sich mit dem Ansatz $\Delta^{(m,2)} = \bigoplus_{h=1}^{m-1} \text{diag}(\delta_{h,1}, \dots, \delta_{h,h+1})$ die folgenden Gleichungen:

$$\tau_k : \delta_{k-3,j} / \delta_{k-2,j} = q_{k-2}, \quad k \in [4, m+1], \quad j \in [1, k-2],$$

und

$$\tau_k : \delta_{h,k-1} / \delta_{h,k} = q_k, \quad k \in [2, m], \quad h \in [k-1, m-1].$$

Mit Lemma 7.3 und der Normalisierung $\delta_{m-1,m} = 1$ folgt induktiv, dass

$$\delta_{h,k} = \prod_{c=h+1}^{m-1} q_c \cdot \prod_{d=k+1}^m q_d = \sqrt{\frac{h \cdot k \cdot (m+1)}{(h+1) \cdot (k+1) \cdot (m-1)}}, \quad h \in [1, m-1], \quad k \in [1, h+1].$$

Mit $\delta_{m-1,m} = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega^{(m,2)}(a) &= \Delta^{(m,2)} \cdot \kappa^{(m,2)}(a) \cdot (\Delta^{(m,2)})^{-1} \\ &= \Delta^{(m,2)} \cdot \kappa^{(m,2)}(a). \end{aligned}$$

Im Fall $\alpha = (m, 1, 1)$ werden mit dem Ansatz $\Delta^{(m,1,1)} = \bigoplus_{h=0}^{m-1} \text{diag}(\delta'_{h,1}, \dots, \delta'_{h,h+1})$ die vorangegangenen Berechnungen wiederholt. Es ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\tau_k : \delta'_{k-3,j} / \delta'_{k-2,j} = q_k, \quad k \in [3, m+1], \quad j \in [1, k-2],$$

und

$$\tau_k : \delta'_{h,k-1} / \delta'_{h,k} = q_k, \quad k \in [2, m], \quad h \in [k-1, m-1].$$

Mit Lemma 7.3 und der Normalisierung $\delta'_{m-1,m} = 1$ folgt induktiv

$$\delta'_{h,k} = \prod_{c=h+1}^{m-1} q_{c+2} \cdot \prod_{d=k+1}^m q_d = \sqrt{\frac{(h+2) \cdot k \cdot (m+2)}{(h+3) \cdot (k+1) \cdot m}}, \quad h \in [0, m-1], \quad k \in [1, h+1].$$

Mit $\delta'_{m-1,m} = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \omega^{(m,1,1)}(a) &= \Delta^{(m,1,1)} \cdot \kappa^{(m,1,1)}(a) \cdot (\Delta^{(m,1,1)})^{-1} \\ &= \Delta^{(m,1,1)} \cdot \kappa^{(m,1,1)}(a). \end{aligned}$$

8.5 Umrechnung in die Youngsche Orthogonalform

Die Berechnung von $\omega^{(m,2)}(a)$ und $\omega^{(m,1,1)}(a)$ ist also mit $\frac{m^2+m-4}{2} + \frac{m^2+m-2}{2} = m^2 + m - 3$ zusätzlichen Multiplikationen durchführbar.

Insgesamt ergeben sich $m^2 + 3m - 3$ ($= n^2 - n - 5$) zusätzlichen Multiplikationen (vgl. Satz 6.4).

Der Ansatz in [23] zur Verwendung der Youngschen Orthogonalform machte eine Vorverarbeitung und Zwischenspeicherung von Skalaren notwendig. Der hier beschriebene Weg über die Verwendung der Matrizen Δ^α und der expliziten Angabe der Diagonalelemente führt zu weiteren Zeit- und Speicherplatzersparnissen.

9 FFT von S_{n-3} -invarianten Signalen auf der S_n

Es ist möglich, den Ansatz von Abschnitt 8.2 zu wiederholen, um einen effizienten Algorithmus zur Auswertung der diskreten Fouriertransformation S_{n-3} -invarianter Signale auf der S_n basierend auf der kontragredienten Version der Youngschen Seminormalform herzuleiten. Im Nachfolgenden werden wir die Resultate beschreiben.

Wir beginnen mit einer kurzen Ausführung zu der Berechnung des S_{n-2} -Levels und des S_{n-1} -Levels. Die Eingabewerte hängen mit der Einsdarstellung von $\mathbb{C}S_{n-3}$ zusammen. Ausgehend von den $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Werten im S_{n-3} -Level werden die $n \cdot (n-1)$ Blöcke des S_{n-2} -Levels mit Algorithmus ALG_1 berechnet. Dies ist möglich mit $n \cdot (n-1) \cdot (2n-6)$ Additionen und $n \cdot (n-1) \cdot (n-4)$ Multiplikationen. Ausgehend vom S_{n-2} -Level werden die n Blöcke des S_{n-1} -Levels, wie in Abschnitt 8.4 beschrieben, mit ALG_1 und ALG_2 berechnet. Der arithmetische Aufwand umfasst hier $n \cdot (4n^2 - 18n + 16)$ Additionen und $n \cdot (2n^2 - 9n + 5)$ Multiplikationen.

Der nachstehende Satz ist eine Fortsetzung von Satz 7.1 und von Satz 8.1. Er gibt die Matrizen $\kappa^\alpha(\tau_k)$ für $\alpha \in \{(n-3, 3), (n-3, 2, 1), (n-3, 1, 1, 1)\}$ im Detail an. Wir setzen $m := n-3$. In diesem Satz werden wir die Matrix $A_m := \kappa^{(m,2,1)}(\tau_{m+2}) =$

$\mathbf{I}_{(m+1)(m-1)(m-3)/3}$					
	$\frac{1}{m-1} \cdot \mathbf{I}_{m(m-1)/2}$		$\mathbf{I}_{m(m-1)/2}$		
		$\frac{1}{m+1} \cdot \mathbf{I}_{(m+1)(m-2)/2}$			$\mathbf{I}_{(m+1)(m-2)/2}$
	$\frac{(m-1)^2-1}{(m-1)^2} \cdot \mathbf{I}_{m(m-1)/2}$		$-\frac{1}{m-1} \cdot \mathbf{I}_{m(m-1)/2}$		
				$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_m$	\mathbf{I}_m
		$\frac{(m+1)^2-1}{(m+1)^2} \cdot \mathbf{I}_{(m+1)(m-2)/2}$			$-\frac{1}{m+1} \cdot \mathbf{I}_{(m+1)(m-2)/2}$
				$\frac{3}{4} \cdot \mathbf{I}_m$	$-\frac{1}{2} \cdot \mathbf{I}_m$

verwenden.

Satz 9.1.

- (a) Für $\alpha = (m, 3) \vdash m+3 > 6$ ist $d_{(m-2,3)} = (m+1) \cdot m \cdot (m-4)/6$, $d_{(m-1,2)} = (m+1) \cdot (m-2)/2$ und

$$\kappa^{(m,3)}(\tau_k) = \begin{cases} \mathbf{I}_{d_{(m-2,3)}} \oplus J_{\kappa, m-2} \otimes \mathbf{I}_{d_{(m-1,2)}} \oplus \mathbf{I}_m & \text{falls } k = m+2 \\ \kappa^{(m-1,3)}(\tau_k) \oplus \kappa^{(m,2)}(\tau_k) & \text{falls } k \leq m+1. \end{cases}$$

9 FFT von \mathcal{S}_{n-3} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

Im Fall $\alpha = (3, 3)$ ist

$$\begin{aligned}\kappa^{(3,3)}(\tau_1) &= \kappa^{(2,2)}(\tau_1) \oplus \kappa^{(3,1)}(\tau_1) = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, 1) \\ \kappa^{(3,3)}(\tau_2) &= \kappa^{(2,2)}(\tau_2) \oplus \kappa^{(3,1)}(\tau_2) = J_{\kappa,2} \oplus J_{\kappa,2} \oplus (1) \\ \kappa^{(3,3)}(\tau_3) &= \kappa^{(2,2)}(\tau_3) \oplus \kappa^{(3,1)}(\tau_3) = \text{diag}(-1, 1, 1) \oplus J_{\kappa,3} \\ \kappa^{(3,3)}(\tau_4) &= \kappa^{(3,2)}(\tau_4) = J_{\kappa,2} \otimes \mathbf{I}_2 \oplus (1) \\ \kappa^{(3,3)}(\tau_5) &= \text{diag}(-1, -1, 1, 1, 1).\end{aligned}$$

(b) Für $\alpha = (m, 2, 1) \vdash m + 3 > 5$, ist

$$\kappa^{(m,2,1)}(\tau_k) = \begin{cases} A_m & \text{falls } k = m + 2 \\ \kappa^{(m-1,2,1)}(\tau_k) \oplus \kappa^{(m,1,1)}(\tau_k) \oplus \kappa^{(m,2)}(\tau_k) & \text{falls } k \leq m + 1. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = (2, 2, 1)$ ist

$$\begin{aligned}\kappa^{(2,2,1)}(\tau_1) &= \kappa^{(2,1,1)}(\tau_1) \oplus \kappa^{(2,2)}(\tau_1) = \text{diag}(-1, -1, 1, -1, 1) \\ \kappa^{(2,2,1)}(\tau_2) &= \kappa^{(2,1,1)}(\tau_2) \oplus \kappa^{(2,2)}(\tau_2) = (-1) \oplus J_{\kappa,2} \oplus J_{\kappa,2} \\ \kappa^{(2,2,1)}(\tau_3) &= \kappa^{(2,1,1)}(\tau_3) \oplus \kappa^{(2,2)}(\tau_3) = J_{\kappa,3} \oplus \text{diag}(-1, -1, 1) \\ \kappa^{(2,2,1)}(\tau_4) &= (-1) \oplus J_{\kappa,2} \otimes \mathbf{I}_2.\end{aligned}$$

(c) Für $\alpha = (m, 1, 1, 1) \vdash m + 3 > 4$ ist

$$\kappa^{(m,1,1,1)}(\tau_k) = \begin{cases} \mathbf{I}_{m(m-1)(m-2)/6} \oplus J_{\kappa,m+2} \otimes \mathbf{I}_{m(m-1)/2} \oplus (-\mathbf{I}_m) & \text{falls } k = m + 2 \\ \kappa^{(m-1,1,1,1)}(\tau_k) \oplus \kappa^{(m,1,1)}(\tau_k) & \text{falls } k \leq m + 1. \end{cases}$$

Im Fall $\alpha = (1^4)$ ist $\kappa^{(1^4)}(\tau_k) = (-1)$ für $k \in [1, 3]$.

Die nachfolgenden Abschnitte behandeln die Berechnung des \mathcal{S}_n -Levels. Diese wird in drei Teile aufgeteilt. Der nächste Abschnitt umfasst Teil I.

9.1 Schnelle Auswertung von κ^α im Fall $\alpha_1 \geq n - 2$

Die Situation für die Auswertung ist in den Abbildungen 21 und 22 dargestellt.

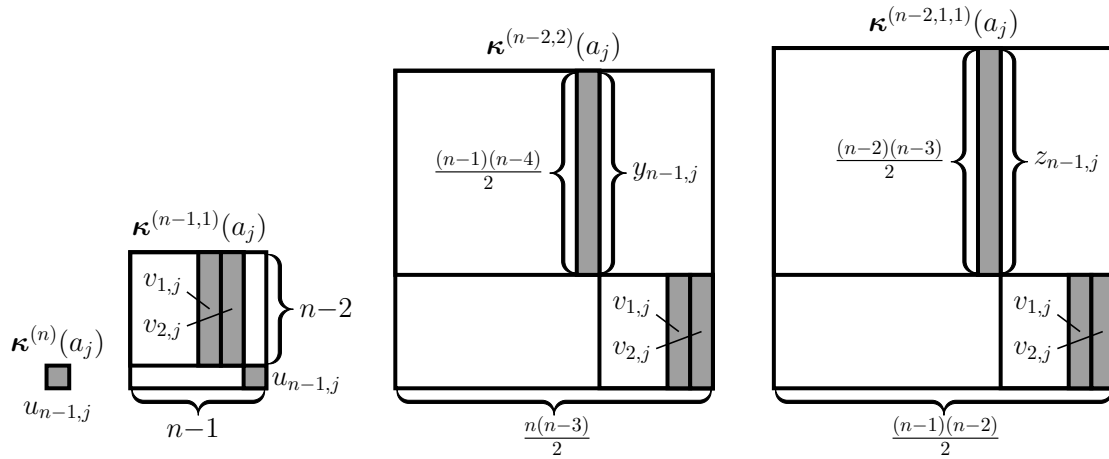


Abbildung 21: Struktur der Matrix $\kappa^\alpha(a_j)$ im Fall $\alpha_1 \geq n - 2$.

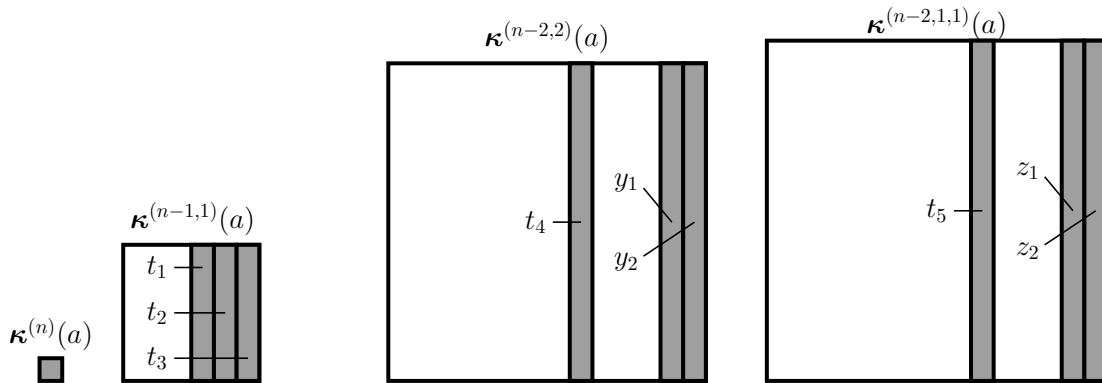


Abbildung 22: Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a)$ sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $\alpha_1 \geq n - 2$.

9 FFT von S_{n-3} -invarianten Signalen auf der S_n

Mit Hilfe dieser Abbildungen und Abschnitt 8.4 können wir erkennen, wie die Vektoren t_1 , t_2 , t_3 , y_1 , y_2 , z_1 , z_2 und $\kappa^{(n)}(a)$ berechnet werden können:

Algorithmus Berechnung des S_n -Levels: Teil I

- 1: $\text{ALG}_1(u_{n-1,1}, \dots, u_{n-1,n}; n-1)$:
 - 2: $t_3 = \text{ALG}_1(u_{n-1,1}, \dots, u_{n-1,n}; n-1)_1$
 - 3: $\kappa^{(n)}(a) = \text{ALG}_1(u_{n-1,1}, \dots, u_{n-1,n}; n-1)_2$

 - 4: $\text{ALG}_2(v_{1,1}, \dots, v_{1,n}; n-2)$:
 - 5: $y_1 = \text{ALG}_2(v_{1,1}, \dots, v_{1,n}; n-2)_1$
 - 6: $z_1 = \text{ALG}_2(v_{1,1}, \dots, v_{1,n}; n-2)_2$
 - 7: $t_1 = \text{ALG}_2(v_{1,1}, \dots, v_{1,n}; n-2)_3$

 - 8: $\text{ALG}_2(v_{2,1}, \dots, v_{2,n}; n-2)$:
 - 9: $y_2 = \text{ALG}_2(v_{2,1}, \dots, v_{2,n}; n-2)_1$
 - 10: $z_2 = \text{ALG}_2(v_{2,1}, \dots, v_{2,n}; n-2)_2$
 - 11: $t_2 = \text{ALG}_2(v_{2,1}, \dots, v_{2,n}; n-2)_3$
-

Dieser Algorithmus ist durchführbar mit $(2n-2) + 2 \cdot (4n^2 - 12n + 4) = 8n^2 - 22n + 6$ Additionen und $(n-2) + 2 \cdot (2n^2 - 6n) = 4n^2 - 11n - 2$ Multiplikationen. Die Berechnung der Vektoren t_4 und t_5 wird jeweils in Abschnitten 9.2 und 9.3 behandelt.

9.2 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-3,3)}$

Wir haben in Abschnitt 8.2 einen Ansatz gesehen, wie man einen schnellen Algorithmus zur Auswertung von $\kappa^{(n-2,2)}$ bei S_{n-2} -invarianten Signalen herleiten kann. Diesen Ansatz können wir für die Auswertung von κ^α bei S_{n-3} -invarianten Signalen mit $\alpha_1 = n-3$ wiederholen. Wir werden vergrößert die Herleitung einer schnellen Auswertung von $\kappa^{(n-3,3)}$ beschreiben und auf die Gemeinsamkeiten hinweisen. Das Ziel ist, die Grundlage eines effizienten Algorithmus zur Berechnung von

$$\kappa^{(m,3)}(a) = \sum_{j=1}^{m+3} \kappa^{(m,3)}(g_{j,m+3}) \cdot \kappa^{(m,3)}(a_j) \quad (9.1)$$

für $m := n-3$ zu beschreiben.

Die Situation zur Berechnung der Summe in Formel (9.1) ist vergleichbar zur der bei der Berechnung der Summe in Formel (8.4). Nur die letzte Spalte von $\kappa^{(m,3)}(a_j)$ ist möglicherweise von Null verschieden. Demnach verfolgen wir bei der Berechnung von $\kappa^{(m,3)}(a)$ nur die

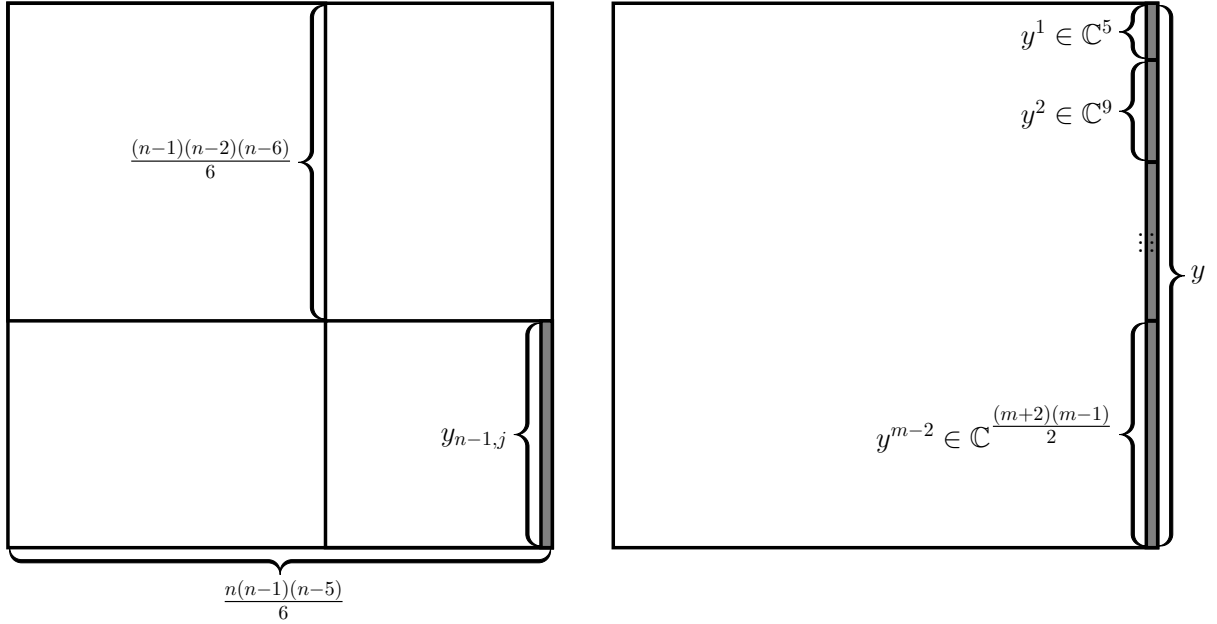


Abbildung 23: Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a_j)$ (links) und $\kappa^\alpha(a)$ (rechts) sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $m = n - 3$ und $\alpha = (n - 3, 3)$.

Veränderungen der letzten Spalte $\kappa^{(m,3)}(a_j)$ im Verlauf der Berechnung von $\kappa^{(m,3)}(g_{j,m+3}a_j)$ mit dem bekannten Multiplikationsschema (siehe (5.2))

$$\kappa^{(m,3)}(\tau_j) \cdot (\dots (\kappa^{(m,3)}(\tau_{m+1}) \cdot (\kappa^{(m,3)}(\tau_{m+2}) \cdot \kappa^{(m,3)}(a_j))) \dots).$$

Der Berechnungsvorgang folgt einem gewissen Muster. Wir können eine Partitionierung aller Spaltenvektoren in Teilvektoren, Kopierprozesse, Multiplikationen von gewissen Komponenten mit dem gleichen Skalar und verschiedene Matrix-Vektor-Multiplikationen erkennen. Abbildung 24 (oben) veranschaulicht schematisch die Situation bei der Berechnung von $\kappa^{(6,3)}(a)$. Wie in Beispiel 8.4 können wir durch den Vergleich von dem oberen mit dem unteren Teil von Abbildung 24 eine enge Verbindung zwischen (partiellen) Last Letter Sequence Bäumen, Kopierprozessen und der Bildung von Teilvektoren erkennen.

Wir unterteilen die letzte Spalte y der Matrix $\kappa^{(m,3)}(a)$ in Teilvektoren. Hierzu definieren wir $y := (y^1{}^\top, y^2{}^\top, \dots, y^{m-2}{}^\top)$ mit $y^h \in \mathbb{C}^{(h+4)(h+1)/2}$. Für $h \in [1, m-1]$ sei $P_{1,h}$ die Matrix zur Prefix-Abbildung

$$\mathbb{C}^{(m+2)(m-1)/2} \ni v \mapsto (v_1, \dots, v_{\frac{(h+3)h}{2}})^\top \in \mathbb{C}^{(h+3)h/2}$$

9 FFT von S_{n-3} -invarianten Signalen auf der S_n

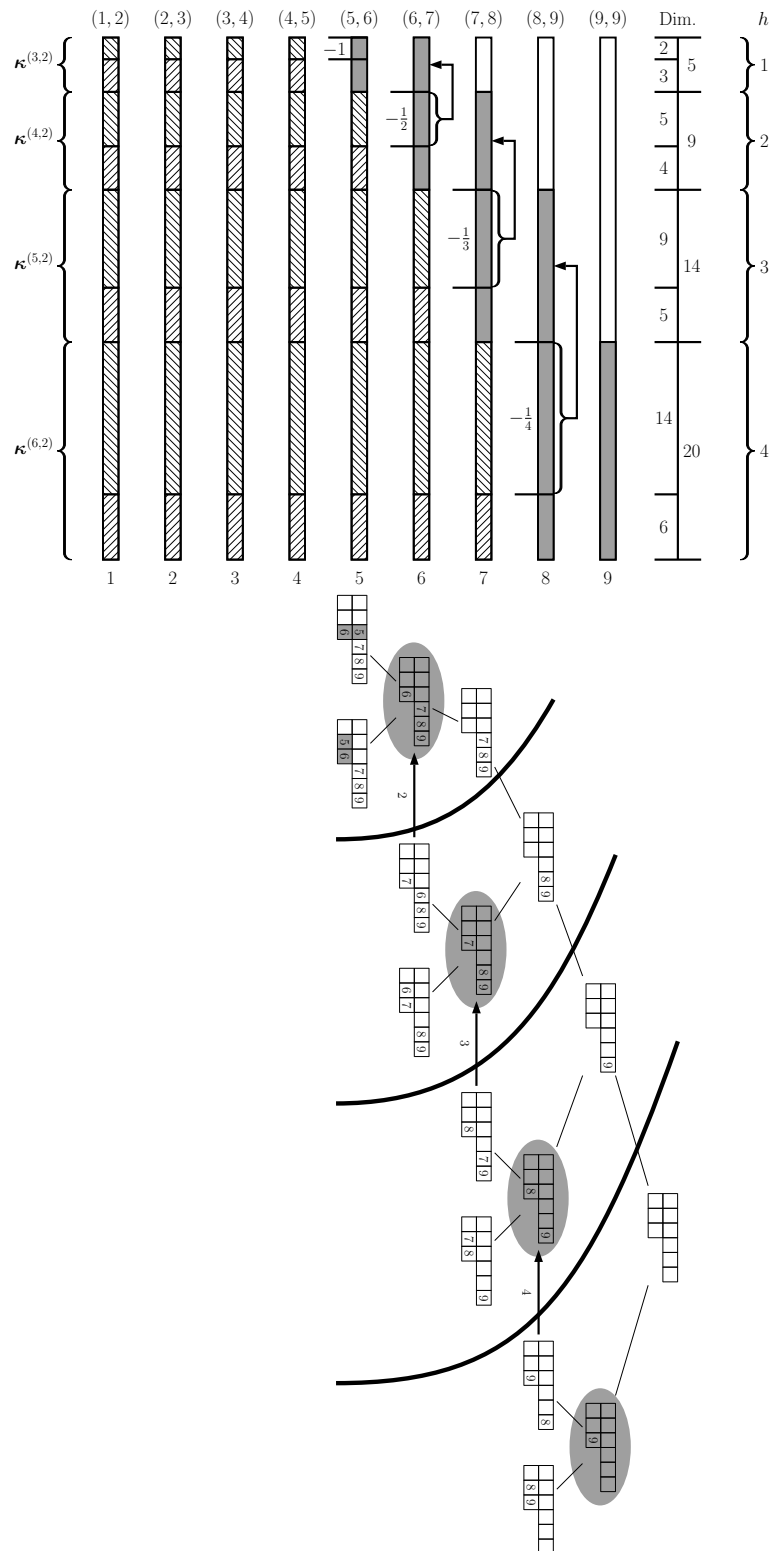


Abbildung 24: Oben: Schematische Darstellung der Berechnung von y in $\kappa^{(6,3)}(a)$. Unten: Rotierter, gekürzter Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (6, 3)$, sich wiederholende Teile werden nicht gezeigt.

und für $h \in [0, m-2]$ sei $T_{1,h}$ die Matrix zur Tail-Abbildung

$$\mathbb{C}^{(m+2)(m-1)/2} \ni v \mapsto \left(v_{\frac{(h+3)h}{2}+1}, \dots, v_{\frac{(h+4)(h+1)}{2}} \right)^\top \in \mathbb{C}^{h+2}.$$

Die Herleitung einer Formel zur Berechnung von jedem Teilvektor y^h ist analog zu Abschnitt 8.2.1. Infolgedessen kann jeder Teilvektor wie folgt berechnet werden:

$$y^h = \left(\sum_{j=1}^{h+4} \kappa^{(h+2,2)}(g_{j,h+4}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} \cdot P_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \\ T_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \end{bmatrix} \right) + P_{1,h+1} \cdot y_{n-1,h+5}.$$

Analog zu Abschnitt 8.2.2 kann die Struktur dieser Formel weiter verfeinert werden. Wir definieren die folgenden Vektoren für $h \in [0, m-1]$

$$\mathbb{C}^{(h+4)(h+1)/2} \ni s_1^h := \sum_{j=1}^{h+4} \kappa^{(h+2,2)}(g_{j,h+4}) \cdot \begin{bmatrix} P_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \\ 0_{h+2} \end{bmatrix}$$

und für $h \in [0, m-2]$

$$\mathbb{C}^{(h+4)(h+1)/2} \ni r_1^h := \sum_{j=1}^{h+4} \kappa^{(h+2,2)}(g_{j,h+4}) \cdot \begin{bmatrix} 0_{(h+3)h/2} \\ T_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \end{bmatrix}.$$

Es folgt sofort für $h \in [1, m-2]$

$$y^h = -\frac{1}{h} \cdot s_1^h + r_1^h + P_{1,h+1} \cdot y_{n-1,h+5}.$$

Insbesondere ist $s_1^0 = (0, 0)^\top$. Für $h \in [1, m-1]$ definieren wir die Vektoren

$$\mathbb{C}^{h+2} \ni U_1^h := \sum_{j=1}^{h+3} \kappa^{(h+2,1)}(g_{j,h+3}) \cdot \begin{pmatrix} T_{1,h-1} \cdot y_{n-1,j} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $h > 0$ kann der Vektor s_1^h mit der Formel

$$s_1^h = \begin{bmatrix} s_1^{h-1} \\ 0_{h+2} \end{bmatrix} + \frac{1}{h+1} \cdot \begin{bmatrix} r_1^{h-1} \\ 0_{h+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4} \\ 0_{h+2} \end{bmatrix} + q_{h+1}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_{(h+3)h/2} \\ U_1^h \end{bmatrix}.$$

berechnet werden. Algorithmus ALG₂ kann wiederverwendet werden. Es folgt, dass

$$r_1^h = \text{ALG}_2(T_{1,h} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}; h+2)_1$$

9 FFT von \mathbf{S}_{n-3} -invarianten Signalen auf der \mathbf{S}_n

und

$$U_1^h = \text{ALG}_2(T_{1,h-1} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h-1} \cdot y_{n-1,h+3}; h+1)_3.$$

Zudem folgt für die Berechnung des Vektor t_4 , siehe Abbildung 22, dass

$$t_4 = s_1^{m-1} = \begin{bmatrix} s_1^{m-2} \\ 0_{m+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{m} \cdot \begin{bmatrix} r_1^{m-2} \\ 0_{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{1,m-1} \cdot y_{n-1,m+3} \\ 0_{m+1} \end{bmatrix} + q_m^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_{(m+2)(m-1)/2} \\ U_1^{m-1} \end{bmatrix}.$$

9.3 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-3,1,1,1)}$

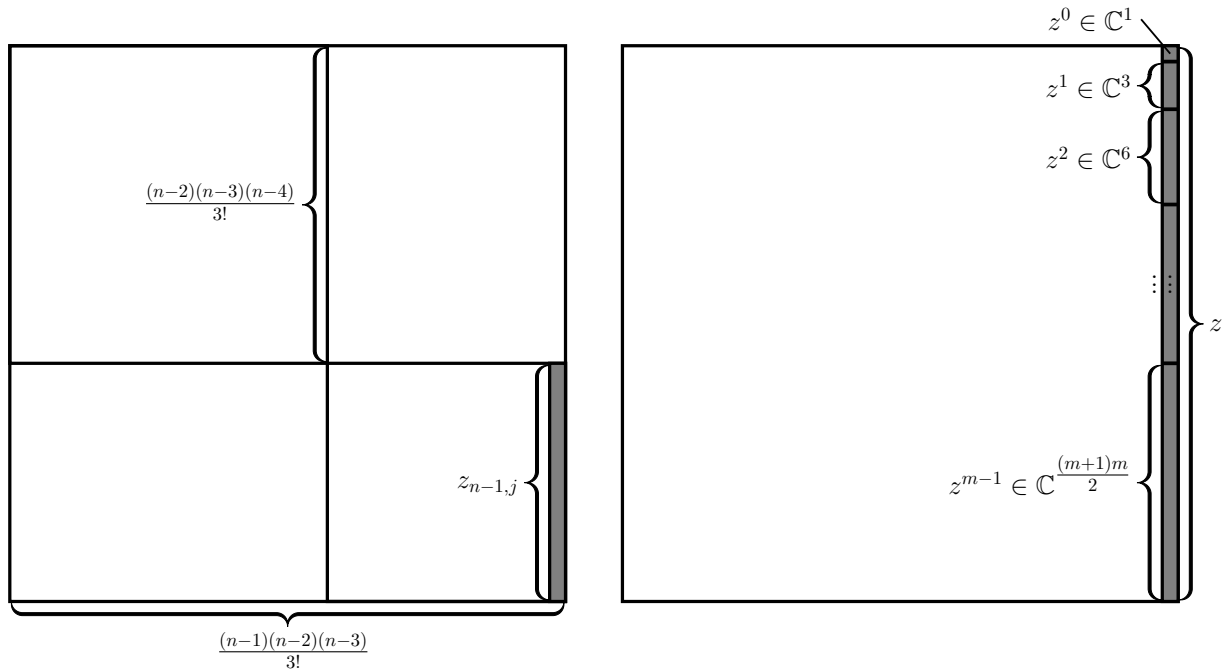


Abbildung 25: Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a_j)$ (links) und $\kappa^\alpha(a)$ (rechts) sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $m = n - 3$ und $\alpha = (n - 3, 1, 1, 1)$.

Für $m := n - 3$ werden wir die Grundlage eines effizienten Algorithmus zur Berechnung von

$$\kappa^{(m,1,1,1)}(a) = \sum_{j=1}^{m+3} \kappa^{(m,1,1,1)}(g_{j,m+3}) \cdot \kappa^{(m,1,1,1)}(a_j).$$

beschreiben.

Die letzte Spalte z der Matrix $\kappa^{(m,1,1,1)}(a)$ wird in Teilvektoren unterteilt. Hierzu definieren wir $z := (z^0{}^\top, z^1{}^\top, z^2{}^\top, \dots, z^{m-1}{}^\top)$ mit $z^h \in \mathbb{C}^{(h+2)(h+1)/2}$. Für $h \in [1, m]$ sei $P_{2,h}$ die Matrix

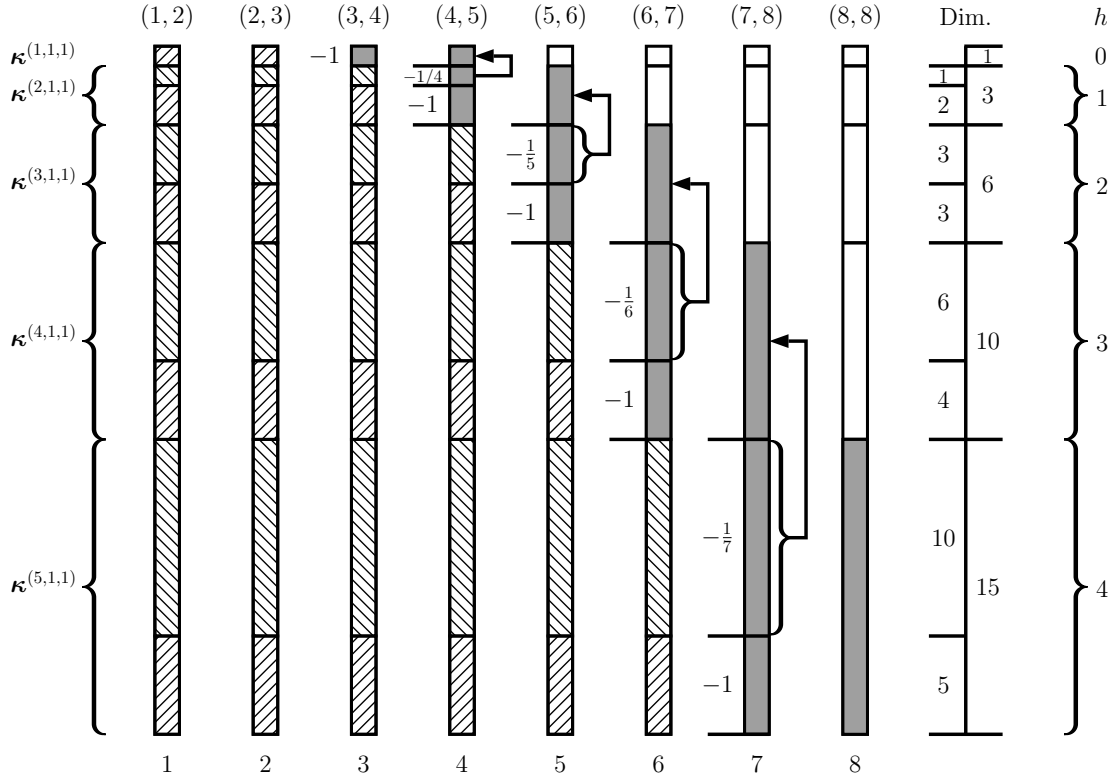


Abbildung 26: Schematische Darstellung der Berechnung von z in $\kappa^{(5,1,1,1)}(a)$.

zur Prefix-Abbildung

$$\mathbb{C}^{(m+1)m/2} \ni v \mapsto (v_1, \dots, v_{\frac{(h+1)h}{2}})^\top \in \mathbb{C}^{(h+1)h/2}$$

und für $h \in [0, m-1]$ sei $T_{2,h}$ die Matrix zur Tail-Abbildung

$$\mathbb{C}^{(m+1)m/2} \ni v \mapsto (v_{\frac{(h+1)h}{2}+1}, \dots, v_{\frac{(h+2)(h+1)}{2}})^\top \in \mathbb{C}^{h+1}.$$

Jeder Teilvektor z^h kann wie folgt berechnet werden:

$$z^h = \left(\sum_{j=1}^{h+3} \kappa^{(h+1,1,1)}(g_{j,h+3}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{h+3} \cdot P_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \\ -T_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \end{bmatrix} \right) + P_{2,h+1} \cdot z_{n-1,h+4}.$$

Wir definieren die folgenden Vektoren für $h \in [0, m]$

$$\mathbb{C}^{(h+2)(h+1)/2} \ni s_2^h := \sum_{j=1}^{h+3} \kappa^{(h+1,1,1)}(g_{j,h+3}) \cdot \begin{bmatrix} P_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \\ 0_{h+1} \end{bmatrix}$$

9 FFT von \mathbf{S}_{n-3} -invarianten Signalen auf der \mathbf{S}_n

und für $h \in [0, m-1]$

$$\mathbb{C}^{(h+2)(h+1)/2} \ni r_2^h := \sum_{j=1}^{h+3} \boldsymbol{\kappa}^{(h+1,1,1)}(g_{j,h+3}) \cdot \begin{bmatrix} 0_{(h+1)h/2} \\ T_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \end{bmatrix}.$$

Es folgt sofort für $h \in [0, m-1]$

$$z^h = -\frac{1}{h+3} \cdot s_2^h - r_2^h + P_{2,h+1} \cdot z_{n-1,h+4}.$$

Insbesondere ist $s_2^0 = 0$ und $z^0 = -r_2^0 + P_{2,1} \cdot z_{n-1,4}$. Für $h \in [1, m]$ definieren wir die Vektoren

$$\mathbb{C}^{h+1} \ni U_2^h := \sum_{j=1}^{h+2} \boldsymbol{\kappa}^{(h+1,1)}(g_{j,h+2}) \cdot \begin{pmatrix} T_{2,h-1} \cdot z_{n-1,j} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $h > 0$ kann der Vektor $s_{2,h}$ mit der Formel

$$s_2^h = \begin{bmatrix} s_2^{h-1} \\ 0_{h+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{h+2} \cdot \begin{bmatrix} r_2^{h-1} \\ 0_{h+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3} \\ 0_{h+1} \end{bmatrix} + q_{h+2}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_{(h+1)h/2} \\ U_2^h \end{bmatrix}.$$

berechnet werden. Schlussendlich gilt

$$r_2^h = \text{ALG}_2(T_{2,h} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}; h+1)_2$$

und

$$U_2^h = \text{ALG}_2(T_{2,h-1} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h-1} \cdot z_{n-1,h+2}; h)_3.$$

Zudem folgt für die Berechnung des Vektor t_5 , siehe Abbildung 22, dass

$$t_5 = s_2^m = \begin{bmatrix} s_2^{m-1} \\ 0_{m+1} \end{bmatrix} + \frac{1}{m+2} \cdot \begin{bmatrix} r_2^{m-1} \\ 0_{m+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{2,m} \cdot z_{n-1,m+3} \\ 0_{m+1} \end{bmatrix} + q_{m+2}^2 \cdot \begin{bmatrix} 0_{(m+1)m/2} \\ U_2^m \end{bmatrix}.$$

9.4 Schnelle Auswertung von $\kappa^{(n-3,2,1)}$

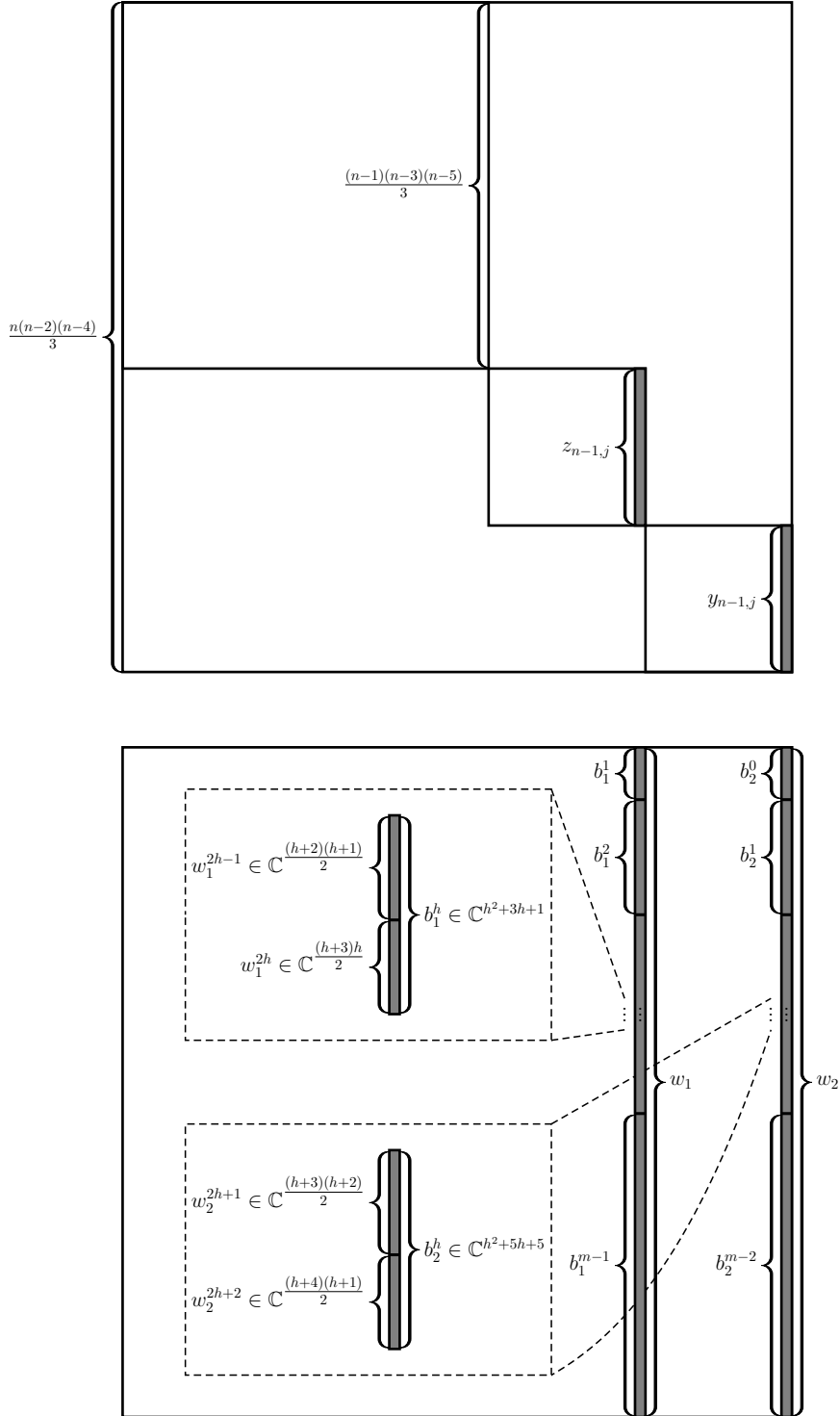


Abbildung 27: Die grau gefärbten Spalten in $\kappa^\alpha(a_j)$ (oben) und $\kappa^\alpha(a)$ (unten) sind möglicherweise von Null verschieden. Zudem ist $m = n - 3$ und $\alpha = (n - 3, 2, 1)$.

9 FFT von \mathcal{S}_{n-3} -invarianten Signalen auf der \mathcal{S}_n

Für $m := n - 3$ werden wir die Grundlage eines effizienten Algorithmus zur Berechnung von

$$\kappa^{(m,2,1)}(a) = \sum_{j=1}^{m+3} \kappa^{(m,2,1)}(g_{j,m+3}) \cdot \kappa^{(m,2,1)}(a_j).$$

zusammenfassen. Die Berechnung von $\kappa^{(m,2,1)}(a)$ ist komplizierter als in den zuvor betrachteten Fällen. Erstens sind zwei Spaltenvektoren in $\kappa^{(m,2,1)}(a_j)$ möglicherweise von Null verschieden, siehe Abbildung 27. Demzufolge gilt dies auch für $\kappa^{(m,2,1)}(a)$. Wir bezeichnen die zwei nicht trivialen Spalten von $\kappa^{(m,2,1)}(a)$ mit w_1 und w_2 . Zweitens müssen beiden Vektoren separat behandelt werden. Wir unterteilen w_1 und w_2 in Teilvektoren. Hierzu definieren wir $w_1 := (b_1^{1\top}, b_1^{2\top}, \dots, b_1^{m-1\top})^\top$ mit $b_1^h \in \mathbb{C}^{h^2+3h+1}$ und $w_2 := (b_2^{0\top}, b_2^{1\top}, \dots, b_2^{m-2\top})^\top$ mit $b_2^h \in \mathbb{C}^{h^2+5h+5}$. Drittens treten bei der Berechnung von w_1 und w_2 zwei unterschiedliche Kopierprozesse auf, siehe Abbildungen 29 und 31. Diese Abbildungen veranschaulichen die Situation für die Berechnung des mit der Nummer 7 versehenen Vektors in den Abbildungen 28 und 30. Ein Kopierprozess ist von Typ 1, falls Komponenten von einem Teilvektor nach einem Teilvektor eines anderen Blocks kopiert werden, siehe die Pfeile mit den Axialdistanzen 4 und 6 in den Abbildungen 29 und 31. Ein Kopierprozess ist von Typ 2, falls Komponenten eines Teilvektors nach einem Teilvektor des gleichen Blocks kopiert werden, siehe die Pfeile mit der Axialdistanz 2 in den Abbildungen 29 und 31. Diese Kopierprozesse müssen separat behandelt werden. Deshalb muss die Unterteilung in Teilvektoren von w_1 und w_2 weiter verfeinert werden. Wir definieren $b_1^h := (w_1^{2h-1\top}, w_1^{2h\top})^\top$ mit $w_1^{2h-1} \in \mathbb{C}^{(h+2)(h+1)/2}$ und $w_1^{2h} \in \mathbb{C}^{(h+3)h/2}$. Zudem definieren wir $b_2^h := (w_2^{2h+1\top}, w_2^{2h+2\top})^\top$ mit $w_2^{2h+1} \in \mathbb{C}^{(h+3)(h+2)/2}$ und $w_1^{2h+2} \in \mathbb{C}^{(h+4)(h+1)/2}$. Die Teilvektoren von w_1 können wie folgt berechnet werden:

$$w_1^{2h-1} = \left(\sum_{j=1}^{h+3} \kappa^{(h+1,1,1)}(g_{j,h+3}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{h} \cdot P_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \\ \frac{1}{2} \cdot T_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \end{bmatrix} \right) + P_{2,h+1} \cdot z_{n-1,h+4}$$

$$w_1^{2h} = \sum_{j=1}^{h+3} \kappa^{(h+1,2)}(g_{j,h+3}) \cdot \begin{bmatrix} 0^{(h+2)(h-1)/2} \\ \frac{3}{4} \cdot T_{2,h} \cdot z_{n-1,j} \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der zwei vorangegangenen Abschnitte folgt, dass

$$w_1^{2h-1} = -\frac{1}{h} \cdot s_2^h + \frac{1}{2} \cdot r_2^h + P_{2,h+1} \cdot z_{n-1,h+4},$$

$$w_1^{2h} = \frac{3}{4} \cdot \text{ALG}_2(T_{2,h} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}; h+1)_1.$$

Wir wiederholen dies für die Teilvektoren von w_2 und erhalten

$$\begin{aligned} w_2^{2h+1} &= \sum_{j=1}^{h+4} \kappa^{(h+2,1,1)}(g_{j,h+4}) \cdot \begin{bmatrix} 0_{(h+2)(h+1)/2} \\ T_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \end{bmatrix} \\ &= \text{ALG}_2(T_{1,h} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}; h+2)_2 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} w_2^{2h+2} &= \left(\sum_{j=1}^{h+4} \kappa^{(h+2,2)}(g_{j,h+4}) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{h+3} \cdot P_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \\ -\frac{1}{2} \cdot T_{1,h} \cdot y_{n-1,j} \end{bmatrix} \right) + P_{1,h+1} \cdot y_{n-1,h+5} \\ &= -\frac{1}{h+3} \cdot s_1^h - \frac{1}{2} \cdot r_1^h + P_{1,h+1} \cdot y_{n-1,h+5}. \end{aligned}$$

Bei der Betrachtung der obigen Formeln kann man erkennen, dass die Konsequenzen der Kopierprozesse von Typ 1 (instanziiert durch die Formeln für w_1^{2h-1} und w_2^{2h+2}) vergleichbar zu den Kopierprozessen sind, die wir bereits in den vorangegangenen Abschnitten gesehen haben. Die Konsequenzen des Kopierprozesses von Typ 2 sind verschieden. Die Teilvektoren w_1^{2h} und w_2^{2h+1} können direkt mit Algorithmus ALG_2 berechnet werden.

9 FFT von S_{n-3} -invarianten Signalen auf der S_n

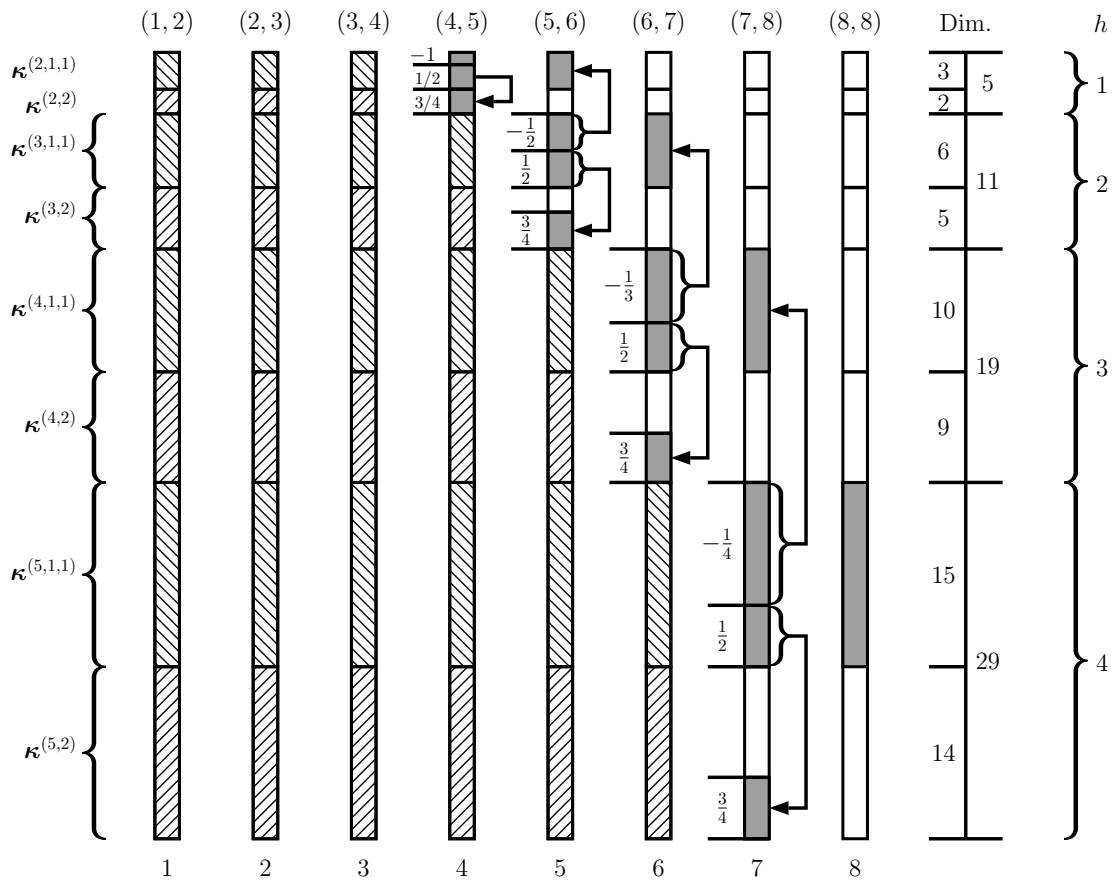


Abbildung 28: Schematische Darstellung der Berechnung von w_1 in $\kappa^{(5,2,1)}(a)$.

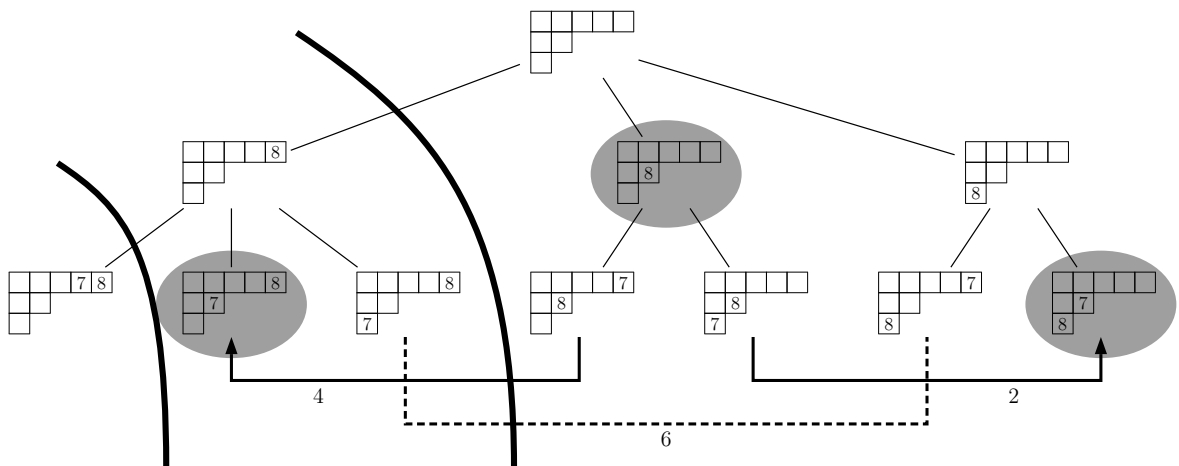


Abbildung 29: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (5, 2, 1)$ bezüglich w_1 .

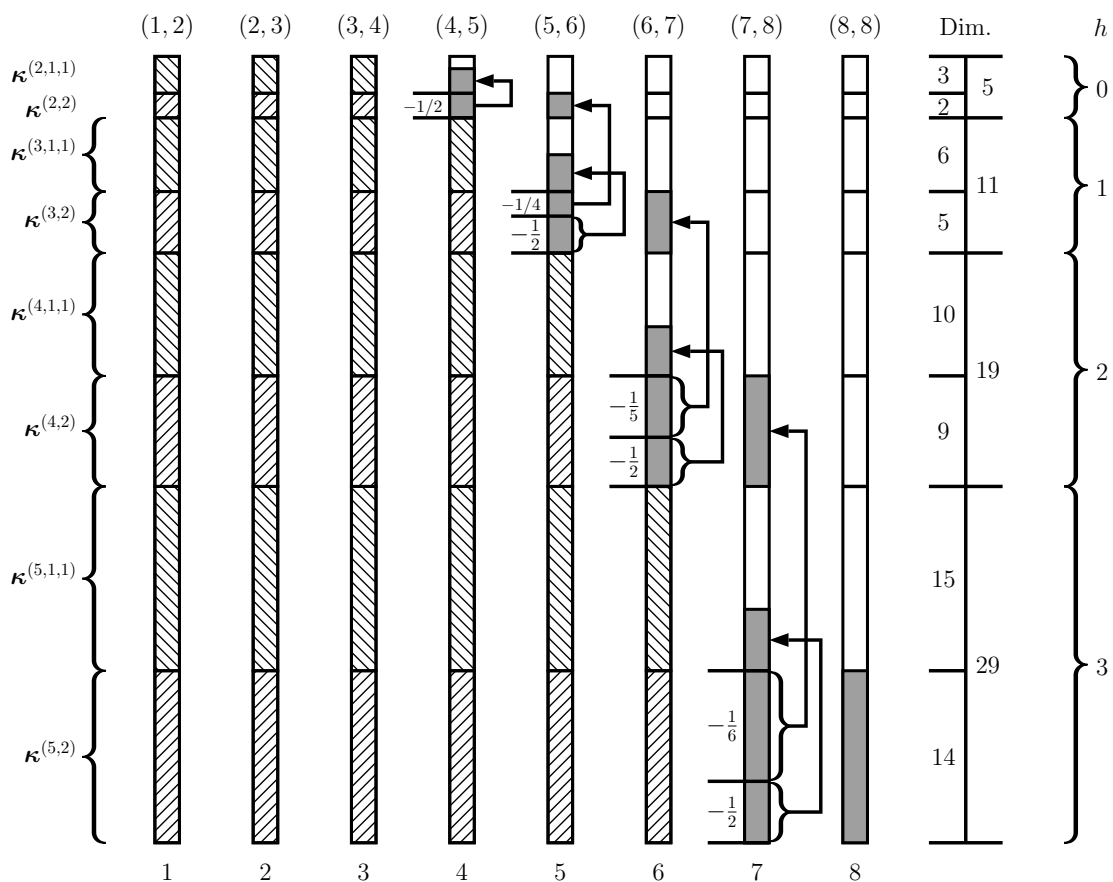


Abbildung 30: Schematische Darstellung der Berechnung von w_2 in $\kappa^{(5,2,1)}(a)$.

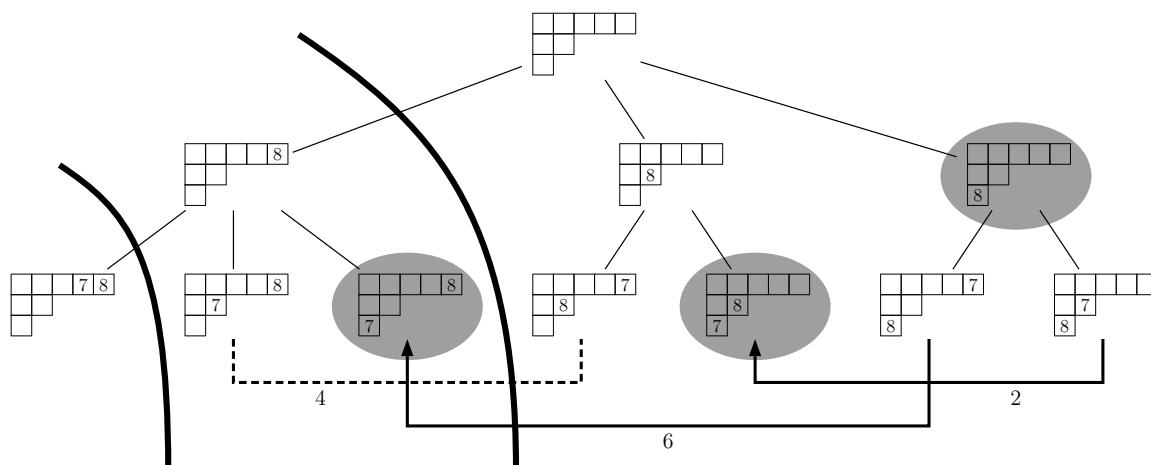


Abbildung 31: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (5, 2, 1)$ bezüglich w_2 .

9.5 Zusammenfassung und Aufwandsanalyse

Mit Hilfe der Abschnitte 9.2 bis 9.4 können nun die restlichen Teile des S_n -Levels berechnet werden. Teil II der Berechnung des S_n -Levels betrifft die Vektoren y , w_2 und t_4 , siehe Abbildungen 22, 23 und 27. Hingegen betrifft Teil III die Vektoren z , w_1 und t_5 , siehe Abbildungen 22, 25 und 27.

Algorithmus Berechnung des S_n -Levels: Teil II

- 1: $s_1^0 = (0, 0)^\top$
 - 2: $\text{ALG}_2(T_{1,0} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,0} \cdot y_{n-1,4}; 2)$:
 - 3: $r_1^0 = \text{ALG}_2(T_{1,0} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,0} \cdot y_{n-1,4}; 2)_1$
 - 4: $w_2^1 = \text{ALG}_2(T_{1,0} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,0} \cdot y_{n-1,4}; 2)_2$
 - 5: $U_1^1 = \text{ALG}_2(T_{1,0} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,0} \cdot y_{n-1,4}; 2)_3$
 - 6: $w_2^2 = -\frac{1}{2} \cdot r_1^0 + P_{1,1} \cdot y_{n-1,5}$
 - 7: **for** $h = 1$ **to** $m - 2$ **do**
 - 8: $P_{1,h} \cdot s_1^h = s_1^{h-1} + \frac{1}{h+1} \cdot r_1^{h-1} + P_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}$
 - 9: $T_{1,h} \cdot s_1^h = q_{h+1}^2 \cdot U_1^h$
 - 10: $\text{ALG}_2(T_{1,h} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}; h + 2)$:
 - 11: $r_1^h = \text{ALG}_2(T_{1,h} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}; h + 2)_1$
 - 12: $w_2^{2h+1} = \text{ALG}_2(T_{1,h} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}; h + 2)_2$
 - 13: $U_1^{h+1} = \text{ALG}_2(T_{1,h} \cdot y_{n-1,1}, \dots, T_{1,h} \cdot y_{n-1,h+4}; h + 2)_3$
 - 14: $y^h = -\frac{1}{h} \cdot s_1^h + r_1^h + P_{1,h+1} \cdot y_{n-1,h+5}$
 - 15: $w_2^{2h+2} = -\frac{1}{h+3} \cdot s_1^h - \frac{1}{2} \cdot r_1^h + P_{1,h+1} \cdot y_{n-1,h+5}$
 - 16: **end for**
 - 17: $P_{1,m-1} \cdot t_4 = s_1^{m-2} + \frac{1}{m} \cdot r_1^{m-2} + P_{1,m-1} \cdot y_{n-1,m+3}$
 - 18: $T_{1,m-1} \cdot t_4 = q_m^2 \cdot U_1^{m-1}$
 - 19: **Output 1:** $y = (y^1{}^\top, y^2{}^\top, \dots, y^{m-2}{}^\top)^\top$
 - 20: **Output 2:** $w_2 = (w_2^1{}^\top, w_2^2{}^\top, \dots, w_2^{2m-2}{}^\top)^\top$
 - 21: **Output 3:** t_4
-

Algorithmus Berechnung des S_n -Levels: Teil III

- 1: $s_2^0 = 0$
 - 2: $\text{ALG}_2(T_{2,0} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,0} \cdot z_{n-1,3}; 1)$:
 - 3: $r_2^0 = \text{ALG}_2(T_{2,0} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,0} \cdot z_{n-1,3}; 1)_2$
 - 4: $U_2^1 = \text{ALG}_2(T_{2,0} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,0} \cdot z_{n-1,3}; 1)_3$
 - 5: $z^0 = -r_2^0 + P_{2,1} \cdot z_{n-1,4}$
 - 6: **for** $h = 1$ **to** $m - 1$ **do**
 - 7: $P_{2,h} \cdot s_2^h = s_2^{h-1} + \frac{1}{h+2} \cdot r_2^{h-1} + P_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}$
 - 8: $T_{2,h} \cdot s_2^h = q_{h+2}^2 \cdot U_2^h$
 - 9: $\text{ALG}_2(T_{2,h} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}; h + 1)$:
 - 10: $w_1^{2h} = \frac{3}{4} \cdot \text{ALG}_2(T_{2,h} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}; h + 1)_1$
 - 11: $r_2^h = \text{ALG}_2(T_{2,h} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}; h + 1)_2$
 - 12: $U_2^{h+1} = \text{ALG}_2(T_{2,h} \cdot z_{n-1,1}, \dots, T_{2,h} \cdot z_{n-1,h+3}; h + 1)_3$
 - 13: $z^h = -\frac{1}{h+3} \cdot s_2^h - r_2^h + P_{2,h+1} \cdot z_{n-1,h+4}$
 - 14: $w_1^{2h-1} = -\frac{1}{h} \cdot s_2^h + \frac{1}{2} \cdot r_2^h + P_{2,h+1} \cdot z_{n-1,h+4}$
 - 15: **end for**
 - 16: $P_{2,m} \cdot t_5 = s_2^{m-1} + \frac{1}{m+2} \cdot r_2^{m-1} + P_{2,m} \cdot z_{n-1,m+3}$
 - 17: $T_{2,m} \cdot t_5 = q_{m+2}^2 \cdot U_2^m$
 - 18: **Output 1:** $z = (z^{0\top}, z^{1\top}, \dots, z^{m-1\top})^\top$
 - 19: **Output 2:** $w_1 = (w_1^{1\top}, w_1^{2\top}, \dots, w_1^{2m-2\top})^\top$
 - 20: **Output 3:** t_5
-

9 FFT von S_{n-3} -invarianten Signalen auf der S_n

Tabelle 6: Arithmetischer Aufwand von Teil II.

Berechnung von	# Add.	# Mult.	Parameter
ALG ₂ (...; h + 2)	$4h^2 + 20h + 20$	$2h^2 + 10h + 8$	$h \in [0, m - 2]$
s_1^1	2	5	
s_1^h	$(h + 3)h$	$(h + 4)(h + 1)/2$	$h \in [2, m - 2]$
y^1	10	0	
y^h	$(h + 4)(h + 1)$	$(h + 4)(h + 1)/2$	$h \in [2, m - 2]$
w_2^2	2	2	
w_2^{2h+2}	$(h + 4)(h + 1)$	$(h + 4)(h + 1)$	$h \in [1, m - 2]$
t_4	$(m + 2)(m - 1)$	$(m + 3)m/2$	
\sum	$(7m^3 + 21m^2 - 16m - 36)/3$	$(8m^3 + 27m^2 - 23m - 66)/6$	$m = n - 3$

Tabelle 7: Arithmetischer Aufwand von Teil III.

Berechnung von	# Add.	# Mult.	Parameter
ALG ₂ (...; 1)	4	2	
ALG ₂ (...; h + 1)	$4h^2 + 12h + 4$	$2h^2 + 6h$	$h \in [1, m - 1]$
s_2^1	1	3	
s_2^h	$(h + 1)h$	$(h + 2)(h + 1)/2$	$h \in [2, m - 1]$
z^0	1	0	
z^h	$(h + 2)(h + 1)$	$(h + 2)(h + 1)/2$	$h \in [1, m - 1]$
w_1^1	6	3	
w_1^{2h-1}	$(h + 2)(h + 1)$	$(h + 2)(h + 1)$	$h \in [2, m - 1]$
w_1^{2h}	0	$(h + 3)h/2$	$h \in [1, m - 1]$
t_5	$(m + 1)m$	$(m + 2)(m + 1)/2$	
\sum	$(7m^3 + 21m^2 + 2m - 12)/3$	$(3m^3 + 10m^2 - m - 8)/2$	$m = n - 3$

Tabelle 8: Arithmetischer Aufwand der gesamten Berechnung.

Berechnung von	# Add.	# Mult.
S_{n-2} -Level	$n \cdot (n - 1) \cdot (2n - 6)$	$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 4)$
S_{n-1} -Level	$n \cdot (4n^2 - 18n + 16)$	$n \cdot (2n^2 - 9n + 5)$
S_n -Level, I	$8n^2 - 22n + 6$	$4n^2 - 11n - 2$
S_n -Level, II	$(7n^3 - 42n^2 + 47n + 12)/3$	$(8n^3 - 45n^2 + 31n + 30)/6$
S_n -Level, III	$(7n^3 - 42n^2 + 65n - 18)/3$	$(3n^3 - 17n^2 + 20n + 4)/2$
\sum	$(32n^3 - 138n^2 + 112n + 12)/3$	$(35n^3 - 156n^2 + 79n + 30)/6$

Insgesamt wurde das folgende Resultat gezeigt.

Satz 9.2.

$$L_\infty(S_n|S_{n-3}) \leq L_\infty(\mathbf{D}_{\kappa,n,3}) \leq 16.5n^3 - 72n^2 + 50.5n + 9.$$

Als Nächstes betrachten wir den Speicheraufwand. Vom S_{n-3} -Level bis zum S_n -Level gibt es $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Werte pro Level. Für die Berechnung wird nur Speicher für das aktuelle und das vorherige Level benötigt, d.h. $2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ Werte sind zu speichern. Für die Berechnung des S_{n-2} -Levels werden Partialsummen in ALG_1 berechnet. Hierfür wird ein Wert zwischengespeichert. Die n Blöcke des S_{n-1} -Levels werden wie in Abschnitt 8.4 beschrieben mit ALG_1 und ALG_2 berechnet. Eine obere Schranke für den Speicheraufwand ist $2n - 4$. In Teil I der Berechnung des S_n -Levels werden die Vektoren ebenfalls mit ALG_1 und ALG_2 berechnet. Eine obere Schranke für den Speicheraufwand ist hier $2n - 2$. In Teil II werden die Vektoren $s_1^h, r_1^h, \text{ALG}_2(\dots; h+2)_2$ und U_1^{h+1} zwischengespeichert. Zudem wird Algorithmus ALG_2 wiederverwendet. Eine obere Schranke für den Speicheraufwand ist $2 \cdot (m+2)(m-1)/2 + (m+1)m/2 + (m+1) + (2m+2) = (3m^2 + 9m + 2)/2$. In Teil III werden die Vektoren $s_2^h, r_2^h, \text{ALG}_2(\dots; h+2)_1$ und U_2^{h+1} zwischengespeichert. Algorithmus ALG_2 wird ebenfalls hier wiederverwendet. Demzufolge ist eine obere Schranke für den Speicheraufwand $2 \cdot (m+1)m/2 + (m+2)(m-1)/2 + (m+1) + (2m+2) = (3m^2 + 9m + 4)/2$. Insgesamt ist $2 \cdot n \cdot (n-1) \cdot (n-2) + (3n^2 - 9n + 4)/2 = (4n^3 - 9n^2 - n + 4)/2$ eine obere Schranke für den Speicheraufwand bei der Berechnung aller Level.

Das Verfahren wurde in C implementiert und auf einem Einsteiger-Notebook (CPU: Intel® Core™ i3-370M 2,4 GHz, 4 GB RAM) getestet. Die folgende Tabelle zeigt die Auswertungszeit (ohne die Zeit für das Einlesen der Eingabe) und die benötigten arithmetischen Operationen. Die Eingabe bestand aus einem reellwertigen Signal.

n	$[S_n : S_{n-3}]$	eval. (s)	arithmetic ops
100	970,200	0.061	15,785,059
200	7,880,400	0.497	129,130,109
300	26,730,600	1.722	439,035,159
400	63,520,800	4.058	1,044,500,209
500	124,251,000	8.216	2,044,525,259
600	214,921,200	13.310	3,538,110,309

10 Schlussbemerkungen und Ausblick

Für $k \in [1, 3]$ haben wir gesehen, wie größenordnungsmäßig optimale FFT-Algorithmen (im L_∞ -Modell) von S_{n-k} -invarianten Signalen auf der S_n hergeleitet werden können. Diese können bereits für das Graphlet-Spektrum (siehe Abschnitt 6.4) und das QAP (siehe Abschnitt 6.5) verwendet werden. Wird wie in diesen Beispielen die Youngschen Orthogonalform benötigt, lässt sich diese ausgehend von der Youngschen Seminormalform mit einem linearen Overhead in dem Index von S_{n-k} in S_n berechnen, siehe Abschnitt 6.3. Als Grundlage für diese Umrechnung dienen Korollar 4.13 und Lemma 7.3.

Die Last Letter Sequence Bäume der relevanten Partitionen geben einen Hinweis, wie der vorgestellte Ansatz in Abschnitt 8.2 für kleine $k > 3$ fortgesetzt werden könnte. Für den Fall $k = 4$ befinden sich in Abschnitt A.9 Illustrationen von partiellen Last Letter Sequence Bäumen von Partitionen, die bei der Betrachtung von S_{n-4} -invarianten Signalen hinzukommen werden. Es zeigt sich ein vergleichbares Kopierverhalten und eine Aufteilung in Teilvektoren, wie es in den Kapiteln 8 und 9 geschildert wurde. Für die wiederholte Anwendung der grundlegenden Konzepte in Abschnitt 8.2 muss schrittweise vorgegangen werden. Es werden jeweils die Algorithmen zur Auswertung von DFTs auf $\mathbb{C}[S_n \bmod S_{n-\ell}]$, wobei $\ell < k$, benötigt. Jedoch werden mit größerem k die Kopierprozesse und die Partitionierung der Vektoren in Teilvektoren immer komplexer. Infolgedessen werden die entsprechenden Algorithmen immer aufwändiger. Bereits der Fall $k = 3$ in Kapitel 9 macht dieses Verhalten deutlich.

Betrachtet man zudem Darstellungsmatrizen zu Rechteckspartitionen ($\alpha = (a, \dots a) \vdash n$), zeigt der zugehörige Last Letter Sequence Baum ein gänzlich anderes Kopierverhalten im Vergleich zu den beschriebenen Kopierprozessen in den Kapiteln 7 bis 9 auf. In diesem Zusammenhang eignet sich die hier vorgestellte Herangehensweise für den Fall, dass $n \gg k$, d.h. bei einer Darstellungsmatrix zu einer relevanten Partition α gilt $\alpha_1 \gg \alpha_2$.

Für die Verwendung in praktischen Anwendungen ist es zudem fraglich, ob für $k \geq 6$ FFT-Algorithmen von S_{n-k} -invarianten Signalen auf der S_n mit einer Laufzeit der Ordnung n^k einen Nutzen haben. Insgesamt eignet sich aus den genannten Gründen der vorgestellte Entwurf zu größenordnungsmäßig optimalen FFT-Algorithmen von S_{n-k} -invarianten Signalen auf der S_n für die Fälle $k \in [1, 5]$.

Anhang

In den folgenden Abschnitten befinden sich mehrere Beispiele zur Unterstützung der Inhalte aus den Kapiteln 2 bis 6. Die Abschnitte A.1 und A.2 enthalten jeweils ein Beispiel für Satz 4.5 und 4.7 im Fall $n = 4$. In Abschnitt A.3 werden alle Matrixdarstellungen $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ von $\mathbb{C}S_4$ und die zugehörige Last Letter Sequence gemäß der Konstruktion in Abschnitt 4.3 aufgeführt. Mit der Parametrisierung der Zeilen und Spalten wie bei (2.1) werden die DFT-Matrizen $\mathbf{D}_{\sigma,4}$ und $\mathbf{D}_{\omega,4}$ in den Abschnitten A.4 und A.7 konstruiert. Des Weiteren werden die Matrizen $\mathbf{D}_{\kappa,4,2}$ und $\mathbf{D}_{\omega,4,2}$, wie in Abschnitt 3.2 bzw. 6.3 beschrieben, in den Abschnitten A.6 und A.8 konstruiert. Bei allen Matrizen wurde bei der Konstruktion die Blockstruktur des FFT Algorithmus für symmetrische Gruppen in Abschnitt 5.2 berücksichtigt. Die zugehörige Blockstruktur und die entsprechenden Datenpfade der DFT σ_4 auf S_4 werden in Abschnitt A.5 visualisiert. Schlussendlich umfasst Abschnitt A.9 Illustrationen partieller Last Letter Sequence Bäume für $\alpha \vdash 12$ mit $\alpha_1 = 8$. Bei der Betrachtung von S_{n-4} -invarianten Funktionen werden Partitionen α mit $\alpha_1 = n - 4$ hinzukommen.

A.1 \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^4),(1^4))}$

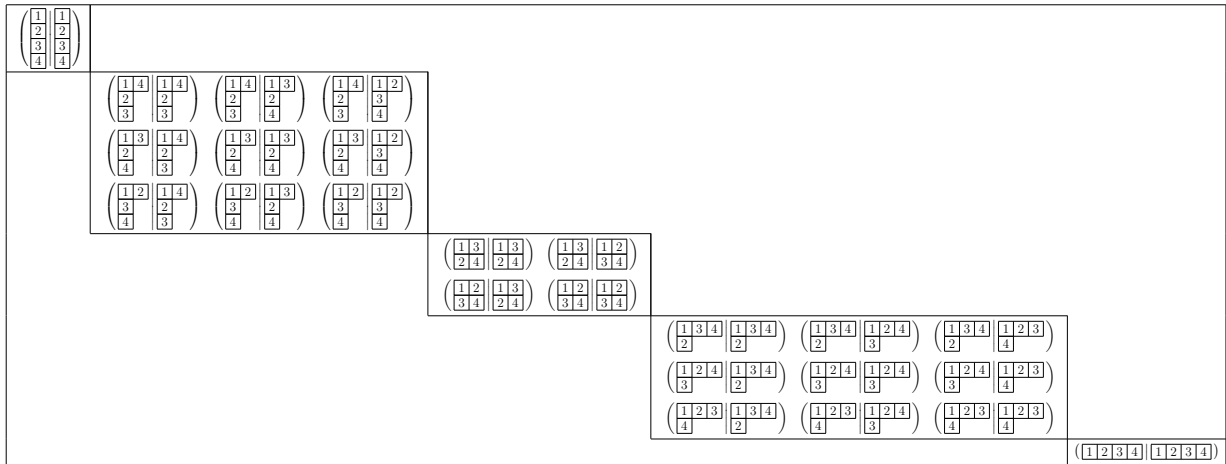


Abbildung 32: \mathbb{C} -Basis von $\mathbb{C}_{((1^4),(1^4))}$ aus den Bideterminanten zu allen Standardbitableaux (S, T) vom Inhalt $((1^4), (1^4))$.

A.2 Spechtmoduln \mathcal{S}_α zu $\alpha \vdash 4$

Tabelle 9: $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \vdash 4}$

Spechtmodul \mathcal{S}_α	f_α	Basis
$\mathcal{S}_{(1^4)}$	1	$\left(\begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 4 & 4 \\ \hline \end{array} \right)$
$\mathcal{S}_{(2,1^2)}$	3	$\left(\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{ c c } \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right)$
$\mathcal{S}_{(2^2)}$	2	$\left(\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{ c c } \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c } \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right)$
$\mathcal{S}_{(3,1)}$	3	$\left(\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right), \left(\begin{array}{ c c c } \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c c } \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right)$
$\mathcal{S}_{(4)}$	1	$\left(\begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \end{array} \middle \begin{array}{ c c c c } \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$

A.3 Alle $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ von \mathbb{CS}_4 inklusive Last Letter Sequence

Tabelle 10: Alle $\sigma^\alpha((i, i + 1))$ von \mathbb{CS}_4 .

Last Letter Sequence	$\sigma^\alpha((1, 2))$	$\sigma^\alpha((2, 3))$	$\sigma^\alpha((3, 4))$
$\boxed{1} \boxed{2} \boxed{3} \boxed{4}$	(1)	(1)	(1)
$\begin{array}{ c c c } \hline \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{4} \\ \hline \boxed{2} & & \end{array} < \begin{array}{ c c c } \hline \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{4} \\ \hline \boxed{3} & & \end{array} < \begin{array}{ c c c } \hline \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{4} & & \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{cc c} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & \\ \hline & & 1 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c cc} 1 & & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{8}{9} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{3} \end{array} \right)$
$\begin{array}{ c c } \hline \boxed{1} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{2} & \boxed{4} \end{array} < \begin{array}{ c c } \hline \boxed{1} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} & \boxed{4} \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{array}{ c c } \hline \boxed{1} & \boxed{4} \\ \hline \boxed{2} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{3} & \end{array} < \begin{array}{ c c } \hline \boxed{1} & \boxed{3} \\ \hline \boxed{2} & \boxed{4} \end{array} < \begin{array}{ c c } \hline \boxed{1} & \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} & \boxed{4} \end{array}$	$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\left(\begin{array}{c cc} -1 & & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \hline & 1 & -\frac{1}{2} \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{c cc} \frac{1}{3} & \frac{8}{9} & \\ \hline 1 & -\frac{1}{3} & \\ \hline & & -1 \end{array} \right)$
$\begin{array}{ c } \hline \boxed{1} \\ \hline \boxed{2} \\ \hline \boxed{3} \\ \hline \boxed{4} \end{array}$	(-1)	(-1)	(-1)

A.4 Konstruktion der DFT-Matrix $D_{\sigma,4}$ Tabelle 11: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Seminormalform).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\sigma^{(4)}(\pi)$	$\sigma^{(3,1)}(\pi)$	$\sigma^{(2,2)}(\pi)$	$\sigma^{(2,1,1)}(\pi)$	$\sigma^{(1^4)}(\pi)$
1.	(1,4)(2,3)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(1)
2.	(1,3,2,4)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(-1)
3.	(1,4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{4}{9} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
4.	(1,2,4)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{4}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
5.	(1,3,4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{8}{9} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
6.	(1,2,3,4)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{9} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
7.	(1,4,2,3)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(-1)
8.	(1,3)(2,4)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(1)
9.	(1,4,2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{4}{9} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)

Tabelle 11: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Seminormalform) (Fortsetzung).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\sigma^{(4)}(\pi)$	$\sigma^{(3,1)}(\pi)$	$\sigma^{(2,2)}(\pi)$	$\sigma^{(2,1,1)}(\pi)$	$\sigma^{(1^4)}(\pi)$
10.	(2, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{4}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{4} \\ -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
11.	(1, 3, 4, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{9} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & -\frac{3}{4} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
12.	(2, 3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{8}{9} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
13.	(1, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
14.	(1, 2, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
15.	(1, 4, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} \\ -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
16.	(2, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{8}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
17.	(1, 2)(3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{8}{9} & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(1)
18.	(3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{8}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{8}{9} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(-1)
19.	(1, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)

Tabelle 11: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Seminormalform) (Fortsetzung).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\sigma^{(4)}(\pi)$	$\sigma^{(3,1)}(\pi)$	$\sigma^{(2,2)}(\pi)$	$\sigma^{(2,1,1)}(\pi)$	$\sigma^{(1^4)}(\pi)$
20.	(1, 2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
21.	(1, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
22.	(2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
23.	(1, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(-1)
24.	(1)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(1)

A.5 Blockstruktur und die Datenpfade der DFT σ_4 auf S_4

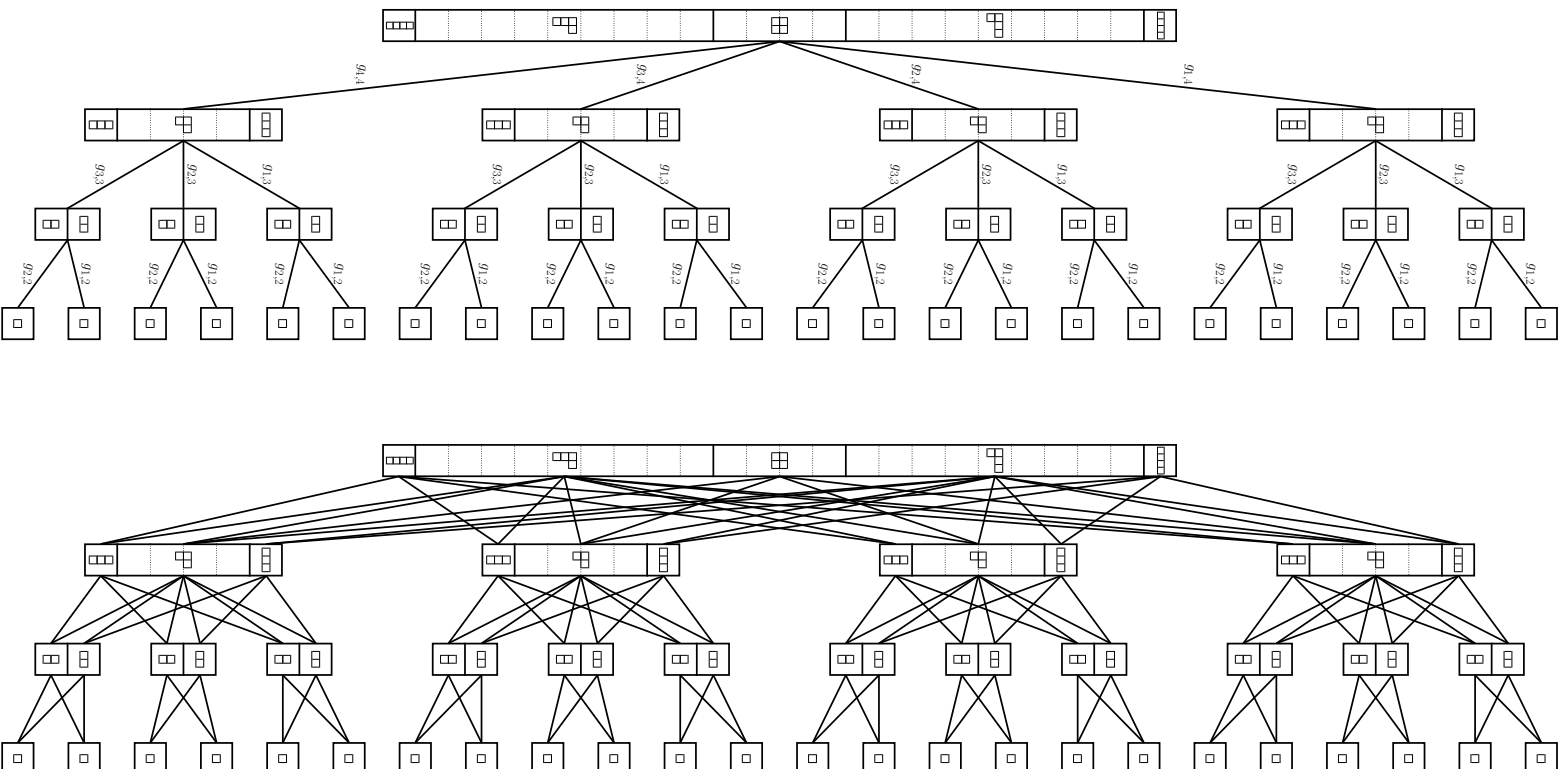


Abbildung 33: Blockstruktur (links) der DFT σ_4 auf S_4 und die Datenpfade (rechts).

A.6 Konstruktion der DFT-Matrix $\mathbf{D}_{\kappa,4,2}$ Tabelle 12: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (kontragrediente Version).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\kappa^{(4)}(\pi)$	$\kappa^{(3,1)}(\pi)$	$\kappa^{(2,2)}(\pi)$	$\kappa^{(2,1,1)}(\pi)$	$\kappa^{(1^4)}(\pi)$
1.	(1,4)(2,3)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	(1)
2.	(1,3,2,4)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	(-1)
3.	(1,4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{4}{9} & -\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
4.	(1,2,4)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
5.	(1,3,4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{6} & 1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
6.	(1,2,3,4)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
7.	(1,4,2,3)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{4}{9} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	(-1)
8.	(1,3)(2,4)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{4}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$	(1)
9.	(1,4,2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)

Tabelle 12: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (kontragrediente Version) (Fortsetzung).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\kappa^{(4)}(\pi)$	$\kappa^{(3,1)}(\pi)$	$\kappa^{(2,2)}(\pi)$	$\kappa^{(2,1,1)}(\pi)$	$\kappa^{(1^4)}(\pi)$
10.	(2, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{4}{9} & -\frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
11.	(1, 3, 4, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{6} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
12.	(2, 3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{6} & -1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
13.	(1, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{8}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
14.	(1, 2, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
15.	(1, 4, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
16.	(2, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{8}{9} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
17.	(1, 2)(3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -1 & 0 \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(1)
18.	(3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(-1)
19.	(1, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)

Tabelle 12: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (kontragrediente Version) (Fortsetzung).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\kappa^{(4)}(\pi)$	$\kappa^{(3,1)}(\pi)$	$\kappa^{(2,2)}(\pi)$	$\kappa^{(2,1,1)}(\pi)$	$\kappa^{(1^4)}(\pi)$
20.	(1, 2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
21.	(1, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
22.	(2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
23.	(1, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(-1)
24.	(1)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(1)

Tabelle 13: Matrixdarstellungen aller $g \in S_4 \text{ mod } S_2$ (kontragrediente Version).

Nr.	$a \in \mathbb{C}S_4$	$\kappa^{(4)}(\pi)$	$\kappa^{(3,1)}(\pi)$	$\kappa^{(2,2)}(\pi)$	$\kappa^{(2,1,1)}(\pi)$	$\kappa^{(1^4)}(\pi)$
1.	$\frac{1}{2}((1,4)(2,3) + (1,3,2,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	(0)
2.	$\frac{1}{2}((1,4) + (1,2,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
3.	$\frac{1}{2}((1,3,4) + (1,2,3,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)

Anhang

Tabelle 13: Matrixdarstellungen aller $g \in S_4 \text{ mod } S_2$ (kontragrediente Version) (Fortsetzung).

Nr.	$a \in \mathbb{C}S_4$	$\kappa^{(4)}(\pi)$	$\kappa^{(3,1)}(\pi)$	$\kappa^{(2,2)}(\pi)$	$\kappa^{(2,1,1)}(\pi)$	$\kappa^{(1^4)}(\pi)$
4.	$\frac{1}{2}((1, 4, 2, 3) + (1, 3)(2, 4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	(0)
5.	$\frac{1}{2}((1, 4, 2) + (2, 4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
6.	$\frac{1}{2}((1, 3, 4, 2) + (2, 3, 4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
7.	$\frac{1}{2}((1, 4, 3) + (1, 2, 4, 3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
8.	$\frac{1}{2}((1, 4, 3, 2) + (2, 4, 3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
9.	$\frac{1}{2}((1, 2)(3, 4) + (3, 4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{8}{9} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(0)
10.	$\frac{1}{2}((1, 3) + (1, 2, 3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
11.	$\frac{1}{2}((1, 3, 2) + (2, 3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
12.	$\frac{1}{2}((1, 2) + (1))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(0)

A.6 Konstruktion der DFT-Matrix $\mathbf{D}_{\kappa,4,2}$

$$\mathbf{D}_{\kappa,4,2} = \begin{matrix} & \frac{1}{2}((1,4)(2,3) + (1,3,2,4)) & \frac{1}{2}((1,4) + (1,2,4)) & \frac{1}{2}((1,3,4) + (1,2,3,4)) & \frac{1}{2}((1,4,2,3) + (1,3)(2,4)) & \frac{1}{2}((1,4,2) + (2,4)) & \frac{1}{2}((1,3,4,2) + (2,3,4)) & \frac{1}{2}((1,4,3) + (1,2,4,3)) & \frac{1}{2}((1,4,3,2) + (2,4,3)) & \frac{1}{2}((1,2)(3,4) + (3,4)) & \frac{1}{2}((1,3) + (1,2,3)) & \frac{1}{2}((1,3,2) + (2,3)) & \frac{1}{2}((1,2) + (1)) \end{matrix} \begin{pmatrix} (\kappa^{(4)})_{11} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\kappa^{(3,1)})_{12} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ (\kappa^{(3,1)})_{13} & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\kappa^{(3,1)})_{22} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ (\kappa^{(3,1)})_{23} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (\kappa^{(3,1)})_{32} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 \\ (\kappa^{(3,1)})_{33} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ (\kappa^{(2,2)})_{12} & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ (\kappa^{(2,2)})_{22} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ (\kappa^{(2,1^2)})_{13} & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\kappa^{(2,1^2)})_{23} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ (\kappa^{(2,1^2)})_{33} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

A.7 Konstruktion der DFT-Matrix $D_{\omega,4}$ Tabelle 14: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Orthogonalform).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\omega^{(4)}(\pi)$	$\omega^{(3,1)}(\pi)$	$\omega^{(2,2)}(\pi)$	$\omega^{(2,1,1)}(\pi)$	$\omega^{(1^4)}(\pi)$
1.	(1, 4)(2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(1)
2.	(1, 3, 2, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(-1)
3.	(1, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
4.	(1, 2, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
5.	(1, 3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
6.	(1, 2, 3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
7.	(1, 4, 2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(-1)
8.	(1, 3)(2, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \end{pmatrix}$	(1)
9.	(1, 4, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{5}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)

Tabelle 14: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Orthogonalform) (Fortsetzung).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\omega^{(4)}(\pi)$	$\omega^{(3,1)}(\pi)$	$\omega^{(2,2)}(\pi)$	$\omega^{(2,1,1)}(\pi)$	$\omega^{(1^4)}(\pi)$
10.	(2, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{5}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
11.	(1, 3, 4, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
12.	(2, 3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
13.	(1, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
14.	(1, 2, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
15.	(1, 4, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
16.	(2, 4, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
17.	(1, 2)(3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(1)
18.	(3, 4)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(-1)
19.	(1, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)

Anhang

Tabelle 14: Matrixdarstellungen aller $\pi \in S_4$ (Youngsche Orthogonalform) (Fortsetzung).

Nr.	$\pi \in S_4$	$\omega^{(4)}(\pi)$	$\omega^{(3,1)}(\pi)$	$\omega^{(2,2)}(\pi)$	$\omega^{(2,1,1)}(\pi)$	$\omega^{(1^4)}(\pi)$
20.	(1, 2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
21.	(1, 3, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(1)
22.	(2, 3)	(1)	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(-1)
23.	(1, 2)	(1)	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(-1)
24.	(1)	(1)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(1)

A.8 Konstruktion der DFT-Matrix $D_{\omega,4,2}$ Tabelle 15: Matrixdarstellungen aller $g \in S_4 \text{ mod } S_2$ (Youngsche Orthogonalform).

Nr.	$a \in \mathbb{C}S_4$	$\omega^{(4)}(a)$	$\omega^{(3,1)}(a)$	$\omega^{(2,2)}(a)$	$\omega^{(2,1,1)}(a)$	$\omega^{(1^4)}(a)$
1.	$\frac{1}{2}((1,4)(2,3) + (1,3,2,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	(0)
2.	$\frac{1}{2}((1,4) + (1,2,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
3.	$\frac{1}{2}((1,3,4) + (1,2,3,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
4.	$\frac{1}{2}((1,4,2,3) + (1,3)(2,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	(0)
5.	$\frac{1}{2}((1,4,2) + (2,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & \frac{5}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
6.	$\frac{1}{2}((1,3,4,2) + (2,3,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & -\frac{1}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
7.	$\frac{1}{2}((1,4,3) + (1,2,4,3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
8.	$\frac{1}{2}((1,4,3,2) + (2,4,3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
9.	$\frac{1}{2}((1,2)(3,4) + (3,4))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	(0)

Tabelle 15: Matrixdarstellungen aller $g \in S_4 \text{ mod } S_2$ (Youngsche Orthogonalform) (Fortsetzung).

Nr.	$a \in \mathbb{C}S_4$	$\omega^{(4)}(a)$	$\omega^{(3,1)}(a)$	$\omega^{(2,2)}(a)$	$\omega^{(2,1,1)}(a)$	$\omega^{(1^4)}(a)$
10.	$\frac{1}{2}((1,3) + (1,2,3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
11.	$\frac{1}{2}((1,3,2) + (2,3))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	(0)
12.	$\frac{1}{2}((1,2) + (1))$	(1)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	(0)

$$\mathbf{D}_{\omega,4,2} = \begin{matrix} & \frac{1}{2}((1,4)(2,3) + (1,3,2,4)) & \frac{1}{2}((1,4) + (1,2,4)) & \frac{1}{2}((1,3,4) + (1,2,3,4)) & \frac{1}{2}((1,4,2,3) + (1,3)(2,4)) & \frac{1}{2}((1,4,2) + (2,4)) & \frac{1}{2}((1,3,4,2) + (2,3,4)) & \frac{1}{2}((1,4,3) + (1,2,4,3)) & \frac{1}{2}((1,4,3,2) + (2,4,3)) & \frac{1}{2}((1,2)(3,4) + (3,4)) & \frac{1}{2}((1,3) + (1,2,3)) & \frac{1}{2}((1,3,2) + (2,3)) & \frac{1}{2}((1,2) + (1)) \\ \begin{matrix} (\omega^{(4)})_{11} \\ (\omega^{(3,1)})_{12} \\ (\omega^{(3,1)})_{13} \\ (\omega^{(3,1)})_{22} \\ (\omega^{(3,1)})_{23} \\ (\omega^{(3,1)})_{32} \\ (\omega^{(3,1)})_{33} \\ (\omega^{(2,2)})_{12} \\ (\omega^{(2,2)})_{22} \\ (\omega^{(2,1^2)})_{13} \\ (\omega^{(2,1^2)})_{23} \\ (\omega^{(2,1^2)})_{33} \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A.9 Partielle Last Letter Sequence Bäume für $\alpha \vdash 12$ mit $\alpha_1 = 8$

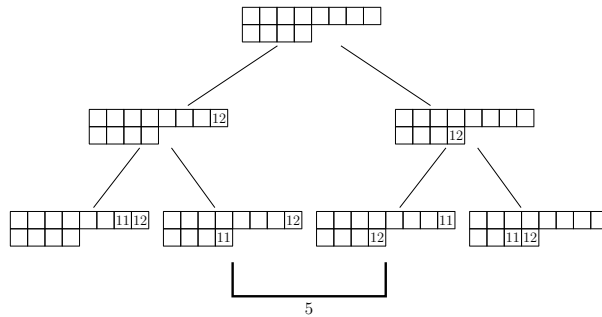


Abbildung 34: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 4)$.

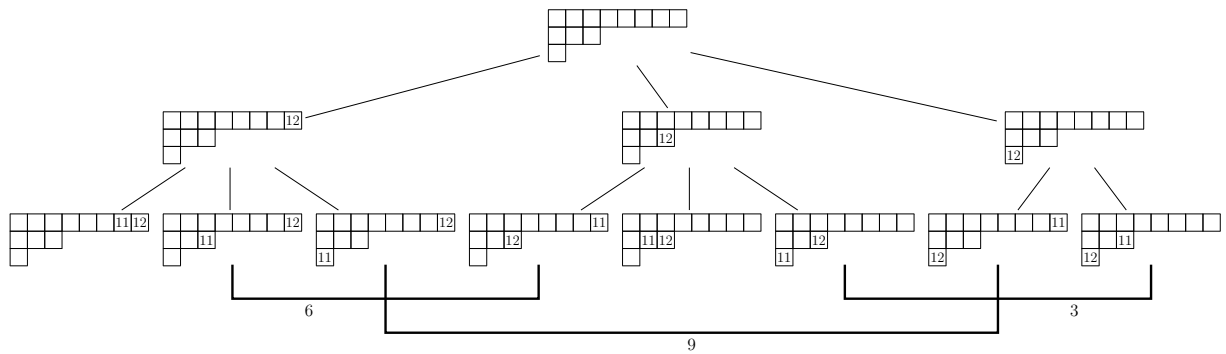


Abbildung 35: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 3, 1)$.

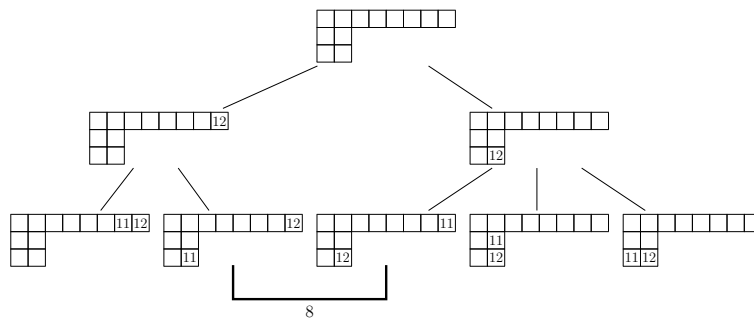


Abbildung 36: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 2, 2)$.

A.9 Partielle Last Letter Sequence Bäume für $\alpha \vdash 12$ mit $\alpha_1 = 8$

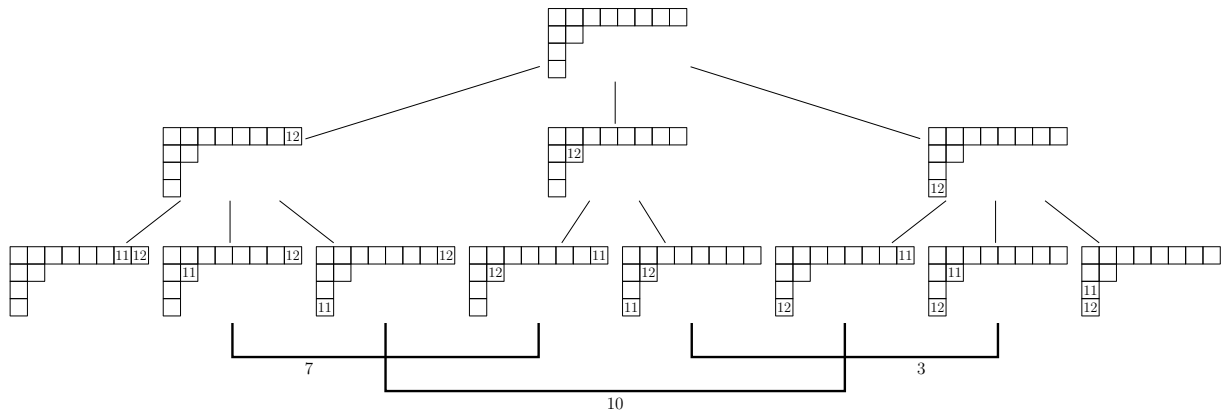


Abbildung 37: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 2, 1, 1)$.

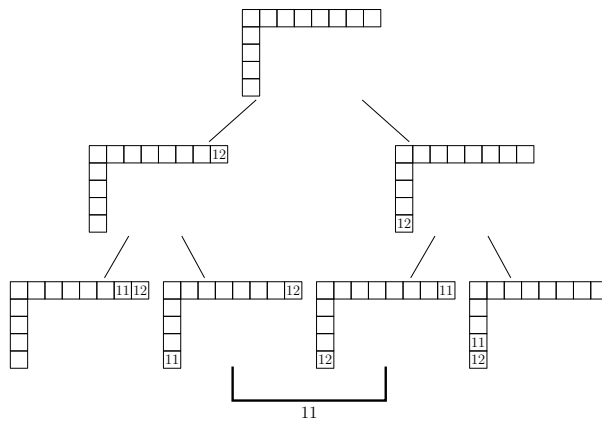


Abbildung 38: Partieller Last Letter Sequence Baum für $\alpha = (8, 1, 1, 1, 1)$.

Literaturverzeichnis

- [1] Micheal Artin. *Algebra*. Birkhäuser, 1998.
- [2] Ulrich Baum. Existence and efficient construction of fast Fourier transforms on supersolvable groups. *Computational Complexity*, 1(3):235–256, 1991.
- [3] Ulrich Baum and Michael Clausen. Some lower and upper complexity bounds for generalized Fourier transforms and their inverses. *SIAM J. Comput.*, 20(3):451–459, 1991.
- [4] Leo I. Bluestein. A linear filtering approach to the computation of the discrete Fourier transform. *IEEE Trans.*, AU-18(4):451–455, 1970.
- [5] Peter Bürgisser, Michael Clausen, and Mohammad Amin Shokrollahi. *Algebraic Complexity Theory*, volume 315 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1997.
- [6] Rainer E. Burkard, Eranda Çela, Panos M. Pardalos, and Leonidas S. Pitsoulis. The quadratic assignment problem. In P.M. Pardalos and D.-Z. Du, editors, *Handbook of Combinatorial Optimization*, pages 241–338. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [7] Michael Clausen. Fast generalized Fourier transforms. *Theor. Comput. Sci.*, 67(1):55–63, 1989.
- [8] Michael Clausen. Multivariate polynomials, standard tableaux, and representations of symmetric groups. *J. Symb. Comput.*, 11(5/6):483–522, 1991.
- [9] Michael Clausen. Der Verzweigungssatz von Young, 2012. Private Mitteilung.
- [10] Michael Clausen and Ulrich Baum. *Fast Fourier Transforms*. BI Wissenschaftsverlag, 1993.
- [11] Michael Clausen and Ulrich Baum. Fast Fourier transforms for symmetric groups: theory and implementation. *Math. Comp.*, 61(204):833–847, 1993.
- [12] Michael Clausen and Ramakrishna Kakarala. Computing Fourier transforms and convolutions of S_{n-1} -invariant signals on S_n in time linear in n . *Appl. Math. Lett.*, 23(2):183–187, 2010.
- [13] Henry Cohn, Robert Kleinberg, Balázs Szegedy, and Christopher Umans. Group-theoretic algorithms for matrix multiplication. In *Proceedings of the 46th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 379–388, 2005.
- [14] Henry Cohn and Christopher Umans. A group-theoretic approach to fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 44th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 438–449, 2003.

- [15] James W. Cooley and John W. Tukey. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. *Math. Comp.*, 19(90):297–301, 1965.
- [16] Jacques Désarménien, Joseph P. S. Kung, and Gian-Carlo Rota. Invariant theory, Young bitableaux and combinatorics. *Adv. in Math.*, 27(1):63–92, 1978.
- [17] Persi Diaconis. *Group Representations in Probability and Statistics*. Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes - Monograph Series, 11, Hayward (CA), 1988.
- [18] Persi Diaconis. A generalization of spectral analysis with application to ranked data. *Ann. Statistics*, 17(3):949–979, 1989.
- [19] J. Sutherland Frame, Gilbert de B. Robinson, and Robert M. Thrall. The hook graphs of the symmetric group. *Canadian J. Math.*, 6:316–324, 1954.
- [20] Carl Friedrich Gauss. Nachlass. Theoria interpolationis methodo nova tractata. In *Carl Friedrich Gauss Werke, Band 3*, pages 265–330. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1866.
- [21] Michael T. Heideman, Don H. Johnson, and C. Sidney Burrus. Gauss and the history of the fast Fourier transform. *Archive for History of Exact Sciences*, 34(3):265–277, 1985.
- [22] Jonathan Huang, Carlos Guestrin, and Leonidas Guibas. Fourier theoretic probabilistic inference over permutations. *J. Machine Learning Research*, 10:997–1070, 2009.
- [23] Paul Christoph Hühne. Entwurf optimaler Algorithmen zur Fouriertransformation S_{n-2} -invarianter Signale auf der symmetrischen Gruppe S_n . Diplomarbeit, Universität Bonn, 2012.
- [24] Gordon D. James and Adalbert Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Addison-Wesley, 1981.
- [25] Michael Kaminski, David G. Kirkpatrick, and Nader H. Bshouty. Addition requirements for matrix and transposed matrix products. *J. Algorithms*, 9(3):354–364, 1988.
- [26] Risi Kondor. $S_n\text{ob}$: a C++ library for fast Fourier transforms on the symmetric group, 2006. Available at <http://people.cs.uchicago.edu/~risi/SnOB/>.
- [27] Risi Kondor. A Fourier space algorithm for solving quadratic assignment problems. In *SODA*, pages 1017–1028, 2010.
- [28] Risi Kondor and Karsten M. Borgwardt. The skew spectrum of graphs. In *ICML*, pages 496–503, 2008.
- [29] Risi Kondor, Nino Shervashidze, and Karsten M. Borgwardt. The graphlet spectrum. In *ICML*, pages 529–536, 2009.

- [30] Serge Lang. *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2002.
- [31] David K. Maslen. The efficient computation of Fourier transforms on the symmetric group. *Math. Comp.*, 67(223):1121–1147, 1998.
- [32] David K. Maslen and Daniel N. Rockmore. Generalized FFTs - a survey of some recent results. In L. Finkelstein and W. Kantor, editors, *DIMACS Ser. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci., Groups and Computation, II*, volume 28, pages 183–238, 1995.
- [33] David K. Maslen and Daniel N. Rockmore. Separation of variables and the computation of Fourier transforms on finite groups, I. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(1):169–214, 1997.
- [34] Jacques Morgenstern. Note on a lower bound on the linear complexity of the fast Fourier transform. *J. ACM*, 20(2):305–306, 1973.
- [35] Deepti Pachauri, Maxwell Collins, Vikas Singh, and Risi Kondor. Incorporating domain knowledge in matching problems via harmonic analysis. In *ICML*, pages 1271–1278, 2012.
- [36] Dan N. Rockmore, Peter Kostelec, Wim Hordijk, and Peter F. Stadler. Fast Fourier transforms for fitness landscapes. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1(2):57–76, 2002.
- [37] Daniel N. Rockmore. Some applications of generalized FFTs. In *Proceedings of DIMACS Workshop in Groups and Computation*, volume 28, pages 329–370, 1995.
- [38] Bruce E. Sagan. *The Symmetric Group: Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*. Springer, 2001.
- [39] Arnold Schönhage and Volker Strassen. Schnelle Multiplikation grosser Zahlen. *Computing*, 7(3-4):281–292, 1971.
- [40] Jean-Pierre Serre. *Linear Representations of Finite Groups*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1986.
- [41] S. V. N. Vishwanathan, Nicol N. Schraudolph, Risi Kondor, and Karsten M. Borgwardt. Graph kernels. *J. Mach. Learn. Res.*, 11:1201–1242, 2010.